

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA POLITÉCNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE SISTEMAS ELETRÔNICOS  
PROGRAMA DE DOUTORADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**OTIMIZAÇÃO LINEAR ROBUSTA MULTITEMPORAL DE UMA  
CARTEIRA DE ATIVOS COM PARÂMETROS DE MÉDIA E  
DISPERSÃO INCERTOS**

ANDRÉ CADIME DE GODÓI

ORIENTADOR: PROF. DR.  
FLAVIO ALMEIDA DE  
MAGALHÃES CIPPARRONE

SÃO PAULO  
2011

ANDRÉ CADIME DE GODÓI

**OTIMIZAÇÃO LINEAR ROBUSTA MULTITEMPORAL DE UMA  
CARTEIRA DE ATIVOS COM PARÂMETROS DE MÉDIA E  
DISPERSÃO INCERTOS**

Tese apresentada à Escola Politécnica  
da Universidade de São Paulo para a  
obtenção do título de Doutor em  
Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Engenharia de  
Sistemas Eletrônicos.

Orientador: Prof. Dr. Flavio Almeida  
de Magalhães Cipparrone

SÃO PAULO

2011

**Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.**

**São Paulo,      de novembro de 2011.**

**Assinatura do autor** \_\_\_\_\_

**Assinatura do orientador** \_\_\_\_\_

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

**Godói, André Cadime de**

**Otimização linear robusta multitemporal de uma carteira de ativos com parâmetros de média e dispersão incertos / A.C. de Godói. -- ed.rev. -- São Paulo, 2011.**

**110 p.**

**Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos.**

**1. Engenharia financeira 2. Otimização matemática 3. Programação linear 4. Administração de carteiras (Otimização) 5. Investimentos 6. Portfólios de ativos 7. Otimização robusta I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos II. t.**

Dedico esta tese à minha querida esposa  
Juliana, fiel tradução da palavra companheirismo.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Dr. Flavio Almeida de Magalhães Cipparrone, pelo estímulo constante, pela orientação rigorosa e pelas contribuições essenciais para o desenvolvimento e conclusão desta tese.

Ao Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos da Escola Politécnica, por ter me recebido no curso de Doutorado, permitindo o meu desenvolvimento acadêmico em um ambiente de reconhecida excelência.

Ao Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto, que me incentivou a ingressar ao Programa de Doutorado em Engenharia Elétrica e contribuiu com sugestões importantes para a fundamentação teórica deste trabalho.

Ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica, centro de ensino responsável pela minha graduação, onde pude desenvolver minha formação acadêmica e moral sob os valores da ética, da disciplina, da perseverança e da humildade.

Aos colegas do Banco Santander, em especial ao amigo e ex-chefe Erik Peccei Szaniecki, pela compreensão e pelo apoio nas minhas ausências em horário de expediente, necessárias para o cumprimento dos créditos requeridos pelo Programa de Doutorado.

Aos meus pais, Marlene e Acéli, pelo apoio incondicional e por me ensinarem que a busca por conhecimento é um processo contínuo, ininterrupto e muito recompensador. À minha irmã Flávia e à minha avó Isolina, pelo carinho e torcida usuais.

À minha esposa Juliana, pela paciência e pelo suporte emocional em todos esses anos de trabalho e ao meu filho João, minha fonte de sorrisos e meu carregador de energia.

Aos amigos, por toda a força, e a todos que direta ou indiretamente me ajudaram a concretizar este sonho.

## RESUMO

Nos últimos anos, percebeu-se um avanço substancial das metodologias sistemáticas de seleção de ativos em portfólios financeiros, baseadas em técnicas de otimização. A maior pressão por desempenho sobre as gestoras de recursos e a evolução dos softwares e pacotes de otimização foram fatores que contribuíram para esse desenvolvimento. Dentre as técnicas mais reconhecidas utilizadas na gestão de portfólios está a de otimização robusta, cuja aplicação na solução de problemas com dados incertos iniciou-se na década de 1970 e, desde então, vem evoluindo em sofisticação. Partindo de uma extensão recente do método, propõe-se um novo modelo linear que resolve o problema de otimização de um portfólio para múltiplos estágios, com inovações no tratamento da incerteza das estimativas de dispersão dos retornos. Os resultados mostram que o método proposto desempenha muito bem em termos de rentabilidade e de métricas de risco-retorno em momentos de turbulência dos mercados. Por fim, demonstra-se empiricamente que o modelo alcança um desempenho ainda melhor em termos de rentabilidade com a adoção de um estimador eficiente para o valor esperado dos retornos e com a simultânea redução do nível de robustez do modelo.

Palavras-chave: Administração de carteiras, otimização robusta, programação linear, múltiplos estágios, Norma D.

## **ABSTRACT**

It has been realized in the last years a remarkable development of the optimization techniques to solve the problem of financial portfolio selection. The pressure on asset management firms to maintain a more stable performance and the evolution of specialized software packages have enabled this positive trend. One of the most recognized approaches applied to the management of investments is the robust optimization, whose use on uncertain portfolio optimization problems has begun in the 1970s and has experienced a substantial growth since then. Building on a recent version of this framework, it is proposed a new linear model of the robust multistage portfolio optimization problem, thereby incorporating uncertainty about dispersion inputs in an innovative way. The results show that this method performs very well during high volatility periods in terms of the terminal wealth and the risk-return tradeoff. Finally, it can be demonstrated empirically that the proposed method outperforms when an efficient return estimator is incorporated to the optimization model and the robustness level is reduced simultaneously.

Keywords: Asset Allocation, robust optimization, linear programming, multiple periods, D-Norm.

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	11
2. OTIMIZAÇÃO ROBUSTA .....	19
2.1. Definição Genérica.....	20
2.2. Definição Formal.....	22
2.3. Parametrização do Conjunto de Incerteza.....	24
2.4. Tratabilidade das Contrapartes Robustas.....	26
2.4.1. Caixa unitária.....	26
2.4.2. Bola euclidiana .....	27
2.4.3. Norma D.....	28
2.5. Aproximações de Contrapartes Robustas para Restrições com Parâmetros Estocásticos .....	29
3. OTIMIZAÇÃO UNITEMPORAL DE UM PORTFÓLIO SOB INCERTEZA.....	34
3.1. Formulação Robusta de Soyster para um Problema de Otimização com Parâmetros Incertos.....	37
3.2. Formulação Robusta de Ben-Tal para um Problema de Otimização com Parâmetros Incertos.....	38
3.3. Formulação Robusta de Bertsimas e Sim para um Problema de Otimização com Parâmetros Incertos.....	40
3.4. Formulação Robusta de Halldorsson e Tutuncu para um Problema de Alocação de Ativos	42
4. OTIMIZAÇÃO MULTITEMPORAL DE UM PORTFÓLIO SOB INCERTEZA .....	45
4.1. Programação Dinâmica.....	46
4.2. Otimização Robusta.....	49
4.2.1. Programa de otimização multitemporal.....	50
4.2.2. Conjuntos de incerteza e contrapartes robustas.....	53
5. RETORNOS ESPERADOS PARA AÇÕES.....	59
5.1. Apreçamento de Ativos e Modelos Fatoriais.....	60

5.1.1	Capital asset pricing model (CAPM)	61
5.1.2	Arbitrage pricing theory (APT)	63
5.1.3	Modelos de fatores na prática	64
5.1.4	Modelo Barra	66
5.1.5	Modelo de Fama & French	68
5.2	Aplicação ao modelo de otimização robusta	69
6	MODELO DE OTIMIZAÇÃO LINEAR ROBUSTA MULTITEMPORAL COM PARÂMETROS INCERTOS DE MÉDIA E DISPERSÃO	71
6.1	Programa de Otimização Multitemporal	72
6.2	Conjuntos de Incerteza	74
6.3	Contraparte robusta	75
6.4	Restrições Probabilísticas	79
6.5	Fatores de Robustez	79
7	RESULTADOS	81
7.1	Experimento 1	85
7.2	Experimento 2	91
7.3	Experimento 3	100
8	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	103
8.1	Conclusões	103
8.2	Extensões	106

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1: Fatores de Risco do Modelo Barra.....	66
Tabela 2: Ações que compõem a carteira teste.....	81
Tabela 3: Retornos intertemporais para os ativos da solução nominal.....	86
Tabela 4: Alocações robustas para $\Delta = 0,3$ .....	87
Tabela 5: Alocações robustas para $\Delta = 0,9$ .....	88
Tabela 6: Alocações robustas para $\Delta = 2$ .....	88
Tabela 7: Alocações robustas para $\Delta = 3$ .....	89
Tabela 8: Riqueza terminal para valores crescentes de “ $\Delta$ ”.....	89
Tabela 9: Retornos Intertemporais para valores crescentes de “ $\Delta$ ”.....	89
Tabela 10: Alocações robustas para $\Delta = 0$ e $\Omega = 0,5$ .....	91
Tabela 11: Alocações robustas para $\Delta = 0,3$ e $\Omega = 0,5$ .....	92
Tabela 12: Alocações robustas para $\Delta = 0,9$ e $\Omega = 0,5$ .....	92
Tabela 13: Alocações robustas para $\Delta = 2$ e $\Omega = 0,5$ .....	93
Tabela 14: Alocações robustas para $\Delta = 3$ e $\Omega = 0,5$ .....	94
Tabela 15: Riqueza terminal para valores crescentes de “ $\Delta$ ” e “ $\Omega$ ”.....	94
Tabela 16: Retornos Intertemporais para valores crescentes de “ $\Delta$ ” e “ $\Omega$ ”.....	94
Tabela 17: Alocações robustas para $\Delta = 0$ e $\Omega = 1$ .....	96
Tabela 18: Alocações robustas para $\Delta = 0,3$ e $\Omega = 1$ .....	96
Tabela 19: Alocações robustas para $\Delta = 0,9$ e $\Omega = 1$ .....	97
Tabela 20: Alocações robustas para $\Delta = 2$ e $\Omega = 1$ .....	98
Tabela 21: Alocações robustas para $\Delta = 3$ e $\Omega = 1$ .....	98
Tabela 22: Riqueza terminal para valores crescentes de “ $\Delta$ ” e “ $\Omega$ ”.....	99
Tabela 23: Retornos Intertemporais para valores crescentes de “ $\Delta$ ” e “ $\Omega$ ”.....	99
Tabela 24: Alocações robustas para $\Delta = 0,9$ , $\Omega = 1$ e $b^t = 0,8$ .....	101
Tabela 25: Riqueza terminal para valores crescentes de “ $\Delta$ ” e “ $\Omega$ ”.....	101
Tabela 26: Comparação entre retornos intertemporais.....	102

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Evolução do Volume Administrado na Indústria de Fundos. ....	12
Figura 2 - Evolução da Participação dos Fundos de Ações sobre o Patrimônio Total da Indústria de Fundos. ....	12
Figura 3 - Custo de oportunidade como uma função dos parâmetros de mercado.....	20
Figura 4 - retornos semestrais ( $r_t$ ) das ações do portfólio teste, onde $r_t \equiv$ retorno de $t-1$ a $t$ ; $t = 1, \dots, 5$ .....	84
Figura 5 - Solução nominal para o modelo multiperíodo .....	86

## IDENTIFICAÇÃO DE NOTAÇÃO

- Letras maiúsculas (por exemplo,  $X$ ) são usadas para representar matrizes e letras minúsculas (por exemplo,  $x$ ) são usadas para representar vetores;
- Til sobre uma letra (por exemplo,  $\tilde{x}$ ) representa coeficientes incertos;
- Circunflexo inverso sobre uma letra (por exemplo,  $\check{x}$ ) denota valores esperados e circunflexo padrão sobre uma letra (por exemplo,  $\hat{x}$ ) denota valores de dispersão.
- “n” denota o número de ativos de um portfólio.
- “m” denota o número de restrições de um programa de otimização.
- “k” denota o número de parâmetros sujeitos a incerteza.
- “t” denota um instante de tempo.

## 1. INTRODUÇÃO

Percebeu-se nas últimas décadas um notável crescimento no uso da modelagem financeira e de ferramentas de otimização para o gerenciamento de carteiras de ativos financeiros. Além da natural pressão por desempenho estável e previsível sobre as empresas gestoras de recursos de terceiros, contribuíram para essa tendência o aprimoramento das técnicas clássicas sobre teoria do portfólio e a proliferação de novos e sofisticados pacotes de softwares de otimização.

O gerenciamento ou gestão ativa de portfólios visa à obtenção de desempenhos financeiros superiores a referências (*benchmarks*) de mercado, tais como o Ibovespa, ou o CDI, por meio da diversificação dos investimentos, visando diluir o risco e aumentar o potencial de rentabilidade. Esta atividade pode ser realizada de maneira profissional por instituições financeiras habilitadas para a gestão de fundos de investimento e reguladas por órgãos competentes – no mercado brasileiro, CVM e ANBIMA<sup>1</sup>. Assim, através dos fundos, os pequenos investidores podem contar com uma administração especializada de seu patrimônio e conseguem alguns ganhos de escala, como o acesso a custos menores de corretagem, por exemplo. Em contrapartida, o investidor de fundos abstém-se completamente da tomada de decisão de seu investimento e arca com custos inerentes a este tipo de investimento, como taxas de administração e de performance.

Cabe observar que a indústria brasileira de fundos de investimento conta hoje com mais de R\$ 1,7 trilhão de recursos administrados em mais de 10 mil fundos, segundo dados de fevereiro de 2011 da ANBIMA, valor este que dobrou em seis anos, como pode ser conferido na figura 1. Cerca de onze por cento deste total correspondem aos chamados fundos de ações (foco deste trabalho), ou seja, fundos com no mínimo sessenta e sete por cento de seu patrimônio em ativos de renda variável. É uma parcela ainda pequena se comparada com a dos fundos de renda fixa ou referenciados DI, que totalizam mais de quarenta por cento dos recursos administrados pela indústria. Todavia, a tendência é de crescimento, como se pode observar na figura 2, e não houve uma redução significativa da participação dos fundos de

---

<sup>1</sup> Comissão de Valores Mobiliários e Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais, respectivamente.

ações em função da crise financeira de 2008, o que indica um melhor entendimento por parte do investidor brasileiro do caráter de longo prazo deste tipo de investimento.

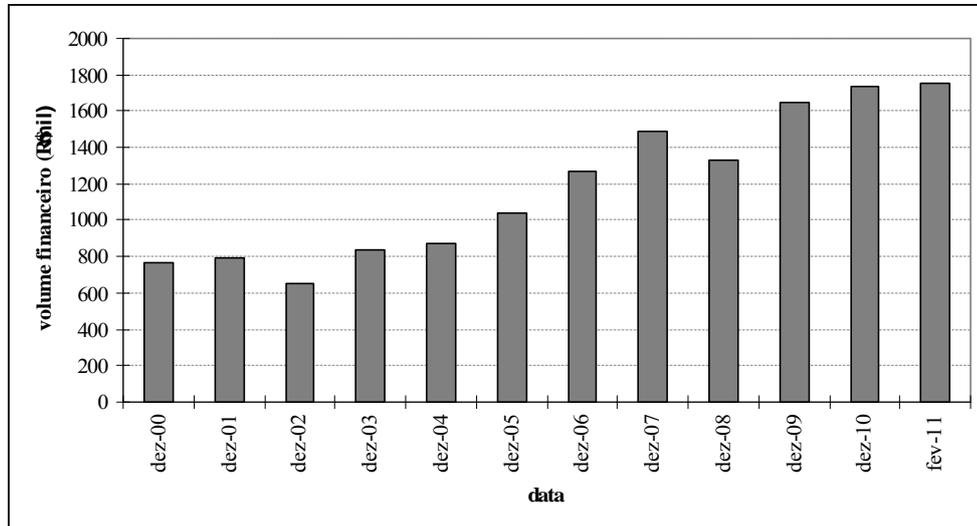


Figura 1 - Evolução do Volume Administrado na Indústria de Fundos.  
Valores em moeda constante de fevereiro de 2011, deflacionados pelo IGP.  
Fonte: ANBIMA

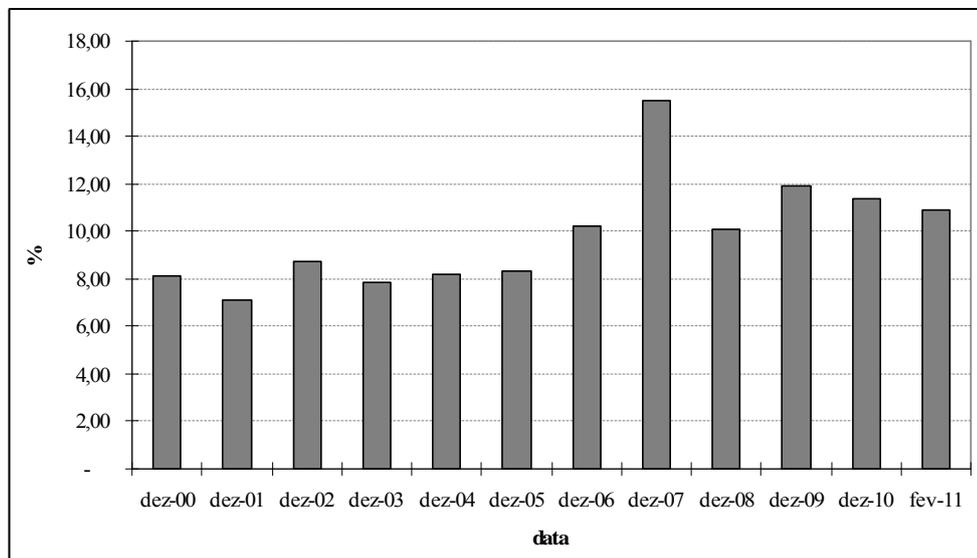


Figura 2 - Evolução da Participação dos Fundos de Ações sobre o Patrimônio Total da Indústria de Fundos.  
Fonte: ANBIMA

A gestão do total de recursos captados pela indústria de fundos fica a cargo de aproximadamente quatrocentas casas gestoras, sendo que as trinta maiores gerem cerca de noventa por cento deste total. Portanto, dada a relevância deste mercado e a forte

concorrência, os profissionais da indústria investem cada vez mais em ferramentas de gestão sofisticadas para alcançar um desempenho diferenciado e atrair o investidor, cada vez mais seduzido por esta categoria de investimento. Dentre elas, podemos destacar as metodologias de otimização de portfólios.

A primeira abordagem sistemática para o problema de alocação de ativos em um portfólio pode ser atribuída a Markowitz [1952], em cujo artigo seminal se endereçou a questão do compromisso entre retorno e risco para a tomada de decisão na alocação de ativos. Ele tratou o problema da seleção de ativos financeiros para um portfólio como um problema de otimização no qual a variância agregada do portfólio seria mínima para um dado nível de retorno esperado e, ou, o retorno esperado seria máximo para um dado nível de variância do portfólio. A formulação do tipo “média-variância” pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x' \Sigma x \\ \text{s.a.} \quad & \tilde{r}' x = \mu \\ & x' e = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

onde “ $x \in \mathfrak{R}^n$ ” é um vetor de pesos dos ativos, “ $\tilde{r} \in \mathfrak{R}^n$ ” e “ $\Sigma \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ” são respectivamente o vetor de valores esperados e a matriz de covariância dos retornos dos ativos e “ $\mu$ ” é um parâmetro que define o valor esperado do retorno agregado do portfólio. Outro conceito importante apresentado em seu trabalho foi o da diversificação do portfólio, cujo risco total depende também das covariâncias entre seus componentes e não somente do risco individual de cada exposição.

Várias teorias foram construídas a partir do trabalho de Markowitz, como a introduzida por Sharpe, Lintner e Mossin, entre 1964 e 1966, quando os autores propuseram o primeiro modelo de apreçamento de ativos, o CAPM (*capital asset pricing model*). Portanto, não existem dúvidas da importância dos conceitos de otimização de portfólios por média-variância e de diversificação para a evolução do tema da tomada de decisão financeira e para o desenvolvimento e compreensão dos mercados financeiros em geral. Todavia, apesar da grande influência da teoria moderna de portfólios, hoje – mais de cinquenta anos após o trabalho seminal de Markowitz – alguns problemas identificados na teoria original estimularam a busca de técnicas mais avançadas para a otimização de portfólios de ativos financeiros. Dentre os principais inconvenientes, podemos destacar dois:

- A natureza unitemporal do modelo de Markowitz torna a abordagem inapropriada para problemas de alocação de longo prazo. Assim, a escolha inapropriada do horizonte de tempo do problema de alocação pode levar a decisões de investimento distorcidas.
- Os parâmetros de retornos esperados e covariâncias, que servem de entrada para o modelo de otimização, não são conhecidos de antemão e precisam ser estimados, tornando os resultados da otimização bastante sensíveis a erros de estimação. Portanto, é necessária uma modificação no paradigma clássico de maneira a trazer maior estabilidade, confiabilidade e robustez nos resultados.

Com respeito à primeira questão, o próprio Markowitz discutiu o tema do planejamento de investimentos de longo prazo sob a ótica de funções utilidade baseadas no consumo e tratou o problema resultante com técnicas de programação dinâmica (Markowitz, 1991). Soluções analíticas para a versão contínua do problema de otimização de portfólios para diversos tipos de função utilidade foram estudados subsequentemente. Um trabalho a se destacar nesse campo foi desenvolvido por Pliska [1984], onde o autor fornece uma solução ao problema de otimização de uma carteira financeira a partir da maximização da utilidade esperada da riqueza no vencimento por meio de cálculo estocástico e análise convexa. A vantagem dessa abordagem é a sua aplicação a processos em tempo contínuo, o que permite a modelagem dos preços segundo passeios aleatórios e a utilização de distribuições de probabilidade diferentes de distribuições Gaussianas, que considerem, por exemplo, efeitos de assimetria. Contudo, a solução fechada obtida para este problema só pode ser derivada sob hipóteses muito rígidas sobre o comportamento do investidor e sobre o processo dos preços dos ativos no futuro e, por isso, dificilmente podem ser generalizadas.

Ainda sobre a escolha do horizonte de investimento, conforme observado em Costa e Nabholz [2006], em geral as decisões de alocação de ativos têm caráter multitemporal, dado que o gestor costuma balancear sua posição ao longo do tempo pensando em uma estratégia de longo prazo. Alguns trabalhos recentes (ver Li & Ng, 2000) apresentam soluções de otimização por média-variância para o caso multi-período e serviram de base para este trabalho, que parte da premissa de que o balanceamento periódico do portfólio auxilia a decisão de alocação de longo prazo. Vale observar que a metodologia proposta em Li & Ng [2000] foca na análise do valor esperado e da variância da riqueza terminal, sem fazer considerações sobre o comportamento da riqueza em instantes de tempo intermediários. Neste sentido, Costa e Nabholz [2006] apresentam uma solução para o problema de seleção ótima

de ativos multi-período usando média-variância, mas considerando restrições intermediárias para o valor esperado e a variância da carteira. Para isso, analisam dois casos: função objetivo dada por uma combinação linear das variâncias com restrições intermediárias para os valores esperados; e função objetivo dada pela combinação linear dos valores esperados com restrições intermediárias para as variâncias. No primeiro caso, os autores apresentam uma solução analítica para o problema e no segundo caso, uma solução numérica.

Já a questão dos erros de estimação é um tema mais complexo. Segundo Fabozzi et al. [2007, p. 4], “[...] uma forte razão para a relutância dos gestores de investimentos em adotar os modelos quantitativos de otimização por media-variância é o fato de eles não serem confiáveis na prática. Especificamente, a otimização por risco-retorno é muito sensível a variações nos dados de entrada [...]”. E a situação se agrava quando refletimos sobre a inabilidade dos analistas e “quants” em fazer previsões de variáveis econômico-financeiras, por confiarem na ilusão de que compreendem a aleatoriedade inerente à maioria das variáveis econômicas e de que podem prever o futuro através do estudo de padrões passados. Por exemplo, dificilmente algum modelo preditivo antes de 2008 considerava a crise financeira global como cenário determinante para a estimação de variáveis, simplesmente porque ela foi uma crise sem precedentes na história recente. Portanto, podemos afirmar que praticamente todos erraram suas previsões para este período.

**“[...] Nós não compreendemos o mundo tão bem quanto imaginamos e tendemos a nos iludir com falsos padrões, a confundir sorte com habilidade (o efeito “enganado pela aleatoriedade”), a superestimar o conhecimento sobre eventos raros (cisnes negros) assim como o entendimento da natureza humana, algo que vem se agravando com o aumento da complexidade do mundo [...]”.**  
(Taleb, 2011).

A despeito do desenvolvimento de técnicas sofisticadas para a estimação dos parâmetros de risco e retorno, uma saída interessante para esta questão foi a aplicação de métodos estatísticos adotados em outros ramos da ciência, como a matemática e a engenharia, na determinação de portfólios ótimos, o que somente se tornou viável com o avanço dos algoritmos e softwares de otimização. Os métodos de programação dinâmica são um exemplo, os quais procuram tratar a incerteza dos dados modelando seu comportamento em cenários futuros e obtendo uma solução ótima para cada vértice da árvore de cenários gerada. Uma extensa pesquisa já foi realizada no campo da programação dinâmica com aplicações em otimizações de portfólios, com destaque para Dantzig and Infanger [1993].

Outra abordagem alternativa é a utilização de técnicas de otimização e estimação robusta, as quais desempenham importante papel em áreas como controle e estatística (ver Sayed et al., 2002). Os conceitos e métodos da estimação robusta foram originados nos anos 50. O termo técnico “estatística robusta” foi cunhado em 1953, contudo os seus conceitos já eram praticados antes no ramo da física. Desde então, a técnica vem sendo uma ferramenta eficaz na criação de modelos com pouca sensibilidade a mudanças em suas hipóteses básicas e estimativas de entrada. No ramo das finanças, vem sendo útil como complemento a métodos estatísticos consistentes, porém pouco robustos, como as regressões e os modelos de otimização de carteiras. Essa abordagem é um dos motivadores para o desenvolvimento desse trabalho e servirá de metodologia principal para o modelo a ser desenvolvido. Seus detalhes técnicos e aspectos históricos serão discutidos em detalhes mais à frente.

Neste momento, vale comentar que as técnicas de otimização robusta e dinâmica são complementares no tratamento da incerteza dos parâmetros e cada uma possui suas vantagens e desvantagens. Por exemplo, os problemas de seleção de ativos solucionados por programação dinâmica crescem em complexidade com o aumento do número de ativos do portfólio ou de estágios intermediários. Por outro lado, há evidências de que tais programas podem evitar o excesso de conservadorismo inerente a alguns modelos de otimização robusta. Sem entrar no mérito de qual técnica é mais eficiente, optou-se por utilizar a técnica robusta para evitar o custo computacional que, segundo Fabozzi et al. [2007], fatalmente se incorre ao utilizar a otimização estocástica para problemas em múltiplos estágios.

Entre os modelos robustos utilizados na solução de problemas de otimização de portfólios em múltiplos estágios, a abordagem de Ben Tal et al. [2000] foi a primeira a considerar o efeito da dimensionalidade do problema resultante, com a proposição de um modelo computacionalmente tratável, apesar de não linear. Todavia, de acordo com Bertsimas and Pachamanova [2008], uma formulação linear é preferível quando se deseja incorporar restrições mais complexas no modelo de otimização. Com isso, os autores propuseram uma abordagem robusta e linear para o problema em múltiplos estágios, utilizando estruturas poliedrais para a modelagem do conjunto de incerteza dos retornos futuros dos ativos que compunham a carteira. Nota-se, porém, que o método proposto por eles não incorpora diretamente nenhuma restrição de variância ou risco no programa de otimização. Como será verificada no capítulo 4, a abordagem citada trata a aversão ao risco do investidor apenas indiretamente, na definição de um conjunto de incerteza conveniente para os retornos.

Assim como Bertsimas and Pachamanova [2008], vários outros trabalhos sobre o modelo robusto multi-período foram publicados recentemente (ver Ben-Tal and Nemirovski, 2000, Bertsimas and Sim, 2004), mas todos eles pressupõem variâncias e covariâncias conhecidas, lidando com o caráter incerto apenas dos parâmetros de valores esperados (retornos). E no caso das abordagens que tratam do tema da incerteza nos parâmetros de dispersão (variância), como aquelas apresentadas em Goldfarb e Iyengar [2003] e Halldorsson and Tutuncu [2003], o horizonte de investimento é unitemporal e os modelos resultantes são não lineares.

A contribuição que esta tese oferece para o avanço da pesquisa sobre o tema da seleção ótima robusta de ativos é endereçar a natureza incerta tanto das estimativas dos retornos quanto das estimativas das variâncias, mantendo o modelo robusto resultante como um programa de otimização linear. Para isso, partiu-se das abordagens desenvolvidas em Ben Tal et al. [2000] e Bertsimas and Sim [2004] e, mediante a definição dos parâmetros de dispersão pelo método do desvio absoluto, proposto em Konno and Yamazaki [1991], e uma definição conveniente dos conjuntos de incerteza, apresenta-se a formulação de um modelo robusto e linear para o problema de alocação ótima em múltiplos períodos. Adicionalmente, ilustra-se o método a partir da sua aplicação em um portfólio de ações brasileiras.

Cabe aqui ponderar que o acréscimo de robustez na formulação do modelo de otimização impõe um custo para a gestão do portfólio em termos de performance. Em outras palavras, as soluções do modelo robusto são mais conservadoras, de maneira que se abre mão de “otimalidade” em relação ao modelo nominal para assegurar a imunidade do modelo a erros de estimação dos parâmetros de entrada. Com isso, o trabalho também propõe uma maneira de reduzir esse “custo de robustez”, calibrando o nível de conservadorismo para níveis mais reduzidos e incorporando uma restrição adicional ao programa resultante, cujo objetivo é incentivar uma maior alocação em ações com uma razão de valor patrimonial por valor de mercado mais elevada. Essa estratégia tem como base o trabalho de Fama e French [1992], cujos resultados apontaram que carteiras formadas por ações com maior valor patrimonial por valor de mercado (estratégias de valor) apresentaram resultados consistentemente maiores em relação a carteiras compostas por ações com menor razão. Os autores citados estudaram todas as ações de empresas não-financeiras negociadas em três bolsas de valores nos Estados Unidos: NYSE, AMEX e NASDAQ, no período de 1963 a 1990. Em Rostagno et al. [2006], uma análise semelhante é realizada para estratégias de valor montadas com ações da Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa), no período compreendido

entre 1994 e 2003, com resultados que também apontaram para a superioridade dos rendimentos destas estratégias no mercado local.

Para uma melhor exposição das ferramentas utilizadas e dos resultados obtidos, esta tese está organizada da seguinte maneira: no segundo capítulo, apresenta-se uma revisão da teoria de otimização robusta, com importante foco na parametrização dos conjuntos de incerteza dos parâmetros de entrada do modelo de otimização.

No terceiro capítulo, apresentam-se algumas formulações do problema de otimização robusta para um período, as quais diferem entre si na maneira de tratar a incerteza dos parâmetros.

No quarto capítulo, trata-se o problema de seleção ótima de ativos em múltiplos estágios, com a apresentação de aplicações de programação dinâmica e otimização robusta para a sua solução.

No quinto capítulo, apresentam-se uma revisão da teoria de apreçamento de ativos e algumas formulações de modelos de estimação de retornos esperados de ações.

No sexto capítulo, é formulado o modelo de otimização robusta a ser proposto por esta tese, para um portfólio financeiro com custos de transação, tomando como base uma carteira de ações negociadas na Bovespa.

No sétimo capítulo são apresentados os resultados obtidos, os quais serão discutidos e analisados no oitavo capítulo, com as respectivas conclusões.

## 2. OTIMIZAÇÃO ROBUSTA

Apesar da grande influência que a teoria moderna de portfólios vem exercendo sobre a teoria econômica, é sabido que o modelo de média-variância para a seleção de ativos, como proposta por Markowitz em seu trabalho seminal de 1952, carece de confiabilidade e estabilidade quando utilizado na prática. Por exemplo, percebe-se empiricamente que os portfólios ótimos por média-variância não necessariamente são bem diversificados e que o programa de otimização pode atribuir pesos extremos e não intuitivos para alguns dos ativos na carteira. Além disso, em Fabozzi et al. [2007], afirma-se que o modelo é bastante sensível a variações dos seus dados de entrada, as quais são estimativas para os retornos futuros e as covariâncias de cada ativo. Em outras palavras, os parâmetros dos problemas reais de otimização não são conhecidos e, portanto, estão sujeitos a erros de estimação.

Na abordagem tradicional de otimização de portfólios, o nível de incerteza dos dados de entrada é ignorado e o problema é resolvido como se os dados estimados (nominais) fossem exatos, na esperança de que pequenas incertezas nos dados de entrada não afetem significativamente as propriedades da solução ótima. Porém, em Ben-Tal et al. [2009], comenta-se que, às vezes, mesmo pequenas incertezas devem merecer uma atenção especial. Portanto, em aplicações de otimização, existe a real necessidade de se buscar uma técnica capaz de detectar casos em que a incerteza dos dados afete substancialmente a qualidade da solução nominal e, nesses casos, gerar uma solução confiável e imune a erros de estimação destes dados. Nesse aspecto, a otimização robusta mostra-se uma técnica intuitiva e eficiente de modelar a incerteza nos problemas de otimização, como nas decisões de alocação de ativos financeiros para a composição de portfólios.

Antes, porém, de entrar em aspectos mais formais da metodologia em questão, será apresentada uma definição intuitiva fazendo uso de sua aplicação para a alocação de ativos financeiros.

## 2.1. Definição Genérica

A seguir, será apresentada a definição genérica de alocação robusta abordada em Meucci [2003]. Definindo como alocação a decisão de investimento em ativos que compõem um determinado portfólio financeiro, consideremos que o custo de oportunidade “CO” de uma alocação genérica “ $w, w \in \mathfrak{R}^n$ ” que satisfaça as restrições de investimentos pode ser definido como a diferença entre a máxima satisfação possível do investidor ( $\bar{S}_\theta$ ) e a condição de satisfação real fornecida pela alocação “ $w$ ” ( $S_\theta(w)$ ):

$$CO_\theta(w) \equiv \bar{S}_\theta - S_\theta(w) \quad (2)$$

onde “ $n$ ” é o número de ativos do portfólio. Uma vez que os valores reais dos parâmetros de mercado “ $\theta$ ” não são conhecidos, uma alocação é ótima no sentido robusto se ela converge para um cenário de custo de oportunidade mínimo para todos os valores dos parâmetros de mercado dentro de um intervalo “ $\Theta$ ”, que seja amplo o suficiente para muito provavelmente conter os valores “ $\theta^t$ ” verdadeiros, porém desconhecidos, dos parâmetros de mercado. A abordagem robusta objetiva determinar precisamente uma alocação “ $w_\Theta$ ” tal que o custo de oportunidade é uniformemente mínimo para todos os valores “ $\theta$ ” no conjunto de incerteza “ $\Theta$ ”.

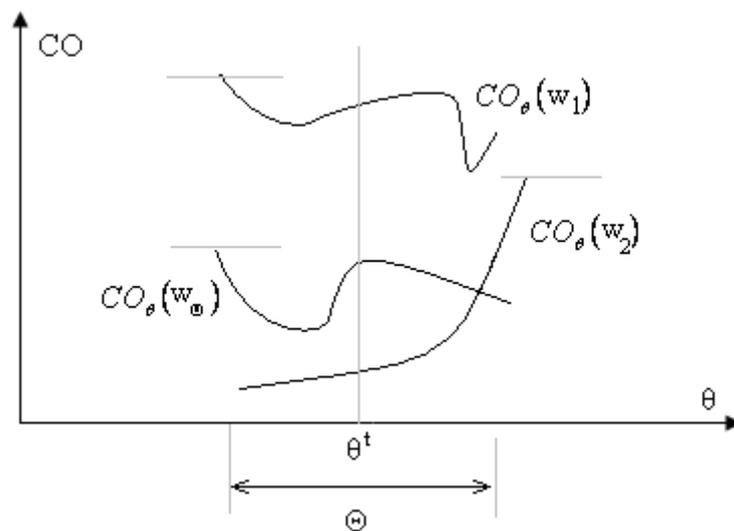


Figura 3 - Custo de oportunidade como uma função dos parâmetros de mercado

Em outras palavras, devemos considerar uma alocação que satisfaça

$$w_{\Theta} \equiv \arg \min_w \left\{ \max_{\theta \in \Theta} [\bar{S}_{\theta} - S_{\theta}(w)] \right\} \quad (3)$$

Ou seja, considera-se a alocação tal que o máximo custo de oportunidade em um determinado intervalo “ $\Theta$ ” é o menor possível. Vale observar que essa alocação não necessariamente fornece o menor custo de oportunidade possível com relação aos parâmetros verdadeiros “ $\theta^t$ ”, como se pode notar na figura 3. Além disso, a qualidade da alocação representada em (3) depende obviamente da escolha adequada do conjunto de incerteza “ $\Theta$ ”. Quanto menor a sua amplitude, mais fácil é a tarefa de minimizar o custo de oportunidade por todo o seu espectro, porém a alocação estará mais sujeita a erros de estimação dos parâmetros de mercado “ $\theta$ ”. Já a escolha de um intervalo de incerteza muito largo, apesar de aumentar a probabilidade de que ele contenha “ $\theta^t$ ”, pode trazer como consequência a obtenção de uma alocação excessivamente conservadora.

Seja o caso particular da otimização linear (OL), que é o foco deste trabalho e cujo problema genérico pode ser expresso na forma

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c'x + d \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \end{aligned} \quad (4)$$

onde “ $A$ ” é uma matriz constante de parâmetros das restrições e “ $c'x + d$ ” é a função objetivo. No universo da otimização robusta, um problema OL incerto é definido como uma coleção de programas OL de estrutura comum

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c'x + d \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b; (c, d, A, b) \in \Theta \end{aligned} \quad (5)$$

Com os dados  $(c, d, A, b)$  variando dentro do conjunto de incerteza “ $\Theta$ ”, o qual muito provavelmente conterá toda a informação sobre os parâmetros verdadeiros de mercado. Conforme já foi exposto, para resolver (5) devemos buscar a solução que forneça o menor custo de oportunidade máximo possível dentro do conjunto “ $\Theta$ ”. Sob essa ótica conservadora, é natural que se verifique a qualidade de uma solução robusta factível “ $x$ ” pelo maior valor de seu objetivo original.

$$\text{função objetivo máxima} \equiv \max_{(c,d,A,b) \in \Theta} [c'x + d] \quad (6)$$

Portanto, a melhor solução factível para um problema de otimização robusta é aquela que resolve o programa a seguir.

$$\begin{aligned} x = \arg \min_x \left\{ \max_{(c,d,A,b) \in \Theta} [c'x + d] \right\} \\ \text{s.t. } Ax \leq b \end{aligned} \quad (7)$$

ou analogamente

$$\begin{aligned} x = \arg \min_{x,\nu} \nu \\ \text{s.t. } c'x + d \leq \nu \\ Ax \leq b, (c, d, A, b) \in \Theta \end{aligned} \quad (8)$$

Definimos a formulação (8) como a contraparte robusta do problema original incerto e as soluções ótimas e factíveis são denominadas soluções ótimas robustas ou factíveis robustas. A metodologia de otimização robusta propõe a associação do problema incerto com sua contraparte robusta e o uso das soluções ótimas robustas associadas como os elementos para a tomada de decisão.

## 2.2. Definição Formal

Como foi definido anteriormente, um problema de otimização linear (OL) incerto é uma coleção de problemas de OL de estrutura comum (m restrições e n variáveis), com os dados de entrada variando em um dado conjunto de incerteza “ $\Theta \in \mathfrak{R}^{(m+1) \times (n+1)}$ ”.

$$\begin{aligned} \min_x c'x + d \\ \text{s.t. } Ax \leq b; (c, d, A, b) \in \Theta \end{aligned} \quad (9)$$

É importante observar que para uma família de problemas de OL como (9), o conceito de solução ótima e factível depende de hipóteses associadas ao ambiente de decisão subjacente. Neste caso, são adotadas as seguintes hipóteses:

*Hipótese 1 (H1)* – As variáveis de decisão “x” em (9) representam decisões do tipo “aqui e agora”, isto é, a elas devem ser atribuídos valores numéricos como resultado da resolução do problema antes que os dados reais se revelem.

*Hipótese 2 (H2)* – O tomador de decisão é somente responsável pelas consequências das decisões realizadas quando e somente quando os dados reais estão dentro do conjunto de incerteza “ $\Theta$ ” escolhido.

*Hipótese 3 (H3)* – As restrições em (9) são inflexíveis, ou seja, não são permitidas violações das restrições, mesmo que pequenas, quando os parâmetros verdadeiros estão em “ $\Theta$ ”.

Além disso, algumas definições importantes devem ser consideradas:

*Definição 1* – Um vetor “x” é uma solução robusta factível para o problema (9) se ela satisfaz todas as realizações das restrições no conjunto de incerteza, isto é,

$$Ax \leq b, \forall (A, b) \in \Theta \quad (10)$$

*Definição 2* – Dado um candidato a solução “x”, o valor robusto  $c(x_\Theta)$  do objetivo de (10) em “x” é o maior valor do objetivo real “ $c'x + d$ ” sobre todas as realizações de dados do intervalo de incerteza:

$$c(x_\Theta) = \max_{(c, d) \in \Theta} [c'x + d] \quad (11)$$

*Definição 3* – A contraparte robusta de um problema incerto de otimização linear do tipo (9) é o seguinte problema de otimização linear:

$$\min_x \left\{ c(x_\Theta) = \max_{(c,d,A,b) \in \Theta} [c'x + d] \right\} \quad (12)$$

*s.a*  $Ax \leq b, (c, d, A, b) \in \Theta$

ou

$$\min_{x,v} v \quad (13)$$

*s.a*  $c'x - v \leq -d$   
 $Ax \leq b, (c, d, A, b) \in \Theta$

As hipóteses  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$  e as definições iniciais 1, 2 e 3 servem de base para a formulação da contraparte robusta de um problema de OL incerto, que pode ser resumida como a “melhor solução imune a incerteza”, apesar de “sub-ótima”. Além disso, elas determinam quais características devem possuir as suas soluções factíveis. Ou seja, as soluções devem ser vetores fixos e devem ser factíveis robustas, isto é, devem satisfazer todas as restrições quaisquer que sejam as realizações dos dados dentro do conjunto de incerteza.

### 2.3. Parametrização do Conjunto de Incerteza

Após a definição formal da contraparte robusta de um problema de OL incerto, apresenta-se em seguida como se deve parametrizar o conjunto de incerteza “ $\Theta$ ” de maneira conveniente. Seguindo o método exposto no primeiro capítulo de Ben-Tal et al. [2009], assume-se que o conjunto de incerteza pode ser parametrizado de modo afim por um vetor de perturbação “ $\zeta$ ” variando em um dado conjunto de perturbação “ $Z$ ”.

$$\Theta = \left\{ \left[ \begin{array}{c|c} c' & d \\ \hline A & b \end{array} \right] = \underbrace{\left[ \begin{array}{c|c} \tilde{c}' & \tilde{d} \\ \hline \tilde{A} & \tilde{b} \end{array} \right]}_{\text{dados nominais } D_0} + \sum_{l=1}^k \zeta_l \underbrace{\left[ \begin{array}{c|c} \hat{c}'_l & \hat{d}'_l \\ \hline \hat{A}_l & \hat{b}_l \end{array} \right]}_{\text{deslocamentos } D_1} : \zeta \in Z \subset \mathfrak{R}^k \right\} \quad (14)$$

Onde “ $k \leq n$ ” representa o número de parâmetros incertos. Em outras palavras, as regiões de incerteza dos “ $k$ ” parâmetros podem ser representadas por seus valores nominais

mais um número “ $\zeta$ ” de desvios (que pode variar no conjunto “ $Z$ ”), definindo assim o conjunto “ $\Theta$ ” de valores que conterá os valores reais dos parâmetros com certa probabilidade.

Tomando como base a formulação (13), tem-se a representação de um problema de OL robusta com objetivo determinístico e onde a incerteza está concentrada nas restrições do modelo. Segundo a abordagem proposta em Ben-Tal et al. [2009], para um problema incerto de OL, é possível assumir sem perda de generalidade que o conjunto de incerteza “ $\Theta \in \mathfrak{R}^{m \times n+1}$ ” pode ser reformulado como o produto direto de suas projeções nos espaços de dados de suas respectivas restrições.

$$\Theta = \Theta_1 \times \dots \times \Theta_m \quad (15)$$

onde “ $m$ ” é o número de restrições e “ $\Theta_i$ ” é a projeção de “ $\Theta$ ” no espaço de dados da “ $i$ -ésima” restrição. Assim, cada “ $\Theta_i$ ” pode ser parametrizado de maneira independente e da mesma maneira que na formulação (14), com um vetor de perturbações “ $\zeta$ ” variando em um conjunto convexo “ $Z_i$ ”. Reformulando o problema de otimização (13) como sendo

$$\begin{aligned} \min_{x, v} v \\ \text{s.a. } A^* x \leq b^*, (c, d, A, b) \in \Theta \end{aligned} \quad (16)$$

temos que as restrições podem ser parametrizadas como

$$A^* x \leq b^* \Rightarrow (A^* x)_i \leq \tilde{b}_i \Rightarrow \tilde{a}_i' x \leq \tilde{b}_i, [\tilde{a}_i \mid \tilde{b}_i] \in \Theta_i, i = 1, \dots, m \quad (17)$$

$$\Theta_i = \left\{ [\tilde{a}_i \mid \tilde{b}_i] = \underbrace{[\tilde{a}_i \mid \tilde{b}_i]}_{\text{dados nominais}} + \sum_{l=1}^k \zeta_l \underbrace{[\hat{a}_{l,i} \mid \hat{b}_{l,i}]}_{\text{deslocamentos}} : \zeta \in Z_i \right\} \quad (18)$$

onde “ $\tilde{a}_i$ ” e “ $\tilde{b}_i$ ” são os coeficientes correspondentes à “ $i$ -ésima” linha de “ $A^*$ ” e “ $b^*$ ”. Em outras palavras, é possível tratar e parametrizar cada restrição de maneira distinta, definindo conjuntos de incerteza distintos para cada uma delas. A formulação (18) é interessante para os objetivos deste trabalho, uma vez que as incertezas das estimativas de retorno e variância

serão tratadas de maneira distinta no campo das restrições do programa de otimização que será formulado.

## 2.4. Tratabilidade das Contrapartes Robustas

Ainda no primeiro capítulo de Ben-Tal et. al. [2009], prova-se que a contraparte robusta de um problema de OL incerto com um conjunto de incerteza “ $\Theta$ ” é tratável computacionalmente se o conjunto convexo “ $\Theta$ ” também for computacionalmente tratável. Portanto, a parametrização de “ $\Theta$ ” a partir de “ $Z$ ” e a definição da geometria deste conjunto de perturbação são de grande importância para a tratabilidade e a resolução da contraparte robusta (12).

Já foi exposto anteriormente que se pode representar o domínio “ $\Theta$ ” em termos de uma parametrização afim dos dados incertos “ $A$ ” e “ $b$ ” do campo das restrições a partir dos seus valores nominais e de dispersão e por um vetor de perturbação “ $\zeta$ ” variando em um dado conjunto de perturbação “ $Z$ ”, como nas formulações (14) e (18). Neste momento, são apresentadas representações tratáveis de contrapartes robustas definidas a partir da parametrização dos conjuntos de incerteza por estruturas com geometria simples.

### 2.4.1. Caixa unitária

Considerando o caso de um conjunto de perturbação representado por uma caixa unitária, podemos assumir que “ $Z$ ” em (18) tem a seguinte formulação:

$$Z = Caixa_1 \equiv \{\zeta \in \mathfrak{R}^n : \|\zeta\|_\infty \leq 1\} \quad (19)$$

onde  $\|\zeta\|_\infty = \max(|\zeta_1|, \dots, |\zeta_n|)$ . Neste caso, podemos reescrever a restrição (17) como sendo

$$\tilde{a}'x + \sum_{l=1}^n \zeta_l (\hat{a}_l)'x \leq \tilde{b} + \sum_{l=1}^n \zeta_l \hat{b}_l \quad \forall (\zeta : \|\zeta\|_\infty \leq 1) \quad (20)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{l=1}^n \zeta_l [(\hat{a}_l)' x - \hat{b}_l] \leq \tilde{b} - \tilde{a}' x \quad \forall (\zeta : |\zeta_l| \leq 1, l = 1, \dots, n) \quad (21)$$

$$\Leftrightarrow \max_{-1 \leq \zeta_l \leq 1} \left\{ \sum_{l=1}^n \zeta_l [(\hat{a}_l)' x - \hat{b}_l] \right\} \leq \tilde{b} - \tilde{a}' x \quad (22)$$

Dado que claramente o máximo em (22) é dado por  $\sum_{l=1}^n |(\hat{a}_l)' x - \hat{b}_l|$ , chegamos à representação tratável de (17) pela formulação a seguir.

$$\tilde{a}' x + \sum_{l=1}^n |(\hat{a}_l)' x - \hat{b}_l| \leq \tilde{b} \quad (23)$$

#### 2.4.2. Bola euclidiana

Considerando agora o caso de um conjunto de perturbação representado por bola euclidiana de raio “ $\rho$ ” e centrada na origem, podemos assumir que “Z” em (18) tem a seguinte formulação:

$$Z = \text{Bola}_\rho \equiv \{ \zeta \in \mathfrak{R}^n : \|\zeta\|_2 \leq \rho \} \quad (24)$$

onde  $\|\zeta\|_2$  é a norma euclidiana do vetor “ $\zeta$ ”. Segundo Ben-Tal et al. [2009], reformula-se (17) como sendo

$$\tilde{a}' x + \sum_{l=1}^n \zeta_l (\hat{a}_l)' x \leq \tilde{b} + \sum_{l=1}^n \zeta_l \hat{b}_l \quad \forall (\zeta : \|\zeta\|_2 \leq \rho) \quad (25)$$

$$\Leftrightarrow \max_{\|\zeta\|_2 \leq \rho} \left\{ \sum_{l=1}^n \zeta_l [(\hat{a}_l)' x - \hat{b}_l] \right\} \leq \tilde{b} - \tilde{a}' x \quad (26)$$

Ainda segundo Ben-Tal et al. [2009], tem-se de (26) que

$$\Leftrightarrow \rho \sqrt{\sum_{l=1}^n [(\hat{a}_l)'x - \hat{b}_l]^2} \leq \check{b} - \check{a}'x \quad (27)$$

Assim, chega-se à representação tratável de (17) pela formulação a seguir.

$$\check{a}'x + \rho \sqrt{\sum_{l=1}^n [(\hat{a}_l)'x - \hat{b}_l]^2} \leq \check{b} \quad (28)$$

### 2.4.3. Norma D

Um caso particular da representação do conjunto de perturbação por caixa unitária é quando apenas um subconjunto formado por todas as combinações de “k” entre “n” parâmetros possíveis, com “k ≤ n”, está sujeito a incerteza. Por exemplo, para k = 2 e n = 3, o conjunto “Z” é parametrizado pelas seguintes faces da caixa unitária:

$$\begin{aligned} F_1 &= \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 : -1 \leq \zeta_2 \leq 1; -1 \leq \zeta_3 \leq 1; \zeta_1 = 0\} \\ F_2 &= \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 : -1 \leq \zeta_1 \leq 1; -1 \leq \zeta_3 \leq 1; \zeta_2 = 0\} \\ F_3 &= \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 : -1 \leq \zeta_1 \leq 1; -1 \leq \zeta_2 \leq 1; \zeta_3 = 0\} \\ Z &= F_1 \cup F_2 \cup F_3 \end{aligned} \quad (29)$$

Para caracterizar tal situação, considera-se que os parâmetros incertos podem variar dentro do conjunto de perturbação “Z” e introduz-se um parâmetro de controle “k, k ∈ ℝ”, que assume valores no intervalo [0, n], onde “n” é o número de ativos. O objetivo é ter robustez suficiente para estar protegido contra todas as combinações de “k” parâmetros.

Considerando que “N” é o conjunto de todos os “n” parâmetros da matriz “A\*” do campo das restrições em (17), “S” é o subconjunto de parâmetros sujeitos a incerteza, onde S ⊆ N, |S| é a cardinalidade de “S”, “k” é o parâmetro de controle e |S| = k, Bertsimas & Sim [2004] definem como Norma-D a formulação a seguir para um vetor “y” genérico e para um valor de “k” inteiro.

$$\|y\|_k = \max_{\{S|S \subseteq N, |S|=k\}} \left\{ \sum_{l \in S} |y_l| \right\} \quad (30)$$

O método descrito em Bertsimas & Sim [2004] formula a representação tratável da restrição (17) com o uso da Norma-D da seguinte forma.

$$\tilde{a}'x + \max_{\{S|S \subseteq N, |S|=k\}} \left\{ \sum_{l \in S} |(\hat{a}_l)'x| \right\} \leq b \quad (31)$$

Nota-se que para  $k = 0$ , a formulação (31) se transforma no problema de OL nominal, onde são considerados os valores esperados dos parâmetros, e que para  $k = n$ , a formulação (31) equivale à representação tratável (23) para a caixa unitária, incorporando assim o grau máximo de robustez ao problema incerto de OL. Vale observar que, segundo Bertsimas and Sim [2004], é facilmente verificável que

$$\begin{aligned} \|y\|_k &\geq 0; \\ \|cy\|_k &= c \|y\|_k; \\ \|y\|_k = 0 &\Leftrightarrow y = 0; \\ \|x + y\|_k &\leq \|x\|_k + \|y\|_k \end{aligned} \quad (32)$$

e, portanto,  $\|y\|_k$  é uma norma.

## 2.5. Aproximações de Contrapartes Robustas para Restrições com Parâmetros Estocásticos

Nas discussões anteriores sobre contrapartes robustas, ainda não foi considerada ou tratada a natureza estocástica dos dados incertos que estão contidos no conjunto de incerteza “ $\Theta$ ” ou, mais precisamente, dos vetores de perturbação “ $\zeta$ ” que estão contidos no conjunto de perturbação “ $Z$ ”. No segundo capítulo de Ben-Tal et al. [2009], prova-se a necessidade do desenvolvimento de técnicas que sejam capazes de utilizar o conhecimento sobre as

características estocásticas dos dados incertos na construção de soluções imunes a incerteza. Retomando a representação tratável de uma restrição linear incerta:

$$\tilde{a}'_i x \leq \tilde{b}_i \quad \forall [\tilde{a}_i | \tilde{b}] \in \left\{ [\bar{a} | \bar{b}] + \sum_{l=1}^n \zeta_l [\hat{a}_l | \hat{b}_l] : \zeta \in Z \right\} \quad (33)$$

pode-se assumir que o vetor “ $\zeta$ ” é aleatório com distribuição de probabilidades “ $P$ ” conhecida (simbolicamente,  $\zeta \sim P$ ). Idealmente, deseja-se trabalhar com candidatos a soluções “ $x$ ” que façam a restrição (33) válida com probabilidade igual a 1, ou seja, para todas as realizações de “ $\zeta$ ”. Mas como o conjunto “ $Z$ ”, convexo e fechado, limita as realizações do vetor de perturbações, este objetivo ideal é utópico e uma saída seria buscar um candidato a solução “ $x$ ” que satisfizesse a restrição (33) para uma gama de realizações de “ $\zeta$ ”, adotando um nível de tolerância  $\varepsilon \in (0,1)$ . Essa abordagem permite a representação da restrição (33) pela “restrição probabilística” a seguir (*chance constraint*):

$$p(x) \equiv \Pr_{\zeta \sim P} \left\{ \zeta : \sum_{l=1}^n \zeta_l [(\hat{a}_l)' x - \hat{b}_l] > \bar{b} - \bar{a}' x \right\} \leq \varepsilon \quad (34)$$

onde  $\Pr_{\zeta \sim P}$  é a probabilidade associada com a distribuição “ $P$ ”. Neste caso, “ $x$ ” satisfaz à restrição com probabilidade “ $1 - \varepsilon$ ”. Em outras palavras, para um vetor “ $x$ ” fixo, podem existir realizações da variável aleatória “ $\zeta$ ” que violem a restrição com probabilidade menor ou igual a “ $\varepsilon$ ”.

Substituindo as restrições incertas originais do problema de otimização linear pelas restrições com chance e minimizando a função objetivo (assumida como determinística), recai-se na versão com restrições probabilísticas do problema de OL incerto (13). Segundo Ben-Tal et al.[2009], tal abordagem seria intratável computacionalmente pela dificuldade em se avaliar com precisão a probabilidade “ $p(x)$ ” em função do desconhecimento sobre a distribuição “ $P$ ”. Além disso, segundo Fabozzi et al. [2007], os problemas de otimização estocástica com restrições probabilísticas em geral são estruturados por meio de uma formulação não convexa, o que significa que não há garantias de se obter um máximo global na solução do problema.

Por conta dessa dificuldade, uma linha de ação é representar as restrições incertas não por restrições probabilísticas, mas por suas “aproximações seguras computacionalmente

tratáveis”. Ou seja, utilizar versões determinísticas das restrições, definidas a partir de parametrizações seguras do conjunto de perturbação “Z” para níveis de tolerância pré-determinados.

A seguir, serão apresentados alguns exemplos de aproximações seguras e tratáveis de restrições probabilísticas. Considerando a restrição probabilística (34) e arbitrando as seguintes características para as variáveis aleatórias “ $\zeta_l$ ”:

$$E\{\zeta_l\} = 0, |\zeta_l| \leq 1 \text{ e } \{\zeta_l\}_{l=1}^L \text{ independentes} \quad (35)$$

pode-se, a partir da desigualdade (17), definir a variável “ $\eta$ ” como sendo:

$$\eta \equiv \sum_{l=1}^n [(\hat{a}_l)'x - \hat{b}_l] \zeta_l \leq \tilde{b} - [\tilde{a}]x \quad (36)$$

onde, para “x” fixo e considerando (35), “ $\eta$ ” é uma variável aleatória com média zero e desvio padrão

$$StD[\eta] = \sqrt{\sum_{l=1}^n [(\hat{a}_l)'x - \hat{b}_l]^2 E\{\zeta_l^2\}} \Rightarrow StD[\eta] \leq \sqrt{\sum_{l=1}^n [(\hat{a}_l)'x - \hat{b}_l]^2} \quad (37)$$

Intuitivamente, pode-se afirmar que uma variável aleatória possui baixa probabilidade de ocorrência para valores maiores que “ $\rho$ ” vezes seu desvio padrão, para “ $\rho$ ” suficientemente grande. Pode-se com isso utilizar um parâmetro de segurança específico, por exemplo “ $\rho \in [2, 10]$ ”, e chegar a uma versão paramétrica segura de (34):

$$\tilde{\eta} + \rho \sqrt{\sum_{l=1}^n ((\hat{a}_l)'x - \hat{b}_l)^2} \leq \tilde{b} - [\tilde{a}]x \stackrel{\tilde{\eta}=0}{\Rightarrow} \rho \sqrt{\sum_{l=1}^n ((\hat{a}_l)'x - \hat{b}_l)^2} \leq \tilde{b} - [\tilde{a}]x \quad (38)$$

Quanto maior for o parâmetro de segurança “ $\rho$ ”, menores as chances de a restrição probabilística não ser satisfeita. Com isso, ao se definir um nível de tolerância “ $\epsilon$ ”, pode-se estabelecer o parâmetro de segurança a ser utilizado na aproximação.

Atentando para a formulação (27), cabe observar que a restrição (38) é a aproximação segura tratável da contraparte robusta de um problema de OL incerto com um conjunto de

perturbação  $Z$  especificado por uma bola euclidiana centrada na origem e de raio “ $\rho$ ”. Segundo Ben-Tal et al.[2009], no caso particular de  $\rho \geq \sqrt{2 \ln(1/\varepsilon)}$ , temos que

$$\Pr ob \left\{ \sum_{l=1}^n \zeta_l \left[ (\hat{a}_l)' x - \hat{b}_l \right] > \bar{b} - \bar{a}' x \right\} \leq \exp \left\{ -\rho^2 / 2 \right\} \quad (39)$$

Caso “ $Z$ ” fosse uma caixa unitária tal que  $-1 \leq \zeta_l \leq 1$ ,  $l = 1, \dots, L$ , a aproximação da contraparte robusta a ser adotada seria:

$$\sum_{l=1}^L \left| [\hat{a}^l]' x - \hat{b}^l \right| \leq \bar{b} - [\bar{a}]' x \quad (40)$$

E por (35) ela garantiria 100% de imunização contra as realizações de “ $\zeta_l$ ”.

Já para o caso particular da Norma D formulada em (30), é demonstrado em Bertsimas et al. [2004] que a probabilidade de que a “ $i$ -ésima” restrição seja violada em função de se adotar sua aproximação segura obedece à desigualdade a seguir.

$$\Pr ob \left\{ [\bar{a}]' x + \sum_{l=1}^L \zeta_l [a^l]' x > \bar{b} + \sum_{l=1}^L \zeta_l b^l \right\} \leq B(n, k) \quad (41)$$

onde “ $n$ ” é o número de parâmetros, “ $k$ ” é o coeficiente de robustez da Norma D e

$$B(n, k) = \frac{1}{2^n} \left\{ (1 - \mu) \binom{n}{\lfloor \nu \rfloor} + \sum_{p=\lfloor \nu \rfloor+1}^n \binom{n}{p} \right\} \quad (42)$$

$$\nu = \frac{(k+n)}{2}, \quad \mu = \nu - \lfloor \nu \rfloor$$

Após as considerações sobre os limites probabilísticos de violação das restrições de uma contraparte robusta, abre-se caminho para a apresentação de aplicações diretas da teoria de otimização robusta para o problema de seleção de ativos financeiros. No próximo capítulo, serão apresentadas algumas soluções para o exemplo uniperíodo, com a incorporação de

técnicas robustas ao modelo original proposto em Markowitz [1952]. E no capítulo seguinte, serão apresentadas soluções para um problema incerto multiperíodo, o qual é o foco e principal motivador para os aperfeiçoamentos propostos por esta tese.

### 3. OTIMIZAÇÃO UNITEMPORAL DE UM PORTFÓLIO SOB INCERTEZA

O primeiro e maior passo na direção de um tratamento sistemático e quantitativo para o gerenciamento de portfólios foi dado por Harry Markowitz, em seu artigo seminal de 1952 (ver Markowitz, 1952). As idéias introduzidas naquele trabalho, baseadas na análise do compromisso retorno-risco dos ativos financeiros e dos benefícios da diversificação, serviram de pilares para a construção da Teoria Moderna de Portfólios.

O método proposto por Markowitz baseia-se na idéia de que, entre uma gama de alocações possíveis que definam portfólios com o mesmo desvio padrão agregado, um investidor racional escolherá aquela alocação que ofereça a carteira com maior retorno esperado agregado. Ou então, entre uma gama de alocações possíveis que definam portfólios com o mesmo retorno esperado total, um investidor racional escolherá aquela alocação que ofereça o menor desvio padrão agregado.

Para formalizar essa idéia, seja um investidor que queira constituir um portfólio com uma alocação em “n” ativos. A escolha do investidor é representada pelo vetor de pesos  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , onde cada peso “i” corresponde ao percentual alocado no ativo “i” com relação ao patrimônio total da carteira. Assume-se que

$$\sum_i^n x_i = 1 \quad (43)$$

Supõe-se também que os retornos dos ativos tenham valores esperados representados pelo vetor  $\tilde{r} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_n)$  e uma matriz de covariância dada por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \cdots & \sigma_{1n}^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1}^2 & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

onde  $\sigma_{ii}^2 = \hat{r}_i^2$ ,  $\sigma_{ij}^2 = \rho_{ij} \hat{r}_i \hat{r}_j$ , “ $\hat{r}_i$ ” é o desvio padrão do ativo “i” e  $\rho_{ij}; -1 \leq \rho_{ij} \leq 1$  é a correlação entre os ativos “i” e “j”. Sob estas hipóteses, considera-se que o retorno agregado de um portfólio é uma variável aleatória com valor esperado e variância dados por

$$\begin{aligned}\tilde{r}_p &= \tilde{r}'x \\ \Sigma_p &= x'\Sigma x\end{aligned}\tag{45}$$

Vale observar que, em Markowitz [1952], os retornos esperados e a matriz de covariância são considerados como conhecidos. Com isso, o problema do investidor é um problema restrito de minimização com a seguinte formulação.

$$\begin{aligned}\min_x \quad & x'\Sigma x \\ \text{s.a.} \quad & \tilde{r}'x = \mu \\ & x'e = 1\end{aligned}\tag{46}$$

onde “ $\mu$ ” é um parâmetro de referência para o retorno esperado total do portfólio e “e” é um vetor que contém “n” elementos iguais a um.

Trata-se de um problema quadrático (não-linear) de otimização, cuja solução é formulada em Fabozzi et al. [2007] como

$$\begin{aligned}x &= g + h\mu \\ g &= \frac{1}{ac - b^2} \Sigma^{-1} [ce - b\tilde{r}] \\ h &= \frac{1}{ac - b^2} \Sigma^{-1} [a\mu - be] \\ a &= e'\Sigma^{-1}e \\ b &= e'\Sigma^{-1}\mu \\ c &= \mu'\Sigma^{-1}\mu\end{aligned}\tag{47}$$

A versão (46) do problema possui solução analítica (47), isto é, caso permitamos posições vendidas a descoberto (*short selling*). Todavia, para versões mais complexas, soluções analíticas nem sempre são possíveis de se obter, tornando necessária a implementação de técnicas numéricas de otimização.

Considerando um plano cartesiano onde as coordenadas “x” e “y” são o desvio padrão agregado e o valor esperado agregado do portfólio respectivamente, cada alocação factível do portfólio é representada por um ponto neste plano. O conjunto de todas as alocações ótimas forma o que se chama de fronteira eficiente. Cada alocação na fronteira eficiente é obtida ao se resolver o programa de otimização (46) para diferentes valores de “μ”.

A seguir, seguem formulações alternativas ao modelo clássico de otimização por média-variância (46), que convergem para o mesmo resultado de fronteira eficiente.

$$\begin{aligned} \max_x \quad & \tilde{r}'x \\ \text{s.a.} \quad & x'\Sigma x = s \\ & x'e = 1 \end{aligned} \tag{48}$$

onde “s” é um parâmetro de referência para a variância agregada do portfólio. Ou

$$\begin{aligned} \max_x \quad & \tilde{r}'x - \varphi x'\Sigma x \\ \text{s.a.} \quad & x'e = 1 \end{aligned} \tag{49}$$

onde “φ” é um parâmetro de aversão ao risco do investidor. Estas versões alternativas são bastante úteis para algumas aplicações práticas específicas.

A simplicidade e o apelo intuitivo da abordagem proposta em Markowitz [1952] despertaram a atenção da academia e diversos estudiosos usaram a metodologia como ponto de partida para desenvolver e consolidar as bases da teoria moderna de portfólios. Todavia, levaram-se alguns anos para que gestores de recursos começassem a utilizar a teoria em aplicações práticas. Segundo Fabozzi et al. [2007], algumas hipóteses do método, como a ausência de custos de transação, por exemplo, não são aplicáveis à vida real e, principalmente, o modelo de otimização resultante é bastante sensível a erros de estimação de parâmetros, o que dificultou a sua aplicação em larga escala no gerenciamento real de portfólios financeiros.

**“[...] Em aplicações reais de programas de otimização, não se deve ignorar a possibilidade de que uma pequena incerteza nos dados possa tornar a solução ótima completamente sem sentido de um ponto de vista prático [...]”. (Ben-Tal & Nemirovski, 2000).**

Naturalmente, a necessidade levou ao desenvolvimento de modelos imunes, tanto quanto possível, à incerteza de dados. A seguir, serão apresentadas algumas soluções robustas para o problema de seleção de ativos para um período.

### 3.1. Formulação Robusta de Soyster para um Problema de Otimização com Parâmetros Incertos

A primeira metodologia que aplicava técnicas de otimização robusta em problemas de otimização de portfólios foi proposta em Soyster [1973], onde foi apresentado um modelo de programação linear para chegar a uma solução factível para todos os parâmetros que pertenciam a um conjunto convexo de incerteza. Foi considerado o seguinte programa de otimização linear:

$$\begin{aligned} \max \quad & c'x \\ \text{s.a.} \quad & \tilde{A}x \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{50}$$

onde os conjuntos de incerteza “ $J_j$ ” são convexos. No artigo, o autor representa a contraparte robusta de (50) como

$$\begin{aligned} \max \quad & c'x \\ \text{s.a.} \quad & \bar{A}x \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{51}$$

onde  $\bar{a}_{ij} = \sup_{A_j} (a_{ij})$ , “ $j$ ” indica o “ $j$ -ésimo” ativo e “ $i$ ” indica a “ $i$ -ésima” restrição. Vale observar que o modelo possui função objetivo determinística e somente os parâmetros da matriz “ $A$ ” estão sujeitos a incerteza. Para determinar a representação segura e tratável da restrição em (51), adotou-se a hipótese de que cada componente “ $a_{ij}$ ” da matriz “ $A$ ” poderia ser modelado como uma variável aleatória simétrica e limitada “ $\tilde{a}_{ij}$ ”, que assumia valores no intervalo  $[\tilde{a}_{ij} - \hat{a}_{ij}, \tilde{a}_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ . Em outras palavras, o conjunto de perturbação “ $Z$ ” foi

parametrizado como uma caixa unitária tal que  $-1 \leq \zeta_j \leq 1$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Aplicando o resultado (40), pode-se escrever representação segura da contraparte robusta (51) como sendo:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad c'x \\
 & s.a. \quad \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}x_j + \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij}y_j \leq b_i \quad \forall i \\
 & \quad -y_j \leq x_j \leq y_j \\
 & \quad x \geq 0
 \end{aligned} \tag{52}$$

Fazendo um paralelo com a formulação (13), pode-se reformular (52) como

$$\begin{aligned}
 & \max_x \quad z \\
 & s.a. \quad z \leq \sum_{j=1}^n \tilde{r}_j x_j - \sum_{j=1}^n \hat{r}_j y_j \\
 & \quad -y_j \leq x_j \leq y_j \\
 & \quad x'e = 1 \\
 & \quad x \geq 0
 \end{aligned} \tag{53}$$

Onde “ $\hat{r}$ ” modela o papel da dispersão do retorno. Um dos principais problemas do modelo proposto por Soyster foi o excesso de conservadorismo resultante, dado que os valores ótimos assumiram os valores extremos dos intervalos de incerteza das restrições. Neste caso, abriu-se mão de otimalidade excessivamente para garantir a robustez do modelo.

### 3.2. Formulação Robusta de Ben-Tal para um Problema de Otimização com Parâmetros Incertos

De maneira a corrigir o excesso de conservadorismo do método de Soyster [1973], Ben-Tal et al. [2009] parametrizou o conjunto de perturbação “Z” como a interseção entre uma caixa unitária e uma bola euclidiana de raio “ $\rho$ ” e centrada na origem

$$Z = Caixa_1 \cap Bola_\rho \equiv \left\{ \zeta \in \mathfrak{R}^n : \|\zeta\|_\infty \leq 1, \|\zeta\|_2 \leq \rho \right\} \tag{54}$$

Sob esta parametrização, a aproximação segura da contraparte robusta do problema incerto é equivalente à seguinte formulação.

$$\begin{aligned}
& \max_x \quad c'x \\
& \text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}x_j + \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij}y_{ij} + \rho_i \sqrt{\sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij}^2 z_{ij}^2} \leq b_i, \quad \forall i \\
& \quad -y_{ij} \leq x_j - z_{ij} \leq y_{ij}, \quad \forall i, j \\
& \quad y \geq 0
\end{aligned} \tag{55}$$

Para a solução do problema unitemporal de seleção de ativos, pode-se reformular (55) como

$$\begin{aligned}
& \max_x \quad z \\
& \text{s.a.} \quad z \leq \sum_{j=1}^n \tilde{r}_j x_j - \sum_{j=1}^n \hat{r}_j y_j - \rho \sqrt{\sum_{j=1}^n (\hat{r}_j z_j)^2} \\
& \quad -y_j \leq x_j - z_j \leq y_j, \quad j=1, \dots, n \\
& \quad x'e = 1 \\
& \quad y \geq 0
\end{aligned} \tag{56}$$

Neste caso, Bertsimas and Sim [2004] demonstram que a probabilidade de que a “i-ésima” restrição seja violada em função de se adotar a sua aproximação segura é de no máximo  $1 - \exp\{-\Omega^2/2\}$ . Segundo estes autores, o modelo (56) tende a ser menos conservador que o modelo proposto em Soyster [1973], dado que o conjunto de incerteza do primeiro é um subconjunto do segundo. Todavia, o modelo (56) recai em um programa não-linear do tipo cônico, o qual não é particularmente atraente para a solução de modelos robustos de otimização discreta de dimensões maiores.

### 3.3. Formulação Robusta de Bertsimas e Sim para um Problema de Otimização com Parâmetros Incertos

Bertsimas and Sim [2004] propuseram um método que, de maneira a evitar soluções excessivamente conservadoras, incorpora algum controle sobre o problema de otimização robusta, além de tornar o programa resultante linear. Conforme já foi exposto anteriormente, a representação robusta e segura de qualquer restrição segundo o método descrito em Bertsimas and Sim [2004] pode ser definida com a utilização da Norma D, cuja formulação é apresentada novamente para um vetor “y” genérico e “k” inteiro.

$$\|y\|_k = \max_{\{S|S \subseteq N, |S|=k\}} \left\{ \sum_{l \in S} |y_l| \right\} \quad (57)$$

onde “N” é o conjunto de todos os “n” parâmetros da matriz de restrições, “S” é o subconjunto de parâmetros sujeitos a incerteza, onde  $S \subseteq N$ ,  $|S|$  é a cardinalidade de “S”, “k” é o parâmetro de controle e  $|S|=k$ . Assim, a contraparte robusta do programa de otimização geral, segundo a abordagem de Bertsimas and Sim [2004], pode ser formulada como

$$\begin{aligned} \max \quad & c'x \\ \text{s.a.} \quad & \tilde{a}'x + \max_{\{S|S \subseteq N, |S|=k\}} \left\{ \sum_{l \in S} (\hat{a}_l)'y \right\} \leq b \\ & -y \leq x \leq y \\ & y \geq 0 \end{aligned} \quad (58)$$

ou também segundo a formulação a seguir, já para o caso particular da otimização de um portfólio de ativos.

$$\begin{aligned} \max_x \quad & z \\ \text{s.a.} \quad & z \leq \sum_{j=1}^n \tilde{r}_j x_j - \max_{\{S|S \subseteq N, |S|=k\}} \left\{ \sum_{l \in S} \hat{r}_l |x_l| \right\} \\ & x'e = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (59)$$

Segundo a proposição 1 apresentada em Bertsimas and Sim [2004], o termo  $\max_{\{S|S \subseteq N, |S|=k\}} \left\{ \sum_{l \in S} \hat{r}_l |x_l| \right\}$  da formulação (59) equivale à função objetivo do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{l \in N} \hat{r}_l |x_l| z_l \\
 & s.t. \sum_{l \in N} z_l \leq k \\
 & \quad 0 \leq z_l \leq 1
 \end{aligned} \tag{60}$$

Considerando que o dual do problema de otimização (60) é representado pela formulação a seguir

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{l=1}^n q_l + k\delta \\
 & s.t. \quad \delta + q_l \geq \hat{r}_l |x_l|, \quad l = 1, \dots, n \\
 & \quad \delta \geq 0 \\
 & \quad q_l \geq 0, \quad l = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{61}$$

Onde “ $\delta$ ” e “ $q_l$ ” são variáveis auxiliares. No teorema 1 de Bertsimas and Sim [2004], afirma-se que por dualidade forte, dado que o problema (60) é factível e limitado para quaisquer  $k \in [0, n]$ , então o problema (61) também é factível e limitado e sua função objetivo coincide com a da formulação (60). Portanto, substituindo na formulação (59), Bertsimas and Sim [2004] demonstram que a contraparte robusta do problema incerto de otimização de um portfólio pode ser definida a partir da formulação a seguir.

$$\begin{aligned}
 & \max \quad z \\
 & s.t. \quad z \leq \sum_{l=1}^n \tilde{r}_l x_l - \sum_{l=1}^n q_l - k\delta \\
 & \quad \delta + q_l \geq \hat{r}_l x_l, \quad l = 1, \dots, n \\
 & \quad \sum_{l=1}^n x_l = 1 \\
 & \quad x_l, q_l, \delta \geq 0, \quad l = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{62}$$

resultando assim em um programa de otimização linear.

Observa-se que nas três formulações apresentadas para a solução do problema de otimização com parâmetros incertos, os desvios “ $\hat{r}$ ” dos parâmetros incertos são tidos como conhecidos. Em Halldorsson and Tutuncu [2003], é proposto um modelo de otimização sujeito a incerteza também nos parâmetros de dispersão, o qual será descrito a seguir.

### 3.4. Formulação Robusta de Halldorsson e Tutuncu para um Problema de Alocação de Ativos

Seja o programa de otimização quadrática formulado a seguir.

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c'x + (1/2)x'Qx \\ \text{s.a.} \quad & Ax \geq b \end{aligned} \tag{63}$$

onde “ $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ”, “ $b \in \mathfrak{R}^m$ ”, “ $c \in \mathfrak{R}^n$ ” e “ $Q \in \mathfrak{S}_+^n$ ” são dados de entrada, “ $x \in \mathfrak{R}^n$ ” são as variáveis de decisão e “ $\mathfrak{S}_+^n$ ” denota o espaço das matrizes positivas semi-definidas n-dimensionais. Considera-se que a função objetivo é incerta, que representa uma função convexa e que seu conjunto de incerteza é parametrizado da seguinte maneira.

$$\Theta = \{(c, Q) \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{S}_+^n : c^L \leq c \leq c^U, Q^L \leq Q \leq Q^U, Q \text{ pos. semidef.}\} \tag{64}$$

onde “ $c^L$ ” e “ $c^U$ ” são vetores n-dimensionais e “ $Q^L$ ” e “ $Q^U$ ” são matrizes contidas em  $\mathfrak{S}_+^n$ . Observa-se que se optou por uma geometria semelhante a uma caixa unitária na modelagem do conjunto de incerteza. Nesse caso, podem-se definir as projeções do conjunto “ $\Theta$ ” como sendo

$$\begin{aligned} \Theta_c &= \{c \in \mathfrak{R}^n : c^L \leq c \leq c^U\} \\ \Theta_Q &= \{(Q) \in \mathfrak{S}_+^n : Q^L \leq Q \leq Q^U, Q \succ 0\} \end{aligned} \tag{65}$$

O objetivo é determinar uma solução robusta para o problema (63), onde a incerteza está concentrada na função objetivo. Em outras palavras, deseja-se resolver o seguinte problema.

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \left\{ \max_{(c,Q) \in \Theta} [c'x + (1/2)x'Qx] \right\} \\ \text{s.a.} \quad & Ax \geq b \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \min_x \quad & \left\{ \max_{c \in \Theta_c} c'x + \max_{Q \in \Theta_Q} (1/2)x'Qx \right\} \\ \text{s.a.} \quad & Ax \geq b \end{aligned} \quad (67)$$

O primeiro termo dentro das chaves em (67) é um problema linear de maximização cuja solução é dada por

$$\max_{c \in \Theta_c} c'x = \sum_i x_i^+ c_i^U - \sum_i x_i^- c_i^L$$

onde  $x^+ = \max\{0, x\}$  e  $x^- = \max\{0, -x\}$ . Já o segundo termo é um problema de programação semidefinida. O problema (67), com todos os programas de otimização em conjunto, não apresenta solução analítica. Com isso, os autores o resolvem numericamente a partir da busca de um ponto de sela através de um algoritmo de ponto interior.

Percebe-se que o problema dual da formulação (63), representado em Halldorsson & Tutuncu [2003] por

$$\begin{aligned} \max_{x,\theta} \quad & b'\theta - (1/2)x'Qx \\ \text{s.a.} \quad & A'\theta - Qx = c \\ & \theta \geq 0 \end{aligned} \quad (68)$$

onde “ $\theta$ ” é uma variável auxiliar, pode ser interpretado como um problema de otimização de portfólios, considerando que “ $c$ ” é o vetor de retornos incertos e “ $Q$ ” é a matriz de covariância destes retornos e também com parâmetros incertos. Apesar de esta abordagem ir de encontro com o que procuramos nesta tese, que é incorporar incerteza nos parâmetros de dispersão e resolver o problema de otimização robusta resultante, ela o soluciona apenas para o caso uniperíodo. Entende-se que a extensão do método para o caso multi-período o deixaria ainda

mais complexo e, portanto, prefere-se seguir a estratégia de estender o método apresentado em Bertsimas & Pachamanova [2008] com variância conhecida, incorporando parâmetros de dispersão incertos no programa multiperíodo linear resultante.

Neste capítulo, foram apresentadas algumas soluções robustas para o modelo de otimização de carteiras para um período. Entretanto, os problemas de alocação de ativos na vida real são inerentemente multitemporais, com balanceamentos periódicos da carteira. Portanto, no próximo capítulo, serão apresentadas algumas soluções para o problema de alocação de ativos com parâmetros incertos para o caso de múltiplos estágios.

## 4. OTIMIZAÇÃO MULTITEMPORAL DE UM PORTFÓLIO SOB INCERTEZA

Se as propriedades estatísticas dos retornos dos ativos financeiros fossem constantes ao longo de múltiplos períodos de tempo, a teoria de otimização de portfólios para um horizonte unitemporal seria suficiente para sempre gerar alocações ótimas. No entanto, essa hipótese raramente se mantém na prática, onde se percebe que as distribuições dos retornos dos ativos variam ao longo do tempo, além de apresentar algum grau de autocorrelação serial.

Uma solução para este dilema, que se agrava para carteiras formadas sob políticas de investimento de longo prazo<sup>2</sup>, é a extensão da abordagem de um período proposta em Markowitz [1952] para múltiplos períodos. No modelo de otimização multi-período clássico, o investidor deseja maximizar sua riqueza, ou utilidade, em algum instante futuro, considerando restrições orçamentárias e de risco intertemporais. Neste caso, assume-se que o período de investimento pode ser discretizado em períodos menores, onde ao final de cada um deles o investidor pode avaliar a rentabilidade do portfólio e balanceá-lo para o próximo período com o patrimônio disponível naquele estágio.

A prática mostra que os portfólios de longo prazo precisam ser revistos e balanceados com alguma frequência. Todavia, os gestores costumam reavaliá-los de maneira desordenada, ao sabor de eventos esporádicos, como por exemplo, quando novos dados se tornam públicos e influenciam as previsões de risco e retornos futuros, ou quando a política de investimento se altera, ou quando os preços dos ativos se alteram, exigindo uma reconstituição da alocação. A literatura mostra, contudo, que estratégias de rebalanceamento prudentes, disciplinadas e eficientes em custo podem contribuir positivamente para a performance de um portfólio. Segundo Fabozzi et al. [2007], o rebalanceamento disciplinado de uma carteira pode incrementar sua rentabilidade da mesma maneira que uma alteração na estratégia de investimentos, por exemplo. Além disso, alocações com alto “*turnover*” incorrem em mais custos de transação. Assim, a comprovação empírica da necessidade da realocação periódica e estruturada de carteiras financeiras, bem como a evidência de que soluções ótimas são

---

<sup>2</sup> Bastante comum nos fundos de pensão

altamente sensíveis a flutuações nos dados de entrada, estimularam o avanço recente na pesquisa de modelos de otimização sob incerteza, estendidos para múltiplos estágios.

Com a sofisticação dos algoritmos e softwares de otimização, que permitem o tratamento de problemas mais complexos, abriu-se espaço para o desenvolvimento de métodos que incorporam a incerteza diretamente na computação da solução ótima dos problemas para múltiplos estágios. Vários trabalhos foram desenvolvidos nesse ramo, sejam para dinâmicas a tempo contínuo (ver Pliska, 1984 e Atkinson, 1997) como a tempo discreto (ver Li & Ng, 2000, Costa and Nabholz, 2006 e Bertsimas and Pachamanova, 2008). Os modelos de tempo contínuo resultam em equações diferenciais complexas, cuja solução em geral é derivada sob hipóteses muito rígidas sobre o comportamento do investidor e sobre o processo dos preços dos ativos no futuro e, por isso, dificilmente podem ser generalizadas. Portanto, daremos foco nesta tese aos modelos multitemporais discretos.

Dentre as abordagens utilizadas para a solução dos problemas discretos, podem ser destacadas a programação dinâmica e a otimização robusta, as quais serão descritas a seguir com mais detalhes. Tratam-se de metodologias consistentes, geralmente aplicadas em ramos como os da engenharia, da estatística e da matemática, e que se mostraram de grande utilidade quando adaptadas para a solução do problema de otimização de portfólios.

#### **4.1. Programação Dinâmica**

Os métodos de programação dinâmica são projetados para lidar com sistemas estocásticos de múltiplos estágios. Uma aplicação comum desta abordagem é na solução de problemas de controle ótimo no ramo da engenharia, mas percebeu-se que a técnica funcionaria também para a resolução de problemas de otimização de portfólios com parâmetros incertos. Grosso modo, o problema de otimização, representado por um sistema dinâmico subjacente e uma função objetivo (função custo, no caso de minimização), é resolvido recursivamente, partindo do último estágio e seguindo até o estágio inicial e computando a solução ótima para cada possível estado do sistema em um estágio de tempo particular. A seguir, será apresentada a aplicação do método a problemas de controle ótimo para modelos de espaço de estados e sua extensão para um problema de otimização de portfólios.

Davis & Vinter [1985] propõem o estudo de reguladores lineares estocásticos onde o critério de custo é dado pela formulação

$$c_T(u) = E \left\{ \sum_{t=k}^{T-1} \|Dx^t + Fu^t\|_2 + (x^T)^T Q x^T \right\} \quad (69)$$

onde  $\|\cdot\|_2$  é a norma euclidiana de um vetor, “Q” é uma matriz positiva semi-definida, “T” é o número de estágios no problema, “x<sup>b</sup>” é o vetor de variáveis de estado e “u<sup>b</sup>” é a seqüência de controle que permitirá o sistema dinâmico subjacente se comportar de uma determinada maneira. A seqüência de controle que alcançar o mínimo custo será considerada como ótima. Vale observar que a expressão dentro da norma euclidiana é uma variável aleatória e que a formulação do custo é escalar por ser uma medida de esperança, portanto, a política de controle ótima será aquela que oferecerá o mínimo custo médio ou esperado.

O sistema dinâmico subjacente é descrito pelo regulador linear estocástico a seguir, onde a equação de estados inclui um ruído aditivo de maneira a caracterizar a natureza estocástica da variável de estado “x<sup>b</sup>”.

$$x^t = A(t)x^t + B(t)u^t + C(t)w^t \quad (70)$$

“w<sup>b</sup>” é um ruído branco no sentido amplo (média constante, variância finita e função de autocorrelação independente da origem dos tempos). Vale observar que “x<sup>0</sup>” e “w<sup>b</sup>” são descorrelacionados, assim como “w<sup>k</sup>” e “w<sup>j</sup>” são independentes para  $k \neq j$ .

O procedimento para determinar a política ótima  $\{u_+^0, u_+^1, \dots, u_+^{T-1}\}$  é baseado no “princípio da otimalidade de Bellman”, que determina que para cada instante intermediário de tempo  $t = j$ , a política subsequente  $\{u_+^j, u_+^{j+1}, \dots, u_+^{T-1}\}$  é ótima do instante “j” para frente. Isso implica que a estratégia ótima deve ser construída a partir do último estágio, quando se utiliza a solução ótima naquele instante para computar a política ótima do estágio anterior.

Supondo que  $u_+ = \{u_+^0, u_+^1, \dots, u_+^{T-1}\}$  é um controle ótimo para o regulador linear estocástico (70), ou seja,  $c_T(u_+) \leq c_T(u)$  para todos os outros controles “u” e que  $\{x_+^0, x_+^1, \dots, x_+^{T-1}\}$  são os correspondentes estados dados por (70) com  $u^t = u_+^t$ , seja o seguinte problema de minimização para um instante intermediário “j,  $0 \leq j < T$ ”.

$$\min_{\{u^j, \dots, u^T\}} E \left\{ \sum_{t=j}^{T-1} \|Dx^t + Fu^t\|_2 + (x^T)^T Q x^T \right\} \quad (71)$$

O princípio da otimalidade afirma que o controle  $u_{+(j)} = \{u_+^j, u_+^{j+1}, \dots, u_+^{T-1}\}$  é ótimo para o problema intermediário a partir do estado resultante. Em outras palavras, se “ $u_+$ ” é ótimo para o problema geral, então “ $u_{+(j)}$ ” é ótimo para os últimos “N-j” estágios começando em “ $x_+^j$ ”.

Assumindo agora que “ $J^j(x)$ ” é o custo mínimo para o problema intermediário em  $t = j$ , como expresso em (71), para  $t = j + 1$  a função “ $J^j(x)$ ” deverá satisfazer a seguinte condição

$$\begin{aligned} J^j(x) &= \min_u E \left\{ \|Dx + Fu\|_2 + E[J^{j+1}(x^{j+1})] \right\} \\ \Rightarrow J^j(x) &= \min_u E \left\{ \|Dx + Fu\|_2 + E[J^{j+1}(Ax^j + Bu^j + Cw^j)] \right\} \\ J^T(x) &= (x^T)^T Q x^T \end{aligned} \quad (72)$$

A formulação (72) é conhecida como “equação de Bellman” e é a peça fundamental para a solução de problemas ótimos pela técnica da programação dinâmica em tempo discreto.

Para o caso particular de um problema de otimização de carteiras, cuja dinâmica ao longo do tempo pode ser representada pela formulação

$$v_t = \left( 1 + \sum_{i=1}^n (r_i^{t-1}) w_i^{t-1} \right) v_{t-1} \quad (73)$$

onde

$v_t$  é o valor financeiro da carteira no instante “t” e variável de estado.

$r_i^{t-1}$  é o retorno do ativo de risco “i” no instante “t-1”

$n$  é a dimensão

$w_i^{t-1}$  é o peso do ativo de risco “i” na carteira no instante “t-1” e variável de decisão (ou seqüência de controle).

um caso típico de solução é maximizar a seguinte função

$$\begin{aligned}
& \max_w E\{U[v^T]\} \\
& \text{s.a. } v_t = \left(1 + \sum_{i=1}^n (r_i^{t-1}) w_i^{t-1}\right) v_{t-1}, \quad t = 0, \dots, T \\
& \sum_{i=1}^{n+1} w_i^t = 1, \quad t = 0, \dots, T
\end{aligned} \tag{74}$$

onde “ $U(X)$ ” é a função utilidade do investidor, em geral côncava e estritamente crescente. Aplicando a equação de Bellman para o instante intermediário “ $k$ ”, tem-se que

$$J^k(v) = \max_w E\{J^{k+1}(v^{k+1})\} \tag{75}$$

Tomando como conhecida a função utilidade (por exemplo,  $U(X) = \ln(X)$ ) e a distribuição de probabilidades para as realizações dos retornos em cada instante de tempo “ $t$ ” e partindo do instante “ $t = T$ ”, determina-se a equação de  $E\{U[v^T] | v^{T-1}\}$  em função de “ $v^{T-1}$ ” e “ $w^{T-1}$ ” para cada realização ou cenário de retorno. Maximizando a equação com relação a “ $w^{T-1}$ ”, chega-se à alocação ótima em função de “ $v^{T-1}$ ” para o estágio “ $T-1$ ”. Repetindo o raciocínio por sucessivas vezes, para  $t = T-1, T-2, \dots, 1$ , chega-se à seqüência ótima  $\{w_+^1, w_+^2, \dots, w_+^T\}$ , determinada em função do patrimônio inicial “ $v^0$ ” conhecido. Em outras palavras, chega-se ao balanceamento ótimo do portfólio em múltiplos estágios.

De maneira a obter uma solução na prática, é necessário definir uma boa estimativa para os possíveis cenários ou realizações futuras dos retornos em cada instante de tempo, bem como suas probabilidades de ocorrência. Infelizmente, com a incorporação de muitos estados ou para uma carteira de muitos ativos, o método sofre com o problema da dimensionalidade e com a dificuldade em se obter informação detalhada sobre as distribuições de probabilidade para as incertezas inerentes aos retornos.

## 4.2. Otimização Robusta

Como uma alternativa para escapar da complexidade por trás do método de programação dinâmica, a otimização robusta emergiu como uma técnica eficiente, que

endereça as mesmas questões com menos custo computacional. A seguir, será apresentada a formulação da contraparte robusta de um problema de otimização multitemporal, baseada nos modelos de Dantzig & Infanger [1993], Ben-Tal et al. [2000] e Bertsimas & Pachamanova [2008].

#### 4.2.1. Programa de otimização multitemporal

Ben-Tal et al. [2000] e Bertsimas & Pachamanova [2008] formulam um problema típico de alocação de ativos em múltiplos estágios a partir das seguintes hipóteses:

- i) O portfólio consiste de “n” ativos com risco e uma posição em caixa (ativo “n+1”) e o número de períodos de balanceamento do portfólio é igual a “T”.
- ii) Os retornos intertemporais dos ativos seguem uma distribuição normal.
- iii) Sejam:

$x_i^{t-1}$  a posição financeira no ativo “i” no instante “t-1”.

$\tilde{r}_i^{t-1}$  o retorno incerto do ativo “i” no período de “t-1” a “t”.

$\tilde{r}_{n+1}^{t-1}$  o retorno livre de risco no período de “t-1” a “t”.

$z_i^{t-1}$  o montante do ativo “i” comprado no instante “t-1”.

$y_i^{t-1}$  o montante do ativo “i” vendido no instante “t-1”.

$c_{venda}$ ,  $c_{compra}$  os custos de transação correspondentes à compra ou à venda de um ativo.

O objetivo a ser maximizado no instante terminal do portfólio pode ser formulado como:

$$U \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} x_i^T (1 + \tilde{r}_i^T) \right\} \quad (76)$$

onde “U(X)” é a função utilidade do investidor, e a posição financeira do ativo “i,  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ ” no começo do período de investimento “t,  $t \in \{1, \dots, T\}$ ” é dado por “ $x_i^t$ ” e tem a seguinte dinâmica:

$$x_i^t = (1 + \tilde{r}_i^{t-1}) \{x_i^{t-1} - y_i^{t-1} + z_i^{t-1}\}, \quad i \leq n \text{ (ativos de risco)} \quad (77)$$

$$x_{n+1}^t = (1 + r_{n+1}^{t-1}) \left\{ x_{n+1}^{t-1} + \sum_{i=1}^n (1 - c_{venda}) y_i^{t-1} - \sum_{i=1}^n (1 + c_{compra}) z_i^{t-1} \right\} \text{ (posição em caixa)} \quad (78)$$

Ao se tomar uma decisão no instante “ $t$ ”, os valores de “ $x_i^{t-1}$ ” e “ $r_i^{t-1}$ ”,  $i = 1, \dots, n+1$ , são conhecidos, de maneira que a decisão se restringe às quantidades “ $y_i^{t-1}$ ” e “ $z_i^{t-1}$ ”.

Na literatura clássica sobre otimização de portfólios, assume-se que a função utilidade “ $U(X)$ ” seja côncava para refletir a aversão ao risco. Nas formulações propostas em Ben-Tal et al. [2000] e Bertsimas & Pachamanova [2008], considera-se uma função objetivo linear, onde:

$$U \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} x_i^T (1 + \tilde{r}_i^T) \right\} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^T (1 + \tilde{r}_i^T) \quad (79)$$

Tal hipótese implica que o investidor é indiferente ao risco e, portanto, o modelo de otimização resultante deixa de possuir uma restrição específica que trate da aversão ao risco do investidor. Para evitar essa distorção, os modelos tratam a questão da aversão ao risco na definição dos conjuntos de incerteza para a determinação das contrapartes robustas do problema incerto de otimização. Nesta etapa, necessária no método de otimização robusta, uma medida de risco acaba sendo imposta no programa de otimização, ainda que indiretamente, como será visto mais à frente. Assim, o problema em sua forma clássica é expresso como na formulação a seguir.

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=1}^{n+1} x_i^T (1 + \tilde{r}_i^T) \\ & \text{s.a.} \\ & x_i^t = (1 + \tilde{r}_i^{t-1}) \{x_i^{t-1} - y_i^{t-1} + z_i^{t-1}\}, \quad i = 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T \\ & x_{n+1}^t = (1 + r_{n+1}^{t-1}) \left\{ x_{n+1}^{t-1} + \sum_{i=1}^n (1 - c_{sell}) y_i^{t-1} - \sum_{i=1}^n (1 + c_{buy}) z_i^{t-1} \right\}, \quad t = 1, \dots, T \\ & x_i^t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n+1; \quad t = 1, \dots, T \\ & y_i^t, z_i^t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T \end{aligned} \quad (80)$$

Para a construção da contraparte robusta, faz-se a seguinte mudança conveniente de variáveis de maneira a concentrar os parâmetros incertos apenas no campo das restrições.

$$\begin{aligned}
\xi_i^t &= (\tilde{R}_i^t)^{-1} x_i^t; \\
\eta_i^t &= (\tilde{R}_i^t)^{-1} y_i^t; \\
\zeta_i^t &= (\tilde{R}_i^t)^{-1} z_i^t; \\
\text{onde} \\
\tilde{R}_i^t &= (1 + r_i^0)(1 + r_i^1) \dots (1 + r_i^{t-1})
\end{aligned} \tag{81}$$

Além disso, considera-se que a função objetivo da otimização pode ser reformulada como

$$\begin{aligned}
&\max \chi \\
&s.t. \\
&\chi \leq \sum_{i=1}^{n+1} x_i^T (1 + \tilde{r}_i^T)
\end{aligned} \tag{82}$$

Por fim, a igualdade na restrição do caixa é trocada por uma desigualdade, dado que, segundo Bertsimas & Pachamanova [2008], a contraparte robusta de um problema de otimização cujas restrições incertas são expressas por igualdades são normalmente inactiváveis.

Com as alterações propostas em (81) e (82), o problema (80) pode ser reformulado como

$$\begin{aligned}
&\max \chi \\
&s.a. \\
&\chi \leq \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i^T (\tilde{R}_i^{T+1}) \\
&\xi_i^t = \xi_i^{t-1} - \eta_i^{t-1} + \zeta_i^{t-1}, \quad i = 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T \\
&\xi_{n+1}^t \leq \xi_{n+1}^{t-1} + \sum_{i=1}^n (1 - c_{venda}) \eta_i^{t-1} \frac{\tilde{R}_i^{t-1}}{R_{n+1}^{t-1}} - \sum_{i=1}^n (1 + c_{compra}) \zeta_i^{t-1} \frac{\tilde{R}_i^{t-1}}{R_{n+1}^{t-1}}, \quad t = 1, \dots, T \\
&\xi_i^t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n+1; \quad t = 1, \dots, T \\
&\eta_i^t, \zeta_i^t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T
\end{aligned} \tag{83}$$

Nesta formulação, “ $x^t$ ”, “ $y^t$ ” e “ $z^t$ ” são as variáveis de decisão e “ $x^0$ ” o valor inicial conhecido do portfólio.

#### 4.2.2. Conjuntos de incerteza e contrapartes robustas

As definições dos conjuntos de incerteza diferem entre os modelos propostos em Ben-Tal et al. [2000] e Bertsimas & Pachamanova [2008]. No primeiro artigo, os autores modelam as projeções “ $\Theta_i$ ” do conjunto de incerteza “ $\Theta$ ” como elipsóides. Reformulando o modelo (83) a partir da seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \pi^t &= \begin{pmatrix} \eta^t \\ \zeta^t \end{pmatrix}, \quad t = 1, \dots, T \quad \text{e} \quad \pi^{T+1} = \xi^T \\ p^t &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (1 - c_{venda}) \frac{\tilde{R}_i^t}{R_{n+1}^t} \\ - \sum_{i=1}^n (1 + c_{compra}) \frac{\tilde{R}_i^t}{R_{n+1}^t} \end{pmatrix}, \quad t = 1, \dots, T \quad \text{e} \quad p^{T+1} = \tilde{R}^{T+1} \\ q &= (\xi^t), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned} \quad (84)$$

pode-se reescrever a “ $t$ -ésima” desigualdade incerta de (83) na forma

$$(a^t)' q^t + b^t \leq (p^t)' \pi^t \quad (85)$$

onde “ $a^t$ ” é um vetor de coeficientes e “ $b^t$ ” é uma constante. Vale notar que o vetor “ $q^t$ ” contém as variáveis de decisão e “ $p^t$ ” contém os parâmetros incertos, que estão contidos dentro do conjunto de incerteza modelado por uma bola euclidiana centrada na origem e com raio “ $p^t$ ”. Considerando que o lado direito da desigualdade (85) é uma variável aleatória com esperança “ $(\tilde{p}^t)' \pi^t$ ” e variância “ $(\pi^t)' \Sigma^t \pi^t$ ”, uma aproximação segura de (85) pode ser formulada de acordo com a equação (38).

$$(a^t)' q^t + b^t \leq (\tilde{p}^t)' \pi^t - \rho^t \sqrt{(\pi^t)' \Sigma^t \pi^t} \quad (86)$$

onde “ $\Sigma^t$ ” é a matriz de covariância dos retornos acumulados e incertos “ $\tilde{R}$ ”. A aproximação segura da contraparte robusta do programa de otimização resultante pode, então, ser reformulada a partir de (83) como

$$\begin{aligned}
& \max \chi \\
& \text{s.a.} \\
& \chi + \rho^T \sqrt{(\xi^T)' \Sigma^T \xi^T} \leq \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i^T (\tilde{R}_i^{T+1}) \\
& \xi_i^t = \xi_i^{t-1} - \eta_i^{t-1} + \zeta_i^{t-1}, \quad i = 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T \\
& \xi_{n+1}^t + \rho^t \sqrt{\begin{pmatrix} \eta^t \\ \zeta^t \end{pmatrix}' \Sigma^t \begin{pmatrix} \eta^t \\ \zeta^t \end{pmatrix}} \leq \xi_{n+1}^{t-1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i^{t-1} \eta_i^{t-1} - \sum_{i=1}^n \beta_i^{t-1} \zeta_i^{t-1}, \quad t = 1, \dots, T \\
& \xi_i^t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n+1; \quad t = 1, \dots, T \\
& \eta_i^t, \zeta_i^t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T
\end{aligned} \tag{87}$$

onde

$$\begin{pmatrix} \alpha_i^{t-1} \\ \beta_i^{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - c_{venda}) \frac{\tilde{R}_1^t}{R_{n+1}^t} \\ \dots \\ (1 - c_{venda}) \frac{\tilde{R}_n^t}{R_{n+1}^t} \\ -(1 + c_{compra}) \frac{\tilde{R}_1^t}{R_{n+1}^t} \\ \dots \\ -(1 + c_{compra}) \frac{\tilde{R}_n^t}{R_{n+1}^t} \end{pmatrix} \tag{88}$$

Os resultados computacionais em Ben-Tal et al. [2000] indicam que a formulação da contraparte robusta proposta pelo artigo, com conjuntos de incerteza formados por elipsóides, supera os algoritmos de programação estocástica em termos de eficiência e de otimalidade, sem maiores custos computacionais. Todavia, analisando a formulação (87), observa-se que o modelo é não-linear, o que segundo Bertsimas & Pachamanova [2008] pode trazer alguns inconvenientes adicionais caso se queira aumentar o nível de complexidade do problema, com a inclusão de restrições de impostos ou de restrições de exposições em determinados ativos, por exemplo.

Já em Bertsimas & Pachamanova [2008], os autores modelam as projeções do conjunto de incerteza a partir da “norma D”, que possui geometria poliédrica em vez de elipsoidal. No artigo, define-se o conjunto de incerteza “ $\Theta$ ” como sendo:

$$\Theta^t = \left\{ \left\| (\Sigma^t)^{-1/2} (\tilde{R}^t - \bar{R}^t) \right\| \leq \Delta^t, t = 1, \dots, L \right\} \quad (89)$$

onde “ $\Sigma^t$ ” é a matriz de covariância dos retornos acumulados e incertos “ $\tilde{R}^t$ ”,  $\|\cdot\|$  é uma norma genérica e “ $\Delta^t$ ” pode ser calibrado pelo usuário. Cabe aqui chamar a atenção para a maneira como o conjunto de incerteza é parametrizado a partir da formulação (89). A inclusão da matriz de covariância na equação é proposital, pois permite a incorporação dos parâmetros de dispersão ou de risco no programa de otimização (80), como será mostrado a seguir.

Em Bertsimas et al. [2004], demonstra-se o seguinte resultado auxiliar: o problema geral de otimização robusta com um conjunto de incerteza parametrizado segundo a equação abaixo

$$\begin{aligned} & \max c'x \\ & s.a. \\ & \tilde{A}x \leq b, \quad \forall \tilde{A} \in U = \left\{ \tilde{A} : \left\| M \left( \text{vec}(\tilde{A}) - \text{vec}(\bar{A}) \right) \right\| \leq \Delta \right\} \end{aligned} \quad (90)$$

onde “M” é uma matriz inversível e “ $\text{vec}(A)$ ” denota o vetor obtido ao empilhar as linhas de “A” em uma única coluna, pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} & \max c'x \\ & s.a. \\ & \tilde{a}_i x + \underbrace{\Delta \left\| M^{-1} x_i \right\|^*}_{\text{função de proteção}} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (91)$$

onde “m” é o número de restrições (número de linhas da matriz “A”),  $\|x\|^*$  é a norma dual da norma genérica  $\|x\|$  e “ $x_i \in \Re^{(m.n) \times 1}$ ” é um vetor que contém “ $x \in \Re^{n \times 1}$ ” nas posições de “ $(i-1)n+1$ ” a “ $i.n$ ” e zero no restante.

No mesmo trabalho, apresenta-se a dedução da norma dual de uma norma genérica e da norma dual da norma D, as quais são formuladas a seguir.

$$\begin{aligned} \|s\|^* &= \max_{\|x\|_1 \leq 1} s'x \\ \| \|s\|_k^* &= \max \left( \|s\|_\infty, \frac{\|s\|_1}{k} \right) \end{aligned} \quad (92)$$

onde  $\|s\|_\infty = \max(|s_1|, \dots, |s_n|)$  e  $\|s\|_1 = \sum_{i=1}^n s_i$ . Pode-se, a partir do resultado apresentado em (91) e do conjunto de incerteza “ $\Theta$ ” definido em (89), reformular as desigualdades em (83) como na expressão a seguir.

$$\begin{aligned} \chi &\leq \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i^T (\tilde{R}_i^{T+1}) - \Delta \left\| \left( \Sigma^{1/2} \right)^T \xi^T \right\|_k^* \\ \xi_{n+1}^t - \xi_{n+1}^{t-1} - \sum_{i=1}^n (1 - c_{venda}) \eta_i^{t-1} \frac{\tilde{R}_i^{t-1}}{R_{n+1}^{t-1}} + \sum_{i=1}^n (1 + c_{compra}) \xi_i^{t-1} \frac{\tilde{R}_i^{t-1}}{R_{n+1}^{t-1}} + \Delta \left\| \left( \Sigma^{1/2} \right)^t \xi^t \right\|_k^* &\leq 0 \end{aligned} \quad (93)$$

E a partir do resultado apresentado em (92), tem-se que

$$\Delta \left\| \left( \Sigma^{1/2} \right)^t \xi^t \right\|_k^* = \Delta \max \left( \left\| \left( \Sigma^{1/2} \right)^t \xi^t \right\|_\infty, \left\| \left( \Sigma^{1/2} \right)^t \xi^t \right\|_1 / k \right) = \frac{\Delta}{k} \left( \left( \Sigma^{1/2} \right)^t \xi^t \right) e \quad (94)$$

onde “k” é o parâmetro de robustez da norma D e “e” é um vetor de “n” elementos iguais a um, caso imponhamos a seguinte restrição.

$$\xi_i^t \leq \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i^t}{k} \quad (95)$$

Ou seja, a posição do ativo “i” em cada instante de “t” é limitada pela razão entre o patrimônio total dos ativos de risco naquele instante e o parâmetro de robustez. Com isso, incorporando (94) e (95) no programa de otimização incerto (83), chega-se à aproximação segura da contraparte robusta do programa de otimização resultante.

$\max_x \chi$

s.t.

$$\begin{aligned}
\chi &\leq (\xi^T)' \tilde{R}^{T+1} - \frac{\Delta}{d} \left( (\Sigma^{1/2})^T \xi^T \right)' e \\
\xi_i^t &= \xi_i^{t-1} - \eta_i^{t-1} + \zeta_i^{t-1}, \quad i = 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T \\
\xi_{n+1}^t - \xi_{n+1}^{t-1} - \sum_{i=1}^n \alpha_i^{t-1} \eta_i^{t-1} + \sum_{i=1}^n \beta_i^{t-1} \zeta_i^{t-1} + \frac{\Delta}{d} \left( (\Sigma^{1/2})^t \xi^t \right)' e &\leq 0 \\
\xi_i^t &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n+1; \quad t = 1, \dots, T \\
\eta_i^t, \zeta_i^t &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T \\
\xi_i^t &\leq \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i^t}{d}, \quad t = 1, \dots, T
\end{aligned} \tag{96}$$

onde

$$\begin{pmatrix} \alpha_i^{t-1} \\ \beta_i^{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - c_{venda}) \frac{\tilde{R}_1^t}{R_{n+1}^t} \\ \dots \\ (1 - c_{venda}) \frac{\tilde{R}_n^t}{R_{n+1}^t} \\ - (1 + c_{compra}) \frac{\tilde{R}_1^t}{R_{n+1}^t} \\ \dots \\ - (1 + c_{compra}) \frac{\tilde{R}_n^t}{R_{n+1}^t} \end{pmatrix} \tag{97}$$

Neste problema, as variáveis de decisão são  $\xi_i^t \geq 0$  (não é permitido *short-selling*) e as aproximações seguras das contrapartes robustas podem ser violadas segundo a probabilidade definida a seguir.

$$\Pr ob \left\{ \tilde{a}' x + \sum_{l=1}^n \zeta_l (a_l)' x > \tilde{b} + \sum_{l=1}^n \zeta_l b_l \right\} \leq \frac{1}{1 + \Delta^2 \min \left\{ 1, \frac{k^2}{n} \right\}} \tag{98}$$

onde “ $k$ ” é o parâmetro da Norma D, “ $\Delta$ ” é o fator de robustez que limita a norma e “ $n$ ” é o número de ativos do portfólio. Além disso, parte-se da hipótese de que os retornos acumulados incertos, que são variáveis aleatórias, seguem uma distribuição de probabilidades log-normal. Bertsimas & Pachamanova [2008] demonstram que os retornos esperados e as matrizes de correlação dos retornos acumulados  $\tilde{R}^t$  e  $\Sigma^t$  podem ser expressos como função dos retornos simples intertemporais.

O grande resultado obtido em Bertsimas & Pachamanova [2008] é a proposição de um modelo de otimização robusta multiperíodo linear e onde é possível controlar o nível de robustez. Obtém-se, então, um método com menor custo computacional potencial que o proposto em Ben-Tal et al. [2000], além de possibilitar um nível menor de conservadorismo, se necessário.

Cabe mencionar que tanto o modelo obtido em (64), proposto em Ben-Tal et al. [2000], quanto o modelo (96), proposto em Bertsimas & Pachamanova [2008], são resolvidos pelo método de “horizontes rolantes” (*rolling horizons*). Em outras palavras, o programa de otimização se inicia com a construção e solução do modelo robusto para os “ $T$ ” estágios à frente, considerando a alocação inicial “ $x_0$ ”. As alocações ótimas relacionadas ao primeiro estágio do programa são então capitalizadas pelos retornos reais (observados no mercado) relativos ao período e passam a compor o novo portfólio inicial, que servirá de entrada para a resolução do programa para quatro “ $T-1$ ” à frente. As decisões ótimas relativas a este novo estágio, capitalizadas pelos retornos reais observados no mercado, formam o portfólio de largada para o problema de “ $T-2$ ” períodos resultantes. Assim, a dinâmica se repete até que se calculem as decisões ótimas relativas ao programa de um período resultante, que capitalizadas pelos retornos reais do último período formarão a composição final do portfólio.

## 5. RETORNOS ESPERADOS PARA AÇÕES

Nos modelos de otimização de portfólios, os retornos futuros dos ativos, por não serem conhecidos *ex-ante*, precisam ser estimados. Muitas vezes, dados históricos são utilizados para esse propósito, onde dados de média e matriz de covariância de uma amostra histórica de retornos servem de referência para a estimação dos retornos e variâncias esperadas. Infelizmente, esta abordagem histórica via de regra não produz boas estimativas, gerando portfólios instáveis e alocações equivocadas.

A teoria de otimização robusta discutida até então é um bom antídoto contra erros de estimação e de modelo, todavia, apresenta soluções conservadoras e sub-ótimas, como se houvesse um custo para tornar o portfólio menos sensível a tais erros de estimação. Portanto, a utilização de um bom estimador de retornos futuros pode contribuir para a redução do nível de robustez ou conservadorismo do modelo de otimização robusta, impactando positivamente a performance da carteira a ser construída.

Existe uma gama considerável de modelos para a estimação de retornos esperados e risco de ações, os quais em geral podem ser divididos nas seguintes classes:

- Modelos fundamentalistas: baseados em projeções de dividendos ou fluxos de caixa futuros da empresa emissora da ação, devidamente descontados por seu custo de capital. Assume hipóteses de evolução de dados de balanço e variáveis conjunturais e macroeconômicas ao longo do tempo.
- Modelos dinâmicos ou estatísticos: baseados nos conceitos de econometria e de séries temporais, com a análise estatística do comportamento histórico do preço do ativo e do relacionamento entre seus valores em instantes defasados de tempo. Os ativos podem ser avaliados individualmente ou mediante análise de *cross-section* de vários ativos.
- Modelos fatoriais: baseados na percepção de que alguns fatores possuem capacidade de explicar o comportamento dos retornos das ações. Com isso, modelos regressivos são gerados de maneira a correlacionar os retornos com o movimento destes fatores.

De maneira a verificar se o uso de um bom estimador de retornos e a conseqüente redução no nível de robustez podem incrementar a performance do modelo de otimização foco deste trabalho, incorporar-se-á uma restrição adicional no programa de otimização. Sua formulação se baseia nos resultados de um modelo de estimação de retornos do tipo fatorial, mais precisamente, o modelo proposto em Fama & French [1992].

### 5.1. Apreçamento de Ativos e Modelos Fatoriais

A teoria de apreçamento de ativos (*asset pricing*) procura estabelecer um padrão para o cálculo do preço justo de ativos financeiros, associando seus valores presentes aos valores esperados futuros e ao risco de recebimento de pagamentos incertos, sejam eles de dividendos, juros ou outros recebíveis. Cochrane [2001] resume esse racional com o uso de duas equações:

$$\begin{aligned} p^t &= E(m^{t+1} x^{t+1}), \\ m^{t+1} &= f(\text{dados, parâmetros}) \end{aligned} \tag{99}$$

onde “ $p^t$ ” é o preço do ativo, “ $x^{t+1}$ ” é o perfil de pagamentos (*payoff*) do ativo e “ $m^{t+1}$ ” é o fator de desconto. Na abordagem clássica da microeconomia baseada no comportamento do consumo, “ $m^{t+1}$ ” é chamado de taxa marginal de substituição, que corresponde à quantidade de consumo que uma pessoa está disposta a abrir mão no momento atual para obter uma quantidade maior de consumo no futuro e está associada à utilidade marginal do investidor.

Partindo do pressuposto de que investidores racionais sempre buscam maximizar sua utilidade esperada e que sua renda total é despendida em consumo ou investimento, faz sentido para um investidor adiar o consumo e investir em ativos financeiros em momentos de taxas de juros elevadas. Sob este cenário, ele maximizará sua utilidade em função da expectativa de maior renda e consumo maior no futuro, viabilizado com o recebimento do *payoff* do investimento, que renderá mais juros. Portanto, as taxas de juros e os fatores de desconto estão associados diretamente a uma expectativa de crescimento do consumo pessoal, que justifica o adiamento do mesmo e a substituição da alocação dos recursos para a poupança no instante atual. Isso posto, a equação (99) segundo o modelo baseado em consumo exposto em Cochrane [2001] pode ser formulada da seguinte maneira.

$$p^t = E^t \left( \beta \frac{\partial u(c^{t+1}, c^t) / \partial c^{t+1}}{\partial u(c^{t+1}, c^t) / \partial c^t} x^{t+1} \right) \quad (100)$$

onde “u(x)” é a função utilidade do investidor e  $\beta \frac{\partial u(c^{t+1}, c^t) / \partial c^{t+1}}{\partial u(c^{t+1}, c^t) / \partial c^t}$  reflete a taxa marginal de substituição, na qual o investidor está disposto a substituir o consumo no instante “t+1” para o consumo no instante “t”.

Segundo Cochrane [2001], o modelo baseado em consumo não funciona bem na prática, motivando esforços para vincular o fator de desconto “ $m_{t+1}$ ” com outras variáveis. Os modelos fatoriais lineares, que são os mais populares e que dominam a produção acadêmica deste ramo de finanças, procuram substituir a expressão da taxa marginal de substituição na formulação de apreçamento de um ativo por um modelo linear da forma:

$$m^{t+1} = a + b' f^{t+1} \quad (101)$$

onde “a” e “b” são vetores com parâmetros livres e “f” é um vetor com variáveis financeiras ou macroeconômicas. Cochrane [2001] demonstra que o valor esperado do retorno futuro do ativo é função destes mesmos fatores.

$$E(r^{t+1}) = \gamma + \beta' g(f^{t+1}) \quad (102)$$

onde “ $\beta$ ” são os coeficientes da regressão dos retornos “r” com os fatores “f” e “ $\gamma$ ” é um parâmetro livre.

### 5.1.1 Capital asset pricing model (CAPM)

O primeiro modelo fatorial de apreçamento de ativos foi desenvolvido em Sharpe [1964], com base na teoria de portfólios desenvolvida em Markowitz [1952], e é chamado *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). O modelo adota as seguintes premissas.

- Os investidores são avessos ao risco e procuram maximizar a utilidade esperada de sua riqueza.
- Os investidores têm expectativas homogêneas sobre os retornos dos ativos.
- Existe ativo de risco, sob o qual o investidor pode captar ou emprestar recursos ilimitadamente.
- Todos os ativos são negociáveis e perfeitamente divisíveis.
- Os mercados são fortemente eficientes, isto é, os preços dos ativos refletem todas as informações públicas e privadas disponíveis, as quais são de conhecimento do investidor.
- Não há custos de transação, impostos nem restrições de venda a descoberto.

Partindo destas hipóteses rígidas e adotando apenas um fator explicativo – o risco sistemático, o modelo estabelece a seguinte relação entre retorno esperado e risco, partindo da formulação (102).

$$E(r_i) = \gamma + \beta_i (E(r_m) - \gamma) \Rightarrow E(r_i) = r_f + \beta_i (E(r_m) - r_f) \quad (103)$$

onde “ $E(r_m)$ ” é o retorno esperado do portfólio de mercado, representação teórica de uma carteira com todos os ativos (não somente ações) negociados no mercado de capitais, e

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(r_i, r_m)}{\sigma_m^2} \quad (104)$$

é o coeficiente da regressão dos retornos “ $r$ ” com os retornos do portfólio de mercado e denota a medida de risco sistemático do ativo “ $i$ ” com relação ao portfólio de mercado. Cabe lembrar que o risco sistemático é aquele que não pode ser eliminado com a diversificação do portfólio.

No modelo de CAPM, o prêmio de risco é explicado somente pelo risco sistemático do ativo, indicando que um investidor não é recompensado caso mantenha um portfólio não diversificado e, portanto, sujeito a risco não sistemático (idiossincrático). Portanto, dadas as medidas da taxa livre de risco, do “ $\beta$ ” do ativo e o valor esperado do retorno do portfólio de mercado, pode-se usar o CAPM para gerar uma estimativa do retorno esperado de um ativo.

Diversos trabalhos empíricos evidenciaram que o risco sistemático de mercado sozinho não é suficiente para explicar o comportamento dos retornos dos ativos financeiros, tornando necessária a derivação de modelos com o uso de mais fatores. Além disso, a existência de ativos não transacionáveis, custos de transação e outras características de mercado que ferem as hipóteses adotadas – como a inexistência de um ativo totalmente livre de risco ou a impossibilidade de se montar um portfólio com todos os ativos existentes - inviabilizam o uso prático do modelo.

### 5.1.2. Arbitrage pricing theory (APT)

Uma teoria alternativa ao modelo CAPM, desenvolvida em Ross [1976], sugere um modelo baseado puramente em argumentos de arbitragem, onde dois ativos com o mesmo *payoff* devem possuir o mesmo preço e nenhum investidor poderá obter lucros com a arbitragem entre ativos. Além disso, a abordagem propõe que o retorno esperado de um ativo é relacionado linearmente a uma variedade de fatores de risco, sem especificar quais fatores são esses.

Supõe-se que existam “n” ativos e que cada um tenha seus retornos históricos explicados pela seguinte estrutura de “k” fatores.

$$r_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^k \beta_{ij} f_j + \varepsilon_i \quad (105)$$

onde se assume que

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_i) &= E(f_j) = 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, k \\ E(\varepsilon_i \varepsilon_l) &= E(\varepsilon_i f_l) = E(f_j f_l) = 0 \\ E(\varepsilon_i^2) &= \sigma^2 \end{aligned} \quad (106)$$

e que “ $\beta_{ij}$ ” é a sensibilidade do ativo “i” a cada fator “j” e “ $\varepsilon_i$ ” é o retorno idiossincrático para o ativo. Em Ross [1976], demonstrou-se que, em um mercado sem arbitragem, o seguinte relacionamento se mantém

$$E(r_i) = r_f + \sum_{j=1}^k \beta_{ij} (E(f_j) - r_f) \quad (107)$$

A teoria afirma que os investidores desejam ser compensados por todos os fatores de risco que sistematicamente afetam o retorno de um ativo financeiro. E assim como no CAPM, o investidor não é compensado por assumir risco não sistemático (idiossincrático), ou não diversificável. Pode-se dizer, portanto, que o CAPM é um caso particular do APT.

Algumas vantagens do modelo APT com relação ao CAPM são que ele assume hipóteses menos restritivas; que é um modelo de apreçamento baseado no comportamento de diversos fatores, enquanto o CAPM é um modelo que se baseia em apenas uma fonte de risco inerente ao portfólio de mercado; e que não há no APT nenhuma consideração sobre a figura teórica do “portfólio de mercado”, permitindo que a teoria seja aplicável.

### 5.1.3. Modelos de fatores na prática

O APT forneceu o suporte teórico para o desenvolvimento de modelos de apreçamento de ativos com vários fatores de risco. Para manter a coerência com a teoria de apreçamento de ativos segundo a abordagem clássica de consumo, onde por (100) e (101)

$$\beta \frac{\partial u(c^{t+1}, c^t) / \partial c^{t+1}}{\partial u(c^{t+1}, c^t) / \partial c^t} \approx a + b' f^{t+1} \quad (108)$$

espera-se que tais fatores sejam aproximações razoáveis e economicamente interpretáveis para o crescimento da utilidade marginal.

Na teoria econômica, em geral o consumo é modelado por fatores macroeconômicos como crescimento do PIB, taxas de juros, variáveis de produção e outras variáveis que permitam medir o estado da economia. Porém, variáveis que atuam como indicadores antecedentes eficientes para a previsão de retornos futuros em excesso também são bem-vindas na modelagem de preços, como retornos históricos, valor patrimonial/preço, preço/lucro, indicadores de risco, indicadores de liquidez, dentre outras.

Com essas considerações, podem-se classificar os modelos fatoriais em três diferentes classes de acordo com os tipos de fatores utilizados:

- Modelos estatísticos: dados históricos e *cross-section* de várias ações são lançados em um mesmo modelo estatístico. O objetivo é que os retornos observados das ações sejam explicados por poucos fatores descorrelacionados entre si. Um método bastante utilizado procura derivar os fatores a partir dos maiores autovalores da matriz de covariância dos retornos históricos. O grande problema com esse método é que nem sempre é possível dar uma interpretação econômica aos fatores derivados estatisticamente.
- Modelos de fatores macroeconômicos: os dados de entrada dos modelos são variáveis macroeconômicas observáveis, as quais são regredidas contra os retornos históricos das ações de maneira a se verificar quais delas consistentemente explicam o comportamento desses retornos. Um exemplo de um modelo de fatores macroeconômicos é o modelo proprietário de Burtmeister, Ibbotson, Roll e Ross [não publicado, ver Fabozzi et al., 2006], que utiliza cinco fatores macroeconômicos: confiança do investidor, taxas de juros, inflação, atividade da economia e um índice de mercado.
- Modelo de fatores fundamentalistas: os dados de entrada dos modelos são variáveis setoriais, dados de balanço de empresas e dados de mercado. Alguns exemplos são o múltiplo de preço/lucro, volumes negociados, endividamento e liquidez. Outros fatores mais específicos, como volatilidade e momentum, também aparecem em modelos mais modernos. A partir de análises transversais (*cross-section*), as sensibilidades dos fatores com relação aos retornos históricos da ação são mensurados mediante regressões multivariadas. Dois modelos se destacam nesta categoria: Barra [1998] e Fama & French [1992], os quais serão descritos a seguir.

Cabe mencionar que em Barra [1998], afirma-se que o modelo de fatores fundamentalistas apresenta melhores resultados que os outros três em termos de poder explicativo.

### 5.1.4. Modelo Barra

Um dos modelos fatoriais mais conhecidos no mercado de ações é o desenvolvido pela fornecedora de software MSCI Barra (ver Barra, 1998). A terceira versão do modelo (outras mais recentes já foram desenvolvidas) utiliza treze índices de risco, abertos em trinta e nove fatores que incluem variáveis fundamentalistas e de mercado. Uma vez definidos os fatores de risco – análise julgamental e por *clustering* são usadas para este fim – e compiladas as informações históricas devidamente tratadas, a informação sobre a sensibilidade “ $\beta_{ij}$ ” dos retornos a cada fator de risco é estimada a partir de uma regressão multivariada para uma amostra transversal de ações (cross-section).

$$E(r_i) - r_f = E(r_{i,e}) = \sum_{j=1}^k \beta_{ij} (E(f_j) - r_f) \quad (109)$$

onde “ $r_{i,e}$ ” é o retorno mensal do ativo “ $i$ ” em excesso sobre a taxa livre de risco. Vale observar que cada fator de risco é escolhido individualmente, isto é, cada novo fator, um a um, é incorporado ao modelo e só é mantido se for estatisticamente significativo e se incrementar o poder explanatório do mesmo. Abaixo, segue a lista de fatores utilizados no modelo.

Tabela 1: Fatores de Risco do Modelo Barra

Fatores de Risco	Índices de Risco
$\sqrt{\beta\sigma_\varepsilon}$ , “ $\beta$ ” é o beta histórico e “ $\sigma_\varepsilon$ ” é o desvio padrão residual.	Risco
Desvio padrão diário	
$\log(P_H/P_L)$ , “ $P_H$ ” e “ $P_L$ ” são os preços máximo e mínimo	
Log do preço da ação	
$\sum_{s=1}^t \log(1 + r_{i,s}) - \sum_{s=1}^t \log(1 + r_{f,s})$ , “ $r_{i,s}$ ” é o retorno da ação “ $i$ ” e “ $r_{f,s}$ ” é a taxa livre de risco, ambos no mês “ $s$ ”.	
Sensibilidade do volume negociado da ação “ $i$ ” contra o volume total do mercado.	
Dependência serial dos resíduos do modelo	
Volatilidade implícita da opção ATM com vencimento mais próximo	

$\sum_{t=1}^T \log(1 + r_{i,t}) - \sum_{t=1}^T \log(1 + r_{f,t}),$ <p>“<math>r_{i,t}</math>” é o retorno médio da ação  “<math>r_{f,t}</math>” é a taxa livre de risco média e “<math>T</math>” = 12 meses</p>	Momentum
Alfa histórico	
Log da Capitalização de Mercado	Tamanho
Cubo do Log da Capitalização de Mercado	Tam. (não linearidade)
Taxa de <i>turnover</i> da ação (anual): $V_{ano} / \sqrt{N_{ações}}$ , “ $V_{ano}$ ” é o volume total negociado em 1a e “ $N_{ações}$ ” é o # médio de ações em 1a	Atividade negocial
Taxa de <i>turnover</i> da ação (trimestral)	
Taxa de <i>turnover</i> da ação (mensal)	
Taxa de <i>turnover</i> da ação (em cinco anos)	
Indicador de split da ação	
Volume / variância	
Taxa de payout em cinco anos (dividendos/lucro)	Crescimento
Variabilidade na estrutura de capital	
Taxa de crescimento dos ativos	
Taxa de crescimento de lucros em cinco anos	
Taxa de crescimento de lucros prevista por analistas	
Variação do lucro por ação em um ano	
Lucro / Preço previsto por analistas	Lucro / Preço
Lucro / Preço do último ano	
Lucro / Preço médio em cinco anos	
Valor Patrimonial / Valor de Mercado	Valor
Variabilidade nos lucros em cinco anos	Variabilidade nos lucros
Variabilidade no fluxo de caixa em cinco anos	
Resultados extraordinários	
Desvio padrão do Lucro / Preço previsto por analistas	
Alavancagem de mercado	Endividamento
Alavancagem de valor patrimonial	
Dívida sobre total de ativos	
Rating da dívida senior	
Exposição a moeda estrangeira	Risco cambial
Fluxo de dividendos futuros anunciados pela empresa	Fluxo de dividendos
Indicador se a empresa não pertence ao universo de ações americanas	Indicador de empresa estrangeira

Adaptação da tabela 8-1 em Barra [1998]

Um modelo com tantos fatores exige uma massa de dados substancial para que possam ser gerados resultados consistentes. A amostra utilizada na calibração do modelo Barra [1998]

conta com os 1900 ativos com maior capitalização no mercado norte-americano, com dados de retornos mensais. Evidentemente é muito difícil replicá-lo para a realidade brasileira, onde o universo de ações líquidas é muito menor, sem contar que a baixa disponibilidade de dados de balanço íntegros e confiáveis para a construção dos fatores restringe ainda mais esse universo.

### 5.1.5. Modelo de Fama & French

O modelo fatorial para a estimação do retorno de ações proposto em Fama e French [1992] é um dos mais conhecidos e utilizados no mercado de renda variável. Neste trabalho, os autores avaliaram todas as ações de empresas não-financeiras negociadas na Bolsa de Valores de Nova Iorque (NYSE), na AMEX e na NASDAQ, durante o período de 1963 a 1990. E como principal resultado, concluíram que duas variáveis facilmente mensuráveis – capitalização de mercado (CM - preço de mercado vezes o total de ações) e a razão VPA/P (valor patrimonial por ação sobre preço de mercado) – possuem capacidade preditiva suficiente para caracterizar o comportamento dos retornos da amostra transversal (*cross-section*) de ações utilizada. Além disso, concluíram que o “ $\beta$ ” não possuiu poder explanatório sobre o comportamento dos retornos das ações da amostra e que a combinação da capitalização com (VPA/P) pareceu absorver os papéis das variáveis alavancagem (valor dos ativos por capitalização de mercado) e Lucro/Preço na regressão.

No estudo, os autores ordenaram as ações da amostra por ordem crescente de valor patrimonial por ação/preço unitário da ação (VPA/P) em um primeiro experimento e depois por lucro/preço (L/P) em um segundo experimento. Em cada experimento, eles constituíram 10 portfólios, onde o primeiro deles continha as ações com maior valor dos indicadores utilizados para o ordenamento (ações de valor) e o décimo, as de menor valor. Os resultados dos experimentos apontaram que os portfólios compostos pelas ações de maior valor proporcionaram retornos médios anuais superiores aos das ações de menor valor para os dois testes. E entre as ações de valor, o melhor desempenho foi observado para as ações de maior razão “VPA/P”, cuja variação do retorno médio por carteira formada cresceu monotonicamente quanto maior o valor do portfólio. Para o experimento com ações ordenadas por lucro/preço (L/P), a variação do retorno médio por portfólio apresentou forma de “U”, com ponto mínimo no segundo portfólio com dimensões mais baixas.

A evidência da superioridade explanatória da variável “VPA/P” nos experimentos foi comprovada por regressões feitas dos retornos mensais um semestre à frente contra valores históricos de  $\ln(\text{VPA/P})$ ,  $\ln(\text{CM})$ ,  $\ln(\text{ativos/CM})$ ,  $\ln(\text{ativos/VP})$  e  $(\text{L/P})$ . O coeficiente da regressão dos retornos contra a variável  $\ln(\text{VPA/P})$  sozinha apresentou uma estatística “t” igual a 5,71, a maior entre todas as variáveis. Além disso, as regressões mostraram que a variável  $(\text{L/P})$  foi absorvida pela combinação entre  $\ln(\text{VPA/P})$  e  $\ln(\text{CM})$  no modelo.

## 5.2. Aplicação ao modelo de otimização robusta

Um dos experimentos a serem feitos nesta tese é o de testar o “custo de robustez”. Em outras palavras, o objetivo é calibrar o fator de robustez dos coeficientes de retornos para níveis mais reduzidos e verificar se este mecanismo contribui para melhorar a performance do portfólio com a alocação proposta. Para isso, é necessário utilizar um estimador de retornos que forneça previsões mais confiáveis do que o método de considerar o retorno histórico do período imediatamente anterior como aproximação.

Segundo Rostagno et al. [2006], “(...) alguns estudos no mercado brasileiro apresentam resultados semelhantes (aos de Fama & French [1992]) quanto ao maior retorno de carteiras formadas por ações de valor (...)” Além disso, no artigo, os autores evidenciam a superioridade dos rendimentos das estratégias de valor a partir da observação do comportamento dos retornos médios anuais e retornos acumulados de 1994 a 2003 de cinco portfólios formados por ações com os 25% maiores valores relativos às seguintes variáveis: “VPA/P”, “L/P”, “EBITDA/P”, “V/P”, “DIV/P”, onde “VPA” é o valor patrimonial por ação, “P” é o preço da ação, “EBITDA” é o lucro operacional mais depreciação e amortização e “DIV” é o total de dividendos distribuídos no ano. Vale observar também que os portfólios ordenados pelos parâmetros “L/P”, “EBITDA/P” e “VPA/P” apresentaram as estratégias de valor com melhor performance dentre as testadas.

Portanto, com base nos resultados obtidos em Fama & French [1992] e Rostagno et al. [2006], serão incorporadas no modelo de otimização robusta restrições intermediárias que estimulam a alocação em ações com maior valor de “VPA/P” em cada instante de tempo do programa de múltiplos períodos. A restrição será formulada da seguinte maneira:

$$\left(v^t\right)' x^t \geq b^t, \quad t = 1, \dots, T \quad (110)$$

onde  $v^b$  é o vetor de valores de “VPA/P” em cada instante de tempo e  $b^b$  é uma constante que representa o valor de “VPA/P” correspondente ao percentil 25 da amostra de ações no mesmo instante de tempo. Em outras palavras, o programa privilegiará a alocação de ações com maior valor de “VPA/P” no caso de igualdade nos parâmetros de risco e retorno em cada estágio.

Com isso, pode-se manter o estimador de retornos futuros que considera o retorno histórico do período imediatamente anterior e reduzir o nível de robustez das estimativas, dado que haverá um estímulo de alocação em ações de maior valor no programa de otimização. O objetivo é testar se este mecanismo de fato ajuda na melhora do resultado do portfólio formado pela alocação ótima resultante.

## **6. MODELO DE OTIMIZAÇÃO LINEAR ROBUSTA MULTITEMPORAL COM PARÂMETROS INCERTOS DE MÉDIA E DISPERSÃO**

Enfim, chega-se ao capítulo onde o modelo foco desta pesquisa será apresentado. Conforme já foi mencionado nos capítulos anteriores, as formulações propostas em Ben-Tal et al. [2000] e Bertsimas & Pachamanova [2008] mostram-se como alternativas eficientes para a resolução de problemas incertos de múltiplos estágios, porém, com algumas ressalvas. O modelo proposto em Ben-Tal et al. [2000] é não-linear, do tipo cônico de segunda ordem, o que pode ser um inconveniente para portfólios mais complexos, com restrições de ativos ou de impostos, por exemplo. Bertsimas & Pachamanova [2008] apresenta um atalho engenhoso para este obstáculo, definindo o conjunto de incerteza dos parâmetros incertos por meio da Norma D e obtendo um programa de otimização linear. Todavia, os parâmetros de variância e covariância são assumidos como conhecidos, premissa essa que não é comprovada na realidade.

Os aperfeiçoamentos propostos neste trabalho são:

- A utilização de ambos os parâmetros de média e dispersão sujeitos a incerteza no caso multiperíodo. Vale recordar que em Halldorsson and Tutuncu [2003], é proposto um modelo com estas características, mas para o caso uniperíodo.
- A utilização de uma formulação especial para os parâmetros de dispersão e de uma definição conveniente dos conjuntos de incerteza, de maneira a manter o modelo de otimização robusta multitemporal resultante como um programa de otimização linear.
- Incorporação de uma restrição adicional baseada no modelo de Fama & French [1992], de maneira a testar se há ganho de performance no portfólio resultante.

A seguir, é apresentada a formulação da contraparte robusta de um problema de otimização multitemporal, baseada nos modelos de Ben-Tal et al. [2000] e Bertsimas &

Pachamanova [2008], bem como nos avanços metodológicos que este trabalho propõe. Observa-se que todos os aperfeiçoamentos apresentados ao longo deste capítulo são originais e constituem as contribuições desta tese para o desenvolvimento dos modelos robustos e multitemporal de alocação de ativos.

## 6.1. Programa de Otimização Multitemporal

Define-se inicialmente o problema típico de alocação de ativos em múltiplos estágios a partir das seguintes hipóteses, muito semelhantes às adotadas nos modelos de Ben-Tal et al. [2000] e Bertsimas & Pachamanova [2008]:

- i) O portfólio consiste de “n” ativos com risco e uma posição em caixa (ativo “n+1”) e o número de períodos de balanceamento do portfólio é igual a “T”.
- ii) Os retornos dos ativos ao longo do tempo seguem uma distribuição normal.
- iii) Considerando:

$x_i^{t-1}$  a posição financeira no ativo “i” no instante “t-1”.

$\tilde{r}_i^{t-1}$  o retorno incerto do ativo “i” no período de “t-1” a “t”.

$\tilde{r}_{n+1}^{t-1}$  o retorno livre de risco no período de “t-1” a “t”.

$z_i^{t-1}$  o montante do ativo “i” comprado no instante “t-1”.

$y_i^{t-1}$  o montante do ativo “i” vendido no instante “t-1”.

$C_{venda}$ ,  $C_{compra}$  os custos de transação correspondentes à compra ou à venda de um ativo.

a riqueza no instante terminal do portfólio pode ser formulada como:

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^T (1 + \tilde{r}_i^T) \quad (111)$$

e a posição financeira do ativo “i,  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ ” no começo do período de investimento “t,  $t \in \{1, \dots, T\}$ ” é dada por “ $x_i^t$ ” e tem a seguinte dinâmica:

$$x_i^t = (1 + \tilde{r}_i^{t-1}) \{x_i^{t-1} - y_i^{t-1} + z_i^{t-1}\}, \quad i \leq n \text{ (ativos de risco)} \quad (112)$$

$$x_{n+1}^t = (1 + r_{n+1}^{t-1}) \left\{ x_{n+1}^{t-1} + \sum_{i=1}^n (1 - c_{venda}) y_i^{t-1} - \sum_{i=1}^n (1 + c_{compra}) z_i^{t-1} \right\} \text{ (posição em caixa)} \quad (113)$$

Em todos os trabalhos pesquisados sobre alocação robusta em múltiplos estágios, os estimadores dos parâmetros de dispersão adotados são as variâncias e as covariâncias entre os retornos. Nesta tese, tomando como base a abordagem proposta em Konno & Yamazaki [2003], é utilizada uma formulação alternativa destes parâmetros, gerada a partir do método do desvio absoluto da média. O estimador dos parâmetros de dispersão, a partir deste método, é definido pela função a seguir.

$$w(x) = E \left\{ \left[ \sum_{i=1}^n r_i x_i - E \left[ \sum_{i=1}^n r_i x_i \right] \right] \right\} = \sum_{i=1}^n x_i E \{ |r_i - \mu_i| \} \quad (114)$$

onde  $\mu_i = E(r_i)$ . A vantagem desta abordagem é que ela contribui para que o programa de otimização resultante seja linear em vez de quadrático, como nos programas clássicos de média-variância, apesar de manter uma equivalência com eles. Além disso, cabe observar que se os retornos dos ativos seguirem uma distribuição de probabilidades gaussiana multivariada, então as medidas de risco – desvio padrão e desvio absoluto – são essencialmente as mesmas, como demonstrado em Konno & Yamazaki [2003]:

$$w(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{StD}(x) \quad (115)$$

onde “ $\text{StD}(x)$ ” é o desvio padrão de “ $x$ ”. Portanto, restrições intermediárias de dispersão podem ser incorporadas ao modelo original de maneira a tratar diretamente o nível de aversão ao risco do investidor.

$$\sum_{i=1}^N E \left\{ |r_i^t - \mu_i^t| \right\} x_i^t \leq \sigma^t, \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, T \quad (116)$$

$$\sum_{i=1}^N \tilde{a}_i^t x_i^t \leq \sigma^t, \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, T, \quad (117)$$

onde “ $\sigma^t$ ” é um parâmetro que deve refletir a aversão ao risco do investidor e  $\tilde{a} = E\left\{\left|r_i^t - \mu_i^t\right|\right\}$ . Cabe mencionar novamente que os modelos propostos em Ben-Tal et al. [2000] e Bertsimas & Pachamanova [2008] tratam dos parâmetros de risco apenas indiretamente, na definição dos conjuntos de incerteza dos retornos.

Sob estas hipóteses, formula-se o programa de OL cujo objetivo é maximizar o valor financeiro total do portfólio no instante final, sujeito a uma restrição de risco.

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{i=1}^{n+1} x_i^T (1 + \tilde{r}_i^T) \\
 & \text{s.a.} \\
 & \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i^t x_i^t \leq \sigma^t, \quad t = 1, \dots, T \\
 & \sum_{i=1}^n x_i^t = \sum_{i=1}^n (1 + \tilde{r}_i^{t-1}) \{x_i^{t-1} - y_i^{t-1} + z_i^{t-1}\}, \quad t = 1, \dots, T \\
 & x_{n+1}^t = (1 + r_{n+1}^{t-1}) \left\{ x_{n+1}^{t-1} + \sum_{i=1}^n (1 - c_{venda}) y_i^{t-1} - \sum_{i=1}^n (1 + c_{compra}) z_i^{t-1} \right\}, \quad t = 1, \dots, T \\
 & x_i^t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n+1; \quad t = 1, \dots, T \\
 & y_i^t, z_i^t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T
 \end{aligned} \tag{118}$$

Nesta formulação, “ $x^t$ ”, “ $y^t$ ” e “ $z^t$ ” são as variáveis de decisão e “ $x^0$ ” o valor inicial conhecido do portfólio. Observa-se que o programa de OL (118) leva em conta a natureza incerta dos parâmetros de dispersão, ao contrário dos modelos propostos por Ben-Tal et al. [2000] e Bertsimas and Pachamanova [2008].

## 6.2. Conjuntos de Incerteza

Seguindo a abordagem apresentada em Bertsimas et al. [2004], considera-se que os parâmetros locais (valores esperados) “ $\tilde{r}^t, t \in \{1, \dots, T\}$ ” podem variar de maneira que os desvios com relação a seus valores nominais estejam restritos ao conjunto convexo “ $\Theta_R$ ”.

$$\Theta_R = \left\{ \tilde{r} : \|M_R(\tilde{r}^t - \tilde{r}^t)\|_{\Gamma} \leq \Delta^t, t = 1, \dots, T \right\} \tag{119}$$

onde “ $M_R$ ” é uma matriz genérica e inversível, “ $T$ ” é o parâmetro de controle da Norma-D que define o número de variáveis incertas que assumem valores diferentes dos valores nominais e “ $\Delta^t \geq 0$ ” é um fator de robustez que pode ser ajustado de acordo com o nível de tolerância quanto a violações nas restrições.

Analogamente, considera-se que os parâmetros de dispersão incertos “ $\tilde{a}^t, t \in \{1, \dots, T\}$ ” podem variar de maneira que os desvios com relação a seus valores nominais estejam restritos ao conjunto convexo “ $\Theta_A$ ”

$$\Theta_A = \left\{ \tilde{a} : \| M_A (\tilde{a}^t - \tilde{a}^t) \|_{\Pi} \leq \Omega^t, t = 1, \dots, T \right\} \quad (120)$$

onde “ $M_A$ ” é uma matriz genérica e inversível, “ $\Pi$ ” é o parâmetro da Norma-D e “ $\Omega^t \geq 0$ ” ajusta a robustez.

Conforme já vimos anteriormente, para valores de nível de tolerância pré-estabelecidos, é possível estimar os parâmetros “ $\Delta^b$ ” e “ $\Omega^b$ ” a partir da seguinte formulação

$$\Pr ob \left\{ \tilde{a}'x + \sum_{l=1}^n \zeta_l (a_l)'x > \tilde{b} + \sum_{l=1}^n \zeta_l b_l \right\} \leq \frac{1}{1 + \Delta^2 \min \left\{ 1, \frac{k^2}{n} \right\}} \quad (121)$$

onde “ $k$ ” é o parâmetro da Norma D, “ $\Delta$ ” é o fator de robustez que limita a norma e “ $n$ ” é o número de ativos do portfólio. Em outras palavras, as aproximações seguras das contrapartes robustas podem ser violadas segundo a probabilidade definida pela formulação (121).

### 6.3. Contraparte robusta

Já foi observado anteriormente que para lidar com dados incertos em problemas de otimização robusta, é necessário trabalhar com desigualdades em vez de igualdades nas restrições. Todavia, para a restrição de balanço (112), mantém-se a igualdade na sua formulação, de maneira a expressar adequadamente o comportamento temporal dos retornos dos ativos de risco em um cenário de carteira auto-financiável (que não está sujeita a novos

aportes ou resgates de recursos). Vale observar que as soluções obtidas sob essa hipótese foram factíveis para todos os experimentos testados.

Considerando os conjuntos de incerteza “ $\Theta_R$ ” e “ $\Theta_A$ ” nas formulações (119) e (120) e a definição da norma dual da Norma-D, apresentada em Bertsimas et al. [2004]:

$$\|s\|_k^* = \max\left(\|s\|_\infty, \frac{\|s\|_1}{k}\right) \quad (122)$$

onde  $\|s\|_\infty = \max(|s_1|, \dots, |s_n|)$  e  $\|s\|_1 = \sum_{i=1}^n s_i$ , tem-se de acordo com o resultado auxiliar (91) que

$$\Delta \|M_R^{-1}(x^t)\|_\Gamma^* = \frac{\Delta^t}{\Gamma} (M_R^{-1}x^t)' e \quad (123)$$

$$\Omega \|M_A^{-1}(x^t)\|_\Pi^* = \frac{\Omega^t}{\Pi} (M_A^{-1}x^t)' e \quad (124)$$

onde “e” é um vetor de “n” elementos iguais a um, caso sejam impostas as seguintes restrições

$$x_i \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\Gamma}; \quad x_i \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\Pi} \quad (125)$$

Considerando que a função objetivo da otimização pode ser reformulada como

$$\begin{aligned} & \max \chi \\ & s.t. \\ & \chi \leq \sum_{i=1}^{n+1} x_i^T (1 + \tilde{r}_i^T) \end{aligned} \quad (126)$$

e que as restrições de retornos e dispersão do programa (118) podem ser reformuladas por suas aproximações seguras a seguir, tomando como base os resultados (90) e (91) apresentados no capítulo 4:

$$\chi \leq \left(1 + \tilde{r}^T\right)' x^T - \frac{\Delta^T}{\Gamma} \left(M_R^{-1} x^T\right)' e \quad (127)$$

$$\left(x^t\right)' e \leq \left\{ \left(1 + \tilde{r}^{t-1}\right)' - \frac{\Delta^t}{\Gamma} \left(M_R^{-1} e\right)' \right\} \{x^{t-1} - y^{t-1} + z^{t-1}\} \quad (128)$$

$$\left\{ \left(\tilde{a}^t\right)' + \frac{\Omega^t}{\Pi} \left(M_A^{-1} e\right)' \right\} x^t \leq \sigma^t \quad (129)$$

tem-se que a aproximação segura da contraparte robusta do programa de otimização incerto (118) pode ser formulada como

$$\begin{aligned} & \max_x \chi \\ & s.t. \\ & \chi \leq \left\{ \left(1 + \tilde{r}^T\right)' - \frac{\Delta^T}{\Gamma} \left(M_R^{-1} e\right)' \right\} x^T \\ & \left\{ \left(\tilde{a}^t\right)' + \frac{\Omega^t}{\Pi} \left(M_A^{-1} e\right)' \right\} x^t \leq \sigma^t, \quad t = 1, \dots, T \\ & \left(x^t\right)' e \leq \left\{ \left(1 + \tilde{r}^{t-1}\right)' - \frac{\Delta^t}{\Gamma} \left(M_R^{-1} e\right)' \right\} \{x^{t-1} - y^{t-1} + z^{t-1}\}, \quad t = 1, \dots, T \\ & x_{n+1}^t = \left(1 + r_{n+1}^{t-1}\right) \left\{ x_{n+1}^{t-1} + \sum_{i=1}^n (1 - c_{venda}) y_i^{t-1} - \sum_{i=1}^n (1 + c_{compra}) z_i^{t-1} \right\}, \quad t = 1, \dots, T \\ & x_i^t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n+1; t = 1, \dots, T \\ & y_i^t, z_i^t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \\ & x_i^t \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^t}{\Gamma}, \quad x_i^t \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^t}{\Pi}, \quad t = 1, \dots, T \end{aligned} \quad (130)$$

Neste programa, “ $x^t$ ”, “ $y^t$ ” and “ $z^t$ ” são as variáveis de decisão. O programa resultante resulta em um problema de programação linear, a ser resolvido pelo método de “horizontes rolantes” (*rolling horizons*) e sem incorrer em maiores custos computacionais.

Incorporando a restrição baseada no modelo Fama & French [1992], que estimula a alocação em ações de maior razão valor patrimonial por valor de mercado, chega-se finalmente ao modelo a ser resolvido.

$$\begin{aligned}
& \max_x \chi \\
& s.t. \\
& \chi \leq \left\{ (1 + \tilde{r}^T)' - \frac{\Delta^T}{\Gamma} (M_R^{-1} e)' \right\} x^T \\
& \left\{ (\tilde{a}^t)' + \frac{\Omega^t}{\Pi} (M_A^{-1} e)' \right\} x^t \leq \sigma^t, \quad t = 1, \dots, T \\
& (x^t)' e \leq \left\{ (1 + \tilde{r}^{t-1})' - \frac{\Delta^t}{\Gamma} (M_R^{-1} e)' \right\} \{x^{t-1} - y^{t-1} + z^{t-1}\}, \quad t = 1, \dots, T \\
& x_{n+1}^t = (1 + r_{n+1}^{t-1}) \left\{ x_{n+1}^{t-1} + \sum_{i=1}^n (1 - c_{venda}) y_i^{t-1} - \sum_{i=1}^n (1 + c_{compra}) z_i^{t-1} \right\}, \quad t = 1, \dots, T \\
& (v^t)' x^t \geq b^t, \quad t = 1, \dots, T \\
& x_i^t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n+1; t = 1, \dots, T \\
& y_i^t, z_i^t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \\
& x_i^t \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^t}{\Gamma}, \quad x_i^t \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^t}{\Pi}, \quad t = 1, \dots, T
\end{aligned} \tag{131}$$

onde “v<sup>b</sup>” é o vetor temporal de valores de “VPA/P” e “b<sup>b</sup>” é uma constante.

Na formulação (131) nota-se que a primeira restrição equivale à função objetivo, que trata da maximização da riqueza terminal e que foi incorporada no campo das restrições para o tratamento adequado da robustez; a segunda restrição endereça a aversão ao risco do investidor, com o respectivo fator de robustez para os parâmetros de dispersão incertos; a terceira e a quarta restrições são as equações de balanço, respeitando a hipótese de carteira autofinanciável e considerando os fatores de robustez para os parâmetros de retornos esperados incertos; a quinta restrição é baseada no modelo Fama & French [1992], com objetivo de estimular a alocação em ações de maior razão valor patrimonial por valor de mercado; a sexta e a sétima são restrições de *short sales*; e por fim a oitava restrição limita a alocação individual por ação, tornando possível a aplicação das formulações (123) e (124).

## 6.4. Restrições Probabilísticas

Nesta seção, são apresentadas as garantias probabilísticas para que a formulação robusta (131) seja factível considerando os conjuntos de incerteza

$$\Theta_R = \{\tilde{r} : \| M_R (\tilde{r}^t - \bar{r}^t) \|_{\Gamma} \leq \Delta^t, t = 1, \dots, T\} \quad (132)$$

$$\Theta_A = \{\tilde{a} : \| M_A (\tilde{a}^t - \bar{a}^t) \|_{\Pi} \leq \Omega^t, t = 1, \dots, T\} \quad (133)$$

Em Bertsimas et al. [2004], prova-se que se a norma usada para a definição do conjunto de incerteza é a Norma-D, então

$$\Pr ob \left\{ (\tilde{a}^t)^T x^t \leq \sigma^t, t = 1, \dots, T \right\} \geq 1 - \frac{1}{1 + \Omega^2 \min \left\{ 1, \frac{\Pi^2}{n} \right\}} \quad (134)$$

$$\Pr ob \left\{ \chi \leq (1 + \tilde{r}^T)^T x^T \right\} \geq 1 - \frac{1}{1 + \Delta^2 \min \left\{ 1, \frac{\Gamma^2}{n} \right\}} \quad (135)$$

$$\Pr ob \left\{ (x^t)^T e \leq (1 + \tilde{r}^{t-1})^T \{x^{t-1} - y^{t-1} + z^{t-1}\}, t = 1, \dots, T \right\} \geq 1 - \frac{1}{1 + \Delta^2 \min \left\{ 1, \frac{\Gamma^2}{n} \right\}} \quad (136)$$

Ou seja, pelas formulações (134), (135) e (136), pode-se determinar a probabilidade de violação das representações das restrições probabilísticas em (131) de acordo com a escolha dos conjuntos de incerteza dos parâmetros incertos do problema.

## 6.5. Fatores de Robustez

Uma questão relevante que deve ser endereçada é a definição dos fatores de robustez “ $\Delta$ ” e “ $\Omega$ ”, os quais determinam o tamanho dos conjuntos de incerteza “ $\Theta_R$ ” e “ $\Theta_A$ ” e dão a dimensão do nível de incerteza imposto ao modelo. Sabe-se pela seção 6.4 que seus valores

podem ser relacionados à probabilidade de violação das restrições incertas. Todavia, é importante saber dimensionar estes parâmetros de uma maneira mais tangível e intuitiva do que a simples avaliação do seu impacto na probabilidade de violação das restrições.

Uma possível idéia é relacionar a magnitude dos fatores de robustez ao número de desvios que os parâmetros incertos podem desviar dos seus valores nominais. Por exemplo, o valor de “ $\Delta$ ” pode ser determinado assumindo que os valores dos retornos incertos de todos os ativos podem desviar “ $\psi$ ” desvios padrões de seus valores nominais.

Definindo o vetor “ $\hat{o}$ ” a partir do número de “desvios-padrões” amostrais de cada parâmetro incerto

$$\hat{o}^t = \Psi(StDev^t) \quad (137)$$

onde “ $\psi$ ” é um escalar e “ $StDev^b$ ” é o vetor de desvios padrões históricos dos retornos, e assumindo que as matrizes “ $M_R$ ” e “ $M_A$ ” são as matrizes identidades, temos que o conjunto de incerteza para os parâmetros de retorno pode ser reformulado segundo Bertsimas and Sim [2004] da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \|\tilde{r}^t - \check{r}^t\|_{\Gamma} &= \max_{\{S|S \subseteq N, |S|=\Gamma\}} \left\{ \sum_{j \in S} |(\tilde{r}^t - \check{r}^t)_j| \right\} = \max_{\{S|S \subseteq N, |S|=\Gamma\}} \left\{ \sum_{j \in S} |\hat{o}_j^t| \right\} \\ &= \max \Psi \sum_{j \in S} |StDev_j^t| z_j \\ &\text{s.a. } \sum_{j \in S} z_j \leq \Gamma \\ &0 \leq z_j \leq 1 \end{aligned} \quad (138)$$

Portanto, arbitrando um valor para “ $\psi$ ” e resolvendo o programa de maximização (138), é possível determinar a norma do vetor  $(\tilde{r}^t - \check{r}^t)$  e, para o caso particular de “ $M_R$ ” igual à matriz identidade, dimensionar o tamanho do conjunto de incerteza, representado por “ $\Delta$ ”. Em outras palavras, é possível definir um valor para “ $\Delta$ ” estipulando o número de desvios dentro do qual a estimativa do retorno de cada ação pode flutuar. O mesmo exercício pode ser feito de maneira análoga para as estimativas de dispersão e para a definição de “ $\Omega$ ”.

## 7. RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentadas as simulações numéricas e os resultados da aplicação do modelo proposto por esta tese. Foram conduzidos alguns experimentos para uma carteira de ativos, simulando seu comportamento em uma situação real de mercado, para múltiplos períodos de tempo. Vale observar que todas as simulações foram realizadas com o auxílio da ferramenta de otimização What'sBest!®, versão 10.0.3.2, que é um add-in para o MS-Excel que reproduz as funcionalidades do aplicativo LINGO, fornecido pela empresa LINDO Systems Inc.

Os objetivos dos testes foram:

- Validar empiricamente a superioridade do modelo robusto com respeito ao modelo nominal (sem robustez).
- Verificar como a carteira se comporta, para diferentes níveis de robustez, quando as realizações reais dos parâmetros incertos diferem substancialmente de suas estimativas iniciais.
- Testar se a capacidade de prever o retorno dos ativos, com a inclusão de uma restrição adicional baseada no Modelo de Fama & French [1992], ajuda a abordagem de otimização robusta multiperíodo a ter melhor um melhor desempenho.

A carteira teste foi composta de cinquenta e duas ações, que faziam parte do índice Bovespa em 02/01/2006, mais um ativo livre de risco. Seguem os detalhes de cada ativo na tabela 2.

Tabela 2: Ações que compõem a carteira teste

Ação	Emissor
ALLL11	ALL America Latina Logística S.A.
AMBV4	Cia de Bebidas das Américas
BBAS3	Banco do Brasil S.A.

BBDC4	Banco Bradesco S.A.
BRAP4	Bradespar S.A.
BRFS3	BRF - Brasil Foods S.A.
BRKM5	Braskem S.A.
BRT04	Brasil Telecom S.A.
BTOW3	B2W - Cia Global Do Varejo
CCRO3	CCR – Cia de Concessões Rodoviárias S.A.
CESP6	Cia Energética de São Paulo
CGAS5	Cia de Gás de São Paulo
CLSC6	Centrais Elétricas de Santa Catarina S.A.
CMIG4	Cia Energética de Minas Gerais
CPFE3	CPFL Energia S.A.
CPLE6	Cia Paranaense de Energia
CRUZ3	Souza Cruz S.A.
CSAN3	Cosan SA Indústria e Comercio
CSNA3	Cia Siderúrgica Nacional S.A.
CYRE3	Cyrela Brazil Realty S.A. Empreendimentos
ELET3	Centrais Elétricas Brasileiras S.A.
ELET6	Centrais Elétricas Brasileiras S.A.
ELPL6	Eletropaulo Metropolitana Eletricidade de São Paulo
EMBR3	Embraer S.A.
GFA3	Gafisa S.A.
GGBR4	Gerdau S.A.
GOAU4	Metalúrgica Gerdau S.A.
GOLL4	Gol Linhas Aéreas Inteligentes S.A.
ITSA4	Itaúsa - Investimentos Itaú S.A.
ITUB4	Itaú Unibanco Holding S.A.
KLBN4	Klabin S.A.
LAME4	Lojas Americanas S.A.
LIGT3	Light S.A.
LREN3	Lojas Renner S.A.
NATU3	Natura Cosméticos S.A.
NETC4	Net Serviços De Comunicação S.A.

PCAR5	Cia Brasileira de Distribuição - Grupo Pão de Açúcar
PETR3	Petróleo Brasileiro S.A.
PETR4	Petróleo Brasileiro S.A.
SBSP3	Cia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo
TAMM4	TAM SA
TCSL3	TIM Participações S.A.
TCSL4	TIM Participações S.A.
TLPP4	Telecomunicações de São Paulo S.A.
TMAR5	Telemar Norte Leste S.A.
TNLP3	Tele Norte Leste Participações S.A.
TNLP4	Tele Norte Leste Participações S.A.
TRPL4	CTEEP - Cia de Transmissão de Energia Elétrica Paulista
USIM5	Usinas Siderúrgicas de Minas Gerais S.A.
VALE3	Vale S.A.
VALE5	Vale S.A.
VIVO4	Vivo Participações S.A.

Observa-se que a carteira inicial é composta de uma unidade de riqueza alocada no ativo livre de risco.

No conjunto de experimentos, o modelo foi testado para um período de dois anos e meio, dividido em cinco subperíodos equivalentes a cinco semestres entre 31 de outubro de 2007 e 30 de abril de 2010, sendo que a riqueza terminal é verificada no final do quinto subperíodo. Interessante mencionar que os períodos utilizados para a estimação dos parâmetros e a aplicação do modelo representam momentos macroeconômicos bastante distintos, indicando momentos pré e pós-crise derivada da quebra do Banco *Lehman Brothers* nos EUA. O objetivo dessa escolha é comparar os comportamentos dos modelos em realidades que correspondem a rupturas de ambiente. Observando o comportamento da amostra de ações ao longo do período de testes e lembrando que

Semestre 1 → 1 de novembro de 2007 a 30 de abril de 2008

Semestre 2 → 1 de maio de 2008 a 31 de outubro de 2008

Semestre 3 → 1 de novembro de 2008 a 30 de abril de 2009

Semestre 4 → 1 de maio de 2009 a 31 de outubro de 2009

Semestre 5 → 1 de novembro de 2009 a 30 de abril de 2010

nota-se na figura 4 a discrepância das médias ao longo tempo, indicando um período de forte queda dos preços, coincidente com a crise do mercado *subprime* norte-americano, seguido de um período de recuperação. Vale mencionar que o período de maior queda, ou menor retorno médio (terceiro semestre) é também o de menor desvio amostral, indicando que quase todas as ações “andaram” na mesma direção. Uma medida de correlação histórica muito provavelmente seria um mau estimador para a correlação entre os ativos neste momento.

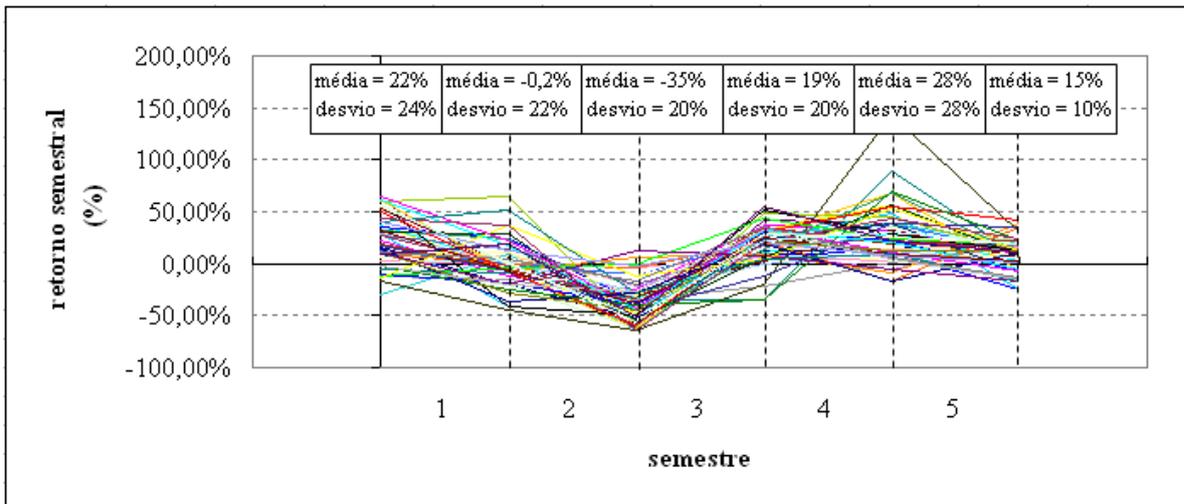


Figura 4 - retornos semestrais ( $r_t$ ) das ações do portfólio teste, onde  $r_t \equiv$  retorno de  $t-1$  a  $t$ ;  $t = 1, \dots, 5$

Fonte: Bloomberg

Os custos de transação foram arbitrados como iguais a 0,3% do patrimônio total da carteira e as matrizes “ $M_R$ ” e “ $M_A$ ” foram escolhidas como matrizes identidades de maneira a definir os conjuntos de incerteza como as normas dos vetores incertos. Interessante notar na formulação (131) que esta hipótese permite que o fator de robustez impacte uniformemente todos os parâmetros. Em Bertsimas and Pachamanova [2008], a escolha de “ $M_R$ ” como sendo a matriz de covariância dos retornos impõe uma maior penalização por robustez aos ativos mais arriscados.

Bertsimas et. al. [2004] demonstram que para  $\Gamma$  ou  $\Pi = \sqrt{n}$ , onde “ $n$ ” é a dimensão do vetor de parâmetros incertos, a Norma D se aproxima da Norma Euclidiana e, portanto, os conjuntos de incerteza definidos se aproximam de elipsóides, tornando sua geometria mais intuitiva. Portanto, também serão utilizados como parâmetros os valores de  $\Gamma = \Pi = \sqrt{52}$ . Já ao parâmetro de aversão ao risco “ $\sigma^t$ ,  $t = 1, \dots, 5$ ” foi atribuído o valor de 0,5, restringindo o desvio agregado do portfólio conforme a equação (116).

Assim como em Ben-Tal et al. [2000] e Bertsimas and Pachamanova [2008], todas as simulações foram realizadas sob o método de horizontes rolantes. Conforme já foi descrito anteriormente nesta tese, o método começa com a montagem e resolução do modelo de otimização para os cinco estágios à frente considerando o portfólio inicial (composto por uma unidade de moeda aplicada no ativo livre de risco). As alocações ótimas relacionadas ao primeiro estágio do programa capitalizadas pelos retornos reais (observados no mercado) relativos ao período passam a compor o novo portfólio inicial, que servirá de entrada para a resolução do programa para quatro estágios à frente. As decisões ótimas relativas ao primeiro estágio do programa de quatro períodos, capitalizada pelos retornos reais de mercado, formarão o portfólio de largada para o problema de 3 períodos resultantes. Assim, a dinâmica se repete até que se calcule a composição final do portfólio capitalizada pelos retornos reais do último período.

## 7.1. Experimento 1

Para o primeiro experimento, a restrição baseada no modelo de Fama & French [1992] é desconsiderada e os valores esperados e desvios futuros dos retornos dos ativos para cada período são estimados considerando a média e o desvio absoluto dos retornos semestrais dos ativos, calculados a partir de séries históricas diárias em janelas correspondentes ao semestre imediatamente anterior. Observa-se que a qualidade do estimador de retornos esperados seja mesmo ruim, para exacerbar o impacto dos erros de estimação sobre a solução nominal. E isso já fica claro com análise da figura e da tabela a seguir.

Na figura 4, podem ser observadas as alocações sugeridas pelo modelo de otimização para estimativas de retornos e desvios iguais aos seus valores nominais ( $\Delta = \Omega = 0$ ), bem como o comportamento da riqueza como consequência das alocações sugeridas.

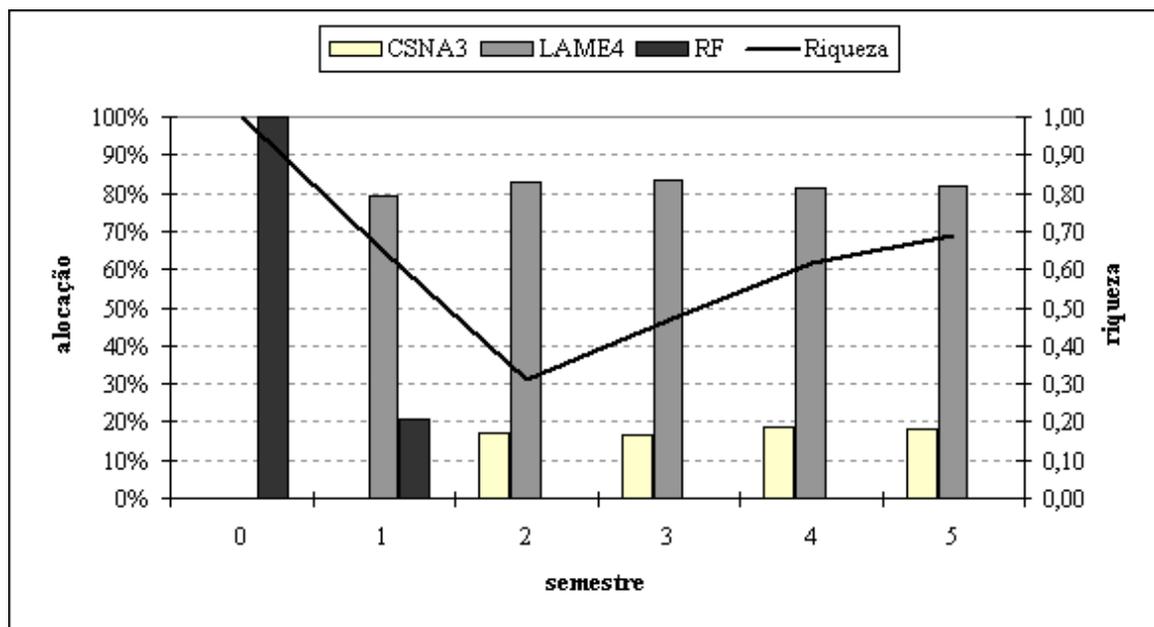


Figura 5 - Solução nominal para o modelo multiperíodo

Tabela 3: Retornos intertemporais para os ativos da solução nominal

ativo	tipo	sem 1	sem 2	sem 3	sem 4	sem 5
CSNA3	estimativa	60,21%	64,67%	-60,41%	48,44%	45,86%
CSNA3	valor real	64,67%	-60,41%	48,44%	45,86%	11,44%
LAME4	estimativa	57,38%	-41,13%	-49,92%	51,85%	28,90%
LAME4	valor real	-41,13%	-49,92%	51,85%	28,90%	11,88%

Percebe-se que o algoritmo de otimização opta por alocar a maior parte da riqueza na ação LAME4 e o restante em renda fixa no primeiro período, motivado em grande parte pela forte estimativa de retorno para o período (+57%). Todavia, o valor real do retorno (-41%) comprova que a estimativa era ruim, causando uma perda de riqueza na carteira (1 para 0,64). No período seguinte, a estimativa de alta para a ação CSNA3 motiva o algoritmo a rebalancear o portfólio, transferindo a alocação em renda fixa do primeiro período para a ação. Mais uma vez, o valor real do retorno (-60%) indica que a má estimativa induziu o algoritmo a fazer outra alocação equivocada, causando mais um forte impacto na carteira. E para os períodos subsequentes, o algoritmo mantém a mesma alocação nas duas ações, que mostram recuperação, mas que é insuficiente para evitar uma perda de riqueza no período

final. Esse exemplo evidencia o impacto que más estimativas podem trazer para modelos não robustos.

O modelo robusto (130), além de forçar a diversificação do portfólio ao impor a restrição individual de ativos, a qual é rerepresentada a seguir

$$x_i^t \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^t}{\Gamma}, \quad x_i^t \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^t}{\Pi}, \quad t = 1, \dots, T \quad (139)$$

onde  $\Gamma = \Pi = \sqrt{52}$ , começa a acrescentar algum grau de conservadorismo na solução, buscando alocações mais defensivas, com aumento da posição no ativo livre de risco e do peso do atributo risco na decisão de alocação do algoritmo. A seguir, apresentam-se os principais resultados: as alocações por período, as riquezas terminais e os retornos entre períodos para valores crescentes de “ $\Delta$ ”.

Tabela 4: Alocações robustas para  $\Delta = 0,3$ .

Coeficientes de robustez ( $\Delta = 0,3$ e $\Omega = 0$ )						
Probabilidade de violação das restrições ( $\varepsilon_{\Delta} = 92\%$ )						
	início	sem 1	sem 2	sem 3	sem 4	sem 5
BBAS3	0%	13%	11%	12%	15%	12%
BBDC4	0%	14%	14%	13%	13%	13%
BRFS3	0%	3%	4%	3%	3%	3%
CESP6	0%	0%	0%	0%	5%	6%
CSNA3	0%	14%	6%	7%	8%	8%
LAME4	0%	5%	4%	5%	5%	6%
LREN3	0%	11%	7%	8%	9%	12%
PETR3	0%	9%	8%	9%	8%	7%
SBSP3	0%	13%	13%	14%	12%	11%
TLPP4	0%	0%	0%	4%	3%	2%
TMAR5	0%	17%	11%	10%	8%	7%
VIVO4	0%	0%	0%	0%	9%	10%
RF	100%	1%	21%	15%	0%	3%

Tabela 5: Alocações robustas para  $\Delta = 0,9$ .

Coeficientes de robustez ( $\Delta = 0,9$ e $\Omega = 0$ )						
Probabilidade de violação das restrições ( $\varepsilon_{\Delta} = 55\%$ )						
	início	sem 1	sem 2	sem 3	sem 4	sem 5
BBAS3	0%	14%	12%	13%	15%	10%
BRFS3	0%	13%	14%	12%	12%	12%
CESP6	0%	0%	0%	0%	11%	12%
CSNA3	0%	17%	3%	3%	4%	4%
CYRE3	0%	1%	1%	1%	1%	1%
LAME4	0%	7%	5%	7%	7%	7%
LREN3	0%	13%	8%	9%	10%	13%
PETR3	0%	11%	9%	10%	8%	7%
PETR4	0%	11%	9%	10%	9%	8%
SBSP3	0%	14%	14%	15%	12%	11%
VIVO4	0%	0%	0%	0%	10%	10%
RF	100%	0%	25%	21%	0%	5%

Tabela 6: Alocações robustas para  $\Delta = 2$ .

Coeficientes de robustez ( $\Delta = 2$ e $\Omega = 0$ )						
Probabilidade de violação das restrições ( $\varepsilon_{\Delta} = 20\%$ )						
	início	sem 1	sem 2	sem 3	sem 4	sem 5
BRAP4	0%	11%	7%	9%	9%	9%
CESP6	0%	0%	0%	0%	12%	13%
CSNA3	0%	22%	5%	6%	14%	14%
CYRE3	0%	11%	7%	8%	10%	8%
LAME4	0%	8%	7%	8%	11%	12%
NATU3	0%	0%	0%	0%	1%	1%
PETR3	0%	14%	9%	10%	9%	7%
PETR4	0%	14%	10%	10%	9%	8%
VALE3	0%	6%	5%	5%	5%	5%
VALE5	0%	13%	11%	11%	11%	12%
VIVO4	0%	0%	0%	0%	10%	11%

RF	100%	0%	40%	34%	0%	0%
----	------	----	-----	-----	----	----

Tabela 7: Alocações robustas para  $\Delta = 3$ .

Coeficientes de robustez ( $\Delta = 3$ e $\Omega = 0$ )						
Probabilidade de violação das restrições ( $\varepsilon_{\Delta} = 10\%$ )						
	início	sem 1	sem 2	sem 3	sem 4	sem 5
BRAP4	0%	11%	8%	9%	9%	9%
CESP6	0%	0%	0%	0%	11%	13%
CSNA3	0%	22%	5%	6%	11%	11%
CYRE3	0%	11%	7%	8%	10%	8%
LAME4	0%	8%	7%	8%	11%	11%
PETR3	0%	14%	11%	12%	10%	9%
PETR4	0%	14%	12%	13%	12%	10%
VALE3	0%	7%	5%	6%	5%	6%
VALE5	0%	13%	11%	11%	11%	12%
VIVO4	0%	0%	0%	0%	10%	10%
RF	100%	0%	33%	28%	0%	0%

Tabela 8: Riqueza terminal para valores crescentes de “ $\Delta$ ”

	Ibovespa	Nominal	$\Delta = 0,3$	$\Delta = 0,9$	$\Delta = 2,0$	$\Delta = 3,0$
Riqueza terminal	1,033866	0,689075	1,092374	1,109163	1,120643	1,075368

Tabela 9: Retornos Intertemporais para valores crescentes de “ $\Delta$ ”

	sem 1	sem 2	sem 3	sem 4	sem 5	StDev <sup>+</sup>	Ret/StDev <sup>++</sup>
Ibovespa	3,9%	-45,1%	26,9%	30,1%	9,7%	30,2%	11,2%
Nominal	-35,4%	-52,1%	51,3%	31,7%	11,8%	44,0%	-71%
$\Delta = 0,3$	6,4%	-37,7%	20,1%	27,5%	7,6%	25,3%	36,5%
$\Delta = 0,9$	2,5%	-38,3%	21,8%	30,4%	10,5%	26,7%	41%
$\Delta = 2,0$	5,8%	-40,0%	22,8%	31,8%	9,1%	27,7%	43,5%
$\Delta = 3,0$	5,7%	-42,5%	24,9%	30,9%	8,3%	28,9%	26,1%

+ desvio padrão dos retornos intertemporais nos cinco semestres, ++ razão entre o retorno acumulado terminal (riqueza terminal – 1) e o desvio padrão dos retornos intertemporais nos cinco semestres

A análise das tabelas 8 e 9 já nos permite a primeira vista perceber que a performance da carteira otimizada pelo método robusto supera o método nominal e o Ibovespa, tanto pelo critério da riqueza terminal e como pela razão retorno por desvio padrão para todos os coeficientes de robustez testados. Nota-se também que o método robusto gera alocações com desempenhos mais estáveis (menor desvio padrão) e com melhor desempenho durante os períodos de maior volatilidade nos mercados (semestres 1, 2 e 3).

Analisando as tabelas de 4 a 7, é possível entender as razões para este melhor desempenho. Em primeiro lugar, a restrição individual (132) contribui para que a alocação do modelo robusto seja mais diversificada, diluindo o risco idiossincrático principalmente nos momentos de maior tensão nos mercados. Ainda assim, o modelo robusto rende melhor que o Ibovespa, que é mais diversificado.

Em segundo lugar, o algoritmo aloca uma parcela em renda fixa nos momentos em que as estimativas de retorno estão bem ruins, como nos semestres 2 e 3. E esta alocação no ativo livre de risco aumenta quanto maior o “ $\Delta$ ”, seguindo a intuição de que as soluções mais robustas buscam alocações mais conservadoras. Este comportamento é o diferencial do modelo robusto no 2º semestre, por exemplo, quando comparado à solução nominal. Nos semestres de recuperação, por exemplo, a robustez acaba penalizando o modelo, que rende pior que o modelo nominal. Porém, a performance estável, principalmente nos momentos turbulentos, é a razão para a superioridade da solução robusta.

É interessante acrescentar também outras observações. A performance da alocação gerada para um coeficiente  $\Delta = 0,9$  supera a gerada para  $\Delta = 0,3$ , principalmente em razão do desempenho das carteiras geradas nos quarto e quinto semestres. Isso porque o algoritmo acertou nos aumentos das concentrações em BRFS3 e CESP6, que apresentaram ótimos retornos no período, e nas vendas de TLPP4 e TMAR5, que desempenharam abaixo da média.

Já a alocação gerada para  $\Delta = 2$  difere razoavelmente das geradas para  $\Delta = 0,3$  e  $\Delta = 0,9$ . E a maior alocação nas ações da Petrobrás (PETR4 e PETR5), mais defensivas nestes momentos mais turbulentos, ajudou para uma melhor performance da carteira, principalmente no primeiro semestre. Vale ressaltar que, para  $\Delta = 2$ , a probabilidade de que as aproximações seguras das restrições sejam válidas para todas as realizações dos parâmetros incertos é de 80%. Ou seja, com este valor de parâmetro, garante-se um nível de robustez adequado, além de se obter a melhor performance entre todos os modelos testados até agora.

Por fim, para  $\Delta = 3$ , a menor alocação em renda fixa e maior posição nas ações da Petrobrás faz o modelo sofrer nos últimos dois períodos e apresentar uma performance pior

que para  $\Delta = 2$ . Cabe ressaltar que para valores de “ $\Delta$ ” maiores que 4,2, o modelo atinge o grau máximo de conservadorismo, alocando toda a riqueza em renda fixa nos cinco períodos.

Os resultados obtidos no primeiro experimento confirmam os resultados apresentados em Bertsimas & Pachamanova [2008], onde o modelo robusto multiperíodo ( $\Delta = 0,3$  e  $\Gamma = \sqrt{3}$ ) tem melhor performance que o nominal em cenários de estresse. Vale observar que os autores não adotam cenários reais, e sim, cenários simulados, onde o modelo robusto se destaca nos casos de maior risco. Com isso, partimos para o segundo experimento, onde procuramos verificar se a incorporação da robustez também na estimação dos parâmetros de dispersão contribui para a melhora do modelo.

## 7.2. Experimento 2

Para o segundo experimento, os valores esperados e desvios futuros dos retornos também são estimados considerando a média e o desvio absoluto dos semestres imediatamente anteriores. E a partir dos resultados do primeiro experimento, faz-se variar o parâmetro “ $\Omega$ ” e observa-se o desempenho do modelo. A seguir, apresentam-se os principais resultados: as alocações por período, as riquezas terminais e os retornos entre períodos para valores crescentes de “ $\Delta$ ” e “ $\Omega$ ”.

Tabela 10: Alocações robustas para  $\Delta = 0$  e  $\Omega = 0,5$ .

Coeficientes de robustez ( $\Delta = 0$ e $\Omega = 0,5$ )						
Probabilidade de violação das restrições ( $\varepsilon_{\Omega} = 80\%$ )						
	início	sem 1	sem 2	sem 3	sem 4	sem 5
BBAS3	0%	11%	8%	9%	11%	11%
BBDC4	0%	12%	10%	10%	10%	10%
CESP6	0%	0%	0%	0%	10%	11%
CLSC6	0%	14%	13%	11%	10%	9%
CSNA3	0%	0%	0%	0%	0%	0%
ELET3	0%	0%	0%	7%	5%	6%
ELPL6	0%	16%	9%	10%	10%	10%
LAME4	0%	3%	2%	3%	4%	4%

LREN3	0%	7%	4%	4%	5%	7%
PCAR5	0%	0%	9%	8%	10%	10%
SBSP3	0%	13%	10%	12%	10%	9%
TLPP4	0%	0%	0%	6%	5%	3%
VIVO4	0%	0%	0%	0%	9%	9%
RF	100%	23%	34%	19%	0%	0%

Tabela 11: Alocações robustas para  $\Delta = 0,3$  e  $\Omega = 0,5$ .

Coeficientes de robustez ( $\Delta = 0,3$ e $\Omega = 0,5$ )						
Probabilidade de violação das restrições ( $\varepsilon_{\Delta} = 92\%$ e $\varepsilon_{\Omega} = 80\%$ )						
	início	sem 1	sem 2	sem 3	sem 4	sem 5
BBAS3	0%	12%	9%	11%	13%	11%
BBDC4	0%	11%	11%	11%	11%	10%
CESP6	0%	0%	0%	0%	10%	12%
CLSC6	0%	14%	15%	12%	11%	10%
CSNA3	0%	10%	5%	7%	8%	8%
LAME4	0%	4%	3%	4%	8%	8%
LREN3	0%	8%	5%	5%	6%	8%
SBSP3	0%	13%	12%	13%	11%	10%
TLPP4	0%	0%	0%	5%	4%	3%
TMAR5	0%	0%	10%	9%	8%	6%
VIVO4	0%	0%	0%	0%	9%	10%
RF	100%	29%	30%	23%	0%	2%

Tabela 12: Alocações robustas para  $\Delta = 0,9$  e  $\Omega = 0,5$ .

Coeficientes de robustez ( $\Delta = 0,9$ e $\Omega = 0,5$ )						
Probabilidade de violação das restrições ( $\varepsilon_{\Delta} = 55\%$ e $\varepsilon_{\Omega} = 80\%$ )						
	início	sem 1	sem 2	sem 3	sem 4	sem 5
BBAS3	0%	12%	11%	12%	14%	11%
BRFS3	0%	2%	2%	2%	2%	2%

CESP6	0%	0%	0%	0%	8%	8%
CSNA3	0%	11%	7%	8%	9%	9%
LAME4	0%	4%	4%	5%	4%	4%
LREN3	0%	9%	6%	7%	8%	10%
PCAR5	0%	0%	18%	16%	18%	12%
PETR3	0%	7%	7%	8%	6%	5%
PETR4	0%	8%	7%	8%	7%	6%
TMAR5	0%	0%	13%	11%	9%	7%
USIM5	0%	0%	7%	7%	8%	9%
VIVO4	0%	0%	0%	0%	9%	9%
RF	100%	46%	19%	17%	0%	8%

Tabela 13: Alocações robustas para  $\Delta = 2$  e  $\Omega = 0,5$ .

Coeficientes de robustez ( $\Delta = 2$ e $\Omega = 0,5$ )						
Probabilidade de violação das restrições ( $\varepsilon_{\Delta} = 20\%$ e $\varepsilon_{\Omega} = 80\%$ )						
	início	sem 1	sem 2	sem 3	sem 4	sem 5
BRAP4	0%	9%	6%	7%	7%	7%
CESP6	0%	0%	0%	0%	11%	12%
CSNA3	0%	17%	6%	7%	13%	13%
CYRE3	0%	9%	5%	6%	7%	6%
LAME4	0%	7%	5%	7%	11%	11%
NATU3	0%	0%	0%	0%	0%	0%
PCAR5	0%	0%	12%	10%	12%	12%
PETR3	0%	11%	10%	11%	9%	8%
PETR4	0%	11%	10%	11%	10%	9%
TMAR5	0%	0%	6%	5%	4%	3%
USIM5	0%	0%	5%	5%	5%	6%
VALE5	0%	2%	2%	2%	2%	2%
VIVO4	0%	0%	0%	0%	10%	10%
RF	100%	34%	34%	30%	0%	0%

Tabela 14: Alocações robustas para  $\Delta = 3$  e  $\Omega = 0,5$ .

Coeficientes de robustez ( $\Delta = 3$ e $\Omega = 0,5$ )						
Probabilidade de violação das restrições ( $\varepsilon_{\Delta} = 10\%$ e $\varepsilon_{\Omega} = 80\%$ )						
	início	sem 1	sem 2	sem 3	sem 4	sem 5
BRAP4	0%	11%	8%	9%	9%	10%
CESP6	0%	0%	0%	0%	9%	10%
CSNA3	0%	22%	8%	9%	13%	13%
CYRE3	0%	11%	8%	8%	13%	9%
GOLL4	0%	0%	0%	0%	0%	0%
LAME4	0%	8%	7%	9%	10%	10%
PETR3	0%	14%	13%	13%	9%	8%
PETR4	0%	14%	13%	14%	12%	10%
VALE3	0%	7%	6%	6%	5%	6%
VALE5	0%	13%	12%	11%	12%	13%
VIVO4	0%	0%	0%	0%	8%	8%
RF	100%	0%	26%	22%	0%	4%

Tabela 15: Riqueza terminal para valores crescentes de “ $\Delta$ ” e “ $\Omega$ ”

	Ibovespa	$\Delta = 0$	$\Delta = 0,3$	$\Delta = 0,9$	$\Delta = 2,0$	$\Delta = 3,0$
$\Omega = 0$	1,033866	0,689075	1,092374	1,109163	1,120643	1,075368
$\Omega = 0,5$	-	1,167827	1,060998	1,133321	1,137778	1,078210

Tabela 16: Retornos Intertemporais para valores crescentes de “ $\Delta$ ” e “ $\Omega$ ”

	sem 1	sem 2	sem 3	sem 4	sem 5	StDev	Ret/StDev
Ibovespa	3,9%	-45,1%	26,9%	30,1%	9,7%	30,2%	11,2%
Nominal	-35,4%	-52,1%	51,3%	31,7%	11,8%	44,0%	-71,0%
$\Delta = 0, \Omega = 0,5$	-1,5%	-25,1%	12,9%	25,2%	12,1%	19,2%	87,6%
$\Delta = 0,3, \Omega = 0$	6,4%	-37,7%	20,1%	27,5%	7,6%	25,3%	36,5%
$\Delta = 0,3, \Omega = 0,5$	0,2%	-32,1%	14,6%	26,1%	7,9%	22,0%	27,8%
$\Delta = 0,9, \Omega = 0$	2,5%	-38,3%	21,8%	30,4%	10,5%	26,7%	41,0%

$\Delta = 0,9, \Omega = 0,5$	4,7%	-39,0%	18,6%	35,8%	10,1%	27,8%	48,0%
$\Delta = 2,0, \Omega = 0$	5,8%	-40,0%	22,8%	31,8%	9,1%	27,7%	43,5%
$\Delta = 2,0, \Omega = 0,5$	6,0%	-37,5%	20,0%	32,9%	7,7%	26,5%	52,0%
$\Delta = 3,0, \Omega = 0$	5,7%	-42,5%	24,9%	30,9%	8,3%	28,9%	26,1%
$\Delta = 3,0, \Omega = 0,5$	5,9%	-41,0%	25,5%	30,3%	5,6%	28,2%	27,7%

Ao analisar as tabelas 15 e 16, já se percebe que a simples incorporação da robustez nos parâmetros de desvios sobre o modelo nominal ( $\Delta = 0, \Omega = 0,5$ ) já gera a alocação mais eficiente entre todas as testadas, seja pelo critério da riqueza terminal quanto pelo critério do compromisso retorno-risco. Os resultados são claramente mais consistentes do que os relativos ao cenário onde se incorpora robustez apenas nos parâmetros de retornos ( $\Delta = 0,3, \Omega = 0$ ). Além disso, fora o cenário ( $\Delta = 0,3, \Omega = 0,5$ ), para todos os outros a incorporação da robustez nos parâmetros de desvios gera alocações com melhor desempenho de rentabilidade e compromisso retorno-risco. Interessante notar também que a variação no coeficiente “ $\Omega$ ” gera alocações mais estáveis, ou seja, com menor desvio padrão do que as alocações com  $\Omega = 0$ , com exceção do cenário  $\Delta = 0,9, \Omega = 0,5$ , contribuindo assim para a performance superior pelo critério retorno-risco.

A principal razão para essa performance superior é a maior alocação em renda fixa nos primeiro e segundo semestres gerada pela solução com  $\Omega = 0,5$ , deixando a carteira mais preparada para os momentos turbulentos que viriam no meio do período de testes. Ao analisar a tabela 16, percebe-se que as soluções com robustez nos parâmetros de desvios têm melhor rentabilidade nestes dois semestres em quase todos os cenários de “ $\Omega$ ”. Ou seja, a tendência de maior conservadorismo destas soluções, tornando as carteiras menos sensíveis aos momentos turbulentos, é a principal razão para suas performances destacadas. Cabe destacar que nos semestres de recuperação (quatro e cinco), a solução nominal tem rentabilidade melhor que quase todos os cenários robustos, ressaltando o custo que a robustez impõe em momentos positivos dos mercados.

A utilização de um valor de “ $\Omega$ ” igual a 0,5 corresponde a uma probabilidade de que as restrições sejam violadas por realizações dos parâmetros incertos de desvios de 80%, considerada alta. A seguir, serão apresentados novos resultados para um parâmetro de robustez ainda maior, que reduza essa probabilidade para 50%.

Tabela 17: Alocações robustas para  $\Delta = 0$  e  $\Omega = 1$ .

Coeficientes de robustez ( $\Delta = 0$ e $\Omega = 1$ )						
Probabilidade de violação das restrições ( $\varepsilon_{\Omega} = 50\%$ )						
	início	sem 1	sem 2	sem 3	sem 4	sem 5
BBAS3	0%	8%	6%	7%	9%	12%
CCRO3	0%	0%	0%	0%	0%	7%
CSNA3	0%	7%	3%	4%	5%	6%
GGBR4	0%	0%	0%	0%	0%	11%
LAME4	0%	3%	2%	2%	2%	3%
LREN3	0%	5%	3%	3%	4%	5%
PCAR5	0%	0%	12%	11%	15%	13%
PETR3	0%	1%	1%	1%	1%	1%
SBSP3	0%	10%	8%	9%	8%	7%
TAMM4	0%	0%	0%	0%	0%	14%
TLPP4	0%	0%	0%	53%	12%	9%
TMAR5	0%	0%	5%	5%	5%	4%
USIM5	0%	0%	4%	4%	5%	6%
RF	100%	66%	56%	0%	34%	3%

Tabela 18: Alocações robustas para  $\Delta = 0,3$  e  $\Omega = 1$ .

Coeficientes de robustez ( $\Delta = 0,3$ e $\Omega = 1$ )						
Probabilidade de violação das restrições ( $\varepsilon_{\Delta} = 92\%$ e $\varepsilon_{\Omega} = 50\%$ )						
	início	sem 1	sem 2	sem 3	sem 4	sem 5
BBAS3	0%	9%	7%	8%	10%	9%
CESP6	0%	0%	0%	0%	10%	11%
CSNA3	0%	7%	4%	5%	12%	12%
GOAU4	0%	0%	8%	8%	9%	9%
LAME4	0%	3%	2%	3%	10%	10%
LREN3	0%	6%	3%	4%	5%	6%
NATU3	0%	0%	0%	0%	3%	3%
PCAR5	0%	0%	12%	11%	13%	12%

PETR3	0%	5%	4%	5%	4%	3%
PETR4	0%	1%	1%	1%	1%	1%
TLPP4	0%	0%	0%	7%	5%	4%
TMAR5	0%	0%	7%	6%	5%	4%
USIM5	0%	0%	5%	5%	6%	6%
VIVO4	0%	0%	0%	0%	9%	9%
RF	100%	69%	47%	37%	0%	1%

Tabela 19: Alocações robustas para  $\Delta = 0,9$  e  $\Omega = 1$ .

Coeficientes de robustez ( $\Delta = 0,9$ e $\Omega = 1$ )						
Probabilidade de violação das restrições ( $\varepsilon_{\Delta} = 55\%$ e $\varepsilon_{\Omega} = 50\%$ )						
	início	sem 1	sem 2	sem 3	sem 4	sem 5
AMBV4	0%	0%	0%	0%	13%	13%
BBAS3	0%	0%	0%	0%	0%	6%
BRFS3	0%	1%	0%	0%	1%	1%
CSNA3	0%	9%	5%	7%	9%	9%
GGBR4	0%	0%	0%	0%	0%	12%
GOLL4	0%	0%	0%	0%	0%	10%
LAME4	0%	4%	2%	4%	4%	4%
LREN3	0%	7%	4%	5%	7%	9%
PETR3	0%	6%	4%	6%	6%	5%
PETR4	0%	6%	4%	6%	6%	5%
TAMM4	0%	0%	0%	0%	0%	16%
TMAR5	0%	0%	32%	32%	15%	11%
RF	100%	67%	47%	40%	40%	0%

Tabela 20: Alocações robustas para  $\Delta = 2$  e  $\Omega = 1$ .

Coeficientes de robustez ( $\Delta = 2$ e $\Omega = 1$ )						
Probabilidade de violação das restrições ( $\varepsilon_{\Delta} = 20\%$ e $\varepsilon_{\Omega} = 50\%$ )						
	início	sem 1	sem 2	sem 3	sem 4	sem 5
BRAP4	0%	3%	2%	2%	11%	11%
CESP6	0%	0%	0%	0%	12%	14%
CSNA3	0%	14%	5%	7%	14%	12%
CYRE3	0%	7%	4%	4%	5%	5%
LAME4	0%	6%	4%	5%	12%	12%
NATU3	0%	0%	0%	0%	13%	14%
PETR3	0%	9%	7%	8%	7%	6%
PETR4	0%	9%	7%	8%	7%	7%
TMAR5	0%	0%	10%	9%	8%	6%
VIVO4	0%	0%	0%	0%	11%	11%
RF	100%	52%	62%	57%	0%	2%

Tabela 21: Alocações robustas para  $\Delta = 3$  e  $\Omega = 1$ .

Coeficientes de robustez ( $\Delta = 3$ e $\Omega = 1$ )						
Probabilidade de violação das restrições ( $\varepsilon_{\Delta} = 10\%$ e $\varepsilon_{\Omega} = 50\%$ )						
	início	sem 1	sem 2	sem 3	sem 4	sem 5
BRAP4	0%	10%	7%	8%	8%	9%
CESP6	0%	0%	0%	0%	11%	13%
CSNA3	0%	20%	5%	7%	13%	12%
CYRE3	0%	10%	7%	7%	9%	8%
GOLL4	0%	0%	0%	0%	0%	0%
LAME4	0%	8%	6%	8%	11%	12%
PETR3	0%	13%	12%	13%	11%	10%
PETR4	0%	13%	12%	13%	12%	11%
VALE3	0%	0%	11%	9%	8%	6%
VALE5	0%	7%	6%	6%	6%	7%
VIVO4	0%	0%	0%	0%	10%	10%
RF	100%	18%	34%	29%	0%	2%

Tabela 22: Riqueza terminal para valores crescentes de “ $\Delta$ ” e “ $\Omega$ ”

	Ibovespa	$\Delta = 0$	$\Delta = 0,3$	$\Delta = 0,9$	$\Delta = 2,0$	$\Delta = 3,0$
$\Omega = 0$	1,033866	0,689075	1,092374	1,109163	1,120643	1,075368
$\Omega = 0,5$	-	1,167827	1,060998	1,133321	1,137778	1,078210
$\Omega = 1,0$	-	1,157366	1,223152	1,043838	1,287228	1,073648

Tabela 23: Retornos Intertemporais para valores crescentes de “ $\Delta$ ” e “ $\Omega$ ”

	sem 1	sem 2	sem 3	sem 4	sem 5	StDev	Ret/StDev
Ibovespa	3,9%	-45,1%	26,9%	30,1%	9,7%	30,2%	11,2%
Nominal	-35,4%	-52,1%	51,3%	31,7%	11,8%	44,0%	-71,0%
$\Delta = 0, \Omega = 0,5$	-1,5%	-25,1%	12,9%	25,2%	12,1%	19,2%	87,6%
$\Delta = 0, \Omega = 1,0$	2,7%	-23,3%	13,4%	18,9%	9,0%	16,4%	95,8%
$\Delta = 0,3, \Omega = 0$	6,4%	-37,7%	20,1%	27,5%	7,6%	25,3%	36,5%
$\Delta = 0,3, \Omega = 0,5$	0,2%	-32,1%	14,6%	26,1%	7,9%	22,0%	27,8%
$\Delta = 0,3, \Omega = 1,0$	4,4%	-30,6%	12,9%	34,9%	11,0%	23,7%	94,1%
$\Delta = 0,9, \Omega = 0$	2,5%	-38,3%	21,8%	30,4%	10,5%	26,7%	41,0%
$\Delta = 0,9, \Omega = 0,5$	4,7%	-39,0%	18,6%	35,8%	10,1%	27,8%	48,0%
$\Delta = 0,9, \Omega = 1,0$	6,2%	-25,0%	2,7%	16,5%	9,5%	15,9%	27,5%
$\Delta = 2,0, \Omega = 0$	5,8%	-40,0%	22,8%	31,8%	9,1%	27,7%	43,5%
$\Delta = 2,0, \Omega = 0,5$	6,0%	-37,5%	20,0%	32,9%	7,7%	26,5%	52,0%
$\Delta = 2,0, \Omega = 1,0$	6,7%	-24,1%	14,3%	28,6%	8,0%	19,3%	149,0%
$\Delta = 3,0, \Omega = 0$	5,7%	-42,5%	24,9%	30,9%	8,3%	28,9%	26,1%
$\Delta = 3,0, \Omega = 0,5$	5,9%	-41,0%	25,5%	30,3%	5,6%	28,2%	27,7%
$\Delta = 3,0, \Omega = 1,0$	6,0%	-38,7%	22,0%	28,8%	5,1%	26,3%	28,0%

O aumento da robustez dos parâmetros de desvios torna as soluções ainda mais defensivas, com alocação de parcela substancial em renda fixa nos primeiros três semestres de testes. Esse comportamento torna a performance ainda melhor para  $\Omega = 1,0$  nos cenários de  $\Delta = 0, 0,3$  e  $2$ . O cenário de  $\Delta = 0,9$  é um *outlier* negativo por uma decisão equivocada do algoritmo de investir 32% do patrimônio em TMAR5 no terceiro semestre, que não pôde ser recuperada em função da alocação ultraconservadora nos períodos subsequentes.

A forte alocação em renda fixa incrementou ainda mais o desempenho segundo o compromisso risco-retorno, uma vez que o desempenho das carteiras robustas  $\Omega = 1$  para ficou ainda mais estável (menor desvio padrão). É interessante destacar o desempenho da carteira gerada para o cenário  $\Delta = 2,0$ ,  $\Omega = 1,0$ , que foi a alocação que chegou mais perto do desempenho da renda fixa no período, atingindo uma rentabilidade de 28,7% contra 29,1% do ativo livre de risco.

Vale observar que para valores de  $\Omega$  maiores que 1,0, que diminuiriam a probabilidade de violação das aproximações seguras das restrições estocásticas, o programa opta por soluções ultraconservadoras, com alocações próximas de 100% em renda fixa em todos os períodos.

Com a realização dos dois experimentos, fica clara a superioridade das alocações robustas, para cenários de “ $\Delta$ ” e “ $\Omega$ ” diferentes de zero. A principal conclusão que se tira da análise dos experimentos é que essa superioridade se dá ao melhor desempenho destas soluções em momentos turbulentos, em função de suas alocações defensivas. Todavia, pode-se questionar a vantagem da robustez em momentos de calma, quando o excesso de conservadorismo atuou como um custo para o modelo e impediu muitas vezes um resultado ainda melhor. Essa percepção abre espaço para o terceiro experimento desta tese, quando será verificada uma eventual melhora de desempenho da carteira em um cenário de menor robustez, com a incorporação de um estimador de retornos melhor.

### 7.3. Experimento 3

Para o experimento 3, foi utilizado o modelo expresso pela formulação (131), ou seja, foi levada em conta pelo programa de otimização a restrição baseada no modelo de Fama e French [1992], que privilegia a alocação em ações com maior razão valor patrimonial por preço de mercado (ações de valor). O racional para essa decisão se baseia em um dos principais resultados empíricos daquele trabalho seminal, onde uma carteira com maior alocação em ações de valor tem melhor desempenho do que uma carteira com maior alocação em ações de crescimento (ações de menor valor).

Com isso, o experimento foca nas condições de robustez que geraram a alocação com melhor performance, ou seja, para os valores de “ $\Delta$ ” e “ $\Omega$ ” iguais a 2 e 1 respectivamente, e reduz a robustez dos parâmetros de retorno ( $\Delta$ ), baseado no pressuposto de que o modelo

possui agora um melhor estimador de retornos com a incorporação da restrição adicional. Em outras palavras, incorpora-se a restrição (110) no programa de otimização e para valores de “b” igual a 0,8, “ $\Delta$ ” igual a 0,9 e “ $\Omega$ ” igual a 1, gera-se uma nova alocação para o período de testes. A seguir, são apresentados os resultados do experimento.

Tabela 24: Alocações robustas para  $\Delta = 0,9$ ,  $\Omega = 1$  e  $b^t = 0,8$ .

Coeficientes de robustez ( $\Delta = 0,9$ e $\Omega = 1$ )						
Probabilidade de violação das restrições ( $\varepsilon_{\Delta} = 55\%$ e $\varepsilon_{\Omega} = 50\%$ )						
	início	sem 1	sem 2	sem 3	sem 4	sem 5
AMBV4	0%	0%	0%	0%	11%	11%
CESP6	0%	0%	0%	27%	13%	15%
CSNA3	0%	8%	5%	0%	0%	0%
CYRE3	0%	0%	9%	0%	0%	0%
ELET3	0%	11%	19%	6%	5%	6%
ELET6	0%	0%	0%	8%	5%	7%
GFS3A3	0%	0%	0%	21%	17%	14%
LAME4	0%	3%	2%	0%	0%	0%
LREN3	0%	0%	0%	0%	0%	0%
NATU3	0%	0%	0%	0%	10%	11%
PETR3	0%	5%	4%	0%	0%	0%
PETR4	0%	6%	4%	5%	5%	4%
SBSP3	0%	0%	0%	12%	11%	10%
TMAR5	0%	15%	11%	9%	8%	6%
USIM5	0%	0%	5%	5%	6%	7%
VIVO4	0%	0%	0%	0%	9%	9%
RF	100%	51%	40%	7%	0%	0%

Tabela 25: Riqueza terminal para valores crescentes de “ $\Delta$ ” e “ $\Omega$ ”

	$\Delta = 0,9, \Omega = 1,0$	$\Delta = 2,0, \Omega = 1,0$	$\Delta = 0,9, \Omega = 1,0, b^t = 0,8$
riqueza terminal	1,043838	1,287228	1,303728

Tabela 26: Comparação entre retornos intertemporais

	sem 1	sem 2	sem 3	sem 4	sem 5	StDev	Ret/SDv
$\Delta = 0,9, \Omega = 1,0$	6,2%	-25,0%	2,7%	16,5%	9,5%	15,9%	27,5%
$\Delta = 2,0, \Omega = 1,0$	6,7%	-24,1%	14,3%	28,6%	8,0%	19,3%	149,0%
$\Delta = 0,9, \Omega = 1,0, b^t = 0,8$	10,7%	-29,3%	26,3%	20,7%	9,4%	21,8%	139,6%

O modelo usado no experimento 3 consegue superar em rentabilidade (30,4%) o desempenho da melhor alocação robusta –  $\Delta = 2,0, \Omega = 1,0$  – (28,7%) e superar também a rentabilidade da renda fixa no período (29,1%). Ao analisar a tabela 24, percebe-se que o algoritmo de fato privilegiou algumas ações com alto VPA/P em momentos distintos do período de testes, como CESP6, ELET3, ELET6, GFSA3 e SBSP3. Essas apostas foram fundamentais nos semestres em que o modelo se destacou, como o primeiro e o terceiro principalmente.

Algumas inconsistências, todavia, são interessantes de observar. Por exemplo, a solução de menor robustez para os parâmetros de retorno não supera a solução mais robusta de  $\Delta = 2,0$  justamente em um momento de recuperação, como o quarto semestre, quebrando a nossa hipótese inicial do custo da robustez neste ponto. Além disso, a solução com a restrição adicional gera uma alocação mais volátil ao longo dos semestres e não consegue superar a alocação  $\Delta = 2,0, \Omega = 1,0$  no critério do compromisso retorno-risco.

## 8. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste capítulo, são apresentadas as conclusões e as considerações finais deste trabalho, bem como sugestões de linhas de pesquisa que incorporem melhorias e novas possibilidades à aplicação da otimização robusta na solução de problemas de seleção multitemporal de ativos.

### 8.1. Conclusões

Esta tese se dedicou ao estudo do problema de seleção ótima de ativos financeiros para a composição de portfólios. Como marco inicial para a pesquisa, buscou-se inspiração nos trabalhos seminais apresentados em Markowitz [1952] e Sharpe [1964], que serviram de alicerces para o desenvolvimento da Teoria Moderna de Portfólios (TMP). Em seguida, buscou-se a definição de qual linha teórica derivada da TMP esta tese iria seguir, com base nas seguintes constatações:

- Os problemas de alocação de ativos são intrinsecamente de longo prazo e multitemporais, ou seja, são permitidos balanceamentos periódicos da carteira de maneira a corrigir distorções ao longo do tempo.
- Os modelos de otimização de portfólios por média-variância são muito sensíveis a erros de estimação de seus parâmetros.

O caminho natural, portanto, foi o estudo da viabilidade de diferentes abordagens de otimização que levassem em conta o caráter incerto dos parâmetros de entrada dos modelos e que fossem aplicáveis a problemas com múltiplos períodos. Dentre as abordagens avaliadas, a otimização robusta se mostrou bastante adequada e serviu de motivação para o desenvolvimento deste trabalho, por também endereçar a questão da dimensionalidade do problema de alocação e permitir a criação de modelos tratáveis e computacionalmente eficientes.

Partiu-se, portanto, da análise dos modelos desenvolvidos em Soyster [1973], que deu o primeiro passo na aplicação do método para o caso uniperíodo, e Ben-Tal et al. [2000], este que foi o primeiro a sugerir o uso da otimização robusta para lidar com o tema da dimensão nos problemas multiperíodos. Neste artigo, os autores parametrizam o conjunto de incerteza dos parâmetros de retornos esperados como elipsóides e derivam um programa de otimização do tipo cônico de segunda ordem.

Bertsimas & Pachamanova [2008] apresentam um avanço importante nesta abordagem ao proporem um modelo cujo conjunto de incerteza é parametrizado pela Norma D (ver Bertsimas & Sim, 2004), com geometria poliedral, gerando assim um modelo de programação linear. A vantagem da linearidade neste tipo de problema é por facilitar a solução de estruturas mais complexas e com mais restrições.

Sobre este último trabalho, esta tese apresentou algumas contribuições que constituem um avanço com respeito à formulação de modelos de otimização robusta multitemporal, as quais são destacadas a seguir:

- A incorporação no programa de otimização robusta multitemporal de uma restrição que trata diretamente o grau de aversão ao risco do investidor. Tanto no trabalho de Bertsimas & Pachamanova [2008] quanto no de Ben-Tal et al. [2000], esta restrição aparece apenas indiretamente, a partir da formulação dos conjuntos de incerteza dos parâmetros de retorno.
- Representação dos parâmetros de dispersão (variância) segundo a definição de desvio absoluto apresentada em Konno & Yamazaki [1991]. Tal caracterização permitiu que, mesmo com a incorporação da restrição de risco, o modelo resultante permanecesse como um programa de otimização linear, ao contrário dos modelos de média-variância, que em geral são quadráticos em função da formulação clássica de variância e covariância. Vale ressaltar que, para uma hipótese de distribuição gaussiana para os retornos dos ativos, as medidas de desvio absoluto e desvio padrão praticamente se equivalem.
- Tratamento da incerteza dos parâmetros de dispersão dos retornos, além dos parâmetros de valores esperados. Em Ben-Tal et al. [2000] e Bertsimas & Pachamanova [2008], os parâmetros de dispersão são assumidos como conhecidos. Os trabalhos de Goldfarb e Iyengar [2003] e Halldorsson and Tutuncu [2003] também consideram a natureza incerta da variância, mas os modelos resultantes são não lineares e tratam apenas do caso uniperíodo.

- Incorporação de uma restrição que estimula a alocação em ações com razões mais altas de valor patrimonial por valor de mercado. Esse mecanismo se baseia no racional do modelo de Fama & French [1992].

Com base nos resultados, podemos concluir em primeiro lugar que a abordagem robusta por múltiplos estágios mostra excelente potencial como alternativa aos modelos clássicos de otimização que utilizam somente os valores esperados de retornos (nominais) na formulação por média-variância, validando assim os resultados obtidos em Bersimas & Pachamano [2008]. Também percebemos uma variação na qualidade do modelo de acordo com o nível de robustez imposto. Os modelos mais robustos abrem mão da otimalidade e apresentam soluções mais defensivas, que acabam apresentando bons resultados em um cenário de crise severa nos mercados locais, como a vivenciada após a quebra do banco *Lehman Brothers*. Esta conclusão também vai de acordo com os resultados obtidos na literatura, que destaca o desempenho superior dos modelos robustos em situações de estresse dos mercados.

Como resultados adicionais aos verificados na produção acadêmica recente, as evidências empíricas apresentadas nesta tese também mostram que a consideração do caráter incerto das estimativas dos parâmetros de dispersão é benéfica para a tarefa de alocação de ativos em múltiplos períodos. A agregação de robustez para estas estimativas contribui para a geração de alocações com desempenho superior às alocações com “ $\Omega$ ” igual a zero na maioria dos cenários testados nos experimentos, sejam pelo critério de riqueza terminal (ou rentabilidade acumulada) como pelo critério do compromisso retorno-risco.

E para ratificar o pressuposto inicial de que a robustez pode penalizar a performance em momentos de calma, os resultados obtidos no experimento três demonstram como a melhora na previsão dos retornos contribui para a eficácia do método em termos de rentabilidade final. A incorporação da restrição baseada no modelo de Fama & French [1992] e a conseqüente redução da robustez dos retornos melhoram o desempenho do modelo em termos de riqueza terminal, apesar de gerar uma alocação mais instável e volátil.

É importante ressaltar que algumas hipóteses adotadas pelo modelo podem ser questionadas empiricamente. Uma delas é a de que os retornos dos ativos financeiros na prática não apresentam distribuições de probabilidade exatamente gaussianas, geralmente incorrendo em caudas mais grossas. Todavia, entendemos que a distribuição Normal é uma boa aproximação para descrever a aleatoriedade dos retornos e que essa hipótese não inviabiliza o modelo. Além disso, foram utilizadas ações com boa liquidez no mercado

secundário. No caso de portfólios com mais ações ou compostos por outros ativos, como os títulos de crédito, a hipótese de liquidez total não necessariamente é válida, o que pode causar problemas durante os balanceamentos periódicos nos estágios do programa.

Ainda assim, acreditamos, que os objetivos deste trabalho foram atingidos no sentido de contribuir para o desenvolvimento do tema de alocação robusta de ativos.

## 8.2. Extensões

Acreditamos que extensões e aperfeiçoamentos do método desenvolvido neste estudo podem ser realizados, dentre os quais destacamos:

- A utilização de algum método que permita a utilização de estimações mais confiáveis para os parâmetros de retorno e risco. A utilização de estimadores mais robustos, como os Bayesianos, por exemplo, pode ser uma opção interessante. Outra opção seria derivar um modelo multifatorial baseado diretamente no modelo de Fama & French [1992], tratando a robustez dos fatores.
- A utilização de um método mais sistemático na calibração da robustez do modelo. O tema da definição do melhor *tradeoff* entre a probabilidade de violação das restrições e o excesso de conservadorismo precisa ser mais bem avaliado para a otimização de portfólio.
- Uma maior flexibilização do modelo, sem as restrições de *short sales* e com a incorporação de restrições intertemporais de variância diferentes, eventualmente adotando valores diferentes entre estágios de maneira a explorar momentos distintos de risco.
- A utilização de uma gama maior de ativos na composição do portfólio ótimo, incorporando ativos de renda fixa, por exemplo.
- A investigação dos efeitos dos terceiro e quarto momentos das distribuições dos ativos e a possível incorporação de novas restrições que os consideram, uma vez que hipótese de normalidade não necessariamente se comprova na prática.
- Testar também a variável “capitalização de mercado” além da variável “valor patrimonial por valor de mercado” na restrição baseada no modelo de Fama & French [1992].

Entendemos que quaisquer avanços neste tema são bem-vindos, uma vez que o campo de pesquisa é muito extenso e há muito que ser desenvolvido nesta área.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Atkinson, C., Pliska, S.R., Wilmott, P. Portfolio management with transaction costs. In: **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 453, p. 551-562, 1997.
- Barra. **Risk model handbook: United States equity**, version 3. Berkeley, CA, MSCI Barra, 1998.
- Ben-Tal, A., Margalit, T., Nemirovski, A. Robust modeling of multi-stage portfolio problems. In: Frenk, H. (eds.). **High-Performance Optimization**. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, p. 303-328, 2000
- Ben-Tal, A., Nemirovski, A. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. **Mathematical Programming**, v. 88, p. 411-424, 2000.
- Ben-Tal, A., Margalit, T., Nemirovski, A. **Robust optimization**. New Jersey, Princeton Series in Applied Mathematics, 2009.
- Bertsimas, D., Sim, M. The price of robustness. **Operations Research**, v. 52, n.1, p. 35-53, 2004.
- Bertsimas, D., Pachamanova, D., Sim, M. Robust linear optimization under general norms. **Operations Research Letters**, v. 32, p. 510-516, 2004.
- Bertsimas, D., Pachamanova, D. Robust multiperiod portfolio management in the presence of transaction costs. **Operations Research Letters**, v. 35, p. 3-17, 2008.
- Cochrane, J.H. **Asset pricing**. New Jersey, Princeton University Press, 2001
- Costa, O.L.V., Nabholz, R.B. Seleção ótima de ativos multi-período com restrições intertemporais. In: **VI Encontro Brasileiro de Finanças**, Vitória, ES, p. 520-546, 2006.

- Dantzig, G.B., Infanger, G. Multi-stage stochastic linear programs for portfolio optimization. **Annals of Operations Research**, v. 45, p. 59-76, 1993.
- Davis, M.H.A., Vinter, R.B. **Stochastic modeling and control**. New York, Chapman and Hall, 1985.
- Fabozzi, F.J., Focardi, S.M., Kolm, P.N. **Financial modeling of the equity market**. New Jersey, John Wiley & Sons, 2006.
- Fabozzi, F.J et al. **Robust portfolio optimization and management**. New Jersey, John Wiley & Sons, 2007.
- Fama, E.F., French, K.R. The cross-section of expected stock returns. **The Journal of Finance**, v. 47, p. 427-465, 1992.
- Goldfarb, D., Iyengar, G. Robust portfolio selection problems. **Mathematics of Operations Research**, v. 28, p. 1-38, 2003
- Halldorsson, B.V., Tutuncu, R.H. An interior-point method for a class of saddle-point problems. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 116, p. 559-590, 2003.
- Konno, H., Yamazaki, H. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. **Management Science**, v. 37, n. 5, p. 519-531, 1991.
- Li, D., Ng, W. Optimal dynamic portfolio selection: multiperiod mean-variance formulation. **Mathematical Science**, v. 10, n. 3, p. 387-406, 2000.
- Markowitz, H.M. Portfolio selection. **Journal of Finance**, v. 7, p. 77-91, 1952.
- Markowitz, H.M. **Portfolio selection: eEfficient diversification of investments**. 2<sup>nd</sup> ed., Cambridge, MA, Basil Blackwell, 1991.

Meucci, A. Risk and asset allocation. Verlag, Springer Finance, 2005

Pliska, S.R. A stochastic calculus model of continuous trading: optimal portfolios. **Math. Op. Res.**, v. 11, p. 371-382, 1984.

Ross, S.A. **The arbitrage theory of capital asset pricing**. Journal of Economic Theory, p. 343-362, 1976.

Rostagno, L., Soares, R.O., Soares, K.T.C. Estratégias de valor e de crescimento em ações na Bovespa: uma análise de sete indicadores relacionados ao risco. **Revista de Contabilidade e Finanças**, v. 42, p. 7-21, 2006.

Sayed, A.H., Nascimento, V.H., Cipparrone, F.A.M. A regularized robust design criterion for uncertain data. **SIAM J. Matrix Analysis and Applications**, v. 23, n. 4, p. 1120-1142, 2002.

Sharpe, W.F. Capital asset prices. **Journal of Finance**, p. 425-442, 1964.

Soyster, A.L. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. **Operations Research**, v. 21, p. 1154-1157, 1973.

Taleb, N.N. Nassim Nicholas Taleb's home page. Disponível em:  
<<http://www.fooledbyrandomness.com>>. Acesso em abril de 2011.

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.  
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.  
This page will not be added after purchasing Win2PDF.