Fausto Junior Martins Ferreira

**FATORES DE RISCO ADAPTADOS DE TAXA DE
CÂMBIO NO MODELO DE BLACK E SCHOLES**

**São Paulo
2015**

FAUSTO JUNIOR MARTINS FERREIRA

**FATORES DE RISCO ADAPTADOS DE TAXA DE
CÂMBIO NO MODELO DE BLACK E SCHOLES**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Sistemas Eletrônicos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas Eletrônicos.

Orientador: Prof. Flávio Almeida de Magalhães Cipparrone - USP

**São Paulo
2015**

FOLHA DE APROVAÇÃO

Fausto Junior Martins Ferreira

Fatores de Risco Adaptados de Taxa de Câmbio no modelo de Black e Scholes

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Sistemas Eletrônicos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas Eletrônicos.

Aprovado em: JULHO/2015

Banca Examinadora

Prof. Flávio de Almeida Cipparrone Assinatura: _____
Intituição: USP

Prof. Marcos Eugênio da Silva Assinatura: _____
Intituição: USP

Prof. Oswaldo Luiz do Valle Costa Assinatura: _____
Intituição: USP

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catlogação-na-publicação

Ferreira, Fausto

FATORES DE RISCO ADAPTADOS DE TAXA DE CÂMBIO NO
MODELO DE BLACK E SCHOLES / F. Ferreira -- versão corr. -- São Paulo,
2015.

32 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São
Paulo. Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos.

1.Engenharia Financeira 2.Finanças 3.Derivativos 4.Volatilidade Implícita
I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de
Engenharia de Sistemas Eletrônicos II.t.

Resumo

FERREIRA, Fausto J Martins. **Fatores de Risco Adaptados de Taxa de Câmbio no modelo de Black e Scholes**. 2015. 31 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

Este trabalho apresenta uma metodologia de cálculo de sensibilidades utilizando equações analíticas, levando em conta a correção de *smile* na superfície de volatilidade, que não é contemplada no modelo de Black e Scholes. Dada a diferença significativa na mensuração do risco as instituições financeiras calculam suas sensibilidades incorporando esta correção, mas tal determinação tem sido realizada por métodos numéricos, que acabam sendo mais lentos que a abordagem aqui proposta. São apresentadas equações analíticas para as principais sensibilidades do modelo a partir de dados de mercado usados na construção da superfície de volatilidade implícita. Ilustramos a comparação da técnica proposta com o método numérico com base no mercado de opções sobre taxa de câmbio Brasileiro.

Palavras chave: volatilidade; apreçamento; fatores de risco; implícita; derivativos.

Abstract

FERREIRA, Fausto J Martins. **Foreign Exchange Adapted Risk Factors on a Black and Scholes Model**. 2015. 31 p. Dissertation (Mastership) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

This work presents a study on how we should adapted the Greeks or risk factors of the Black and Scholes model. We can derive analytical equations for the main sensitivities of the model and using the market data to build an implied volatility surface and to get additional terms for the risk factors. We propose to implement this model in a scheme of analytic differential equations derived from the pricing model and from the implied volatility function. The building of this implied volatility and risk factors was based on the foreign exchange Brazilian market.

Keywords: volatility; pricing; implied; risk factors; derivatives.

Lista de Figuras

2.1	Volatilidade Implícita Σ obtida através de dados de mercado.	14
2.2	Corte na Superfície de Volatilidade Implícita Σ em função do parâmetro Delta no eixo x.	14
2.3	<i>Forward</i>	15
5.1	Modelo BS X Modelo Proposto	26
5.2	Modelo Numérico X Modelo Proposto	26
5.3	Deltas	27
5.4	Vegas	27
5.5	Gammas	28

Sumário

1	Introdução	7
2	Características de Opções <i>Vanilla</i> e Modelos Adotados	9
2.1	Pressupostos	9
2.2	Gregas Gerais sem o <i>Smile</i>	11
2.2.1	Delta	11
2.2.2	Gamma	11
2.2.3	Vega	12
2.2.4	Vanna	12
2.2.5	Volga	12
2.3	Volatilidade Implícita	12
2.4	Condições de Não Arbitragem	15
2.5	Convenções e Cotações de Mercado	16
2.6	Delta-Strike Conversão	16
2.7	Parametrização da Superfície de Volatilidade	17
2.7.1	Polinômio de Quarto Grau	17
2.7.2	SABR	18
2.7.3	Vanna-Volga	18
3	Dinâmica de Volatilidade	20
3.1	Estrutura a termo do <i>Skew (Assimetria)</i>	21
4	Gregas Adaptadas para opções <i>Vanilla</i> sobre Taxa de Câmbio	22
4.1	Delta Adaptado	22
4.2	Vega Adaptado	23
4.3	Gamma Adaptado	23
4.4	Vanna Adaptado	24
4.5	Volga Adaptado	24
5	Análise Numérica	26
6	Conclusão	29
A	Aplicação para opções Digitais	31

1 Introdução

Instituições Financeiras mantêm carteiras de derivativos que precisam ser *hedgeadas* contra os riscos de mercado. Para isto são necessárias a determinação das principais sensibilidades de preço dos derivativos em relação aos parâmetros que influem neste preço (volatilidade, taxa de juros, preço do *underlying*, tempo e preço de exercício).

No processo de construção das superfícies de volatilidade é feita a coleta dos preços de mercado para as opções disponíveis em vários vencimentos, a partir desses preços, seguindo critérios de não arbitragem, como falaremos no capítulo 3 são obtidas as respectivas volatilidades implícitas para cada *strike* (preço de exercício) e vencimento utilizado. Esse processo é feito diariamente para manter a superfície sempre atualizada com o mercado corrente, a partir da escolha do tipo de parametrização que será feito (capítulo 3) definimos a superfície de volatilidade final e com o conhecimento desse método de parametrização derivamos termos que serão utilizados para agregar os efeitos da existência de um *smile* de volatilidade na definição do Delta, Vega, Gamma e outras sensibilidades aos fatores de risco do modelo de Black e Scholes.

Algumas instituições financeiras derivam estas sensibilidades de forma simplista, utilizando o modelo de Black e Scholes original, sem levar em consideração essas anomalias que são amplamente conhecidas.

Instituições mais sofisticadas empregam métodos numéricos para determinar estas sensibilidades, levando em conta a devida correção de *smile* da superfície de volatilidade.

Neste trabalho desenvolvemos expressões analíticas, juntamente com derivadas obtidas a partir da parametrização da superfície de volatilidade escolhida, para as sensibilidades de opções europeias aos parâmetros preço do *underlying* e volatilidade, dispensando, portanto, a utilização destes métodos numéricos, acelerando assim tais cálculos. Utilizamos as sensibilidades gerais do modelo de Black e Scholes e adicionamos novas derivadas a essas gregas de modo a termos sensibilidades aos fatores de risco mais corretas com um modelo de apreçamento de opções que utiliza uma superfície de volatilidade implícita.

Objetivo do trabalho

O objetivo do trabalho é deduzir as equações para as sensibilidades do preço de uma opção *vanilla* que obedecem ao modelo padrão de Black-Scholes, mas nesse caso considerando o efeito do *smile* na mensuração do risco. Serão deduzidas e apresentadas expressões analíticas para uma opção *vanilla* sobre moedas (o caso estudado foi o de opções de Dólar-Real), adaptaremos as sensibilidades obtidas pelo modelo clássico de Black e Scholes, agregando componentes nas mesmas. Essa abordagem por si só mais eficiente que qualquer método numérico para cálculo dessas sensibilidades, tendo como base o modelo de Black e Scholes (1973).

O método pode ser expandido para outras opções, como será ilustrado no caso de uma opção digital, onde será deduzida a expressão analítica para o prêmio.

Estrutura do trabalho

Este trabalho está estruturado da seguinte forma.

No Capítulo 2, Apresentaremos características gerais de opções *Vanilla*, os modelos adotados, caracterizaremos a superfície de volatilidade implícita e o processo que envolve a sua construção e abordaremos as sensibilidades (gregas) do modelo clássico de Black e Scholes.

No Capítulo 3, apresentaremos a dinâmica adotada para a volatilidade implícita que será usada como base para a dedução das sensibilidades adaptadas.

No Capítulo 4, será apresentada a formulação analítica proposta para as sensibilidades do modelo de Black e Scholes (1973), a definição e formulação da derivação a ser feita na superfície de volatilidade para todos os casos estudados.

No Capítulo 5, faremos uma análise numérica das sensibilidades obtidas com o método clássico e o método numérico de obtenção das mesmas.

No Capítulo 6, serão apresentadas as conclusões deste trabalho, além de algumas eventuais pesquisas futuras a serem realizadas de acordo com estudo aqui elaborado.

2 Características de Opções *Vanilla* e Modelos Adotados

Primeiro vamos definir os termos gerais e a notação que usamos. O prazo de validade do opção é o último dia em que a opção pode ser exercida, se o titular considera rentável fazê-la. A opção europeia só pode ser exercida no dia do vencimento. O *strike* da opção, K , é o preço pelo qual o ativo subjacente é comprado (para uma *call*) ou vendido (para um *put*). O vencimento da opção T é o tempo, medido em anos, entre o início da opção e seu vencimento. Uma opção é definida pela sua função de *pay-off*. O *pay-off* para uma opção europeia é seu valor na data de vencimento. Este valor depende da data de vencimento, do exercício da opção e quaisquer outras características da opção, assim como o preço do ativo subjacente no data de vencimento, S_T . O *pay-off* de uma opção depende da trajetória do preço do *underlying* até a data de expiração.

Em qualquer momento t , com $0 \leq t \leq T$, o tempo residual para a maturidade é $T - t$, ou seja, o tempo restante até a data de vencimento, denotamos por τ . O preço do ativo subjacente de uma opção no tempo t é denotado S_t . Às vezes podemos enfatizar se este é um preço à vista, um futuro ou uma taxa de juros. Nesse caso, quando o *undelying* é um futuro usamos F para denotar o preço do ativo subjacente.

Esta seção explica o modelo de precificação de *calls* e *puts* para opções de padrão europeu desenvolvido por Black e Scholes (1973) e por Merton (1973). Os pressupostos do modelo são mostrados e alguma intuição sobre a fórmula de apreçamento de opções é fornecida.

2.1 Pressupostos

O primeiro pressuposto do modelo de Black-Scholes-Merton é sobre o processo estocástico para o preço do ativo subjacente. O artigo original de Black e Scholes (1973) assume que o ativo não paga dividendos, que a taxa de juros livre de risco é uma constante conhecida e que a dinâmica dos preços são regidas por um movimento browniano geométrico. Em outras palavras, o preço subjacente S segue uma equação diferencial estocástica da forma

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dW(t), \quad (1)$$

onde $W(t)$ é um processo de Wiener.

Usando o lema de Itô, ver Kiyoshi, I (1951), podemos reescrever (2) na forma equivalente

$$d\ln(S(t)) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW(t). \quad (2)$$

Uma vez que os incrementos são independentes e normalmente distribuídos com média

zero e variância dt , (3) implica que os log retornos de períodos t são independentes e identicamente distribuídos com média $(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t$ e desvio padrão $\sigma\sqrt{t}$. Se os log retornos ao longo de um intervalo de tamanho t são normalmente distribuídos então o preço futuro em t terá uma distribuição lognormal. Assim, o primeiro pressuposto do modelo de Black e Scholes, que o preço do *underlying* é gerado por um movimento Browniano geométrico com volatilidade constante, implica que os preços tem uma distribuição lognormal.

A segunda suposição feita por Black e Scholes foi a de que os mercados em que o *underlying* e os contratos de opções são negociados não possuem fricções, ou seja, é possível comprar e vender qualquer quantidade a qualquer momento sem incorrer em custos de transação. Essa suposição combinada com a suposição de que os preços seguem um movimento Browniano geométrico (2), foi suficiente para Black e Scholes aplicarem o princípio de não arbitragem para derivar uma equação diferencial parcial para o preço de uma opção, que eles mostraram ter uma solução analítica quando a opção é uma *put* ou *call* europeia.

No mesmo ano (1973) Merton chegou a uma derivação alternativa dessa equação diferencial parcial e a estendeu de várias formas: aplicada a ativos que pagam dividendos; para incluir a possibilidade de taxas de juros estocásticas; e para valorar opções Americanas e opções com barreira. Entretanto, nesses casos não ser possível derivar uma solução analítica para essas equações parciais, exceto para opções europeias, e quando ambas as taxas de juros e os dividendos são constantes.

Black, Scholes e Merton usaram o argumento de não arbitragem para tipos específicos de opções em uma economia muito restrita, onde há apenas um *underlying* e a opção. Até o *paper* pioneiro de Harrison e Kreps (1979) cuja teoria de apreçamento de opções foi adicionada com fundamentos teóricos firmes. Harrison e Kreps introduziram o conceito de mercados completos como um mercado em que se pode replicar o preço de qualquer título de crédito negociando o *underlying* e a taxa livre de risco, eles mostraram que em mercados completos todo título de crédito tem um único preço não arbitrável, se e somente se, há uma única medida *martingale* equivalente. Além disso, há um único portfólio autofinanciado que replica o valor do crédito.

Para o apreçamento das opções e mensuração das sensibilidades, será adotado como base o modelo Garman - Kohlhagen (1983), uma adaptação do modelo de Black e Scholes para opções sobre moeda.

$$C_{BS}(S, K, t, T, \sigma, r, r_f) = e^{-r\tau}[FN(d_1) - KN(d_2)] \quad (3)$$

Onde,

S: Taxa de câmbio *Spot* ,

r: taxa de juros exponencial local, por exemplo juros reais,

r_f : taxa de juros exponencial externa, por exemplo a taxa de cupom cambial no caso de opções sobre moeda dólar - real,

t : tempo em anos de volatilidade desde o início da opção até o seu vencimento,

K : preço de exercício da opção,

F : *Forward* da opção,

$$F = S \frac{e^{rt}}{e^{r_f t}}$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{F}{K}) + 0.5\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

$$N(x) = \frac{\int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy}{\sqrt{2\pi}}$$

$$n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$\tau = T - t$, entre a data de referência e a maturidade da opção.

O modelo de Black-Scholes, que adota volatilidade constante é frequentemente escolhido como um ponto de partida. Entretanto, resultados empíricos têm revelado que o modelo apresenta desvios em relação à realidade do mercado de opções.

2.2 Gregas Gerais sem o *Smile*

São derivadas parciais simples da fórmula de apreçamento das opções (Garman - Kohlhaugen) em relação aos parâmetros do modelo, ver Haug, E (2007)

2.2.1 Delta

Essa é a derivada parcial do preço da opção (*call* ou *put*) em relação ao preço S do *spot*.

$$V = \phi \frac{FN(\phi d_1) - KN(\phi d_2)}{e^{r\tau}} \quad (4)$$

Onde, $\phi = 1$ para uma *call* e $\phi = -1$ para uma *put*,

$$\delta = \frac{\partial V}{\partial S} = \phi e^{-r_f \tau} N(\phi d_1) \quad (5)$$

2.2.2 Gamma

Gamma, assumindo-se volatilidade constante, é a sensibilidade do Delta com relação ao *Spot*. Mais precisamente:

$$\gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = e^{-r_f t} \frac{n(d_1)}{\sigma S \sqrt{\tau}} \quad (6)$$

2.2.3 Vega

Vega para volatilidade constante, é a variação no preço de uma opção para um choque no valor da volatilidade. Mais precisamente:

$$Vega = \frac{\partial V}{\partial \sigma} = S e^{-r_f \tau} \sqrt{\tau} n(d_1) \quad (7)$$

2.2.4 Vanna

É a derivada do Vega com relação ao *Spot*. Mais precisamente:

$$Vanna = \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial S} = -\frac{e^{-r_f \tau} n(d_1) d_2}{\sigma} \quad (8)$$

2.2.5 Volga

É a derivada do Vega com relação à volatilidade. Mais precisamente:

$$Volga = \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} = S \frac{e^{-r_f \tau} \sqrt{\tau} n(d_1) d_1 d_2}{\sigma} \quad (9)$$

2.3 Volatilidade Implícita

Traders e investidores não acreditam nas suposições do modelo de Black e Scholes. Os mercados não são completos, fricções existem e a distribuição do preço do *underlying* possui, tipicamente, uma cauda muito pesada para a distribuição de preços ter sido gerada por um movimento Browniano geométrico. Para explicar porque sabemos que os participantes de mercado não acreditam nas suposições do modelo de Black e Scholes, considere todas as opções europeias de *calls* e *puts* negociadas em apenas um *underlying*. Podemos observar o preço do *underlying* S e sabemos que cada opção é determinada por um diferente valor de T e K . Podemos observar também que a taxa livre de risco r será a mesma para todas as opções com a mesma maturidade. Da mesma forma a volatilidade σ deveria ser a mesma para todas as opções, uma vez que estão determinadas pela mesma maturidade. A volatilidade na fórmula de Black e Scholes é a volatilidade do preço no processo Browniano geométrico (2) e uma vez que haja um único *underlying* haverá uma única volatilidade σ . Entretanto, há diferenças entre volatilidade e outras variáveis: S e r são observáveis no mercado, mas não podemos observar a volatilidade.

A volatilidade implícita de mercado de uma *call* ou *put* europeia é o valor de σ que está implícito no preço de mercado da opção. Observamos valores para o preço de mercado da opção, *underlying*, taxa de juros, dividendos e conhecemos o *strike* e a maturidade da opção. Assim, podemos encontrar o valor da volatilidade na qual o preço dado pelo modelo de Black e Scholes é igual ao preço observado no mercado. Esse valor é a volatilidade implícita de mercado da opção.

Se *traders* e investidores acreditassem nas suposições feitas no modelo de Black e Scholes então a volatilidade que está implícita nos preços observados de todas as opções deveria ser a mesma. E essa volatilidade única deveria ser a mesma volatilidade do processo Browniano geométrico (2). Mas quando calculamos a volatilidade implícita de diferentes opções para o mesmo *underlying* encontramos que são diferentes. Na verdade certas características ficam evidentes quando plotamos a superfície de volatilidade implícita como uma função do *strike* (ou do delta da opção como veremos abaixo) e da maturidade. Entendendo as características da superfície de volatilidade implícita de mercado estabelecemos os fundamentos para a análise de volatilidade.

A seguir temos uma representação de como obtemos a volatilidade implícita a partir dos preços de mercado disponíveis para cada vencimento.

$$V^{BS}(S, K, r, r_f, t, \Sigma(K, S, T, r, r_f, \sigma, V^{MK})) = V^{MK} \quad (10)$$

Onde,

V^{BS} é o prêmio da opção obtido via modelo de Black e Scholes,

V^{MK} é o prêmio da opção dado pelo mercado,

$\Sigma(K, S, T, r, r_f, \sigma, V^{MK})$ é a volatilidade implícita obtida, na nossa abordagem definimos $\Sigma(\delta(K, S, r, r_f), t)$.

Ao invés da volatilidade ser constante como propõe o modelo original, temos $\Sigma(\delta(K, S, r, r_f), t)$ dependente do delta δ e do prazo, a figura a seguir ilustra essa dependência. No eixo das abscissas temos o delta definido de 5% até 95% e no eixo das ordenadas a volatilidade implícita resultante.

Observe que a paridade *put-call* implica que *puts* e *calls* com o mesmo *strike* tem a mesma volatilidade implícita.

Figura 2.1: Volatilidade Implícita Σ obtida através de dados de mercado.

Figura 2.2: Corte na Superfície de Volatilidade Implícita Σ em função do parâmetro Delta no eixo x.

2.4 Condições de Não Arbitragem

Na concepção da superfície de volatilidade implícita devemos tomar o cuidado de não levarmos em consideração pontos com arbitragem, assim não geraremos um mal apareçamento das opções utilizando essa superfície, a seguir temos as hipóteses que devem ser atendidas.

1. $C \geq S - Ke^{-r(T-t)}$, assumindo dividendos iguais à zero para *calls* europeias.

Um *Forward* vale $S-K$ no vencimento, e, além disso, assumindo dividendos iguais a zero e uma taxa de risco igual a r , vale a valor presente $S - Ke^{-r(T-t)}$. Uma opção sempre vale mais que um *Forward*, porque tem o mesmo *payoff* quando $S_T \geq K$, e vale mais quando $S_T < K$.

2. Para o mesmo vencimento, os preços das opções satisfazem para o gradiente de primeira e segunda ordem em relação ao *strike*, ver Fengler, M (2005)

$$\frac{\partial C(K, T)}{\partial K} \leq 0, K > 0, T \in (0, \gamma]$$

$$\frac{\partial^2 C(K, T)}{\partial K^2} \geq 0, K > 0, T \in (0, \gamma]$$

$$\frac{\partial P(K, T)}{\partial K} \geq 0, K > 0, T \in (0, \gamma]$$

$$\frac{\partial^2 P(K, T)}{\partial K^2} \geq 0, K > 0, T \in (0, \gamma]$$

Figura 2.3: *Forward*

2.5 Convenções e Cotações de Mercado

1. **Spot ou Forward delta** – Transações com *spot* são normalmente mais liquidas do que *Forwards*, por isso a preferência pelo *Spot* delta. Entretanto, para pares de moedas onde temos uma incerteza a respeito da evolução da taxa livre de risco é comum fazermos o *hedging* com *forwards*. Como regra geral, para opções com vencimento mais curto em mercados desenvolvidos adotamos cotações em *Spot* delta; para opções mais longas em mercados desenvolvidos e emergentes o mais comum são cotações em *Forward* delta.
2. **ATM (At the Money)** – Como o próprio nome sugere, é uma opção que está a meio caminho entre uma opção *in the money* e uma *out of the money*. Há basicamente duas possibilidades para o *ATM*, *ATM Forward* ou *ATM Spot*.
3. **Risk Reversal** - é uma posição comprada em uma *call out-of-the-money* e uma posição vendida em uma *put out-of-the-money* com um Δ (Delta) simétrico. O mais comum é trabalhar com opções com Δ_{25} (Delta 25%). *Traders* veem um *risk-reversal* positivo como um indicador de um mercado *bullish*, uma vez que *calls* estariam custando mais que *puts* e vice-versa.
4. **Strangle** - é uma posição comprada em uma *call* e uma posição comprada em uma *put* com o mesmo *strike* e prazo – o *trader* aposta em aumento de volatilidade. O prêmio de um *strangle* mantém a informação sobre a expectativa de volatilidade do ativo base – alta volatilidade significa ganho alto, e como resultado um prêmio alto.
5. **Butterfly** - é construído com uma posição vendida em um *strangle at-the-money* e uma posição comprada em um *strangle* Δ_{25} . O comprador de um *butterfly* espera um ganho estável sobre o ativo base ($BF=(C+P)/2-ATM$).

2.6 Delta-Strike Conversão

Uma característica comum das parametrizações é que as opções são parametrizadas na abscissa pelo Δ . No entanto podemos fazer essa parametrização também pelo *strike*, bastando utilizar a seguinte correspondência entre ambos para o caso de uma *call*.

$$K = F.exp \left[-N^{-1}(\Delta)\sigma\sqrt{\tau} + \sigma \left(r - r_f + \frac{\sigma}{2} \right) \tau \right] \quad (11)$$

Onde:

$N^{-1}(x)$ = Inversa da normal acumulada no ponto x ;

2.7 Parametrização da Superfície de Volatilidade

Uma superfície é construída por observações feitas no mercado para determinado prazo. Em princípio uma curva de volatilidade pode ser feita com um determinado número de preços observados em um dado período. Na prática, a construção está ligada diretamente a um número suficiente de opções líquidas, que é maior para opções *at-the-money*. Geralmente as curvas são construídas usando estas opções, além de opções *call* e *put* com Delta de 10% e com Delta de 25% para caracterizar de forma mais ampla o mercado, embora *traders* possam dar preço para opções com Delta de 10% com menor certeza do que para opções com Delta de 25%. Esses pontos podem ser ordenados em ordem crescente de *strike*.

Na definição dessa curva de volatilidade, uma escolha para a abscissa é o *strike* da opção, outra escolha é usar o Delta (como usual no mercado de câmbio). Uma vantagem de se usar o Delta é que dimensionamos esse eixo no intervalo padronizado de $[0, 1]$ para todos os prazos.

A forma de parametrização da curva de volatilidade é a característica principal da superfície, devemos observar na construção dela as condições de não arbitragem definidas em 3.3.

2.7.1 Polinômio de Quarto Grau

Esse foi o método adotado para fazermos as interpolações ao longo da superfície de volatilidade e encontrarmos derivando diretamente esse polinômio as derivadas de primeira e segunda ordem do *smile* em relação ao delta da parametrização da superfície, vide Jim Gatheral (2005).

$$\Sigma = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d + \sigma_{ATM} \quad (12)$$

Definimos:

$$\tilde{d}_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right)}{\sigma_{ATM}\sqrt{\tau}};$$

$$\tilde{\Delta} = \tilde{N}(\tilde{d}_1) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-4}{\sqrt{2\pi}}\tilde{d}_1\right)};$$

σ_{ATM} é a volatilidade ATM das opções;

$$x = \tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}_{ATM};$$

De posse do conjunto de volatilidades de mercado $\sigma_{loP}, \sigma_{hiP}, \sigma_{ATM}, \sigma_{hiC}, \sigma_{loC}$, ou seja, define-se a parametrização para o ATM, Deltas 10% e 25% para *calls* e *puts* e resolvemos o sistema a seguir para a, b, c e d.

Onde,

σ_{loP} é a volatilidade correspondente a *put* cujo delta é 10%;

σ_{hiP} é a volatilidade correspondente a *put* cujo delta é 25%;

σ_{ATM} é a volatilidade ATM das opções;

σ_{loC} é a volatilidade correspondente a *call* cujo delta é 10%;

σ_{hiC} é a volatilidade correspondente a *call* cujo delta é 25%;

$$\begin{bmatrix} \sigma_{loP} \\ \sigma_{hiP} \\ \sigma_{hiC} \\ \sigma_{loC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{loP} & x_{loP} & x_{loP} & x_{loP} \\ x_{hiP} & x_{hiP} & x_{hiP} & x_{hiP} \\ x_{hiC} & x_{hiC} & x_{hiC} & x_{hiC} \\ x_{loC} & x_{loC} & x_{loC} & x_{loC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

A matriz possui inversa se e somente se os *strikes* das opções de mercado são diferentes. Os elementos dos coeficientes da matriz dependem somente da observação dos dados de mercado.

Para construir essa superfície de interpolação podemos usar outros métodos como mostraremos a seguir.

2.7.2 SABR

Uma das críticas a interpolação polinomial em Delta acima é que ela não retorna uma volatilidade adequada nas “asas”, isto é, para *calls* e *puts deeply in the money*. Uma alternativa é o método proposto por Hagan et al. (2002), em que os autores derivam uma formula fechada aproximada para as volatilidades implícitas de uma opção europeia, usando um modelo de volatilidade estocástica particular.

O modelo tem o parâmetro β , que determina uma escala entre um modelo estocástico normal ($\beta = 0$) e um modelo estocástico lognormal ($\beta = 1$), o SABR tem três outros parâmetros:

α = Volatilidade Inicial;

v = Volatilidade da Volatilidade;

ρ = Correlação entre o *Spot* e a volatilidade;

$$\Sigma(K) = \frac{\alpha}{(F_T K)^{(1-\beta)/2} \{1 + [(1-\beta)^2/24] \log^2(F_T/K) + [(1-\beta)^4/1920] \log^4(F_T/K)\}} \quad (13)$$

$$\left(\frac{z}{\chi(z)} \right) \left\{ 1 + \left[\frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{(F_T K)^{(1-\beta)}} + \frac{1}{4} \frac{\rho \beta v \alpha}{(F_T K)^{(1-\beta)/2}} \frac{2-3\rho^2}{24} v^2 \right] T \right\}$$

Onde:

$$z = \frac{v}{\alpha} (F_T K)^{(1-\beta)/2} \log(F_T/K);$$

$$\chi(z) = \log \left\{ \frac{\sqrt{1-2\rho z + z^2} + z - \rho}{1-\rho} \right\};$$

2.7.3 Vanna-Volga

O método utiliza três cotações disponíveis no mercado por maturidade para determinar uma curva de volatilidade implícita. Esse modelo é baseado na construção de um portfólio de replicação cujos custos associados ao *hedging* são adicionados aos preços das opções obtidos através do modelo Black e Scholes, de modo a produzir um *smile* consistente.

O método Vanna – Volga é normalmente usado em mercados FX, onde tipicamente três cotações de volatilidades estão disponíveis para uma dada maturidade; ATM, RR_{25} , BF_{25} . A aplicação do método nos permite derivar volatilidades implícitas para diferentes deltas, ver Castagna and Mercurio (2005).

$$C(K) = C^{BS}(K) + \sum_{i=1}^3 x_i(K) [C^{MKT}(K_i) - C^{BS}(K_i)], \text{ onde:}$$

$C^{MKT}(K_i)$ = Preço de mercado de uma *call* com *strike* K_i ;

$C^{MKT}(K_i)$ = Preço Black e Scholes de uma *call* com *strike* K_i ;

$$x_1(K) = \frac{\nu(K)}{\nu(K_1)} \frac{\ln \frac{K_2}{K} \ln \frac{K_3}{K}}{\ln \frac{K_2}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_1}};$$

$$x_2(K) = \frac{\nu(K)}{\nu(K_2)} \frac{\ln \frac{K}{K_1} \ln \frac{K_3}{K}}{\ln \frac{K_2}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_2}};$$

$$x_3(K) = \frac{\nu(K)}{\nu(K_3)} \frac{\ln \frac{K}{K_1} \ln \frac{K}{K_2}}{\ln \frac{K_3}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_2}};$$

$\nu(K_i)$ = Vega de uma *call* com *strike* K_i ;

$$C(K) \approx C^{BS}(K) + \sum_{i=1}^3 x_i(K) \nu(K_i) [\sigma_i - \sigma]$$

Podemos parametrizar a equação acima em termos de volatilidade:

$$\sigma(K) = \sigma_2 + \frac{-\sigma_2 + \sqrt{\sigma_2^2 + d_1(K)d_2(K)(2\sigma_2 D_1(K) + D_2(K))}}{d_1(K)d_2(K)}$$

e,

$$D_1(K) = \frac{\ln \frac{K_2}{K} \ln \frac{K_3}{K}}{\ln \frac{K_2}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_1}} \sigma_1 + \frac{\ln \frac{K}{K_1} \ln \frac{K_3}{K}}{\ln \frac{K_2}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_2}} \sigma_2 + \frac{\ln \frac{K}{K_1} \ln \frac{K}{K_2}}{\ln \frac{K_3}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_2}} \sigma_3 - \sigma_2;$$

$$D_2(K) = \frac{\ln \frac{K_2}{K} \ln \frac{K_3}{K}}{\ln \frac{K_2}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_1}} d_1(K)d_2(K)(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{\ln \frac{K}{K_1} \ln \frac{K}{K_2}}{\ln \frac{K_3}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_2}} (\sigma_3 - \sigma_2)^2;$$

3 Dinâmica de Volatilidade

Dado o presente *skew* (ou seja, quanto varia a volatilidade em relação ao *strike*, *money-ness*¹ ou Delta da opção) da volatilidade implícita, seria desejado conhecer como o mesmo iria variar de acordo o nível do índice no futuro. Há pelo menos duas diferentes visões de como os aspectos do presente *skew* são *sticky* conforme o índice se move ao longo do tempo, nos deteremos a expor a dinâmica que utilizaremos..

1. *Sticky Delta/Moneyness*

Sticky Moneyness significa que a volatilidade de uma opção depende somente do *moneyness* K/S , a dependência da opção com o nível do índice e do *strike* deriva inteiramente dessa dependência com o *moneyness*,

$$\Sigma(\delta(K, S, r, r_f), t) = \Sigma(\delta(K, S, r, r_f), t = 0) - b(K/S - 1)S_0 \quad (14)$$

É uma tentativa de mudar o *skew* conforme o preço do *stock* se move, ajustando o *moneyness*. Para a volatilidade *At-The-Money* estabelece que essa volatilidade deveria manter-se constante conforme o índice se move.

Esse modelo assume que o mercado teria uma reversão à média para uma definida volatilidade *At-The-Money* $\Sigma(\delta(K = S, S, r, r_f), t = 0)$, independente do nível do mercado.

No modelo de Black-Scholes, a exposição Δ_{BS} depende de K e S através do *moneyness* K/S , assim *sticky moneyness* é equivalente a *sticky delta*.

$C = f(S, \sigma, t, r, r_f, K)$, mas σ é função de S (na prática observamos isso). Assim, para fazermos a derivada total de C em relação ao *spot* aparece um termo adicional, devemos fazer da seguinte forma:

$$\frac{d\Sigma}{dS} = \frac{d\Sigma}{d\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial S} \quad (15)$$

Onde $\frac{d\Sigma}{d\Delta}$ aparece como resultado da derivação da função de superfície de volatilidade, conforme equação (18). Por fim “o novo delta” fica

$$\frac{dC}{dS} = \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{d\Sigma}{dS} \quad (16)$$

As derivadas $\frac{\partial C}{\partial S}$ e $\frac{\partial C}{\partial \sigma}$ são obtidas diretamente do modelo de Black e Scholes, como mostrado em **2.3**.

¹Relação entre o *strike* e o preço do *underlying*

3.1 Estrutura a termo do *Skew* (*Assimetria*)

O *skew* definido como o gradiente de primeira ordem da volatilidade em relação ao *strike* é normalmente negativo para *equities*. Há algumas possibilidades para isso:

- Grandes *Jumps* no *spot* tendem a serem maiores para baixo do que para cima. Se há um *jump* no preço do *stock*, esse é normalmente mais acentuado para baixo em razão de um evento “ruim” ser mais inesperado do que ocorrer um evento “bom” não esperado.
- A volatilidade é uma medida de risco cujo valor costuma ser incrementado conforme há um declínio no mercado de *equities* (*Sticky Strike*). Se assumirmos que não há mudança no número de ações emitidas ou no tamanho do débito, então conforme o preço do *stock* da companhia declina, o tamanho do seu débito aumenta. Alavancagem e volatilidade são medidas de risco correlacionadas, assim, com volatilidade crescendo tal qual há um declínio no mercado de *equities*.
- Como resultados disso, tipicamente investidores estão interessados em comprar *puts* para proteção em vez de vendê-los. Isso eleva a volatilidade implícita para *strikes* menores. Além disso, alguns investidores preferem trocar essas posições por *calls* cujo reflexo maior se dá na volatilidade implícita dos *strikes* maiores.

O *payout* de um *put spread* (*call spread*) é sempre positivo, por isso deve sempre ter um custo positivo. Se fosse possível montar uma posição comprada em um *put* (*call*) *spread*, sem nenhum custo (ou potencialmente ganhar um prêmio pequeno) qualquer investidor racional iria fazer uma posição maior e obter ganhos sem riscos (uma vez que a posição não pode sofrer perda).

Um *put spread* terá um custo negativo se o prêmio obtido com a venda de uma *put* com *strike* mais baixo for maior que o prêmio obtido com a compra de uma *put* com *strike* maior. Esta condição coloca um limite em quão negativo o *skew* pode ser. Para um elevado (negativo) *skew*, a volatilidade implícita para as *puts* de *strike* mais baixo poderiam ter um prêmio muito alto (maior que o prêmio das *puts* de *strikes* maiores). A mesma lógica aplica-se para *call spreads*, a menos que se coloque um limite para a inclinação positiva.

4 Gregas Adaptadas para opções *Vanilla* sobre Taxa de Câmbio

Aqui faremos algumas considerações importantes sobre os efeitos do *smile* nas derivadas da opção C utilizadas no modelo de volatilidade implícita. Relacionando-as com as derivadas de uma opção europeia equivalente C_{BS} no modelo de Black e Scholes (1973).

A volatilidade implícita de uma *call vanilla* pode ser definida como:

$$\Sigma(\delta(K, S, r, r_f), t) = CBS^{-1}(F, K, t, T, C_{mkt}) \quad (17)$$

para $K > 0$ e $T \in (0, \gamma]$, onde CBS^{-1} é a inversa de uma *call* Black e Scholes em volatilidade e C_{mkt} é o preço de mercado de uma *call*.

A correção nas derivadas de Black e Scholes (1973) na presença do *smile* de volatilidade são obtidas considerando-se o efeito do termo adicional, ver 3, sendo derivado na volatilidade implícita.

4.1 Delta Adaptado

O Delta Adaptado de uma opção *vanilla* considerando o efeito *smile* é obtido a partir de uma superfície de volatilidade implícita parametrizada por Deltas, nos casos derivados a seguir utilizamos um superfície obtida utilizando um polinômio do quarto grau, ver 2.7.1, mas as mesmas derivações serão também obtidas utilizando qualquer dos métodos propostos em 2.7. A obtenção da derivada $\frac{d\Sigma}{d\Delta}$ é feita a partir dessas parametrizações adotadas para a superfície de volatilidade implícita, todas essas parametrizações propostas são funções facilmente deriváveis, assim para o caso do Delta temos uma dependência direta no *spot* e na volatilidade, ao fazermos essa derivação primeiro fazemos na componente do *spot* e depois na componente da volatilidade, no caso geral do modelo de Black e Scholes, ver 2.2, não consideramos essa dependência na volatilidade e a derivada de $\frac{d\Sigma}{dS}$ é zero.

O termo $\frac{\partial C}{\partial S}$ é obtido diretamente da derivada do modelo, ver 2.2.1, a componente $\frac{d\Sigma}{dS}$ é obtida como descrito acima a partir da parametrização da superfície de volatilidade escolhida, o termo $\frac{\partial \Delta}{\partial S}$ também é obtido diretamente do modelo de Black e Scholes, esse termo é o Gamma Black e Scholes, ver 2.2.2, de modo geral teremos o seguinte:

$$\frac{d\Sigma}{dS} = \frac{d\Sigma}{d\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial S} \quad (18)$$

$$\Delta_{AD} = \frac{dc}{dS} = \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{d\Sigma}{dS} \quad (19)$$

4.2 Vega Adaptado

De modo análogo ao realizado para o delta fazemos o mesmo para a derivada da opção em relação a volatilidade, tomando o cuidado de levar em consideração a derivada em relação ao movimento na superfície de volatilidade implícita como resultado de um choque na volatilidade, para isso necessitamos saber como o preço da opção vai variar em relação ao novo delta, gerado a partir desse choque na volatilidade, o delta da opção é função da volatilidade, assim teremos o seguinte movimento da variação no preço de uma opção como consequência do choque na superfície de volatilidade, as derivadas $\frac{\partial C}{\partial \Delta}$ e $\frac{\partial C}{\partial \sigma}$ são geradas a partir do modelo Black e Scholes, $C = f(\Delta, \sigma)$, fazendo essas derivadas e reagrupando as equações a seguir encontramos o valor do Vega da opção considerando a correção no *smile*, ou seja, adicionando o termo $\frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} \frac{d\Sigma}{d\Delta}$ a sua derivada geral:

$$\frac{dC}{d\Delta} = \frac{\partial C}{\partial \Delta} + \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{d\Sigma}{d\Delta} \quad (20)$$

$$Vega_{AD} = \frac{dc}{d\sigma} = \frac{dc}{d\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} \quad (21)$$

$$Vega_{AD} = \left(\frac{\partial C}{\partial \Delta} + \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{d\Sigma}{d\Delta} \right) \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} \quad (22)$$

$$Vega_{AD} = \frac{\partial C}{\partial \Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} + \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} \frac{d\Sigma}{d\Delta} \quad (23)$$

$$Vega_{AD} = \frac{dc}{d\Sigma} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} + \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} \frac{d\Sigma}{d\Delta} \quad (24)$$

4.3 Gamma Adaptado

A partir do Delta Adaptado diferencia-se o mesmo com relação ao *Spot* e encontramos, tomando o cuidado em separar os termos que são obtidos via modelo Black e Scholes e os termos gerados a partir da equação de parametrização da volatilidade implícita, como mostrado em 4.1, os termos $\Gamma, Vanna, Volga$ do modelo de Black e Scholes, já os termos $\frac{d\Sigma}{dS}$ e $\frac{d^2\Sigma}{dS^2}$ resultado das derivações da parametrização da superfície de volatilidade.

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} \quad (25)$$

$$Vanna = \frac{\partial Vega}{\partial S} = \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} \quad (26)$$

$$Volga = \frac{\partial Vega}{\partial \sigma} \quad (27)$$

$$\frac{d\Sigma}{dS} = \frac{d\Sigma}{d\Delta} \frac{\partial\Delta}{\partial S} \quad (28)$$

$$\Delta_{AD} = \frac{dC}{dS} = \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{d\Sigma}{dS} \quad (29)$$

$$\Delta_{AD} = \frac{dc}{dS} = \Delta + Vega \frac{d\Sigma}{dS} \quad (30)$$

$$\frac{d^2\sigma}{dS^2} = \frac{\frac{d^2\Sigma}{dSd\Delta} \cdot \frac{d\Delta}{dS} + \frac{\partial\Sigma}{\partial\Delta} \cdot \left[\frac{\partial^2\Delta}{\partial S^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2\Delta}{\partial S\partial\sigma} \frac{d\Sigma}{dS} + \frac{\partial^2\Delta}{\partial\sigma^2} \cdot \left(\frac{d\Sigma}{dS} \right)^2 \right]}{1 - \frac{\partial\Sigma}{\partial\Delta} \cdot \frac{\partial\Delta}{\partial\sigma}} \quad (31)$$

$$\Gamma_{Ad} = \frac{\partial\Delta_{AD}}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\Delta + Vega \frac{d\Sigma}{dS} \right) + \frac{\partial}{\partial\sigma} \left(\Delta + Vega \frac{d\Sigma}{dS} \right) \frac{d\Sigma}{dS} \quad (32)$$

$$\Gamma_{Ad} = \Gamma + 2Vanna \cdot \frac{d\Sigma}{dS} + Volga \cdot \left(\frac{d\Sigma}{dS} \right)^2 + Vega \cdot \frac{d^2\Sigma}{dS^2} \quad (33)$$

4.4 Vanna Adaptado

A partir do Vega Adaptado diferencia-se o mesmo com relação ao *Spot*, tomando o mesmo cuidado em separar os termos obtidos via modelo Black e Scholes e os termos gerados a partir da parametrização da superfície de volatilidade, :

$$\begin{aligned} Vega_{AD} &= \frac{dc}{d\Sigma} = \frac{\partial C}{\partial\sigma} + \frac{\partial C}{\partial\sigma} \frac{\partial\Delta}{\partial\sigma} \frac{d\Sigma}{d\Delta} \\ Vanna_{AD} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial C}{\partial\sigma} + \frac{\partial C}{\partial\sigma} \frac{\partial\Delta}{\partial\sigma} \frac{d\Sigma}{d\Delta} \right) + \frac{\partial}{\partial\sigma} \left(\frac{\partial C}{\partial\sigma} + \frac{\partial C}{\partial\sigma} \frac{\partial\Delta}{\partial\sigma} \frac{d\Sigma}{d\Delta} \right) \frac{d\Sigma}{dS} \end{aligned} \quad (34)$$

4.5 Volga Adaptado

A partir do Vega Adaptado diferencia-se o mesmo com relação a volatilidade, separando do modelo de apreçamento adotado os termos de volatilidade gerados a partir da parametrização da superfície de volatilidade, o método é o mesmo aplicado para todos os casos anteriores.

$$Vega_{AD} = \frac{\partial C}{\partial\sigma} + \frac{\partial C}{\partial\sigma} \frac{\partial\Delta}{\partial\sigma} \frac{d\Sigma}{d\Delta} \quad (35)$$

$$Volga_{AD} = \frac{d}{d\sigma} (Vega_{AD}) \quad (36)$$

$$Volga_{Ad} = \frac{\partial}{\partial\sigma} \left(\frac{\partial C}{\partial\sigma} + \frac{\partial C}{\partial\sigma} \frac{\partial\Delta}{\partial\sigma} \frac{d\Sigma}{d\Delta} \right) + \frac{\partial}{\partial\Delta} \left(\frac{\partial C}{\partial\sigma} + \frac{\partial C}{\partial\sigma} \frac{\partial\Delta}{\partial\sigma} \frac{d\Sigma}{d\Delta} \right) \frac{d\Delta}{d\sigma} \quad (37)$$

$Vega = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$ e $Volga = \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^2}$, termos gerados conforme 2.2.

$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{d\Sigma}{d\Delta} \right) = \left(\frac{d\Sigma}{d\Delta} \right)^2 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \sigma^2} + \frac{\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \Delta^2}}{\left(1 - \frac{\partial \Sigma}{\partial \Delta} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} \right)^2} \frac{d\Delta}{d\sigma}$, gerado a partir das derivadas da superfície de volatilidade.

Rearranjando e agrupando essas derivadas, temos a formulação final dada por:

$$Volga_{AD} = \frac{Volga}{1 - \frac{\partial \Sigma}{\partial \Delta} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma}} + \frac{Volga}{1 - \frac{\partial \Sigma}{\partial \Delta} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma}} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} \frac{d\Sigma}{d\Delta} + c. \frac{\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \sigma^2}}{1 - \frac{\partial \Sigma}{\partial \Delta} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma}} \cdot \frac{d\Sigma}{d\Delta} + Vega \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} \cdot \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{d\Sigma}{d\Delta} \right) \quad (38)$$

5 Análise Numérica

A seguir exemplificamos para o caso de opções sobre moeda Dólar-Real os valores obtidos para as sensibilidades Delta, Vega e Gamma calculados considerando o modelo de Black e Scholes, sem o *smile* e com as sensibilidades considerando esse efeito, além das derivadas obtidas aplicando choques no *spot* e na volatilidade para obtermos as devidas derivadas numéricas.

Observe que os valores considerando o efeito *smile* são bastante distintos dos valores obtidos com o modelo de Black e Scholes sem *smile*, tal distinção levaria a um operador que fizesse o *hedge* de uma posição com base nessas sensibilidades a cometer um erro relevante.

A tabela a seguir foi feita para opções de compra com o valor do *Spot* em 3.13 e um prazo para maturidade, a partir do dia 13 de julho de 2015, de 27 dias. Os valores obtidos são mostrados a seguir.

Figura 5.1: Modelo BS X Modelo Proposto

STRIKE	VOL	Delta_BS	Delta_Smile	Vega_BS	Vega_Smile	Gamma_BS	Gamma_Smile
3,447	19.26%	9.96%	8.09%	18.55%	15.89%	0.2674%	1.655%
3,334	17.84%	19.91%	14.90%	29.59%	24.79%	0.4606%	2.864%
3,264	16.68%	29.87%	23.98%	36.75%	33.12%	0.6116%	5.663%
3,211	15.95%	39.82%	34.52%	40.84%	39.11%	0.7108%	7.375%
3,167	15.44%	49.78%	45.22%	42.17%	41.92%	0.7581%	7.900%
3,127	15.03%	59.73%	56.02%	40.84%	41.64%	0.7541%	8.609%
3,085	14.72%	69.69%	67.42%	36.75%	37.90%	0.6934%	8.346%
3,038	14.52%	79.64%	78.87%	29.59%	30.25%	0.5659%	6.312%
2,975	14.39%	89.60%	89.30%	18.55%	18.94%	0.3578%	3.751%

Figura 5.2: Modelo Numérico X Modelo Proposto

DELTA	STRIKE	VOL	Delta_AD	Delta_Num	Vega_AD	Vega_Num	Gamma_AD	Gamma_Num
10	3,447	19,26%	8,09364%	8,09333%	15,88901%	15,88912%	1,65511%	1,65491%
20	3,334	17,84%	14,89774%	14,89897%	24,79354%	24,79616%	2,86380%	2,86451%
30	3,264	16,68%	23,97792%	23,97778%	33,12231%	33,12229%	5,66284%	5,66400%
40	3,211	15,95%	34,52387%	34,52380%	39,11001%	39,11038%	7,37525%	7,37489%
50	3,167	15,44%	45,22420%	45,23022%	41,91763%	41,91848%	7,90011%	7,47046%
60	3,127	15,03%	56,02074%	56,02225%	41,63621%	41,63652%	8,60906%	8,61006%
70	3,085	14,72%	67,41713%	67,41816%	37,89742%	37,89778%	8,34633%	8,34552%
80	3,038	14,52%	78,86736%	78,86819%	30,24711%	30,24765%	6,31197%	6,31234%
90	2,975	14,39%	89,29908%	89,30048%	18,94419%	18,94418%	3,75114%	3,75120%

A seguir apresentamos gráficos que representam os Deltas, Vegas e Gammas obtidos via modelo original de Black e Scholes e os Deltas, Vegas e Gammas obtidos com a adaptação do *smile* nas sensibilidades. Nos gráficos abaixo fica nítida a diferença quando consideramos o *smile* e quando não o consideramos.

Figura 5.3: Deltas

Figura 5.4: Vegas

Figura 5.5: Gammas

6 Conclusão

O trabalho estabeleceu um método analítico levando em consideração os efeitos do *smile* de volatilidade implícita no apreçamento de opções, agregando termos aos fatores de risco ou gregas do modelo Black e Scholes para as principais sensibilidades (Delta, Vega, Gamma, Vanna, Volga) , tornando as mesmas mais consistentes com a realidade de mercado em comparação com o caso geral.

A ideia principal foi estabelecer um método geral de derivação das sensibilidades desse modelo, levando em consideração a inconsistência de se associar a construção dessas sensibilidades de risco assumindo volatilidade constante. A principal contribuição foi adaptar o modelo clássico de Black-Scholes para que o mesmo pudesse comportar esse fato e para isso foi necessário estabelecer um método de construção de uma superfície de volatilidade, no caso apresentado para opções sobre taxa de câmbio, onde foi mostrada a parametrização dessa superfície e como deveria ser feito a iteração e a derivação numérica de acordo com a parametrização adotada.

Ao longo do Capítulo 2 mostramos as principais sensibilidades do modelo clássico de Black-Scholes, onde observam-se diferenças com as sensibilidades obtidas com o modelo adaptado.

No Capítulo 2 verificamos a ausência de termos de grande relevância na composição das gregas originais, desconsiderando o efeito *smile*. Para um operador de mercado com uma posição em carteira de opções, isto pode representar milhões, por isso a necessidade de se estabelecer uma forma de se evitar o risco de uma posição construída usando o modelo clássico de Black-Scholes.

Vale destacar que o método apresentado pode ser expandido para opções exóticas, como para o caso de opções Digitais, mostrado no apêndice.

O método proposto é mais eficiente que o método numérico de determinação das sensibilidades em uma carteira com opções *vanilla*, uma vez que as sensibilidades foram todas obtidas de forma analítica, não sendo necessário apreçar novamente a carteira inteira com novos parâmetros obtidos com choques nos fatores de risco.

Referências

- BLACK, F; M. SCHOLES. The Valuation of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy, 1973.
- Fengler, M. Arbitrage-Free Smoothing of the Implied Volatility Surface. Humboldt-Universität zu Berlin, 2005.
- Kiyoshi, I. On stochastic differential equations Memoirs, American Mathematical Society, 1951.
- BLACK, F. The pricing of commodity contracts, Journal of Financial Economics, 3, 167-179.
- MERTON, R, C. Theory of Rational Option Pricing. Bell Journal of Economics and Management Science, 1973.
- GYÖNGY L. Mimicking the one-dimensional marginal distribution of processes having an Ito differential, 1986.
- REN, Y; MADAN D; QIAN M. Calibrating and pricing with embedded local volatility models, 2007.
- HULL, J; A, WHITE. The pricing of options on assets with stochastic volatilities, Journal of Finance, 1987.
- DUPIRE, Bruno. Pricing and Hedging with Smiles, Proceedings of AFFI conference in Baule, June 1993.
- DUPIRE, Bruno. Pricing with a smile, 1994.
- DUPIRE, Bruno. A Unified Theory of Volatility. Incomplete working paper, now publish by Peter Carr in Risk Books.
- HESTON, S. A closed form solution for options with stochastic volatility with application to bonds and currency options. Review of financial studies, 1993.
- DEMAN, E;I, KANI. Riding on a smile. Risk 1994.
- DEMAN, E;M, KAMAL. The Pattern of Change in Implied Index Volatilities, Quantitative Strategies Research Notes, Goldman Sachs 1997.
- ALEXANDER, Carol; NOGUEIRA, M. Leonardo. Hedging with Stochastic and Local Volatility. ISMA Centre Discussion Papers in Finance, 2004.
- Haug, Espen. The Complete Guide To Option Pricing Formulas, 2007.
- Castagna, A; Mercurio, F. The vanna-volga method for implied volatilities, 2005.

Apêndice

A Aplicação para opções Digitais

A modelagem apresentada acima pode ser aplicada também para opções Digitais, como segue-se:

$$Call_{DIG} = -\frac{dc}{dK} \quad (39)$$

$$\frac{dC}{dK} = \frac{\partial C}{\partial K} + \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{d\Sigma}{dK} \quad (40)$$

$$\frac{d\sigma}{dK} = \frac{d\Sigma}{d\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial K} \quad (41)$$

$$Call_{DIG} = -\frac{dC}{dK} = -\frac{\partial C}{\partial K} - \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{d\Sigma}{dK} \quad (42)$$