RODRIGO TADEU FONTES

Sistema de comunicação digital em banda limitada baseado em sincronismo caótico

São Paulo
2017

RODRIGO TADEU FONTES

Sistema de comunicação digital em banda limitada baseado em sincronismo caótico

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências

São Paulo

2017

RODRIGO TADEU FONTES

Sistema de comunicação digital em banda limitada baseado em sincronismo caótico

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências

Área de Concentração: Sistemas Eletrônicos

Orientador: Prof. Dr. Marcio Eisencraft

São Paulo

2017

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catalogação-na-publicação

Fontes, Rodrigo T.
Sistema de comunicação digital em banda limitada baseado em sincronismo caótico / R. T. Fontes -- versão corr. -- São Paulo, 2017.
143 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle.

1.Telecomunicações 2.Processamento digital de sinais 3.Caos I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle II.t.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Marcio Eisencraft, por toda confiança, paciência e dedicação. Espero que em algum momento, de alguma forma, eu possa retribuir tudo o que ele me proporcionou.

Ao Prof. Luiz H. A. Monteiro e à Prof. Maria D. S. Miranda, pelas valiosas contribuições dadas no exame de qualificação.

A todos os demais professores que direta ou indiretamente contribuíram no desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais, que sempre me motivaram e nunca permitiram que eu tivesse dúvida de que este momento se realizaria.

À minha querida esposa, Aparecida Gomes Fontes, por todo tempo que ela generosamente cedeu, me apoiando e ajudando a construir uma base sólida para o desenvolvimento e a conclusão deste trabalho.

Ao meu querido filho, Matheus Gomes Fontes, que dentro do seu mundo de brincadeiras e fantasias, sempre me renovou e me ajudou a pensar de forma diferente.

RESUMO

Nas últimas décadas, diversos sistemas de comunicação baseados em caos foram propostos. Dentre eles, vários utilizam uma função para codificar uma mensagem em um sinal caótico, que é caracterizado como um sinal de banda larga. Dado que o canal de transmissão é limitado em banda por natureza, é necessário determinar e controlar o espectro do sinal caótico transmitido por esse sistema. Nesse sentido, um sistema de comunicação em banda limitada, baseado em sincronismo caótico, foi proposto recentemente utilizando-se filtros digitais para controlar a largura de banda dos sinais transmitidos. Esses filtros, inseridos no sistema de comunicação, modificam o sistema original gerador do sinal caótico, tornando-se necessário analisar como essa inserção afeta o sincronismo caótico. Nessa tese, apresenta-se uma análise desse sistema de comunicação digital de tempo discreto, baseado em sincronismo caótico, considerando-se um canal com ruído aditivo branco gaussiano. As condições necessárias para a sincronização desse sistema são obtidas analiticamente, por meio de um teorema, para um mapa gerador de caos qualquer. O desempenho desse sistema é avaliado em termos da taxa de erro de bit, e, para melhorar seu desempenho, propõe-se filtrar o ruído fora da banda do sinal na entrada do receptor. Apesar das condições de sincronismo terem sido determinadas, a inserção dos filtros também pode modificar a natureza caótica dos sinais, e não há garantia que os sinais transmitidos sejam caóticos. Para analisar a natureza caótica dos sinais transmitidos pelo sistema de comunicação, o maior expoente de Lyapunov é obtido numericamente em função dos coeficientes dos filtros, dos parâmetros do mapa e da função de codificação da mensagem.

Palavras-chave: Comunicação digital baseada em caos. Canal em banda limitada. Ruído aditivo. Sincronismo caótico. Expoentes de Lyapunov.

ABSTRACT

In recent decades, several chaos-based communication systems have been proposed. Many of them use a function to encode a message into a chaotic signal, which is characterized as wideband. Since every transmission channel is bandlimited in nature, it is necessary to determine and to control the spectrum of the chaotic signal transmitted by this system. This way, a bandlimited chaos-based communication system was recently proposed using digital filters and chaotic synchronization. These filters, inserted in the communication system, modify the original chaotic generator system, becoming necessary to study how their insertion affect chaotic synchronization. In this work, we present an analysis of this discrete-time chaos-based digital communication system considering an additive white Gaussian noise channel. The synchronization conditions of this system is analytically obtained, through a theorem, for a generic chaos generator map. The system performance is evaluated in terms of bit error rate, and, to obtain a performance improvement, it is also proposed to filter the out-of-band noise in the receiver. Although the conditions for chaotic synchronization have been determined, the filters insertion can also modify the chaotic nature of the signals, and there is no guarantee that the transmitted signals remain chaotic. To analyze the chaotic nature of the communication system transmitted signals, the largest Lyapunov exponent is numerically accessed as a function of the filters coefficients, the parameters of the map and the message coding function.

Keywords: Chaos-based digital communication. Bandlimited channel. Additive noise. Chaotic synchronization. Lyapunov exponents.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AWGN	Additive White Gaussian Noise
BER	Bit Error Rate
BIBO	Bounded-Input, Bounded-Output
BPSK	Binary Phase-Shift Keying
DEP	Densidade Espectral de Potência
DSCI	Dependência Sensível às Condições Iniciais
FIR	Finite-duration Impulse Response
IIR	Infinity-duration Impulse Response
LIT	Linear e Invariante no Tempo
PLL	Phase-locked Loop
SCBC	Sistema de Comunicação Baseado em Caos
SNR	Signal-to-Noise Ratio
TEL	Teorema da Expansão de Laplace
TFTD	Transformada de Fourier de Tempo Discreto

LISTA DE SÍMBOLOS

n	variável independente de tempo discreto
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
K	dimensão do sistema dinâmico
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^K$	espaço dos vetores K dimensionais com elementos reais
$\mathbf{f}(\cdot)$	função determinista com domínio e contra-domínio em $\mathbb{R}^K$
$\mathbf{x}(n)$	vetor de estados do sistema dinâmico transmissor no instante n
$(\cdot)^T$	transposição de matrizes e vetores
$x_k(n)$	k-ésimo elemento do vetor $\mathbf{x}(n)$
$\mathbf{f}^n(\cdot)$	n-ésima composta de $\mathbf{f}(\cdot)$
$\mathbf{x}_0$	vetor de condições iniciais
$\mathbf{f}^0(\cdot)$	função identidade
$\mathbf{q}$	ponto fixo de $\mathbf{f}(\cdot)$
$\parallel \mathbf{x} \parallel$	norma do vetor $\mathbf{x}$
ϵ	número positivo pequeno
$N_\epsilon(\mathbf{q})$	vizinhança de raio ϵ de $\mathbf{q}$
$\mathbf{f}'(\cdot)$	primeira derivada de $\mathbf{f}(\cdot)$
$\mathbf{J}(\mathbf{q})$	matriz jacobiana calculada em $\mathbf{q}$
μ_i	autovalores de $\mathbf{J}(\cdot)$
$\mathbf{p}$	ponto periódico de $\mathbf{f}(\cdot)$
L_k	k-ésimo número de Lyapunov
h_k	k-ésimo expoente de Lyapunov
U	hiperesfera K-dimensional de raio unitário
$r_k^{(n)}$	comprimento do k-ésimo maior semieixo ortogonal do elipsoide $\mathbf{J}(\mathbf{x}(n))U$

α e β	parâmetros do mapa de Hénon
$\mathbf{y}(n)$	vetor de estados do sistema dinâmico receptor no instante n
$y_k(n)$	k-ésimo elemento do vetor $\mathbf{y}(n)$
$T\{x(n)\}$	função de transformação de $x(n)$
n_0	atraso temporal
$h(n)$	resposta ao impulso do sistema
$\delta(n)$	função impulso unitário
B_x e B_y	números positivos e finitos
$H(\omega)$	resposta em frequência do sistema, TFTD de $h(n)$
$X(\omega)$	TFTD de $x(n)$
$Y(\omega)$	TFTD de $y(n)$
ω_i	frequência de corte do filtro ideal passa-baixas
$H_i(\omega)$	resposta em frequência do filtro ideal passa-baixas
$h_i(n)$	resposta ao impulso do filtro ideal passa-baixas
$h_F(n)$	resposta ao impulso do filtro FIR
c_n	coeficientes do filtro FIR
N	número de coeficientes de $h_F(n)$
$H_d(\omega)$	resposta em frequência desejada
$h_d(n)$	resposta ao impulso desejada
$j(n)$	janela de duração finita
$j_r(n)$	janela retangular
$j_H(n)$	janela de Hamming
$j_B(n)$	janela de Blackman
$J_r(\omega)$	resposta em frequência de $j_r(n)$
$J_h(\omega)$	resposta em frequência de $j_H(n)$
$J_b(\omega)$	resposta em frequência de $j_B(n)$

t	variável independente de tempo contínuo
$s(t)$	sinal passa-banda
$S(f)$	transformada de Fourier de $s(t)$
f_c	frequência da portadora
$s_I(t)$	componente em fase de $s(t)$
$s_Q(t)$	componente em quadratura de $s(t)$
T_a	período de amostragem
$s(n)$	equivalente passa-baixas de $s(t)$, sinal transmitido pelo SCBC
$h_c(n)$	resposta ao impulso do canal de transmissão
$w(n)$	ruído adicionado no canal de transmissão
$r(n)$	sinal na entrada do receptor
$\mathcal{W}(\omega)$	DEP de $w(n)$
σ_w^2	amplitude de $w(n)$
$R_{ww}(k)$	autocorrelação de $w(n)$
$\mathbf{A}$	matriz de sincronismo do sistema dinâmico
$\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{e}(n)$	dinâmica do erro de sincronismo
$\Re\{\cdot\}$	parte real de $\{\cdot\}$
$m(t)$, $m(n)$	mensagem ou sinal a ser transmitido
$c(\cdot,\cdot)$	função de codificação
γ	parâmetro da função de codificação
$d(\cdot,\cdot)$	função de decodificação
$\widehat{m}(t)$, $\widehat{m}(n)$	mensagem ou sinal recuperado no receptor
$\mathbf{b}$	vetor de constantes
λ_i	i-ésimo autovalor da matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{E}(z)$	transformadas Z de $\mathbf{e}(n)$
z^{-1}	operador atraso unitário

$H_c(\omega)$	resposta em frequência do canal de transmissão
$\mathcal{M}(\omega)$	DEP de $m(n)$
$\widehat{\mathcal{M}}(\omega)$	DEP de $\widehat{m}(n)$
$\mathcal{S}(\omega)$	DEP de $s(n)$
$\mathcal{R}(\omega)$	DEP de $r(n)$
ω_c	frequência de corte do canal de transmissão
$H_S(\omega)$	resposta em frequência do filtro na realimentação do sistema dinâmico
$a_{i,k}$	coeficientes da matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}'$	matriz de sincronismo do sistema dinâmico com a inserção do filtro $H_S(\omega)$
λ'_i	i-ésimo autovalor da matriz $\mathbf{A}'$
b_i	sequência binária polar
N_b	número de bits
M	número de amostras
$p(n)$	pulso retangular de M amostras
$P(\omega)$	TFTD de $p(n)$
$R_{bb}(k)$	autocorrelação de b_i
ω_M	largura de banda de $m(n)$
P_m	fração da potência de $m(n)$ no intervalo $[0,\omega_M]$
S_i	saída do decisor para o i-ésimo bit transmitido
$\widehat{b}_i$	sequência binária recuperada
P_{med}	potência média de $s^2(n)$
$H_T(\omega)$	resposta em frequência do filtro sintonizador
ω_T	frequência de corte de $H_T(\omega)$
N_T	número de coeficientes de $H_T(\omega)$
$r'(n)$	sinal na saída do sintonizador
ω_{T_0}	frequência de corte do sintonizador ótimo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Um sinal caótico apresenta como características definidoras limitação em amplitude, aperidiocidade e dependência sensível com as condições iniciais (DSCI) (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1997). Apresentar DSCI significa que se o sistema que gerou o sinal for iniciado com uma condição inicial próxima, o sinal obtido pode apresentar valores completamente distintos do sinal anterior (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1997).

Em Telecomunicações e Processamento de Sinais, as pesquisas envolvendo aplicações de sinais caóticos iniciaram-se no começo da década de 1990 após o trabalho seminal (PECORA; CARROLL, 1990), que mostrou que dois sistemas idênticos que geram sinais caóticos podem ser sincronizados, de forma que a trajetória de um dos sistemas convirja para a trajetória do outro sistema.

Desde então, as possibilidades de aplicação da Teoria do Caos nessas áreas vêm aumentando, indo desde modulações analógicas e digitais até criptografia, geração de sequências pseudoaleatórias, marcas d'água, *compressive-sensing* e muitas outras. Veja, por exemplo, (KENNEDY; SETTI; ROVATTI, 2000; KENNEDY; KOLUMBAN, 2000; TSEKERIDOU et al., 2001; LAU; TSE, 2003; STAVROULAKIS, 2005; DMITRIEV et al., 2006; ILLING, 2009; EISENCRAFT; ATTUX; SUYAMA, 2013; KOLUMBAN et al., 2013; REN; BAPTISTA; GREBOGI, 2013b; REN; BAPTISTA; GREBOGI, 2013a; GRZYBOWSKI; MACAU; YONEYAMA, 2014; LI; LI; LEE, 2015; BAPTISTA et al., 2016; KADDOUM, 2016; RONTANI et al., 2016). Além disso, mostrou-se que os modelos de muitos dispositivos usados em processamento de sinais, como equalizadores cegos e redes de *Phase-locked Loops* (PLLs) podem apresentar comportamento caótico (ENDO; CHUA, 1988; ATTUX; ROMANO, 2003; HARB; HARB, 2004; TAVAZOEI; HAERI, 2009; MONTEIRO; LISBOA; EISENCRAFT, 2009).

Especificamente em Telecomunicações, algumas propostas mantém-se em torno de se transmitir uma informação ou mensagem codificada utilizando-se um sinal caótico. Nessa abordagem, cada símbolo é transmitido por uma forma de onda variável não formatada, diferentemente dos sistemas de comunicação convencionais, nos quais, para cada símbolo, atribui-se uma forma de onda pré-definida (KENNEDY; SETTI; ROVATTI, 2000; KOLUMBAN et al., 2013). Dessa forma, essa abordagem não permite utilizarem-se os receptores ótimos baseados em filtros casados (HAYKIN, 2013). Assim, esperam-se taxas de erro de símbolo mais altas, que podem eventualmente ser compensadas por maior segurança na camada física de transmissão (BAPTISTA et al., 2000; ARGYRIS et al., 2005) e pelo fato dos sinais caóticos serem de banda larga em geral, o que implica em propriedades típicas dos sistemas de espalhamento espectral (LAU; TSE, 2003) e de

ultra-largura de banda (*ultra-wideband*) (DMITRIEV et al., 2006).

Apesar de ser necessária muita pesquisa para tornar os sistemas de comunicação baseados em caos (SCBCs) efetivamente competitivos, as primeiras implementações práticas ou comerciais vêm surgindo, destacando-se, por exemplo, o trabalho de um grupo de pesquisadores do Laboratório de Comunicações Óticas da Universidade de Atenas, na Grécia. Esse grupo utilizou um enlace de 120 km de fibras óticas comerciais na região metropolitana de Atenas para transmitir na faixa de gigabits por segundo usando portadoras caóticas. Esse trabalho foi publicado no prestigiado periódico *Nature* (ARGYRIS et al., 2005; SYVRIDIS, 2009). No entanto, deve-se ressaltar que as condições do canal de transmissão utilizado eram bem controladas e equalizadas de forma não adaptativa. Caso a mesma filosofia fosse empregada em um canal em que o ruído e a distorção fossem mais pronunciados, os resultados seriam possivelmente proibitivos em termos de aplicações práticas.

De fato, uma crítica constante à grande maioria dos trabalhos nessa área é que eles descrevem o desempenho dos SCBCs considerando-se o canal de transmissão ideal. Raramente confrontam-se esses sistemas com as condições práticas dos canais de transmissão que envolvem distorção, limitação em banda, ruído aditivo e atrasos inerentes, especialmente aos canais via rádio.

Tendo essa situação em mente, ao longo dos últimos anos vêm se estudando o desempenho de SCBCs em situações de transmissão mais realistas, bem como formas de aperfeiçoá-los para atingirem comportamentos e desempenhos aceitáveis em aplicações práticas. Veja por exemplo (EISENCRAFT; ATTUX; SUYAMA, 2013; REN; BAPTISTA; GREBOGI, 2013b).

Um dos problemas mais relevantes em relação à aplicação de sinais caóticos em canais de comunicação práticos diz respeito à sua largura de banda. Muitos trabalhos citam a "banda larga" como uma propriedade dos sinais caóticos (MICHEL; FLANDRIN, 1996; LAU; TSE, 2003). No entanto, essa caracterização está muito aquém do que é necessário para a implementação de um sistema de comunicação em canais de transmissão reais. Como esses são sempre limitados em banda, torna-se necessário conhecer exatamente qual a largura de banda essencial ocupada por um sinal caótico transmitido e, preferencialmente, ser capaz de controlá-la ou adequá-la. Apesar de alguns resultados recentes nesse tema (EISENCRAFT; KATO; MONTEIRO, 2010; FELTEKH et al., 2014; FELTEKH; FOURNIER-PRUNARET; BELGHITH, 2014; COSTA; LOIOLA; EISENCRAFT, 2015), ainda existe muito a ser pesquisado.

Nesse sentido, (EISENCRAFT; FANGANIELLO; BACCALÁ, 2009) propuseram um SCBC utilizando filtros digitais de forma a limitar a banda dos sinais caóticos transmitidos. Diferentemente de trabalhos anteriores, como (WU; CHUA, 1993), foram utilizados

sistemas mestre e escravo de tempo discreto, pensando-se em modelos equivalentes passa-baixas (HAYKIN, 2013). Desde que os sistemas satisfizessem algumas condições, mostrou-se a possibilidade de sincronização completa (BOCCALETTI et al., 2002) em um canal ideal. Posteriormente, para o caso particular do mapa de Hénon (HÉNON, 1976), mostrou-se que esse sincronismo não depende dos coeficientes dos filtros utilizados e que, em determinadas condições, os sinais transmitidos são de fato caóticos (EISENCRAFT; FANGANIELLO; MONTEIRO, 2011).

Além disso, em (ABIB; EISENCRAFT, 2015), analisa-se o desempenho do sistema proposto em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; BACCALÁ, 2009), sem os filtros, em termos da taxa de erro de bit (BER - *Bit Error Rate*) para canais com ruído aditivo branco gaussiano (AWGN - *Additive White Gaussian Noise*). Em (CANDIDO; EISENCRAFT; SILVA, 2014), utiliza-se um equalizador nesse sistema para melhorar o desempenho, em termos de BER, em canais dispersivos com interferência intersimbólica.

Apesar desses avanços, para o emprego prático desses sistemas, uma série de questões fundamentais precisa ser analisada. Entre os problemas em aberto, podem ser citados:

a) O SCBC com filtros digitais foi testado utilizando-se mensagens analógicas. Mais precisamente, considera-se uma mensagem senoidal com frequência dentro da banda de passagem dos filtros utilizados. Ao utilizar-se o sistema proposto para a transmissão de bits, a mensagem a ser inserida no transmissor precisa ser formatada adequadamente de modo a manter os sinais transmitidos dentro de uma banda controlada;

b) É necessário avaliar o desempenho do SCBC em banda limitada na presença de ruído no canal de transmissão. Ao utilizar-se mensagens digitais, essa avaliação pode ser feita em termos de BER;

c) A independência do sincronismo caótico com relação aos coeficientes dos filtros utilizados foi demonstrado apenas para o mapa de Hénon. É necessário um resultado mais geral que mostre como o sincronismo é afetado pelas características do filtro para um mapa qualquer;

d) Em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; MONTEIRO, 2011) mostrou-se numericamente que, dependendo dos coeficientes dos filtros utilizados, o sinal transmitido pode deixar de ser caótico, tornando-se periódico ou mesmo divergir. Naquele estudo, assumiu-se que a mensagem não alterava significativamente o sinal caótico. Um estudo mais geral a respeito das condições necessárias sobre os coeficientes dos filtros para que os sinais transmitidos continuem caóticos ainda é necessário;

e) Cita-se como principal vantagem dos sistemas de comunicação baseados em caos um aumento na "segurança". É como se o fato de se utilizar sinais caóticos criasse um nível a mais de criptografia diretamente na camada física. Porém, o autor desconhece trabalhos que tenham de fato avaliado de forma quantitativa esse aumento na segurança.

Essa tese tem como objetivo, contribuir na solução dos problemas descritos nos itens a) a d), e, dessa forma, avançar nos estudos de viabilidade de aplicações práticas dos SCBCs.

1.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Tendo em vista o que foi discutido, a partir do sistema descrito em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; BACCALÁ, 2009), os objetivos específicos desta tese de doutoramento são:

a) Deduzir as condições analíticas gerais para ocorrer o sincronismo completo entre os sistemas mestre e escravo do SCBC, em termos dos coeficientes dos filtros inseridos, para um mapa qualquer. Note-se que, sem esse sincronismo, não é possível a recuperação da mensagem transmitida;

b) Propor um SCBC *digital*, de tempo discreto, limitado em banda, e estudar seu desempenho em canal AWGN. Esse sistema aproveita-se do fato dos sinais transmitidos serem essencialmente limitados em banda para melhorar os valores de BER utilizando-se um filtro sintonizador devidamente projetado no receptor;

c) Deduzir as condições gerais para que os sinais transmitidos sejam caóticos em função dos parâmetros dos filtros, da função de codificação da mensagem e dos parâmetros do mapa de Hénon envolvidos no sistema de comunicação.

1.2 JUSTIFICATIVA

Considerando-se as propriedades dos sinais caóticos e suas potenciais aplicações, conforme descrito no início desse capítulo (KENNEDY; SETTI; ROVATTI, 2000; KENNEDY; KOLUMBAN, 2000; TSEKERIDOU et al., 2001; LAU; TSE, 2003; STAVROULAKIS, 2005; DMITRIEV et al., 2006; ILLING, 2009; EISENCRAFT; ATTUX; SUYAMA, 2013; KOLUMBAN et al., 2013; REN; BAPTISTA; GREBOGI, 2013b; REN; BAPTISTA; GREBOGI, 2013a; GRZYBOWSKI; MACAU; YONEYAMA, 2014; LI; LI; LEE, 2015; BAPTISTA et al., 2016; KADDOUM, 2016; RONTANI et al., 2016), entende-se que o estudo e a pesquisa de sistemas de comunicação baseados em sincronismo caótico tem importância na área de Telecomunicações e Processamento Digital de Sinais. Além disso,

o estudo da condição para sincronismo caótico, e, consequentemente, a recuperação de uma mensagem transmitida em cenários realistas, constitue-se num problema relevante em si, já que muitos sistemas naturais e artificiais apresentam comportamento caótico (STROGATZ, 2001; MONTEIRO, 2011; PECORA; CARROLL, 2015; ZLOTNIK et al., 2016; BAPTISTA et al., 2016).

1.3 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES

As principais contribuições dessa tese são:

a) **Condições para o sincronismo caótico entre sistemas mestre e escravo para um SCBC limitado em banda**
Determina-se analiticamente as condições necessárias para o sincronismo caótico entre sistemas mestre-escravo, em termos dos coeficientes dos filtros, para um mapa qualquer K-dimensional gerador de sinais caóticos. Esses resultados são uma extensão daqueles publicados para o mapa de Hénon em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; MONTEIRO, 2011).

Os principais resultados associados foram publicados em (FONTES; EISENCRAFT, 2015; FONTES; EISENCRAFT, 2016b) e são mostrados no Capítulo 5.

b) **Sistema de comunicação digital em banda limitada baseado em sincronismo caótico**
Adapta-se o sistema de comunicação apresentado em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; BACCALÁ, 2009) para transmitir mensagens binárias e avalia-se esse sistema em termos de BER. Mostra-se que a inserção de um filtro sintonizador na entrada do receptor melhora a BER. Esses resultados mostram que é possível transmitir mensagens digitais usando sistemas de comunicação caóticos em canais de banda limitada e AWGN.

Os principais resultados associados foram publicados em (FONTES; EISENCRAFT, 2014; FONTES; EISENCRAFT, 2016b) e estão detalhados no Capítulo 6.

c) **Análise numérica dos expoentes de Lyapunov dos sinais transmitidos**
Em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; MONTEIRO, 2011) os expoentes de Lyapunov são determinados, em função da frequência de corte e da ordem do filtro, desconsiderando-se a mensagem codificada na variável de estado. Os resultados obtidos nessa tese consideram a mensagem como um parâmetro do sistema dinâmico e os expoentes de Lyapunov são determinados em função dos parâmetros do filtro, da função de codificação da mensagem e do mapa utilizado.

Os resultados estão detalhados no Capítulo 7 e foram parcialmente publicados em (FONTES; EISENCRAFT, 2016a).

A partir dos resultados obtidos nessa tese, foram publicados um artigo em periódico internacional [**PI**], três artigos em congressos internacionais [**CI**] e um capítulo de livro [**CL**], listados a seguir:

[**PI**] Fontes, R. T. and Eisencraft, M. A digital bandlimited chaos-based communication system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 37:374-385, Fev. 2016.

[**CI-1**] R. T. Fontes and M. Eisencraft. Noise filtering in bandlimited digital chaos-based communication systems. In: *22nd European Signal Processing Conference, EUSIPCO 2014*, Lisboa, Portugal, 2014.

[**CI-2**] R. T. Fontes and M. Eisencraft. Conditions for synchronizing a master-slave bandlimited chaos-based communication system. In: *VI International Workshop on Telecommunications, IWT2015*, Santa Rita do Sapucaí, Brasil, 2015.

[**CI-3**] R. T. Fontes and M. Eisencraft. Chaotic properties of the Hénon map with a linear filter. In: *6th International Conference on Nonlinear Science and Complexity, NSC2016*, São José dos Campos, Brasil, 2016.

[**CL**] Fanganiello, R. D., Fontes, R. T., Eisencraft, M. and Monteiro, L. H. A. Chaotic communications in bandlimited channels. In: Eisencraft, M., Attux, R. R. F. and Suyama, R., (Editors), *Chaotic Signals in Digital Communications*. CRC Press, Inc. 2013

1.4 ESTRUTURA DA TESE

Esta tese está estruturada em oito capítulos. Nos Capítulos 2 e 3 revisitam-se os principais conceitos básicos utilizados no desenvolvimento desse trabalho: sistemas dinâmicos, sinais caóticos, projeto de filtros digitais e comunicações digitais.

No Capítulo 4 revisitam-se os principais resultados da literatura associados ao SCBC estudado. Utiliza-se uma abordagem cronológica descrevendo-se os resultados publicados em (WU; CHUA, 1993; EISENCRAFT; FANGANIELLO; BACCALÁ, 2009; EISENCRAFT; FANGANIELLO; MONTEIRO, 2011).

No Capítulo 5 obtém-se analiticamente as condições necessárias para que os sistemas mestre e escravo do SCBC sincronizem completamente para um mapa qualquer.

Em seguida, no Capítulo 6 adapta-se o sistema de comunicação de tempo discreto descrito no Capítulo 4 para transmitir mensagens digitais em canais AWGN. Para melhorar o desempenho desse sistema de comunicação digital, em termos de BER, propõe-se a utilização de um filtro sintonizador (*tuning*), na entrada do receptor, para eliminar a interferência do ruído nas frequências acima da banda do sinal transmitido.

No Capítulo 7, determinam-se os expoentes de Lyapunov dos sinais transmitidos pelo sistema de comunicação, em função dos parâmetros do filtro, da função de codificação da mensagem e dos parâmetros do mapa de Hénon. A partir desses expoentes, determinam-se as regiões do espaço de parâmetros em que se geram sinais caóticos, sinais periódicos ou o sistema mestre diverge.

Por fim, no Capítulo 8, traçam-se as conclusões e sugerem-se trabalhos futuros.

2 SISTEMAS DINÂMICOS E SINAIS CAÓTICOS DE TEMPO DISCRETO

Neste capítulo revisitam-se os principais conceitos sobre sistemas dinâmicos e sinais caóticos de tempo discreto utilizados nessa tese, tendo como objetivo principal consolidar a notação utilizada e tornar o trabalho acessível a um público mais amplo. Utiliza-se como referência principal (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1997).

Na Seção 2.1 definem-se os conceitos básicos, a notação utilizada e as principais propriedades dos sistemas dinâmicos de tempo discreto. Em seguida, na Seção 2.2 definem-se os expoentes de Lyapunov, que medem a taxa média de divergência exponencial entre pontos de uma órbita, e sinais caóticos. Na Seção 2.3 apresentam-se o mapa de Hénon e suas características como gerador de sinais caóticos. Finalizando, na Seção 2.4, resumem-se as conclusões do capítulo.

2.1 SISTEMAS DINÂMICOS DE TEMPO DISCRETO

Nesta seção, as principais definições e propriedades utilizadas, relacionadas aos sistemas dinâmicos de tempo discreto são descritas.

Um sistema dinâmico de tempo discreto consiste em um conjunto de estados possíveis, em que o estado no instante $n+1$, $n \in \mathbb{N}$, representado pelo vetor coluna K-dimensional $\mathbf{x}(n+1)$, é determinado por uma regra de transição aplicada ao estado $\mathbf{x}(n)$ no instante n. A regra de transição ou *mapa* é dada por meio de uma função determinista $\mathbf{f}(\cdot) : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^K$, ou seja,

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n)). \tag{2.1}$$

Representa-se a k-ésima componente de $\mathbf{x}(n)$, para $1 \leq k \leq K$, como $x_k(n)$. Assim, $\mathbf{x}(n)= \begin{bmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \dots & x_K(n) \end{bmatrix}^T$.

De forma geral,

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{f}^n\left(\mathbf{x}_0\right), \tag{2.2}$$

sendo $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$, $\mathbf{f}^n(\cdot)$, para $n \geq 1$, a n-ésima composta de $\mathbf{f}(\cdot)$ e $\mathbf{f}^0(\cdot)$ a função identidade.

As definições que se seguem descrevem algumas das principais propriedades dos sistemas dinâmicos de tempo discreto. Por meio dessas propriedades abordam-se conceitos como estabilidade, periodicidade e dependência sensível às condições iniciais.

Definição 2.1. Seja $\mathbf{x}_0$ um ponto e $\mathbf{f}(\cdot)$ um mapa. A *órbita* ou *sinal de tempo discreto* gerado a partir de $\mathbf{x}_0$ por $\mathbf{f}(\cdot)$ é o conjunto de pontos $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_0\right), \mathbf{f}^2\left(\mathbf{x}_0\right), \dots, \mathbf{f}^n\left(\mathbf{x}_0\right), \dots\}$. O ponto inicial $\mathbf{x}_0$ da órbita é chamado de *condição inicial* da órbita.

Definição 2.2. Um ponto $\mathbf{q}$ é um *ponto fixo* do mapa $\mathbf{f}(\cdot)$ se $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$.

Definição 2.3. Seja a norma de um vetor $\begin{bmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \dots & x_K(n) \end{bmatrix}^T$ dada por $\| \mathbf{x} \| = \sqrt{x_1^2(n) + \ldots + x_K^2(n)}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^K$ e ϵ um número positivo. A *vizinhança* $N_\epsilon(\mathbf{q})$ é definida pelo conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^K : \| \mathbf{x} - \mathbf{q} \| < \epsilon\}$.

Definição 2.4. Seja $\mathbf{f}(\cdot)$ um mapa e $\mathbf{q}$ um *ponto fixo*. Se existir um $\epsilon > 0$ tal que para todo $\mathbf{v} \in N_\epsilon(\mathbf{q})$, $\lim_{m\to\infty} \mathbf{f}^m(\mathbf{v}) = \mathbf{q}$, então o ponto $\mathbf{q}$ é um *atrator*. Se existir uma vizinhança $N_\epsilon(\mathbf{q})$ tal que para cada $\mathbf{v} \in N_\epsilon(\mathbf{q})$, exceto para o próprio ponto $\mathbf{q}$, $\mathbf{v}$ seja mapeado para fora de $N_\epsilon(\mathbf{q})$, então o ponto $\mathbf{q}$ é um *repulsor*.

Considerando que os mapas utilizados nessa tese são gerados por funções com suas derivadas contínuas e definidas para todas as suas ordens, demonstra-se em (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1997), que, no caso particular de um sistema dinâmico unidimensional, para um ponto fixo q:

a) Se $|f'(q)| < 1$ o ponto q é um atrator;

b) Se $|f'(q)| > 1$ o ponto q é um repulsor.

Assim como no caso unidimensional, esse mesmo conceito pode ser utilizado em mapas com dimensões $K > 1$. Para tanto utiliza-se a matriz jacobiana, uma matriz de derivadas parciais calculadas a partir das funções do mapa.

Definição 2.5. Seja $\mathbf{f}(\cdot) = \begin{bmatrix} f_1(\cdot) & f_2(\cdot) & \dots & f_K(\cdot) \end{bmatrix}^T$ um mapa e $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^K$. A *matriz jacobiana* de $\mathbf{f}(\cdot)$ calculada em $\mathbf{q}$, é dada por

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(q_1) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_K}(q_K) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_K}{\partial x_1}(q_1) & \dots & \frac{\partial f_K}{\partial x_K}(q_K) \end{bmatrix}.$$

Mostra-se em (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1997) que a estabilidade de um ponto fixo $\mathbf{q}$ para mapas K-dimensionais pode ser determinada pelos autovalores μ_i, $1 \leq i \leq K$, de $\mathbf{J}(\mathbf{q})$, de forma que

a) Se $|\mu_i| < 1$, para $1 \leq i \leq K$, $\mathbf{q}$ é um atrator;

b) Se $|\mu_i| > 1$, para algum i, $1 \leq i \leq K$, $\mathbf{q}$ é um repulsor.

Definição 2.6. O conjunto de condições iniciais cujas órbitas convergem para um ponto fixo atrator é chamado de *bacia de atração*.

Outro conceito importante, além da estabilidade dos pontos fixos de um sistema dinâmico, está relacionado com a periodicidade de uma órbita.

Definição 2.7. Seja $\mathbf{f}(\cdot)$ um mapa. Define-se $\mathbf{p}$ como um *ponto periódico*, de período m, se $\mathbf{f}^m(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$, sendo m o menor inteiro que satisfaz essa condição. A órbita com condição inicial $\mathbf{p}$, que consiste de m pontos distintos, é chamada de *órbita periódica* de período m.

Definição 2.8. Seja $\mathbf{f}(\cdot)$ um mapa com suas derivadas contínuas e definidas para todas as suas ordens. Uma órbita $\{\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots, \mathbf{x}(n), \ldots\}$ é chamada de *assintóticamente periódica* se ela convergir para uma órbita periódica para $n \to \infty$, ou seja, existe uma órbita periódica $\{\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \ldots, \mathbf{y}(m), \mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \ldots\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \parallel \mathbf{x}(n) - \mathbf{y}(n) \parallel = 0$. Uma órbita é *aperiódica* se não for assintóticamente periódica.

Assim como a estabilidade e a periodicidade, a dependência sensível às condições iniciais (DSCI) também é outro conceito importante para caracterizar o comportamento caótico de um sistema dinâmico.

Definição 2.9. Seja $\mathbf{f}(\cdot)$ um mapa. Um ponto $\mathbf{x}_0$ apresenta DSCI se existir uma distância $d > 0$, tal que qualquer ponto da vizinhança $N_\epsilon(\mathbf{x}_0)$ contém um ponto $\mathbf{x}$ em que $\parallel \mathbf{f}^m(\mathbf{x}) - \mathbf{f}^m(\mathbf{x}_0) \parallel \geq d$, sendo m um inteiro não negativo qualquer.

Nas Definições 2.1-2.9 foram descritas algumas das principais propriedades dos sistemas dinâmicos de tempo discreto utilizadas nessa tese. A partir dessas propriedades definem-se, na próxima seção, as características de um sinal caótico.

2.2 EXPOENTES DE LYAPUNOV E SINAIS CAÓTICOS

Uma das características importantes associadas ao conceito de caos é a presença de DSCI. Os expoentes de Lyapunov permitem quantificar essa dependência para uma órbita qualquer.

Uma órbita caótica ou sinal caótico apresenta continuamente o comportamento instável de um ponto numa vizinhança de um repulsor, mas não converge para um ponto fixo ou um ponto periódico ao longo das iterações no tempo.

O *número de Lyapunov* mede a taxa de divergência média, entre pontos próximos em uma vizinhança, a cada iteração ao longo da órbita. O *expoente de Lyapunov* é o logaritmo natural do número de Lyapunov.

Com o objetivo de facilitar o entendimento do conceito de expoente Lyapunov na determinação de um sinal caótico, opta-se nessa tese por descrever esse conceito dividindo-se os sistemas em unidimensionais e K-dimensionais.

2.2.1 Caso unidimensional

Seja q um ponto fixo de um mapa $f(\cdot)$ e $f'(q) = a > 1$. A órbita de cada condição inicial x_0, na vizinhança de q, separa-se de q a uma taxa multiplicativa de aproximadamente

a por iteração. Isto pode ser visto pela expansão em série de Taylor de $f(x_0)$ em torno de q:

$$f(x_0) \approx f(q)+f'(q)(x_0-q) \Rightarrow f(x_0)-f(q) \approx f'(q)(x_0-q) \Rightarrow |f(x_0)-q| \approx a|x_0-q|. \quad (2.3)$$

Dessa forma, a distância entre $f^n(x_0)$ e $f^n(q) = q$ é aumentada pelo fator $a > 1$ a cada iteração de $f(\cdot)$.

Para um ponto periódico de período m, observa-se a derivada da m-ésima iteração do mapa, que, pela regra da cadeia, é o produto das derivadas dos m pontos da órbita. Assumindo que o produto dessas derivadas seja $A > 1$, a órbita de cada ponto x_0, na vizinhança de p, separa-se de p a uma taxa multiplicativa de aproximadamente A após m iterações, ou, a uma taxa média multiplicativa de $A^{\frac{1}{m}}$ por iteração.

O número de Lyapunov permite obter as taxas médias multiplicativas para o caso em que os pontos não são necessariamente periódicos.

Definição 2.10. Seja $f(\cdot)$ um mapa com suas derivadas contínuas na reta real $\mathbb{R}$. O *número de Lyapunov*, L, da órbita $\{x(0), x(1), x(2), \ldots\}$ é definido como

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(|f'(x(0))| \ldots |f'(x(n-1))|\right)^{\frac{1}{n}},$$

se o limite existir. O *expoente de Lyapunov* é definido por $h = \ln L$, se $L \neq 0$.

Em particular, para um ponto fixo q de um mapa unidimensional $f(\cdot)$, $L = |f'(q)|$ e $h = \ln|f'(q)|$. Se p é um ponto periódico de período m

$$h = \frac{\ln|f'(p)| + \ln|f'(x(1))| + \cdots + \ln|f'(x(m-1))|}{m}. \quad (2.4)$$

O resultado mostrado na equação (2.4) é válido quando p não é um ponto periódico, podendo o conceito de Lyapunov ser aplicado para órbitas não periódicas.

2.2.2 Caso K-dimensional

Os conceitos de número e de expoente de Lyapunov podem ser estendidos para mapas K-dimensionais. Nessas dimensões o comportamento dinâmico pode variar de acordo com a direção. Pontos próximos podem separar-se em uma direção e serem atraídos em outra.

De forma geral, para um mapa $\mathbf{f}(\cdot)$ com suas derivadas contínuas em $\mathbb{R}^K$, cada órbita tem K números de Lyapunov, que medem as taxas de separação ao longo de K direções ortogonais.

Essas direções são determinadas pelas dinâmicas do mapa. A primeira direção é a que apresenta o maior valor de separação entre os pontos. A segunda é aquela que tem a maior separação entre todas as direções perpendiculares à primeira. A terceira direção é a maior entre aquelas perpendiculares às duas primeiras e assim por diante.

Definição 2.11. Seja $\mathbf{f}(\cdot)$ um mapa com suas derivadas contínuas em $\mathbb{R}^K$, $\mathbf{J}(\mathbf{x}(n))$ a matriz Jacobiana calculada em $\mathbf{f}^n(\mathbf{x}_0)$ e U a hiperesfera de raio unitário em $\mathbb{R}^K$, centrada em $\mathbf{x_0}$. Sendo $k = 1, 2, \ldots, K$, define-se $r_k^{(n)}$ como o comprimento do k-ésimo maior semieixo ortogonal do elipsoide $\mathbf{J}(\mathbf{x}(n))U$ gerado por uma órbita a partir das condições iniciais $\mathbf{x}_0$. Dessa forma, $r_k^{(n)}$ mede a contração ou a expansão da órbita de $\mathbf{x}_0$. O *k-ésimo número de Lyapunov*, para $\mathbf{x}_0$, é definido por

$$L_k = \lim_{n\to\infty} r_k^{(n)\,\frac{1}{n}},$$

se o limite existir. O *k-ésimo expoente de Lyapunov* para $\mathbf{x}_0$ é

$$h_k = \ln L_k.$$

Note que por definição, $L_1 \geq L_2 \geq \ldots \geq L_K$ e $h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_K$.

Os expoentes de Lyapunov permitem uma quantificação da DSCI, conforme o teorema a seguir (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1997).

Teorema 2.1. Suponha que uma órbita com condição inicial $\mathbf{x}_0$ tenha maior número de Lyapunov L_1 e maior expoente de Lyapunov h_1. Essa órbita apresentará DSCI se $L_1 > 1$ ou $h_1 > 0$.

Dessa forma, utilizando-se os expoentes de Lyapunov, pode-se definir uma órbita caótica gerada por um mapa.

Definição 2.12. Seja $\mathbf{f}(\cdot)$ um mapa em $\mathbb{R}^K$ e $\{\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \ldots\}$ uma órbita limitada em amplitude do mapa $\mathbf{f}(\cdot)$. Essa órbita é caótica se (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1997)

a) ela não for assintóticamente periódica, e

b) $h_1 > 0$.

De acordo com a Definição 2.12 e os conceitos sobre sistemas dinâmicos apresentados até aqui, pode-se dizer que os sinais caóticos têm como principais características definidoras:

a) serem limitados em amplitude;

b) serem aperiódicos;

c) apresentarem DSCI.

Pode-se mostrar que uma órbita com $h_1 > 0$ somente pode convergir para uma órbita periódica se ela for repulsora (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1997) e, portanto, pouco provável de ser obtida em uma simulação computacional. Assim, para os estudos desenvolvidos nessa tese, considera-se que $h_1 > 0$ é suficiente para um sinal de tempo discreto, limitado em amplitude, ser caótico.

2.2.3 Método numérico para o cálculo dos expoentes de Lyapunov

Em teoria, para calcular os expoentes de Lyapunov obtém-se a matriz $\mathbf{J}(\mathbf{x}(n))\mathbf{J}^T(\mathbf{x}(n))$ e por meio dos seus autovalores, determinam-se os comprimentos dos eixos ortogonais.

Como as direções desses eixos estão expandindo e contraindo, os autovalores de $\mathbf{J}(\mathbf{x}(n))\mathbf{J}^T(\mathbf{x}(n))$ são formados por números muito grandes e muito pequenos. Devido à limitação de dígitos com que um sistema computacional consegue armazenar um número, o cálculo dos expoentes de Lyapunov por meio dos autovalores de $\mathbf{J}(\mathbf{x}(n))\mathbf{J}^T(\mathbf{x}(n))$ torna-se problemático com o aumento de n.

Para contornar esse problema computacional, é utilizado um modelo indireto, chamado de método do mapa tangente, que segue a variação do elipsoide conforme o mapa é iterado no tempo.

De forma genérica, aplicando-se a regra da cadeia

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}(n))U = \mathbf{J}(\mathbf{x}(n-1))\ldots\mathbf{J}(\mathbf{x}(0))U \tag{2.5}$$

pode-se calcular o comprimento dos eixos ortogonais a cada iteração.

Os expoentes de Lyapunov podem ser obtidos por meio dos seguintes passos (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1997):

1. Escolhe-se uma base ortonormal $\{\mathbf{w}_1(0), \ldots, \mathbf{w}_K(0)\}$ e calculam-se os vetores

$$\mathbf{z}_1(0) = \mathbf{J}(\mathbf{x}(0))\mathbf{w}_1(0), \ldots, \mathbf{z}_K(0) = \mathbf{J}(\mathbf{x}(0))\mathbf{w}_K(0). \tag{2.6}$$

   Esses vetores pertencem à nova elipse $\mathbf{J}(\mathbf{x}(0))U$ mas não são necessariamente ortogonais.

2. Aplica-se o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1997) nos vetores $\mathbf{z}_i$, $1 \leq i \leq K$, resultando

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_1(1) &= \mathbf{z}_1(0), \\
\mathbf{y}_2(1) &= \mathbf{z}_2(0) - \tfrac{\mathbf{z}_2(0)\cdot\mathbf{y}_1(1)}{\|\mathbf{y}_1(1)\|^2}\mathbf{y}_1(1), \\
\mathbf{y}_3(1) &= \mathbf{z}_3(0) - \tfrac{\mathbf{z}_3(0)\cdot\mathbf{y}_1(1)}{\|\mathbf{y}_1(1)\|^2}\mathbf{y}_1(1) - \tfrac{\mathbf{z}_3(0)\cdot\mathbf{y}_2(1)}{\|\mathbf{y}_2(1)\|^2}\mathbf{y}_2(1), \\
&\vdots \\
\mathbf{y}_K(1) &= \mathbf{z}_K(0) - \tfrac{\mathbf{z}_K(0)\cdot\mathbf{y}_1(1)}{\|\mathbf{y}_1(1)\|^2} - \ldots - \tfrac{\mathbf{z}_K(0)\cdot\mathbf{y}_{K-1}(1)}{\|\mathbf{y}_{K-1}(1)\|^2}\mathbf{y}_{K-1}(1),
\end{aligned} \tag{2.7}$$

   em que "$\cdot$" é o produto escalar.

3. Determina-se uma nova base ortonormal para o cálculo dos expoentes de Lyapunov da próxima iteração como

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1(1) &= \tfrac{\mathbf{y}_1(1)}{\|\mathbf{y}_1(1)\|}, \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_K(1) &= \tfrac{\mathbf{y}_K(1)}{\|\mathbf{y}_K(1)\|}; \end{aligned} \tag{2.8}$$

4. Aplica-se a matriz jacobiana no próximo ponto da órbita, $\mathbf{x}(1)$, reortogonaliza-se o conjunto

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}(1))\mathbf{w}_1(1), \ldots, \mathbf{J}(\mathbf{x}(1))\mathbf{w}_K(1) \tag{2.9}$$

e produz-se uma nova base ortonormal

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1(2) &= \tfrac{\mathbf{y}_1(2)}{\|\mathbf{y}_1(2)\|}, \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_K(2) &= \tfrac{\mathbf{y}_K(2)}{\|\mathbf{y}_K(2)\|}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Repetindo-se os passos 1, 2, 3 e 4 n vezes, para $2 \leq j \leq n$,

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}(j))\mathbf{w}_1(j), \ldots, \mathbf{J}(\mathbf{x}(j))\mathbf{w}_K(j) \tag{2.11}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1(j+1) &= \tfrac{\mathbf{y}_1(j+1)}{\|\mathbf{y}_1(j+1)\|}, \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_K(j+1) &= \tfrac{\mathbf{y}_K(j+1)}{\|\mathbf{y}_K(j+1)\|}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

obtém-se o conjunto final de vetores que equivalem aos eixos do elipsoide $\mathbf{J}(\mathbf{x}(n))U$.

5. O expoente de Lyapunov na k-ésima direção, $1 \leq k \leq K$, é dado por

$$h_k = \frac{\ln\|\mathbf{y}_k(1)\| + \ldots + \ln\|\mathbf{y}_k(n)\|}{n}. \tag{2.13}$$

De forma resumida, a cada iteração do mapa, os raios da esfera unitária, que medem as distâncias dos eixos ortogonais, são obtidos por meio da matriz jacobiana do mapa, calculados no ponto de iteração, aplicando-se o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Esse algoritmo apresentado em (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1997) elimina o problema encontrado em cálculos numéricos computacionais envolvendo números de diferentes grandezas.

As funções mostradas a seguir, em forma de programa Matlab, implementam o método numérico descrito nessa seção.

```
% Função para cálculo dos expoentes de Lyapunov
```

```
% Jf - Jacobiano do sistema
% D - dimensão do sistema
% Npontos - número de pontos da órbita

function[h] = Lyapunov(Jf,D,Npontos)

w = eye(D); % Base ortonormal inicial

z = Jf(:,1:D)*w; % Projeção do Jacobiano na base ortonormal

% Ortogonalização de Gram-Schmidt

[w,raios] = grams(z); % Função que retorna a base ortonormal e o
comprimento dos semieixos (raios)

% Cálculo das distâncias a cada iteração

for ind = 1:Npontos-1,
z = Jf(:,D*ind+1:D*ind+D)*w;
[w,raios] = grams(z);
r(:,ind+1) = diag(raios);
end

% Cálculo dos expoentes de Lyapunov

h = sum(log(r'),1)/Npontos;
```

Na próxima seção, as propriedades de sinais caóticos definidas até aqui são ilustradas para o mapa de Hénon.

2.3 O MAPA DE HÉNON

Um exemplo de gerador de sinais caóticos é o mapa de (HÉNON, 1976), definido por

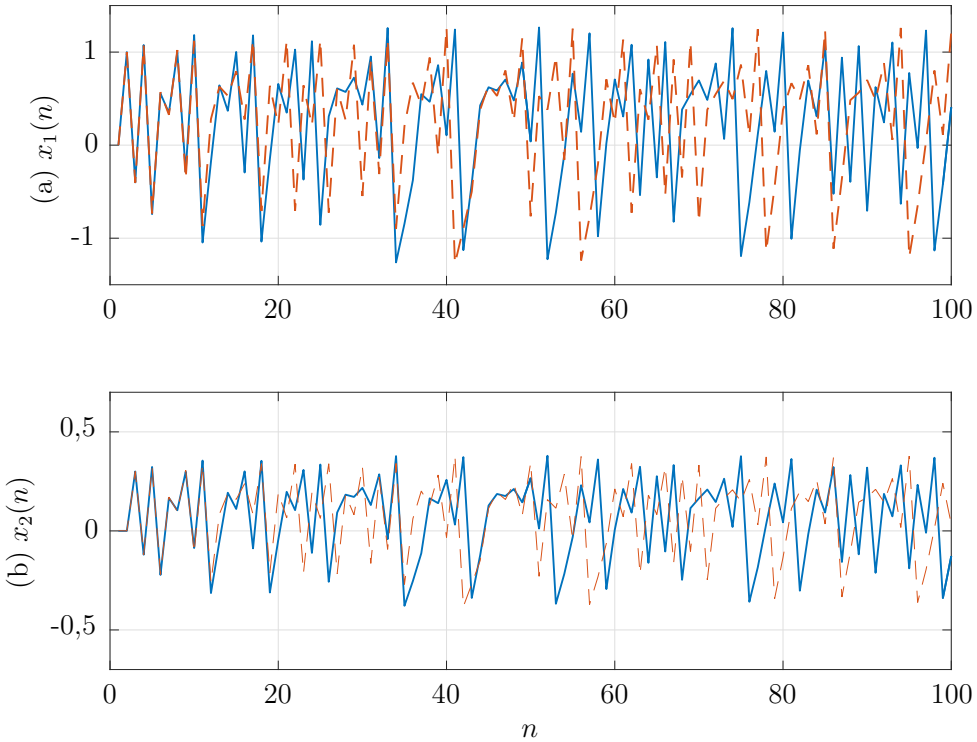
$$\mathbf{x}(n+1) = \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha x_1^2(n) + x_2(n) \\ \beta x_1(n) \end{bmatrix}, \tag{2.14}$$

sendo $\{\alpha,\beta\} \subset \mathbb{R}$ parâmetros.

O mapa definido em (2.14) é utilizado nos sistemas mestre e escravo do SCBC dessa tese. A mensagem transmitida pelo sistema de comunicação é codificada na variável de estado desse mapa.

Na Figura 1 mostram-se trechos dos sinais $x_1(n)$ e $x_2(n)$, gerados a partir das iterações do mapa de Hénon para $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0{,}000 & 0{,}000 \end{bmatrix}^T$ (linha cheia) e $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0{,}000 & 0{,}001 \end{bmatrix}^T$ (linha tracejada), $\alpha = 1{,}4$ e $\beta = 0{,}3$. Nos gráficos pode-se notar a característica aperíodica e a DSCI desses sinais produzidos pelo mapa. A partir de aproximadamente $n = 20$ as órbitas já assumem valores bastante diferentes.

Figura 1 – Trechos de (a) $x_1(n)$ e (b) $x_2(n)$ obtidos a partir das iterações do mapa de Hénon (2.14) para $\mathbf{x}(0) = [0{,}000\ 0{,}000]^T$ (linha cheia) e $\mathbf{x}(0) = [0{,}000\ 0{,}001]^T$ (linha tracejada), $\alpha = 1{,}4$ e $\beta = 0{,}3$.

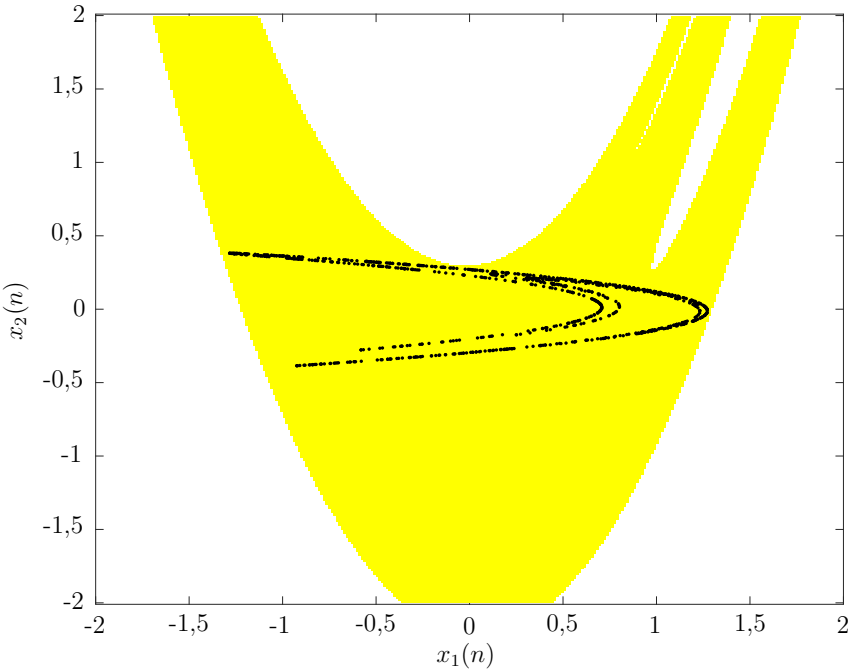


Fonte: Autor.

Na Figura 2 é mostrado o atrator caótico no espaço das variáveis de estado e, destacada na cor amarela, sua bacia de atração. Para condições iniciais fora dessa área em destaque, as órbitas de $x_1(n)$ e $x_2(n)$ divergem.

Aplicando-se o método descrito na Seção 2.2.3, para o mapa de Hénon definido em (2.14) com $\alpha = 1{,}4$ e $\beta = 0{,}3$, obtém-se os expoentes de Lyapunov $h_1 \approx 0{,}42$ e $h_2 \approx -1{,}62$ (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1997). Para esses parâmetros de α e β, a órbita do mapa de Hénon gera um sinal caótico de tempo discreto dado que $h_1 > 0$.

Figura 2 – Atrator do mapa de Hénon, em preto, para $\alpha = 1{,}4$ e $\beta = 0{,}3$. A área amarela em destaque representa a bacia de atração do mapa.



Fonte: Autor.

2.4 CONCLUSÕES

Nesse capítulo foram definidos os principais conceitos e notações utilizados nos demais capítulos dessa tese, incluindo tópicos de sistemas dinâmicos de tempo discreto, sinais caóticos e o cálculo dos expoentes de Lyapunov.

Inicialmente, na Seção 2.1, definiu-se um sistema dinâmico de tempo discreto e suas propriedades. Em seguida, na Seção 2.2, definem-se os sinais caóticos, os expoentes de Lyapunov e o seu papel na caracterização dos sinais caóticos, além de um método computacional para o cálculo dos expoentes de Lyapunov.

Para ilustrar os conceitos apresentados, mostram-se, na Seção 2.3, exemplos de sinais caóticos gerados com o mapa de Hénon, seus expoentes de Lyapunov e suas características de aperidiocidade e DSCI.

Os conceitos aqui abordados, são necessários para o entendimento do SCBC analisado nesse trabalho, e o desenvolvimento dos resultados obtidos nos capítulos subsequentes.

3 CONCEITOS DE PROCESSAMENTO DE SINAIS E COMUNICAÇÕES DIGITAIS

Neste capítulo revisitam-se conceitos básicos sobre processamento de sinais e comunicações digitais utilizados nessa tese.

Na Seção 3.1 define-se a notação utilizada para sistemas lineares de tempo discreto e filtros digitais. Em seguida, na Seção 3.2, apresenta-se o modelo equivalente passa-baixas de tempo discreto de um sinal passa-bandas.

Na Seção 3.3 descrevem-se as propriedades do canal de transmissão considerado nesse trabalho. Por fim, na Seção 3.4 apresentam-se as conclusões do capítulo. Utilizam-se como referências principais (OPPENHEIM; SCHAFER, 2009; HAYKIN, 2013).

3.1 SISTEMAS LINEARES DE TEMPO DISCRETO E FILTROS DIGITAIS

Um sistema é linear se satisfizer o princípio da superposição. Sendo $y_1(n)$ e $y_2(n)$ as saídas de um sistema quando $x_1(n)$ e $x_2(n)$ são, respectivamente, suas entradas, para $n \in \mathbb{N}$, esse sistema é linear se e somente se

$$T\{x_1(n) + x_2(n)\} = T\{x_1(n)\} + T\{x_2(n)\} = y_1(n) + y_2(n) \tag{3.1}$$

e

$$T\{ax(n)\} = aT\{x(n)\} = ay(n), \tag{3.2}$$

em que a é uma constante arbitraria, e $T\{x(n)\}$ é uma função de transformação de $x(n)$.

A equação (3.1) é chamada de propriedade da aditividade e (3.2) de propriedade da proporcionalidade (homogeneidade). Essas duas propriedades combinadas definem o princípio da superposição, de forma que

$$T\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = aT\{x_1(n)\} + bT\{x_2(n)\} = ay_1(n) + by_2(n), \tag{3.3}$$

para a e b constantes quaisquer.

Um sistema invariante no tempo é um sistema no qual um deslocamento ou atraso temporal na sequência de entrada causa o mesmo atraso na sequência de saída desse sistema. Dessa forma, para cada escolha n_0,

$$T\{x(n - n_0)\} = y(n - n_0). \tag{3.4}$$

Pode-se mostrar que um sistema linear e invariante no tempo (LIT), de tempo discreto, com entrada $x(n)$ e saída $y(n)$, é completamente caracterizado pela relação

$$y(n) = h(n) * x(n) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k), \tag{3.5}$$

em que $h(n)$ é a *resposta ao impulso do sistema* e " $*$ " a operação de convolução. A resposta $h(n)$ é a saída do sistema quando a entrada é o impulso

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} . \tag{3.6}$$

Um sinal de entrada $x(n)$ é limitado em amplitude se existe um valor fixo, positivo e finito B_x, tal que

$$|x(n)| \leq B_x < \infty, \tag{3.7}$$

para todo n.

Um sistema é estável no sentido entrada limitada, saída limitada (BIBO - *Bounded-Input, Bounded-Output*) se e somente se cada sequência de entrada limitada em amplitude gerar uma sequência limitada em amplitude na saída.

Assim, um sistema que tem como entrada o sinal definido em (3.7), é BIBO estável se existe um valor fixo, positivo e finito B_y, tal que

$$|y(n)| \leq B_y < \infty, \tag{3.8}$$

para todo n.

Pode-se mostrar, a partir da relação (3.5), que um sistema LIT é BIBO estável se e somente se

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty. \tag{3.9}$$

Um sistema é *causal* se, para cada escolha n_0, a sequência de saída $y(n_0)$ depende unicamente dos valores de entrada $x(n)$ para $n \leq n_0$. Pode-se mostrar que, um sistema LIT é causal se $h(n) = 0$ para $n < 0$.

A Transformada de Fourier de Tempo Discreto (TFTD) da resposta ao impulso, $h(n)$, de um sistema LIT estável, é definida como

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j\omega n}. \tag{3.10}$$

Essa é a *resposta em frequência* do sistema.

Aplicando-se a TFTD em um sistema LIT estável, como descrito em (3.5), obtém-se a relação do sistema no domínio da frequência, descrita por (OPPENHEIM; SCHAFER, 2009)

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega), \tag{3.11}$$

sendo $X(\omega)$ a TFTD de $x(n)$ e $Y(\omega)$ a TFTD de $y(n)$.

Os filtros de tempo discreto são sistemas LIT projetados para apresentarem determinadas respostas em frequência de acordo com a necessidade de cada aplicação.

O filtro ideal passa-baixas, com *frequência de corte* $0 \leq \omega_i \leq \pi$, é definido pela resposta em frequência

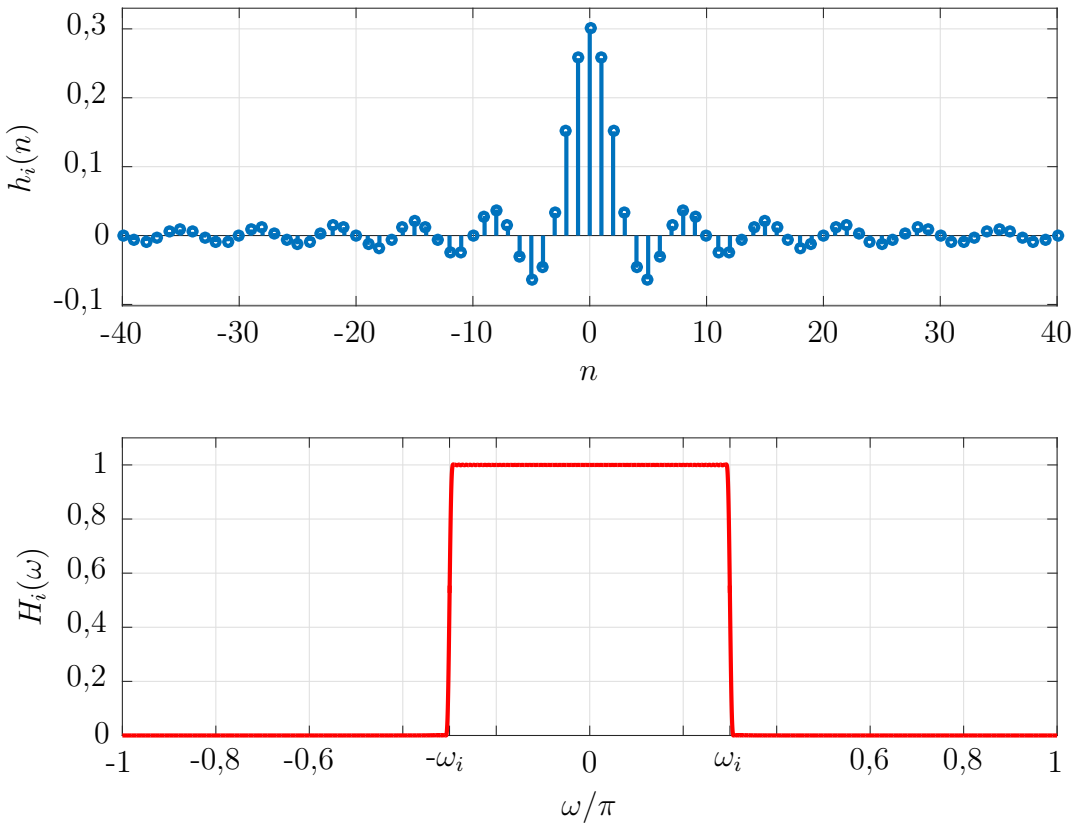
$$H_i(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_i, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{3.12}$$

e sua correspondente resposta ao impulso pode ser obtida pela TFTD inversa de (3.12) (OPPENHEIM; SCHAFER, 2009)

$$h_i(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_i(\omega)e^{j\omega n}d\omega = \begin{cases} \frac{\text{sen}(\omega_i n)}{\pi n}, & n \neq 0, \\ \frac{\omega_i}{\pi}, & n = 0 \end{cases} . \tag{3.13}$$

A frequência de corte determina quais as frequências, presentes na entrada do filtro, serão atenuadas ou suprimidas na saída, conforme (3.11). Na Figura 3, mostram-se um intervalo de $h_i(n)$ e sua resposta em frequência, $H_i(\omega)$, para um filtro ideal com frequência de corte $\omega_i = 0{,}3\pi$. Como exemplo, o sistema LIT definido pela resposta ao impulso (3.13), de um filtro passa-baixas ideal, é não-causal.

Figura 3 – Gráficos da resposta ao impulso e da resposta em frequência de um filtro ideal passa-baixas com frequência de corte $\omega_i = 0{,}3\pi$.



Fonte: Autor.

Nessa tese, em particular, utilizam-se filtros de resposta ao impulso de duração finita (FIR - *Finite-duration Impulse Response*) causais. Os filtros FIR têm resposta ao

impulso, $h_F(n)$, com um número finito de valores não nulos, ou seja

$$h_F(n) = \begin{cases} c_n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \tag{3.14}$$

sendo N o *comprimento* ou número de coeficientes e $N-1$ a *ordem* do filtro. Note que um filtro FIR é sempre BIBO estável pois $h_F(n)$ satisfaz (3.9).

Um método simples para se projetar um filtro FIR é o método do *janelamento*. Nesse método, define-se uma resposta em frequência desejada, representada por $H_d(\omega)$. Sua resposta ao impulso $h_d(n)$ é dada pela TFTD inversa de $H_d(\omega)$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega)e^{j\omega n}d\omega. \tag{3.15}$$

A resposta ao impulso desejada, $h_d(n)$, nesse trabalho, deve ter a forma (3.14) e ser uma aproximação da resposta ao impulso do filtro passa-baixas ideal (3.13). Para isso, ela pode ser obtida por meio de truncamento e atraso de $h_i(n)$. Considerando-se incialmente N um número inteiro ímpar

$$h_d(n) = \begin{cases} h_i\left(n - \frac{(N-1)}{2}\right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \tag{3.16}$$

O atraso de $\frac{(N-1)}{2}$ amostras, mostrado em (3.16) para obtenção de $h_d(n)$, faz com que a resposta em frequência $H_d(\omega)$ tenha fase linear, ou seja (OPPENHEIM; SCHAFER, 2009)

$$H_d(\omega) = |H_d(\omega)|e^{-j\omega\frac{(N-1)}{2}}, \tag{3.17}$$

de modo que, somente as amplitudes das componentes de $X(\omega)$ são modificadas pelo filtro. Além disso, a saída do sistema está atrasada em relação à entrada de um valor fixo $\frac{(N-1)}{2}$.

O truncamento mostrado em (3.16) produz, na resposta em frequência $H_d(\omega)$, uma oscilação do valor de $H_d(\omega)$ em torno do valor desejado na faixa de passagem do filtro (OPPENHEIM; SCHAFER, 2009). Isso ocorre devido à descontinuidade de $H_i(\omega)$ em $\omega = |\omega_i|$.

Para minimizar esse fenômeno, multiplica-se a resposta desejada $h_d(n)$ por uma *janela* de duração finita, $j(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, de forma que a resposta ao impulso do filtro FIR, $h_F(n)$, é obtida pelo produto (OPPENHEIM; SCHAFER, 2009)

$$h_F(n) = h_d(n)j(n). \tag{3.18}$$

Em resumo, projetando-se $H_d(\omega)$ e $h_d(n)$ e definindo-se uma janela $j(n)$, os coeficientes do filtro FIR são dados por

$$h_F(n) = \begin{cases} h_d(n)j(n), & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \tag{3.19}$$

ou, conforme (3.14)

$$c_n = \begin{cases} h_d(n)j(n), & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \tag{3.20}$$

Assim, utilizando-se (3.20), pode-se reescrever a relação (3.5), de entrada e saída de um sistema atuando como um filtro FIR por

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k x(n-k). \tag{3.21}$$

3.1.1 Janelas utilizadas

Uma forma de truncamento trivial é a *janela retangular*, $j_r(n)$, definida por

$$j_r(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \tag{3.22}$$

Nesse caso,

$$h_F(n) = h_d(n)j_r(n) = h_d(n). \tag{3.23}$$

Optou-se nessa tese por utilizar-se as janelas de Hamming e Blackman nos projetos de filtros FIR, dado que as mesmas são comumente encontradas na literatura (OPPENHEIM; SCHAFER, 2009).

A janela de Hamming, $j_H(n)$, de comprimento N, é definida por (OPPENHEIM; SCHAFER, 2009)

$$j_H(n) = \begin{cases} 0{,}54 - 0{,}46\cos(\frac{2\pi n}{N-1}), & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \tag{3.24}$$

enquanto a janela de Blackman, $j_B(n)$, de comprimento N, é dada por (OPPENHEIM; SCHAFER, 2009)

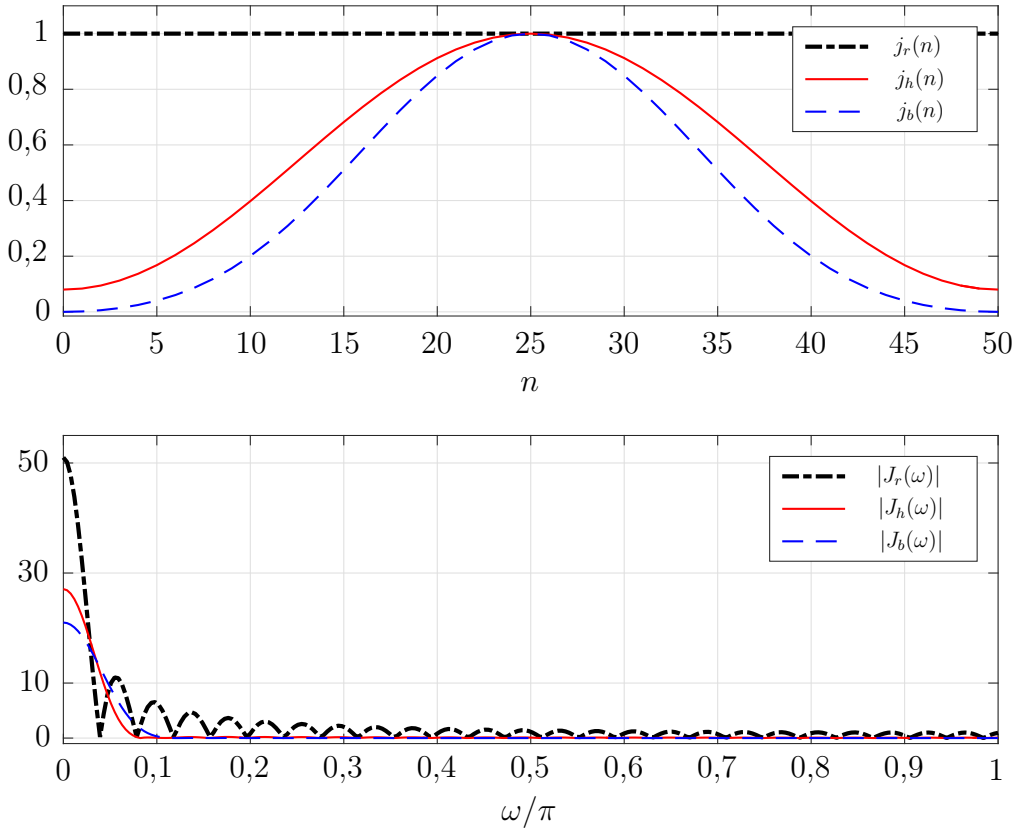
$$j_B(n) = \begin{cases} 0{,}42 - 0{,}5\cos(\frac{2\pi n}{N-1}) + 0{,}08\cos(\frac{4\pi n}{N-1}), & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \tag{3.25}$$

Na Figura 4, mostram-se as janelas definidas em (3.22), (3.24) e (3.25) nos domínios do tempo e da frequência para $N = 51$.

Na Figura 5 mostram-se as respostas ao impulso e o módulo das respostas em frequência de filtros FIR, com frequência de corte $\omega = 0{,}3\pi$ e comprimentos $N = 11$ e $N = 101$, projetados pelo método do janelamento utilizando-se a janela de Blackman. Nota-se que o filtro de maior comprimento gera uma resposta em frequência mais abrupta em torno da frequência de corte desejada.

Na Figura 6 mostram-se os módulos das respostas em frequência, para filtros FIR projetados com as janelas de Hamming e de Blackman, para uma frequência de corte $\omega = 0{,}5\pi$, em função do comprimento N do filtro.

Figura 4 – Gráficos nos domínios do tempo e da frequência das janelas definidas em (3.22), (3.24) e (3.25), para $N = 51$.



Fonte: Autor.

3.1.2 Exemplo: Filtragem de um sinal caótico

Como exemplo, considere um filtro FIR com $N = 7$ coeficientes e frequência de corte $\omega = 0{,}3\pi$. A resposta ao impulso desejada, $h_d(n)$, é obtida de (3.16) e (3.13),

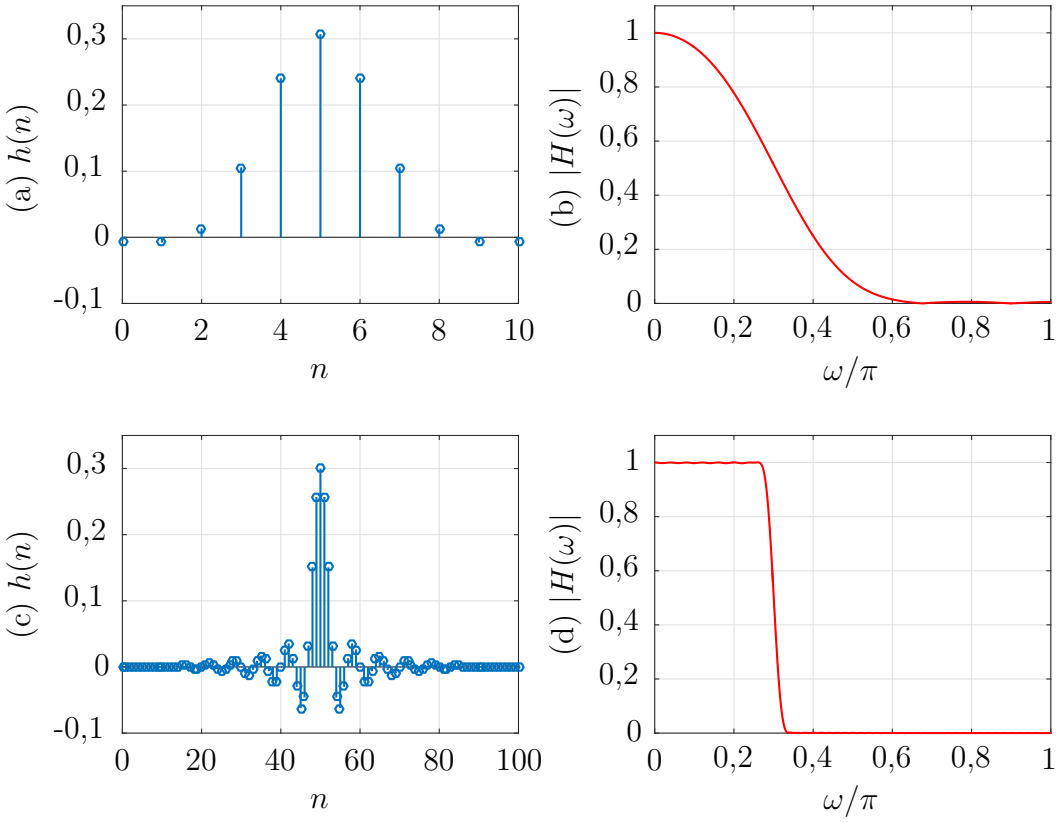
$$h_d(n) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(\omega_i(n-3))}{\pi(n-3)}, & 0 \leq n \leq 6, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} . \tag{3.26}$$

Os coeficientes dos filtros resultantes do janelamento por janelas de Hamming e de Blackman podem ser obtidos usando (3.20), (3.24) e (3.25). Os resultados estão listados na Tabela 1.

Como sinal de entrada, $x(n)$, utiliza-se a variável de estado $x_1(n)$ do mapa de Hénon descrito em (2.14), para $\alpha = 1{,}4$, $\beta = 0{,}3$ e $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.

A saída do sistema, $y(n)$, a uma entrada $x(n)$ não nula para $n \geq 0$, é obtida por meio de (3.21). Na Figura 7 são mostrados, nos domínios do tempo e da frequência, os sinais $x(n)$, $y(n)$ e a resposta ao impulso, $h(n)$, do filtro FIR projetado com uma janela retangular.

Figura 5 – Gráficos das respostas ao impulso e do módulo das respostas em frequência de um filtro FIR com frequência de corte $\omega = 0{,}3\pi$ e: $N = 11$ (a e b) e $N = 101$ (c e d).



Fonte: Autor.

Pode-se notar, nos gráficos da Figura 7, que o sinal $y(n)$ tem variações menos abruptas do que $x(n)$, resultado da filtragem aplicada. Embora $x(n)$ seja caótico, dado que utilizou-se o mapa descrito em (2.14), nada pode se afirmar sobre a natureza caótica de $y(n)$.

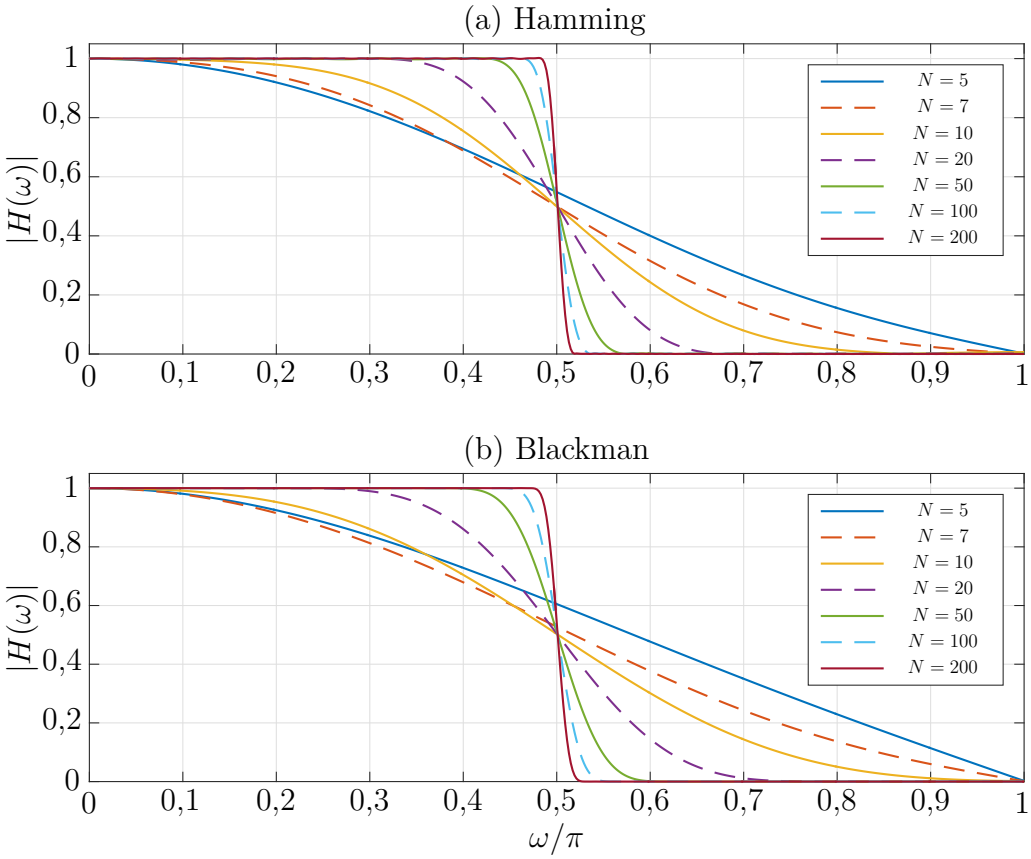
3.2 EQUIVALENTE PASSA-BAIXAS DE TEMPO DISCRETO

Pode-se modelar sinais passa-bandas de tempo contínuo utilizando sinais equivalentes passa-baixas de tempo discreto.

Um sinal passa-banda, $s(t)$, tem seu espectro de frequências na forma representada na Figura 8 (HAYKIN, 2013). Assume-se que a Transformada de Fourier, $S(f)$, de $s(t)$ é confinada em uma banda de frequências com tamanho total $2W$ e centrada em uma frequência $\pm f_c$ (HAYKIN, 2013).

A frequência f_c é chamada de portadora e, em sistemas de comunicações práticos, a largura de banda $2W$ é pequena se comparada com f_c (HAYKIN, 2013).

Figura 6 – Resposta em frequência de filtros FIR projetados com janela (a) de Hamming e (b) de Blackman em função de N para $\omega = 0{,}5\pi$.



Fonte: Autor.

O sinal $s(t)$ pode ser descrito em sua forma canônica por (HAYKIN, 2013)

$$s(t) = s_I(t)\cos(2\pi f_c t) - s_Q(t)\text{sen}(2\pi f_c t), \tag{3.27}$$

sendo o sinal $s_I(t)$, chamado de componente em fase, e $s_Q(t)$, chamado de componente em quadratura, ambos sinais passa-baixas.

Utilizando (3.27), a representação equivalente passa-baixas de tempo contínuo, $s_L(t)$, do sinal $s(t)$ é dada por (HAYKIN, 2013)

$$s_L(t) = s_I(t) + js_Q(t). \tag{3.28}$$

A partir de (3.28), pode-se obter o sinal equivalente passa-baixas de tempo discreto, $s(n)$, amostrando-se o sinal $s_L(t)$ com um período de amostragem

$$T_a = \frac{1}{2W}, \tag{3.29}$$

resultando

$$s(n) = s_I(nT_a) + js_Q(nT_a). \tag{3.30}$$

Tabela 1 – Valores dos coeficientes c_n de filtros projetados com a janela retangular, janela de Hamming e janela de Blackman.

n	c_n janela retangular	c_n janela de Hamming	c_n janela de Blackman
0	0,0328	0,0026	0,0000
1	0,1514	0,0469	0,0197
2	0,2575	0,1983	0,1622
3	0,3000	0,3000	0,3000
4	0,2575	0,1983	0,1622
5	0,1514	0,0469	0,0197
6	0,0328	0,0026	0,0000

Fonte: Autor.

Pelo teorema da amostragem, o sinal equivalente passa-baixa de tempo contínuo pode ser recuperado a partir do sinal amostrado $s(n)$, por meio de uma função de interpolação (HAYKIN, 2013).

Os resultados obtidos, em termos de BER, para canal AWGN, nas simulações realizadas em modelos equivalentes passa-baixas de tempo discreto, são válidos para os modelos originais. Assim, no caso dos SCBCs, esse modelo têm a vantagem de se utilizar diretamente a notação de sistemas dinâmicos discretos.

3.3 CANAL DE TRANSMISSÃO

No equivalente passa-baixas de tempo discreto de um sistema de comunicação, um sinal $s(n)$ é transmitido ao receptor pelo *canal de transmissão*.

Nessa tese, assume-se que o canal de transmissão tem como propriedades (HAYKIN, 2013):

a) ser linear e modelado como um filtro FIR passa-baixas, com resposta ao impulso $h_c(n)$;

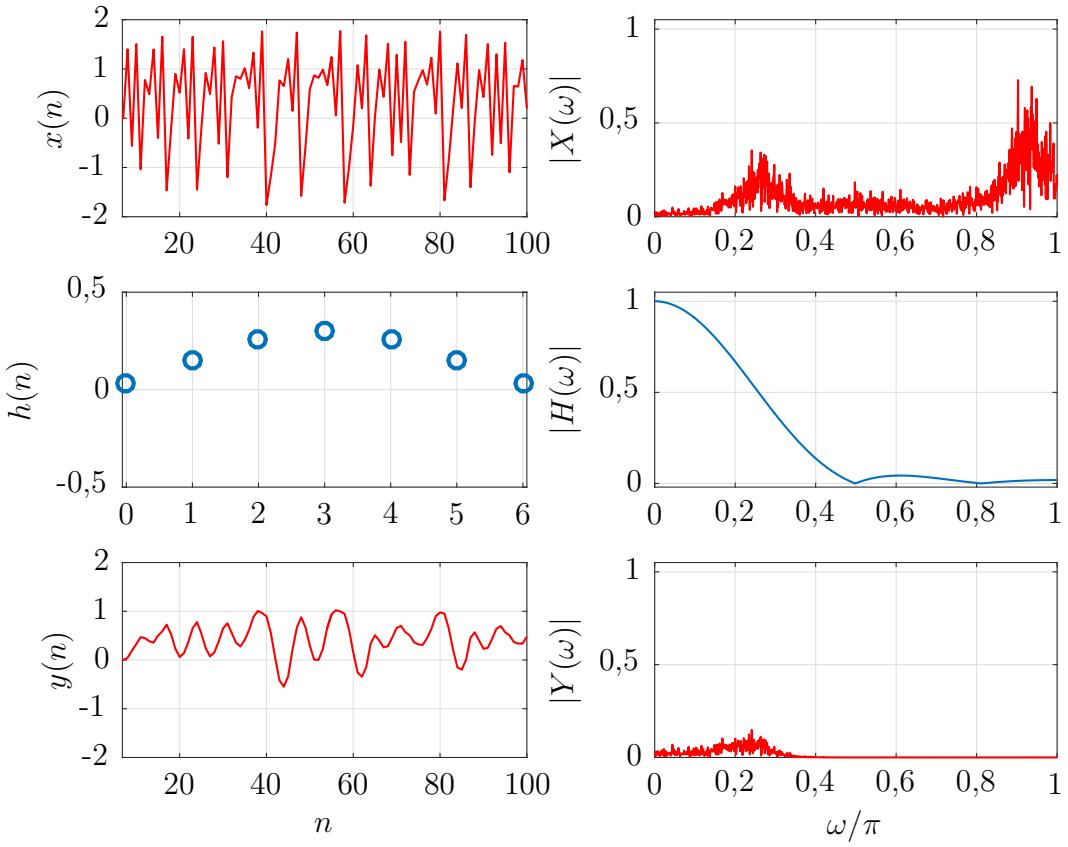
b) adicionar ruído, $w(n)$, ao sinal transmitido $s(n)$, na entrada do receptor.

Esse canal de transmissão é ilustrado no diagrama da Figura 9, sendo o sinal na entrada do receptor, $r(n)$, descrito pela relação

$$r(n) = (h_c(n) * s(n)) + w(n). \tag{3.31}$$

Em aplicações práticas de sistemas de comunicação, pode-se encontrar diversas fontes de ruído, as quais podem ser externas ou internas a esses sistemas. A análise de

Figura 7 – Gráficos nos domínios do tempo e da frequência do sinal de entrada $x(n)$, do sinal filtrado $y(n)$ e da resposta ao impulso $h(n)$ de um filtro FIR projetado com janela retangular, $N = 7$ e $\omega = 0{,}3\pi$.



Fonte: Autor.

seus efeitos é comumente baseada em uma fonte de ruído, $w(n)$, chamada de *ruído branco* (*white-noise*) (HAYKIN, 2013).

O ruído branco é um modelo idealizado, de forma que sua DEP (Densidade Espectral de Potência) é assumida ser constante para todo o espectro de frequências. Assim, sua DEP é dada por (OPPENHEIM; SCHAFER, 2009)

$$\mathcal{W}(\omega) = \sigma_w^2 \tag{3.32}$$

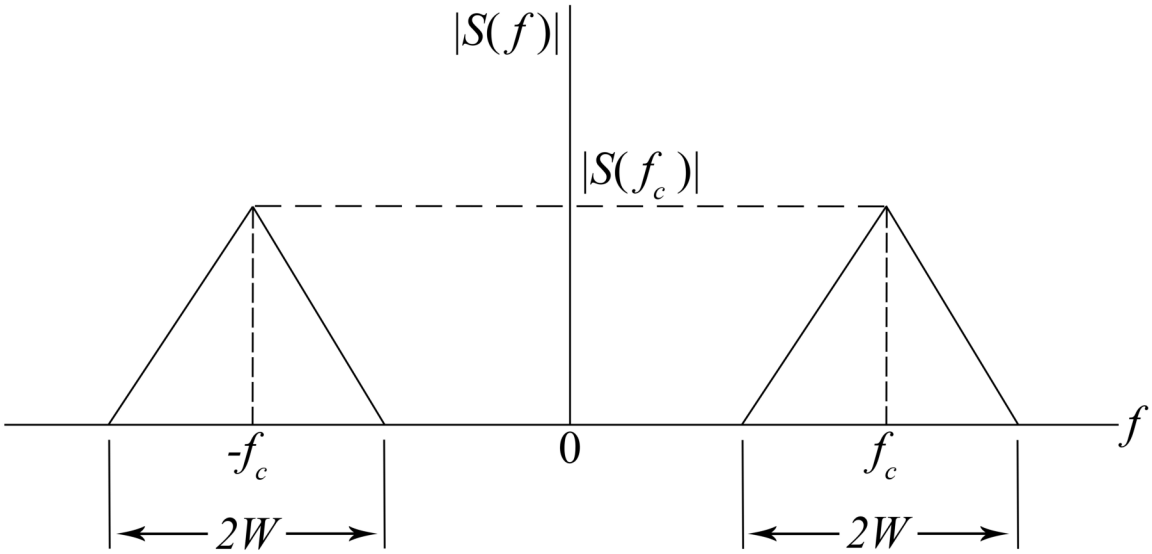
para todo ω.

A função de autocorrelação de $w(n)$ é obtida pela TFTD inversa de (3.32), resultando (OPPENHEIM; SCHAFER, 2009)

$$R_{ww}(k) = \sigma_w^2 \delta(k). \tag{3.33}$$

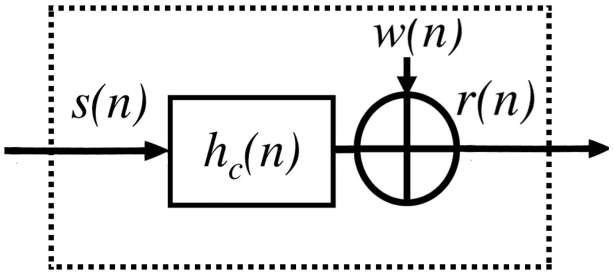
A função $R_{ww}(k)$, mostrada em (3.33), é igual a zero para $k \neq 0$. Essa característica significa que qualquer duas amostras de $w(n)$ são descorrelacionadas para quaisquer

Figura 8 – Espectro de um sinal gerado por um sistema passa-bandas.



Fonte: Adaptado de (HAYKIN, 2013).

Figura 9 – Diagrama do modelo de canal.



Fonte: Autor.

instantes de tempo (HAYKIN, 2013). Além disso, se $w(n)$ for um processo Gaussiano essas amostras também são estatisticamente independentes, e o ruído $w(n)$ é chamado de *branco Gaussiano* (*white Gaussian*) (HAYKIN, 2013).

Em particular, para $h_c(n) = \delta(n)$, o canal de transmissão mostrado na Figura 9 é chamado de canal de ruído aditivo branco gaussiano (AWGN - *Additive White Gaussian Noise channel*) (HAYKIN, 2013).

3.4 CONCLUSÕES

Nesse capítulo, definiram-se os principais conceitos utilizados nessa tese, sobre processamento de sinais e comunicações digitais.

Inicialmente definiu-se um sistema LIT de tempo discreto. Em seguida, mostram-se

os filtros FIR digitais como sistemas LIT de tempo discreto, projetados para terem uma resposta em frequência desejada. Ainda sobre os filtros FIR, descrevem-se as janelas de truncamento utilizadas e mostram-se alguns exemplos de filtros projetados com essas janelas.

Além disso, mostrou-se o modelo equivalente passa-baixas de um sinal passa-bandas, visto que o sistema de comunicação baseado em caos analisado nessa tese é um modelo equivalente passa-baixas de tempo discreto. Por fim, descreve-se o canal de transmissão considerado nesse trabalho.

Esse capítulo encerra a revisão de conceitos básicos da tese. Em conjunto com aqueles apresentados no capítulo anterior, eles permitem entender como utilizar um sinal, gerado a partir de uma variável de estado de um sistema dinâmico, como a entrada de um sistema LIT atuando como um filtro. A partir desses conceitos, desenvolve-se o SCBC nos capítulos seguintes dessa tese.

4 UM SCBC PARA CANAIS DE BANDA LIMITADA

De forma geral, os trabalhos estudados para o desenvolvimento dessa tese utilizaram o mesmo princípio para o sincronismo de seus sistemas de comunicação: o sincronismo caótico entre sistemas mestre (transmissor) e escravo (receptor) de Wu e Chua (WU; CHUA, 1993).

Nesse trabalho, Wu e Chua mostraram uma forma simplificada de obter-se o sincronismo caótico entre dois sistemas. Essa forma é baseada na dinâmica do erro do sincronismo. Além disso, Wu e Chua também propuseram um SCBC, utilizando condições ideais sob o ponto de vista de Telecomunicações, ou seja, os sinais transmitidos não foram submetidos às imperfeições de um canal de transmissão como ruído aditivo, interferência intersimbólica e limitação em largura de banda.

A partir dessa ideia, em (RULKOV; TSIMRING, 1999) e (EISENCRAFT; FANGANIELLO; BACCALÁ, 2009) adaptou-se o trabalho de Wu e Chua para transmitir sinais em banda limitada de tempo contínuo e de tempo discreto, respectivamente. Em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; BACCALÁ, 2009) foi proposto um SCBC de tempo discreto como solução para recuperar o sincronismo caótico entre os sistemas mestre e escravo em canais limitados em banda. Como sinal de informação utilizou-se uma mensagem analógica adequada à banda do sinal transmitido. O controle da banda foi obtido por meio da inserção de filtros FIR na realimentação dos sistemas mestre e escravo.

Em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; MONTEIRO, 2011) mostrou-se que os coeficientes dos filtros utilizados não influenciam o sincronismo entre o transmissor e o receptor quando se utiliza o mapa de Hénon. Ainda nesse trabalho, foram apresentados resultados numéricos, baseados no maior expoente de Lyapunov, mostrando para quais escolhas da ordem e da frequência de corte dos filtros FIR, os sinais transmitidos mantém sua natureza caótica. A mensagem transmitida pelo sistema de comunicação foi desprezada na determinação do maior expoente de Lyapunov.

Prosseguindo com a análise do SCBC, em (ABIB; EISENCRAFT, 2015) analisa-se o desempenho em termos de BER, utilizando-se mensagens binárias e transmissão dos sinais em canal AWGN. Mostra-se também a influência do parâmetro da função de codificação da mensagem, no desempenho desse sistema para vários tipos de funções e mapas. Nesse trabalho os sinais transmitidos não são limitados em frequência e a natureza caótica dos sinais transmitidos não foi analisada.

Em (CANDIDO; EISENCRAFT; SILVA, 2014) propoẽ-se a utilização de um equalizador na entrada do receptor para melhorar o desempenho do SCBC, em termos de BER, em canais dispersivos com interferência intersimbólica. Nesse sistema utilizou-se

mensagens binárias e os sinais transmitidos não são limitados em frequência.

Apesar dos diversos avanços no sentido de tornar o sistema original de Wu e Chua viável em canais de transmissão práticos, várias questões ficaram em aberto. Entre elas:

a) Deduzir analiticamente as condições gerais para ocorrer o sincronismo caótico entre sistemas mestre e escravo, em banda limitada, em termos dos coeficientes dos filtros, para um mapa K-dimensional qualquer;

b) Propor um SCBC digital, de tempo discreto limitado em banda. Dado que os sinais transmitidos são essencialmente em banda limitada, pode-se utilizar um filtro sintonizador na entrada do receptor para obter-se um melhor desempenho desse sistema proposto em termos de BER;

c) Deduzir as condições gerais para que os sinais transmitidos pelo SCBC mantenham de fato a natureza caótica dos sinais gerados pelo mapa, levando-se em conta a inserção da mensagem como um parâmetro variante no tempo do sistema dinâmico, no cálculo dos expoentes de Lyapunov.

Esse tópicos são tratados nos capítulos seguintes dessa tese.

Neste capítulo apresenta-se o SCBC em torno do qual essa tese se desenvolve. Na Seção 4.1 descreve-se a ideia original descrita em (WU; CHUA, 1993), em que o sincronismo mestre-escravo de dois sistemas de tempo contínuo é usado para a transmissão de um sinal analógico.

A seguir, na Seção 4.2, passa-se para a versão de tempo discreto, proposta em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; BACCALÁ, 2009), desse sistema de comunicação. Na Seção 4.3 mostra-se a inclusão dos filtros digitais na malha de realimentação do SCBC para limitar a banda dos sinais transmitidos. Por fim na Seção 4.4, apresentam-se as conclusões do capítulo.

4.1 SINCRONISMO CAÓTICO DE WU E CHUA

Um método simples para a sincronização caótica entre sistemas mestre e escravo foi proposto em (WU; CHUA, 1993), baseando-se na separação dos sistemas em uma parte linear e em outra não linear. Eles mostraram que se a parte linear for estável e a componente não linear for transmitida do sistema mestre para o escravo, os sistemas sincronizam completamente (BOCCALETTI et al., 2002). Esse método torna direta a verificação do sincronismo, sem a necessidade do cálculo complicado, em geral, dos expoentes condicionais de Lyapunov utilizados no trabalho de (PECORA; CARROLL, 1990).

Wu e Chua trataram do sincronismo entre dois sistemas dinâmicos K-dimensionais de tempo contínuo, sendo que um deles, chamado de *escravo*, depende de um dos estados do outro, chamado de *mestre*. Os dois sistemas são escritos como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_\rho(t)) \tag{4.1}$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_\rho(t)), \tag{4.2}$$

sendo $\mathbf{A}_{K\times K}$ uma matriz constante, $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)\} \subset \mathbb{R}^K$, $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_K(t) \end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_K(t) \end{bmatrix}^T$. A função $\mathbf{f}(\cdot) : \mathbb{R}^\rho \to \mathbb{R}^K$ é não linear, em geral, e depende do vetor ρ-dimensional $\mathbf{x}_\rho(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_\rho(t) \end{bmatrix}^T$.

A dinâmica do erro de sincronismo

$$\mathbf{e}(t) \triangleq \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t), \tag{4.3}$$

para esse sistema, pode ser obtida subtraindo-se (4.2) de (4.1), resultando em

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{e}(t). \tag{4.4}$$

Assim, $\mathbf{e}(t) \to 0$ e o sistema mestre-escravo sincroniza completamente quando os autovalores λ_i, $1 \leq i \leq K$, da matriz $\mathbf{A}$, satisfazem (AGARWAL, 1992)

$$\Re\{\lambda_i\} < 0,\ i = 1,2,\dots,K. \tag{4.5}$$

A partir dos sistemas (4.1)-(4.2), propôs-se em (WU; CHUA, 1993) um SCBC utilizando como base o sistema mestre, (4.1), como transmissor e o sistema escravo, (4.2), como receptor. Toma-se $\rho = 1$, tornando $\mathbf{x}_\rho(t)$ escalar, ou seja, $\mathbf{x}_\rho(t) = x_1(t)$.

Nesse SCBC, um sinal ou mensagem $m(t)$, a ser transmitido, é codificado na variável de estado $x_1(t)$ por meio de uma função de codificação, $c(\cdot,\cdot)$, invertível em relação à segunda variável, resultando no sinal

$$s(t) = c\left(x_1(t), m(t)\right), \tag{4.6}$$

sendo requerido que $s(t) \approx x_1(t)$, dado que o sinal $s(t)$ é realimentado no transmissor (WU; CHUA, 1993). Por exemplo, pode-se tomar

$$s(t) = x_1(t) + \gamma m(t), \tag{4.7}$$

sendo $0 \leq \gamma \leq 1$.

O sinal $s(t)$ passa a ser o argumento de $\mathbf{f}(\cdot)$ no lugar de $x_1(t)$ em (4.1) e é transmitido para o sistema escravo. Dessa forma, os sistemas (4.1)-(4.2) são reescritos como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(s(t)) \tag{4.8}$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(s(t)). \tag{4.9}$$

Novamente, o erro de sincronismo é dado por (4.4) e, se os autovalores de $\mathbf{A}$ satisfizerem (4.5), os sistemas mestre e escravo (4.8)-(4.9) sincronizam completamente, ou seja, após um transitório inicial, $\mathbf{y}(t)$ converge para $\mathbf{x}(t)$ e, em particular, $y_1(t)$ converge para $x_1(t)$. Nessas condições, a mensagem transmitida, $m(t)$, pode ser recuperada no sistema escravo usando uma função de decodificação $d(\cdot,\cdot)$, inversa de $c(\cdot,\cdot)$. Por exemplo, para a função de codificação (4.7), a mensagem $\widehat{m}(n)$, no receptor, pode ser estimada como

$$\widehat{m}(t) = \frac{s(t) - y_1(t)}{\gamma} \rightarrow \frac{s(t) - x_1(t)}{\gamma} = m(t). \tag{4.10}$$

Em (WU; CHUA, 1993) mostram-se simulações computacionais comprovando o funcionamento SCBC utilizando-se o circuito de Chua (WU; CHUA, 1993) como gerador caótico.

O SCBC descrito pelo sistema de equações (4.8)-(4.9) é de tempo contínuo e sua ideia básica foi adaptada para tempo discreto em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; BACCALÁ, 2009).

Obtém-se diversas vantagens ao se trabalhar com sistemas de tempo discreto. Eles podem ser implementados com maior flexibilidade, por uma variedade de tecnologias como computadores e microprocessadores de alta velocidade (OPPENHEIM; SCHAFER, 2009), também podem ser utilizados para simular sistemas analógicos e realizar transformações de sinais que não são possíveis por meio de um *hardware* em tempo contínuo. Os sistemas de tempo discreto também são sempre desejáveis quando a complexidade e a flexibilidade são importantes no processamento dos sinais (OPPENHEIM; SCHAFER, 2009).

Além disso, de um ponto de vista teórico, pode-se considerar que esses sistemas representam, de fato, equivalentes passa-baixas de tempo discreto de sistemas de comunicação passa-bandas (HAYKIN, 2013), como visto na Seção 3.2.

4.2 UM SCBC DE TEMPO DISCRETO

Em (EISENCRAFT; AMARAL; LIMA, 2009) propôs-se uma versão de tempo discreto de (4.1)-(4.2) dada por

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(\mathbf{x}(n)) \tag{4.11}$$

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{y}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(\mathbf{x}(n)), \tag{4.12}$$

em que $n \in \mathbb{N}$ representa os instantes de tempo, $\mathbf{A}_{K\times K}$ e $\mathbf{b}_{K\times 1}$ são constantes, $\{\mathbf{x}(n), \mathbf{y}(n)\} \subset \mathbb{R}^K$, $\mathbf{x}(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \dots & x_K(n) \end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \dots & y_K(n) \end{bmatrix}^T$.

De forma similar a (4.3), o erro de sincronismo é definido por

$$\mathbf{e}(n) \triangleq \mathbf{y}(n) - \mathbf{x}(n). \tag{4.13}$$

Subtraindo-se (4.12) de (4.11), obtém-se

$$\mathbf{e}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{e}(n). \tag{4.14}$$

O Teorema 4.1, a seguir, fornece uma condição necessária e suficiente para o sincronismo completo dos sistemas de tempo discreto (4.11) e (4.12).

Teorema 4.1. Uma condição necessária e suficiente para que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{e}(n) = \mathbf{0}$, em (4.14), é

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, K, \tag{4.15}$$

em que λ_i são os autovalores de $\mathbf{A}$.

Demonstração. Aplicando-se a transformada Z unilateral, aos dois membros de (4.14), obtém-se

$$z\mathbf{E}(z) - z\mathbf{e}(0) = \mathbf{A}\mathbf{E}(z), \tag{4.16}$$

em que $\mathbf{E}(z)$ representa o vetor de Transformadas Z dos elementos de $\mathbf{e}(n)$.

Assim,

$$\mathbf{E}(z) = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{e}(0) = \frac{z(\mathrm{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}))}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{e}(0), \tag{4.17}$$

sendo $\mathbf{I}$ a matriz identidade.

Note que os pólos da transformada Z unilateral de cada uma das funções $e_1(n)$, $e_2(n)$, ..., $e_K(n)$ são as soluções em z de

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0, \tag{4.18}$$

ou seja, os autovalores λ_i, $1 \leq i \leq K$, de $\mathbf{A}$. Assim, cada uma dessas funções converge para zero se e somente se $|\lambda_i| < 1$, $1 \leq i \leq K$, e, dessa forma, o teorema está demonstrado. ■

Dado que os autovalores da matriz $\mathbf{A}$, determinam se os sistemas (4.11) e (4.12) sincronizam, $\mathbf{A}$ é chamada de *matriz de sincronismo.*

De forma análoga ao modelo proposto em (WU; CHUA, 1993), uma mensagem, $m(n)$, pode ser codificada usando-se a variável de estado $x_1(n)$, por meio de uma função invertível $c(\cdot,\cdot)$, como por exemplo (4.7) adaptada para tempo discreto, resultando no sinal transmitido $s(n)$.

Esse sinal $s(n)$ também é realimentado no transmissor, como o argumento da função $\mathbf{f}(\cdot)$ definida pelo mapa.

No receptor, obtém-se uma estimativa da mensagem, $\widehat{m}(n)$, por meio da função de decodificação $d(\cdot,\cdot) = c^{-1}(\cdot,\cdot)$, ou seja,

$$\widehat{m}(n) = d\left(y_1(n), s(n)\right). \tag{4.19}$$

As equações que representam esse sistema são dadas por

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(s(n)) \tag{4.20}$$

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{y}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(s(n)). \tag{4.21}$$

Como, novamente, o erro de sincronismo é dado por (4.14), o Teorema 4.1 continua válido, e assim, os sistemas sincronizam completamente se todos os autovalores de $\mathbf{A}$ tiverem módulo menor do que a unidade. Nesse caso,

$$\widehat{m}(n) = d\left(y_1(n),s(n)\right) \rightarrow d\left(x_1(n),s(n)\right) = m(n). \tag{4.22}$$

Se o canal de comunicação for não ideal, o sinal $r(n)$ recebido na entrada do receptor é diferente do sinal $s(n)$ transmitido. Nesse caso, (4.20) e (4.21) são reescritas como

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(s(n)) \tag{4.23}$$

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{y}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(r(n)). \tag{4.24}$$

Dessa forma, devido à influência do canal no sinal transmitido, o sincronismo completo não é mais garantido e, em geral, $\widehat{m}(n) \neq m(n)$.

O diagrama do SCBC de tempo discreto descrito por (4.23) e (4.24), é mostrado na Figura 10. O operador z^{-1} é o atraso unitário de forma que

$$z^{-1}[\mathbf{x}(n)] \triangleq \mathbf{x}(n-1). \tag{4.25}$$

O canal de transmissão, conforme descrito na Seção 3.3, é representado por um filtro FIR com resposta ao impulso $h_c(n)$ e resposta em frequência $H_c(\omega)$, mais ruído AWGN representado por $w(n)$.

Um mapa gerador de sinais caóticos que pode ser escrito na forma (4.20) é o mapa de Hénon definido em (2.14). Nesse caso,

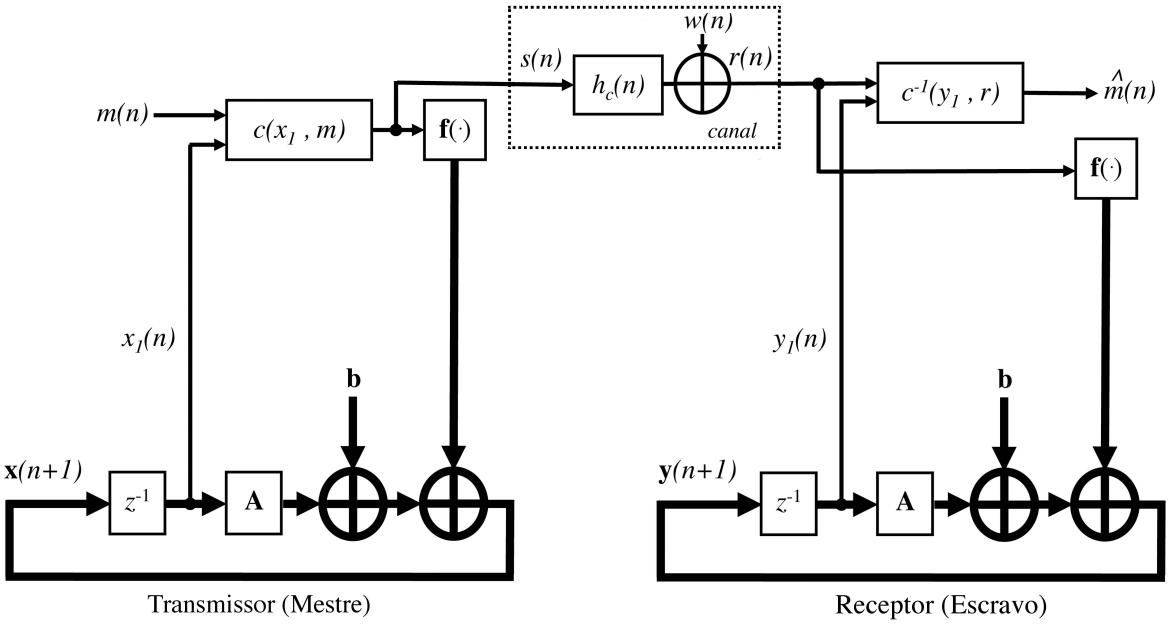
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{f}\left(x_1(n)\right) = \begin{bmatrix} -\alpha x_1^2(n) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.26}$$

Como os autovalores da matriz $\mathbf{A}$, em (4.26), são $\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{\beta}$, do Teorema 4.1, (4.20) e (4.21) sincronizam para $|\beta| < 1$.

Na Figura 11 mostram-se exemplos dos sinais do SCBC da Figura 10, $m(n)$, $s(n)$, $r(n)$ e $\widehat{m}(n)$. Também são mostradas as respectivas DEPs normalizadas, $\mathcal{M}(\omega)$, $\mathcal{S}(\omega)$, $\mathcal{R}(\omega)$, $\widehat{\mathcal{M}}(\omega)$, para a condição de canal ideal, ou seja, $s(n) = r(n)$. Como função de codificação considera-se

$$c\left(x_1(n),m(n)\right) = x_1(n) + 0{,}01m(n) \tag{4.27}$$

Figura 10 – SCBC de tempo discreto baseado em sincronismo caótico proposto por (EISENCRAFT; FANGANIELLO; BACCALÁ, 2009).



Fonte: Autor.

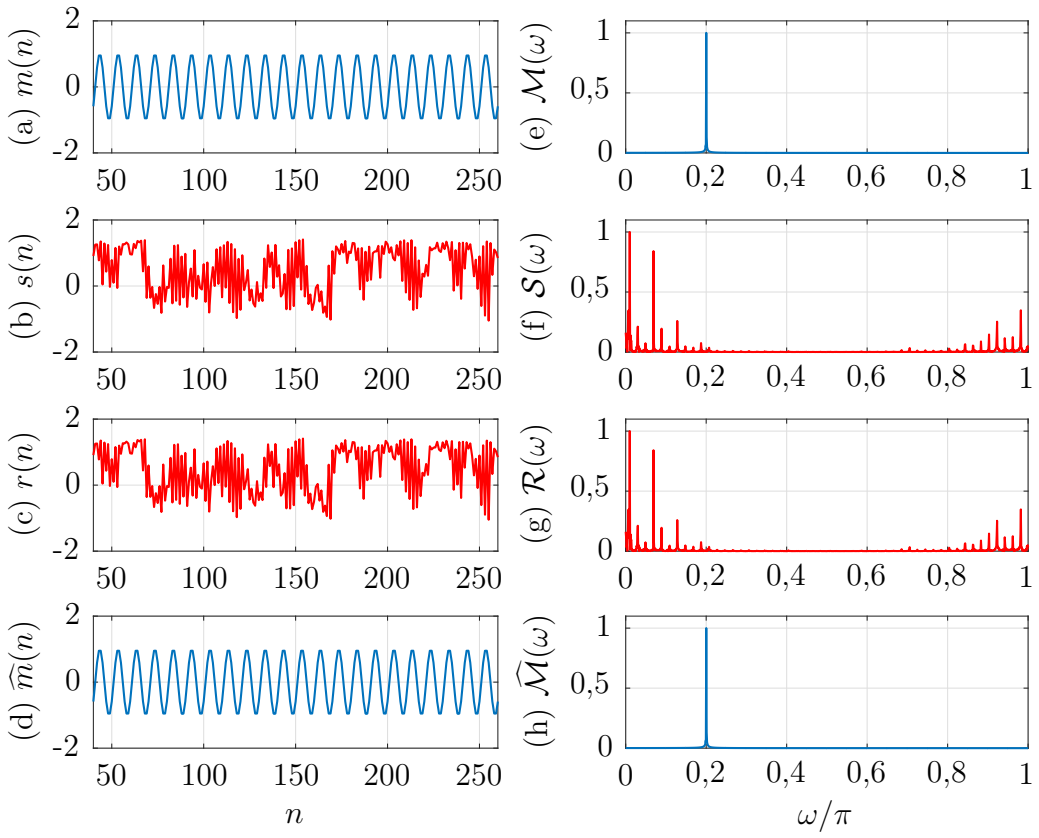
e toma-se $m(n) = \text{sen}(0{,}2\pi n)$ (EISENCRAFT; AMARAL; LIMA, 2009). Dessa forma $m(n)$ tem frequência dentro da banda de passagem do espectro do sinal caótico de modo que, com a operação de codificação de soma escolhida, o sinal transmitido mantém-se com a banda do sinal caótico original. Utiliza-se o mapa de Hénon como gerador de sinais caóticos com $\alpha = 0{,}9$ e $\beta = 0{,}3$. Claramente a mensagem $m(n)$ é recuperada no receptor.

Na Figura 12 mostram-se os mesmos sinais da Figura 11, mas agora para um canal modelado por um filtro passa-baixas, projetado com janela de Hamming, com frequência de corte $\omega_c = 0{,}8\pi$ e comprimento $N_c = 50$, usando as técnicas descritas na Seção 3.1. Considerou-se que o canal não apresenta ruído, ou seja, $w(n) = 0$.

Para essa condição, $\widehat{m}(n)$ é completamente diferente de $m(n)$, evidenciando que a limitação em banda, mesmo numa situação de canal ideal em termos de ruído, destrói completamente o sincronismo caótico. Note que o sistema receptor é não linear, assim alterar uma pequena parcela do espectro de $r(n)$ pode afetar todas as componentes espectrais de $\widehat{m}(n)$.

Algumas análises do desempenho desse sistema em termos de BER, em um canal AWGN, foram mostradas em (ABIB; EISENCRAFT, 2012; ABIB; EISENCRAFT, 2013b; ABIB; EISENCRAFT, 2013a; ABIB; EISENCRAFT, 2015), considerando-se diversas funções de codificações e mapas diferentes. Em (CANDIDO; EISENCRAFT; SILVA, 2013; CANDIDO; EISENCRAFT; SILVA, 2014; CANDIDO et al., 2015) propõe-se o uso de equalizadores de forma a combater os efeitos do canal obtendo-se resultados relevantes.

Figura 11 – Exemplos de sinais do SCBC da Figura 10 para a condição de canal ideal: (a) $m(n)$, (b) $s(n)$, (c) $r(n)$, (d) $\widehat{m}(n)$, e DEPs: (e) $\mathcal{M}(\omega)$, (f) $\mathcal{S}(\omega)$, (g) $\mathcal{R}(\omega)$, (h) $\widehat{\mathcal{M}}(\omega)$.



Fonte: Autor.

4.3 UM SCBC DE TEMPO DISCRETO LIMITADO EM BANDA

Uma solução para recuperar-se o sincronismo caótico em canais de banda limitada é descrita em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; BACCALÁ, 2009). Nesse trabalho propõe-se o ajuste do espectro do sinal transmitido $s(n)$, em geral de banda larga dado que é gerado a partir do sinal caótico $x_1(n)$, adicionando-se filtros FIR, $H_S(\omega)$, idênticos, na realimentação dos sistemas descritos pelas equações (4.23) e (4.24). O diagrama desse SCBC é mostrado na Figura 13.

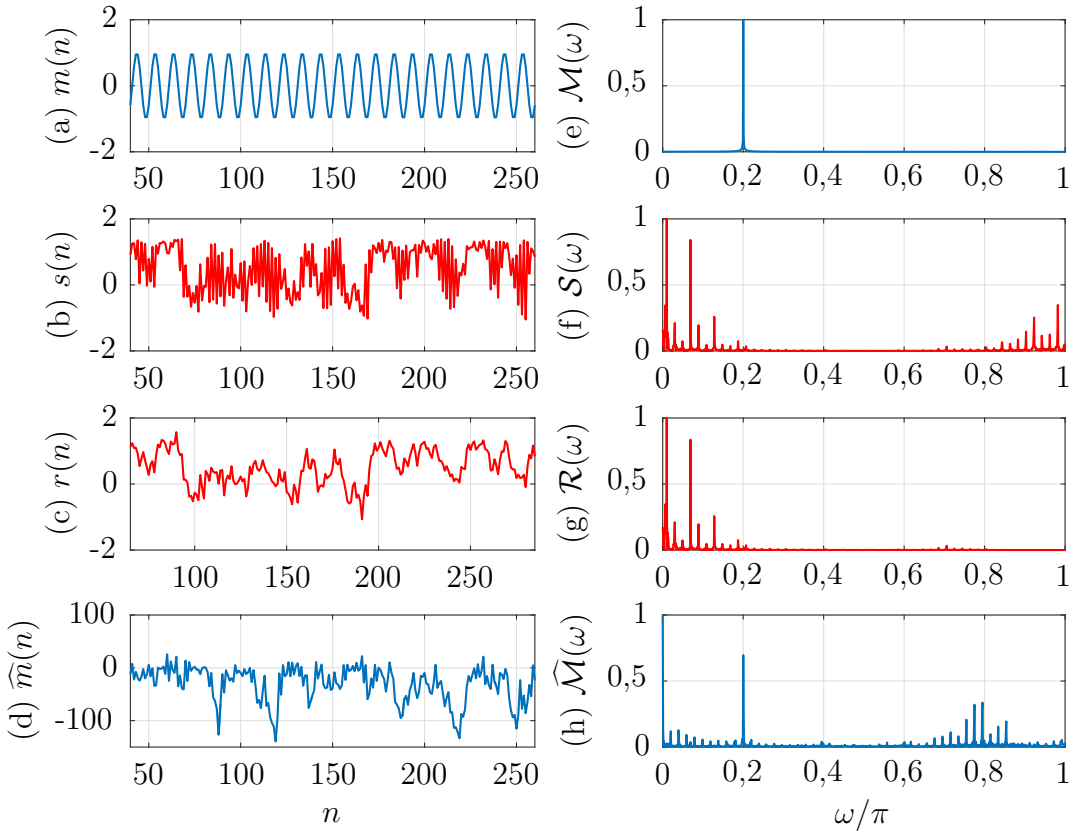
Nessa proposta, $x_{K+1}(n)$, a variável de estado filtrada por $H_S(\omega)$ e usada para codificar a mensagem $m(n)$, é escrita como

$$x_{K+1}(n) = \sum_{j=0}^{N_S-1} c_j x_1(n-j) \tag{4.28}$$

sendo c_j, $0 \leq j \leq N_S - 1$, os coeficientes do filtro $H_S(\omega)$ de comprimento N_S.

Se $H_S(\omega)$, $m(n)$ e a função de codificação forem escolhidos adequadamente, o sinal $s(n)$ será essencialmente limitado em banda.

Figura 12 – Exemplos de sinais do SCBC da Figura 10 para um canal passa-baixas: (a) $m(n)$, (b) $s(n)$, (c) $r(n)$, (d) $\widehat{m}(n)$, e DEPs: (e) $\mathcal{M}(\omega)$, (f) $\mathcal{S}(\omega)$, (g) $\mathcal{R}(\omega)$, (h) $\widehat{\mathcal{M}}(\omega)$. Note que a escala do gráfico (d) é diferente das demais.



Fonte: Autor.

O sistema mestre, utilizando-se o mapa de Hénon definido em (2.14), com a inserção do filtro $H_S(\omega)$, para $N_S \geq 3$, é descrito por (EISENCRAFT; FANGANIELLO; MONTEIRO, 2011)

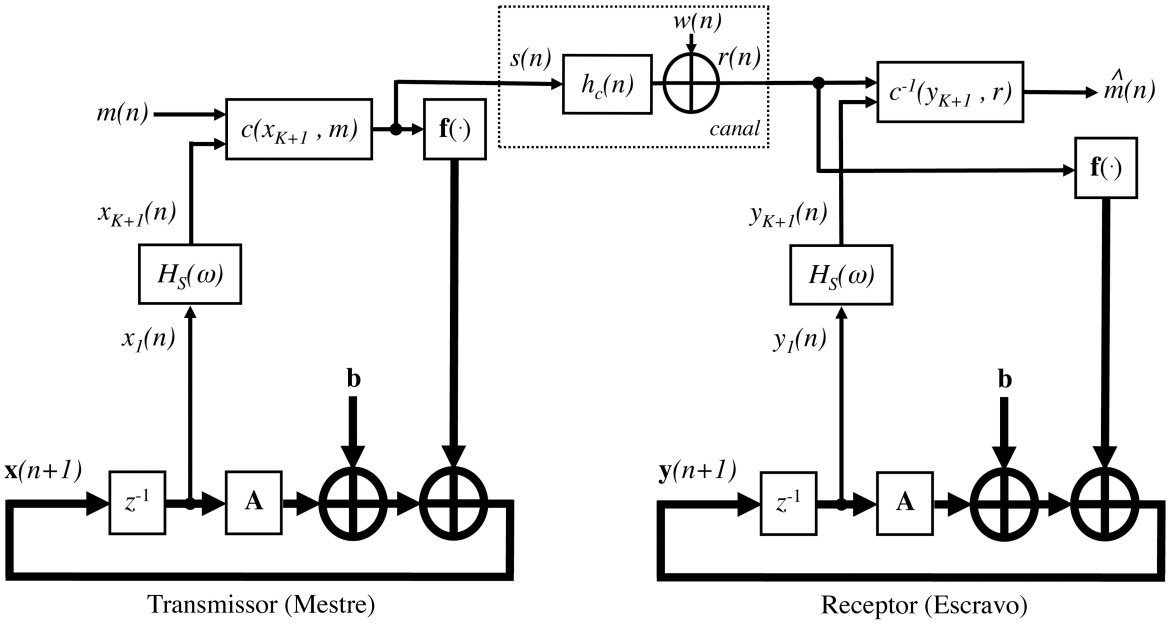
$$\begin{cases} x_1(n+1) &= x_2(n) + 1 - \alpha s^2(n) \\ x_2(n+1) &= \beta x_1(n) \\ x_3(n+1) &= c_0 x_1(n+1) + c_1 x_1(n) + c_2 x_1(n-1) + \cdots + c_{N_S-1} x_1(n - N_S + 2) \end{cases}, \tag{4.29}$$

sendo $s(n) = c\left(x_3(n), m(n)\right)$.

Nesse caso, para se avaliar as condições de sincronismo entre (4.20) e (4.21), é necessário criar as variáveis de estado auxiliares

$$\begin{cases} x_4(n+1) & \triangleq x_1(n) \\ x_5(n+1) & \triangleq x_4(n) \\ & \vdots \\ x_{N_S+1}(n+1) & \triangleq x_{N_S}(n) \end{cases}. \tag{4.30}$$

Figura 13 – Sistema de comunicação baseado em sincronismo caótico limitado em banda (EISENCRAFT; FANGANIELLO; BACCALÁ, 2009).



Fonte: Autor.

Substituindo (4.30) em (4.29), o sistema mestre pode ser escrito como

$$\begin{cases} x_1(n+1) & = x_2(n) + 1 - \alpha s^2(n) \\ x_2(n+1) & = \beta x_1(n) \\ x_3(n+1) & = c_1 x_1(n) + c_0 x_2(n) + c_2 x_4(n) + \cdots + c_{N_S-1} x_{N_S+1}(n) + c_0 - \alpha c_0 s^2(n) \\ x_4(n+1) & = x_1(n) \\ x_5(n+1) & = x_4(n) \\ & \vdots \\ x_{N_S+1}(n+1) & = x_{N_S}(n) \end{cases} . \tag{4.31}$$

Esse sistema pode ser reescrito na forma (4.20) com

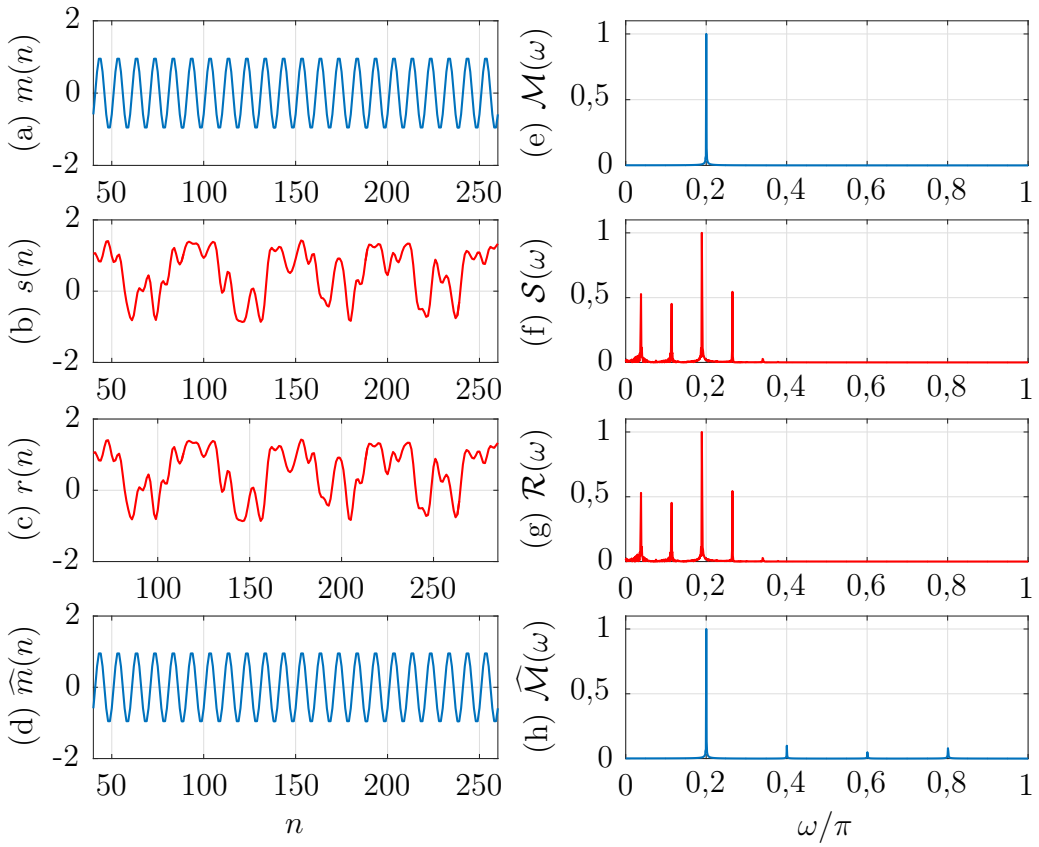
$$\mathbf{A}_{(N_S+1)\times(N_S+1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & c_2 & \dots & c_{N_S-2} & c_{N_S-1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

que tem autovalores $\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{\beta}$ e $\lambda_3 = \ldots = \lambda_{N_S+1} = 0$ (EISENCRAFT; FANGANIELLO; MONTEIRO, 2011).

Assim, o sincronismo entre os sistemas mestre e escravo é mantido independentemente dos coeficientes do filtro para $|\beta| < 1$ (EISENCRAFT; FANGANIELLO; MONTEIRO, 2011).

Na Figura 14 mostram-se exemplos dos sinais $m(n)$, $s(n)$, $r(n)$ e $\widehat{m}(n)$, e suas respectivas DEPs, para a mesma condição de canal limitado em banda da Figura 12, mas agora utilizando-se filtros $H_S(\omega)$, projetados com a janela de Hamming, nos sistemas mestre e escravo, com frequência de corte $\omega_S = 0{,}4\pi$ e comprimento $N_S = 50$. Nota-se que a mensagem $m(n)$ é recuperada, mostrando que o sincronismo caótico pode ser obtido em canais de transmissão limitados em frequência. A inserção do filtro $H_S(\omega)$, conforme mostrado na Figura 14(f), de fato limita a banda do sinal transmitido, $s(n)$, em $\omega < 0{,}4\pi$, tornando o sinal adequado para a transmissão no canal considerado com $\omega_c = 0{,}8\pi$.

Figura 14 – Exemplos sinais do SCBC da Figura 12: (a) $m(n)$, (b) $s(n)$, (c) $r(n)$, (d) $\widehat{m}(n)$, e suas DEPs: (e) $\mathcal{M}(\omega)$, (f) $\mathcal{S}(\omega)$, (g) $\mathcal{R}(\omega)$, (h) $\widehat{\mathcal{M}}(\omega)$.



Fonte: Autor.

Claramente, nada pode-se afirmar sobre a natureza caótica dos sinais transmitidos por esse sistema de comunicação. Em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; MONTEIRO, 2011) apresentam-se resultados numéricos preliminares investigando como o maior expoente de Lyapunov do sistema mestre varia com os parâmetros ω_S e N_S do filtro. Nessa análise,

desprezou-se a influência de $m(n)$ no cálculo dos expoentes de Lyapunov, uma hipótese que pode não ser realista, dependendo da função de codificação utilizada. De forma geral concluiu-se que quanto maior a ordem do filtro, maior a faixa de frequências de corte para as quais o sinal transmitido permanece caótico.

4.4 CONCLUSÕES

Nesse capítulo revisitou-se o sistema de comunicação de tempo discreto baseado em caos utilizado nessa tese e os principais resultados associados que estão descritos na literatura. Detalhou-se a ideia inicial de Wu e Chua em tempo contínuo e sua adaptação para um sistema de tempo discreto demonstrando-se as condições necessárias e suficientes para o sincronismo dos sistemas mestre e escravo considerando-se o mapa de Hénon. Além disso, mostrou-se um SCBC de tempo discreto em banda limitada por meio da inserção de filtros na realimentação dos sistemas mestre e escravo.

Há uma série de questões em aberto associadas ao SCBC da Figura 13 e que são abordadas nessa tese:

a) Deduzir as condições gerais para ocorrer o sincronismo caótico no SCBC em banda limitada, em termos dos coeficientes dos filtros, para um mapa K-dimensional qualquer. Em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; MONTEIRO, 2011) essas condições foram estabelecidas em particular para o mapa de Hénon;

b) Propor um SCBC digital, de tempo discreto, limitado em banda. Além disso, utilizando-se do fato que os sinais transmitidos são essencialmente de banda limitada, analisar a inserção de um filtro sintonizador na entrada do receptor para obter-se um melhor desempenho desse SCBC em termos de BER. Em (ABIB; EISENCRAFT, 2015; CANDIDO; EISENCRAFT; SILVA, 2014) o SCBC foi analisado, em termos de BER, utilizando-se mensagens digitais, porém os sinais transmitidos não eram limitados em banda. Em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; BACCALÁ, 2009) analisou-se o SCBC em banda limitada transmitindo uma mensagem senoidal, de forma que o controle da banda dessa mensagem era facilmente adaptada dentro da banda do sinal transmitido;

c) Deduzir as condições gerais para que os sinais transmitidos pelo SCBC mantenha de fato a natureza caótica dos sinais gerados pelo mapa, levando-se em conta a inserção da mensagem como um parâmetro variante no tempo do sistema dinâmico, no cálculo dos expoentes de Lyapunov. Em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; MONTEIRO, 2011) a mensagem não foi considerada na determinação dos expoentes de Lyapunov.

Os resultados obtidos analisando a questão descrita no item a) são detalhados no Capítulo 5. No Capítulo 6 descrevem-se os resultados alcançados no tratamento da questão

descrita no item b). Por fim, no Capítulo 7 mostram-se os resultados obtidos na análise da questão apresentada no item c).

5 RESULTADOS OBTIDOS - PARTE 1: CONDIÇÕES ANALÍTICAS PARA O SINCRONISMO

Neste capítulo, deduzem-se as condições de sincronismo mestre-escravo para o SCBC de tempo discreto, limitado em banda, descrito na Seção 4.3, Figura 13, para um mapa qualquer.

Entende-se que os resultados mostrados nesse capítulo são contribuições originais dessa tese. Esses resultados foram publicados em (FONTES; EISENCRAFT, 2015; FONTES; EISENCRAFT, 2016b).

Na Seção 5.1, determina-se a matriz de sincronismo para o sistema transmissor da Figura 13 para um mapa K-dimensional qualquer. Em seguida, na Seção 5.2, mostra-se que os coeficientes do filtro não afetam o sincronismo caótico independentemente do mapa utilizado. Por fim, na Seção 5.3 apresentam-se as conclusões do capítulo.

5.1 MATRIZ DE SINCRONISMO GENÉRICA

Sejam a_{ik}, $1 \leq i \leq K$ e $1 \leq k \leq K$, os coeficientes da matriz de sincronismo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1K} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & a_{KK} \end{bmatrix}, \tag{5.1}$$

do sistema gerador de sinais caóticos original, ou seja, sem a presença dos filtros, e

$$x_{K+1}(n) = \sum_{j=0}^{N_S-1} c_j x_1(n-j) \tag{5.2}$$

a variável de estado filtrada pelo filtro $H_S(\omega)$, conforme descrito em (4.28).

As equações de estado que descrevem o sistema mestre (4.20) são

$$\begin{cases} x_1(n+1) & = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1K}x_K(n) + b_1 + f_1(s(n)) \\ x_2(n+1) & = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2K}x_K(n) + b_2 + f_2(s(n)) \\ & \vdots \\ x_K(n+1) & = a_{K1}x_1(n) + a_{K2}x_2(n) + \cdots + a_{KK}x_K(n) + b_K + f_K(s(n)) \\ x_{K+1}(n+1) & = c_0x_1(n+1) + c_1x_1(n) + \cdots + c_{N_S-1}x_1(n-N_S+2) \end{cases}, \tag{5.3}$$

com

$$s(n) = c\left(x_{K+1}(n), m(n)\right). \tag{5.4}$$

A seguir, determinam-se as novas matrizes de sincronismo $\mathbf{A}'$ para $N_S = 1$, $N_S = 2$, $N_S = 3$ e $N_S > 3$.

Caso $N_S = 1$

Nesse caso, o filtro $H_S(\omega)$ é um simples ganho,

$$x_{K+1}(n+1) = c_0 x_1(n+1), \tag{5.5}$$

e (5.3) é dada por

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1K}x_K(n) + b_1 + f_1(s(n)) \\ x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2K}x_K(n) + b_2 + f_2(s(n)) \\ & \vdots \\ x_K(n+1) &= a_{K1}x_1(n) + a_{K2}x_2(n) + \cdots + a_{KK}x_K(n) + b_K + f_K(s(n)) \\ x_{K+1}(n+1) &= c_0a_{11}x_1(n) + c_0a_{12}x_2(n) + \cdots + c_0a_{1K}x_K(n) + c_0b_1 + c_0f_1(s(n)) \end{cases}, \tag{5.6}$$

e, portanto,

$$\mathbf{A'}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1K} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2K} & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & a_{KK} & 0 \\ c_0a_{11} & c_0a_{12} & \cdots & c_0a_{1K} & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.7}$$

com dimensão $K' \times K'$, $K' = K + 1$.

Caso $N_S = 2$

Para esse caso, o filtro $H_S(\omega)$ é dado por

$$x_{K+1}(n+1) = c_0 x_1(n+1) + c_1 x_1(n), \tag{5.8}$$

e assim (5.3) torna-se

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1K}x_K(n) + b_1 + f_1(s(n)) \\ x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2K}x_K(n) + b_2 + f_2(s(n)) \\ \vdots & \\ x_K(n+1) &= a_{K1}x_1(n) + a_{K2}x_2(n) + \cdots + a_{KK}x_K(n) + b_K + f_K(s(n)) \\ x_{K+1}(n+1) &= (c_0a_{11} + c_1)x_1(n) + c_0a_{12}x_2(n) + \cdots + c_0a_{1K}x_K(n) + c_0b_1 + c_0f_1(s(n)) \end{cases}, \tag{5.9}$$

com

$$\mathbf{A'}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1K} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2K} & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & a_{KK} & 0 \\ (c_0a_{11} + c_1) & c_0a_{12} & \cdots & c_0a_{1K} & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.10}$$

e $K' = K + 1$.

Caso $N_S = 3$

Para $N_S = 3$, o filtro é dado por

$$x_{K+1}(n+1) = c_0 x_1(n+1) + c_1 x_1(n) + c_2 x_1(n-1). \tag{5.11}$$

Utilizando a variável de estado auxiliar

$$x_{K+2}(n+1) \triangleq x_1(n), \tag{5.12}$$

(5.3) torna-se

$$\begin{cases} x_1(n+1) & = & a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1K}x_K(n) + b_1 + f_1(s(n)) \\ x_2(n+1) & = & a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2K}x_K(n) + b_2 + f_2(s(n)) \\ & & \vdots \\ x_K(n+1) & = & a_{K1}x_1(n) + a_{K2}x_2(n) + \cdots + a_{KK}x_K(n) + b_K + f_K(s(n)) \\ x_{K+1}(n+1) & = & (c_0a_{11} + c_1)x_1(n) + c_0a_{12}x_2(n) + \cdots + c_0a_{1K}x_K(n) + c_2x_{K+2}(n) + \\ & & c_0b_1 + c_0f_1(s(n)) \\ x_{K+2}(n+1) & = & x_1(n) \end{cases}, \tag{5.13}$$

com

$$\mathbf{A'}_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1K} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2K} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & a_{KK} & 0 & 0 \\ (c_0a_{11} + c_1) & c_0a_{12} & \cdots & c_0a_{1K} & 0 & c_2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.14}$$

e $K' = K + 2$.

Caso $N_S > 3$

Para esses filtros,

$$x_{K+1}(n+1) = c_0 x_1(n+1) + c_1 x_1(n) + \cdots + c_{N_S-1} x_1(n - N_S + 2). \tag{5.15}$$

Definindo-se as variáveis de estado auxiliares

$$\begin{cases} x_{K+2}(n+1) & \triangleq x_1(n) \\ x_{K+3}(n+1) & \triangleq x_{K+2}(n) \\ & \vdots \\ x_{K+N_S-1}(n+1) & \triangleq x_{K+N_S-2}(n) \end{cases} \tag{5.16}$$

e, substituindo $x_1(n+1)$ na última equação de (5.3) e utilizando-se (5.16), reescreve-se o sistema mestre como

$$\begin{cases} x_1(n+1) & = & a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1K}x_K(n) + b_1 + f_1(s(n)) \\ x_2(n+1) & = & a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2K}x_K(n) + b_2 + f_2(s(n)) \\ & & \vdots \\ x_K(n+1) & = & a_{K1}x_1(n) + a_{K2}x_2(n) + \cdots + a_{KK}x_K(n) + b_K + f_K(s(n)) \\ x_{K+1}(n+1) & = & (c_0a_{11} + c_1)x_1(n) + c_0a_{12}x_2(n) + \cdots + c_0a_{1K}x_K(n) + c_2x_{K+2}(n) + \\ & & \cdots + c_{N_S-1}x_{K+N_S-1}(n) + c_0b_1 + c_0f_1(s(n)) \\ x_{K+2}(n+1) & = & x_1(n) \\ x_{K+3}(n+1) & = & x_{K+2}(n) \\ & & \vdots \\ x_{K+N_S-1}(n+1) & = & x_{K+N_S-2}(n) \end{cases} . \tag{5.17}$$

A matriz de sincronismo $\mathbf{A}'_{K'\times K'}$, $K' = K + N_S - 1$, do sistema (5.17) é dada por

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1K} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2K} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & a_{KK} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (c_0a_{11} + c_1) & c_0a_{12} & \cdots & c_0a_{1K} & 0 & c_2 & \cdots & c_{N_S-2} & c_{N_S-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} . \tag{5.18}$$

O Teorema 4.1 descreve a condição necessária para o sincronismo completo de sistemas de tempo discreto, em função dos autovalores da matriz de sincronismo. Busca-se então uma relação entre os autovalores das matrizes de sincronismo definidas em (5.7), (5.10), (5.14) e (5.18) e da matriz $\mathbf{A}$, descrita em (5.1), de forma a se obter a condição geral que os coeficientes dos filtros devem satisfazer para que o sistema mestre-escravo mantenha o sincronismo.

5.2 CONDIÇÕES GERAIS PARA SINCRONISMO CAÓTICO

Nesta seção, determinam-se as condições que os coeficientes dos filtros $H_S(\omega)$ devem satisfazer de modo a manter o sincronismo mestre-escravo para um mapa qualquer.

No Teorema 5.1 estabelece-se a relação entre os autovalores da matriz $\mathbf{A}$, definida em (5.1), e das matrizes de sincronismo definidas em em (5.7), (5.10), (5.14) e (5.18).

Teorema 5.1. As matrizes $\mathbf{A'}_1$, $\mathbf{A'}_2$, $\mathbf{A'}_3$ e $\mathbf{A'}$, respectivamente, das equações (5.7), (5.10), (5.14) e (5.18), têm K autovalores iguais aos da matriz $\mathbf{A}$, da equação (5.1). Todos os seus demais autovalores são nulos.

Demonstração. Os autovalores λ_i, $1 \leq i \leq K$, de $\mathbf{A}$, são as raízes da equação

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} (\lambda - a_{11}) & a_{12} & \cdots & a_{1K} \\ a_{21} & (\lambda - a_{22}) & \cdots & a_{2K} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & (\lambda - a_{KK}) \end{vmatrix} = 0. \tag{5.19}$$

Para $N_S = 1$, $\mathbf{A'}_1$ é dada por (5.7). Os autovalores λ'_i, $1 \leq i \leq K+1$, de $\mathbf{A'}_1$, são as raízes da equação

$$\det(\lambda'\mathbf{I} - \mathbf{A'}_1) = \begin{vmatrix} (\lambda' - a_{11}) & a_{12} & \cdots & a_{1K} & 0 \\ a_{21} & (\lambda' - a_{22}) & \cdots & a_{2K} & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & (\lambda' - a_{KK}) & 0 \\ c_0 a_{11} & c_0 a_{12} & \cdots & c_0 a_{1K} & \lambda' \end{vmatrix} = 0. \tag{5.20}$$

Aplicando o Teorema da Expansão de Laplace (TEL) (MEYER, 2008), escolhendo o elemento λ' circulado em (5.20), o único elemento não nulo da coluna $(K+1)$, resulta

$$\det(\lambda'\mathbf{I} - \mathbf{A'}_1) = \lambda' \begin{vmatrix} (\lambda' - a_{11}) & a_{12} & \cdots & a_{1K} \\ a_{21} & (\lambda' - a_{22}) & \cdots & a_{2K} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & (\lambda' - a_{KK}) \end{vmatrix} = 0. \tag{5.21}$$

Comparando-se (5.21) com (5.19)

$$\det(\lambda'\mathbf{I} - \mathbf{A}_1^{'}) = \lambda' \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0. \tag{5.22}$$

As soluções de (5.22) são

$$\begin{cases} \lambda'_1 & = & \lambda_1 \\ \lambda'_2 & = & \lambda_2 \\ & & \vdots \\ \lambda'_K & = & \lambda_K \\ \lambda'_{K+1} & = & 0 \end{cases} \tag{5.23}$$

e o Teorema para $N_S = 1$ está demonstrado.

Para $N_S = 2$, $\mathbf{A'}_2$ é dada por (5.10). Os autovalores λ'_i, $1 \leq i \leq K'$, de $\mathbf{A'}_2$, são as raízes da equação

$$\det(\lambda'\mathbf{I} - \mathbf{A'}_2) = \begin{vmatrix} (\lambda' - a_{11}) & a_{12} & \cdots & a_{1K} & 0 \\ a_{21} & (\lambda' - a_{22}) & \cdots & a_{2K} & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & (\lambda' - a_{KK}) & 0 \\ (c_0 a_{11} + c_1) & c_0 a_{12} & \cdots & c_0 a_{1K} & \lambda' \end{vmatrix} = 0. \tag{5.24}$$

Aplicando o TEL, escolhendo o elemento λ' circulado em (5.24) resulta

$$\det(\lambda'\mathbf{I} - \mathbf{A}_2^{'}) = \lambda' \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0. \tag{5.25}$$

As soluções de (5.25) são

$$\begin{cases} \lambda'_1 & = & \lambda_1 \\ \lambda'_2 & = & \lambda_2 \\ & & \vdots \\ \lambda'_K & = & \lambda_K \\ \lambda'_{K+1} & = & 0 \end{cases} \tag{5.26}$$

e o Teorema para $N_S = 2$ está demonstrado.

Para $N_S = 3$, $\mathbf{A'}_3$ é dada por (5.14). Os autovalores λ'_i, $1 \leq i \leq K'$, de $\mathbf{A'}_3$, são as raízes da equação

$$\det(\lambda'\mathbf{I} - \mathbf{A'}_3) = \begin{vmatrix} (\lambda' - a_{11}) & a_{12} & \cdots & a_{1K} & 0 & 0 \\ a_{21} & (\lambda' - a_{22}) & \cdots & a_{2K} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & (\lambda' - a_{KK}) & 0 & 0 \\ (c_0 a_{11} + c_1) & c_0 a_{12} & \cdots & c_0 a_{1K} & \lambda' & c_2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda' \end{vmatrix} = 0. \tag{5.27}$$

Aplicando o TEL duas vezes, de forma análoga ao que foi feito para $N_S = 1$ e $N_S = 2$,

$$\det(\lambda'\mathbf{I} - \mathbf{A}_3^{'}) = (\lambda')^2 \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0. \tag{5.28}$$

As soluções de (5.28) são

$$\begin{cases} \lambda'_1 & = & \lambda_1 \\ \lambda'_2 & = & \lambda_2 \\ & & \vdots \\ \lambda'_K & = & \lambda_K \\ \lambda'_{K+1} & = & 0 \\ \lambda'_{K+2} & = & 0 \end{cases} \tag{5.29}$$

e o Teorema para $N_S = 3$ está demonstrado.

Por fim, para $N_S > 3$, $\mathbf{A}'$ é dada por (5.18). Os autovalores λ'_i, $1 \leq i \leq K'$, de $\mathbf{A}'$, são as raízes da equação

$$\det(\lambda'\mathbf{I} - \mathbf{A}') = \begin{vmatrix} (\lambda' - a_{11}) & a_{12} & \cdots & a_{1K} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & (\lambda' - a_{22}) & \cdots & a_{2K} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & (\lambda' - a_{KK}) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (c_0 a_{11} + c_1) & c_0 a_{12} & \cdots & c_0 a_{1K} & \lambda' & c_2 & \cdots & c_{N_S-2} & c_{N_S-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda' & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda' \end{vmatrix} = 0. \tag{5.30}$$

Aplicando-se o TEL, escolhendo-se o elemento $a_{(K+1)(K+1)} = \lambda'$, circulado em (5.30), obtém-se

$$\det(\lambda'\mathbf{I} - \mathbf{A}') = \lambda' \begin{vmatrix} (\lambda' - a_{11}) & a_{12} & \cdots & a_{1K} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & (\lambda' - a_{22}) & \cdots & a_{2K} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & (\lambda' - a_{KK}) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda' & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda' \end{vmatrix} = 0. \tag{5.31}$$

Aplicando novamente o TEL, escolhendo o elemento λ' circulado em (5.31) resulta

$$\det(\lambda'\mathbf{I} - \mathbf{A}') = (\lambda')^2 \begin{vmatrix} (\lambda' - a_{11}) & a_{12} & \cdots & a_{1K} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & (\lambda' - a_{22}) & \cdots & a_{2K} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & (\lambda' - a_{KK}) & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda' & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \lambda' \end{vmatrix} = 0. \tag{5.32}$$

Prosseguindo, aplicando-se sucessivamente $N_S - 1$ vezes o TEL, tem-se

$$\det(\lambda'\mathbf{I} - \mathbf{A}') = (\lambda')^{(N_S-1)} \begin{vmatrix} (\lambda' - a_{11}) & a_{12} & \cdots & a_{1K} \\ a_{21} & (\lambda' - a_{22}) & \cdots & a_{2K} \\ \vdots & \vdots & (\lambda' - \cdots) & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & (\lambda' - a_{KK}) \end{vmatrix} = 0. \quad (5.33)$$

Desta forma, comparando-se (5.33) com (5.19)

$$\det(\lambda'\mathbf{I} - \mathbf{A}') = (\lambda')^{(N_S-1)}\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0. \quad (5.34)$$

As soluções de (5.34) são

$$\begin{cases} \lambda'_1 & = & \lambda_1 \\ \lambda'_2 & = & \lambda_2 \\ \vdots & & \\ \lambda'_K & = & \lambda_K \\ \lambda'_{K+1} & = & 0 \\ \vdots & & \\ \lambda'_{K+N_S-1} & = & 0 \end{cases} \quad (5.35)$$

e o Teorema para essa condição está demonstrado. ■

Corolário 5.1.1. O sistema mestre-escravo, das equações (4.20)-(4.21), sincroniza completamente independentemente dos filtros digitais utilizados, desde que os autovalores da matriz de sincronismo original tenham módulo menor do que a unidade.

Demonstração. Do Teorema 4.1, o sistema mestre-escravo definido pelas equações (4.20)-(4.21), sincroniza se todos autovalores λ_i da matriz $\mathbf{A}$ tiverem módulo menor que a unidade.

Do Teorema 5.1, todos os autovalores das matrizes $\mathbf{A}'_1$, $\mathbf{A}'_2$, $\mathbf{A}'_3$ e $\mathbf{A}'$, diferentes dos da matriz $\mathbf{A}$, são nulos.

De acordo com os dois teoremas, se o sistema mestre-escravo original sincroniza, os filtros não afetam esse sincronismo, dado que os autovalores da nova matriz de sincronismo, diferentes de $\mathbf{A}$, gerados pela inserção dos filtros, são nulos e, dessa forma, menores do que a unidade. ■

Esse corolário generaliza o resultado obtido em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; MONTEIRO, 2011) para o mapa de Hénon e considera-se uma contribuição original dessa tese.

Note-se que nada está se afirmando sobre a natureza do sinal transmitido $s(n)$: ele pode deixar de ser caótico, tornando-se periódico, ou mesmo divergir dependendo dos filtros utilizados, mas o sincronismo está garantido.

5.3 CONCLUSÕES

Nesse capítulo obteve-se o resultado relevante de que ocorre o sincronismo caótico entre sistemas mestre-escravo para o SCBC da Figura 13 independentemente dos filtros utilizados, para um mapa qualquer. Esses resultados foram publicados em (FONTES; EISENCRAFT, 2015; FONTES; EISENCRAFT, 2016b).

Os resultados alcançados abrem uma nova perspectiva no estudo dos sistemas de comunicação baseados em sincronismo caótico. As condições descritas tornam possível analisar-se diversos tipos de filtros e mapas em condições práticas de transmissão de sinais, buscando-se melhorar o desempenho dos sistemas baseados em caos quando comparados aos sistemas convencionais.

Utilizando os resultados analíticos obtidos nesse capítulo, propõe-se no Capítulo 6 um sistema de comunicação digital, baseado em sincronismo caótico, e analisa-se o desempenho desse sistema em termos de BER.

6 RESULTADOS OBTIDOS - PARTE 2: SCBC DIGITAL PARA CANAIS EM BANDA LIMITADA

No Capítulo 4 apresentou-se o equivalente passa-baixas de tempo discreto de um sistema de comunicação analógico, baseado em sincronismo caótico, que utiliza filtros digitais na realimentação, de forma a tornar de banda limitada os sinais transmitidos (RULKOV; TSIMRING, 1999; EISENCRAFT; FANGANIELLO; BACCALÁ, 2009). O fato das mensagens escolhidas nesses trabalhos serem analógicas dificulta uma análise de desempenho quantitativa desses sistemas na presença de canais de comunicação não ideais.

No capítulo anterior, mostrou-se analiticamente que no SCBC proposto em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; BACCALÁ, 2009), os sistemas mestre e escravo sincronizam completamente para quaisquer filtros utilizados na realimentação.

Neste capítulo, estuda-se a utilização do sistema descrito na Seção 4.3 para a transmissão de mensagens binárias, de forma que esse sistema possa ser avaliado em termos de BER.

Ao se propor transmitir mensagens binárias em um canal limitado em banda, é necessário formatar o espectro da mensagem para que essa tenha largura de banda dentro da frequência de corte do filtro, $H_S(\omega)$, e o SCBC transmita sinais em banda limitada.

Além disso, aproveitando-se do fato desses sinais transmitidos terem banda essencialmente limitada, propõe-se o uso de um filtro FIR passa-baixas atuando como um sintonizador na entrada do receptor, de forma a melhorar o desempenho do SCBC digital em termos de BER.

O objetivo é sintonizar ou selecionar as frequências em que o sinal transmitido está presente, eliminando o ruído fora da banda desse sinal.

Na Seção 6.1 apresenta-se o SCBC digital. Em seguida, na Seção 6.2 propõe-se o uso do sintonizador e mostram-se os resultados numéricos, obtidos por meio de simulações, do desempenho do sistema digital, em termos de BER, considerando-se um canal de comunicação AWGN. Por fim, na Seção 6.3 apresentam-se as conclusões do capítulo.

Os resultados originais desse capítulo foram publicados em (FONTES; EISENCRAFT, 2014; FONTES; EISENCRAFT, 2016b).

6.1 SCBC EM BANDA LIMITADA PARA MENSAGENS BINÁRIAS

No sistema discutido na Seção 4.3, considerou-se a transmissão de mensagens analógicas (EISENCRAFT; FANGANIELLO; BACCALÁ, 2009). Mais precisamente, tomou-se $m(n)$ senoidal, com frequência dentro da banda de passagem do espectro do sinal

caótico de modo que, com a operação de codificação de soma escolhida, o sinal transmitido continuou com a banda do sinal caótico original.

Ao considerar-se a transmissão de uma mensagem digital, por meio de uma sequência binária polar b_i, $0 \leq i \leq N_b$, sendo N_b o número de bits da mensagem, formada por valores ± 1, é necessário formatar o espectro da mensagem $m(n)$ de modo que sua largura de banda seja menor ou igual à do sinal caótico, quando se considera novamente uma função codificação com soma.

Nesse sentido, considera-se aqui

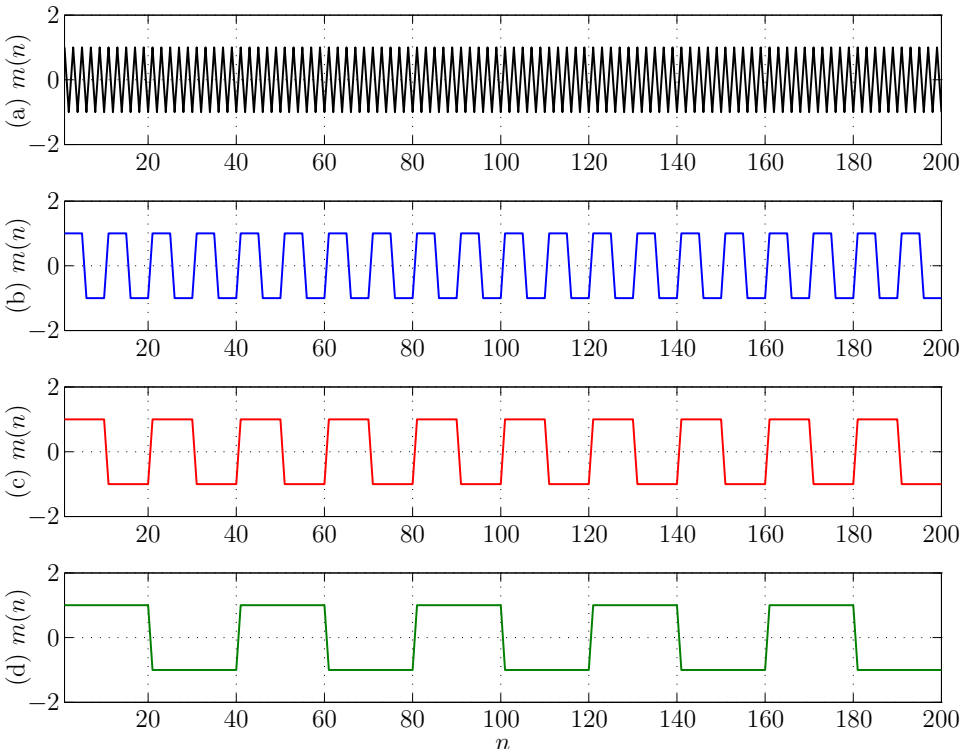
$$m(n) = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i p(n - Mi) \tag{6.1}$$

sendo

$$p(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < M - 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

um pulso retangular de M amostras. Na Figura 15(a)-(d) mostram-se alguns exemplos da mensagem $m(n)$ formatada pelo pulso retangular $p(n)$ para uma sequência b_i formada por $+1$s e -1s alternados.

Figura 15 – Mensagem $m(n)$ para diferentes valores de M para uma sequência b_i formada por $+1$s e -1s alternados com: (a) $M = 1$, (b) $M = 5$, (c) $M = 10$ e (d) $M = 20$.



Fonte: Autor.

Pode-se mostrar (LATHI; DING, 2009), que a DEP da mensagem $m(n)$, descrita em (6.1), formada por uma sequência binária polar equiprovável, é dada por

$$\mathcal{M}(\omega) = \frac{|P(\omega)|^2}{M}\left(R_{bb}(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} R_{bb}(n)\cos n\omega M\right), \tag{6.2}$$

sendo $P(\omega)$ a TFTD de $p(n)$ e

$$R_{bb}(k) = \lim_{N_b\to\infty}\frac{1}{N_b}\sum_{i=0}^{N_b-1} b_i b_{i+k} \tag{6.3}$$

a função de autocorrelação da sequência b_i.

Considerando-se que b_i é equiprovável, utilizando-se (6.3)

$$R_{bb}(0) = \lim_{N_b\to\infty}\frac{1}{N_b}\sum_{i=0}^{N_b-1} b_i^2 = 1 \tag{6.4}$$

e

$$R_{bb}(k) = \lim_{N_b\to\infty}\frac{1}{N_b}\sum_{i=0}^{N_b-1} b_i b_{i+k} = 0 \tag{6.5}$$

para $k \geq 1$.

Sendo (OPPENHEIM; SCHAFER, 2009)

$$|P(\omega)| = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{\omega M}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}, & \omega \neq 0 \\ M, & \omega = 0 \end{cases} \tag{6.6}$$

e substituindo-se (6.4) e (6.5) em (6.2), obtém-se que a DEP de $m(n)$ é dada pela expressão

$$\mathcal{M}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{M}\left[\frac{\sin\left(\frac{\omega M}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right]^2, & \omega \neq 0 \\ M, & \omega = 0 \end{cases}. \tag{6.7}$$

Alguns exemplos de $\mathcal{M}(\omega)$, para diferentes valores de M, são mostrados na Figura 16(a).

Considera-se nessa tese a frequência em que ocorre o segundo nulo de $\mathcal{M}(\omega)$, como a largura de banda, ω_M, da mensagem $m(n)$. De (6.7),

$$\omega_M = \frac{4\pi}{M}. \tag{6.8}$$

Utilizando-se (6.8), mostra-se, na Figura 16(b), que a fração da potência de $m(n)$, concentrada entre 0 e ω_M

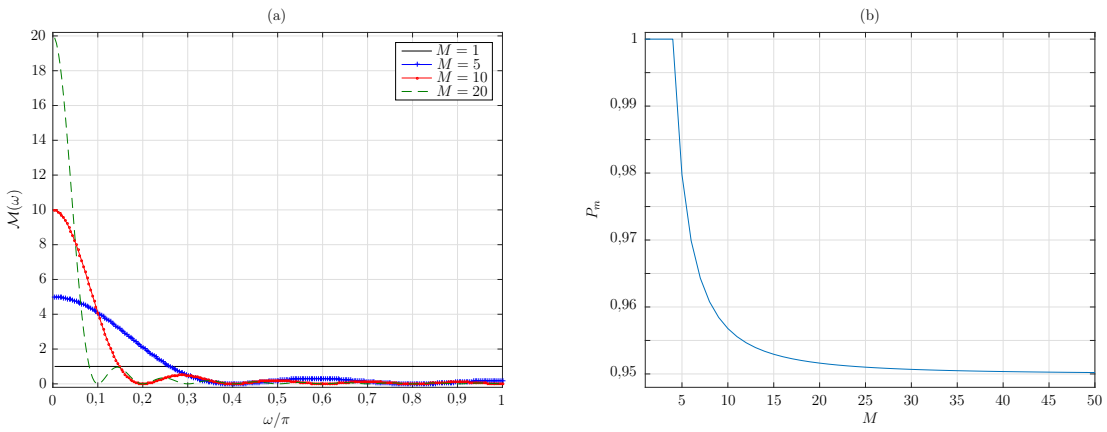
$$P_m = \frac{\int_0^{\omega_M}\mathcal{M}(\omega)d\omega}{\int_0^{\pi}\mathcal{M}(\omega)d\omega} \tag{6.9}$$

é superior a aproximadamente 95%, para todo M.

Com essa escolha, para que $m(n)$ tenha certa largura de banda pré-definida, ω_M, escolhe-se M como

$$M = \frac{4\pi}{\omega_M}. \tag{6.10}$$

Figura 16 – (a) DEP $\mathcal{M}(\omega)$ de $m(n)$ e (b) Fração da potência de $m(n)$, P_m, concentrada no intervalo $[0,\omega_M]$ em função de M.



Fonte: Autor.

Considera-se o sistema da Figura 13, descrito na Seção 4.3, com função de codificação

$$s(n) = (1-\gamma)\, x_3(n) + \gamma m(n) \tag{6.11}$$

e $\gamma = 0{,}3$. Mostra-se em (ABIB; EISENCRAFT, 2015), que esse valor de γ é a melhor escolha em termos de BER para que $m(n)$ não seja aparente em $s(n)$.

Sendo (6.11) uma soma, toma-se $\omega_M \leq \omega_S$, para que o filtro $H_S(\omega)$, no transmissor, não afete $m(n)$. Assim, escolhe-se

$$M \geq \frac{4\pi}{\omega_S}. \tag{6.12}$$

Note-se que, como M é o número de amostras por símbolo transmitido, a limitação em banda coloca um limite para a taxa de transmissão, como ocorre em qualquer sistema de comunicação digital convencional (HAYKIN, 2013).

Para obter-se a sequência binária estimada, $\widehat{b}_i$, no receptor, a partir da mensagem recuperada $\widehat{m}(n)$, utiliza-se o decisor ótimo pelo critério máximo *a posteriori* (HAYKIN, 2013), que nesse caso, consiste em calcular

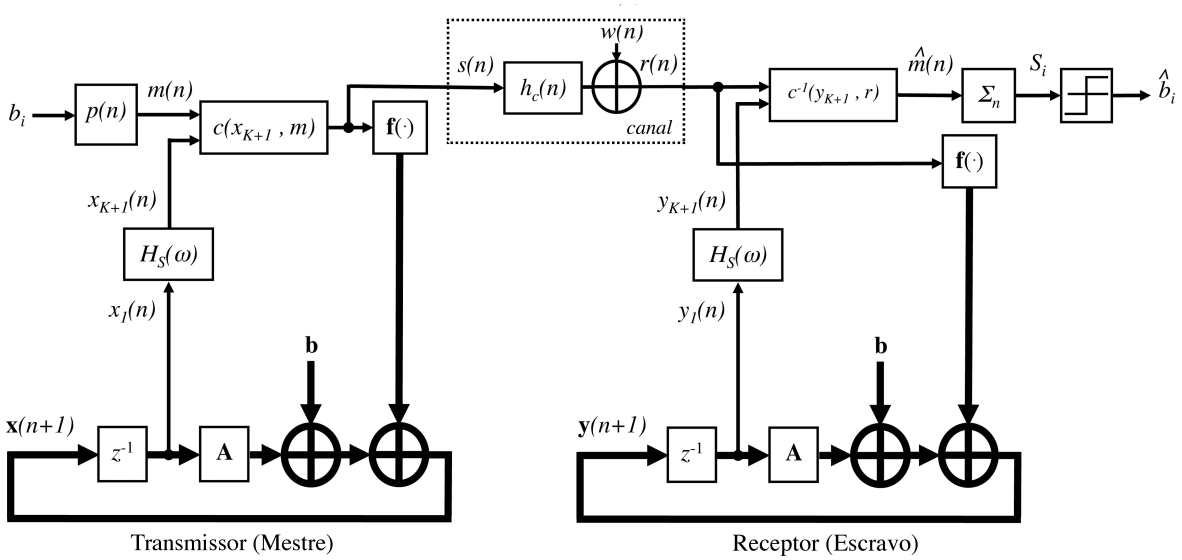
$$S_i = \sum_{n=iM}^{(i+1)M-1} \widehat{m}(n) \tag{6.13}$$

e decidir

$$\widehat{b}_i = \begin{cases} 1, & S_i \geq 0 \\ -1, & S_i < 0 \end{cases}. \tag{6.14}$$

A inclusão da formatação da mensagem e o mecanismo de decisão adicionados ao SCBC da Figura 13 é mostrado no diagrama da Figura 17. Considera-se que o canal de transmissão é AWGN sendo que $w(n)$ tem potência média σ_w^2 e $h_c(n) = \delta(n)$.

Figura 17 – Sistema de comunicação digital, de banda limitada e baseado em caos.



Fonte: Autor.

A condição de ruído no canal é medida pela relação sinal-ruído (SNR - *Signal-to-Noise ratio*) definida aqui como

$$\text{SNR} \triangleq \frac{P_{med}}{\sigma_w^2}, \tag{6.15}$$

sendo P_{med} a potência média temporal de $s^2(n)$.

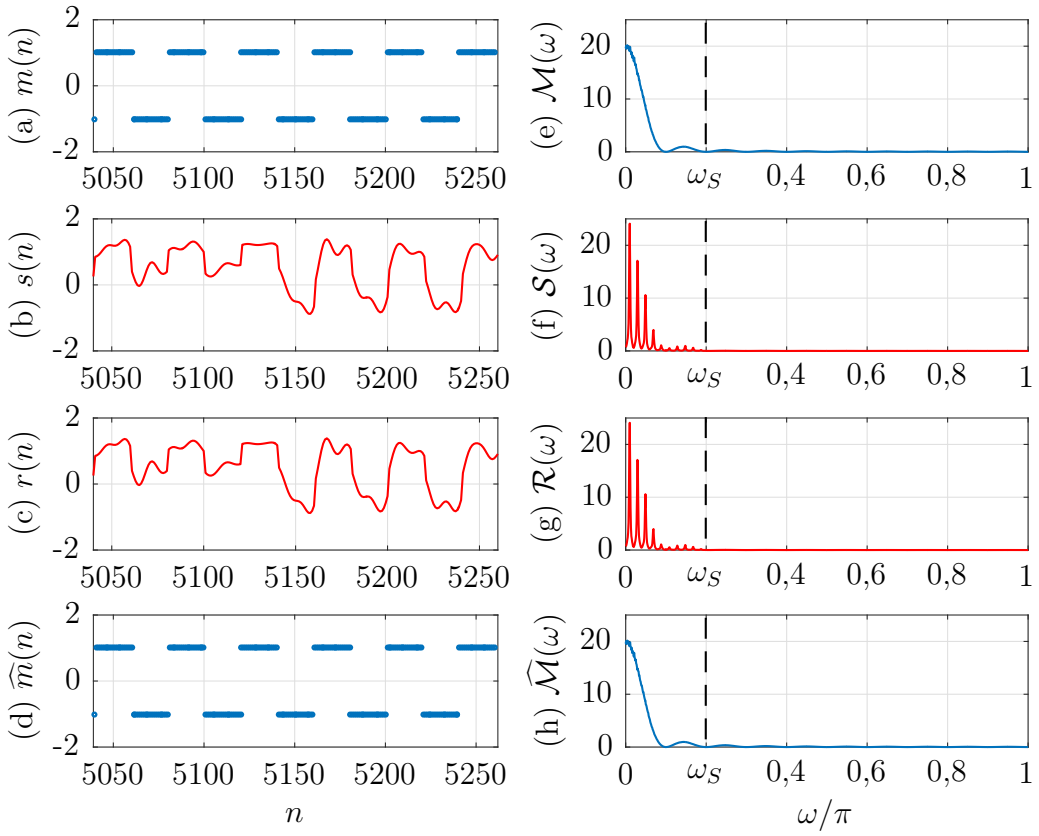
Na Figura 18 apresentam-se trechos de sinais $m(n)$, $s(n)$, $r(n)$ e $\widehat{m}(n)$ para $\omega_S = 0{,}2\pi$, $N_S = 200$ e SNR $= \infty$, ou seja, no caso de canal ideal. Levando-se em conta (6.12), considera-se $M = 20$. O intervalo n mostrado foi escolhido de forma que o transitório de sincronismo estivesse superado. Os sinais caóticos são gerados utilizando-se o mapa de Hénon (2.14) com $\alpha = 0{,}9$ e $\beta = 0{,}3$. Observando-se os gráficos, $m(n)$ é recuperada sem erros, como esperado, para as condições descritas.

Na Figura 19 exemplos de sinais $m(n)$, $s(n)$, $r(n)$ e $\widehat{m}(n)$, gerados a partir de uma sequência b_i considerando-se $\omega_S = 0{,}2\pi$, $N_S = 200$ e SNR $= 15$ dB. Novamente, toma-se $M = 20$. Note que a presença de ruído no canal afeta a mensagem recuperada $\widehat{m}(n)$, mas verifica-se uma tendência de oscilação em torno dos valores corretos de $m(n)$, para a SNR considerada.

6.2 SINTONIZAÇÃO

O sinal transmitido $s(n)$ do SCBC digital proposto é limitado em banda e o ruído AWGN, $w(n)$, tem sua potência igualmente distribuída em todas as frequências. Assim, $w(n)$ tem componentes significativas em frequência em que $s(n)$ praticamente não está presente. Dessa forma, propõe-se a inserção de um filtro FIR *sintonizador*, $H_T(\omega)$,

Figura 18 – Trechos de sinais do SCBC digital: (a) $m(n)$, (b) $s(n)$, (c) $r(n)$, (d) $\widehat{m}(n)$ e respectivas funções DEP: (e) $\mathcal{M}(\omega)$, (f) $\mathcal{S}(\omega)$, (g) $\mathcal{R}(\omega)$ e (h) $\widehat{\mathcal{M}}(\omega)$ para $M = 20$, $\omega_S = 0{,}2\pi$, $N_S = 200$ e SNR $= \infty$.



Fonte: Autor.

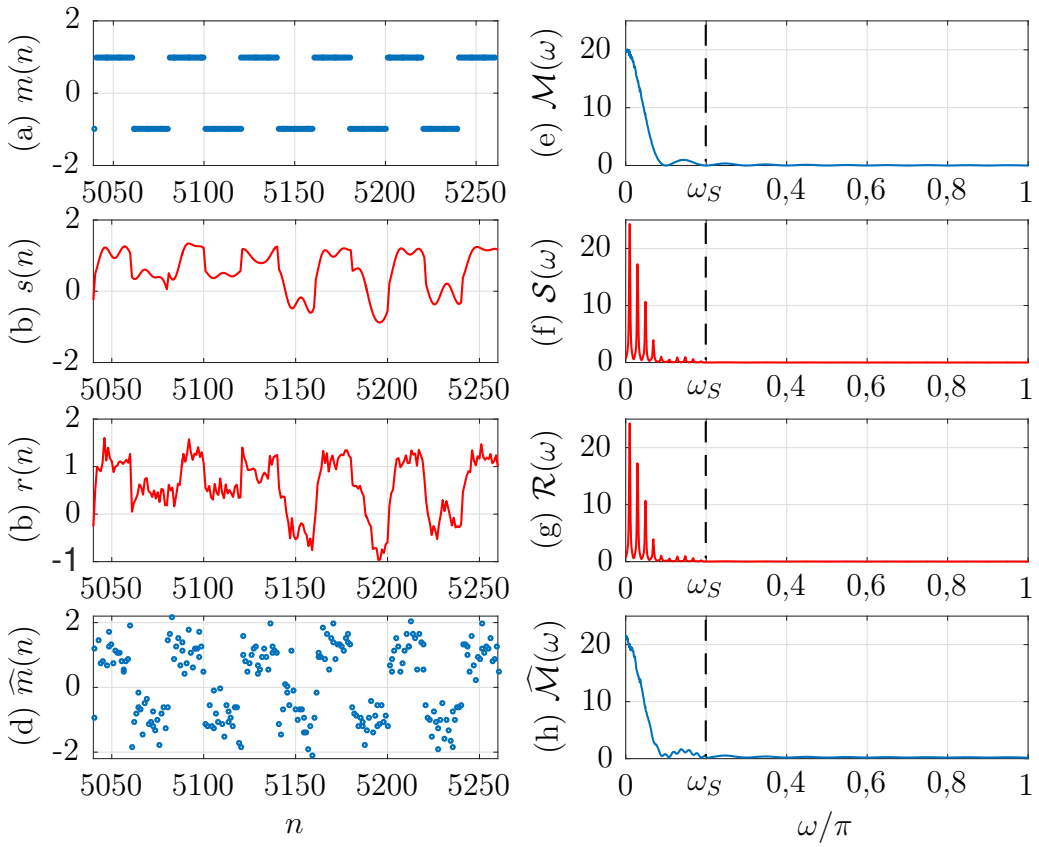
passa-baixas, com frequência de corte ω_T e coeficientes N_T, na entrada do receptor para eliminar a interferência do ruído nas frequências acima da banda do sinal. A introdução do sintonizador é ilustrada na Figura 20. Esse modelo é similar à sintonização usada em receptores convencionais (LATHI; DING, 2009; HAYKIN, 2013).

O sinal filtrado resultante, $r'(n)$, é usado na recuperação da mensagem de forma que

$$\widehat{m}(n) = c^{-1}\left(y_{K+1}(n), r'(n)\right). \tag{6.16}$$

Para ilustrar o processo de sintonização, mostra-se na Figura 21 o módulo da resposta em frequência de um sintonizador, $H_T(\omega)$, com $\omega_T = 0{,}38\pi$ e $N_T = 200$, e as DEPs normalizadas do ruído no canal $\mathcal{W}(\omega)$ e do sinal transmitido $\mathcal{S}(\omega)$, para $M = 20$, $\omega_S = 0{,}2\pi$, $N_S = 200$ e SNR $= 20$ dB. Nesse caso, a largura de banda da mensagem é $\omega_M = \frac{4\pi}{20} = 0{,}2\pi$ e a largura do sinal transmitido é praticamente ω_S. Note-se que na faixa de rejeição do filtro a DEP do ruído é dominante.

Figura 19 – Sinais do SCBC digital: (a) $m(n)$, (b) $s(n)$, (c) $r(n)$, (d) $\widehat{m}(n)$ e respectivas funções DEP: (e) $\mathcal{M}(\omega)$, (f) $\mathcal{S}(\omega)$, (g) $\mathcal{R}(\omega)$ e (h) $\widehat{\mathcal{M}}(\omega)$ para $M = 20$, $\omega_S = 0{,}2\pi$, $N_S = 200$ e SNR = 15 dB .



Fonte: Autor.

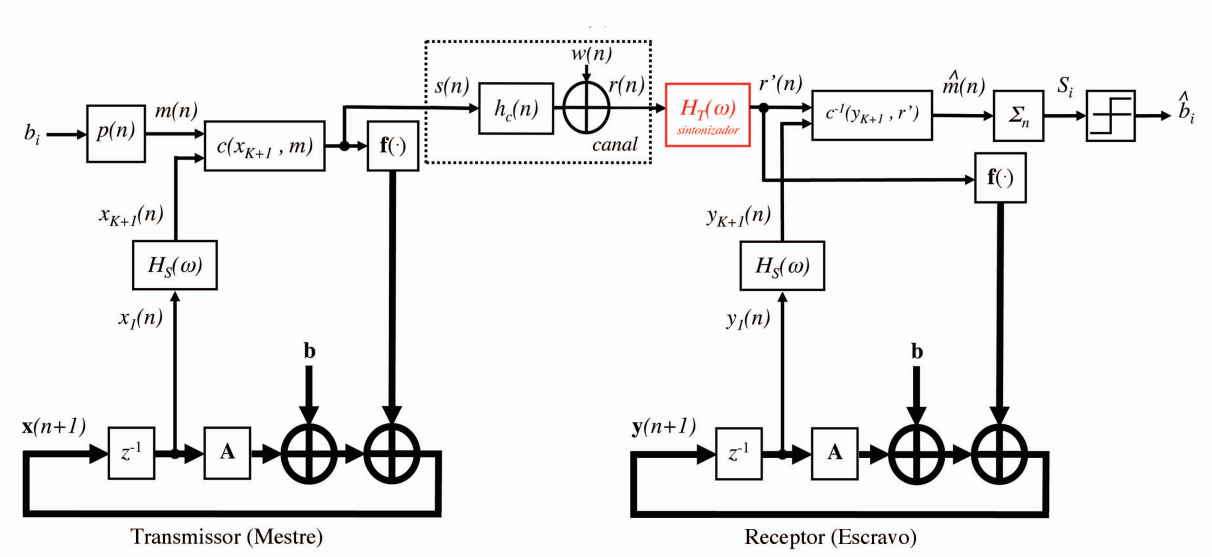
A seguir avalia-se numericamente, em termos de BER, o desempenho do SCBC digital utilizando o sintonizador.

Na Figura 22 mostram-se os valores de BER obtidos como função da frequência de corte, ω_T, do filtro sintonizador, para SNR = 10 dB. Por um lado, dado que a frequência de corte dos filtros dos sistemas mestre e escravo é $\omega_S = 0{,}2\pi$, verifica-se que para $\omega_T < 0{,}2\pi$ os valores da BER aumentam abruptamente, visto que algumas componentes relevantes do sinal estão sendo afetadas pelo sintonizador. A partir de $\omega_T \approx 0{,}4\pi$ a BER aumenta suavemente com ω_T, o que indica que não há componente relevante do sinal acima dessa frequência e aumentar a banda do sinal recebido apenas acrescenta ruído. Assim, a frequência de corte ótimo, ω_{T_o}, para o filtro sintonizador deve estar entre $0{,}2\pi$ e $0{,}4\pi$. Numericamente, determina-se que o valor de ω_{T_o} que leva à menor BER para a SNR = 10 dB é

$$\omega_{To} \approx 0{,}38\pi, \tag{6.17}$$

que é indicado na Figura 22.

Figura 20 – SCBC digital com sintonizador.



Fonte: Autor.

Na Figura 23 compara-se o desempenho do SCBC digital, em termos de BER, para os casos com sintonizador ótimo, $\omega_{T_o} = 0{,}38\pi$, e sem filtro sintonizador, ou seja, $\omega_T = \pi$. Para efeito de comparação, mostra-se também nessa figura a BER para o *Binary Phase-Shift Keying* (BPSK), um sistema de comunicação convencional transmitindo $m(n)$. Observa-se que há vantagem na utilização do sintonizador para valores de SNR menores do que aproximadamente SNR = 12 dB. Desta forma, o filtro sintonizador está eliminando o ruído acima da banda do sinal mantendo-se o sinal transmitido, de fato, limitado em banda. Entretanto, a BER do SCBC está muito distante daquela observada para o BPSK, sendo esta a principal desvantagem dos SCBCs em relação aos sistemas usados na prática.

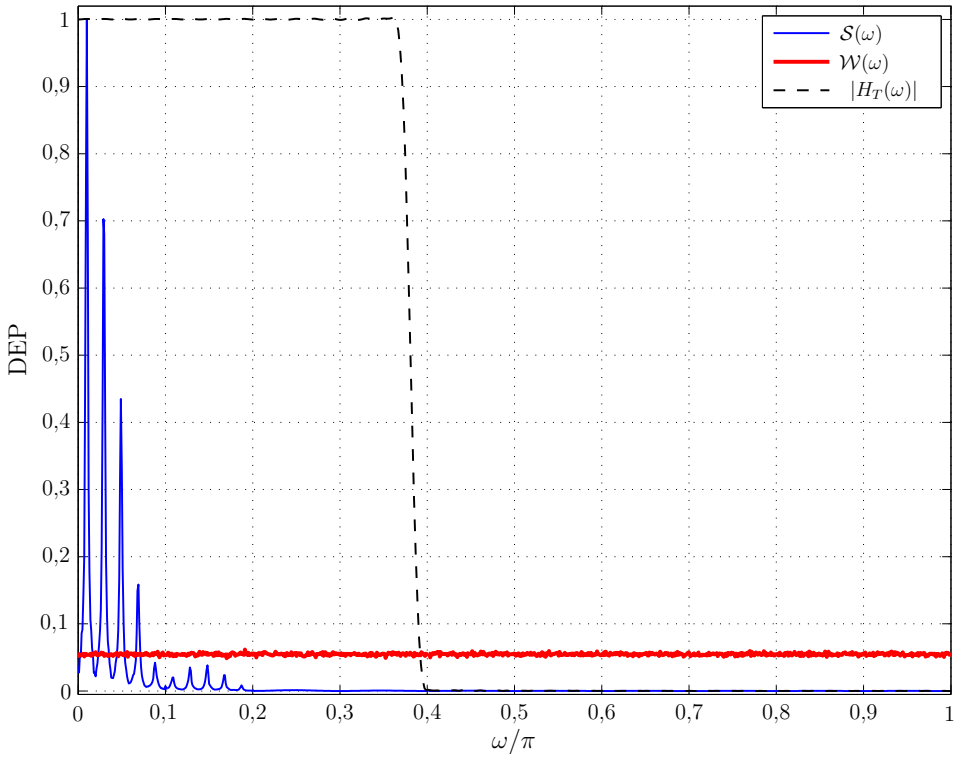
6.3 CONCLUSÕES

Nesse capítulo adaptou-se o SCBC em banda limitada descrito no Capítulo 4 para a transmissão de mensagens binárias. Para isso, mostrou-se a formatação do espectro da mensagem $m(n)$, para que sua largura de banda estivesse dentro da largura de banda do sinal transmitido $s(n)$. Em seguida, mostrou-se a utilização de um decisor ótimo para a recuperação da sequência b_i.

Além disso, usando-se do fato de que os sinais caóticos transmitidos são em banda limitada, na Seção 6.2 é descrito o uso de um filtro sintonizador para eliminar o ruído fora da banda do sinal e consequentemente melhorar a BER na entrada do receptor, como é usual em sistemas convencionais.

Os principais resultados mostrados nesse capítulo foram publicados em (FONTES; EISENCRAFT; MONTEIRO, 2011; FANGANIELLO et al., 2013; FONTES; EISEN-

Figura 21 – Largura de banda do ruído e de $s(n)$ e o módulo da resposta em frequência de $H_T(\omega)$.



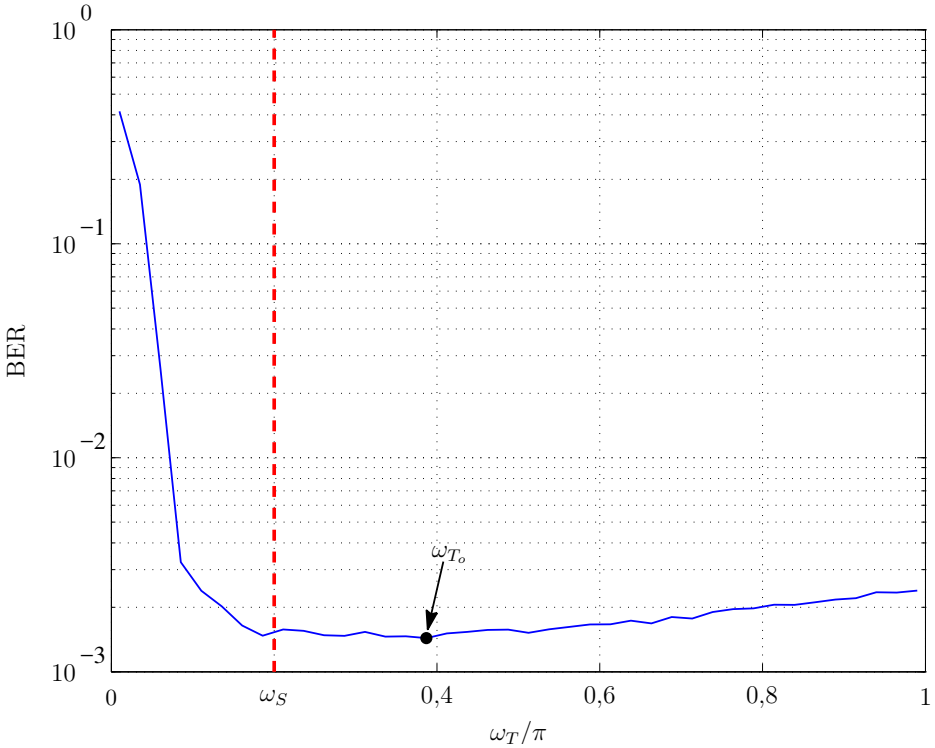
Fonte: Autor.

CRAFT, 2014; FONTES; EISENCRAFT, 2016b).

Esses resultados obtidos mostram que é possível projetar-se um SCBC transmitindo sinais digitais e que, de modo similar aos sistemas convencionais, pode-se utilizar um sintonizador no receptor para melhorar a BER. Mesmo assim, as taxas obtidas ainda estão longe daquelas observadas em sistemas convencionais como o BPSK. Nesse sentido, os SCBCs ainda precisam que seu desempenho tenham um ganho expressivo para serem considerados como uma alternativa aos sistemas atuais.

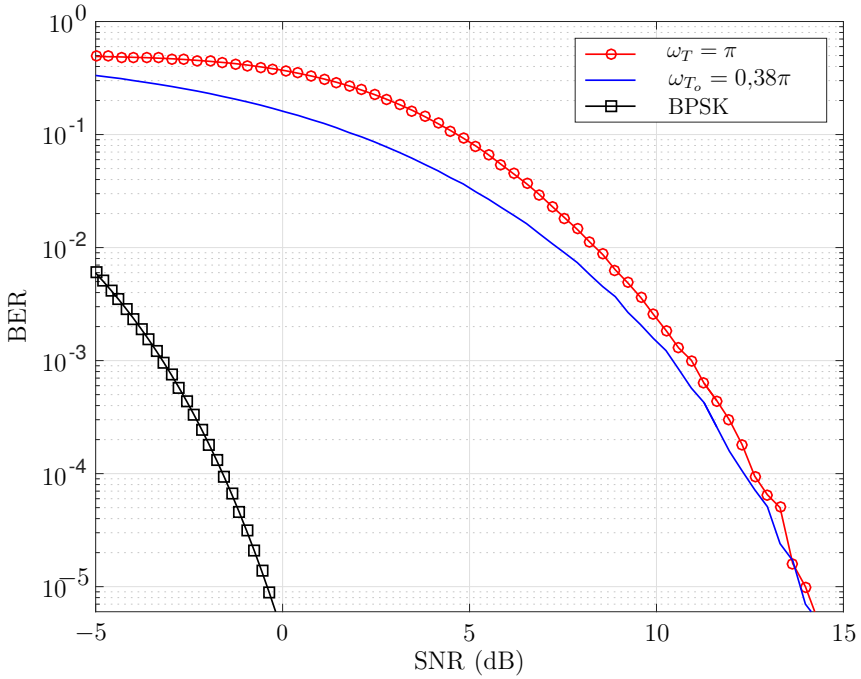
Se do ponto de vista de Telecomunicações o SCBC mostrou-se viável para certas condições teóricas, nada pode se afirmar sobre a natureza caótica dos sinais transmitidos. No Capítulo 7, analisam-se os expoentes de Lyapunov dos sinais transmitidos pelo SCBC digital, para se determinar em que condições esses sinais mantém-se de fato caóticos.

Figura 22 – BER em função da frequência de corte do filtro sintonizador ω_T para SNR = 10 dB.



Fonte: Autor.

Figura 23 – BER em função dos valores de SNR para o SCBC com sintonizador ótimo, $\omega_{T_o} = 0{,}38\pi$, sem filtro sintonizador $\omega_T = \pi$ e para o sistema de comunicação BPSK.



Fonte: Autor.

7 RESULTADOS OBTIDOS - PARTE 3: EXPOENTES DE LYAPUNOV DOS SINAIS TRANSMITIDOS

Neste capítulo determinam-se os expoentes de Lyapunov dos sinais transmitidos pelo SCBC digital, tratado nos capítulos anteriores, quando se utiliza o mapa de Hénon.

Apesar das condições de sincronismo estarem bem estabelecidas, os resultados até aqui não garantem que os sinais transmitidos são caóticos, quando se introduzem os filtros $H_S(\omega)$ e a mensagem binária $m(n)$.

Em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; MONTEIRO, 2011) faz-se uma análise preliminar em que se desconsidera a influência da mensagem. Mesmo nesse cenário simplificado, o transmissor pode gerar sinais caóticos ou periódicos ou mesmo divergir dependendo do número de coeficientes e da frequência de corte dos filtros.

Neste capítulo esses resultados são expandidos levando-se em conta que $m(n)$ afeta o sinal caótico gerado pelo sistema mestre de forma não desprezível. Além disso, consideram-se diversas formas de se projetar o filtro $H_S(\omega)$.

Como visto na Seção 2.2, no cálculo dos expoentes de Lyapunov é necessária a matriz jacobiana do mapa em estudo. Assim, na Seção 7.1, obtém-se uma expressão para essa matriz associada ao sistema transmissor da Figura 13. A partir dessa expressão, na Seção 7.2, obtém-se numericamente o maior expoente de Lyapunov para os sinais transmitidos em diversas configurações utilizando-se o método do mapa tangente descrito na Seção 2.2.3.

Por fim, na Seção 7.3 tecem-se conclusões sobre a natureza caótica ou não dos sinais transmitidos pelo sistema de comunicação descrito nos capítulos anteriores. Considera-se que esses resultados são contribuições originais relevantes desta tese.

7.1 MATRIZ JACOBIANA PARA O MAPA DE HÉNON FILTRADO

Nesta seção, calcula-se, utilizando-se a Definição 2.5, a matriz jacobiana do sistema transmissor, (4.20), descrito no Capítulo 4 como

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(s(n)). \tag{7.1}$$

Considera-se como sistema gerador de caos o mapa de Hénon[1]

$$\mathbf{x}(n+1) = \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - x_1^2(n) + \beta x_2(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix}. \tag{7.2}$$

[1] Esse mapa de Hénon, equivalente aquele original descrito em (2.14), é obtido fazendo-se as mudanças de variáveis: $x_1'(n) = \alpha x_1(n)$ e $x_2'(n) = \frac{\alpha}{\beta} x_2(n)$. O mapa mostrado em (7.2) elimina a necessidade de divisão do parâmetro β nas variáveis auxiliares e consequentemente nos coeficientes do filtro.

Inserindo-se o filtro $H_S(\omega)$ no mapa de Hénon definido em (7.2), assim como feito na Seção 4.3, reescreve-se o sistema mestre da Figura 13 como

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= \alpha - s^2(n) + \beta x_2(n) \\ x_2(n+1) &= x_1(n) \\ x_3(n+1) &= c_0 x_1(n+1) + c_1 x_1(n) + c_2 x_1(n-1) + \cdots + c_{N_S-1} x_1(n-N_S+2) \end{cases}, \tag{7.3}$$

com

$$s(n) = (1-\gamma)x_3(n) + \gamma m(n). \tag{7.4}$$

Nessa tese, a mensagem binária $m(n)$, descrita por (6.1), formada por uma sequência aleatória de símbolos binários, é uma realização de um processo estocástico estacionário ergódico (HAYKIN, 2013). Dessa forma, para se definir e calcular os expoentes de Lyapunov desse sistema, é necessário recorrer à teoria de sistemas dinâmicos aleatórios (veja, por exemplo, (ARNOLD, 1998)). Devido à ergodicidade do processo, as propriedades dinâmicas podem ser deduzidas a partir de uma única realização de $m(n)$ suficientemente longa (ARNOLD, 1998).

Substituindo (7.4) em (7.3), resulta em

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= \alpha - [(1-\gamma)x_3(n) + \gamma m(n)]^2 + \beta x_2(n) \\ x_2(n+1) &= x_1(n) \\ x_3(n+1) &= c_0 x_1(n+1) + c_1 x_1(n) + c_2 x_1(n-1) + \cdots + c_{N_S-1} x_1(n-N_S+2) \end{cases}. \tag{7.5}$$

A seguir, determina-se as matrizes jacobianas $\mathbf{J}(\mathbf{x}(n))$ para $N_S = 1$, $N_S = 2$, $N_S = 3$ e $N_S > 3$. Para facilitar a notação, denota-se nesse capítulo que $\mathbf{J}(n) = \mathbf{J}(\mathbf{x}(n))$.

Caso $N_S = 1$

Nesse caso $H_S(\omega)$ é um simples ganho,

$$x_3(n+1) = c_0 x_1(n+1) \tag{7.6}$$

e (7.5) é reescrita como

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= \alpha - [(1-\gamma)x_3(n) + \gamma m(n)]^2 + \beta x_2(n) \\ x_2(n+1) &= x_1(n) \\ x_3(n+1) &= c_0 x_1(n+1) \end{cases}, \tag{7.7}$$

resultando

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= \alpha - [(1-\gamma)c_0 x_1(n) + \gamma m(n)]^2 + \beta x_2(n) \\ x_2(n+1) &= x_1(n) \end{cases}. \tag{7.8}$$

A matriz jacobiana de (7.8) é dada por

$$\mathbf{J}_1(n) = \begin{bmatrix} -2(1-\gamma)^2 c_0^2 x_1(n) - 2(\gamma-\gamma^2)c_0 m(n) & \beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.9}$$

Caso $N_S = 2$

Para esse caso, o filtro $H_S(\omega)$ é dado por

$$x_3(n+1) = c_0 x_1(n+1) + c_1 x_1(n) \tag{7.10}$$

e assim, (7.5) torna-se

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= \alpha - [(1-\gamma)x_3(n) + \gamma m(n)]^2 + \beta x_2(n) \\ x_2(n+1) &= x_1(n) \\ x_3(n+1) &= c_0 x_1(n+1) + c_1 x_1(n) \end{cases}, \tag{7.11}$$

resultando

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= \alpha - [(1-\gamma)(c_0 x_1(n) + c_1 x_2(n)) + \gamma m(n)]^2 + \beta x_2(n) \\ x_2(n+1) &= x_1(n) \end{cases}. \tag{7.12}$$

Sua matriz jacobiana é dada por

$$\mathbf{J}_2(n) = \begin{bmatrix} -\theta_1 c_0^2 x_1(n) - \theta_1 c_0 c_1 x_2(n) - \theta_2 c_0 m(n) & -\theta_1 c_1^2 x_2(n) - \theta_1 c_0 c_1 x_1(n) - \theta_2 c_1 m(n) + \beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7.13}$$

sendo $\theta_1 = 2(1-\gamma)^2$ e $\theta_2 = 2(\gamma - \gamma^2)$.

Caso $N_S = 3$

Para $N_S = 3$, o filtro é dado por

$$x_3(n+1) = c_0 x_1(n+1) + c_1 x_1(n) + c_2 x_1(n-1) \tag{7.14}$$

tornando (7.5) igual a

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= \alpha - [(1-\gamma)x_3(n) + \gamma m(n)]^2 + \beta x_2(n) \\ x_2(n+1) &= x_1(n) \\ x_3(n+1) &= c_0 x_1(n+1) + c_1 x_1(n) + c_2 x_1(n-1) \end{cases}. \tag{7.15}$$

Utilizando-se a variável de estado auxiliar

$$x_{K+2}(n+1) \triangleq x_2(n) \tag{7.16}$$

em (7.15), lembrando que $x_2(n) = x_1(n-1)$ e $K = 2$ para o mapa (7.2), obtém-se a matriz jacobiana

$$\mathbf{J}_3(n) = \begin{bmatrix} 0 & \beta & -2(1-\gamma)^2 x_3(n) - 2(\gamma - \gamma^2) m(n) \\ 1 & 0 & 0 \\ c_1 & c_0\beta + c_2 & -2(1-\gamma)^2 c_0 x_3(n) - 2(\gamma - \gamma^2) c_0 m(n) \end{bmatrix}. \tag{7.17}$$

Caso $N_S > 3$

Para esses filtros,

$$x_3(n+1) = c_0 x_1(n+1) + c_1 x_1(n) + c_2 x_1(n-1) + \cdots + c_{N_S-1} x_1(n - N_S + 2). \quad (7.18)$$

Definindo-se as variáveis de estado auxiliares

$$\begin{cases} x_{K+2}(n+1) & \triangleq x_2(n) \\ x_{K+3}(n+1) & \triangleq x_{K+2}(n) \\ & \vdots \\ x_{N_S}(n+1) & \triangleq x_{N_S-1}(n) \end{cases}, \quad (7.19)$$

e, substituindo-se $x_1(n+1)$ na última equação de (7.5) e utilizando-se (7.19), reescreve-se o sistema transmissor como

$$\begin{cases} x_1(n+1) & = & \alpha - [(1-\gamma)x_3(n) + \gamma m(n)]^2 + \beta x_2(n) \\ x_2(n+1) & = & x_1(n) \\ x_3(n+1) & = & c_0\{\alpha - [(1-\gamma)x_3(n) + \gamma m(n)]^2 + \beta x_2(n)\} + c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n) + \\ & & c_3 x_4(n) + c_4 x_5(n) + \cdots + c_{N_S-1} x_{N_S}(n) \\ & & \vdots \\ x_4(n+1) & = & x_2(n) \\ x_5(n+1) & = & x_4(n) \\ x_6(n+1) & = & x_5(n) \\ & & \vdots \\ x_{N_S}(n+1) & = & x_{N_S-1}(n) \end{cases}. \quad (7.20)$$

A matriz jacobiana do sistema descrito em (7.20) é dada por

$$\mathbf{J}_{(N_S \times N_S)}(n) = \begin{bmatrix} 0 & \beta & -2(1-\gamma)^2 x_3(n) - 2(\gamma - \gamma^2) m(n) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & c_0\beta + c_2 & -2(1-\gamma)^2 c_0 x_3(n) - 2(\gamma - \gamma^2) c_0 m(n) & c_3 & \dots & c_{N_S-2} & c_{N_S-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.21)$$

As matrizes jacobianas (7.9), (7.13), (7.17) e (7.21) obtidas, permitem o cálculo dos expoentes de Lyapunov do SCBC limitado em banda para o mapa de Hénon, utilizando o método descrito na Seção 2.2.3.

Na Seção 7.2, os expoentes de Lyapunov desses sistemas são calculados em função do comprimento e da frequência de corte do filtro, do parâmetro γ da função de codificação da mensagem e dos parâmetros do mapa de Hénon.

7.2 CÁLCULO NUMÉRICO DO MAIOR EXPOENTE DE LYAPUNOV

Nesta seção os sistemas descritos na Seção 7.1 são simulados computacionalmente para se determinar os expoentes de Lyapunov.

O cálculo do maior expoente de Lyapunov, h_1, é feito aplicando-se as matrizes jacobianas, obtidas na seção anterior, no método numérico descrito na Seção 2.2.3.

O sinal $s(n)$, transmitido pelo SCBC, é caótico se o maior expoente de Lyapunov do sistema $h_1 > 0$, conforme a Definição 2.12. Se $h_1 < 0$, o sinal gerado não é caótico podendo convergir para um ponto fixo ou ser periódico.

Na Seção 7.2.1, h_1 é calculado para o SCBC filtrado com um filtro com comprimento $N_S = 1$ e $\gamma = 0$, ou seja, o sistema sem a mensagem $m(n)$. Na sequência, na Seção 7.2.2, calcula-se o maior expoente de Lyapunov para $N_S = 2$ e $\gamma = 0$ em função dos coeficientes c_0 e c_1 do filtro. Ainda considerando o SCBC sem mensagem, na Seção 7.2.3 obtém-se h_1 para $N_S > 3$. Por fim, na Seção 7.2.4 a mensagem $m(n)$ é inserida nas simulações e h_1 é calculado em função do parâmetro γ da função de codificação.

Em todas as simulações utiliza-se o valor usual de $\beta = 0{,}3$ para o mapa de Hénon (HÉNON, 1976; ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1997) e $n = 10^4$ iterações do sistema dinâmico.

7.2.1 Caso $N_S = 1$ e $\gamma = 0$

Para $N_S = 1$ e $\gamma = 0$, o sistema (7.8) é reescrito como

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= \alpha - c_0^2 x_1^2(n) + \beta x_2(n) \\ x_2(n+1) &= x_1(n) \end{cases} \tag{7.22}$$

com sua matriz jacobiana (7.9) dada por

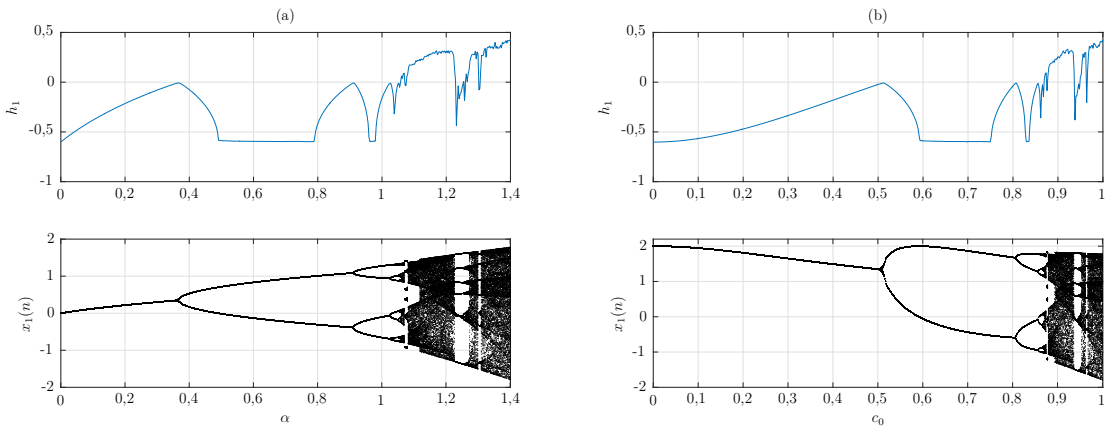
$$\mathbf{J}_1(n) = \begin{bmatrix} -2c_0^2 x_1(n) & \beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.23}$$

Note que, se $c_0 = 1$ na equação (7.22), a dinâmica do sistema torna-se igual aquela descrita por (7.2).

Considera-se inicialmente $c_0 = 1$, isto é, o sistema sem a presença do filtro. Na Figura 24(a) mostra-se o maior expoente de Lyapunov, h_1, e o diagrama de bifurcação para $0 < \alpha \leq 1{,}4$.

Nota-se que, após um intervalo de bifurcações periódicas há uma faixa de valores, $1{,}1 \leq \alpha \leq 1{,}2$ e $1{,}25 \leq \alpha \leq 1{,}4$, para os quais observa-se a geração de sinais caóticos, dado que $h_1 > 0$. Em particular, para $\alpha = 1{,}4$, como normalmente utilizado na literatura (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1997), obtém-se caos.

Figura 24 – Expoentes de Lyapunov e diagrama de bifurcação do mapa (7.22): (a) em função de α com $c_0 = 1$ e (b) em função de c_0 com $\alpha = 1{,}4$.



Fonte: Autor.

Fixando-se $\alpha = 1{,}4$, o maior expoente de Lyapunov e o diagrama de bifurcação são mostrados na Figura 24(b) para $0 < c_0 \leq 1$.

Ambos os gráficos da Figura 24(b) são versões distorcidas daqueles apresentados na Figura 24(a). Claramente observa-se que o valor do coeficiente do filtro, c_0, altera as propriedades caóticas do sistema (7.22). Nesse caso é possível obter caos para $0{,}87 \leq c_0 \leq 0{,}92$ e $c_0 > 0{,}97$, regiões em que $h_1 > 0$. Para outros valores de c_0 obtém-se pontos fixos ou órbitas periódicas.

Na Figura 25(a), mostra-se a órbita caótica obtida para $c_0 = 0{,}9$. Na Figura 25(b), mostra-se a órbita periódica obtida para $c_0 = 0{,}7$.

Pode-se observar que o valor do coeficiente c_0 do filtro, altera as propriedades caóticas dos sistema de Hénon original. Mesmo nesse caso simples, a inserção do filtro $H_S(\omega)$ pode modificar as propriedades dinâmicas dos sinais gerados.

7.2.2 Caso $N_S = 2$ e $\gamma = 0$

Aumentando-se o número de coeficientes do filtro para $N_S = 2$, mantendo-se $\gamma = 0$, reescreve-se o sistema descrito em (7.12) como

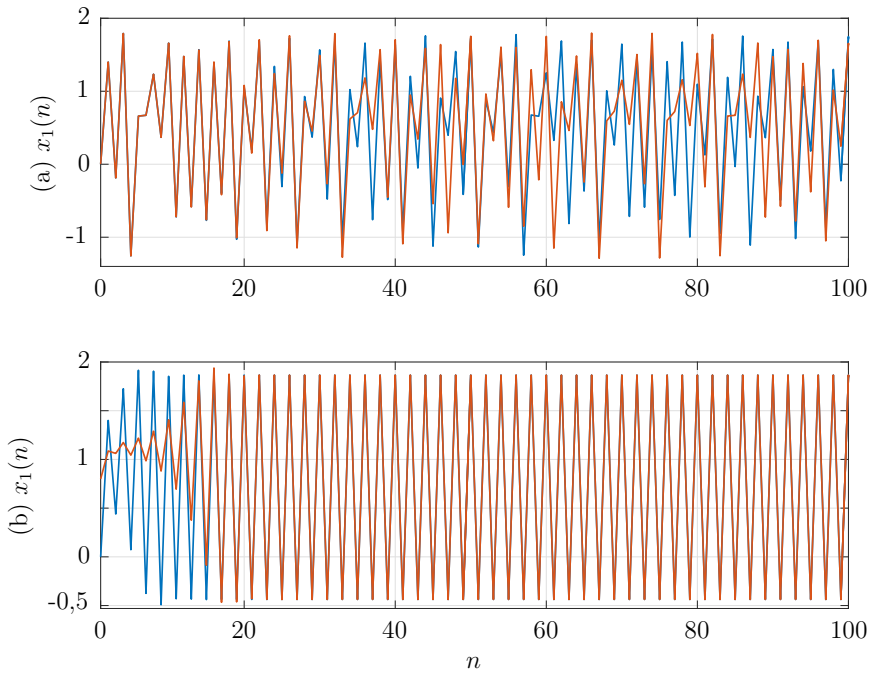
$$\begin{cases} x_1(n+1) &= \alpha - (c_0 x_1(n) + c_1 x_2(n))^2 + \beta x_2(n) \\ x_2(n+1) &= x_1(n) \end{cases}, \tag{7.24}$$

sendo a matriz jacobiana (7.13) dada por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -2c_0^2 x_1(n) - 2c_0 c_1 x_2(n) & -2c_0 c_1 x_1(n) - 2c_1^2 x_2(n) + \beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.25}$$

Na Figura 26 mostram-se regiões em que o maior expoente de Lyapunov, h_1, é positivo e negativo em função do espaço $c_0 \times c_1$, para $\{c_0, c_1\} \in [0{,}1]$ e $\alpha = 1{,}4$.

Figura 25 – Gráficos de $x_1(n)$ obtidos a partir do sistema descrito em (7.22), com: (a) $c_0 = 0{,}9, \mathbf{x}^{(1)}(0) = [0{,}000\ 0{,}000]^T, \mathbf{x}^{(2)}(0) = [0{,}001\ 0{,}000]^T$ e (b) $c_0 = 0{,}7, \mathbf{x}^{(1)}(0) = [0{,}000\ 0{,}000]^T, \mathbf{x}^{(2)}(0) = [0{,}800\ 0{,}000]^T$.



Fonte: Autor.

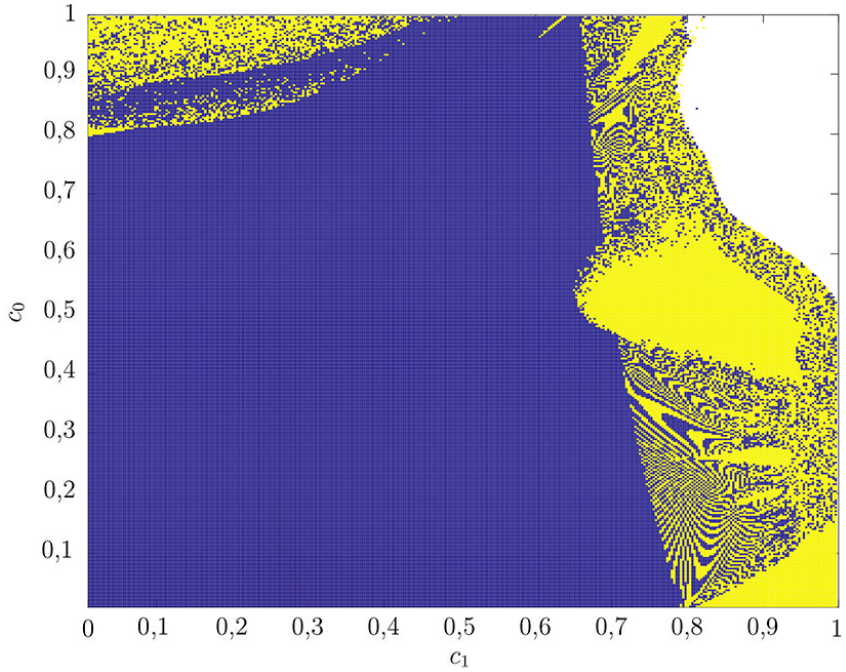
As regiões azuis (mais escuras) representam $h_1 < 0$, não-caóticas, enquanto as regiões amarelas (mais claras) têm $h_1 > 0$, ou seja, apresentam caos. As regiões brancas representam órbitas divergentes.

Para $c_0 < 0{,}6$ e $c_1 < 0{,}6$ o sistema gera sinais não caóticos. Para outros valores de c_0 e c_1 é possível obter sinais caóticos, para combinações específicas de c_0 e c_1. Entretanto, se $c_0 > 0{,}85$ e $c_1 > 0{,}85$ as órbitas divergem como mostra a área branca da Figura 26.

Observando-se a área da Figura 26 em que $0{,}6 \leq c_1 \leq 1$, notam-se alguns padrões complicados entre as regiões que apresentam caos e aquelas que não apresentam essa condição. Nota-se que existem padrões semelhantes a fractais (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1997). Essas regiões mostram o quanto os coeficientes do filtro inserido no sistema afetam a condição caótica. Pequenas variações nos valores de cada coeficiente podem mudar completamente a natureza caótica dos sinais gerados.

Essas estruturas são relevantes e merecem ser melhores estudadas em trabalhos futuros.

Figura 26 – Expoentes de Lyapunov h_1 para o mapa (7.24) no espaço $c_0 \times c_1$ com $\alpha = 1{,}4$ para $\{c_0, c_1\} \in [0{,}1]$. As regiões azuis (escuras) representam $h_1 < 0$ e as regiões amarelas (claras) representam $h_1 > 0$. Nas regiões brancas as órbitas digervem.



Fonte: Autor.

7.2.3 Caso $N_S > 3$ e $\gamma = 0$

Nessa seção estuda-se o caso em que $N_S > 3$. Em todas as simulações considera-se $\alpha = 0{,}9$ para o mapa de Hénon. A escolha de α é baseada nos resultados mostrados em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; MONTEIRO, 2011), no qual, para esse valor, é possível obter uma larga faixa de valores de ω_S e N_S que geram sinais caóticos para o SCBC em questão.

Desconsiderando-se $m(n)$, ou seja, fazendo $\gamma = 0$, reescreve-se o sistema (7.20) como

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= \alpha - x_3^2(n) + \beta x_2(n) \\ x_2(n+1) &= x_1(n) \\ x_3(n+1) &= c_0\{\alpha - x_3^2(n) + \beta x_2(n)\} + c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n) + \\ & \quad c_3 x_4(n) + c_4 x_5(n) + \cdots + c_{N_S-1} x_{N_S}(n) \\ & \quad \vdots \\ x_4(n+1) &= x_2(n) \\ x_5(n+1) &= x_4(n) \\ x_6(n+1) &= x_5(n) \\ & \quad \vdots \\ x_{N_S}(n+1) &= x_{N_S-1}(n) \end{cases}, \tag{7.26}$$

resultando na matriz jacobiana

$$\mathbf{J}_{(N_S \times N_S)}(n) = \begin{bmatrix} 0 & \beta & -2x_3(n) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & c_0\beta + c_2 & -2c_0x_3(n) & c_3 & \dots & c_{N_S-2} & c_{N_S-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.27}$$

Considera-se que os coeficientes do filtro são projetados pelo método do janelamento para filtros FIR, descrito na Seção 3.1. Em particular, nesse trabalho, foram utilizadas nas simulações as janelas de Hamming e de Blackman (OPPENHEIM; SCHAFER, 2009).

Nas Figuras 27(a) e 27(b) mostram-se os maiores expoentes de Lyapunov para o sistema (7.26), para filtros projetados com a janela de Hamming, em função da frequência de corte, ω_S, e do comprimento, N_S, do filtro, respectivamente.

Pode-se observar nos gráficos da Figura 27(a), que para $N_S > 10$ há um intervalo maior de frequências para as quais os sinais são caóticos. Em contrapartida, para $N_S \leq 10$ a condição caótica é praticamente inexistente com poucas exceções.

Na Figura 27(b) mostra-se h_1 em função do comprimento do filtro N_S para valores específicos de ω_S. Os valores indicados são tomados da média dos expoentes obtidos dentre 10 condições iniciais para os mesmos N_S e ω_S. As barras horizontais em cada ponto do gráfico medem o desvio padrão em torno da média do valor do expoente de Lyapunov.

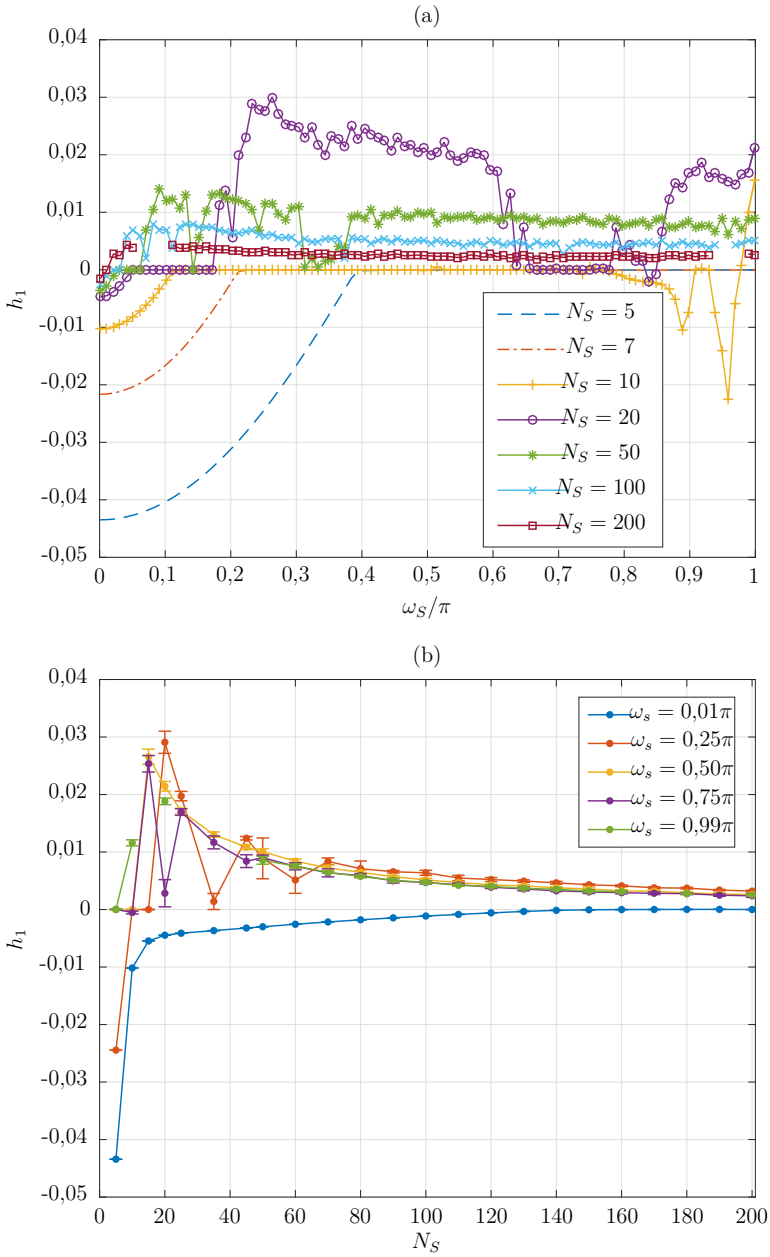
Os gráficos da Figura 27(b) mostram que para $N_S > 45$, com exceção de $\omega_S = 0{,}01\pi$, os sinais são caóticos. Nota-se também a convergência dos valores dos expoentes de Lyapunov para essa condição. De modo geral, os resultados da Figura 27 mostram que o sistema transmite sinais caóticos para filtros com comprimento elevado e frequência de corte não muito baixa.

Para ilustrar os resultados obtidos nos gráficos da Figura 27, mostram-se, na Figura 28, gráficos de $x_1(n)$ para casos em que o maior expoente de Lyapunov, h_1, para o conjunto ω_S e N_S, apresenta $h_1 > 0$, $h_1 \approx 0$, $h_1 < 0$ e para o caso em que o gráfico de $x_1(n)$ diverge.

O gráfico da Figura 28(a) mostra $x_1(n)$ para o caso $N_S = 5$, $\omega_S = 0{,}25\pi$ em que $h_1 = -0{,}043 \pm 10^{-6}$ para condições iniciais distantes $\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{bmatrix} 0{,}001 & 0{,}001 & 0{,}001 \end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{bmatrix} 0{,}900 & 0{,}900 & 0{,}900 \end{bmatrix}^T$. Nota-se que as órbitas iniciam-se em pontos distintos devido às condições iniciais escolhidas, mas convergem para um mesmo ponto fixo com as iterações em n. Essa característica ilustra o resultado numérico obtido para essa condição de que essa órbita não resulta em um sinal caótico.

Para observar a condição em que $h_1 \approx 0$, mostra-se no gráfico da Figura 28(b), $x_1(n)$

Figura 27 – Maior expoente de Lyapunov h_1 para o sistema descrito em (7.26) com filtros projetados utilizando-se a janela de Hamming em função: (a) da frequência de corte ω_S e (b) do número de coeficientes N_S do filtro.



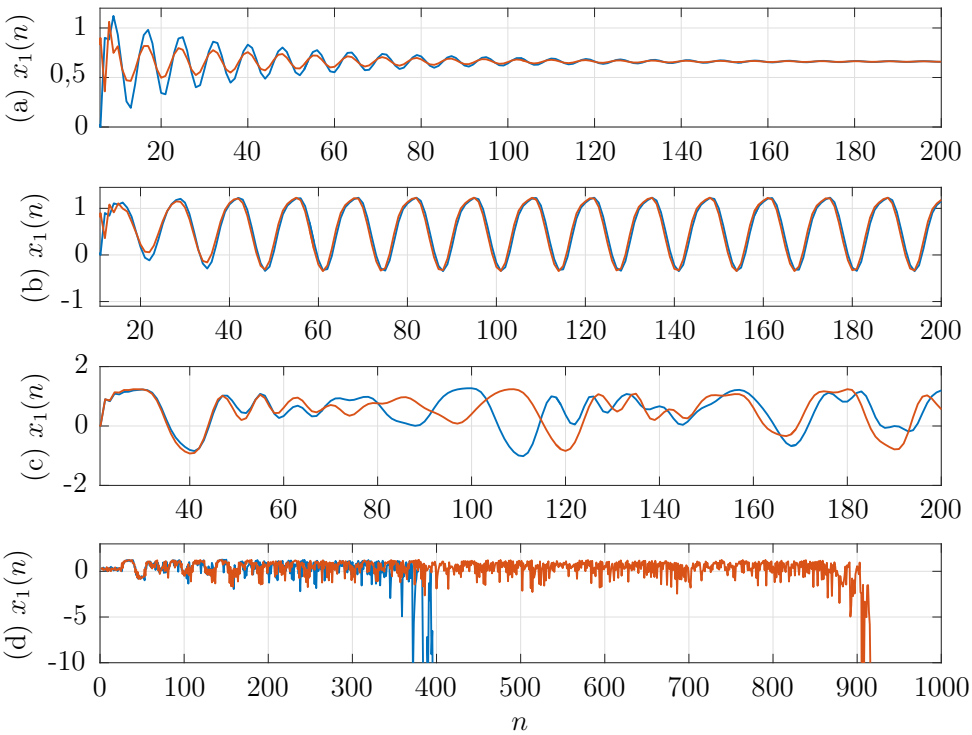
Fonte: Autor.

para $N_S = 10$, $\omega_S = 0{,}25\pi$ e condições iniciais distantes $\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{bmatrix}0{,}001 & 0{,}001 & 0{,}001\end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{bmatrix}0{,}900 & 0{,}900 & 0{,}900\end{bmatrix}^T$. As órbitas não se separam e apresentam um comportamento aparentemente periódico.

No gráfico da Figura 28(c) mostra-se a $x_1(n)$ para o caso $N_S = 20$, $\omega_S = 0{,}25\pi$ em que $h_1 = 0{,}029 \pm 0{,}002$ para condições iniciais próximas $\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{bmatrix}0{,}001 & 0{,}001 & 0{,}001\end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{bmatrix}0{,}000 & 0{,}001 & 0{,}001\end{bmatrix}^T$. Nesse caso, observa-se que as órbitas que iniciam-se

próximas rapidamente se separam a medida que o mapa é iterado em n. Claramente tem-se a DSCI evidênciando um sinal caótico.

Figura 28 – Gráficos de $x_1(n)$ obtidos a partir do sistema descrito em (7.26), com filtro projetado com a janela de Hamming para: (a) $N_S = 5, \omega_S = 0{,}25\pi$ e $h_1 = -0{,}043 \pm 10^{-6}$, (b) $N_S = 10, \omega_S = 0{,}25\pi$ e $h_1 \approx 0$, (c) $N_S = 20, \omega_S = 0{,}25\pi$ e $h_1 = 0{,}029 \pm 0{,}002$ e (d) $N_S = 25, \omega_S = 0{,}99\pi, \mathbf{x}^{(1)}(0) = [0{,}001\ 0{,}001\ 0{,}001]^T, \mathbf{x}^{(2)}(0) = [0{,}900\ 0{,}900\ 0{,}900]^T$.



Fonte: Autor.

Por fim, mostra-se na Figura 28(d), o caso em que $x_1(n)$ diverge, para $N_S = 25, \omega_S = 0{,}99\pi$ e condições iniciais distantes $\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{bmatrix}0{,}001 & 0{,}001 & 0{,}001\end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{bmatrix}0{,}900 & 0{,}900 & 0{,}900\end{bmatrix}^T$.

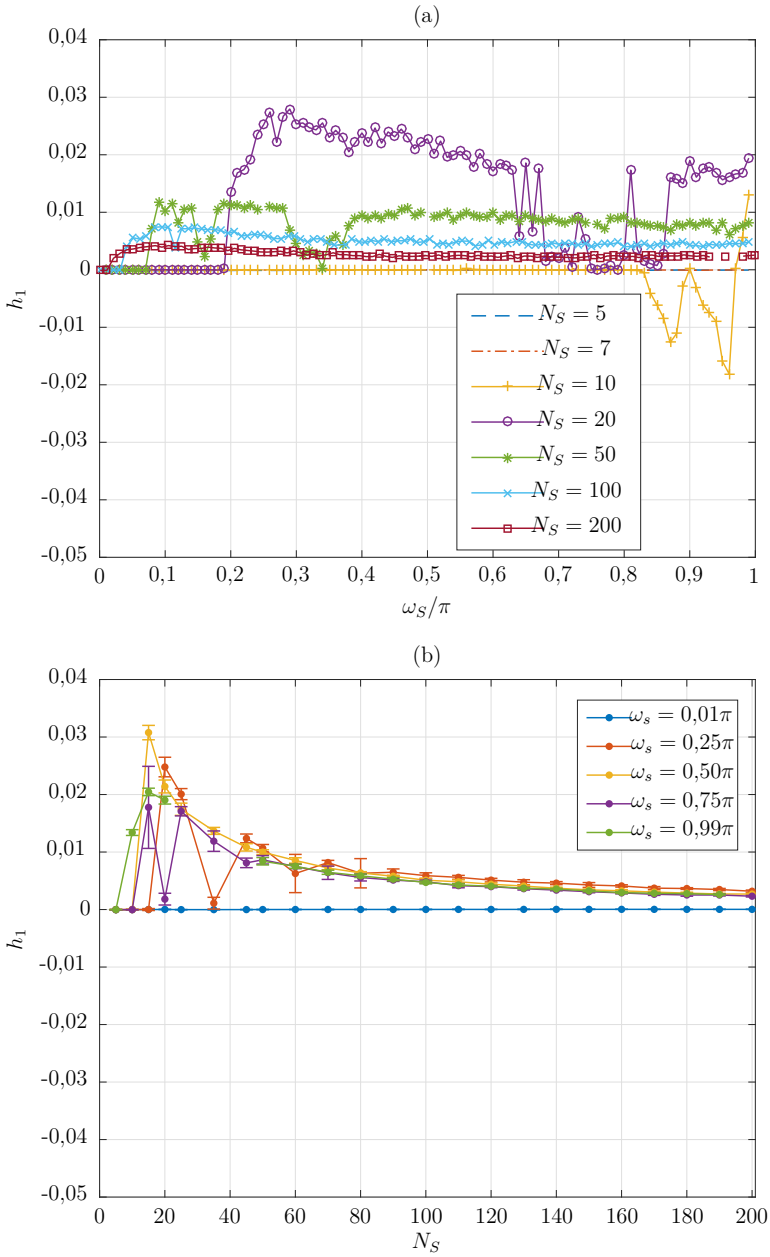
Para verificar a influência do tipo de janela utilizada no projeto do filtro, nas Figuras 29(a) e 29(b), mostra-se o maior expoente de Lyapunov dos sinais transmitidos pelo sistema (7.26), em função dos mesmos parâmetros das Figuras 27(a) e 27(b), para filtros projetados com a janela de Blackman.

Para $N_S > 10$, assim como observado para os resultados obtidos com a janela de Hamming, há um intervalo maior de frequências para as quais os sinais são caóticos.

Em contrapartida, para $N_S \leq 10$ a condição caótica é praticamente perdida com poucas exceções.

Na Figura 29(b) apresentam-se os maiores expoentes de Lyapunov em função do

Figura 29 – Maior expoente de Lyapunov h_1 para o sistema descrito em (7.26) com filtros projetados utilizando-se a janela de Blackman em função: (a) da frequência de corte ω_S e (b) do número de coeficientes N_S do filtro.



Fonte: Autor.

comprimento do filtro N_S para valores específicos de ω_S. Os valores indicados são tomados da média dos expoentes obtidos dentre 10 condições iniciais para os mesmos N_S e ω_S. As barras horizontais em cada ponto do gráfico medem o desvio padrão em torno da média do valor do expoente de Lyapunov.

O gráfico da Figura 29(b) mostra que para $N_S > 45$, com exceção de $\omega_S = 0{,}01\pi$, os sinais são caóticos. Nota-se também a convergência dos valores dos expoentes de Lyapunov para essa condição, assim como observado para a janela de Hamming.

Dessa forma, as simulações mostram que não há diferenças significativas nos resultados obtidos utilizando-se as janelas de Hamming e de Blackman. Assim, a escolha do tipo de janela como técnica de projeto do filtro parece não ser relevante em relação aos expoentes de Lyapunov e, por consequência, não modifica a natureza caótica do sinais transmitidos.

Como conclusão, é possível, conforme os resultados mostrados nas simulações, obter-se sinais caóticos transmitidos pelo SCBC, limitado em banda, utilizando-se o mapa de Hénon, para diversas combinações dos parâmetros N_S e ω_S. De forma geral, obtém-se caos para $N_S > 45$ e $\omega_S > 0{,}1\pi$.

Se por um lado os filtros não afetam o sincronismo entre os sistemas mestre e escravo, conforme mostrado no Capítulo 5, por outro, eles podem modificar a natureza caótica dos sinais gerados pelo mapa.

Na próxima seção, completa-se a análise dos expoentes de Lyapunov incluindo-se a mensagem $m(n)$ no sistema de comunicação.

7.2.4 Caso $N_S > 3$ e $\gamma \neq 0$

Nesta seção analisam-se as propriedades caóticas dos sinais gerados pelo sistema mestre em função parâmetro γ da função de codificação da mensagem.

Nas Figuras 30(a) e (b), mostram-se os expoentes de Lyapunov calculados para o sistema descrito em (7.8), para $\beta = 0{,}3$, $c_0 = 1$, em função de γ, considerando-se: (a) $\alpha = 1{,}4$ e (b) $\alpha = 0{,}9$. Os resultados mostram que, para $\alpha = 1{,}4$, somente há geração de sinais caóticos quando $\gamma < 0{,}2$. Para a outra condição, em que $\alpha = 0{,}9$, para todos os valores de γ os sinais gerados não apresentam caos.

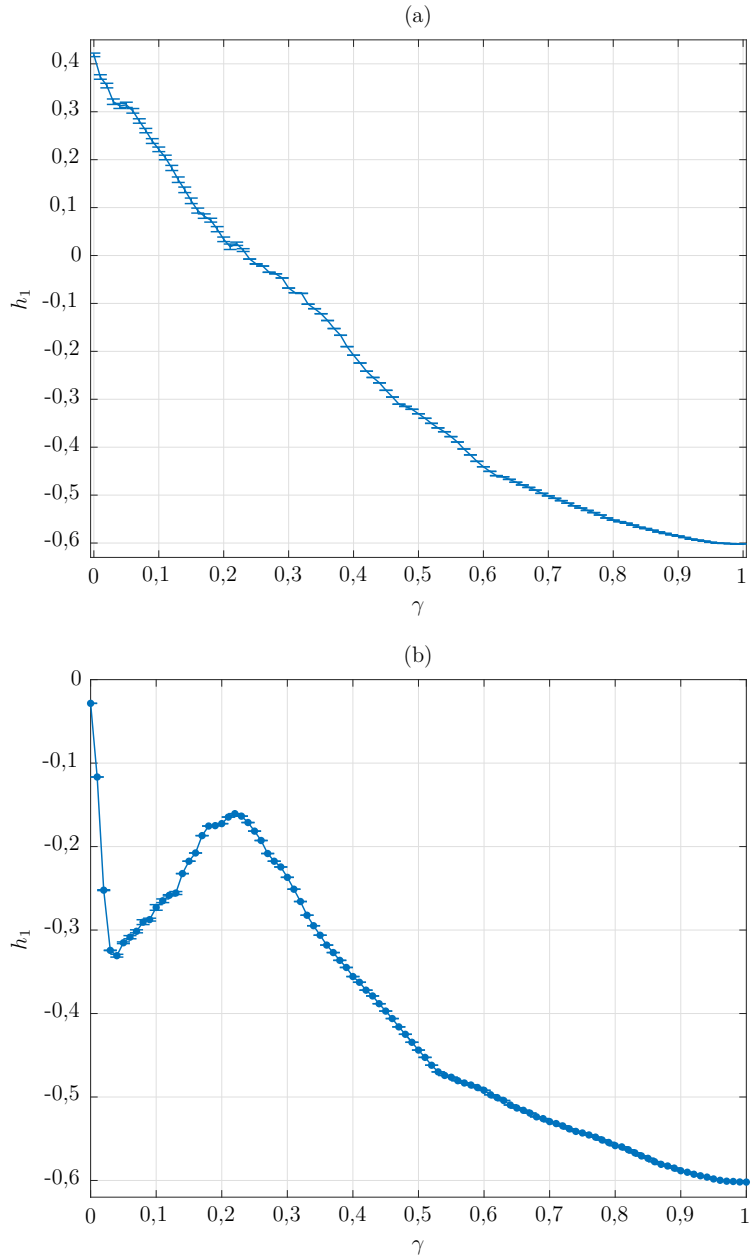
Os resultados obtidos nas Figuras 30(a) e (b), mostram que a função de codificação da mensagem, pode modificar a natureza caótica dos sinais transmitidos. Como consequência direta desses resultados, em (ABIB; EISENCRAFT, 2015), a escolha de $\gamma = 0{,}4$, para o mapa de Hénon com $\alpha = 1{,}4$ e $\beta = 0{,}3$, não gera sinais caóticos.

Os gráficos de $x_1(n)$ para a condição apresentada na Figura 30(a) são mostradas na Figura 31, para $\gamma = 0{,}2$ e $\gamma = 0{,}3$. A importância do cálculo dos expoentes de Lyapunov fica mais clara ao observar-se as Figuras 31(a) e (b). As órbitas da Figura 31(b) aparentam serem aperódicas, mas somente aquelas do gráfico (a) apresentam DSCI. A aparência aperiódica em (b) é devido à mensagem aleatória.

Assim como os filtros podem alterar a natureza caótica dos sinais gerados pelo mapa, como mostrado nas seções anteriores, o parâmetro γ, da função de codificação da mensagem, também pode alterar a condição caótica dos sinais.

Nas Figuras 32(a) e (b), mostram-se os expoentes de Lyapunov, para o sistema

Figura 30 – Expoentes de Lyapunov para o sistema (7.8), com $\beta = 0{,}3$, em função do parâmetro γ, para: (a) $\alpha = 1{,}4$ e (b) $\alpha = 0{,}9$.



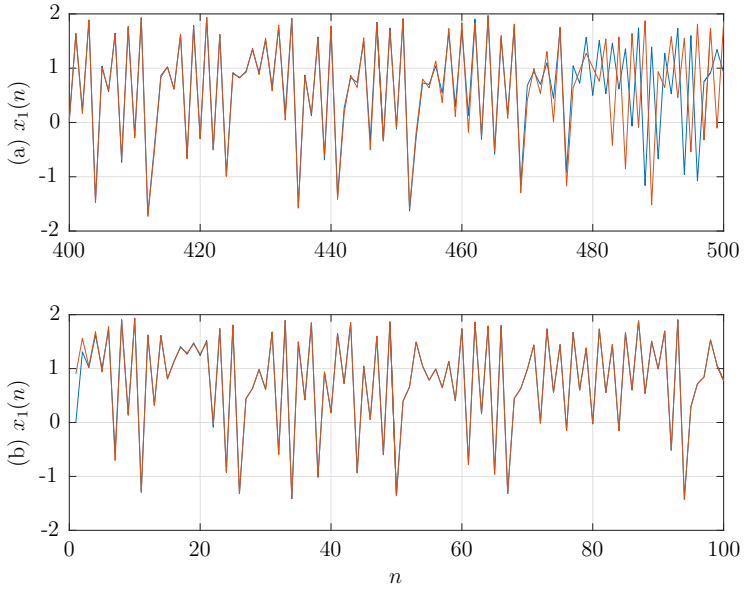
Fonte: Autor.

descrito em (7.20), em função de γ, para diversos valores de N_S, com $\alpha = 0{,}9$, para: (a) $\omega_S = 0{,}5\pi$ e $M = 8$ e (b) $\omega_S = 0{,}2\pi$ e $M = 20$. Os filtros são projetados com a janela de Blackman. O tamanho do pulso da mensagem, M, é escolhido pelo critério em (6.12), dado que, para essa escolha a largura da banda de $m(m)$ está dentro da banda ω_S do filtro.

Os gráficos das Figuras 32(a) e (b) mostram que o sistema gera caos para $\gamma < 0{,}2$ e $N_S \geq 20$.

Esses resultados indicam que a combinação dos parâmetros α, γ, ω_S e N_S modificam

Figura 31 – Gráficos de $x_1(n)$ para o sistema descrito em (7.8) com $\alpha = 1{,}4$ para: (a) $\gamma = 0{,}2$, $\mathbf{x}^{(1)}(0) = [0{,}000\ 0{,}000]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)}(0) = [0{,}001\ 0{,}000]^T$ e (b) $\gamma = 0{,}3$, $\mathbf{x}^{(1)}(0) = [0{,}000\ 0{,}000]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)}(0) = [0{,}900\ 0{,}000]^T$.



Fonte: Autor.

os valores dos expoentes de Lyapunov e permitem gerar novas condições para as quais os sinais gerados pelas órbitas sejam caóticos e, dessa forma, possam ser utilizados na transmissão de um SCBC digital em banda limitada.

De forma geral, as simulações apresentadas nas Seções 7.2.1-7.2.4 mostram que, um sistema de comunicação digital, baseado em sincronismo caótico, pode transmitir sinais caóticos entre o transmissor e o receptor, utilizando-se o mapa de Hénon, para: $\alpha = 0{,}9$, $\gamma < 0{,}2$, $N_S > 45$ e $\omega_S > 0{,}1\pi$.

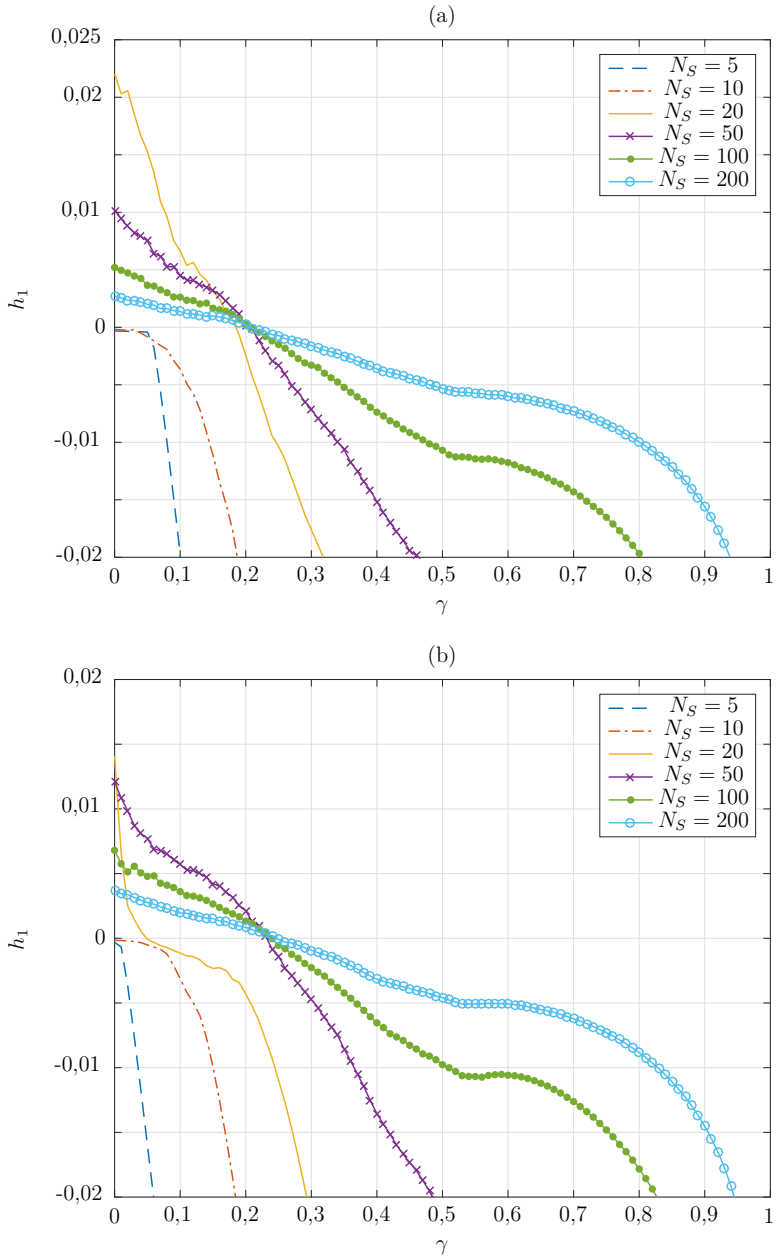
Ao se explorar a influência dos parâmetros envolvidos no SCBC, torna-se evidente o cuidado que se deve tomar ao se projetar um sistema de comunicação que mantenha as propriedades caóticas. Como exemplo, o sistema avaliado em termos de BER, na Seção 6.2, não transmite sinais caóticos, visto que utilizou-se $\alpha = 0{,}9$, $\gamma = 0{,}3$, $N_S = 200$ e $\omega_S = 0{,}2\pi$. A escolha de $\gamma = 0{,}3$, como mostrado aqui, faz com que o SCBC não transmita sinais caóticos.

7.3 CONCLUSÕES

Neste capítulo, a natureza caótica dos sinais transmitidos pelo SCBC digital é analisada.

Na Seção 7.1 foram obtidos analiticamente os sistemas e suas respectivas matrizes jacobianas resultantes da inserção dos filtros e da codificação da mensagem no mapa de

Figura 32 – Expoentes de Lyapunov do sistema descrito em (7.20), em função de γ, para diversos valores de N_S usando-se janela de Blackman e considerando-se $\alpha = 0{,}9$ para: (a) $\omega_S = 0{,}5\pi$ e $M = 8$ e (b) $\omega_S = 0{,}2\pi$ e $M = 20$.



Fonte: Autor.

Hénon. Em seguida, na Seção 7.2, os expoentes de Lyapunov dos sinais gerados pelos sistemas da Seção 7.1 foram calculados, permitindo determinar-se para quais escolhas de α, γ, N_S e ω_S o SCBC transmite sinais caóticos.

Os resultados obtidos mostram que o SCBC limitado em banda estudado transmite de fato sinais caóticos para $\alpha = 0{,}9$, $\gamma < 0{,}2$, $N_S > 45$ e $\omega_S > 0{,}1\pi$. Entende-se que esses resultados descritos são relevantes e contribuições originais dessa tese.

A limitação de γ mostrada abre a necessidade de novos estudos. Em (ABIB; EISENCRAFT, 2015) mostra-se numericamente que a BER é inversamente proporcional a esse parâmetro. Assim, novas funções de codificação devem ser pesquisadas.

8 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Nessa tese de doutorado buscou-se contribuir em aspectos práticos e teóricos associados a SCBCs. Os sinais caóticos são por vezes caracterizados como sinais de banda larga, virtualmente infinita. Ao mesmo tempo que esse fato pode apresentar vantagens relevantes (LAU; TSE, 2003; DMITRIEV et al., 2006; RONTANI et al., 2016), também apresenta um desafio, já que os canais de transmissão físicos têm sempre banda útil limitada. Não é possível para um único sistema de comunicação utilizar todo o espectro de frequências numa comunicação sem fio, por exemplo. Dessa forma, determinar e controlar a banda dos sinais caóticos é um aspecto fundamental para um SCBC na prática.

Nesse sentido, em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; BACCALÁ, 2009) foi proposto um SCBC de tempo discreto que utiliza filtros digitais para limitar a banda do sinal transmitido. Mostrou-se que nesse sistema recupera-se perfeitamente a mensagem transmitida, em condições ideais de canal e que, em certas condições, o sincronismo caótico é mantido, mesmo com a introdução dos filtros.

No Capítulo 4 descreve-se esse sistema de comunicação, seus resultados para a transmissão de mensagens analógicas e as condições necessárias para se obter o sincronismo entre os sistemas mestre e escravo, em função dos coeficientes do filtro, para o mapa de Hénon. Baseada nesse sistema em banda limitada, obtém-se uma contribuição relevante dessa tese, descrita no Capítulo 5, que consiste na determinação analítica das condições de sincronismo, em função dos coeficientes do filtro, para um mapa qualquer. Os resultados obtidos mostraram que os sistemas mestre e escravo sincronizam completamente, independentemente dos coeficientes do filtro, desde que os autovalores da matriz de sincronismo do sistema original, ou seja, sem o filtro, tenham módulo menor que a unidade. Esse resultado obtido abre novas possibilidades no estudo de SCBCs: novos mapas e tipos de filtros podem ser utilizados para melhorar o desempenho desses sistemas, em termos de BER, quando comparados aos sistemas convencionais.

Aproveitando-se do fato que é possível sincronizar o sistema mestre e escravo independentemente dos filtros utilizados, adapta-se, no Capítulo 6, esse SCBC para a transmissão de mensagens binárias em canal AWGN. Essa adaptação consiste na formatação da mensagem para que sua largura de banda esteja dentro da banda do sinal transmitido. Sendo os sinais transmitidos essencialmente de banda limitada, mostra-se que a utilização de um filtro sintonizador no receptor melhora o desempenho, em termos de BER, quando comparado ao mesmo sistema sem sintonizador, para uma SNR $\leq$ 12 dB.

Esse SCBC digital e a adaptação do sistema do Capítulo 4 é uma outra contribuição desse trabalho, mostrando que técnicas utilizadas nos sistemas de comunicação

convencionais, como a sintonização, podem ser aplicadas em sistemas que utilizam sinais caóticos.

Finalizando as contribuições dessa tese, analisa-se, no Capítulo 7, a natureza caótica dos sinais transmitidos pelo SCBC. Embora os coeficientes dos filtros não interfiram no sincronismo entre os sistemas mestre e escravo, esses mesmos coeficientes podem alterar as propriedades caóticas dos sinais gerados pelos sistemas. Além disso, diferentemente de trabalhos anteriores, a mensagem, codificada na variável de estado do sistema dinâmico, não é desprezada na determinação dos expoentes de Lyapunov dos sinais gerados pelo SCBC.

Determinam-se os expoentes de Lyapunov considerando-se diversos cenários em função do parâmetro α do mapa de Hénon, do parâmetro γ da função de codificação, da frequência de corte ω_S do filtro e do comprimento N_S do filtro.

Em particular, para o SCBC discutido nessa tese, é possível transmitir sinais caóticos, utilizando-se o mapa de Hénon, para $\alpha = 0{,}9$, $\gamma < 0{,}2$, $N_S > 45$ e $\omega_S > 0{,}1$.

Como conclusão geral, pode-se afirmar que os resultados obtidos contribuem para o desenvolvimento teórico dos sistemas de comunicação baseados em caos. A partir deles novos estudos podem ser iniciados para investigação da utilização de outros mapas, filtros e funções de codificação, com o objetivo de melhorar o desempenho desses sistemas em comparação aos sistemas convencionais.

Mesmo com todos os avanços obtidos, para viabilizar esse sistema de comunicação, desde que o sistema de Wu e Chua foi adaptado para tempo discreto, os SCBCs ainda apresentam taxas de BER muito altas em relação aos sistemas convencionais.

Para evoluir nessas análises e comprovar a viabilidade do SCBC, é necessário que o diagrama da Figura 20 seja implantado em laboratório com equipamentos comerciais (KOLUMBAN; KREBESZ; LAU, 2012). Esses estudos podem apontar novos caminhos para que esse sistema de comunicação seja implementado na prática, assim como feito em (ARGYRIS et al., 2005).

8.1 CONTRIBUIÇÕES

De forma resumida, as principais contribuições dessa tese são:

a) **Condições para o sincronismo caótico entre sistemas mestre e escravo de um SCBC**
Determinou-se analiticamente as condições necessárias para o sincronismo caótico entre sistemas mestre-escravo, em termos dos coeficientes dos filtros, para um mapa K-dimensional qualquer.

b) **SCBC digital em banda limitada**
Adaptou-se o sistema de comunicação mostrado em (EISENCRAFT; FANGANIELLO; BACCALÁ, 2009) para transmitir mensagens binárias e avaliou-se esse sistema proposto em termos de BER. Mostrou-se que a inserção de um filtro sintonizador na entrada do receptor melhora a BER em relação ao mesmo sistema sem o sintonizador.

c) **Expoentes de Lyapunov dos sinais transmitidos para a determinação da natureza caótica desses sinais**
Foram determinados os expoentes de Lyapunov para diversas configurações do sistema de comunicação em função do parâmetro α do mapa de Hénon, do parâmetro γ da função de codificação, da frequência de corte ω_S do filtro e do comprimento N_S do filtro. Os resultados obtidos consideraram a mensagem como um parâmetro não desprezível do sistema dinâmico e mostraram que é possível transmitir sinais caóticos escolhendo-se esses parâmetros adequadamente.

8.2 PUBLICAÇÕES DETALHADAS

Os resultados obtidos nessa tese geraram as publicações listadas a seguir. Esses trabalhos estão disponíveis no Apêndice dessa tese, sendo: [**PI**] periódico internacional, [**CI**] congresso internacional e [**CL**] capítulo de livro:

[**PI**] Fontes, R. T. and Eisencraft, M. A digital bandlimited chaos-based communication system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 37:374-385, Fev. 2016.

[**CI-1**] R. T. Fontes and M. Eisencraft. Noise filtering in bandlimited digital chaos-based communication systems. In: *22nd European Signal Processing Conference, EUSIPCO 2014*, Lisboa, Portugal, 2014.

[**CI-2**] R. T. Fontes and M. Eisencraft. Conditions for synchronizing a master-slave bandlimited chaos-based communication system. In: *VI International Workshop on Telecommunications, IWT2015*, Santa Rita do Sapucaí, Brasil, 2015.

[**CI-3**] R. T. Fontes and M. Eisencraft. Chaotic properties of the Hénon map with a linear filter. In: *6th International Conference on Nonlinear Science and Complexity, NSC2016*, São José dos Campos, Brasil, 2016.

[**CL**] Fanganiello, R. D., Fontes, R. T., Eisencraft, M. and Monteiro, L. H. A. Chaotic communications in bandlimited channels. In: Eisencraft, M., Attux, R. R. F. and Suyama, R., (Editors), *Chaotic Signals in Digital Communications*. CRC Press, Inc. 2013

O autor dessa tese esteve presencialmente apresentando os trabalhos no congressos **CI-1** e **CI-2**, com auxílio financeiro da CAPES no segundo caso.

8.3 TRABALHOS FUTUROS

As contribuições e conclusões descritas anteriormente permitem que novos estudos sejam sugeridos a partir dos resultados obtidos. Dentre eles pode-se listar:

a) **Analisar o desempenho do SCBC utilizando outros mapas**
Dado que obteve-se analiticamente as condições necessárias para manter-se o sincronismo caótico entre o transmissor e o receptor, analisar outros mapas geradores de sinais caóticos descritos na literatura.

b) **Analisar o desempenho do sistema de comunicação utilizando outros filtros**
Embora o sincronismo entre os sistemas mestre e escravo seja independente dos coeficientes dos filtros FIR, a natureza caótica dos sinais transmitidos é afetada pela inserção dos mesmos. Assim, há a necessidade de se analisar outros tipos de filtros, como por exemplo os filtros de resposta ao impulso infinita (IIR - *Infinity-duration Impulse Response*), com o objetivo de ampliar o número de possibilidades para que o SCBC transmita sinais caóticos.

c) **Novas funções de codificação da mensagem na variável de estado do sistema dinâmico**
Propor novas funções de codificação visando melhorar o desempenho do sistema. Novas funções podem ser mais robustas do ponto de vista da recuperação da mensagem e apresentarem resultados melhores em termos de BER.

d) **Estudar técnicas de codificação de controle de erro (*Error-Control Coding*)**
Analisar a possibilidade de implementação de técnicas de codificação de controle de erro (LATHI; DING, 2009; HAYKIN, 2013) para melhorar o desempenho do sistema em termos de BER, principal desvantagem dos SCBCs quando comparados com sistemas convencionais.

e) **Montar ambiente de laboratório para testar o SCBC em hardware**
Iniciar um estudo baseado em transmissões reais, por meio de hardware apropriado, para avaliar-se o desempenho do SCBC em ambientes práticos. Algumas plataformas de hardware estão disponíveis comercialmente para a realização desse tipo de experimento. Como exemplo, sugere-se conhecer os produtos mostrados em (KOLUMBAN; KREBESZ; LAU, 2012). Implantar o sistema do diagrama da Figura 20, em um

ambiente de laboratório, permitirá novos direcionamentos nas pesquisas envolvendo SCBCs. Um problema interessante, em relação aos aspectos de utilização prática dos SCBCs, envolve a precisão finita dos sistemas reais. É possível obter caos nessas condições?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABIB, G. A.; EISENCRAFT, M. Performance of digital chaos-based communication systems in a noisy environment. In: *12th Experimental Chaos and Complexity Conference*. [S.l.: s.n.], 2012. v. 1, p. 50–50.

ABIB, G. A.; EISENCRAFT, M. Desempenho de sistema de comunicação digital caótico em canal com ruído. In: *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics (DINCON)*. [S.l.]: SBMAC - Sociedade de Matemática Aplicada e Computacional, 2013. v. 1.

ABIB, G. A.; EISENCRAFT, M. Sobre o desempenho em canal com ruído de um sistema de comunicação baseado em caos. In: *Anais do XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT'13)*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Telecomunicações, 2013.

ABIB, G. A.; EISENCRAFT, M. On the performance of a digital chaos-based communication system in noisy channels. In: *Proceedings of the 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON 2015)*. Saint-Petersburg, Russia: IFAC - International Federation of Automatic Control, 2015. v. 1, p. 1–6.

AGARWAL, R. P. *Difference equations and inequalities*. New York: Marcel Dekker Inc., 1992. v. 155. (Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, v. 155). Theory, methods, and applications. ISBN 0-8247-8676-9.

ALLIGOOD, K.; SAUER, T.; YORKE, J. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. [S.l.]: Springer, 1997. (Textbooks in Mathematical Sciences). ISBN 9780387946771.

ARGYRIS, A. et al. Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 438, n. 7066, p. 343–346, nov. 2005. ISSN 0028-0836.

ARNOLD, L. *Random Dynamical Systems*. [S.l.]: Springer, 1998. (Springer Monographs in Mathematics). ISBN 3540637583,9783540637585.

ATTUX, R.; ROMANO, J. Chaotic phenomena in adaptive blind equalisers. *Vision, Image and Signal Processing, IEE Proceedings* -, Institution of Engineering and Technology (IET), v. 150, n. 6, p. 360 – 364, 15 2003. ISSN 1350-245X.

BAPTISTA, M. S. et al. Integrated chaotic communication scheme. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 62, n. 4, p. 4835–4845, Oct 2000.

BAPTISTA, M. S. et al. Chaotic, informational and synchronous behaviour of multiplex networks. *Scientific Reports*, v. 6, p. 22617, 2016.

BOCCALETTI, S. et al. The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, v. 366, p. 1 – 101, 2002.

CANDIDO, R.; EISENCRAFT, M.; SILVA, M. T. Channel equalization for synchronization of chaotic maps. *Digital Signal Processing*, v. 33, n. 0, p. 42 – 49, 2014. ISSN 1051-2004.

CANDIDO, R.; EISENCRAFT, M.; SILVA, M. T. M. Channel equalization for synchonization of Ikeda maps. In: *Proc. of* 21st *European Signal Processing Conference (EUSIPCO'2013)*. Marrakesh, Marocco: [s.n.], 2013.

CANDIDO, R. et al. Do chaos-based communication systems really transmit chaotic signals? *Signal Processing*, v. 108, n. 0, p. 412 – 420, 2015. ISSN 0165-1684.

COSTA, R. A.; LOIOLA, M. B.; EISENCRAFT, M. Spectral properties of chaotic signals generated by the bernoulli map. *Journal of Engineering Science and Technology Review*, v. 8, n. 2, p. 12–16, 2015.

DMITRIEV, A. et al. Ultrawideband wireless communications based on dynamic chaos. *Journal of Communications Technology and Electronics*, Nauka/Interperiodica, v. 51, n. 10, p. 1126–1140, 2006. ISSN 1064-2269.

EISENCRAFT, M.; AMARAL, M. A.; LIMA, C. A. M. Estimation of chaotic signals with applications in communications. In: *Preprints of the 15th IFAC Symposium on System Identification*. Saint-Malo: IFAC - International Federation of Automatic Control, 2009. v. 15, p. 126–131. ISBN 9783902661470. ISSN 14746670.

EISENCRAFT, M.; ATTUX, R. R. F.; SUYAMA, R. (Ed.). *Chaotic Signals in Digital Communications*. [S.l.]: CRC Press, Inc., 2013.

EISENCRAFT, M.; FANGANIELLO, R. D.; BACCALÁ, L. A. Synchronization of Discrete-Time Chaotic Systems in Bandlimited Channels. *Mathematical Problems In Engineering*, v. 2009, p. 1–13, 2009. ISSN 1024-123X.

EISENCRAFT, M.; FANGANIELLO, R. D.; MONTEIRO, L. H. A. Chaotic synchronization in discrete-time systems connected by bandlimited channels. *Communications Letters, IEEE*, v. 15, n. 6, p. 671 –673, june 2011. ISSN 1089-7798.

EISENCRAFT, M.; KATO, D. M.; MONTEIRO, L. H. A. Spectral properties of chaotic signals generated by the skew tent map. *Signal Process.*, v. 90, n. 1, p. 385–390, 2010. ISSN 0165-1684.

ENDO, T.; CHUA, L. Chaos from phase-locked loops. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v. 35, n. 8, p. 987–1003, Aug 1988. ISSN 0098-4094.

FANGANIELLO, R. D. et al. Chaotic communications in bandlimited channels. In: EISENCRAFT, M.; ATTUX, R. R. F.; SUYAMA, R. (Ed.). *Chaotic Signals in Digital Communications*. [S.l.]: CRC Press, Inc., 2013.

FELTEKH, K.; FOURNIER-PRUNARET, D.; BELGHITH, S. Analytical expressions for power spectral density issued from one-dimensional continuous piecewise linear maps with three slopes. *Signal Processing*, v. 94, n. 0, p. 149 – 157, 2014. ISSN 0165-1684.

FELTEKH, K. et al. Border collision bifurcations and power spectral density of chaotic signals generated by one-dimensional discontinuous piecewise linear maps. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 19, n. 8, p. 2771 – 2784, 2014. ISSN 1007-5704.

FONTES, R. T.; EISENCRAFT, M. Noise filtering in bandlimited digital chaos-based communication systems. In: *22nd European Signal Processing Conference, EUSIPCO 2014, Lisbon, Portugal, September 1-5, 2014*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 406–410.

FONTES, R. T.; EISENCRAFT, M. Conditions for synchronizing a master-slave bandlimited chaos-based communication system. In: *Proceedings of the VI International Workshop on Telecommunications (IWT2015)*. Santa Rita do Sapucaí: Instituto Nacional de Telecomunicações - Inatel (INATEL), 2015. v. 1, p. 1–4.

FONTES, R. T.; EISENCRAFT, M. Chaotic properties of the hénon map with a linear filter. In: *6th International Conference on Nonlinear Science and Complexity (NSC 2016)*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 1–3.

FONTES, R. T.; EISENCRAFT, M. A digital bandlimited chaos-based communication system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 37, p. 374–385, 2016. ISSN 1007-5704.

FONTES, R. T.; EISENCRAFT, M.; MONTEIRO, L. H. A. Sistemas de comunicação digital usando sinais caóticos em canais de banda limitada. In: *Anais da X Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações (DINCON)*. [S.l.: s.n.], 2011. v. 1, p. 160–163.

GRZYBOWSKI, J.; MACAU, E.; YONEYAMA, T. Isochronal synchronization in networks and chaos-based tdma communication. *The European Physical Journal Special Topics*, Springer Berlin Heidelberg, v. 223, n. 8, p. 1447–1463, 2014. ISSN 1951-6355.

HARB, B. A.; HARB, A. M. Chaos and bifurcation in a third-order phase locked loop. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 19, n. 3, p. 667 – 672, 2004. ISSN 0960-0779.

HAYKIN, S. *Digital Communication Systems*. [S.l.]: Wiley John + Sons, 2013. ISBN 978-0-471-64735-5.

HÉNON, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, v. 50, p. 69–77, 1976. ISSN 0010-3616. 10.1007/BF01608556.

ILLING, L. Digital communication using chaos and nonlinear dynamics. *Nonlinear Analysis-theory Methods & Applications*, v. 71, n. 12, p. E2958–E2964, dez. 2009.

KADDOUM, G. Wireless chaos-based communication systems: A comprehensive survey. *IEEE Access*, v. 4, p. 2621–2648, 2016. ISSN 2169-3536.

KENNEDY, M.; KOLUMBAN, G. Digital communications using chaos. *Signal Processing*, 80, n. 7, p. 1307–1320, JUL 2000. ISSN 0165-1684.

KENNEDY, M. P.; SETTI, G.; ROVATTI, R. (Ed.). *Chaotic Electronics in Telecommunications*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, Inc., 2000.

KOLUMBAN, G. et al. Basics of communications using chaos. In: EISENCRAFT, M.; ATTUX, R.; SUYAMA, R. (Ed.). *Chaotic Signals in Digital Communications*. [S.l.]: CRC Press, Inc., 2013. cap. 4, p. 111–141.

KOLUMBAN, G.; KREBESZ, T. I.; LAU, F. C. M. Theory and application of software defined electronics: Design concepts for the next generation of telecommunications and measurement systems. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, v. 12, n. 2, p. 8–34, 2012. ISSN 1531-636X.

LATHI, B.; DING, Z. *Modern Digital and Analog Communication Systems*. [S.l.]: Oxford University Press, 2009. (The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering). ISBN 9780195331455.

LAU, F. C. M.; TSE, C. K. *Chaos-based digital communication systems*. Berlin: Springer, 2003.

LI, X.; LI, C.; LEE, I.-K. Chaotic image encryption using pseudo-random masks and pixel mapping. *Signal Processing*, Elsevier BV, v. 125, p. –, aug 2015. ISSN 0165-1684.

MEYER, C. D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra Book and Solutions Manual*. [S.l.]: Society for Industrial & Applied Mathematics,U.S., 2008. ISBN 0-89871-454-0.

MICHEL, O.; FLANDRIN, P. Application of methods based on higher-order statistics for chaotic time series analysis. *Signal Processing*, v. 53, n. 2-3, p. 133 – 148, 1996. ISSN 0165-1684.

MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. 3a edição. ed. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2011. 670 p.

MONTEIRO, L. H. A.; LISBOA, A.; EISENCRAFT, M. Route to chaos in a third-order phase-locked loop network. *Signal Processing*, v. 89, n. 8, p. 1678 – 1682, 2009. ISSN 0165-1684.

OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. *Discrete-Time Signal Processing*. 3rd. ed. [S.l.]: Prentice Hall Press, 2009. ISBN 0131988425, 9780131988422.

PECORA, L. M.; CARROLL, T. L. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 64, n. 8, p. 821–824, fev. 1990.

PECORA, L. M.; CARROLL, T. L. Synchronization of chaotic systems. *Chaos*, v. 25, n. 9, 2015.

REN, H.-P.; BAPTISTA, M. S. .; GREBOGI, C. Robustness of chaos to multipath propagation media. In: EISENCRAFT, M.; ATTUX, R.; SUYAMA, R. (Ed.). *Chaotic Signals in Digital Communications*. [S.l.]: CRC Press, 2013. cap. 16, p. 423–437.

REN, H.-P.; BAPTISTA, M. S.; GREBOGI, C. Wireless communication with chaos. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 110, p. 184101, Apr 2013.

RONTANI, D. et al. Compressive sensing with optical chaos. *Scientific Reports*, v. 6, p. 35206 EP –, 12 2016.

RULKOV, N. F.; TSIMRING, L. S. Synchronization methods for communication with chaos over band-limited channels. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, v. 27, n. 6, p. 555–567, 1999. ISSN 1097-007X.

STAVROULAKIS, P. (Ed.). *Chaos Applications in Telecommunications*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, Inc., 2005. ISBN 0849338328.

STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. [S.l.]: Perseus Books Group, 2001. Paperback. ISBN 0738204536.

SYVRIDIS, D. Optical Chaos Encoded Communications: Solutions for Today and Tomorrow. In: IEEE Photon Soc. *2009 IEEE Leos Annual Meeting Conference Proceedings, Vol 1 and 2*. [S.l.]: IEEE, 2009. (IEEE Lasers and Electro-Optics Society (LEOS) Annual Meeting), p. 759–760. ISBN 978-1-4244-3680-4. ISSN 1092-8081. 22nd Annual Meeting of the IEEE-Photonics-Society, Belek Antalya, TURKEY, OCT 04-08, 2009.

TAVAZOEI, M. S.; HAERI, M. Chaos in the apfm nonlinear adaptive filter. *Signal Processing*, v. 89, n. 5, p. 697 – 702, 2009. ISSN 0165-1684.

TSEKERIDOU, S. et al. Statistical analysis of a watermarking system based on Bernoulli chaotic sequences. *Signal Processing*, ELSEVIER SCIENCE BV, PO BOX 211, 1000 AE AMSTERDAM, NETHERLANDS, 81, n. 6, p. 1273–1293, JUN 2001. ISSN 0165-1684.

WU, C. W.; CHUA, L. O. A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 3, n. 6, p. 1619–1627, dez. 1993.

ZLOTNIK, A. et al. Phase-selective entrainment of nonlinear oscillator ensembles. *Nature Communications*, v. 7, p. 10788, 2016.

APÊNDICE A – PUBLICAÇÕES

Conforme mencionado na Seção 8.2, as publicações a partir dos resultados obtidos nessa tese estão reproduzidas nesse apêndice para consulta, na seguinte ordem:

[**PI**] Fontes, R. T. and Eisencraft, M. A digital bandlimited chaos-based communication system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 37:374-385, Fev. 2016.

[**CI-1**] R. T. Fontes and M. Eisencraft. Noise filtering in bandlimited digital chaos-based communication systems. In: *22nd European Signal Processing Conference, EUSIPCO 2014*, Lisboa, Portugal, 2014.

[**CI-2**] R. T. Fontes and M. Eisencraft. Conditions for synchronizing a master-slave bandlimited chaos-based communication system. In: *VI International Workshop on Telecommunications, IWT2015*, Santa Rita do Sapucaí, Brasil, 2015.

[**CI-3**] R. T. Fontes and M. Eisencraft. Chaotic properties of the Hénon map with a linear filter. In: *6th International Conference on Nonlinear Science and Complexity, NSC2016*, São José dos Campos, Brasil, 2016.

[**CL**] Fanganiello, R. D., Fontes, R. T., Eisencraft, M. and Monteiro, L. H. A. Chaotic communications in bandlimited channels. In: Eisencraft, M., Attux, R. R. F. and Suyama, R., (Editors), *Chaotic Signals in Digital Communications*. CRC Press, Inc. 2013

Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 37 (2016) 374–385

Contents lists available at ScienceDirect

Commun Nonlinear Sci Numer Simulat

journal homepage: www.elsevier.com/locate/cnsns

A digital bandlimited chaos-based communication system

Rodrigo T. Fontes, Marcio Eisencraft*

Telecommunication and Control Engineering Department, Escola Politécnica, University of São Paulo, Brazil

ARTICLE INFO

Article history:
Received 3 May 2015
Revised 9 September 2015
Accepted 31 December 2015
Available online 3 February 2016

Keywords:
Chaos-based communication
Bandlimited channels
Additive noise
Synchronization

ABSTRACT

In recent years, many communication systems that use a function to encode an information in a chaotic signal were proposed. Since every transmission channel is bandlimited in nature, it is required to determine and to control the chaotic signal spectrum. This way, a bandlimited chaos-based communication system (CBCS) was proposed using digital filters and chaotic synchronization. As the filters modify the original chaotic system, it is necessary to study how their insertion affects chaotic synchronization. In this work, we present a digital discrete-time bandlimited CBCS system analysis, considering practical settings encountered in conventional communication systems. The proposed system is based on master–slave chaotic synchronization and the required conditions for its synchronization is obtained analytically for a general K-dimensional chaos generator map. The performance of this system is evaluated in terms of bit error rate. As a way to improve the signal to noise ratio, we also propose to filter the out-of-band noise in the receiver. Numerical simulations show the advantages of using such a scheme.

1. Introduction

In a digital chaos-based communication system (CBCS), each bit of information is transmitted using a different fragment of a chaotic signal [15,16]. Thus, it differs fundamentally from the conventional digital communication systems, where each symbol is associated with a constant and predefined waveform.

In Telecommunication and Signal Processing, researches involving chaotic signals have risen after Pecora and Carroll [20] seminal work showing that two identical systems, generating chaotic signals, could be synchronized. Since then many interesting and innovative communication schemes based on chaotic synchronization were proposed, see e.g. [4,11,14,17,22,25].

In the last decades, it was shown that CBCSs present interesting features, like an improvement in security with added physical layer cryptography [3,4,9], lower power consumption [13] and ultra-wideband possible applications [6]. Besides, chaotic signals generated by different initial conditions are almost orthogonal resulting in low correlation in multiuser schemes [17]. Chaos wideband nature is also potentially more resistant to multipath propagation [14].

One of the issues of CBCSs when it comes to practical applications is related to the bandwidth of chaotic signals. Some works cite large bandwidth as a property of chaos [17]. However, this characterization is not enough in practical settings. As physical channels are always bandlimited, it is necessary to know exactly what is the frequency range occupied by a transmitted chaotic signal and, preferably, it should be possible to control it guaranteeing the chaotic synchronization.

Bandlimited CBCS transmitting analog messages were firstly presented by Rulkov and Tsimring [23] and Macau and Marinho [18]. In both cases, it was employed continuous-time signals and systems. A discrete-time CBCS using chaotic

* Corresponding author. Tel.: +55 11 3091 9971.
E-mail address: marcio@lcs.poli.usp.br, marcio.eisencraft@gmail.com (M. Eisencraft).

http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.12.023
1007-5704/

synchronization but not bandlimited signals was presented by Feki et al. [9]. Based on these ideas and using a discrete-time version of the synchronization scheme of [25], Eisencraft et al. [7] proposed a bandlimited discrete-time CBCS. This system uses discrete-time finite impulse response (FIR) filters in the feedback loop of master and slave to limit the bandwidth of the chaotic signals involved. The use of discrete-time systems has as main advantage a simplified implementation by allowing straight use of digital signal processors and digital filters design [19]. The fact that the involved signals are bandlimited, makes possible to apply this system in practical settings where the available bandwidth is always limited. This way, we consider it as a promising CBCS technology.

In this work, we extend the results of [7,8] by analytically determining the master–slave chaotic synchronization conditions, in terms of the filters coefficients, for a general chaotic generator map. We also present the chaotic system performance in terms of bit error rate (BER) of a tuned discrete-time digital CBCS [10].

The paper is organized as following: in Section 2 we review the bandlimited CBCS scheme proposed by Eisencraft et al. [7]. Next, in Section 3, the analytical conditions for chaotic synchronization is derived. In Section 4, we describe how the bandlimited CBCS is adapted to transmit digital information and the idea of using a tuning filter. Further, in Section 5, numerical simulations addressing the system performance are presented. Finally, in Section 6, we draft some conclusions.

2. Review: bandlimited chaos-based communications

A simple way to synchronize master–slave continuous-time chaotic systems was proposed by Wu and Chua [25]. Their scheme is based in the separation of linear and non-linear components of the involved systems. As long as the linear part is stable and the non-linear component is transmitted from master to slave, both systems will completely synchronize [5].

This scheme was adapted for discrete-time systems by Eisencraft et al. [7], wherein the master system equation is

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(\mathbf{x}(n)), \tag{1}$$

and its slave counterpart, which depends on $\mathbf{x}(n)$, is given by

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{y}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(\mathbf{x}(n)), \tag{2}$$

where $n = 0, 1, 2, \ldots$ represents time instants, $\mathbf{A}_{K\times K}$ and $\mathbf{b}_{K\times 1}$ are constants, $\{\mathbf{x}(n), \mathbf{y}(n)\} \subset \mathbb{R}^K$, $\mathbf{x}(n) = [x_1(n), x_2(n), \ldots, x_K(n)]^T$ and $\mathbf{y}(n) = [y_1(n), y_2(n), \ldots, y_K(n)]^T$. The function $\mathbf{f}(\cdot) : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^K$ is non-linear in general.

Using (1)–(2), the synchronization error, $\mathbf{e}(n) \triangleq \mathbf{x}(n) - \mathbf{y}(n)$, can be written as

$$\mathbf{e}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{e}(n), \tag{3}$$

so master and slave completely synchronize if the eigenvalues λ_i, of $\mathbf{A}$, satisfy [2]

$$|\lambda_i| < 1,\ 1 \le i \le K. \tag{4}$$

Since the eigenvalues λ_i determine whether the Systems (1) and (2) synchronize, $\mathbf{A}$ is called *synchronization matrix*.

Using the master–slave structure of (1)–(2), it is straightforward to propose a CBCS that presents zero error in ideal channel conditions [7,25]. For this, we assume that $\mathbf{f}(\cdot)$ depends uniquely on the first component of $\mathbf{x}(n)$ and can be written as $\mathbf{f}(\mathbf{x}(n)) = \mathbf{f}(x_1(n)) = [f(x_1(n)), 0, \ldots, 0]^T$.

The message or information, $m(n)$, is encoded by $x_1(n)$ through the invertible function $c(\cdot, \cdot)$, resulting in the transmitted signal

$$s(n) = c(x_1(n), m(n)). \tag{5}$$

This way, $m(n)$ can be decoded by

$$m(n) = c^{-1}(x_1(n), s(n)). \tag{6}$$

Therefore the master–slave Eqs. (1)–(2), for the discrete-time CBCS, are rewritten as

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(s(n)) \tag{7}$$

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{y}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(r(n)) \tag{8}$$

where $r(n)$ is the signal received from the channel. This system is illustrated in Fig. 1 taking $H_S(\omega) = 1$, i.e., $x_{K+1}(n) = x_1(n)$ and $y_{K+1}(n) = y_1(n)$.

The transmission channel is modeled as a linear system with impulse response $h_c(n)$ and order N_c, i.e.,

$$r(n) = s(n) * h_c(n) = \sum_{k=0}^{N_c-1} s(k)h_c(n-k), \tag{9}$$

where "$*$" is the convolution operator.

Note that in the ideal channel case, $r(n) = s(n)$ and the synchronization error is still given by (3). This way, if the eigenvalues of $\mathbf{A}$ satisfies (4), $y_1(n) \to x_1(n)$ and, if we define the recovered message as

$$\hat{m}(n) = c^{-1}(y_1(n), r(n)), \tag{10}$$

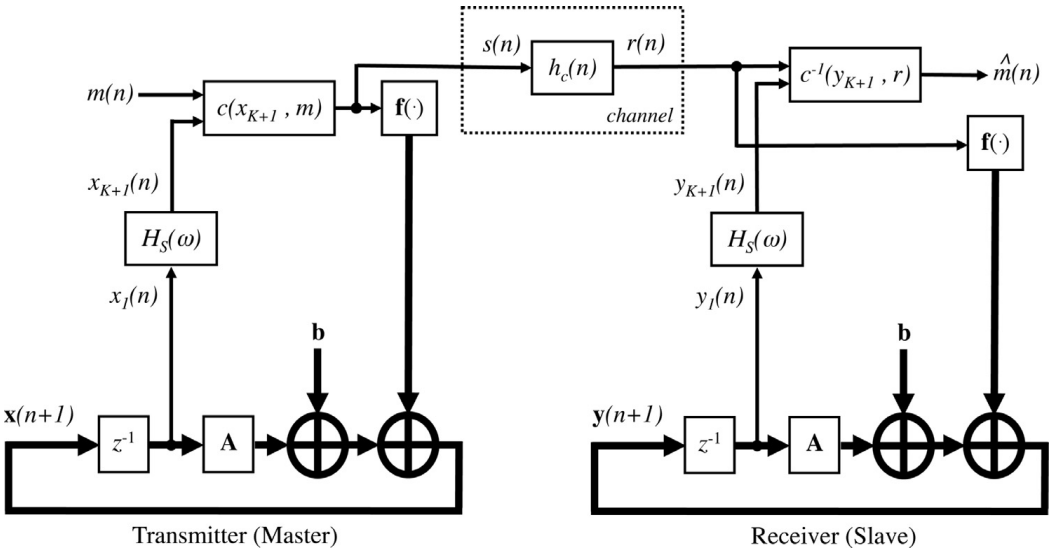


Fig. 1. A discrete-time bandlimited CBCS.

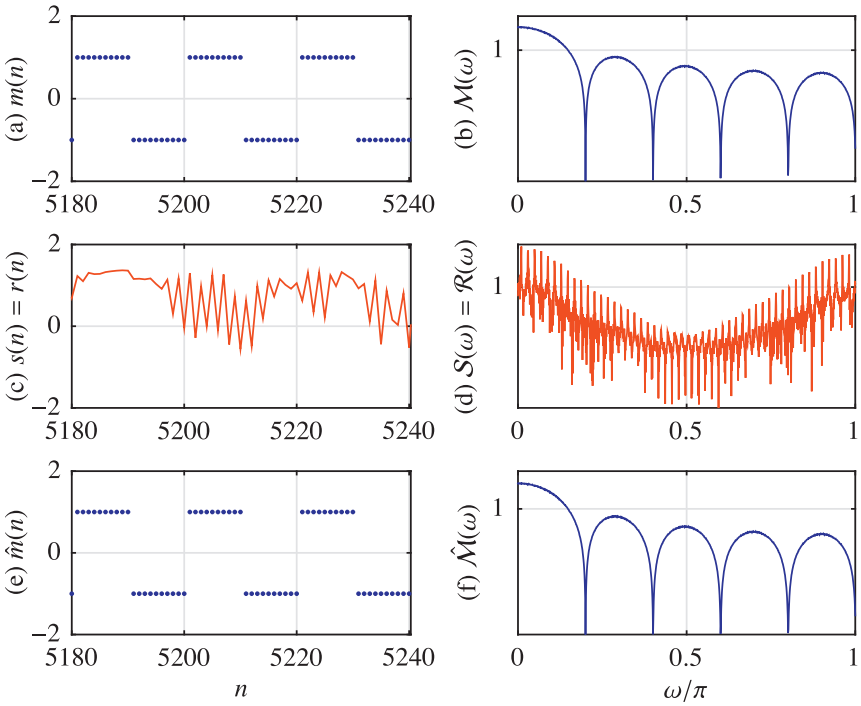


Fig. 2. Examples of $m(n)$, $r(n) = s(n)$ and $\hat{m}(n)$ in time (left) and frequency (right) domains for the CBCS of Fig. 1 under an ideal channel and $H_S(\omega) = 1$. The frequency domain y-axes are in logarithmic scale.

using (6), $\hat{m}(n) \to m(n)$. Clearly this may not be the case for a non-ideal channel where $r(n) \neq s(n)$, since synchronization between the master–slave systems is not guaranteed and, consequently, $\hat{m}(n) \neq m(n)$.

A possible chaotic generator that can be used in this scheme is the Hénon map [8]:

$$\mathbf{x}(n+1) = \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0.9x_1^2(n) + x_2(n) \\ 0.3x_1(n) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

which can be rewritten in terms of (1) with

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{f}(x_1(n)) = \begin{bmatrix} -0.9x_1^2(n) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

For this map, the master-slave systems synchronize since $\mathbf{A}$ has eigenvalues $\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{0.3}$, and thus (4) is satisfied.

In Fig. 2 we show fragments of the signals $m(n)$, $r(n) = s(n)$ e $\hat{m}(n)$, in time and frequency domains for an ideal channel, $s(n) = 0.9x_1(n) + 0.1m(n)$ and $\hat{m}(n) = 10r(n) - 9y_1(n)$. We can clearly see that $m(n)$ is perfectly retrieved in the receiver.

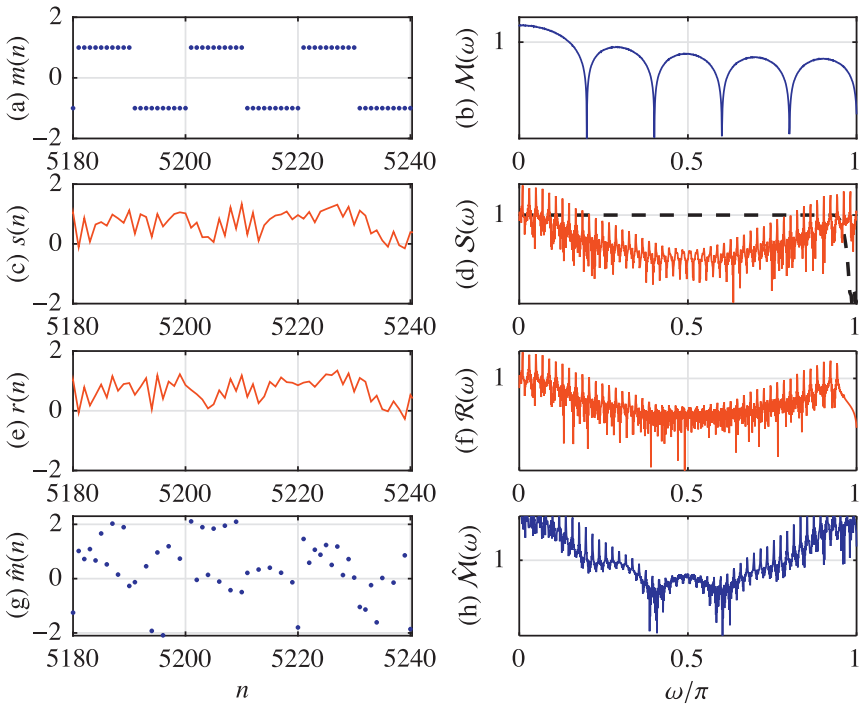


Fig. 3. Examples of $m(n)$, $s(n)$, $r(n)$ and $\hat{m}(n)$ in time (left) and frequency (right) domains for the CBCS of Fig. 1 under a low-pass channel with $\omega_c = 0.95\pi$ and $H_S(\omega) = 1$. The channel frequency response is shown in dashed line in (d). The frequency domain y-axes are in logarithmic scale.

However, as showed in Fig. 3, for a bandlimited channel modeled as a low-pass FIR filter with cut-off frequency $\omega_c = 0.95\pi$ and order $N_c = 200$, the signal $\hat{m}(n)$ is drastically different from $m(n)$. This way, the channel bandwidth, even in an ideal condition in terms of noise, corrupts the chaotic synchronization. As the receiver is non-linear, any modified signal spectrum component received can affect all spectra components from the signal retrieved.

As chaotic signals are broadband in general, $s(n)$ will be broadband. One solution for reestablishing the chaotic synchronization through bandlimited channels is to limit the spectrum of $x_1(n)$ using an N_S-order low-pass filter, $H_S(\omega)$, with cut-off frequency ω_S [7]. This way, for each input $x_1(n)$, the output $x_{K+1}(n)$ is written as

$$x_{K+1}(n) = \sum_{j=0}^{N_S-1} c_j x_1(n-j) \tag{13}$$

where c_j, $0 \le j \le N_S - 1$ are the filter coefficients. This is the general definition of a FIR filter with input $x_1(n)$ and output $x_{K+1}(n)$. Given N_S and ω_S, it is possible to use one of a number of different FIR filter design techniques to obtain c_j, $0 \le j \le N_s - 1$ [19]. In particular, we consider here the windowing method using a Blackman window [19].

Now, $s(n)$ is rewritten as $s(n) = c(x_{K+1}(n), m(n))$. Adequately choosing $H_S(\omega)$, $m(n)$ and the coding function, the signal $s(n)$ will be essentially bandlimited.

An identical filter is also placed in the receiver, so that master and slave are modified in the same way. Notice that the filters can be aggregated to the linear part of the original systems. This way, as long as the matrix $\mathbf{A}'$, corresponding to this new system, satisfies condition (4), there is identical synchronization and the CBCS still work in the same way as before. This scheme is depicted in Fig. 1.

Considering, for instance, the Hénon map again, gathering (7), (11) and (13), the master system after the filter placing is described as

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_2(n) + 1 - 0.9s^2(n) \\ x_2(n+1) = 0.3x_1(n) \\ x_3(n+1) = c_0x_1(n+1) + c_1x_1(n) + c_2x_1(n-1) + \cdots + c_{N_s-1}x_1(n-N_S+2) \end{cases}, \tag{14}$$

where $s(n) = c(x_3(n), m(n))$.

For $N_S \ge 4$, the auxiliary variables

$$\begin{aligned} x_4(n) &= x_1(n-1) \\ x_5(n) &= x_4(n-1) \\ &\vdots \\ x_{N_S+1}(n) &= x_{N_S}(n-1) \end{aligned} \tag{15}$$

are necessary.

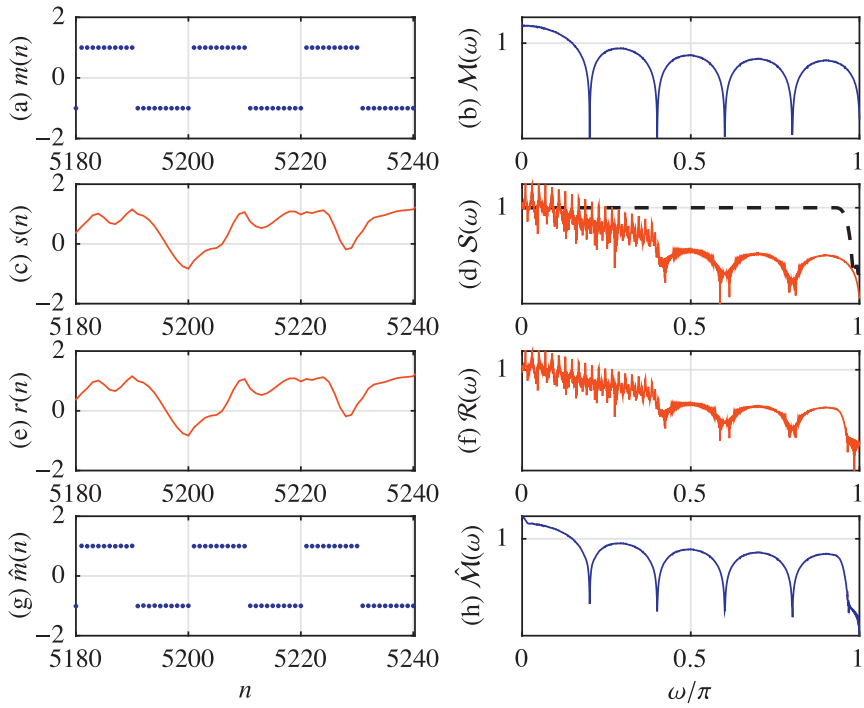


Fig. 4. Examples of $m(n)$, $s(n)$, $r(n)$ and $\hat{m}(n)$ in time (left) and frequency (right) domain for the CBCS of Fig. 1 with $\omega_S = 0.4\pi$ under a low-pass channel with $\omega_c = 0.95\pi$. The channel frequency response is shown in dashed line in (d). The frequency domain y-axes are in logarithmic scale.

Replacing (15) in (14), the master system can be described as

$$\begin{cases} x_1(n+1) & = x_2(n) + 1 - 0.9s^2(n) \\ x_2(n+1) & = 0.3x_1(n) \\ x_3(n+1) & = c_1x_1(n) + c_0x_2(n) + c_2x_4(n) + \cdots + c_{N_S-1}x_{N_S+1}(n) \\ x_4(n+1) & = x_1(n) \\ x_5(n+1) & = x_4(n) \\ \vdots & \\ x_{N_S+1}(n+1) & = x_{N_S}(n) \end{cases} \tag{16}$$

and thus its synchronization matrix is

$$\mathbf{A}_{(N_S+1)\times(N_S+1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & c_2 & \dots & c_{N_S-2} & c_{N_S-1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

with eigenvalues $\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{0.3}$ and $\lambda_3 = \cdots = \lambda_{N_S+1} = 0$. This way, the synchronization is kept independently of the filter coefficients. This result is generalized in Section 3.

In Fig. 4 we show samples of the signals $m(n)$, $s(n)$, $r(n)$ e $\hat{m}(n)$ in time and frequency domains, for the same conditions described for Fig. 3, but using filters $H_S(\omega)$ in master and slave systems with cut-off frequency $\omega_S = 0.4\pi$ and order $N_S = 200$. Clearly, this time, the message $m(n)$ is retrieved without error, showing that the synchronization between master and slave systems can be obtained in bandlimited channels.

3. General synchronization conditions

In this section, we analytically extend the conditions in which master and slave systems of Fig. 1 completely synchronize for the general case of a K-dimensional chaos generator map.

Let a_{ij}, $1 \le i, j \le K$, be the synchronization matrix $\mathbf{A}$ coefficients and c_j, $0 \le j \le N_S - 1$, the $H_S(\omega)$ filter coefficients. The state equations that describe Fig. 1 master system are

$$\begin{cases} x_1(n+1) & = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1K}x_K(n) + b_1 + f(s(n)) \\ x_2(n+1) & = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2K}x_K(n) + b_2 \\ \vdots & \\ x_K(n+1) & = a_{K1}x_1(n) + a_{K2}x_2(n) + \cdots + a_{KK}x_K(n) + b_K \\ x_{K+1}(n+1) & = c_0x_1(n+1) + c_1x_1(n) + \cdots + c_{N_s-1}x_1(n - N_S + 2) \end{cases}, \tag{18}$$

with $s(n) = c(x_{K+1}(n), m(n))$.

For $N_S \ge 4$, defining

$$\begin{aligned} x_{K+2}(n) &= x_1(n-1) \\ x_{K+3}(n) &= x_{K+2}(n-1) \\ &\vdots \\ x_{K+N_S-1}(n) &= x_{K+N_S-2}(n-1), \end{aligned} \tag{19}$$

(18) can be written as

$$\begin{cases} x_1(n+1) & = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1K}x_K(n) + b_1 + f(s(n)) \\ x_2(n+1) & = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2K}x_K(n) + b_2 \\ \vdots & \\ x_K(n+1) & = a_{K1}x_1(n) + a_{K2}x_2(n) + \cdots + a_{KK}x_K(n) + b_K \\ x_{K+1}(n+1) & = (c_0a_{11} + c_1)x_1(n) + c_0a_{12}x_2(n) + \cdots + c_0a_{1K}x_K(n) + c_2x_{K+2}(n) + \cdots \\ & \quad + c_{N_s-1}x_{K+N_s-1}(n) + c_0b_1 + c_0f(s(n)) \\ x_{K+2}(n+1) & = x_1(n) \\ x_{K+3}(n+1) & = x_{K+2}(n) \\ \vdots & \\ x_{K+N_s-1}(n+1) & = x_{K+N_s-2}(n) \end{cases}. \tag{20}$$

The insertion of $H_S(\omega)$ modify the master system order to $K' = K + N_S - 1$. This system can be written again as (7), with a synchronization matrix $\mathbf{A}'_{K' \times K'}$.

For $N_S \ge 4$

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & & \mathbf{0}_{K \times (N_S-1)} \\ & \mathbf{c}_{1 \times K'} & \\ & \mathbf{u}_{1 \times K'} & \\ \mathbf{0}_{(N_S-3) \times (K+1)} & \mathbf{I}_{(N_S-3) \times (N_S-3)} & \mathbf{0}_{(N_S-3) \times 1} \end{bmatrix}, \tag{21}$$

where $\mathbf{0}$ is a null matrix, $\mathbf{I}$ is the identity matrix, $\mathbf{c} = [(c_0a_{11} + c_1), c_0a_{12}, \ldots, c_0a_{1K}, 0, c_2, \ldots, c_{N_S-1}]$ and $\mathbf{u} = [1, 0, 0, \ldots, 0]$.

Particularly, for $N_S = 1$

$$\begin{cases} x_1(n+1) & = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1K}x_K(n) + b_1 + f(s(n)) \\ x_2(n+1) & = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2K}x_K(n) + b_2 \\ \vdots & \\ x_K(n+1) & = a_{K1}x_1(n) + a_{K2}x_2(n) + \cdots + a_{KK}x_K(n) + b_K \\ x_{K+1}(n+1) & = c_0a_{11}x_1(n) + c_0a_{12}x_2(n) + \cdots + c_0a_{1K}x_K(n) + c_0b_1 + c_0f(s(n)) \end{cases}. \tag{22}$$

and

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{K\times 1} \\ \mathbf{c}_{1\times(K+1)} & \end{bmatrix}, \tag{23}$$

with $\mathbf{c} = [c_0 a_{11}, c_0 a_{12}, \ldots, c_0 a_{1K}, 0]$.

For $N_S = 2$

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1K}x_K(n) + b_1 + f(s(n)) \\ x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2K}x_K(n) + b_2 \\ \vdots & \\ x_K(n+1) &= a_{K1}x_1(n) + a_{K2}x_2(n) + \cdots + a_{KK}x_K(n) + b_K \\ x_{K+1}(n+1) &= (c_0a_{11} + c_1)x_1(n) + c_0a_{12}x_2(n) + \cdots + c_0a_{1K}x_K(n) + c_0b_1 + c_0f(s(n)) \end{cases}. \tag{24}$$

and

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{K\times 1} \\ \mathbf{c}_{1\times(K+1)} & \end{bmatrix}, \tag{25}$$

with $\mathbf{c} = [(c_0 a_{11} + c_1), c_0 a_{12}, \ldots, c_0 a_{1K}, 0]$.

Finally, for $N_S = 3$

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1K}x_K(n) + b_1 + f(s(n)) \\ x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2K}x_K(n) + b_2 \\ \vdots & \\ x_K(n+1) &= a_{K1}x_1(n) + a_{K2}x_2(n) + \cdots + a_{KK}x_K(n) + b_K \\ x_{K+1}(n+1) &= (c_0a_{11} + c_1)x_1(n) + c_0a_{12}x_2(n) + \cdots + c_0a_{1K}x_K(n) + c_2x_{K+2}(n) + \\ & \quad c_0b_1 + c_0f(s(n)) \\ x_{K+2}(n+1) &= x_1(n) \end{cases} \tag{26}$$

and

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{K\times(N_S-1)} \\ \mathbf{c}_{1\times K'} & \\ \mathbf{u}_{1\times K'} & \end{bmatrix}, \tag{27}$$

with $\mathbf{c} = [(c_0 a_{11} + c_1), c_0 a_{12}, \ldots, c_0 a_{1K}, 0, c_2]$ and $\mathbf{u} = [1, 0, 0, \ldots, 0]$.

The following theorem establishes the relationship between matrices $\mathbf{A}$ and $\mathbf{A}'$ eigenvalues.

Theorem 3.1. *Matrix $\mathbf{A}'$ has K eigenvalues identical to the ones of $\mathbf{A}$ and $(K' - K)$ null eigenvalues.*

Proof. The eigenvalues λ_i, $1 \le i \le K$, of $\mathbf{A}$, are the roots of

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} (\lambda - a_{11}) & a_{12} & \cdots & a_{1K} \\ a_{21} & (\lambda - a_{22}) & \cdots & a_{2K} \\ \vdots & \vdots & (\lambda - \cdots) & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & (\lambda - a_{KK}) \end{vmatrix} = 0. \tag{28}$$

Matrix $\mathbf{A}'$ is generically described as

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1K} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2K} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & a_{KK} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (c_0 a_{11} + c_1) & c_0 a_{12} & \cdots & c_0 a_{1K} & 0 & c_2 & \cdots & c_{N_S-2} & c_{N_S-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{29}$$

and the eigenvalues λ'_i, $1 \le i \le K'$, of $\mathbf{A}'$, are the roots of

$$\det(\lambda'\mathbf{I} - \mathbf{A}') = \begin{vmatrix} (\lambda' - a_{11}) & a_{12} & \cdots & a_{1K} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & (\lambda' - a_{22}) & \cdots & a_{2K} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & (\lambda' - a_{KK}) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (c_0 a_{11} + c_1) & c_0 a_{12} & \cdots & c_0 a_{1K} & \lambda' & c_2 & \cdots & c_{N_S-2} & c_{N_S-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda' & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda' \end{vmatrix} = 0. \tag{30}$$

Applying the Laplace Expansion Theorem (LET), choosing the element $a_{(K+1)(K+1)} = \lambda'$, circled in (30), results

$$\det(\lambda'\mathbf{I} - \mathbf{A}') = \lambda' \begin{vmatrix} (\lambda' - a_{11}) & a_{12} & \cdots & a_{1K} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & (\lambda' - a_{22}) & \cdots & a_{2K} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & (\lambda' - a_{KK}) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda' & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda' \end{vmatrix} = 0. \tag{31}$$

Successively applying the LET $(N_S - 1)$ times, always choosing the last column λ' element, as circled in (31), we obtain

$$\det(\lambda'\mathbf{I} - \mathbf{A}') = \lambda'^{(N_S-1)} \begin{vmatrix} (\lambda' - a_{11}) & a_{12} & \cdots & a_{1K} \\ a_{21} & (\lambda' - a_{22}) & \cdots & a_{2K} \\ \vdots & \vdots & (\lambda' - \cdots) & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & (\lambda' - a_{KK}) \end{vmatrix} = 0. \tag{32}$$

Comparing (32) to (28)

$$\det(\lambda'\mathbf{I} - \mathbf{A}') = \lambda'^{(N_S-1)} \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \tag{33}$$

and the solutions of (28) are

$$\begin{cases} \lambda'_1 & = & \lambda_1 \\ \lambda'_2 & = & \lambda_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ \lambda'_K & = & \lambda_K \\ \lambda'_{K+1} & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ \lambda'_{K+N_S-1} & = & 0 \end{cases} \tag{34}$$

and the theorem is proved. □

Therefore, using (4), master and slave systems of Fig. 1 completely synchronize, independently of the applied digital filters, provided that the system without the filters, i.e., with $H_S(\omega) = 1$, synchronize. This result generalize the previous one obtained in [8], for the Hénon map only, and implies that the filters do not impair the CBCS. Synchronization is always attained if the original systems synchronize. However, it must be noted that there is no guarantee that the signals will remain chaotic. In fact, numerical simulations [8] show that in some situations the generated signals become periodic or can diverge. To analytically access the conditions that filters coefficients must satisfy, so that the generated signals remain chaotic, is still a work in progress.

4. Tuning and noise filtering

In this section, we propose a digital communication system based on the bandlimited CBCS, revisited in Section 2 and presented in [10].

Let

$$m(n) = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i p(n - Mi) \tag{35}$$

where

$$p(n) = 1, 0 \le n < M \tag{36}$$

is a rectangular pulse of length M-samples and $b_i = \pm 1$ is an equiprobable sequence of bits. The Power Spectral Density (PSD) of $m(n)$ is given by [12]

$$\mathcal{M}(\omega) = \frac{1}{M}\left[\frac{\sin\left(\frac{\omega M}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right]^2. \tag{37}$$

Considering the first positive null as a criteria for the bandwidth ω_M of $m(n)$, M must be chosen as [10]

$$M > \frac{2\pi}{\omega_S}, \tag{38}$$

so that $\omega_M < \omega_S$, where ω_S is the bandwidth of the chaotic signal to be mixed with $m(n)$. This way, the message spectrum will be contained in the band occupied by the chaotic signal spectrum when considering an additive mixing.

For retrieving the binary sequence, we use the conventional optimum receiver [12], that in this case consists of attributing $\hat{b}_i = 1$ if the summation

$$S_i = \sum_{n=iM}^{(i+1)M-1} \hat{m}(n) \tag{39}$$

is positive and $\hat{b}_i = -1$ otherwise.

The channel is modeled as additive white Gaussian noise (AWGN). As coding function, we used [1]

$$s(n) = 0.7x_3(n) + 0.3m(n), \tag{40}$$

while the chaotic signals are generated using the Hénon map (11).

Since AWGN has power equally distributed in all frequencies, including the ones where $s(n)$ has no significant components, a low-pass FIR filter, $H_T(\omega)$, with cut-off frequency ω_T, is placed at the entrance of the receiver to eliminate the out-of-band noise. This system is shown in Fig. 5.

The resulting filtered signal received, $r'(n)$, is used in the message recovering as

$$\hat{m}(n) = \frac{10}{3}r'(n) - \frac{7}{3}y_3(n). \tag{41}$$

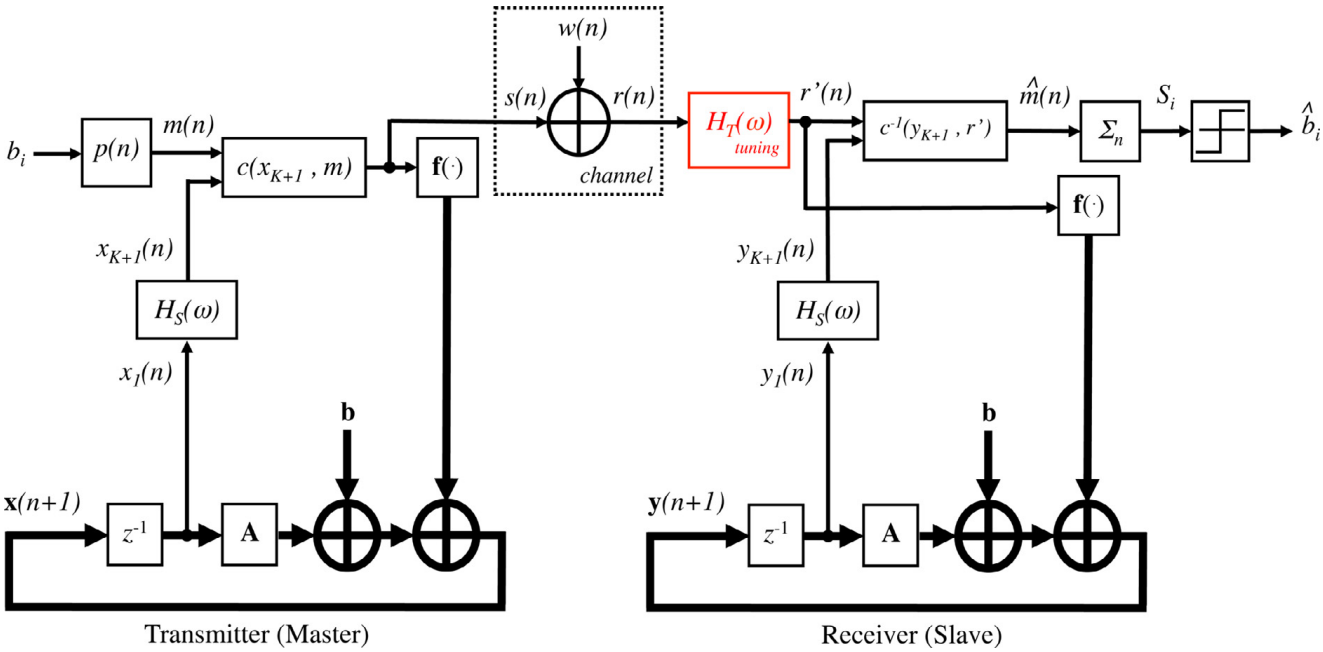


Fig. 5. A binary discrete-time bandlimited CBCS with tuning.

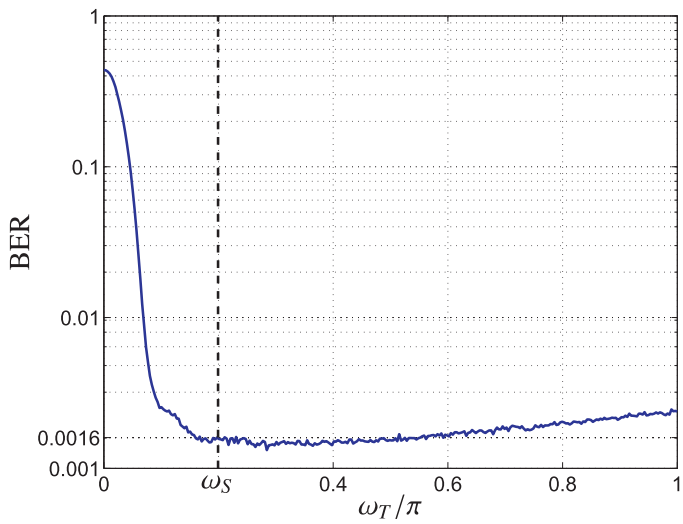


Fig. 6. BER as a function of the cut-off frequency of the tuning filter ω_T for SNR = 10 dB and $\omega_S = 0.2\pi$.

5. Performance in AWGN channel

In this section, we access the proposed digital communication system performance, in terms of BER, through numerical simulations. The low-pass filters, in transmitter and receiver systems, were designed using a Blackman window of order $N_S = 200$ and cut-off frequency $\omega_S = 0.2\pi$. The rectangular pulse $p(n)$ is designed with $M = 20$, satisfying (38).

Fig. 6 shows the obtained BER as a function of the tuning filter cut-off frequency with order $N_T = 200$ for a signal-to-noise ratio (SNR) of 10 dB [10].

By one hand, as the cut-off frequency of the systems filters are $\omega_s = 0.2\pi$, we clearly see that if we choose $\omega_T < 0.2\pi$, BER rises abruptly, as we are cutting relevant components of the signal. By the other hand, the curve smoothly increases as we approach $\omega_T \approx \pi$, that represents the situation without tuning at all. In the interval

$$0.23\pi < \omega_T < 0.5\pi \tag{42}$$

the BER is underneath 0.0016, representing the best choices for ω_T.

In Fig. 7 we compare the BER performance considering: (i) $\omega_T = \pi$, i.e, no tuning; (ii) a tuning filter with $\omega_T = 0.3\pi$, i.e. in the interval (42); and (iii) $m(n)$ transmitted directly through the channel without chaos, as conventional baseband Binary Phase-Shift Keying (BPSK) [12].

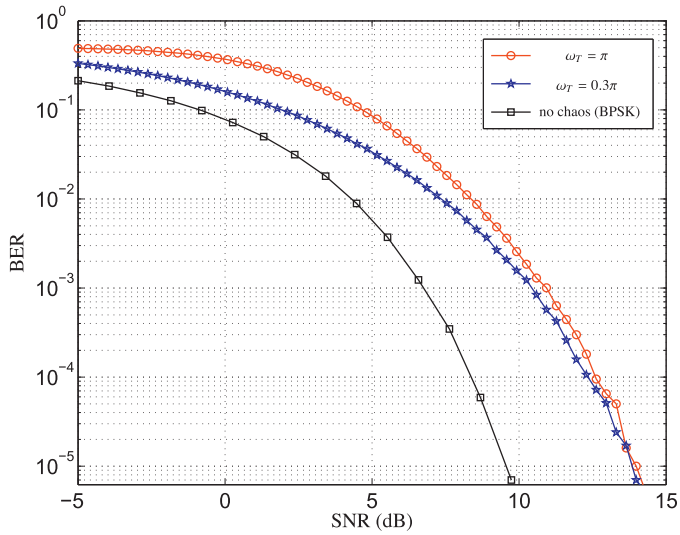


Fig. 7. BER as a function of the SNR for $\omega_T = \pi$ (without tuning), $\omega_T = 0.3\pi$ and BPSK for $\omega_S = 0.2\pi$.

There is a decrease in the error rate in the data transmission when using the tuning filter for an SNR lower than approximately 12 dB, comparing to the no tuning condition. Thus, the tuning filter is cutting out-of-band noise and the chaotic signal is in fact bandlimited, presenting this advantage compared to previously proposed discrete-time CBCSs. If the SNR is too high, i.e., there is almost no noise in the channel, filtering out-of-band noise will not improve performance. This explains why the curves for $\omega_T = 0.3\pi$ and $\omega_T = \pi$ overlaps for high SNR.

Other works, such as [13,14,24] present BER performance curves in AWGN for other digital CBCS. In general, our results are at the same level or better, using lower bandwidth, since our signals are bandlimited. When it comes to conventional modulations, as BPSK, our system present lower BER perfomance. As each bit is transmitted using different signals, this last result is expected since the conventional optimal receiver, the matched filters bank [12], is not directly available. This lower performance can be compensated, for example, by higher multipath robustness [21] in more challenging channels and by the intrinsic privacy in the data transmission which could complement cryptography systems [3].

Using a noise filtering at the receiver, besides the BER improvement described, allows the communication system proposed to be selective in frequency, a characteristic useful in traditional systems encountered in literature [12].

6. Conclusions

In this work we present an extended analysis of a bandlimited chaos-based communication system for binary data transmission. We analytically determine the required conditions for master-slave synchronization in terms of the filters coefficients. Its evaluation performance is presented considering AWGN channel and the possibility of using a tuning filter at the receiver to eliminate the out-of-band noise. Numerical simulations showed that the tuning filter can reduce BER, decreasing the errors in data transmission, in moderate SNRs, where out-of-band noise plays a significant role. This way, we have shown the feasibility of transmitting digital data using chaotic signals through a bandlimited and noisy channel.

The frequency multiplexing of chaotic signal and how to analytically access the effect of FIR filters on the chaotic nature of the transmitted signals are under research.

Acknowledgments

This work was partly supported by FAPESP under grant 2014/04864-2 and by CNPq under grants 311575/2013-7 and 479901/2013-9.

References

[1] Abib GA, Eisencraft M. On the performance of a digital chaos-based communication system in noisy channels. Proceedings of the 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON 2015), 1. Saint-Petersburg, Russia IFAC - International Federation of Automatic Control; 2015. p. 1–6.
[2] Agarwal RP. Difference equations and inequalities. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 155. New York: Marcel Dekker Inc.; 1992. Theory, methods, and applications.
[3] Argyris A, Syvridis D, Larger L, Annovazzi-Lodi V, Colet P, Fischer I, et al. Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links. Nature 2005;438(7066):343–6.
[4] Baptista MS, Macau EE, Grebogi C, Lai Y-C, Rosa E. Integrated chaotic communication scheme. Phys Rev E 2000;62:4835–45.
[5] Boccaletti S, Kurths J, Osipov G, Valladares D, Zhou C. The synchronization of chaotic systems. Phys Rep 2002;366:1–101.
[6] Dmitriev A, Kletsov A, Laktyushkin A, Panas A, Starkov S. Ultrawideband wireless communications based on dynamic chaos. J Commun Technol Electron 2006;51(10):1126–40.

[7] Eisencraft M, Fanganiello RD, Baccalá LA. Synchronization of discrete-time chaotic systems in bandlimited channels. Math Problems Eng 2009:1–13.2009
[8] Eisencraft M, Fanganiello RD, Monteiro LHA. Chaotic synchronization in discrete-time systems connected by bandlimited channels. Commun Lett IEEE 2011;15(6):671–3.
[9] Feki M, Robert B, Gelle G, Colas M. Secure digital communication using discrete-time chaos synchronization. Chaos, Solitons Fractals 2003;18(4):881–90.
[10] Fontes RT, Eisencraft M. Noise filtering in bandlimited digital chaos-based communication systems. In: Proceedings of the 22nd European Signal Processing Conference, EUSIPCO 2014, Lisbon, Portugal, September 1-5; 2014. p. 406–10.
[11] Hayes S, Grebogi C, Ott E. Communicating with chaos. Phys Rev Lett 1993;70:3031–4.
[12] Haykin SS. Communication systems. fourth edition. New York: Wiley; 2001.
[13] Illing L. Digital communication using chaos and nonlinear dynamics. Nonlin Anal-theory Meth & Appl 2009;71(12):E2958–64.
[14] Kennedy M, Kolumban G. Digital communications using chaos. Signal Proc 2000;80(7):1307–20.
[15] Kennedy MP, Setti G, Rovatti R. Chaotic Electronics in Telecommunications. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, Inc.; 2000.
[16] Kolumbán G, Krébesz T, Tse CK, Lau FCM. Basics of communications using chaos. In: Eisencraft M, Attux R, Suyama R, editors. Chaotic Signals in Digital Communications. CRC Press, Inc; 2013. p. 111–41. Chapter 4.
[17] Lau FCM, Tse CK. Chaos-based digital communication systems. Berlin: Springer; 2003.
[18] Macau EE, Marinho CM. Communication with chaos over band-limited channels. Acta Astronautica 2003;53:465–75. The New Face of Space Selected Proceedings of the 53rd International Astronautical Federation Congress.
[19] Oppenheim AV, Schafer RW. Discrete-Time Signal Processing. 3rd edition. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall Press; 2009.
[20] Pecora LM, Carroll TL. Synchronization in chaotic systems. Phys Rev Lett 1990;64(8):821–4.
[21] Ren H-P, Baptista MS, Grebogi C. Robustness of chaos to multipath propagation media. In: Eisencraft M, Attux R, Suyama R, editors. Chaotic Signals in Digital Communications. CRC Press; 2013. p. 423–37. Chapter 16.
[22] Ren H-P, Baptista MS, Grebogi C. Wireless communication with chaos. Phys Rev Lett 2013;110:184101.
[23] Rulkov NF, Tsimring LS. Synchronization methods for communication with chaos over band-limited channels. Int J Circuit Theory Appl 1999;27(6):555–67.
[24] Williams C. Chaotic communications over radio channels. IEEE Trans Circuits Syst I: Fundamental Theory Appl 2001;48(12):1394–404.
[25] Wu CW, Chua LO. A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems. Int J Bifurcation Chaos 1993;3(6):1619–27.

NOISE FILTERING IN BANDLIMITED DIGITAL CHAOS-BASED COMMUNICATION SYSTEMS

*Rodrigo T. Fontes and Marcio Eisencraft**

Polytechnic School of the University of São Paulo
Telecom and Control Engineering Department
{rfontes,marcio}@lcs.poli.usp.br

ABSTRACT

In recent years, many chaos-based communication schemes were proposed. However, their performance in non-ideal scenarios must be further investigated. In this work, the performance of a bandlimited binary communication system based on chaotic synchronization is evaluated considering a white Gaussian noise channel. As a way to improve the signal to noise ratio in the receiver, and thus the bit error rate, we propose to filter the out-of-band noise in the receiver. Numerical simulations show the advantages of using such a scheme.

***Index Terms*—** Chaos-based communication; bandlimited channels; additive noise; synchronization.

1. INTRODUCTION

In digital chaos-based communications systems, each bit of information is transmitted using a different fragment of a chaotic signal [1, 2]. Thus, it differs fundamentally from the conventional digital communication systems, where each symbol is associated with a constant and predefined waveform. Although it may have interesting features, like an improvement in security [3, 4] and ultra-wideband possible applications [5], it also poses practical challenges because the conventional optimal receiver, the matched filters bank [6], is not directly available.

The chaos-based communication systems have been studied for at least 20 years now [7, 8]. Many interesting and innovative communication schemes based on chaos synchronization were proposed [1, 3]. However, they seldom surpassed the frontier between theoretical and laboratory setup to practical or commercial environments. One important reason for this fact is the sensibility of the chaotic synchronization to channel imperfections, like noise or distortion [9, 10]. The adaptation of the chaos-based digital communication systems, so that they can really work and compete with conventional ones in practical setups, is a relevant and active research field [10, 11].

* Thanks CNPq-Brazil (grants $479901/2013-9$ and $311575/2013-7$) for the support on this research.

One of the issues when it comes to practical channels is related to the chaotic signals bandwidth. Many works cite "large bandwidth" as a property of chaos [12]. However, this characterization is not enough in practical settings. As the physical channels are always bandlimited, it is necessary to know exactly what is the frequency range occupied by a transmitted chaotic signal and, preferably, it should be possible to control it. Although there are some recent results related to this [13, 14], there is still much to progress.

Recently, it was proposed a discrete-time chaos-based communication system capable of generating and transmitting bandlimited signals [15]. However, a performance analysis of such system in a noisy channel was not provided. Furthermore, only analogical messages were considered. In the current paper we apply this system to the transmission of binary data. This way, it is possible to evaluate its performance in terms of Bit Error Rate (BER), as usual in the digital communication literature. Furthermore, as the transmitted signal is essentially bandlimited, we are able to use a tuning filter in the receiver in order to improve this BER.

The paper is organized as following: in Section 2 we review the bandlimited chaos-based communication scheme proposed by [15] and describe how it can be adapted to transmit digital information. Next, in Section 3, the use of a tuning filter for noise filtering is detailed and in Section 4 numerical simulations are presented. Finally, in Section 5 we draft some conclusions.

2. BANDLIMITED DIGITAL CHAOS-BASED COMMUNICATIONS

A simple way to synchronize master-slave chaotic systems was proposed by Wu and Chua [16]. Their scheme is based in the separation of linear and non-linear components of the involved systems. As long as the linear part is stable and the non-linear component is transmitted from master to slave, both systems will identically synchronize [16]. This scheme was adapted for discrete-time systems in [15]. In this work the master equation is written as

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(\mathbf{x}(n)), \tag{1}$$

and the slave counterpart, which depends on $\mathbf{x}(n)$, is given by

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{y}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(\mathbf{x}(n)) \tag{2}$$

where $n \in \mathbb{N}$ represents time instants, $\mathbf{A}$ and $\mathbf{b}$ are constants, $\{\mathbf{x}(n), \mathbf{y}(n)\} \subset \mathbb{R}^K$, $\mathbf{x}(n) = [x_1(n), x_2(n), \ldots, x_K(n)]^T$ and $\mathbf{y}(n) = [y_1(n), y_2(n), \ldots, y_K(n)]^T$. The function $\mathbf{f}(\cdot) : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^K$ is non-linear in general.

Using (1)-(2), the synchronization error, $\mathbf{e}(n) \triangleq \mathbf{x}(n) - \mathbf{y}(n)$, can be written as

$$\mathbf{e}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{e}(n), \tag{3}$$

so master and slave identically synchronize if the eigenvalues λ_i of $\mathbf{A}$ satisfy

$$|\lambda_i| < 1,\ 1 \leq i \leq K. \tag{4}$$

Using the master-slave structure of (1)-(2), it is straightforward to propose a chaos-based communication system that presents zero error in ideal channel conditions [15, 16]. For this, we assume that $\mathbf{f}(\cdot)$ depends uniquely on the first component $x_1(n)$ of $\mathbf{x}(n)$ and can be written as $\mathbf{f}(\mathbf{x}(n)) = [f(x_1(n)), 0, \ldots, 0]^T$.

The message $m(n)$ is encoded by the chaotic signal $x_1(n)$ through the revertible function $c(\cdot,\cdot)$, resulting in the transmitted signal $s(n) = c(x_1(n), m(n))$. This way, $m(n)$ can be decoded by

$$m(n) = c^{-1}(x_1(n), s(n)). \tag{5}$$

The master-slave equations (1)-(2) are rewritten as

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(s(n)) \tag{6}$$

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{y}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(r(n)) \tag{7}$$

where $r(n)$ is the signal received from the channel. Note that in the ideal channel case, $s(n) = r(n)$ and the synchronization error is still given by (3). This way, if the eigenvalues of $\mathbf{A}$ satisfies (4), $y_1(n) \to x_1(n)$ and if we define the recovered message as $\hat{m}(n) = c^{-1}(y_1(n), r(n))$, using (5), $\hat{m}(n) \to m(n)$. Clearly this may not be the case for a non-ideal channel where $r(n) \neq s(n)$.

This scheme is represented in Figure 1. Here the channel is modeled as an additive white Gaussian noise (AWGN), $w(n)$, with zero mean and power σ_w^2.

As chaotic signals are broadband in general, $s(n)$ will be broadband. In [15] it was proposed to adjust the spectrum of $s(n)$ using a Finite Impulse Response (FIR) filter in the feedback loop. The spectrum of $x_1(n)$ is limited using a low-pass filter, $H_S(\omega)$, with cut-off frequency ω_S. This way, for each input $x_1(n)$, the output $x_{K+1}(n)$ is written as

$$x_{K+1}(n) = \sum_{j=0}^{N} c_j x_1(n-j) \tag{8}$$

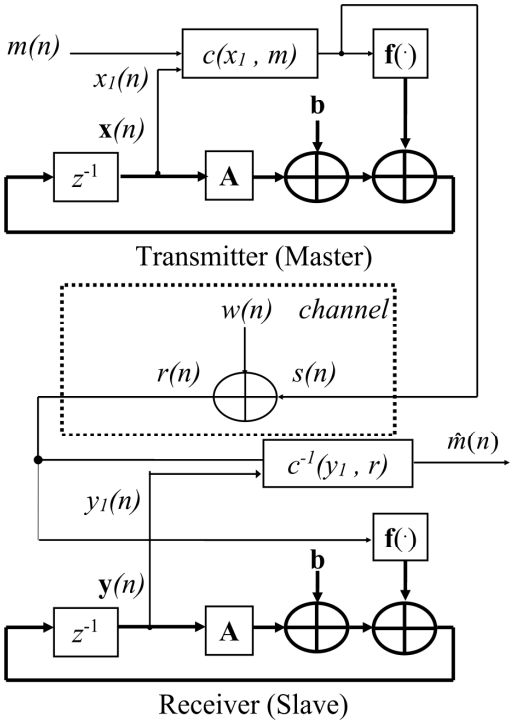


Fig. 1. Communication system proposed in [15] considering an AWGN channel.

where c_j, $0 \leq j \leq N$, are the $H_S(\omega)$ filter coefficients. Now, $s(n)$ is rewritten as $s(n) = c(x_{K+1}(n), m(n))$.

An identical filter is also placed in the receiver, so that master and slave are modified in the same way. Notice that the filters can be aggregated to the linear part of the original systems [15]. Nevertheless, as long as the matrix $\mathbf{A}'$, corresponding to this new system, satisfies the condition (4), the identical synchronization and chaos-based communication system still work in the same way as before. Figure 2 shows a block diagram of this scheme, for $H_T(\omega) = 1$ and $r'(n) = r(n)$.

Previous works [15, 17] used analog sine messages $m(n)$, which are naturally bandlimited. As we are considering digital messages, represented by an equiprobable sequence of bits $b_i = \pm 1$, we have the additional problem of making $m(n)$ essentially bandlimited. The message is generated as $m(n) = b_i p(n), iM \leq n < (i+1)M$, where $p(n) = 1, 0 \leq n < M$, is a M-width rectangular unitary pulse. The Power Spectral Density (PSD) of $m(n)$ is then given by [6]

$$\mathcal{M}(\omega) = \frac{1}{M}\left[\frac{\sin\left(\frac{\omega M}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right]^2. \tag{9}$$

Considering the first positive null as a criteria for the bandwidth ω_S of $m(n)$, M must be chosen as $M = \frac{2\pi}{\omega_S}$.

For retrieving the binary sequence, we use the optimum receiver [6], that in this case consists of attributing $\hat{b}_i = 1$ if

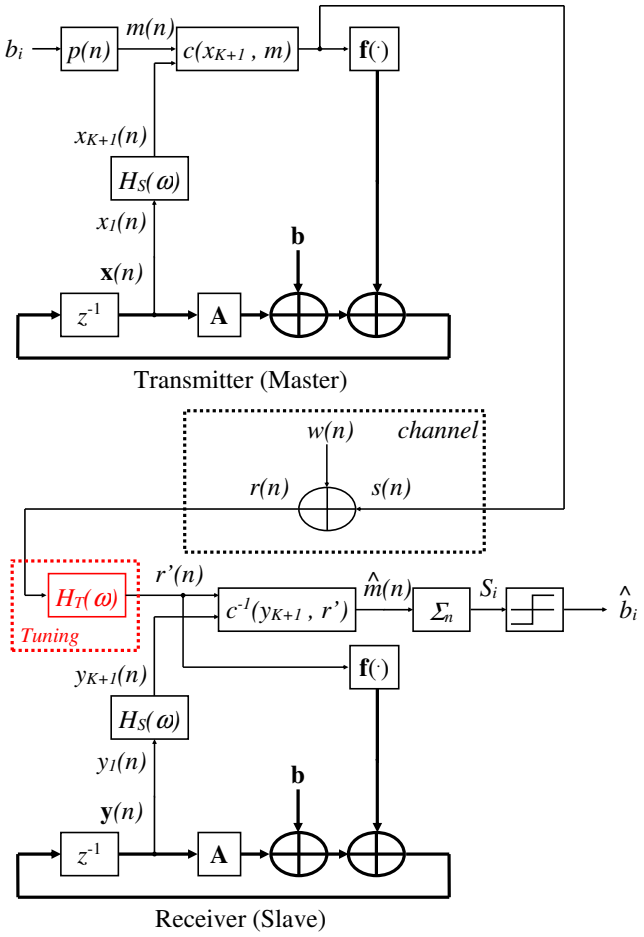


Fig. 2. Bandlimited digital chaos-based communication scheme.

the summation

$$S_i = \sum_{n=iM}^{(i+1)M-1} \hat{m}(n) \tag{10}$$

is positive and $\hat{b}_i = -1$ otherwise.

As chaos generator we consider the Hénon map [18], as in [19, 20], given by

$$\mathbf{x}(n+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}(n) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha x_1^2(n) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(x_1(n))}. \tag{11}$$

In the numerical simulations, we consider $\alpha = 0.9$ and $\beta = 0.3$, as in [19]. In this reference it is shown that these choices are convenient for obtaining chaotic signals for a large range of cut-off frequencies and filter orders for $H_S(\omega)$.

Figure 3 shows an example of $m(n)$, the corresponding transmitted signal $s(n)$ and recovered message $\hat{m}(n)$ for $M = 10$, in the noiseless case, in time and frequency domain. Clearly, the message is recovered in this case.

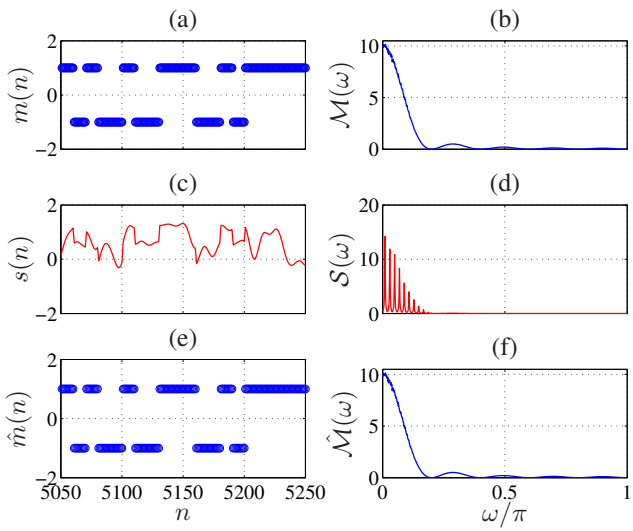


Fig. 3. Digital chaos-based communication signals: (a) $m(n)$, (c) $s(n)$, (e) $\hat{m}(n)$ and PSD functions: (b) $\mathcal{M}(\omega)$, (d) $\mathcal{S}(\omega)$ and (f) $\hat{\mathcal{M}}(\omega)$.

3. TUNING AND NOISE FILTERING

The transmitted chaotic signal $s(n)$ of the presented system is bandlimited. Since AWGN has power equally distributed in all frequencies, including the ones where $s(n)$ has no significant components, a low-pass FIR filter, $H_T(\omega)$, with cut-off frequency ω_T, is placed at the entrance of the receiver to eliminate the out-of-band noise interference, as shown in Figure 2. The resulting filtered signal, $r'(n)$, is used in the message recovering as

$$\hat{m}(n) = c^{-1}\left(y_{K+1}(n), r'(n)\right). \tag{12}$$

To illustrate the tuning process, Figure 4 presents the frequency response of a tuning filter with cut-off frequency $\omega_T = 0.38\pi$, the noise and $s(n)$ PSDs $\mathcal{W}(\omega)$, $\mathcal{S}(\omega)$ namely, for $M = 20$, $\omega_S = 0.2\pi$ and $\sigma_w^2 = 0.05$. The filter is clearly eliminating out-of-band noise.

4. NUMERICAL SIMULATIONS

In this section, we access the proposed digital communication systems performance, in terms of BER, through numerical simulations. As coding function we consider

$$s(n) = (1-\gamma)\, x_1(n) + \gamma m(n), \tag{13}$$

with $\gamma = 0.3$. The lowpass filters in the transmitter and receiver systems were designed using a Blackman windowing of order 200 and cut-off frequency $\omega_S = 0.2\pi$.

Initially, Figure 5 shows the BER as a function of the channel SNR for different time symbol duration M and no

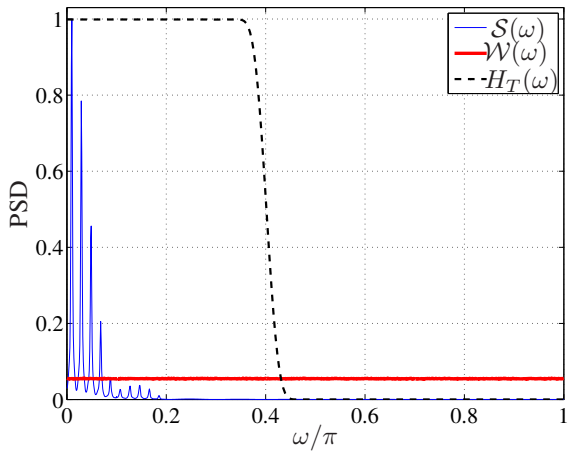


Fig. 4. Noise and $s(n)$ bandwidth and $H_T(\omega)$ frequency response.

tuning, considering the transmission of 10^6 bits. As expected, for a given SNR, BER decreases with M. The choice of M presents a compromise. Increasing M implies in spending more energy and less bandwidth per symbol, as in conventional modulations. However, the quantitative properties of this exchange is not straightforward because of the nonlinearity characteristics of transmitter and receiver: the BER for a given energy-per-bit to noise-power-spectral-density ratio (E_b/N_0) is not constant. Bearing this figure in mind, we have chosen $M = 20$ for the remaining simulations, considering that this time symbol provides a BER of approximately 10^{-3} at SNR $= 12$ dB.

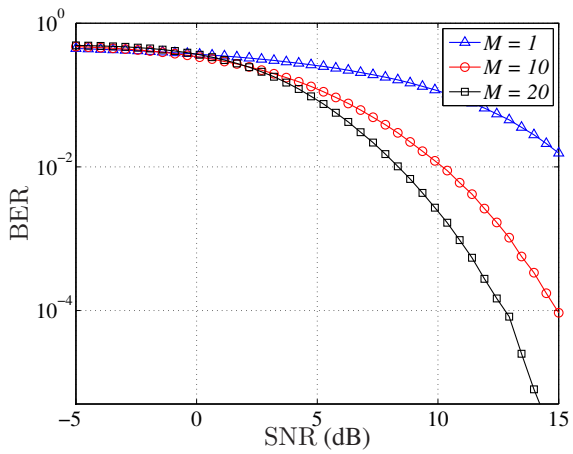


Fig. 5. BER for different time symbol duration M without tuning.

Figure 6 shows the obtained BER as a function of the tuning filter cut-off frequency for SNR $= 10$ dB. By one hand, as the cut-off frequency of the systems filters are $\omega_s = 0.2\pi$, we clearly see that if we choose $\omega_T < 0.2\pi$, BER rises abruptly, as we are cutting relevant components of the signal. By the other hand, the curve smoothly increases as we approach $\omega_T \approx \pi$, that represents the situation without tuning at all. We numerically found that

$$\omega_{To} \approx 0.38\pi \tag{14}$$

presents the lower BER in the considered setting.

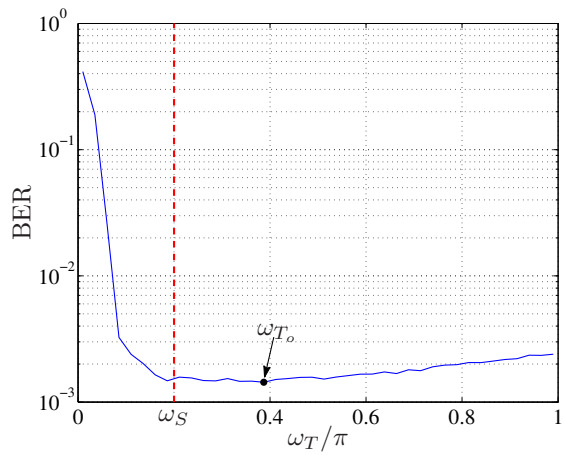


Fig. 6. BER as a function of the cut-off frequency of the tuning filter ω_T for SNR $= 10$ dB.

In Figure 7 we compare the BER performance with and without the tuning filter using ω_T determined in (14) and $M = 20$. There is advantage in using the tuning filter for an SNR lower than approximately 12 dB. Thus, the tuning filter is cutting out-of-band noise and the chaotic signal is in fact bandlimited, presenting therefore this advantage compared to previously proposed chaos-based communication systems.

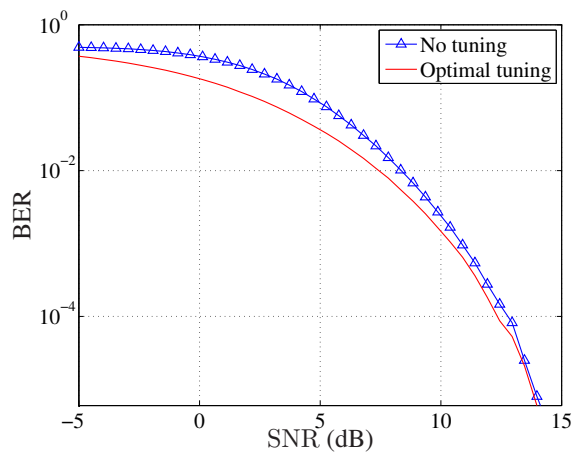


Fig. 7. BER as a function of the SNR for the systems with and without tuning.

Using a noise filtering at the receiver, besides the BER improvement described, allows the communication system proposed to be selective in frequency, a characteristic useful in traditional systems encountered in literature [6].

5. CONCLUSIONS

In this paper we adapted a bandlimited chaos-based communication system for binary data transmission. We access its performance considering AWGN channel and the possibility of using a tuning filter at the receiver to eliminate the out-of-band noise. Numerical simulations showed that the tuning filter can reduce BER in moderate SNRs and the feasibility of transmitting digital data using chaotic signals through a bandlimited and noisy channel. The frequency multiplexing of chaotic signal, how to analytically access the effect of linear filters on the proprieties of chaotic signals and the BER performance under more realistic scenarios are under research.

REFERENCES

[1] M. P. Kennedy, G. Setti, and R. Rovatti, Eds., *Chaotic Electronics in Telecommunications*, CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 2000.

[2] Géza Kolumbán, Tamás Krébesz, Chi K. Tse, and Francis C. M. Lau, "Basics of communications using chaos," in *Chaotic Signals in Digital Communications*, Marcio Eisencraft, Romis Attux, and Ricardo Suyama, Eds., chapter 4, pp. 111–141. CRC Press, Inc., 2013.

[3] Murilo S. Baptista, Elbert E. Macau, Celso Grebogi, Ying-Cheng Lai, and Epaminondas Rosa, "Integrated chaotic communication scheme," *Phys. Rev. E*, vol. 62, pp. 4835–4845, Oct 2000.

[4] Apostolos Argyris, Dimitris Syvridis, Laurent Larger, Valerio Annovazzi-Lodi, Pere Colet, Ingo Fischer, Jordi Garcia-Ojalvo, Claudio R. Mirasso, Luis Pesquera, and K. Alan Shore, "Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links," *Nature*, vol. 438, no. 7066, pp. 343–346, Nov. 2005.

[5] A.S. Dmitriev, A.V. Kletsov, A.M. Laktyushkin, A.I. Panas, and S.O. Starkov, "Ultrawideband wireless communications based on dynamic chaos," *Journal of Communications Technology and Electronics*, vol. 51, no. 10, pp. 1126–1140, 2006.

[6] S. S. Haykin, *Communication systems*, Wiley, New York, fourth edition, 2000.

[7] Louis M. Pecora and Thomas L. Carroll, "Synchronization in chaotic systems," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, no. 8, pp. 821–824, Feb. 1990.

[8] Kevin M. Cuomo and Alan V. Oppenheim, "Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 71, no. 1, pp. 65–68, Jul 1993.

[9] C. Williams, "Chaotic communications over radio channels," *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, vol. 48, no. 12, pp. 1394 –1404, dec. 2001.

[10] Marcio Eisencraft, Romis R. F. Attux, and Ricardo Suyama, Eds., *Chaotic Signals in Digital Communications*, CRC Press, Inc., 2013.

[11] Hai-Peng Ren, Murilo S. Baptista, and Celso Grebogi, "Wireless communication with chaos," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, pp. 184101, Apr 2013.

[12] F. C. M. Lau and C. K. Tse, *Chaos-based digital communication systems*, Springer, Berlin, 2003.

[13] M. Eisencraft, D. M. Kato, and L. H. A. Monteiro, "Fast communication: Spectral properties of chaotic signals generated by the skew tent map," *Signal Process.*, vol. 90, no. 1, pp. 385–390, 2010.

[14] Kais Feltekh, Zouhair Ben Jemaa, Danile Fournier-Prunaret, and Safya Belghith, "Border collision bifurcations and power spectral density of chaotic signals generated by one-dimensional discontinuous piecewise linear maps," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 19, no. 8, pp. 2771 – 2784, 2014.

[15] Marcio Eisencraft, Renato D. Fanganiello, and Luiz A. Baccalá, "Synchronization of Discrete-Time Chaotic Systems in Bandlimited Channels," *Mathematical Problems In Engineering*, vol. 2009, pp. 1–13, 2009.

[16] C. W. Wu and L. O. Chua, "A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 3, no. 6, pp. 1619–1627, Dec. 1993.

[17] Nikolai F. Rulkov and Lev S. Tsimring, "Synchronization methods for communication with chaos over bandlimited channels," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 27, no. 6, pp. 555–567, 1999.

[18] M. Hénon, "A two-dimensional mapping with a strange attractor," *Communications in Mathematical Physics*, vol. 50, pp. 69–77, 1976, 10.1007/BF01608556.

[19] M. Eisencraft, R. D. Fanganiello, and L. H. A. Monteiro, "Chaotic synchronization in discrete-time systems connected by bandlimited channels," *Communications Letters, IEEE*, vol. 15, no. 6, pp. 671 –673, june 2011.

[20] M. Feki, B. Robert, G. Gelle, and M. Colas, "Secure digital communication using discrete-time chaos synchronization," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 18, no. 4, pp. 881–890, Nov. 2003.

Conditions for Synchronizing a Master-Slave Bandlimited Chaos-based Communication System

Rodrigo T. Fontes
Polytechnic School of the University of São Paulo
Telecommunication and Control Engineering Department
São Paulo - SP - Brazil
rfontes@lcs.poli.usp.br

Marcio Eisencraft*
Polytechnic School of the University of São Paulo
Telecommunication and Control Engineering Department
São Paulo - SP - Brazil
marcio@lcs.poli.usp.br

***Abstract*— In recent years, many communication systems that encode information in a chaotic signal were studied. To tackle bandwidth constraints, bandlimited chaos-based communication systems were proposed, showing the possibility of controlling the chaotic signals spectra using digital filters. Since these filters modify the original system, it is necessary to study how their insertion affects the chaotic synchronization. In this work we demonstrate that synchronization is attained independently of the filters coefficients.**

***Index Terms*— Chaos-based communication; bandlimited channels; synchronization.**

I. Introduction

In Telecommunication and Signal Processing areas, the researches involving chaotic signals have rised after Pecora and Carrol seminal work [1] showing that two identical systems, generating chaotic signals, could be synchronized.

Some interesting and innovative communication schemes based on chaotic synchronization were proposed [2]–[7]. However, they seldom surpassed the frontier between theoretical and laboratory setup to practical or commercial environments. One important reason for this fact is the sensibility of the chaotic synchronization to channel imperfections, like noise or distortion [4], [6], [8], [9].

A simple way to synchronize master-slave chaotic systems was proposed by Wu and Chua [10]. Their scheme is based in the separation of linear and non-linear components of the involved systems. As long as the linear part is stable and the non-linear component is transmitted from master to slave, both systems will completely synchronize [11].

A discrete-time chaos-based communication system (CBCS) based on Wu and Chua synchronization, was proposed in [12]. Since chaotic signals have large bandwidth and the physical transmission channels are always bandlimited, it is also addressed in [12] the bandwidth controlling issue, showing a CBCS capable of generating and transmitting bandlimited signals by placing digital filters in the feedback loops of the master and the slave systems. The synchronization conditions for this bandlimited system was analytically determined for the Hénon map in [13]. In [4] the performance of this CBCS was addressed in terms of bit error rate for an additive white Gaussian noise channel and a tuning scheme to filter the out-of-band noise was proposed.

In this work, we extend the results of [13] presented in [4] by analytically determining the chaotic synchronization conditions, in terms of the filters coefficients, for any chaotic generator map.

The paper is organized as following: in Section II we review the bandlimited CBCS described in [12]. Next, in Section III, the analytic conditions for chaotic synchronization is derived. Finally, in Section IV, we draft some conclusions.

II. A Bandlimited CBCS

Consider a master-slave discrete-time CBCS described by [12]

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(s(n)) \tag{1}$$

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{y}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(r(n)) \tag{2}$$

where $n \in \mathbb{N}$ represents time instants, $\mathbf{A}_{K\times K}$ and $\mathbf{b}_{K\times 1}$ are constants, $\{\mathbf{x}(n), \mathbf{y}(n)\} \subset \mathbb{R}^K$, $\mathbf{x}(n) = [x_1(n), x_2(n), \ldots, x_K(n)]^T$ and $\mathbf{y}(n) = [y_1(n), y_2(n), \ldots, y_K(n)]^T$. The function $\mathbf{f}(\cdot) : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^K$ is non-linear in general, $s(n)$ is the transmitted signal and $r(n)$ the received signal. We consider a bandlimited noiseless channel represented by a finite impulse response (FIR) $h_c(n)$. This way,

$$r(n) = s(n) * h_c(n) = \sum_{k=0}^{N_c-1} s(k)h_c(n-k), \tag{3}$$

where "$*$" is the convolution operator. This CBCS is ilustrated by the diagram in Figure 1 considering $H_S(\omega) = 1$, so that $x_{k+1}(n) = x_1(n)$ and $y_{k+1}(n) = y_1(n)$.

Using (1)-(2), the synchronization error, $\mathbf{e}(n) \triangleq \mathbf{x}(n) - \mathbf{y}(n)$, can be written as $\mathbf{e}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{e}(n)$, so master and slave systems completely synchronize if the eigenvalues λ_i of $\mathbf{A}$ satisfy [14]

$$|\lambda_i| < 1,\ 1 \le i \le K. \tag{4}$$

Since the eigenvalues λ_i, from matrix $\mathbf{A}$, determine whether the systems (1) and (2) synchronize, $\mathbf{A}$ is called *synchronization matrix*.

The message or information, $m(n)$, is encoded by the chaotic signal $x_1(n)$ through the invertible function $c(\cdot,\cdot)$,

* This work was partly supported by FAPESP under grant 2014/04864-2 and by CNPq under grants 311575/2013-7 and 479901/2013-9.

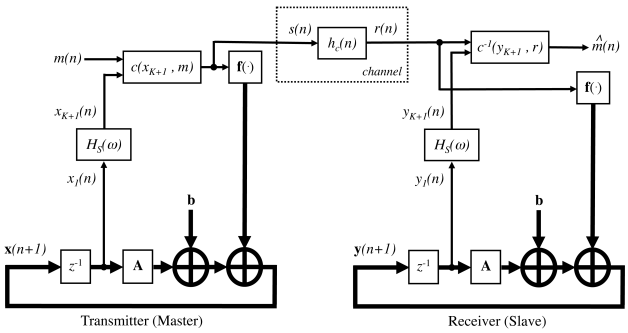


Fig. 1. A Bandlimited CBCS [12].

resulting in the transmitted signal $s(n) = c(x_1(n), m(n))$. This way, $m(n)$ can be decoded by

$$m(n) = c^{-1}(x_1(n), s(n)). \tag{5}$$

If the eigenvalues of $\mathbf{A}$ satisfies (4), $y_1(n) \to x_1(n)$ and if we define the recovered message as $\hat{m}(n) = c^{-1}(y_1(n), r(n))$, using (5), $\hat{m}(n) \to m(n)$. Clearly this may not be the case for a nonideal channel where $r(n) \neq s(n)$ and consequently $\hat{m}(n) \neq m(n)$. The Hénon map [15] is used as the chaotic generator as in [4], [13].

In Figure 2 we show typical signals $m(n)$, $s(n)$ and $\hat{m}(n)$ in time and frequency domains for an ideal channel and $s(n) = c(x_1(n), m(n)) = 0.9x_1(n) + 0.1m(n)$. It is visible that $m(n)$ is retrieved without error in the receiver. However, as showed in Figure 3, if $h_c(n)$ is a low-pass FIR filter with cut-off frequency $\omega_c = 0.95\pi$ and order $N_c = 200$, the signal $\hat{m}(n)$ is completely different from $m(n)$, showing that the channel bandwidth, even in an ideal condition in terms of noise, corrupts the chaotic synchronization. As the receiver is non-linear, any modified spectrum component received can affect all the other components of the retrieved signal.

Since chaotic signals are broadband in general, $s(n)$ will be broadband. One solution for reestablishing the chaotic synchronization through bandlimited channels is adjusting the spectrum of $s(n)$ using FIR filters, $H_S(\omega)$, in the feedback loops [12]. The spectrum of $x_1(n)$ is limited using a low-pass filter with cut-off frequency ω_S. This way, for each input $x_1(n)$, the output $x_{K+1}(n)$ is written as

$$x_{K+1}(n) = \sum_{j=0}^{N_S-1} c_j x_1(n-j) \tag{6}$$

where c_j, $0 \leq j \leq N_S - 1$, are the $H_S(\omega)$ filter coefficients. Choosing $H_S(\omega)$, $m(n)$ and the coding function adequately the signal $s(n)$ will be essentially bandlimited. In [13] it was shown that for the Hénon map, the synchronization is not affected by the filter coefficients. This means that for any FIR filter $H_S(\omega)$, only the original synchronization matrix is relevant in determining whether master-slave synchronization is maintained.

In Figure 4 we show the signals $m(n)$, $s(n)$ and $\hat{m}(n)$ for the same conditions described for Figure 3, using filters $H_S(\omega)$

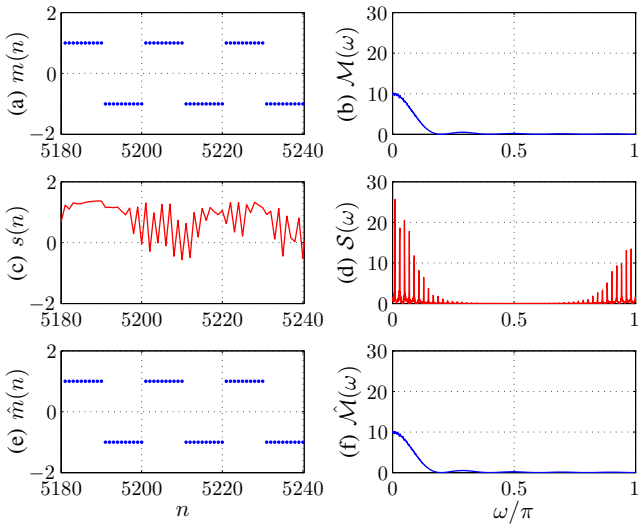


Fig. 2. Examples of $m(n)$, $s(n)$ and $\hat{m}(n)$ in time and frequency domains for the CBCS of Figure 1 with $H_S(\omega) = 1$ under an ideal channel.

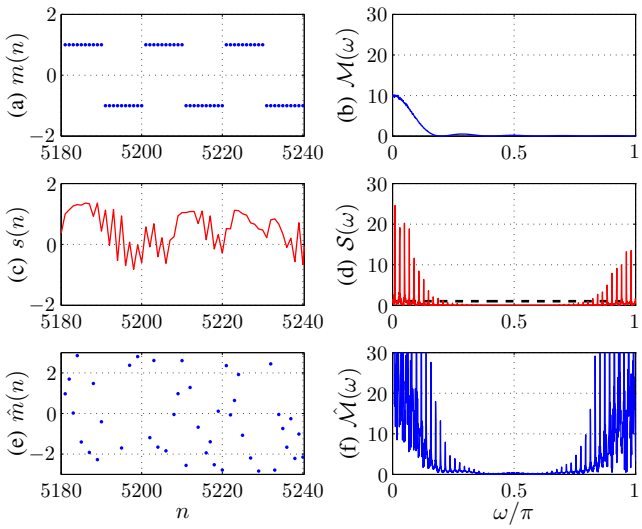


Fig. 3. Examples of $m(n)$, $s(n)$ and $\hat{m}(n)$ in time and frequency domains for the CBCS of Figure 1 with $H_S(\omega) = 1$ under a low-pass channel with $\omega_c = 0.95\pi$. The channel frequency response is shown in dashed line in (d).

in master-slave systems with cut-off frequency $\omega_S = 0.4\pi$ and order $N_S = 200$. Clearly, the message $m(n)$ is retrieved without error showing that chaotic synchronization can be obtained in bandlimited chaos-based communication system.

In Section III, we extend this result for any K-dimensional map.

III. Synchronization Conditions

Being a_{ij}, $1 \leq i, j \leq K$, the synchronization matrix $\mathbf{A}$ coefficients and c_j, $0 \leq j \leq N_S - 1$, the $H_S(\omega)$ filter coefficients, the state equations that describe the Figure 1

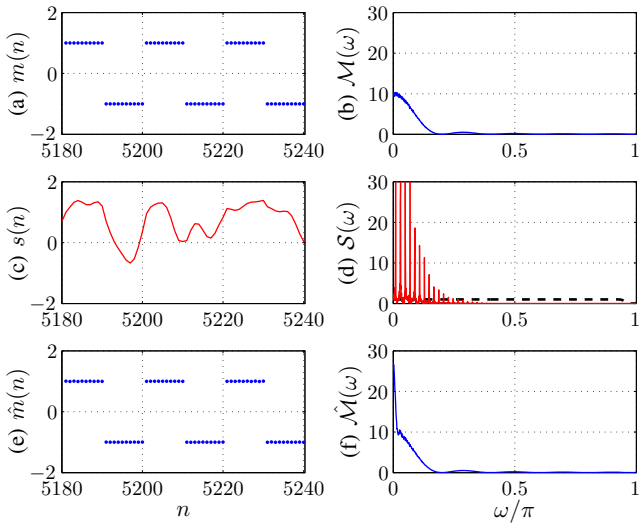


Fig. 4. Examples of $m(n)$, $s(n)$ and $\hat{m}(n)$ in time and frequency domain for the CBCS of Figure 1 with $\omega_S = 0.4\pi$ under a low-pass channel with $\omega_c = 0.95\pi$. The channel frequency response is shown in dashed line in (d).

master system are

$$\begin{cases} x_1(n+1) & = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1K}x_K(n) + b_1 + f(s(n)) \\ x_2(n+1) & = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2K}x_K(n) + b_2 \\ \vdots & \\ x_K(n+1) & = a_{K1}x_1(n) + a_{K2}x_2(n) + \cdots + a_{KK}x_K(n) + b_K \\ x_{K+1}(n+1) & = c_0x_1(n+1) + c_1x_1(n) + \cdots + c_{N_S-1}x_1(n-N_S+2) \end{cases}, \tag{7}$$

with $s(n) = c\left(x_{K+1}(n), m(n)\right)$.

For $N_S \geq 4$, defining

$$\begin{aligned} x_{K+2}(n) &= x_1(n-1) \\ x_{K+3}(n) &= x_{K+2}(n-1) \\ &\vdots \\ x_{K+N_S-1}(n) &= x_{K+N_S-2}(n-1), \end{aligned} \tag{8}$$

(7) can rewriting as

$$\begin{cases} x_1(n+1) & = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1K}x_K(n) + b_1 + f(s(n)) \\ x_2(n+1) & = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2K}x_K(n) + b_2 \\ \vdots & \\ x_K(n+1) & = a_{K1}x_1(n) + a_{K2}x_2(n) + \cdots + a_{KK}x_K(n) + b_K \\ x_{K+1}(n+1) & = (c_0a_{11} + c_1)x_1(n) + c_0a_{12}x_2(n) + \cdots + c_0a_{1K}x_K(n) + c_2x_{K+2}(n) + \cdots \\ & \quad + c_{N_s-1}x_{K+N_S-1}(n) + c_0b_1 + c_0f(s(n)) \\ x_{K+2}(n+1) & = x_1(n) \\ x_{K+3}(n+1) & = x_{K+2}(n) \\ \vdots & \\ x_{K+N_S-1}(n+1) & = x_{K+N_S-2}(n) \end{cases}. \tag{9}$$

The insertion of $H_S(\omega)$ modify the master system order to $K' = K + N_S - 1$. This system can be written again as (1), with a synchronization matrix $\mathbf{A}'$.

For $N_S \geq 4$ this matrix $\mathbf{A}'$ with dimension $K' \times K'$, is described as

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & & \mathbf{O}_{K\text{x}(N_S-1)} \\ & \mathbf{c}_{1\text{x}K'} & \\ & \mathbf{u}_{1\text{x}K'} & \\ \mathbf{O}_{(N_S-3)\text{x}(K+1)} & \mathbf{I}_{(N_S-3)\text{x}(N_S-3)} & \mathbf{O}_{(N_S-3)\text{x}1} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

where $\mathbf{O}$ is a null matrix, $\mathbf{I}$ is the identity matrix, $\mathbf{c} = [(c_0a_{11} + c_1), c_0a_{12}, \ldots, c_0a_{1K}, 0, c_2, \ldots, c_{N_S-1}]$ and $\mathbf{u} = [1, 0, 0, \ldots, 0]$.

Particularly for $N_S = 1$,

$$\begin{cases} x_1(n+1) & = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1K}x_K(n) + b_1 + f(s(n)) \\ x_2(n+1) & = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2K}x_K(n) + b_2 \\ \vdots & \\ x_K(n+1) & = a_{K1}x_1(n) + a_{K2}x_2(n) + \cdots + a_{KK}x_K(n) + b_K \\ x_{K+1}(n+1) & = c_0a_{11}x_1(n) + c_0a_{12}x_2(n) + \cdots + c_0a_{1K}x_K(n) + c_0b_1 + c_0f(s(n)) \end{cases}. \tag{11}$$

and

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & & \mathbf{O}_{K\times 1} \\ & \mathbf{c}_{1\times(K+1)} & \end{bmatrix}, \tag{12}$$

with $\mathbf{c} = [c_0a_{11}, c_0a_{12}, \ldots, c_0a_{1K}, 0]$.

For $N_S = 2$

$$\begin{cases} x_1(n+1) & = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1K}x_K(n) + b_1 + f(s(n)) \\ x_2(n+1) & = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2K}x_K(n) + b_2 \\ \vdots & \\ x_K(n+1) & = a_{K1}x_1(n) + a_{K2}x_2(n) + \cdots + a_{KK}x_K(n) + b_K \\ x_{K+1}(n+1) & = (c_0a_{11} + c_1)x_1(n) + c_0a_{12}x_2(n) + \cdots + c_0a_{1K}x_K(n) + c_0b_1 + c_0f(s(n)) \end{cases}. \tag{13}$$

and

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & & \mathbf{O}_{K\times 1} \\ & \mathbf{c}_{1\times(K+1)} & \end{bmatrix}, \tag{14}$$

with $\mathbf{c} = [(c_0a_{11} + c_1), c_0a_{12}, \ldots, c_0a_{1K}, 0]$.

Finally, for $N_S = 3$

$$\begin{cases} x_1(n+1) & = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1K}x_K(n) + b_1 + f(s(n)) \\ x_2(n+1) & = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2K}x_K(n) + b_2 \\ \vdots & \\ x_K(n+1) & = a_{K1}x_1(n) + a_{K2}x_2(n) + \cdots + a_{KK}x_K(n) + b_K \\ x_{K+1}(n+1) & = (c_0a_{11} + c_1)x_1(n) + c_0a_{12}x_2(n) + \cdots + c_0a_{1K}x_K(n) + c_2x_{K+2}(n) + \cdots \\ & \quad + c_{N_S-1}x_{K+N_S-1}(n) + c_0b_1 + c_0f(s(n)) \\ x_{K+2}(n+1) & = x_1(n) \end{cases} \tag{15}$$

and

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & & \mathbf{O}_{K\times(N_S-1)} \\ & \mathbf{c}_{1\times K'} & \\ & \mathbf{u}_{1\times K'} & \end{bmatrix}, \tag{16}$$

with $\mathbf{c} = [(c_0a_{11} + c_1), c_0a_{12}, \ldots, c_0a_{1K}, 0, c_2]$ e $\mathbf{u} = [1, 0, 0, \ldots, 0]$.

The following theorem establishes the relationship between matrix $\mathbf{A}$ and $\mathbf{A}'$ eigenvalues.

Theorem 3.1: The matrix $\mathbf{A}'$ has K eigenvalues identical to the ones of matrix $\mathbf{A}$ and $(K' - K)$ null eigenvalues.

Proof: The eigenvalues λ_i, $1 \leq i \leq K$, of $\mathbf{A}$, are the roots of

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} (\lambda - a_{11}) & a_{12} & \cdots & a_{1K} \\ a_{21} & (\lambda - a_{22}) & \cdots & a_{2K} \\ \vdots & \vdots & (\lambda - \cdots) & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & (\lambda - a_{KK}) \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

The matrix $\mathbf{A}'$ is generically described as

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1K} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2K} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & a_{KK} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (c_0a_{11} + c_1) & c_0a_{12} & \cdots & c_0a_{1K} & 0 & c_2 & \cdots & c_{N_S-2} & c_{N_S-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

and the eigenvalues λ'_i, $1 \leq i \leq K'$, of $\mathbf{A}'$, the roots of

$$\det(\lambda'\mathbf{I}-\mathbf{A}') = \begin{vmatrix} (\lambda'-a_{11}) & a_{12} & \cdots & a_{1K} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & (\lambda'-a_{22}) & \cdots & a_{2K} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & (\lambda'-a_{KK}) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (c_0a_{11}+c_1) & c_0a_{12} & \cdots & c_0a_{1K} & \lambda' & c_2 & \cdots & c_{N_S-2} & c_{N_S-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda' & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda' \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

Applying the Laplace Expansion Theorem (LET), choosing the element $a_{(K+1)(K+1)} = \lambda'$, circled in (19), results

$$\det(\lambda'\mathbf{I}-\mathbf{A}') = \lambda' \begin{vmatrix} (\lambda'-a_{11}) & a_{12} & \cdots & a_{1K} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & (\lambda'-a_{22}) & \cdots & a_{2K} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & (\lambda'-a_{KK}) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda' & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda' \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

Successively applying the LET (N_S-1) times, we obtain

$$\det(\lambda'\mathbf{I}-\mathbf{A}') = \lambda'^{(N_S-1)} \begin{vmatrix} (\lambda'-a_{11}) & a_{12} & \cdots & a_{1K} \\ a_{21} & (\lambda'-a_{22}) & \cdots & a_{2K} \\ \vdots & \vdots & (\lambda'-\cdots) & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & (\lambda'-a_{KK}) \end{vmatrix} = 0. \tag{21}$$

Comparing (21) to (17)

$$\det(\lambda'\mathbf{I}-\mathbf{A}') = \lambda'^{(N_S-1)}\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) = 0. \tag{22}$$

The solutions of (17) are

$$\begin{cases} \lambda'_1 & = & \lambda_1 \\ \lambda'_2 & = & \lambda_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ \lambda'_K & = & \lambda_K \\ \lambda'_{K+1} & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ \lambda'_{K+N_S-1} & = & 0 \end{cases} \tag{23}$$

and the theorem is proved. ■

This way, if the original master-slave system synchronize, i.e., the eigenvalues of $\mathbf{A}$ satisfy (4), the introduction of the filter $H_S(\omega)$ does not affect the synchronization, since the eigenvalues of $\mathbf{A}'$ also satisfy (4).

This result generalize the previous one obtained in [13] for Hénon map, opening the possibility of finding a map that can improve BER performance in CBCS.

IV. Conclusions

In this work we present an extended analysis of a bandlimited chaos-based communication system. We determine, analytically, the necessary conditions for master-slave chaotic synchronization in terms of the filters coefficients, for any K-dimensional chaos generator map. How to analytically access the effect of FIR filters on chaotic nature of the transmitted signals are under research.

References

[1] Louis M. Pecora and Thomas L. Carroll, "Synchronization in chaotic systems," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, no. 8, pp. 821–824, Feb. 1990.

[2] Géza Kolumbán, Tamás Krébesz, Chi K. Tse, and Francis C. M. Lau, "Basics of communications using chaos," in *Chaotic Signals in Digital Communications*, Marcio Eisencraft, Romis Attux, and Ricardo Suyama, Eds., chapter 4, pp. 111–141. CRC Press, Inc., 2013.

[3] Murilo S. Baptista, Elbert E. Macau, Celso Grebogi, Ying-Cheng Lai, and Epaminondas Rosa, "Integrated chaotic communication scheme," *Phys. Rev. E*, vol. 62, pp. 4835–4845, Oct 2000.

[4] Rodrigo T. Fontes and Marcio Eisencraft, "Noise filtering in bandlimited digital chaos-based communication systems," in *EUSIPCO 2014 (22nd European Signal Processing Conference 2014) (EUSIPCO 2014)*, Lisbon, Portugal, Sept. 2014.

[5] Hai-Peng Ren, Murilo S. Baptista, and Celso Grebogi, "Wireless communication with chaos," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, pp. 184101, Apr 2013.

[6] Renato Candido, Marcio Eisencraft, and Magno T.M. Silva, "Channel equalization for synchronization of chaotic maps," *Digital Signal Processing*, vol. 33, no. 0, pp. 42 – 49, 2014.

[7] Hefei Cao, Ruoxun Zhang, and Fengli Yan, "Spread spectrum communication and its circuit implementation using fractional-order chaotic system via a single driving variable," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 18, no. 2, pp. 341 – 350, 2013.

[8] Marcio Eisencraft, Romis R. F. Attux, and Ricardo Suyama, Eds., *Chaotic Signals in Digital Communications*, CRC Press, Inc., 2013.

[9] R. Candido, M. Eisencraft, and M. T. M. Silva, "Channel equalization for synchonization of Ikeda maps," in *Proc. of* 21st *European Signal Processing Conference (EUSIPCO'2013)*, Marrakesh, Marocco, 2013.

[10] C. W. Wu and L. O. Chua, "A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 3, no. 6, pp. 1619–1627, Dec. 1993.

[11] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D.L. Valladares, and C.S. Zhou, "The synchronization of chaotic systems," *Physics Reports*, vol. 366, pp. 1 – 101, 2002.

[12] Marcio Eisencraft, Renato D. Fanganiello, and Luiz A. Baccalá, "Synchronization of Discrete-Time Chaotic Systems in Bandlimited Channels," *Mathematical Problems In Engineering*, vol. 2009, pp. 1–13, 2009.

[13] M. Eisencraft, R. D. Fanganiello, and L. H. A. Monteiro, "Chaotic synchronization in discrete-time systems connected by bandlimited channels," *Communications Letters, IEEE*, vol. 15, no. 6, pp. 671 – 673, june 2011.

[14] Ravi P. Agarwal, *Difference equations and inequalities*, vol. 155 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, Marcel Dekker Inc., New York, 1992, Theory, methods, and applications.

[15] M. Hénon, "A two-dimensional mapping with a strange attractor," *Communications in Mathematical Physics*, vol. 50, pp. 69–77, 1976, 10.1007/BF01608556.

INPE – National Institute for Space Research
São José dos Campos – SP – Brazil – May 16-20, 2016

CHAOTIC PROPERTIES OF THE HÉNON MAP WITH A LINEAR FILTER

Rodrigo T. Fontes[1] *and Marcio Eisencraft*[2]

[1]Polytechnic School of the University of São Paulo, São Paulo, Brazil, rfontes@lcs.poli.usp.br
[2]Polytechnic School of the University of São Paulo, São Paulo, Brazil, marcio@lcs.poli.usp.br

Abstract: A practical way of limiting the bandwidth of the transmitted signal in a chaos-based communication scheme is to use linear discrete-time filters in the feedback loop. It was recently proved that such filters do not disturb chaotic synchronization. However, there is no guarantee that the generated signals remain chaotic. In this paper, we consider the Hénon map plus a linear time-invariant finite impulsive response filter. We numerically access its largest Lyapunov exponent as a function of the filter coefficients, obtaining regions where chaotic, periodic or unbounded orbits are present.

keywords: Analysis and Control of Nonlinear Dynamical Systems with Practical Applications, Nonlinear Dynamics and Complex Systems, Discrete Dynamical Systems, Time series Analysis.

1. INTRODUCTION

The motivation for using chaotic signals in a communication system is related to their sensitive dependence on initial conditions (SDIC) [1]. The SDIC can improve security issues involving information coding [2, 3]. This way, if the system structure or the transmitted message modifies the chaotic map, as in the system proposed in [4] and adapted to discrete-time by [5], it is necessary to determine whether the transmitted signal remains chaotic.

Chaotic signals are often broadband and the physical transmission channels are always bandlimited. This way, the authors of [5] proposed to place linear discrete-time lowpass filters [6] in the feedback loops in order to limit the bandwidth of the chaotic transmitted signals. The synchronization conditions for this bandlimited system have been analytically determined in [7]. However, it is not clear if the transmitted signals remain chaotic. Preliminary numerical results presented in [8] show that the insertion of finite impulse response (FIR) filters can turn originally chaotic signals into periodic or even unbounded signals depending on the filter coefficients.

In this work, we extend the results of [8], numerically accessing the effect of the filters coefficients on the nature of the transmitted signal, considering as chaotic generator the Hénon map [9].

2. HÉNON MAP WITH A LINEAR FILTER

The two-dimensional Hénon map can be expressed as [1]

$$\boldsymbol{x}(n+1) = f_H\left(\boldsymbol{x}(n)\right) = \begin{bmatrix} \alpha - x_1^2(n) + \beta x_2(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} \quad (1)$$

where $\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{R}$ are parameters and $\boldsymbol{x}(n) = \left[\, x_1(n) \; x_2(n) \,\right]^T$.

In the system proposed in [5], the state $x_1(n)$ is filtered through a FIR filter with N_S coefficients before been fed back in the nonlinearity. The filtered Hénon map, is then described by

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - x_3^2(n) + \beta x_2(n) \\ x_1(n) \\ \sum_{j=0}^{N_S-1} c_j x_1(n+1-j) \end{bmatrix} \quad (2)$$

where $\boldsymbol{x}(n) = \left[\, x_1(n) \; x_2(n) \; x_3(n) \,\right]^T$, and $c_j, 0 \leq j \leq N_S - 1$, are the filter coefficients.

In this extended abstract we analyse the cases $N_S = 1$ and $N_S = 2$ postponing the analysis of filters with more coefficients for a complete paper.

3. LYAPUNOV EXPONENTS FOR $N_S = 1$ AND $N_S = 2$

For $N_S = 1$, (3) can be rewritten as

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \begin{bmatrix} \alpha - x_3^2(n) + \beta x_2(n) \\ x_1(n) \\ c_0\left(\alpha - x_3^2(n) + \beta x_2(n)\right) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

In particular, for $c_0 = 1$, $x_3(n) = x_1(n)$ and the dynamics is that of the original Hénon map of (1). For the usual parameter $\beta = 0.3$ [9], Figure 1 shows the largest Lyapunov exponent and the bifurcation diagram of $x_1(n)$ for $0 < \alpha \leq 1.4$. We can see that after a period-doubling cascading, we have a range of values of α that generate chaotic signals. In particular for the usual $\alpha = 1.4$ we have chaos.

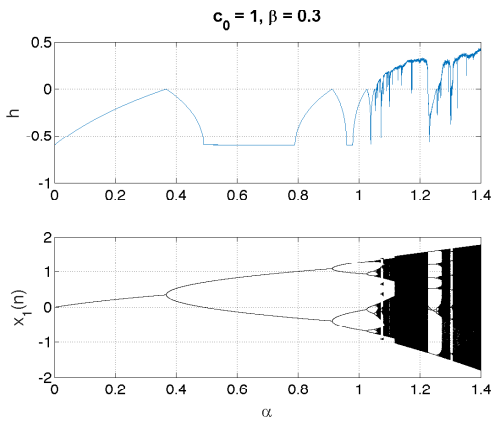


Figure 1 – The largest Lyapunov exponent, h and the orbit of $x_1(n)$ as a function of α for $\beta = 0.3$ and $c_0 = 1$.

For $0 < c_0 \leq 1$, Figure 2 shows the largest Lyapunov exponent and the bifurcation diagram of $x_1(n)$ as function of c_0 for $\alpha = 1.4$ and $\beta = 0.3$. Both graphics are distorted versions of the ones in Figure 1. We clearly see that depending on the value of c_0 the chaotic condition presented for $c_0 = 1$ can vanish. It is possible to obtain chaos for $c_0 > 0.87$.

For $N_S = 2$, (3) can be rewritten as

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \begin{bmatrix} \alpha - x_3^2(n) + \beta x_2(n) \\ x_1(n) \\ c_0\left(\alpha - x_3^2(n) + \beta x_2(n)\right) + c_1 x_1(n) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Figure 3 shows regions of positive and negative largest Lyapunov exponent h in the $c_0 \times c_1$ space. Purple (darker) regions represent $h < 0$ and yellow (lighter) regions represent $h > 0$. In the blank regions the orbits diverge. For low values of c_0 and c_1 chaos is lost and periodic orbits are found. It is possible to obtain chaotic signals for c_0 or c_1 sufficiently large. However, if both are simultaneously large, the orbits can diverge as is shown by the blank area in Figure 3.

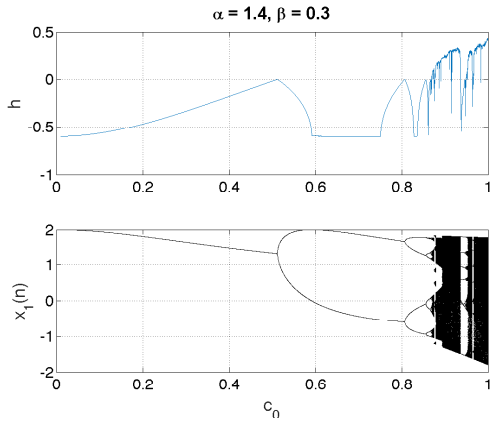


Figure 2 – The largest Lyapunov exponent, h and the orbit of $x_1(n)$ as a function of c_0 for $\alpha = 1.4$ and $\beta = 0.3$.

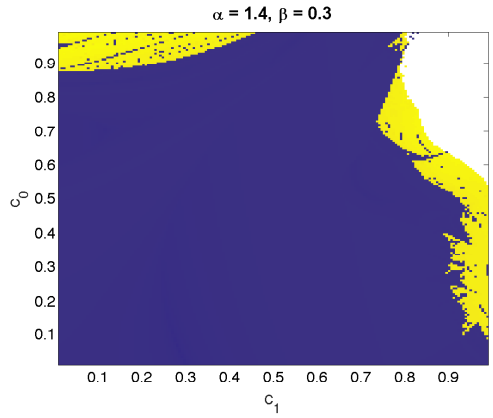


Figure 3 – Regions of positive and negative largest Lyapunov exponent h in the $c_0 \times c_1$ space for $\alpha = 1.4$ and $\beta = 0.3$ in (4). Purple (dark) regions represent $h < 0$ and yellow (light) regions represent $h > 0$. In the blank regions the orbits diverge.

A more profound analysis in the parameter space will be given in a full paper.

4. CONCLUSIONS

The numerical simulation presented show that filtering a Hénon map can modify its chaotic regions. This way, bandlimited chaos-based communication systems must be carefully projected to guarantee that the generated signals remain chaotic. In our present research we are studying the influence of filters with more coefficients.

ACKNOWLEDGMENTS

ME thanks FAPESP (2014/04864-2) and CNPq (479901/2013-9 449699/2014-5 and 311575/2013-7) for financial support.

References

[1] K. Alligood, T. Sauer, and J. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Textbooks in Mathematical Sciences, Springer, 1997.

[2] A. Argyris, D. Syvridis, L. Larger, V. Annovazzi-Lodi, P. Colet, I. Fischer, J. Garcia-Ojalvo, C. R. Mirasso, L. Pesquera, and K. A. Shore, "Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links," *Nature*, vol. 438, pp. 343–346, Nov. 2005.

[3] M. S. Baptista, E. E. Macau, C. Grebogi, Y.-C. Lai, and E. Rosa, "Integrated chaotic communication scheme," *Phys. Rev. E*, vol. 62, pp. 4835–4845, Oct 2000.

[4] C. W. Wu and L. O. Chua, "A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 3, pp. 1619–1627, Dec. 1993.

[5] M. Eisencraft, R. D. Fanganiello, and L. A. Baccalá, "Synchronization of Discrete-Time Chaotic Systems in Bandlimited Channels," *Mathematical Problems In Engineering*, vol. 2009, pp. 1–13, 2009.

[6] A. V. Oppenheim and R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall Press, 3rd ed., 2009.

[7] R. T. Fontes and M. Eisencraft, "A digital bandlimited chaos-based communication system," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, pp. –, 2016.

[8] M. Eisencraft, R. D. Fanganiello, and L. H. A. Monteiro, "Chaotic synchronization in discrete-time systems connected by bandlimited channels," *Communications Letters, IEEE*, vol. 15, pp. 671 –673, june 2011.

[9] M. Hénon, "A two-dimensional mapping with a strange attractor," *Communications in Mathematical Physics*, vol. 50, pp. 69–77, 1976. 10.1007/BF01608556.

9

Chaotic communications in bandlimited channels

Renato D. Fanganiello

Escola de Engenharia da Universidade Presbiteriana Mackenzie

Rodrigo T. Fontes and Marcio Eisencraft

Escola Politécnica, Universidade de São Paulo

Luiz H. A. Monteiro

Escola de Engenharia da Universidade Presbiteriana Mackenzie
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

CONTENTS

In chaos-based communications, it is essential to know and to control the spectral features of the chaotic signals to be transmitted, since every communication channel is bandlimited to some extent. In this chapter, we review a proposal of discrete-time communication system using chaotic synchronization in which the spectrum of the transmitted signals can be moderately shaped. Numerical studies on the Lyapunov exponents of the generated signals are presented and related to the performance of this chaotic communication system.

9.1 Introduction

One of the possible motivations for using chaos in communication systems is the fact that these signals can be broadband [5,10]. In systems in which chaotic signals modulate independent narrowband sources, as the ones proposed in [1,13], the resulting signals usually have a bandwidth larger than what would be considered necessary to their transmission. Although this can look like a waste in a first approach, the use of a larger bandwidth is a well-known technique in Telecommunications called *Spread Spectrum* (SS). An SS system must satisfy the following criteria [6,12]:

- the bandwidth of the transmitted signal must be much larger than the minimum amount necessary for transmitting the corresponding information;
- this bandwidth is determined from a spreading signal that is independent of the information;
- in the receiver, the original data are recovered from the correlation between the spreading signal and a synchronized local replica of such a signal.

Thus, the communication systems based on the Wu and Chua's synchronization scheme [1, 13] can be classified as an SS system. Therefore, these systems present the same advantages of the conventional SS systems.

The SS modulation was first developed for military applications, in which the resistance to intentional perturbations is of utmost importance. There are also civilian applications that can be benefited from the unique characteristics of SS modulation. For instance, it can be used to mitigate multipath interferences in wireless channels and to increase the system capacity in terms of number of users [6,12].

When it comes to practical applications, it is not enough to qualify a chaotic signal as "broadband" as almost all chaos-based communication texts do. Because every communication channel is bandlimited, it is fundamental to quantify the effective bandwidth [9] of the transmitted signals. Just a few papers on the bandwidth characteristics of chaotic signals have been published so far (see, e.g., [3,4,8]) and the spectrum characterization of chaos is still an open problem.

In [1], a technique for band limiting discrete-time chaotic signals before transmission in a bandlimited channel was proposed. The main idea is to use identical digital filters in the feedback loops of the transmitter and the receiver so that the synchronization is not affected. However, the Lyapunov exponent of the generated signals can become negative; consequently, the generated signals can cease to be chaotic [2].

In this chapter, we review this technique and present numerical studies on the behavior of the generated signals when the values of filter parameters are varied.

The chapter is organized as follows. In Section 9.2, we review the chaos-based communication system for bandlimited channels proposed in [1]. Numerical calculations of the largest Lyapunov exponents of the involved signals and associated discussions are presented in Section 9.3. Conclusions and perspectives are drafted in Section 9.4.

9.2 Chaos-based communications in bandlimited channels

Chapter 8 presented, among other important concepts, the communication system proposed by Wu and Chua [13], Equations (8.8)-(8.9), which define the transmitter and the receiver systems, and the condition which makes the synchronization between the two systems possible, given by Equation (8.5). It was also shown that, in a non-ideal channel, communication is impaired and the original message can be no longer recovered.

In the particular case of an ideal but bandlimited channel, a way to circumvent the signal degradations imposed by the bandwidth limitations in the communication channel is to insert filters $H_S(\omega)$ in the feedback loops of both transmitter and receiver, so that the transmitted signal power is contained within the channel bandwidth [1].

Figure 9.1 shows a block diagram of the communication system proposed in [1]. By considering that $H_S(\omega)$ represents a finite impulse response (FIR)

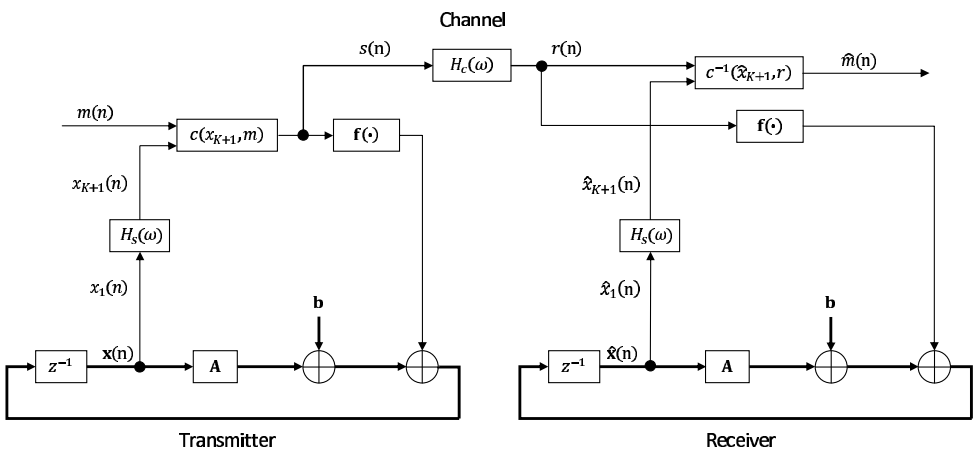


FIGURE 9.1
Block diagram of the communication system proposed for bandlimited channels.

filter of order N_S, its output is given by

$$x_{K+1}(n) = c_0 x_1(n) + c_1 x_1(n-1) + \ldots + c_{N_S} x_1(n - N_S), \tag{9.1}$$

where $c_0, c_1, \ldots, c_{N_S}$ are the filter coefficients. Hence, the dimension of both the transmitter and the receiver systems is $K + N_S$, where K is the dimension of these systems in the absence of filters in their feedback loops.

Figure 9.1 suggests that when $H_S(\omega) = 1$ for every ω, the transmitter and the receiver systems will synchronize as described in Chapter 8, Section 8.2, because $x_{K+1}(n) = x_1(n)$. However, when $H_S(\omega) \neq 1$, $x_{K+1}(n)$ is the map component that is actually combined with a sample of the message to be transmitted and then fed back into the chaotic signal generation stage of the transmitter. So it is relevant to perform an analysis on how the filter $H_S(\omega)$ affects the characteristics of the transmitted signal and the synchronization. In other words, it is important to evaluate if the presence of the filter $H_S(\omega)$ can impair the synchronization, and which combinations of filter order and cutoff frequency allow the signal $x_{K+1}(n)$ to be chaotic. This latter goal is presented in Section 9.3 of this chapter.

Now, we perform an analytic evaluation of the synchronization of this communication system by using the Hénon map [7] given by

$$\begin{cases} x_1(n) = 1 - \alpha x_1^2(n-1) + x_2(n-1) \\ x_2(n) = \beta x_1(n-1). \end{cases} \tag{9.2}$$

When the feedback loop filter rule Equation (9.1) is included, the transmitter is given by

$$\begin{cases} x_1(n) = 1 - \alpha x_3^2(n-1) + x_2(n-1) \\ x_2(n) = \beta x_1(n-1) \\ x_3(n) = c_0 x_1(n) + c_1 x_1(n-1) + \ldots + c_{N_S} x_1(n - N_S). \end{cases} \tag{9.3}$$

We can rewrite $x_3(n)$ as a function of samples at the instant $n-1$ using the following set of auxiliary equations:

$$\begin{cases} x_4(n) = x_1(n-1) \\ x_5(n) = x_4(n-1) \\ \vdots \\ x_N(n) = x_{N-1}(n-1), \end{cases} \tag{9.4}$$

where $N = N_S + 2$ is the dimension of the new system which is formed after inserting the filter $H_S(\omega)$ in the transmitter feedback loop. The same holds for the receiver equations.

In this case, the system of equations related to the transmitter can be

rewritten in the form of Equation (8.8) with $\mathbf{A}_{N\times N}$ as

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & c_2 & \cdots & c_{N_S-1} & c_{N_S} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{9.5}$$

The eigenvalues λ of this matrix are

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} & = & \pm\sqrt{\beta} \\ \lambda_{3,\ldots,N} & = & 0. \end{cases} \tag{9.6}$$

Therefore, chaotic synchronization occurs if $|\beta| < 1$, *independently of the filter coefficients* and of the message $m(n)$ [2].

Even though the coefficients and the order of the filter $H_S(\omega)$ (inserted in the transmitter and in the receiver systems) do not affect the synchronization of this communication system, there are no guarantees that the signal $x_{K+1}(n)$, which corresponds to the transmitter filter output, is chaotic. In principle, this signal could either be chaotic, or periodic, or even diverge toward infinity.

In Section 9.3, this issue is addressed and simulation results regarding the largest Lyapunov exponent of the generated signals are presented. Numerical studies performed in order to determine the conditions for which obtaining a chaotic $x_{K+1}(n)$ is possible are also shown.

9.3 Numerical studies

As pointed out in the previous section, the synchronization in the communication system remains immune to the presence of the filters $H_S(\omega)$ inserted in the transmitter and in the receiver, but no conclusion is straightforward regarding the features of the filter output signal $x_{K+1}(n)$.

In order to investigate the influence of a linear time-invariant low-pass FIR filter on the signal $x_{K+1}(n)$, the Hénon map with parameter values $\alpha = 1.4$ and $\beta = 0.3$ was used, which are numbers commonly found in the literature [7].

Computer simulations were performed so that the variation of the largest Lyapunov exponent h of the map of the transmitter could be analyzed as a function of the filter order N_S and its cutoff frequency ω_c. The filters were projected by employing the classical method of windowed linear-phase FIR digital filter design and Hamming window [11]. The results are exhibited in Figure 9.2.

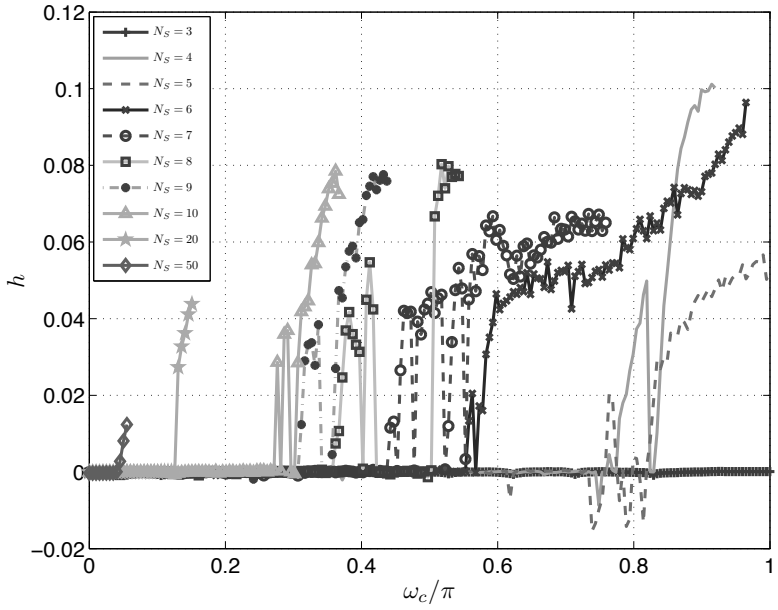


FIGURE 9.2
Largest Lyapunov exponent h of the transmitter system as a function of the cutoff frequency ω_c for $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$, and different filter orders N_S.

In this figure, the vertical axis presents the largest values of Lyapunov exponent of the transmitter system, while the horizontal axis denotes the normalized cutoff frequency of the filters that were chosen in the simulations. The largest value for the normalized cutoff frequency, $\omega_c/\pi = 1$, is equivalent to half the sampling rate used in the communication system. For values of ω_c for which no Lyapunov exponent is indicated, the map dynamics diverged towards infinity.

By analyzing Figure 9.2, we can realize that it becomes increasingly difficult to obtain a positive Lyapunov exponent as the order of the filter grows. In other words, it becomes increasingly difficult to obtain a chaotic signal that can be used in the proposed communication system.

In view of this fact, we realized the possibility of another value existing for the α parameter of the Hénon map that would allow generating chaotic signals in the presence of high-order FIR filters. To answer this question, a new set of computer simulations was performed maintaining the parameter $\beta = 0.3$, choosing a fixed order N_S and cutoff frequencies ω_c, and numerically evaluating h as a function of α. Thus, it became possible to verify which values of α generate chaotic signals.

Figure 9.3 shows the results obtained from computer simulations in which the filter order was kept constant at $N_S = 20$ and three cutoff frequencies were taken: $\omega_c = 0.3\pi$, $\omega_c = 0.5\pi$, and $\omega_c = 0.8\pi$. Again, for values of α for which the Lyapunov exponent is not indicated, the map dynamics diverged towards

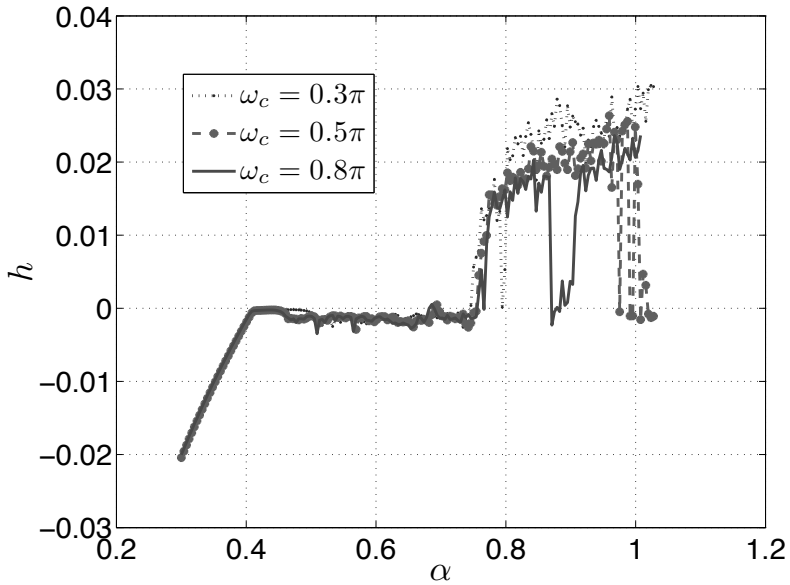


FIGURE 9.3
Largest Lyapunov exponent h of the transmitter system as a function of α, for $\beta = 0.3$, filter order $N_S = 20$, and different cutoff frequencies.

infinity. In light of these results, we chose $\alpha = 0.9$ to carry on the simulations. So now we have a pair of parameter values of the Hénon map which may not necessarily lead to chaotic signals in the absence of the filter $H_S(\omega)$, but that certainly will lead to chaotic signals in the presence of a low-pass FIR filter of order $N_S = 20$.

Next, we performed more simulations for evaluating the variation of h in terms of N_S and ω_c to find out for which other low-pass FIR filters it is possible to obtain chaotic signals. Figure 9.4 shows the results we obtained for the filter order varying from $N_S = 10$ up to $N_S = 100$. It is important to notice that, in this case, there is no value of cutoff frequency causing the map implemented in the transmitter to diverge; and, therefore, communication between transmitter and receiver will always be possible, even though the generated signals may not always be chaotic. The information depicted in Figure 9.4 is summarized in Figure 9.5 in a binary representation of the Lyapunov exponents calculated for each low-pass filter used in the simulations, in which light and dark gray tones represent positive and negative Lyapunov exponents, respectively [2].

In Figure 9.5, we observe large ranges of cutoff frequencies that allow to obtain chaotic signals, even for high-order filters, such as $N_S = 80$ or $N_S = 100$.

In order to verify that these results are well grounded, we implemented a communication system with $\alpha = 0.9$ and $\beta = 0.3$ for the Hénon map, and we inserted low-pass filters of order $N_S = 30$ and cutoff frequency $\omega_c = 0.5\pi$

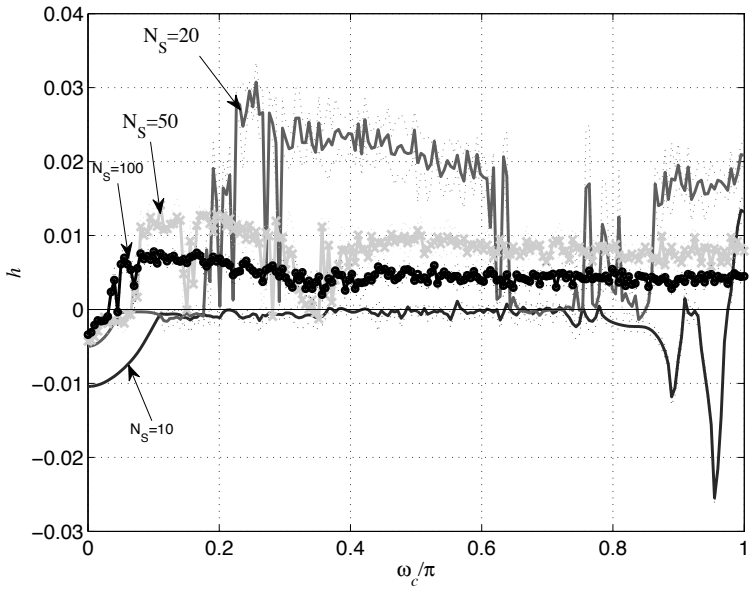


FIGURE 9.4
Largest Lyapunov exponent h of the transmitter system as a function of the normalized cutoff frequency ω_c of the transmitter filter for $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.3$, and different filter orders N_S. The solid lines represent the average values; the dotted lines, the intervals determined from the standard deviations.

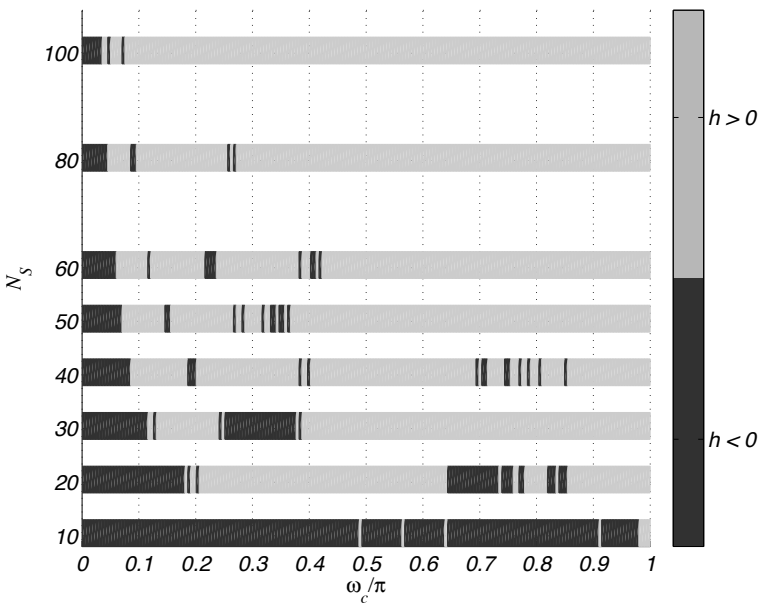


FIGURE 9.5
Chaotic (light gray) and non-chaotic (dark gray) regions for different cutoff frequencies ω_c and filter orders N_S.

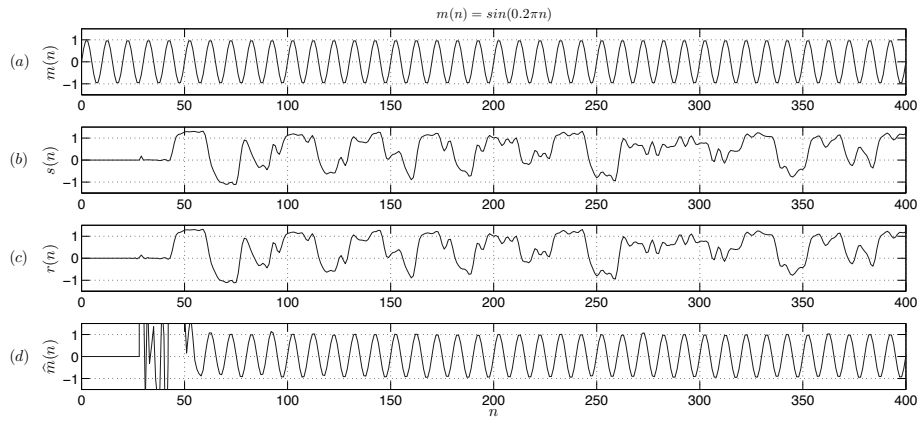


FIGURE 9.6
(a) Message $m(n)$; (b) transmitted signal $s(n)$; (c) received signal $r(n)$; (d) recovered message $\widehat{m}(n)$. A FIR filter $H_S(\omega)$ with $N_S = 30$ and $\omega_c = 0.5\pi$ is used (chaotic condition) and the cutoff frequency of the channel is $\omega_c = 0.8\pi$.

in the transmitter and in the receiver. Notice that these values are in the light gray region of Figure 9.5 leading to chaotic signals. For modeling the communication channel, we used a low-pass FIR filter of order $N_C = 50$ and cutoff frequency $\omega_c = 0.8\pi$. The message to be transmitted was chosen to be the sinusoidal signal

$$m(n) = \sin(0.2\pi n), \tag{9.7}$$

and the coding function was given by

$$s(n) = c(x_1(n), m(n)) = x_1(n) + 0.01m(n), \tag{9.8}$$

so the original message can be recovered by using its inverse function; that is

$$\widehat{m}(n) = c^{-1}(\widehat{x}_1(n), r(n)) = 100(r(n) - \widehat{x}_1(n)), \tag{9.9}$$

based on Equations (8.6)-(8.7), explained in Chapter 8.

Figures 9.6 and 9.7 present the time-domain and frequency-domain representations of the signals involved in this simulation. The frequency response of the communication channel and of the filters inserted are shown in Figures 9.7(b) and (c) by dashed lines. The transmitted and received signals exhibit the aperiodic and broadband features of chaos.

Figures 9.8 and 9.9 reveal the consequence of choosing a cutoff frequency in the negative maximum Lyapunov exponent region of Figure 9.5. Here we took $\omega_c = 0.35\pi$ and $N_S = 30$. As shown in time and frequency domains, the message is correctly recovered but the transmitted signals are not chaotic anymore.

The complex behavior glimpsed in Figure 9.5 must be further analytically studied. For the chosen value of α, it seems that the higher the filter order,

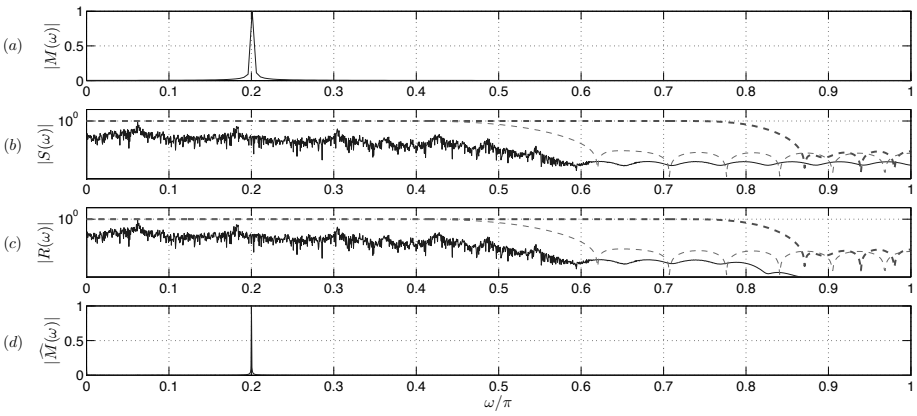


FIGURE 9.7
Normalized power spectrum density representation of the signals in Figure 9.6: (a) message; (b) transmitted signal; (c) received signal; (d) recovered message.

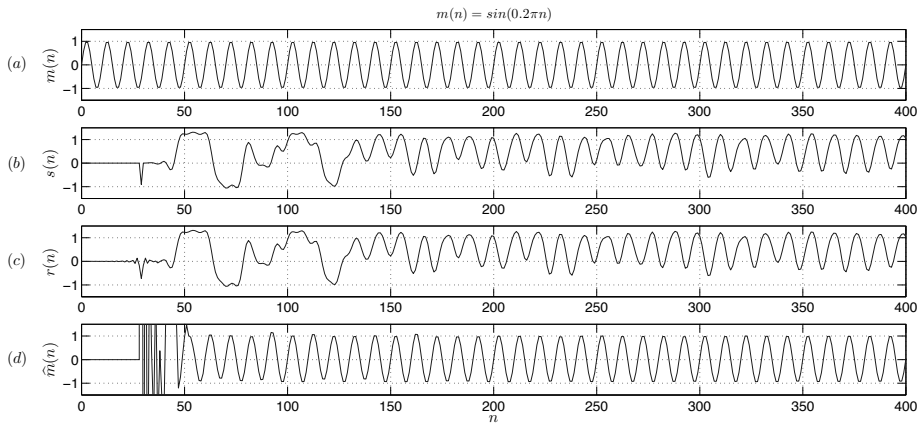


FIGURE 9.8
(a) Message $m(n)$; (b) transmitted signal $s(n)$; (c) received signal $r(n)$; (d) recovered message $\widehat{m}(n)$. A FIR filter $H_S(\omega)$ with $N_S = 30$ and $\omega_c = 0.35\pi$ is used (periodic condition) and the cutoff frequency of the channel is $\omega_c = 0.8\pi$.

the larger the range of ω_c that provides chaotic behavior. This inference leads to the idea of using infinite impulse response filters instead of FIR filters in the feedback loops. These are research lines currently being followed.

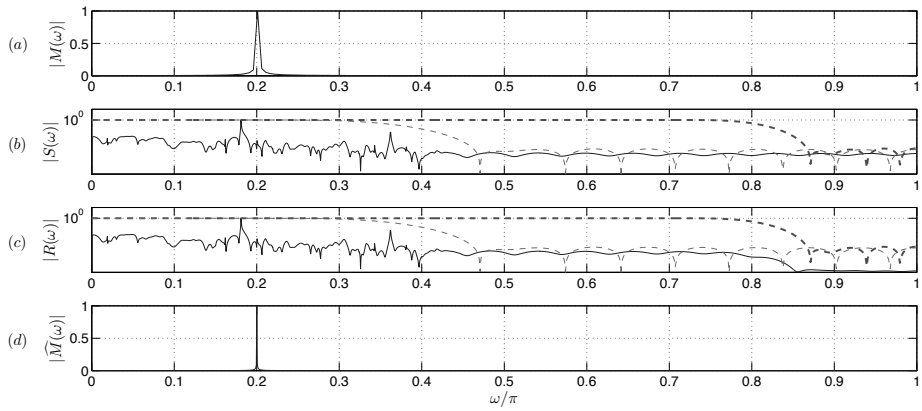


FIGURE 9.9
Normalized power spectrum density representation of the signals illustrated in Figure 9.8: (a) message; (b) transmitted signal; (c) received signal; (d) recovered message.

9.4 Conclusion and perspectives

In this chapter, we explored the idea of using discrete-time linear time-invariant FIR filters to shape the spectrum properties of the chaotic signals generated in the Wu and Chua's communication system [1, 2]. Using these filters does not change the chaotic synchronization, but it can make the involved signals become periodic or even diverge. Numerical experiments showed that the behavior of the largest Lyapunov exponent of the orbits is erratic with the order and the cutoff frequency of the filter. However, when convenient parameter values of the map are chosen, it is possible to obtain chaos for a large range of orders and cutoff frequencies. To analytically address these results is a current work of some of the authors. We also look for more general results not dependent on the used map.

9.5 Acknowledgments

M. Eisencraft and L. H. A. Monteiro are partially supported by CNPq.

Bibliography

[1] M. Eisencraft, R. D. Fanganiello, and L. Baccalá. Synchronization of discrete-time chaotic systems in bandlimited channels. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009:1–12, 2009.

[2] M. Eisencraft, R. D. Fanganiello, and L. H. A. Monteiro. Chaotic synchronization in discrete-time systems connected by bandlimited channels. *IEEE Communications Letters*, 15(6):671–673, June 2011.

[3] M. Eisencraft and D. M. Kato. Spectral properties of chaotic signals with applications in communications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(12):e2592–e2599, 2009.

[4] M. Eisencraft, D. M. Kato, and L. H. A. Monteiro. Spectral properties of chaotic signals generated by the skew tent map. *Signal Process.*, 90:385–390, 2010.

[5] J. Grzybowski, M. Eisencraft, and E. Macau. Chaos-based communication systems: current trends and challenges. In S. Banerjee, M. Mitra, and L. Rondoni, editors, *Applications of Chaos and Nonlinear Dynamics in Engineering - Vol. 1*, volume 71 of *Understanding Complex Systems*, pages 203–230. Springer, Berlin/Heidelberg, 2011.

[6] S. Haykin. *Communication Systems*. Wiley, New York, 4th edition, 2000.

[7] M. Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, 50:69–77, 1976.

[8] S. H. Isabelle and G. W. Wornell. Statistical analysis and spectral estimation techniques for one-dimensional chaotic signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(6):1495–1506, June 1997.

[9] B. P. Lathi. *Modern Digital and Analog Communication Systems*. Oxford University Press, New York, 1998.

[10] F. C. M. Lau and C. K. Tse. *Chaos-Based Digital Communication Systems*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2003.

[11] A. V. Oppenheim and R. W. Schafer. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-Hall signal processing series. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2010.

[12] B. Sklar. *Digital Communications*. Prentice-Hall P T R, Upper Saddle River, NJ, 2nd edition, 2004.

[13] C. W. Wu and L. O. Chua. A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 3(6):1619–1627, December 1993.