Paulo Thiago Fracasso

Análise de Técnicas para Amostragem e Seleção de Vértices no Planejamento Probabilístico de Mapa de Rotas

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Paulo Thiago Fracasso

Análise de Técnicas para Amostragem e Seleção de Vértices no Planejamento Probabilístico de Mapa de Rotas

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração:
Sistemas Digitais

Orientador:
Prof^a. Dr^a. Anna Helena Reali
Costa

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão anterior, sob responsabilidade única do autor e com anuência de seu orientador.

São Paulo, 11 de abril de 2008.

Assinatura do autor:

Assinatura do orientador:

Ficha Catalográfica

Fracasso, Paulo Thiago

Análise de Técnicas para Amostragem e Seleção de Vértices no Planejamento Probabilístico de Mapa de Rotas / Paulo Thiago Fracasso. São Paulo, 2008.

107 p.

Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Computação e Sistemas Digitais.

1. Planejamento de caminhos 2. Algoritmos de amostragem 3. Algoritmos de seleção de vértices 4. Análise de algoritmos 5. Robôs móveis I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Computação e Sistemas Digitais II. Título

Dedicatória

A meus pais e a minha amada esposa.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu forças para realizar este trabalho, e a meus pais, João e Adelia, por proverem as bases da formação da pessoa que sou hoje. Agradeço também a professora Anna Helena Reali Costa, não só pela orientação, mas principalmente pela motivação nos meus momentos de fraqueza. Não poderia deixar de agradecer o pessoal do IPT, especialmente o Kazuto Kawakita, o Nilson Taira e a Olga Yoshida, por terem gentilmente cedido o computador que realizou as simulações deste trabalho e ao Rui Almeida, ao Ricardo Riobo, ao Gilder Nader, ao Elcimar Nóbrega, ao Rubens Telles e ao Renato Fernandes pelo constante incentivo na busca do conhecimento, principalmente na hora do cafezinho. Finalmente, um agradecimento especial para a minha amada Adriana pela compreensão, companheirismo e amor que tem me proporcionado em mais esta jornada.

“O aumento do conhecimento é como uma esfera dilatando-se no espaço:
quanto maior a nossa compreensão, maior o nosso contato com o desconhecido.”

Blaise Pascal

Resumo

O planejamento probabilístico de mapa de rotas tem se mostrado uma poderosa ferramenta para o planejamento de caminhos para robôs móveis, devido a sua eficiência computacional, simplicidade de implementação e escalabilidade em diferentes problemas. Este método de planejamento possui duas fases. Na fase de construção, um mapa de rotas é gerado de forma iterativa e incremental, e armazenado na forma de um grafo G , cujos vértices são configurações livres, amostradas no espaço de configurações do robô e cujas arestas correspondem a caminhos livres de colisão entre tais configurações. Na fase de questionamento, dadas quaisquer configurações de origem e destino, α e β respectivamente, o planejador conecta α e β à G inserindo arestas que correspondem a caminhos livres de colisão, para então procurar por um caminho entre α e β em G . Neste trabalho o foco reside principalmente na fase de construção do mapa de rotas. O objetivo aqui consiste em efetuar uma análise comparativa de diversas combinações de diferentes técnicas de amostragem das configurações livres e de diferentes técnicas de seleção de vértices em G , todas implementadas em um único sistema e aplicadas aos mesmos cenários. Os resultados propiciam um valioso auxílio aos usuários do planejamento probabilístico de mapas de rotas na decisão da melhor combinação para suas aplicações.

Abstract

The probabilistic roadmap planning has emerged as a powerful framework for path planning of mobile robots due to its computational efficiency, implementation simplicity, and scalability in different problems. This planning method proceeds in two phases. In the construction phase a roadmap is incrementally constructed and stored as a graph G whose nodes are free configurations sampled on the robot's configuration space and whose edges correspond to collision-free paths between these configurations. In the query phase, given any start and goal configurations, α and β respectively, the planner first connects α and β to G by adding edges that correspond to collision-free paths, and then searches for a path in G between α and β . In this work, we address mainly the roadmap construction phase. The goal here is to provide a comparative analysis of a number of combinations of different techniques for sampling free configurations and different node adding techniques, all implemented in a single system and applied to the same test workspace. Results help probabilistic roadmap planning users to choose the best combination for their applications.

Lista de Figuras

1.1	Exemplo de planeamento de caminho: (a) posição de origem e destino e (b) um caminho factível (Fonte: Laumond, 1998).	3
2.1	Robô Pioneer 2DX (Fonte: ActivMedia Robotics).	9
2.2	Exemplo de representação para um robô holonômico: (a) espaço de trabalho e (b) espaço de configurações.	10
4.1	Algoritmo da fase de construção do mapa de rotas.	19
4.2	Ilustração da execução da fase de construção do mapa de rotas.	21
4.3	Algoritmo da fase de questionamento.	23
4.4	Ilustração da execução da fase de questionamento.	24
5.1	Amostragem aleatória.	26
5.2	Amostragem pelo método de Halton.	27
5.3	Amostragem no eixo-médio.	29
5.4	Amostragem nas bordas do espaço de configurações livres.	30
5.5	Amostragem pelo método Gaussiano.	31
6.1	Seleção de vértices pela técnica dos k -próximos.	34
6.2	Seleção de vértices pela técnica dos k -visíveis.	35
6.3	Seleção de vértices pela técnica dos k -componentes.	36
7.1	Ambiente densamente ocupado: (a) ambiente de trabalho, (b) caminho ótimo e (c) espaço de configurações.	40
7.2	Ambiente de orifício: (a) ambiente de trabalho, (b) caminho ótimo e (c) espaço de configurações.	40
7.3	Ambiente de uma casa: (a) ambiente de trabalho, (b) caminho ótimo e (c) espaço de configurações.	41
7.4	Ambiente de labirinto: (a) ambiente de trabalho, (b) caminho ótimo e (c) espaço de configurações.	41

7.5	Ambiente com passagem estreita: (a) ambiente de trabalho, (b) caminho ótimo e (c) espaço de configurações.	42
8.1	Ambiente densamente ocupado: (a) caminho ótimo no espaço de configurações, (b) amostragem aleatória, (c) amostragem pelo método de Halton, (d) amostragem no eixo-médio, (e) Amostragem nas bordas do espaço de configurações livres e (f) amostragem pelo método Gaussiano.	50
8.2	Ambiente de orifício: (a) caminho ótimo no espaço de configurações, (b) amostragem aleatória, (c) amostragem pelo método de Halton, (d) amostragem no eixo-médio, (e) Amostragem nas bordas do espaço de configurações livres e (f) amostragem pelo método Gaussiano.	51
8.3	Ambiente de uma casa: (a) caminho ótimo no espaço de configurações, (b) amostragem aleatória, (c) amostragem pelo método de Halton, (d) amostragem no eixo-médio, (e) Amostragem nas bordas do espaço de configurações livres e (f) amostragem pelo método Gaussiano.	52
8.4	Ambiente de labirinto: (a) caminho ótimo no espaço de configurações, (b) amostragem aleatória, (c) amostragem pelo método de Halton, (d) amostragem no eixo-médio, (e) Amostragem nas bordas do espaço de configurações livres e (f) amostragem pelo método Gaussiano.	53
8.5	Ambiente com passagem estreita: (a) caminho ótimo no espaço de configurações, (b) amostragem aleatória, (c) amostragem pelo método de Halton, (d) amostragem no eixo-médio, (e) Amostragem nas bordas do espaço de configurações livres e (f) amostragem pelo método Gaussiano.	54
8.6	Técnicas de seleção de vértices no ambiente densamente ocupado: k -próximos com (a) $k=2$, (b) $k=10$ e (c) $k=20$, k -visíveis com (d) $k=2$, (e) $k=10$ e (f) $k=20$ e, k -componentes com (g) $k=2$, (h) $k=10$ e (i) $k=20$	56
8.7	Técnicas de seleção de vértices no ambiente de orifício: k -próximos com (a) $k=2$, (b) $k=10$ e (c) $k=20$, k -visíveis com (d) $k=2$, (e) $k=10$ e (f) $k=20$ e, k -componentes com (g) $k=2$, (h) $k=10$ e (i) $k=20$	57

8.8	Técnicas de seleção de vértices no ambiente de uma casa: k -próximos com (a) $k=2$, (b) $k=10$ e (c) $k=20$, k -visíveis com (d) $k=2$, (e) $k=10$ e (f) $k=20$ e, k -componentes com (g) $k=2$, (h) $k=10$ e (i) $k=20$	58
8.9	Técnicas de seleção de vértices no ambiente de labirinto: k -próximos com (a) $k=2$, (b) $k=10$ e (c) $k=20$, k -visíveis com (d) $k=2$, (e) $k=10$ e (f) $k=20$ e, k -componentes com (g) $k=2$, (h) $k=10$ e (i) $k=20$	59
8.10	Técnicas de seleção de vértices no ambiente com passagem estreita: k -próximos com (a) $k=2$, (b) $k=10$ e (c) $k=20$, k -visíveis com (d) $k=2$, (e) $k=10$ e (f) $k=20$ e, k -componentes com (g) $k=2$, (h) $k=10$ e (i) $k=20$	60
8.11	Resultado dos experimentos no ambiente densamente ocupado. . .	62
8.12	Resultado dos experimentos no ambiente de orifício.	64
8.13	Resultado dos experimentos no ambiente de uma casa.	66
8.14	Resultado dos experimentos no ambiente de labirinto.	68
8.15	Resultado dos experimentos no ambiente com passagem estreita. .	70

Lista de Tabelas

7.1	Resumo das técnicas de amostragem e seleção de vértices.	37
7.2	Informações as sobre configurações de origem e destino e comprimento do caminho ótimo.	42
7.3	Número mínimo de vértices amostrados.	44
7.4	Raio do círculo de seleção dos vértices.	45
7.5	Matriz de experimentos.	46
8.1	Técnicas de amostragem e seleção de vértices mais indicadas para cada ambiente.	71
9.1	Técnicas de amostragem e seleção de vértices mais indicadas para cada ambiente com prioridade no menor comprimento do caminho e no menor tempo de processamento.	74
A.1	Resultado dos experimentos no ambiente densamente ocupado para a técnica de amostragem aleatória.	83
A.2	Resultado dos experimentos no ambiente densamente ocupado para a técnica de amostragem pelo método de Halton.	84
A.3	Resultado dos experimentos no ambiente densamente ocupado para a técnica de amostragem no eixo0.000médio.	85
A.4	Resultado dos experimentos no ambiente densamente ocupado para a técnica de amostragem nas bordas do espaço de configurações livres.	86
A.5	Resultado dos experimentos no ambiente densamente ocupado para a técnica de amostragem pelo método Gaussiano.	87
A.6	Resultado dos experimentos no ambiente de orifício para a técnica de amostragem aleatória.	88
A.7	Resultado dos experimentos no ambiente de orifício para a técnica de amostragem pelo método de Halton.	89

A.8	Resultado dos experimentos no ambiente de orifício para a técnica de amostragem no eixo-médio.	90
A.9	Resultado dos experimentos no ambiente de orifício para a técnica de amostragem nas bordas do espaço de configurações livres. . . .	91
A.10	Resultado dos experimentos no ambiente de orifício para a técnica de amostragem pelo método Gaussiano.	92
A.11	Resultado dos experimentos no ambiente de uma casa para a técnica de amostragem aleatória.	93
A.12	Resultado dos experimentos no ambiente de uma casa para a técnica de amostragem pelo método de Halton.	94
A.13	Resultado dos experimentos no ambiente de uma casa para a técnica de amostragem no eixo-médio.	95
A.14	Resultado dos experimentos no ambiente de uma casa para a técnica de amostragem nas bordas do espaço de configurações livres. . . .	96
A.15	Resultado dos experimentos no ambiente de uma casa para a técnica de amostragem pelo método Gaussiano.	97
A.16	Resultado dos experimentos no ambiente de labirinto para a técnica de amostragem aleatória.	98
A.17	Resultado dos experimentos no ambiente de labirinto para a técnica de amostragem pelo método de Halton.	99
A.18	Resultado dos experimentos no ambiente de labirinto para a técnica de amostragem no eixo-médio.	100
A.19	Resultado dos experimentos no ambiente de labirinto para a técnica de amostragem nas bordas do espaço de configurações livres. . . .	101
A.20	Resultado dos experimentos no ambiente de labirinto para a técnica de amostragem pelo método Gaussiano.	102
A.21	Resultado dos experimentos no ambiente com passagem estreita para a técnica de amostragem aleatória.	103
A.22	Resultado dos experimentos no ambiente com passagem estreita para a técnica de amostragem pelo método de Halton.	104
A.23	Resultado dos experimentos no ambiente com passagem estreita para a técnica de amostragem no eixo-médio.	105

A.24 Resultado dos experimentos no ambiente com passagem estreita para a técnica de amostragem nas bordas do espaço de confi- gurações livres.	106
A.25 Resultado dos experimentos no ambiente com passagem estreita para a técnica de amostragem pelo método Gaussiano.	107

Lista de Abreviaturas e Siglas

R.U.R.	<i>Rozuma Univerzalni Roboti</i>
CAD	<i>Computer-Aided Design</i>
IA	Inteligência Artificial
RAM	<i>Random Access Memory</i>
GCC	<i>GNU Compiler Collection</i>

Lista de Símbolos

Símbolo	Definição
$\mathcal{W}$	Espaço de trabalho do robô
$\mathcal{C}$	Espaço de configurações
$\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$	Espaço de configurações livres
$\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$	Espaço de configurações proibidas
$\mathcal{R}$	Representação do robô móvel no espaço de trabalho $\mathcal{W}$
$\mathcal{O}$	Conjunto de obstáculos no espaço de trabalho $\mathcal{W}$
q	Configuração qualquer $\in \mathcal{C}$
Π	Caminho percorrido pelo robô móvel em $\mathcal{W}$
x	Posição horizontal do robô no espaço de trabalho $\mathcal{W}$
y	Posição vertical do robô no espaço de trabalho $\mathcal{W}$
$G(V, A)$	Grafo G com conjunto de vértices V e de arestas A
V	Conjunto dos vértices
v	Vértice qualquer $\in V$
A	Conjunto das arestas
a	Aresta qualquer $\in A$
α	Configuração de origem
β	Configuração de destino
c	Configuração livre amostrada
V_C	Conjunto dos vértices próximos ao vértice c
k	Número de vértices selecionados
$\overline{ab}$	Aresta entre os vértices a e b
$P(V)$	Conjunto ordenado de vértices que descrevem um caminho
$\lambda(v)$	Comprimento acumulado do caminho até o vértice v
v'	Vértice adjacente ao vértice v
$\ (a, b)\ $	Distância Euclidiana da aresta formada pelos vértices a e b
P_{Falha}	Probabilidade do caminho não ser conectado
L	Comprimento do caminho entre as configurações de origem e destino
D	Distância do caminho aos obstáculos

Símbolo	Definição
N_L	Número de configurações livres no espaço de configurações
N	Número de configurações amostradas
$\mu(tc)$	Média do tempo de processamento na fase de construção do mapa de rotas
$\sigma(tc)$	Desvio padrão do tempo de processamento na fase de construção do mapa de rotas
$\mu(tq)$	Média do tempo de processamento na fase de questionamento
$\sigma(tq)$	Desvio padrão do tempo de processamento na fase de questionamento
$\mu(Cc)$	Média do comprimento dos caminhos encontrados
$\sigma(Cc)$	Desvio padrão do comprimento dos caminhos encontrados

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos	4
1.2	Contribuições	5
1.3	Organização do Trabalho	6
2	Representação e Interpretação do Espaço	7
2.1	Representação do Ambiente e do Robô	7
2.2	Espaço de Configurações	9
3	Planejamento	12
3.1	Planejamento em Inteligência Artificial	12
3.2	Planejamento para Robôs Móveis	14
4	Planejamento Probabilístico de Mapa de Rotas	18
4.1	Fase de Construção do Mapa de Rotas	18
4.2	Fase de Questionamento	22
5	Técnicas de Amostragem	25
5.1	Amostragem Uniforme	25
5.1.1	Amostragem Aleatória	26
5.1.2	Amostragem pelo Método de Halton	27
5.2	Amostragem Não-Uniforme	28
5.2.1	Amostragem no Eixo-Médio	28
5.2.2	Amostragem nas Bordas do Espaço de Configurações Livres	29
5.2.3	Amostragem pelo Método Gaussiano	30

5.3	Considerações Finais	31
6	Técnicas de Seleção de Vértices	32
6.1	k -Próximos	33
6.2	k -Visíveis	34
6.3	k -Componentes	35
7	Metodologia Experimental	37
7.1	Plataforma de Teste	38
7.2	Algoritmo de Teste	38
7.3	Ambientes de Teste	39
7.4	Caminho Ótimo	41
7.5	Número de Configurações Amostradas	43
7.6	Número de Vértices Seleccionados	44
7.7	Raio do Círculo de Seleção dos Vértices	45
7.8	Matriz de Experimentos	46
8	Resultados e Análises	47
8.1	Análise das Técnicas de Amostragem	47
8.2	Análise das Técnicas de Seleção de Vértices	49
8.3	Resultados dos Experimentos	61
8.3.1	Ambiente Densamente Ocupado	61
8.3.2	Ambiente de Orifício	63
8.3.3	Ambiente de uma Casa	65
8.3.4	Ambiente de Labirinto	67
8.3.5	Ambiente com Passagem Estreita	69
8.4	Análise dos Resultados	70
9	Conclusão	72
9.1	Discussão sobre os Resultados	72

9.2	Trabalhos Futuros	75
	Referências	78
	Apêndice A – Resultados Completos dos Experimentos	82
A.1	Ambiente Densamente Ocupado	83
A.2	Ambiente de Orifício	88
A.3	Ambiente de uma Casa	93
A.4	Ambiente de Labirinto	98
A.5	Ambiente com Passagem Estreita	103

1 Introdução

Robôs com a capacidade de realização autônoma de suas ações são amplamente explorados pela indústria cinematográfica ou por obras literárias de ficção científica, mas infelizmente o alto grau de “inteligência” dessas máquinas ainda não foi alcançado pela tecnologia atual; por outro lado, elas ilustram o grande potencial das descobertas que ainda estão por vir.

Historicamente, a palavra robô foi utilizada pela primeira vez, nos moldes conhecidos atualmente, no ano de 1920 pelo escritor Tcheco *Karel Capek* na sua obra literária R.U.R. (*Rozuma Univerzalni Roboti*). A palavra vem do substantivo da língua Tcheca *robota*, que significa trabalho forçado ou escravidão. Formalmente, robôs são definidos como agentes capazes de realizar tarefas com alguma finalidade, sem o comando imediato de um humano e com uma determinada programação regular (SOWA, 2000) e são divididos em três classes: artificiais, fixos e móveis.

A classe dos robôs artificiais, ou *softbots*, são agentes inteligentes na forma de *software* cuja principal aplicação é prover uma interface integrada e expressiva para ser utilizada na Internet (ETZIONI; WELD, 1994).

Também conhecidos como manipuladores, a classe dos robôs fixos trabalha sempre numa mesma posição e é composta por um conjunto de juntas e atuadores eletromecânicos ou pneumáticos. Devido à sua base fixa, o seu espaço de trabalho é limitado, porém é muito utilizado para aplicações industriais, como: soldagem, pintura, empacotamento, etc.

A classe dos robôs móveis, que será o foco deste trabalho, é definida como robôs capazes de se locomover num determinado ambiente (NEHMZOW, 2002). Sob uma perspectiva abstrata, os robôs móveis podem ser divididos em quatro grandes sub-sistemas: locomoção, sensoriamento, raciocínio e comunicação (DUDEK; JENKIN, 2000). A locomoção é o que move o robô dentro do ambiente, fornecendo as entradas aos dispositivos eletromecânicos de movimento. O sensoriamento é aquele que mede as propriedades do próprio robô e do seu ambiente,

baseado nas informações dos sensores de estados internos e externos, respectivamente. O raciocínio é responsável pelo mapeamento das informações do sensoriamento em ações efetivas. Finalmente, a comunicação é o sub-sistema que faz o elo entre o robô e um operador externo.

No sub-sistema de raciocínio, uma das tarefas mais importantes é o planejamento. A definição mais simplista deste termo resume-se unicamente à elaboração de um plano, mas este conceito pode ser expandido ao processo de escolha e organização de ações por meio da antecipação dos seus efeitos, almejando um objetivo global (GHALLAB; NAU; TRAVERSO, 2004).

Quando se deseja utilizar algum algoritmo de planejamento em um determinado robô móvel é necessário que: as entradas dos sensores sejam em tempo real, exista um modelo do ambiente e do robô, exista o conhecimento, mesmo que parcial e ruidoso, do estado por meio da informação adquirida pelos sensores e que haja uma integração direta do planejamento com a ação, o sensoriamento e o aprendizado (GHALLAB; NAU; TRAVERSO, 2004).

Devido à grande quantidade de ações que um robô móvel pode executar, existem também diversas formas de planejamento, que vão desde o planejamento de caminhos, que lida com a construção de um plano geométrico de navegação por um ambiente, até o planejamento de manipulação, que lida com um plano tático. O interesse deste trabalho consiste no planejamento de caminhos aplicado à classe de robôs móveis.

O planejamento de caminhos, que é uma atividade bastante pesquisada na área de robótica, é definido como a tarefa geométrica de encontrar um caminho factível de uma posição de origem a uma posição de destino, condicionada ao controle de um sistema móvel (RUSSEL; NORVIG, 2002), conforme pode ser observado no exemplo da Figura 1.1.

Por si só o planejamento de caminhos é uma tarefa altamente complexa, pois está intimamente ligada tanto à representação do ambiente como também à representação do robô, podendo ainda possuir outros fatores que podem aumentar exponencialmente sua complexidade, tais como formulações de menor caminho, menor tempo, maior velocidade, menor quantidade de curvas, ambientes dinâmicos ou grande número de graus de liberdade (NEHMZOW, 2002).

Dentre os diversos algoritmos de planejamento de caminhos, um que lida muito bem com o problema da explosão da complexidade computacional, associada ao tempo de processamento e à quantidade de espaço de armazenamento,

Figura 1.1: Exemplo de planeamento de caminho: (a) posição de origem e destino e (b) um caminho factível (Fonte: Laumond, 1998).

é o algoritmo de planeamento probabilístico de mapa de rotas. De forma bem simplista, este algoritmo pode ser resumido em duas fases distintas: a fase de construção do mapa de rotas e a fase de questionamento.

Na fase de construção do mapa de rotas o algoritmo utiliza a conectividade do espaço de configurações livres para traçar um grafo não-orientado que exprima, da forma mais próxima possível, as possibilidades de navegação no ambiente de trabalho do robô. Para tanto são utilizadas técnicas de amostragem, que seleccionam configurações livres deste ambiente, e de seleção de vértices, que escolhe um conjunto de configurações livres, seleccionadas pela técnica de amostragem, que irão se ligar para formar um grafo, que representa o mapa de rotas para um robô, atuando em um determinado ambiente de trabalho.

Já na fase de questionamento, as configurações de origem e de destino são adicionadas e interligadas ao mapa de rotas para que seja encontrado um caminho factível para resolver o problema, utilizando para tanto um algoritmo de busca por um caminho em um grafo.

Dentro da técnica de planeamento probabilístico de mapa de rotas existem duas abordagens que podem ser utilizadas para resolução dos problemas: questionamento único (*single-shot*) e questionamentos múltiplos (*multiple-shot*).

Na abordagem de questionamento único a construção do mapa de rotas é feita de forma direccionada, ou seja, focando a resolução do problema nas configurações de origem e destino conhecidas *a priori*. Infelizmente esta abordagem possui um grave problema quando se deseja fazer um novo questionamento, pois o mapa de rotas é construído de forma dedicada às configurações de origem e destino

conhecidas, não sendo possível a sua adequação a novos questionamentos, o que faz com que as respostas aos novos questionamentos exijam um tempo maior de processamento, ou em alguns casos, nem mesmo as encontre.

Já a abordagem de questionamentos múltiplos é utilizada para a resolução de vários problemas de planejamento de caminhos dentro de um mesmo ambiente e com o mesmo mapa de rotas. Para que isto ocorra, durante a fase de construção, o algoritmo maximiza a conectividade do espaço de configurações visando responder de forma eficiente aos questionamentos futuros.

1.1 Objetivos

Apesar de existirem alguns estudos comparativos entre algoritmos de planejamento probabilístico de mapa de rotas (KAVRAKI; KOLOUNTZAKIS; LATOMBE, 1996), (AMATO et al., 1998), (DALE; AMATO, 2001) e (GERAERTS; OVERMARS, 2002), todos o fazem como uma análise em separado de cada parte do algoritmo, não se preocupando se boas soluções pontuais de fato produzem melhorias globais na resolução do problema.

Para tornar possível uma análise mais fiel do algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas é necessário que sejam examinadas diferentes combinações das principais técnicas de amostragem e de seleção de vértices. As técnicas de amostragem e de seleção de vértices são os fatores que mais influenciam a construção do mapa de rotas e, conseqüentemente, estão diretamente ligados à quantidade, à qualidade e à velocidade das soluções encontradas (KAVRAKI et al., 1996). Por sua vez, para cada uma das possibilidades de combinação das técnicas de amostragem e de seleção de vértices é necessário um exame minucioso de três importantes indicadores de desempenho: o percentual de soluções encontradas, o tempo de processamento e o comprimento dos caminhos encontrados.

Em problemas de múltiplos questionamentos a porcentagem de soluções encontradas por um algoritmo, para diferentes questionamentos, mostra a sua versatilidade em diferentes problemas com o mesmo mapa de rotas, onde algoritmos com porcentagem de soluções próximas a 100% são preferíveis a algoritmos com valores menores.

O tempo de processamento é um ótimo indicativo de eficiência computacional desde que os algoritmos sejam testados nas mesmas condições. Além disso, o tempo gasto por um certo algoritmo é resultado da combinação de dois outros

importantes fatores: a velocidade do algoritmo em si e a quantidade de vezes que ele é executado. Dessa forma, busca-se o compromisso entre esses dois fatores que influenciam diretamente a eficiência do algoritmo. O tempo de processamento, aqui, não deve ser confundido com o tempo de execução. O tempo de processamento é a quantidade de tempo que o algoritmo necessita para encontrar um caminho factível para o robô baseado nas informações do ambiente e das posições de origem e destino do robô. Já o tempo de execução é a quantidade de tempo necessária para o robô móvel percorrer o caminho fornecido pelo algoritmo.

Finalmente, o comprimento do caminho fornece a noção de eficiência da resposta produzida, onde caminhos mais longos demoram mais para serem executados em comparação com caminhos mais curtos, quando o robô móvel executa a navegação com velocidade constante.

Dessa forma, o objetivo central deste trabalho é encontrar a melhor combinação de técnicas de amostragem e de seleção de vértices no planejamento probabilístico de mapa de rotas que possua o melhor compromisso entre o percentual de soluções encontradas, o tempo de processamento e o comprimento do caminho. Para esta análise, será utilizado um robô móvel autônomo, holonômico, de dois graus de liberdade, navegando em diversos ambientes de duas dimensões, estáticos, conhecidos, completamente observáveis e com características encontradas em residências, indústrias e hospitais. O fato de o interesse aqui se concentrar em ambientes que são encontrados em residências, indústrias ou hospitais implica que os experimentos deverão possuir características que descrevam esses ambientes, como por exemplo, ambientes livres ou densamente ocupados, corredores, passagens estreitas, labirintos, etc.

Como este trabalho pretende ser o mais generalista possível, o interesse é focado na utilização da abordagem de questionamentos múltiplos. Esta decisão é justificada devido ao fato de que, na maioria das tarefas realizadas nos ambientes de interesse, o robô móvel permanece por longos períodos no mesmo ambiente; dessa forma, o robô móvel poderá possuir um mapa de rotas embarcado, construído *a priori*, de forma a minimizar o tempo de resposta a um novo planejamento, constituído de outras posições neste ambiente.

1.2 Contribuições

Ao fim deste trabalho, embasados nos dados dos experimentos realizados, deseja-se obter uma lista composta por técnicas de amostragem e de seleção de vértices

recomendadas para a resolução de problemas de planejamento de caminhos cujo foco será dado para robôs móveis com processamento embarcado, que se locomovem em ambientes com características encontradas em residências, indústrias e hospitais, representados em cinco diferentes ambientes de testes.

1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte forma: O Capítulo 2 descreve as representações do ambiente e do robô e também a modelagem do espaço de configurações. O Capítulo 3 faz uma breve explanação sobre a tarefa de planejamento, aprofundada para o planejamento nas áreas de Inteligência Artificial e robótica, e com foco no planejamento de caminhos. O Capítulo 4 descreve minuciosamente a técnica de planejamento probabilístico de mapa de rotas. Já as técnicas de amostragem e de seleção de vértices do planejamento probabilístico de mapa de rotas utilizadas neste trabalho são descritas nos Capítulos 5 e 6, respectivamente. O Capítulo 7 descreve a metodologia utilizada nos experimentos e o Capítulo 8 apresenta os resultados dos experimentos realizados. Finalmente, o Capítulo 9 apresenta as considerações finais a respeito deste trabalho.

2 Representação e Interpretação do Espaço

Para que um robô móvel planeje adequadamente os caminhos que deverá percorrer no ambiente e para que as tarefas a ele designadas sejam executadas com sucesso, deverão ser fornecidas aos sistemas de planejamento e de navegação as representações do ambiente e também do robô. Com essas duas representações é possível inferir como as ações executadas afetarão o robô, como ele irá interagir com o ambiente e quais serão as novas ações que deverão ser tomadas para que uma determinada meta seja atingida.

2.1 Representação do Ambiente e do Robô

Formalmente a representação do ambiente é a maneira pela qual o robô interpreta o mundo onde ele está imerso e é por meio destes dados que o robô determina seu plano tático para atingir um destino determinado e assim completar a sua tarefa (MURPHY, 2000).

Para os seres humanos a representação do ambiente mais comum é por meio de um mapa, que consiste de uma representação geométrica, estática, das regiões e objetos que compõem o ambiente. Este tipo de abordagem pode não ser vantajosa para ser utilizada na descrição de um ambiente para um robô, pois lida com uma grande massa de informação que pode não ser utilizada.

À primeira vista, a representação do ambiente pode ser considerada uma tarefa difícil, algumas vezes impossível de se exprimir para um sistema computacional; porém, hoje em dia há diversas ferramentas de desenvolvimento assistido por computador, mais conhecido como CAD (*computer-aided design*), que auxiliam os operadores nesta tarefa.

Para um robô móvel, o ambiente onde ele está imerso é conhecido como espaço de trabalho ($\mathcal{W}$) e pode ser tanto em duas dimensões, para robôs que se movimentam num plano, como em três dimensões, para robôs que se movimentam

no espaço. No espaço de trabalho, a posição de um robô em relação à sua origem acrescida da orientação do robô é conhecida como postura.

Quando se utiliza o termo postura deve-se ter em mente que a representação da posição do robô num determinado espaço de trabalho requer também a representação de todos os seus graus de liberdade, ou seja, o conjunto de deslocamentos independentes que especificam completamente sua posição no espaço.

Além das restrições na representação da posição do robô, podem existir restrições quanto aos movimentos que este é capaz de realizar. Se num robô o número de graus de liberdade controláveis for maior ou igual ao número total de graus de liberdade, este é dito holonômico, ou seja, não possui restrição nos movimentos. Caso contrário, ele é dito não-holonômico, ou seja, possui restrições nos movimentos como é caso de automóveis ao estacionar. Por outro lado, se o robô possuir mais graus de liberdade controláveis que o número de graus de liberdade do ambiente, ele é dito redundante.

Uma outra forma de descrever o conceito de holonomicidade está relacionada com as equações cinemáticas que descrevem o movimento de um corpo. Se as restrições podem ser escritas como equações independentes do vetor de velocidades, este robô é dito holonômico. Além disso, um robô móvel sem restrições e somente com movimentos translacionais também é dito holonômico.

Como o escopo deste trabalho está relacionado somente à análise de um algoritmo de planejamento de caminhos, algumas simplificações foram feitas. A primeira delas é na postura do robô móvel no espaço de trabalho, que será dada pelo vetor $[x \ y]^T$, onde x é a posição horizontal e y é a posição vertical, sendo todas as posições dadas em relação ao centróide do modelo geométrico do robô, referenciados por um sistema de coordenadas fixo no ambiente de trabalho $\mathcal{W}$.

A geometria do robô é modelada por uma circunferência de 450mm de diâmetro, (inspirada no robô Pioneer 2DX, ilustrado na Figura 2.1). Apesar de se utilizar uma forma geométrica diferente da forma geométrica do robô real, não há nenhum prejuízo, mas sim, um aumento na margem de segurança do planejamento, uma vez que esta circunferência é maior que o robô. Além disso, devido à complexidade envolvendo as equações cinemáticas do robô, neste trabalho toda a modelagem matemática envolvendo movimento considerará velocidade constante.

Com todas estas simplificações, o número de graus de liberdade controláveis se reduz a apenas dois e como o robô considerado navega num plano (ambiente bi-dimensional), o modelo do robô utilizado será holonômico.

Figura 2.1: Robô Pioneer 2DX (Fonte: ActivMedia Robotics).

2.2 Espaço de Configurações

Devido à complexidade da representação, no espaço de trabalho, de robôs com muitos graus de liberdade, Lozano-Pérez (1983) desenvolveu a técnica de espaço de configurações para facilitar a representação integrada do ambiente e do robô. Segundo ele, o espaço de configurações ($\mathcal{C}$) é a representação do robô como um objeto pontual em um apropriado modelo do espaço, e que mapeia todas as possíveis posições do robô no espaço de trabalho às suas correspondentes configurações no espaço de configurações.

O espaço de configurações é composto por outros dois sub-espacos: o espaço de configurações proibidas ($\mathcal{C}_P$), correspondente a todas as posições no espaço de trabalho que não podem ser acessadas pelo robô, e o espaço de configurações livres ($\mathcal{C}_L$), correspondente àquelas configurações onde não há contato ou intersecção entre o robô e os obstáculos, indicando posições livres de colisão do robô no espaço de trabalho.

Segundo LaValle (2006) os espaços de configurações proibidas e livres podem ser formalmente definidos da forma que segue para o robô móvel e o ambiente descrito na seção anterior. Suponha que o espaço de trabalho, $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$, contenha um conjunto de obstáculos, $\mathcal{O} \subset \mathcal{W}$, e um robô móvel, $\mathcal{R} \subset \mathcal{W}$. Suponha também que tanto $\mathcal{O}$ como $\mathcal{R}$ são expressos como modelos de polígonos para $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$. Seja $q \in \mathcal{C} = [0, 1] \times [0, 1]$ definido como a configuração de $\mathcal{R}$, na qual $q = (x, y)$ para $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$. O espaço de configurações proibidas, $\mathcal{C}_P \subseteq \mathcal{C}$, é definido como:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{P}} = \{q \in \mathcal{C} \mid \mathcal{R}(q) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset\}, \quad (2.1)$$

que é o conjunto de todas as configurações, q , onde há a intersecção do robô transformado, $\mathcal{R}(q)$, com o conjunto de obstáculos, $\mathcal{O}$. Sendo $\mathcal{O}$ e $\mathcal{R}(q)$ conjuntos fechados em $\mathcal{W}$, o espaço de configurações proibidas também será fechado no conjunto $\mathcal{C}$.

Dois importantes conceitos derivados desta definição são que não há intersecção entre o espaço de configurações proibidas e o espaço de configurações livres e que a união entre esses dois sub-espacos é o próprio espaço de configurações. De maneira resumida, o espaço de configurações livres é definido como o complemento do espaço de configurações proibidas, onde:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{P}} = \emptyset \quad e \quad (2.2)$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{C}_{\mathcal{P}} = \mathcal{C}. \quad (2.3)$$

Por exemplo, a Figura 2.2 (a) descreve um espaço de trabalho qualquer, onde o robô é representado pela circunferência tracejada do canto superior esquerdo e os obstáculos, como triângulos pretos. Já a Figura 2.2 (b) representa o espaço de configurações da Figura 2.2 (a), onde neste caso o robô é representado como um objeto pontual e está posicionado também no canto superior esquerdo, $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ está representado em preto e $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, em branco.

Figura 2.2: Exemplo de representação para um robô holonômico: (a) espaço de trabalho e (b) espaço de configurações.

Uma vez definida a relação entre espaço de trabalho e espaço de configurações, falta definir o que é um caminho para o robô móvel. Dado uma configuração de origem, $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, e uma configuração de destino, $\beta \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, um caminho Π para um robô móvel $\mathcal{R}$ é um mapeamento contínuo $\Pi : [0, L] \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ que descreve o deslocamento do robô $\mathcal{R}$ no espaço de trabalho $\mathcal{W}$, onde $\Pi(0) = \alpha$, $\Pi(L) = \beta$ e L é o comprimento do caminho no espaço de trabalho $\mathcal{W}$ parametrizado por arcos de comprimento Euclidiano (KAVRAKI; KOLOUNTZAKIS; LATOMBE, 1998).

Neste trabalho o interesse consiste em caminhos livres de colisões, aqui também referenciados como caminhos factíveis ou ainda somente caminhos, quando fica implícito o fato de serem livres de colisões.

3 Planejamento

Planejamento é o processo de escolha e organização de ações por meio da antecipação de seus efeitos, o que resumidamente é o lado da razão contido na ação. Esse processo de raciocínio tem como objetivo satisfazer, por meio de ações, alguma meta previamente estabelecida (GHALLAB; NAU; TRAVERSO, 2004).

Na maioria dos casos o planejamento é considerado um exercício de controle da explosão combinacional (RUSSEL; NORVIG, 2002), pois o número de estados de busca por uma solução cresce exponencialmente com relação ao número de proposições. Felizmente, com o avanço da tecnologia, principalmente relacionado ao aumento do poder de processamento e à capacidade de armazenamento dos computadores, muitos problemas podem agora ser resolvidos utilizando as técnicas de planejamento existentes.

Sem dúvida o planejamento é atualmente uma das áreas de maior interesse em Inteligência Artificial (IA), pois combina as duas maiores linhas de pesquisas em IA: a *busca* e a *lógica*. Conseqüentemente dentro da classe de robôs móveis o planejamento é um dos pilares para a resolução de problemas. Dessa forma, esses dois tópicos, planejamento em IA e planejamento para robôs móveis, serão abordados em mais detalhes nas próximas seções deste capítulo.

3.1 Planejamento em Inteligência Artificial

Como citado anteriormente o planejamento é o lado racional da ação, ou seja, a ação é previamente deliberada antes de ser executada. Trata-se de um processo de deliberação abstrato e explícito que escolhe e organiza ações, antecipando os resultados esperados. Dessa forma, o planejamento em IA realiza a escolha e organização dessas ações por meio de sistemas computacionais durante o processo de deliberação.

As pesquisas de planejamento em IA vêm desenvolvendo vertiginosamente esta área, tanto pelo nível de crescimento do desempenho dos planejadores como

também por clarificar as formas de representação e de combinação envolvidas. Além disso, devido ao amadurecimento das pesquisas nas áreas de busca e lógica na última década, houve também melhorias substanciais nas técnicas de planejamento, fazendo com que suas aplicações na indústria se tornassem comuns. Infelizmente ainda não é completamente evidente quais técnicas são mais adequadas para cada aplicação.

Para se construir um algoritmo de planejamento são necessários quatro elementos básicos: representação das ações, dos estados, das metas e dos planos (GHALLAB; NAU; TRAVERSO, 2004). A representação das ações são operadores que levam o estado atual a um novo estado, que muitas vezes pode ser o próprio estado de origem. Sendo assim, de forma sucinta, as ações nada mais são do que transformadores de estados. Já a representação dos estados é a descrição do ambiente em conjunto com os graus de liberdade do agente que efetuará as ações. A representação das metas informa se foi alcançado o estado final e avalia-o por meio de uma função heurística, definida *a priori*. Finalmente, a representação dos planos é a seqüência ordenada das ações fornecidas pelo planejador, onde este é livre para incrementar o plano de ações, o quanto seja necessário para atingir um estado final.

Caso haja mais de uma meta envolvida, estas podem ser tratadas como objetivos independentes fazendo com que a resolução se torne mais eficiente, uma vez que é mais fácil tratar alguns problemas pequenos que apenas um grande. Infelizmente esta regra não se aplica a todos os tipos de problemas, por exemplo, o jogo Sudoku, onde as ações são dependentes umas das outras.

Quando o estado do mundo é acessível, um agente pode usar suas percepções do ambiente para construir um completo e correto modelo do estado do mundo atual. Com uma meta, ele então pode executar um algoritmo de planejamento para gerar um plano de ações. O agente por sua vez realiza os passos desse plano, uma ação por vez, e a descrição do estado recebe a percepção das entradas e retorna uma descrição do estado atual no formato requerido por um planejador.

Além dos quatros elementos básicos de planejamento citados anteriormente, também são necessários os seguintes elementos para formular um problema de planejamento: o estado inicial, estado a partir do qual as ações serão iniciadas, o estado final, estado resultante devido ao conjunto de ações iniciadas a partir do estado inicial e que satisfaçam as metas, e os operadores, conjunto de ações válidas descritas na representação das ações (GHALLAB; NAU; TRAVERSO, 2004).

Uma boa solução teórica não garante uma boa solução prática, uma vez que as

soluções são fortemente dependentes dos estados inicial e final, e dos operadores. Dessa forma, cada problema é único e não existe um algoritmo de planejamento que produza boas soluções práticas para todos os tipos de problemas. O sucesso de um sistema de planejamento inteligente está intimamente ligado à sua integração dentro do ambiente no qual ele opera. É vital que o planejador seja apto a acessar o banco de dados existente e que a representação de entrada e saída do planejador esteja num formato que seja tanto expressiva como de fácil entendimento pelo agente.

Apesar de aparentemente estarem fora da vida cotidiana, há diversas tarefas onde são utilizados algoritmos de planejamento. A programação de linhas de montagem é um problema que envolve vários fatores, como diferentes produtos, máquinas, processos e operações, visando obter eficiência, principalmente financeira, a partir de uma lista de pedidos, mas quanto maior a diversidade de produtos a serem montados, maior será a complexidade do planejamento.

As missões e construção de naves espaciais utilizam extensivamente o planejamento, principalmente por dois fatores: o primeiro está relacionado ao custo das missões, que geralmente passam da cifra dos bilhões de dólares e segundo por o espaço ser um ambiente muito mais agressivo que a atmosfera terrestre, fazendo que pequenas falhas se tornem grandes tragédias.

Além desses dois exemplos, também podem ser citados problemas ligados à entrega de cargas em grandes companhias, como a Fedex e a UPS, a geração de filas de espera para a utilização do telescópio Hubble e muitos outros problemas nos mais variados domínios e nas mais variadas aplicações, principalmente na área de robótica.

3.2 Planejamento para Robôs Móveis

Um robô é uma máquina capaz de realizar uma grande quantidade de tarefas com algum nível de autonomia e flexibilidade; sendo assim, o planejamento em robótica móvel consiste em integrar uma ou mais funções servo-sensoriais com as capacidades de processamento, de comunicação e informação (NEHMZOW, 2002). Especificamente o planejamento de caminhos, que será o foco deste trabalho, é definido como a tarefa geométrica de encontrar um caminho entre duas configurações do ambiente de trabalho do robô.

Os robôs móveis que não apresentam a capacidade de planejamento de caminhos necessitam de codificação manual do modelo do ambiente e estratégias

dentro de um controlador reativo, que deve memorizar movimentos e ações realizadas previamente (RUSSEL; NORVIG, 2002). Apesar da codificação manual nem sempre ser custosa computacionalmente, ela só se aplica a certos tipos de ambientes, com tarefas restritas e com pouca ou nenhuma interação com seres humanos.

Segundo Latombe (1991), um dos maiores nomes no estudo do planejamento de caminhos e um dos pesquisadores pioneiros nesta área, as técnicas de planejamento de caminhos podem ser divididas em três grandes famílias: decomposição celular, campos potenciais e mapa de rotas.

A decomposição celular particiona o espaço de configurações livres em uma coleção de células não-sobrepostas para que seja construído um grafo de conectividade que represente a relação entre estas células. Para se encontrar um caminho, a partir de uma posição de origem até uma de destino, é realizada uma busca no grafo de conectividade. A sequência de células encontrada é então transformada num caminho. Dentro da decomposição celular, há duas grandes variantes: a decomposição celular exata (HALPERIN; OVERMARS; SHARIR, 1992), (LIU; TRINKLE, 2005) e a aproximada (ZHU; LATOMBE, 1991), (CHEN; HWANG, 1998), (VARADHAN; MANOCHA, 2005). A primeira particiona o espaço em células que, unidas, representam exatamente o espaço total. Já a segunda particiona o espaço por meio de formas geométricas pré-definidas e que não garantem a representação completa do espaço. Apesar da facilidade de implementação, a decomposição celular apresenta uma desvantagem relacionada à fidelidade da representação. Por ser uma técnica recursiva, o tamanho da célula é reduzido a cada iteração e, devido à restrições de tempo de processamento e espaço de armazenagem, o processo deve ser interrompido em algum momento, fazendo com que a resolução da grade celular possa não conseguir exprimir fielmente o ambiente.

A técnica de campos potenciais reproduz os efeitos de atração e repulsão de partículas eletricamente carregadas, cujo valor do gradiente caia em função do quadrado da distância (KHATIB, 1986), (RIMON; KODITSCHKEK, 1992). Em planejamento de caminhos a técnica de campos potenciais modela o robô como uma partícula neutra atuando sob a influência de um campo potencial com pontos de repulsão, como obstáculos e a posição de origem, e de atração, exclusivamente a posição de destino. Utilizando a técnica de campos potenciais, os caminhos não precisam ser pré-planejados, resultando em soluções rápidas, ideais para aplicações em tempo-real, e as soluções geradas são suaves, ou seja, não possuem curvas acentuadas. Além disso, as tarefas de planejamento e controle são integradas na mesma técnica, o que proporciona uma simplificação na arquitetura

do robô (ARKIN, 1998), (PACHECO; COSTA, 2002). Apesar dessas vantagens, a técnica de campos potenciais possui uma séria desvantagem para um algoritmo de planejamento: não encontra solução quando se depara com mínimos locais. Para solucionar estes efeitos, podem ser utilizadas técnicas de retrocesso, escolha de alguns passos aleatórios para sair do mínimo local, recorrer a um algoritmo seguidor de paredes ou até mesmo evitar regiões já visitadas. Ainda, abordagens com arquiteturas híbridas (SELVATICI; COSTA, 2007), podem contornar de modo mais eficaz o problema dos mínimos locais.

Por fim, a técnica de mapa de rotas captura a conectividade do ambiente navegável por meio da seleção de algumas posições livres, representadas por vértices em um grafo. Essas posições selecionadas são então conectadas seguindo um determinado critério, criando arestas no grafo, onde os caminhos neste grafo correspondem a rotas alternativas que compõem o mapa do ambiente. O caminho a ser navegado é encontrado adicionando-se as posições de origem e de destino ao mapa de rotas e usando um algoritmo de busca para encontrar a melhor alternativa de rota, sob certas restrições. Ainda segundo Latombe (1991), dentro da técnica de planejamento de mapa de rotas há três sub-divisões: o grafo de visibilidade, o diagrama de Voronoi e o probabilístico.

O grafo de visibilidade utiliza como vértices do grafo todos os cantos e quinas dos obstáculos, além das posições de origem e de destino (NISSOUX; SIMEON; LAUMOND, 1999). Os caminhos deste tipo de técnica são os de menor comprimento possível, uma vez que são compostos por segmentos de retas que tangenciam os cantos e quinas dos obstáculos. Devido a este tipo de abordagem, a navegação do robô móvel pode ser uma tarefa perigosa, uma vez que o sistema de localização pode fornecer dados imprecisos ao sistema de navegação, fazendo com que haja uma real possibilidade de colisão entre o robô móvel e os obstáculos.

O diagrama de Voronoi seleciona os vértices do grafo com as posições livres equidistantes entre os elementos pertencentes ao ambiente, como obstáculos, limites, posições proibidas, etc (VLEUGELS; OVERMARS, 1998), (CHOSSET; BURDICK, 2000), (HOFF et al., 2000). Diferentemente do que ocorre no grafo de visibilidades, as respostas desta técnica estão o mais distante possível dos obstáculos, porém, este tipo de estratégia penaliza o comprimento dos caminhos resultantes, uma vez que são muito conservadoras.

O planejamento probabilístico amostra posições nos espaços livres e tenta conectá-las, dentro de certos limites, para formar um grafo onde posteriormente são adicionadas as posições de origem e de destino em busca de um caminho factível

entre elas. O termo probabilístico advém da completude do algoritmo, que diz que caso exista uma solução, a probabilidade de ela ser encontrada converge para um quando o tempo tende para o infinito. A adição da noção de não-determinismo faz com que o algoritmo reduza a sua complexidade computacional, conseqüentemente é mais rápido quando comparado com algoritmos deterministas. Outra característica do algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas é que ele não é exato e sim aproximado, uma vez que trata somente amostras do espaço de configurações livres, o que diminui consideravelmente o tamanho da árvore de busca.

O algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas, utilizado neste trabalho, foi desenvolvido independentemente por pesquisadores de diferentes centros de pesquisas (OVERMARS, 1992), (KAVRAKI; LATOMBE, 1994), (KAVRAKI, 1995), (AMATO; WU, 1996), (KAVRAKI; KOLOUNTZAKIS; LATOMBE, 1996), (BARRAQUAND et al., 1997), (SVESTKA, 1997). O principal objetivo deste algoritmo consiste em lidar com o problema da complexidade computacional dos algoritmos de planejamento conhecidos até o momento.

Atualmente o algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas é uma das técnicas de planejamento de caminhos mais utilizadas (GERAERTS; OVERMARS, 2006). Suas principais características são a eficiência computacional, a facilidade de implementação e a escalabilidade em diferentes tipos de problemas que envolvam planejamento, especialmente para robôs, desde os mais simples até aqueles com muitos graus de liberdade (SVESTKA; OVERMARS, 1998).

4 Planejamento Probabilístico de Mapa de Rotas

Uma das técnicas de planejamento de caminhos mais utilizadas é o planejamento probabilístico de mapa de rotas decorrente de suas características de eficiência computacional, facilidade de implementação e escalabilidade em diferentes tipos de problemas, sendo ideal para tarefas que sejam executadas embarcadas e em tempo real.

Diferentemente de outras técnicas de planejamento de caminhos, o planejamento probabilístico de mapa de rotas possui como espinha dorsal a construção de uma estrutura de dados de maneira probabilística e é dividido em duas fases: construção do mapa de rotas e questionamento.

Durante a fase de construção do mapa de rotas, a estrutura de dados é incrementalmente construída e na fase de questionamento são adicionadas as configurações de origem e destino do robô móvel, para que seja encontrado um caminho no mapa de rotas da fase de construção.

A seguir serão descritas detalhadamente as fases de construção do mapa de rotas e de questionamento do modelo genérico do algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas, ou seja, o modelo de Kavraki et al. (1996).

4.1 Fase de Construção do Mapa de Rotas

A fase de construção é responsável pela seleção das configurações livres e também pela interligação entre essas configurações, formando assim uma estrutura de dados em forma de grafo não orientado $G = (V, A)$, onde V é o conjunto dos vértices, ou seja, as configurações livres amostradas e A é o conjunto das arestas, ou seja, a ligação entre duas configurações livres, indicando a existência de um caminho factível no ambiente entre estas duas configurações livres, representados por vértices adjacentes em G . Durante a construção do grafo G deve ser constantemente observada a não existência de ciclos e também se arestas adicionadas

não representam caminhos que passem por configurações proibidas.

A não existência de ciclos faz com que o algoritmo encontre uma solução, caso ela exista, mais rapidamente, pois a busca por um caminho no grafo G será menor. Por outro lado, dificilmente as respostas encontradas serão ótimas com relação ao comprimento do caminho encontrado, uma vez que a presença de ciclos no grafo possibilita que sejam produzidos caminhos de menor comprimento.

A estratégia da não utilização de ciclos é justificada devido ao foco deste trabalho estar na velocidade de processamento aliado à quantidade e qualidade das respostas encontradas.

Um breve descritivo do algoritmo da fase de construção do mapa de rotas é apresentado na Figura 4.1, onde a entrada é o espaço de configurações discretizado e a saída o grafo $G = (V, A)$.

Entrada: espaço de configurações discretizado
Saída: $G(V, A)$

```

1   $V = \emptyset$ 
2   $A = \emptyset$ 
3  Repetir até que um critério de parada seja atingido {
4     $c \leftarrow$  Amostragem de uma configuração livre
5     $V \leftarrow V \cup \{c\}$ 
6     $V_C \leftarrow$  Seleção em  $V$  de configurações livres próximas à  $c$ 
7     $ordenar(V_C)$  pela distância à  $c$ 
8    Para todo  $v \in V_C$ 
9      Se  $[\neg graph\_connect(c, v) \wedge possible\_connect(c, v)]$ 
10       então  $A \leftarrow A \cup \{(c, v)\}$ 
11  }
```

Figura 4.1: Algoritmo da fase de construção do mapa de rotas.

Inicialmente o conjunto de vértices amostrados, conjunto V , como também o conjunto de arestas, conjunto A , estão vazios (passos 1 e 2). Uma configuração livre, c , é amostrada e inserida em V (passos 4 e 5). Com $|V| \geq 2$, os passos 6 à 10 são executados. Por meio do vértice c (última configuração livre amostrada) são escolhidos os vértices correspondentes às configurações livres inclusas em uma circunferência centrada em c e também pertencentes ao conjunto de vértices amostrados V , criando assim um conjunto de vértices próximos ao vértice c , conjunto V_C (passo 6). Os vértices do conjunto V_C são ordenados (por meio da função $ordenar$) com relação à distância Euclidiana à configuração livre representada pelo vértice c (passo 7).

Um a um, e de forma crescente (passos 8, 9 e 10), os vértices são selecionados para verificar a existência de ciclos no mapa de rotas (por meio da função *graph_connect*) e a possibilidade de um caminho entre as configurações livres representadas por esses vértices no grafo (por meio da função *possible_connect*), ou seja, se a aresta formada por este dois vértices não representa um caminho que passa por uma configuração proibida. Caso as duas possibilidades anteriores sejam satisfeitas, há a inclusão de uma aresta entre o vértice c e o vértice v selecionado de V_C ao conjunto A .

A Figura 4.2 ilustra a execução deste algoritmo. Inicialmente o mapa de rotas está vazio e a Figura 4.2 (a) mostra as configurações livres (branco) e as configurações proibidas, correspondentes aos obstáculos do ambiente (preto).

Após algumas iterações do algoritmo da Figura 4.1, tem-se por exemplo, a situação ilustrada na Figura 4.2 (b), onde o mapa de rotas $G = (V, A)$ é composto por doze vértices (pequenos círculos brancos) e oito arestas (linhas pretas). Os vértices em V representam configurações livres no espaço de configurações e as arestas, caminhos factíveis entre vértices adjacentes.

Considere uma nova execução do passo 4 do algoritmo, amostrando o vértice c , ilustrado pelo círculo vermelho da Figura 4.2 (c). No passo 6, para um certo diâmetro de proximidade de configurações livres em relação a c , suponha que três vértices sejam selecionados (isto é, $|V_C| = 3$), ilustrados como círculos pretos na Figura 4.2 (d). Ordenando-os em função da distância a c , no espaço de configurações, tem-se $V_C = \{1, 2, 3\}$, onde 1 é o mais próximo a c e 3, o mais distante, conforme ilustra a Figura 4.2 (e).

Após a execução dos passos 8, 9 e 10 do algoritmo, verifica-se que somente a aresta $\overline{c1}$, formada pelos vértices c e 1, pode ser incluída em A , uma vez que a inclusão da aresta $\overline{c2}$, após a inclusão da aresta $\overline{c1}$, criaria um ciclo e que a aresta $\overline{c3}$ passaria por configurações proibidas. Sendo assim, o mapa de rotas resultante deste exemplo é representado na Figura 4.2 (f).

O algoritmo é repetido até que um número expressivo de vértices seja amostrado. Infelizmente a quantidade de vértices amostrados é um valor que está intimamente ligado à complexidade do ambiente. Desta maneira, uma forma de determinar este valor é observar se o grafo está totalmente conectado, ou seja, se é composto por um único componente conexo. Assim, é possível conectar uma configuração a qualquer outra no grafo.

A verificação de ciclos, por meio da função *graph_connect* do algoritmo da fase

Figura 4.2: Ilustração da execução da fase de construção do mapa de rotas.

de construção do mapa de rotas, realiza esta operação verificando se o vértice c e o vértice selecionado do conjunto V_C estão no mesmo sub-grafo que corresponde a um componente conectado, impedindo que a inserção de uma aresta entre esses vértices crie um ciclo.

Já a função *possible_connect* é a responsável por verificar a possibilidade de conexão entre o vértice c e o vértice selecionado do conjunto V_C . Para robôs com muitos graus de liberdade, esta função é uma das que mais requer tempo de processamento; por outro lado, para robôs com apenas dois graus de liberdade se locomovendo num plano, como é o caso considerado neste trabalho, este tempo não é relevante, devido à facilidade de verificação desta informação (SáNCHEZ; LATOMBE, 2001).

No espaço de trabalho do robô a conexão entre dois vértices representa a ligação entre duas posições cujo caminho não deve passar por nenhum obstáculo, uma vez que o robô móvel é considerado holonômico. Dado que o robô utilizado possui apenas dois graus de liberdade e se locomove num plano, o operador utilizado para esta conexão é um segmento de reta, uma vez que, geometricamente, a reta é a menor distância entre dois pontos. Além disso, o ambiente considerado deve ser discreto.

Existem diversas técnicas para efetuar esta verificação da possibilidade de conexão entre dois vértices, mas optou-se em utilizar a verificação binária, uma vez que apresentou os melhores resultados nos experimentos realizados por Geeraerts (2006). A verificação binária consiste na observação sucessiva do ponto

central do segmento de reta que une as duas configurações livres consideradas. Caso o ponto central recaia sobre uma configuração proibida, despreza-se o par de vértices referentes às duas configurações livres consideradas. Caso contrário, o procedimento se repete recursivamente, considerando dois segmentos (segmento original dividido no ponto central). O processo se encerra no menor nível de discretização do ambiente.

A função *ordenar* é quem arranja o conjunto V_C numa sequência lógica, que neste caso é a distância Euclidiana. A distância possui a facilidade de ser facilmente calculada a partir do espaço de configurações do robô e também está diretamente relacionada ao tempo de execução, quando se considera os movimentos do robô executados com velocidade constante.

Devido ao algoritmo probabilístico de mapa de rotas utilizar ambientes discretizados, o número de vértices amostrados é um dos fatores que possuem maior influência na execução do algoritmo. Quando é amostrado um número excessivo de configurações livres, há uma sobrecarga de informação desnecessária para a resolução do problema. Por outro lado, a falta dessas configurações dificulta a elaboração de um mapa de rotas totalmente conectado. Dessa forma, procura-se estabelecer um compromisso entre esses dois fatores.

Outras duas importantes variáveis do algoritmo da Figura 4.1 são a amostragem das configurações livres e o critério para construção do conjunto V_C de vértices próximos à configuração amostrada c . Como estes dois tópicos são foco deste trabalho e também de inúmeras pesquisas da técnica de planejamento probabilístico de mapa de rotas, eles serão profundamente discutidos nos capítulos 5 e 6, Técnicas de Amostragem e Técnicas de Seleção de Vértices, respectivamente, onde também serão apresentadas algumas de suas variantes.

4.2 Fase de Questionamento

Para que seja encontrado o melhor caminho no mapa de rotas, para os questionamentos realizados, é utilizado o algoritmo de Dijkstra (DIJKSTRA, 1959). Para tanto, é necessário fornecer a este algoritmo o mapa de rotas, as configurações de origem e destino, e uma função de custo das arestas, onde neste tipo de problema é comumente utilizada a distância Euclidiana entre as configurações representadas pelos vértices.

O algoritmo da fase de questionamento, ilustrado pela Figura 4.3, é descrito a seguir. Primeiramente são conectadas as configurações de origem, α e destino

β ao grafo da fase de construção do mapa de rotas (passo 1). A partir deste novo grafo, agora com as configurações necessárias ao questionamento, é atribuído o valor zero ao caminho da configuração de origem (passo 4), que representa o comprimento do caminho até esta configuração, e infinito para as demais (passo 8). Em seguida, é escolhido um vértice qualquer, v , pertencente ao conjunto V e que tenha o menor comprimento de caminho (passo 10). Para cada vértice adjacente, v' , ao vértice v é verificado se o comprimento do caminho v' é maior do que a soma do comprimento do caminho v com a distância Euclidiana entre os vértices v e v' (passo 13). Caso a afirmação seja verdadeira, o vértice v é incluído no conjunto ordenado P (passo 14), que descreve o caminho entre as configurações de origem e destino. O algoritmo é repetido até que a configuração de destino não esteja mais contida no conjunto V (passo 9).

Entrada: grafo $G(V, A)$ e as configurações de origem (α) e destino (β)
Saída: conjunto ordenado de configurações $P(V)$

```

1  Conectar  $\alpha$  e  $\beta$  ao grafo  $G(V, A)$ 
2   $dijkstra(\alpha, \beta, G(V, A))\{$ 
3     $P = \emptyset$ 
4     $\lambda(\alpha) = 0 \leftarrow$  comprimento do caminho até  $\alpha$ 
5     $P \leftarrow P \cup \{\alpha\}$ 
6     $V \leftarrow V \cap \{\alpha\}$ 
7    para todo vértice  $v \in V$ 
8       $\lambda(v) = \infty$ 
9    enquanto( $\beta \in V$ )
10     escolher  $v \in V$  com mínimo  $\lambda(v)$ 
11      $V \leftarrow V \cap \{v\}$ 
12     para cada  $v' \in V$  adjacente à  $v$ 
13       se  $\lambda(v') > \lambda(v) + \|(v, v')\|$ 
14         então  $\lambda(v') = \lambda(v) + \|(v, v')\|$  e  $P \leftarrow P \cup \{v\}$ 
15   }
```

Figura 4.3: Algoritmo da fase de questionamento.

O algoritmo de Dijkstra é muito eficiente e garante encontrar um caminho entre as configurações de origem e destino, caso ele exista, e este caminho será o de menor custo. O desempenho depende fortemente da forma de implementação, mas a complexidade máxima será de $O(|A| + |V|\log|V|)$ (CORMEN et al., 2001).

A Figura 4.4 ilustra a execução do algoritmo da fase de questionamento. Após a fase de construção do mapa de rotas, um grafo é criado, conforme exemplo da Figura 4.4 (a), que possibilitará a inferência do questionamento sobre um caminho

entre duas configurações. Para tanto, é necessário que as configurações de origem (vértice azul da Figura 4.4 (b)) e de destino (vértice verde da Figuras 4.4 (b)) sejam conectadas ao grafo, resultando no grafo da Figura 4.4 (c). Com este grafo, o algoritmo de Dijkstra encontra um conjunto ordenado de vértices, que levam de uma configuração de origem até uma configuração de destino, conforme ilustram as Figuras 4.4 (d), (e) e (f).

Figura 4.4: Ilustração da execução da fase de questionamento.

Caso se deseje minimizar curvas acentuadas ou fazer pequenos ajustes no caminho resultante para se ganhar eficiência de execução pelo robô móvel, é necessária a execução de um outro algoritmo de pós-processamento que incorpore essas idéias. Este não é o foco deste trabalho, mas alguns destes algoritmos podem ser encontrados em Svestka e Overmars (1998) e Geraerts (2006).

5 Técnicas de Amostragem

Devido à necessidade de se produzirem mapas com melhores caminhos, sem prejuízo à eficiência computacional do algoritmo, foram desenvolvidas diversas técnicas para amostragem dos vértices durante a fase de construção do mapa de rotas, correspondente ao passo 4 do algoritmo da Figura 4.1.

O foco principal das técnicas de amostragem está em encontrar maneiras para reduzir o número de amostras necessárias para a construção do mapa de rotas, mas que expressem de forma precisa e correta o espaço de configurações (GERAERTS; OVERMARS, 2004). A maioria delas explora propriedades que são específicas à forma do espaço de configurações, principalmente a do espaço de configurações proibidas, e da geometria do robô (LAVALLE, 2006).

As técnicas de amostragem estão divididas em dois grandes grupos: as amostragens uniformes e as amostragens não-uniformes. A seguir apresenta-se a descrição de cada um desses dois grandes grupos, como também expõem-se algumas das técnicas que as compõem.

5.1 Amostragem Uniforme

As amostragens uniformes foram as primeiras técnicas de amostragem do algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas. De forma sintetizada, essas técnicas selecionam configurações livres com igual probabilidade no espaço de configurações, daí o nome uniforme.

Neste trabalho, dentro do grupo de amostragens uniforme, foram selecionadas as técnicas de amostragem aleatória (KAVRAKI; LATOMBE, 1994), (AMATO; WU, 1996), (BARRAQUAND et al., 1997) e pelo método de Halton (BRANICKY et al., 2001), (WANG; HICKERNELL, 2000), devido ao grande número de artigos que as referenciam, porém, existem diversas outras técnicas de amostragem uniforme. Dentre essas técnicas não selecionadas pode-se citar a técnica de *grid*, que amostra o ambiente com configurações igualmente espaçadas (GERAERTS; OVERMARS,

2004), e a técnica *baseada em células*, que divide o espaço de configurações em células cujo tamanho e o número de amostras é selecionado de forma aleatória (SALOMON et al., 2003).

A seguir são apresentadas as duas técnicas de amostragem uniforme mais utilizadas, aquelas que foram utilizadas neste trabalho, a amostragem aleatória e a amostragem pelo método de Halton.

5.1.1 Amostragem Aleatória

A amostragem aleatória, que pode ser observada no exemplo da Figura 5.1, é a forma mais simples de seleção de configurações e foi o primeiro método de amostragem usado em algoritmos de planejamento probabilístico de mapa de rotas (KAVRAKI; LATOMBE, 1994).

Figura 5.1: Amostragem aleatória.

Como o próprio nome diz, a amostragem aleatória seleciona aleatoriamente qualquer uma das configurações livres, fazendo com que essas configurações tenham igual probabilidade de serem selecionadas. Portanto, a garantia de desempenho e a completude do algoritmo são determinadas probabilisticamente. Já nas abordagens deterministas, se uma solução existir ela sempre será encontrada e em uma quantidade finita de tempo.

Apesar das configurações serem selecionadas aleatoriamente, dificilmente elas cobrirão de forma uniforme o espaço de configurações livres, fazendo com que certas regiões desse espaço não sejam amostradas, ocasionando possíveis falhas para se encontrar respostas durante a fase de questionamento.

5.1.2 Amostragem pelo Método de Halton

Diferentemente da técnica de amostragem aleatória, o método de Halton produz amostras que cobrem de forma sistemática o espaço de configurações livres, conforme pode ser observado no exemplo da Figura 5.2.

Figura 5.2: Amostragem pelo método de Halton.

O método de Halton é derivado da teoria estatística conhecida como seqüência de Halton (BRANICKY et al., 2001). A seqüência de Halton é composta por números *quasi*-uniformemente distribuídos e que parecem ser aleatórios, mas que na verdade são gerados de forma determinística.

Para se gerar uma seqüência de Halton basta dividir um intervalo por uma base escolhida *a priori*, onde esta base deve ser um número primo. Depois os intervalos obtidos das divisões anteriores são divididos novamente por esta mesma base até que seja atingido um critério de parada. Assim, obtêm-se amostras *quasi*-uniformemente distribuídas, mas que possuem um determinado padrão.

No caso da utilização da seqüência de Halton como método de amostragem é necessário que primeiramente sejam determinadas uma base e um intervalo, isto para cada dimensão do espaço de configurações. A base é escolhida aleatoriamente dentre do conjunto dos números primos e o intervalo é definido como o tamanho máximo de uma dimensão do espaço de configurações. Já o critério de parada será o número de configurações amostradas.

Análises teóricas (GERAERTS, 2006) afirmam que este método é superior a métodos aleatórios, principalmente no tocante à dispersão, isto é, as amostras estão espalhadas por todo ambiente com cobertura *quasi*-uniforme.

5.2 Amostragem Não-Uniforme

Como uma evolução natural das técnicas de amostragem uniformes do algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas, foram desenvolvidas novas técnicas de amostragem que utilizam algum critério para selecionar configurações em regiões de maior dificuldade no ambiente, como bordas, cantos, quinas, passagens estreitas, etc. As técnicas que utilizam este processo de seleção de amostras foram denominadas de amostragens não-uniforme.

Dentro do grupo de amostragens não-uniforme, foram selecionadas neste trabalho as técnicas de amostragem no eixo-médio (WILMARTH; AMATO; STILLER, 1999), (CHOSSET; BURDICK, 2000), (VLEUGELS; OVERMARS, 1998), nas bordas do espaço de configurações livres (GERAERTS; OVERMARS, 2004) e pelo método Gaussiano (BOOR; OVERMARS; STAPPEN, 1999) devido também ao grande número de artigos que as referenciam.

A seguir são apresentadas as três técnicas de amostragem não-uniformes que foram utilizadas neste trabalho: a amostragem no eixo-médio, a amostragem nas bordas do espaço de configurações livres e a amostragem pelo método Gaussiano.

5.2.1 Amostragem no Eixo-Médio

Também conhecido como diagrama de Voronoi genérico, a estratégia de eixo-médio é decorrente da seguinte suposição: “melhor que amostrar próximo às bordas do espaço de configuração é utilizar amostras o mais longe possível dessas regiões” (WILMARTH; AMATO; STILLER, 1999).

As amostras da técnica de eixo-médio são selecionadas nos segmentos de reta equidistantes dos obstáculos do espaço de configurações livres, conforme pode ser observado no exemplo da Figura 5.3.

Um fato interessante decorrente da amostragem pela técnica de eixo-médio é que sempre haverá amostras em cantos, quinas e passagens estreitas; dessa forma, as regiões de maior dificuldade do ambiente sempre são selecionadas, fato este que advém da definição de amostragem não-uniforme.

Apesar dos caminhos encontrados por esta técnica serem os de menor risco, uma vez que estão o mais distante possível dos obstáculos, eles dificilmente serão ótimos com relação ao comprimento do caminho encontrado, pois este tipo de abordagem é muito conservadora, fazendo com que a segurança ao percorrer o caminho seja colocada em primeiro plano.

Figura 5.3: Amostragem no eixo-médio.

5.2.2 Amostragem nas Bordas do Espaço de Configurações Livres

A amostragem nas bordas do espaço de configurações livres é baseada na intuição de que às vezes é melhor amostrar configurações ao longo das bordas do que desperdiçá-las em regiões que não possuam obstáculos no espaço de configurações e que não são representativas para a construção do mapa de rotas (AMATO; WU, 1996).

Essa técnica de amostragem seleciona configurações livres aleatoriamente na região próxima à interface entre os espaços de configuração livre e proibido, conforme pode ser observado no exemplo da Figura 5.4.

As configurações próximas às bordas são de grande importância, pois descrevem de forma otimizada a conectividade do espaço, porém é necessário a correta definição da largura da região no espaço de configurações livres. Regiões muito estreitas concentrarão as amostras muito próximas às configurações proibidas, dificultando a conexão entre os vértices, além de tornar o algoritmo de planejamento um mero “seguidor de paredes”. Por outro lado, larguras muito amplas da região que concentram as amostras fazem com que a distribuição das configurações amostradas fique similar àquela da técnica de amostragem aleatória.

Neste trabalho foi utilizada a própria largura do robô como largura da região de interface entre os espaços de configuração proibido e livre, sendo que esta região de interface se encontra no espaço de configurações livres. Esta medida foi a que apresentou os melhores resultados nos experimentos preliminares realizados.

Figura 5.4: Amostragem nas bordas do espaço de configurações livres.

5.2.3 Amostragem pelo Método Gaussiano

A estratégia de amostragem pelo método Gaussiano segue algumas das mesmas motivações da técnica de amostragem nas bordas do espaço de configurações livres, mas neste caso, o objetivo é obter vértices próximos às bordas do espaço de configurações com uma aproximação suave, determinada pela variação de uma distribuição de probabilidade Gaussiana (BOOR; OVERMARS; STAPPEN, 1999).

As amostras são geradas da seguinte forma: primeiramente são obtidas duas configurações, onde a distância Euclidiana (no caso de robôs de até três graus de liberdade) entre elas é obtida através de uma distribuição de probabilidade Gaussiana. Somente se uma amostra pertencer ao espaço de configurações livres e a outra ao espaço de configurações proibidas, a amostra das configurações livres é adicionada ao conjunto de configurações amostradas, caso contrário, as duas amostras são descartadas e o processo é repetido novamente, conforme pode ser observado no exemplo da Figura 5.5.

A amostragem pelo método Gaussiano faz com que haja uma maior concentração das amostras na interface entre os espaços de configurações proibidas e livres, porém haverá amostras que acrescentam uma característica exploratória às regiões sem obstáculos. Macroscopicamente, a técnica de amostragem pelo método Gaussiano agrega as vantagens das técnicas de amostragem nas bordas de espaço de configurações livres e aleatória.

Figura 5.5: Amostragem pelo método Gaussiano.

5.3 Considerações Finais

Este capítulo apresentou algumas técnicas de amostragem de configurações livres para o algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas, sendo que as mais utilizadas na literatura foram selecionadas para teste, a fim de atingir os objetivos deste trabalho.

As técnicas de amostragem selecionadas são: amostragem aleatória, amostragem pelo método de Halton, amostragem no eixo-médio, amostragem nas bordas do espaço de configurações livres e amostragem pelo método Gaussiano.

6 Técnicas de Seleção de Vértices

A seleção dos vértices nada mais é que a escolha dos vértices que irão compor o conjunto V_C , ou seja, aqueles vértices que poderão formar arestas com o vértice amostrado c , conforme o passo 6 do algoritmo da Figura 4.1.

O problema de seleção de vértices é um dos que mais influenciam o desempenho do algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas (SVESTKA; OVERMARS, 1998). Este fato está relacionado à estrutura do mapa de rotas, que poderá ter uma quantidade excessiva de arestas desnecessárias para a resolução do problema durante a fase de questionamento.

Para que a eficiência do algoritmo não seja comprometida, deve-se respeitar um compromisso entre a quantidade de vértices selecionados e o tempo de execução do algoritmo na fase de construção do mapa de rotas. Em um ambiente qualquer, onde há a presença de obstáculos, quanto menor o número de vértices selecionados, mais distantes eles estarão um do outro e maior será a dificuldade de conectá-los, resultando num mapa de rotas com diversos componentes conectados isolados. Por outro lado, quanto maior o número de vértices selecionados, maior será o número de interligações entre eles, porém, menos vértices serão efetivamente utilizados no caminho que será solução da fase de questionamento, fazendo com que seja desperdiçada uma grande quantidade de tempo de processamento em arestas não utilizadas.

Dentre as técnicas de seleção de vértices existem três grandes vertentes: proximidade (KAVRAKI; LATOMBE, 1994), visibilidade (NISSOUX; SIMEON; LAUMOND, 1999) e conectividade (GERAERTS, 2006). A primeira lida apenas com vértices que representam configurações próximas, a segunda com vértices cuja interligação não cruza com configurações proibidas e a terceira com o conceito de componentes conexos. A partir dessas três vertentes, existem muitas outras técnicas variantes, que nada mais são que pequenas modificações dessas técnicas principais e que não mudam significativamente suas características. A seguir são apresentadas as

técnicas de seleção de vértices *k*-próximos, *k*-visíveis e *k*-componentes, que são técnicas genéricas dessas vertentes principais.

6.1 *k*-Próximos

A técnica de seleção de vértices *k*-próximos foi a primeira estratégia de seleção de vértices desenvolvida por Kavraki e Latombe (1994) e está presente no algoritmo base da Figura 4.1. Sua principal característica é a escolha de uma certa quantidade de vértices dentro de uma determinada área de abrangência.

Na técnica de seleção de vértices *k*-próximos são definidas *a priori* a área de seleção e a quantidade *k* de vértices selecionados. Durante a execução do passo 6 do algoritmo da Figura 4.1 é realizado o seguinte procedimento. Suponha que, após algumas iterações na fase de construção do mapa de rotas exista um grafo, conforme mostra a Figura 6.1 (a). Em seguida, é amostrada uma nova configuração livre (passos 4 e 5), conforme vértice na cor vermelha da Figura 6.1 (b). Com esta nova configuração é gerada a área de seleção, que nada mais é que uma circunferência centrada neste vértice e com diâmetro definido *a priori*, conforme círculo na cor cinza da Figura 6.1 (c). Vértices candidatos são aqueles incluídos na área de seleção (no caso da figura 6.1 (c), há três vértices candidatos). Se, por exemplo, o número de vértices selecionados for $k = 3$, resultará nos vértices selecionados na cor azul da Figura 6.1 (d). Se o número de vértices selecionados for menor que o valor de vértices candidatos, por exemplo $k = 2$, resultará nos vértices selecionados na cor azul da Figura 6.1 (e), que são aqueles vértices mais próximos do vértice amostrado. Por outro lado, se o número de vértices selecionados for maior que o valor de vértices candidatos, por exemplo $k = 5$, resultará nos vértices selecionados na cor azul da Figura 6.1 (f), ou seja, somente os vértices candidatos.

A grande dificuldade desta técnica está em encontrar os melhores valores para o raio da circunferência de seleção e a quantidade de vértices selecionados. Na escolha correta dos valores desses dois parâmetros está a chave entre o sucesso e o fracasso desta técnica.

Na escolha do raio da circunferência de seleção, se o valor for muito pequeno, poderá não haver vértices para a formação das arestas, conseqüentemente os questionamentos não terão solução. Por outro lado, se o valor do raio da circunferência de seleção for muito grande, haverá muitos vértices candidatos e desta maneira o número dos vértices selecionados deve ser capaz de absorvê-los, senão haverá

Figura 6.1: Seleção de vértices pela técnica dos k -próximos.

um desperdício de tempo de processamento ao definir candidatos que não serão usados.

Já na escolha do número de vértices selecionados, deve haver um compromisso entre as possibilidades de caminhos a partir do mesmo vértice e o raio de seleção. Valores muito grandes do número de vértices selecionados fazendo com que alguns vértices tenham um alto grau, mas somente poucos contribuem para o mapa de rotas, conseqüentemente o comprimento dos caminhos resultantes na fase de questionamento será penalizado. Por outro lado, valores muito pequenos do número de vértices selecionados fazem com que os vértices sejam conectados somente entre si, resultando um grafo com muitos componentes e que não será proveitoso durante a fase de questionamentos.

6.2 k -Visíveis

A técnica de seleção de vértices k -visíveis foi descrita pela primeira vez no artigo de Nissoux, Simeon e Laumond (1999) e diz que somente seleciona vértices cujo caminho entre os candidatos e o vértice c do algoritmo da Figura 4.1 esteja completamente contido no espaço de configurações livres, ou seja, que os vértices sejam visíveis um do outro.

Apesar das técnicas de seleção de vértices somente serem tratadas na linha 6 do algoritmo da Figura 4.1, o uso da técnica dos k -visíveis modifica um pouco a estrutura do algoritmo base, antecipando a função *possible_connect* da linha 9

durante a seleção de vértices, porém esta modificação não tem grande impacto no tempo de processamento da fase de construção do mapa de rotas (GERAERTS, 2006).

A seguir é descrita a execução da rotina de seleção de vértices pela técnica dos k -visíveis. Suponha que após algumas iterações na fase de construção do mapa rotas exista um grafo, conforme Figura mostra a6.2 (a). Em seguida é amostrada uma nova configuração livre, ilustrado pelo vértice na cor vermelha da Figura 6.2 (b). Com esta nova configuração são selecionados apenas os k vértices mais próximos, mas que ao mesmo tempo também sejam visíveis deste vértice. Por exemplo, sendo $k = 3$, tem-se como resultado os vértices selecionados na cor azul da Figura 6.2 (c). Caso o número de vértices candidatos (neste caso, todos os vértices visíveis do vértice amostrado c) seja menor do que a quantidade de vértices que devem ser selecionados, serão somente selecionados o total de vértices candidatos.

Figura 6.2: Seleção de vértices pela técnica dos k -visíveis.

A grande vantagem com relação à técnica de seleção de vértices k -próximos é que esta possui um grau de liberdade a menos, uma vez que não é necessária a definição da área de seleção, porém, isto faz com que o número de vértices candidatos esteja espalhado por todo o ambiente, resultando num tempo de processamento maior quando o ambiente possui grandes dimensões.

Uma outra vantagem é que os vértices selecionados podem ser efetivamente conectados, uma vez que por definição são visíveis um do outro, fazendo com que o algoritmo de construção de mapa de rotas seja mais eficiente a partir do passo 7 da Figura 4.1.

6.3 k -Componentes

Um componente conexo de um grafo pode ser definido como um sub-grafo conectado. Já um grafo conectado é definido como um grafo que possui pelo menos

um caminho que possibilite alcançar qualquer vértice a partir de qualquer outro vértice deste grafo. Por outro lado, um grafo desconexo é composto por diversos componentes conexos (EVEN, 1979).

A técnica de seleção de vértices conhecida como *k*-componentes procura conectar o vértice *c* do algoritmo da Figura 4.1 ao vértice mais próximo de *k* componentes conexos do grafo durante cada iteração.

A seguir é descrita a execução do passo 6 do algoritmo da fase de construção do mapa de rotas. Suponha que após algumas iterações na fase de construção do mapa rotas exista um grafo, conforme Figura 6.3 (a). Em seguida é amostrada uma nova configuração livre, ilustrado como o vértice na cor vermelha da Figura 6.3 (b). Com esta nova configuração é selecionado apenas o vértice mais próximos de *k* componentes conexos, por exemplo $k = 3$, resultará nos vértices selecionados na cor azul da Figura 6.3 (c). Note que um vértice isolado é um componente conexo. Caso o valor de *k* seja maior que o número de componentes conexos do grafo, serão selecionados apenas o número de componentes conexos existentes.

Como nas outras técnicas de seleção de vértices, a escolha do valor do número de vértices selecionados terá forte impacto na construção do mapa de rotas.

Figura 6.3: Seleção de vértices pela técnica dos *k*-componentes.

7 Metodologia Experimental

Este capítulo mostra de forma detalhada a metodologia utilizada nos experimentos realizados cujo objetivo foi analisar o percentual das soluções encontradas, o tempo de processamento e o comprimento dos caminhos encontrados com diferentes combinações das técnicas de amostragem e de seleção de vértices do algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas, para diferentes ambientes.

Como descrito nos capítulos anteriores, os experimentos serão focados em um robô móvel autônomo, holonômico, de dois graus de liberdade, que navega num ambiente de duas dimensões, estático, conhecido, completamente observável e com características encontradas em residências, indústrias e hospitais, ou seja, para aplicações práticas reais.

Para que os objetivos sejam alcançados, as cinco técnicas de amostragem e as três técnicas de seleção de vértices, descritas nos Capítulos 5 e 6 respectivamente, foram combinadas, uma a uma, visando o estabelecimento da melhor combinação entre elas para uma determinada característica de ambiente testado. A Tabela 7.1 resume as técnicas de interesse neste trabalho.

Tabela 7.1: Resumo das técnicas de amostragem e seleção de vértices.

Técnicas de amostragem	Técnicas de seleção de vértices
Aleatória	k -Próximos
Método de Halton	k -Visíveis
Método Gaussiano	k -Componentes
Eixo-médio	
Bordas do espaço de configurações	

A escolha das técnicas de amostragem e de seleção de vértices descritas na Tabela 7.1 é justificada devido a sua relevância, verificada pela elevada quantidade de citações em publicações especializadas, e também para comprovar as características descritas na literatura, mas com ambientes e robôs diferentes, assim como seu desempenho quando combinadas com técnicas diferentes daquelas propostas em suas respectivas publicações.

Além do percentual de soluções encontradas e do tempo de processamento também será observada a qualidade das respostas, que neste caso será representada pelo comprimento dos caminhos encontrados. A combinação de técnicas de amostragem e seleção de vértices com tempos de execução baixos e comprimento de caminhos próximos ao valor ótimo indicam uma elevada eficiência e eficácia computacional.

7.1 Plataforma de Teste

Para que haja uma correta comparação entre os diversos resultados, todos os experimentos foram realizados em um mesmo computador com processador Pentium IV Dual Core de 3,06 GHz e com 1 GB de memória RAM. Todos os algoritmos foram escritos em linguagem de programação C++ e compilados utilizando o compilador GCC versão 3.3.1.

Para que sejam evidenciados alguns parâmetros estatísticos, como média, desvio padrão, valor máximo e valor mínimo, todos os experimentos foram executados 100 vezes e cada nova execução possuía dados de entrada diferentes das execuções anteriores.

Além disso, todos os experimentos realizados com a mesma técnica de amostragem e no mesmo ambiente utilizaram o mesmo vetor de vértices amostrados e na mesma seqüência. Dessa forma, a base de comparação foi a mesma entre as três técnicas de seleção de vértices.

7.2 Algoritmo de Teste

O algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas possui diversas variantes na sua composição e para que seja possível a realização de comparações foram adotadas algumas características, mas que não afetaram significativamente as propriedades originais do algoritmo, como também não tiveram grande influência nos tempos de processamento e na qualidade das respostas.

Como já citado no Capítulo 4, durante a fase de construção do mapa de rotas foi utilizado como algoritmo de verificação da possibilidade de conexão entre dois vértices a técnica de verificação binária, (passo 9 do algoritmo da Figura 4.1, função *possible_connect*). Devido ao modelo do robô móvel utilizado possuir apenas dois graus de liberdade, a técnica binária resume-se somente à verificação da existência de configurações proibidas em um caminho entre duas

configurações, ou seja, se uma reta ligando duas configurações livres passa por alguma configuração proibida.

Já na fase de questionamento, foi utilizado como algoritmo de busca pela melhor solução, no mapa de rotas gerado na fase anterior, o algoritmo de Dijkstra, uma vez que, na média, ele é mais rápido que outros algoritmos similares, conforme apresentado no Capítulo 4.

7.3 Ambientes de Teste

A seguir são apresentados cinco diferentes ambientes para os experimentos comparativos deste trabalho. Todos os ambientes possuem dimensões de 500 x 500 *pixels* e representam ambientes de 1000 x 1000 cm; dessa forma, cada *pixel* na figura representa 4 cm² no ambiente, onde *pixels* na cor preta representam as configurações proibidas (obstáculos) e os *pixels* na cor branca, as configurações livres (regiões de acesso do robô móvel).

Os ambientes dos cinco experimentos seguem as principais características de ambientes de alguns trabalhos publicados, como é o caso de Drummond (2002), Sun et al. (2005), Branicky et al. (2001) e Geraerts (2006).

As Figuras 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 e 7.5, que serão apresentadas a seguir, seguem a seguinte padronização: (a) ambiente de trabalho com as posições de origem e destino, (b) caminho ótimo no ambiente de trabalho e (c) espaço de configurações. A determinação do caminho ótimo está descrita na seção 7.4).

O primeiro ambiente, conforme ilustra a Figura 7.1, é um ambiente densamente ocupado. Este ambiente é composto por diversos triângulos irregulares distribuídos no ambiente de trabalho do robô móvel. Apesar de, num primeiro momento, parecer existirem diversas soluções, há somente um caminho possível para que sejam atingidas as configurações de origem e de destino. Devido à complexidade deste ambiente, espera-se que o mapa de rotas resultante possua um número elevado de vértices e com diversos componentes conexos.

O segundo ambiente, conforme mostra a Figura 7.2, é um ambiente de orifício e, apesar de sua aparente simplicidade, é um dos experimentos de maior complexidade. A complexidade deste experimento está associada à pequena margem de manobra do robô móvel na passagem pelo orifício central. Caso as configurações amostradas não estejam posicionadas adequadamente nesta região, o algoritmo não encontrará uma solução, uma vez que o mapa de rotas será composto por pelo menos dois componentes conexos, onde a configuração de origem, neste caso,

pertencerá a um e a configuração de destino, a outro.

Figura 7.1: Ambiente densamente ocupado: (a) ambiente de trabalho, (b) caminho ótimo e (c) espaço de configurações.

O terceiro ambiente, conforme ilustra a Figura 7.3, é o ambiente de uma casa, onde há a presença de cômodos, passagens (portas) e corredores; sendo assim, o algoritmo de planejamento deve ser versátil para trabalhar nestas diversas condições. Como há grandes áreas compostas por configurações livres, não será necessário um grande número de configurações para capturar a conectividade do ambiente, porém o raio de busca por uma solução, no caso da utilização da técnica de seleção de vértices k -próximos, deverá ser ajustado adequadamente para que possam existir vértices candidatos para a composição do conjunto de vértices selecionados.

Figura 7.2: Ambiente de orifício: (a) ambiente de trabalho, (b) caminho ótimo e (c) espaço de configurações.

O ambiente de labirinto, ilustrado na Figura 7.4, apresenta duas características interessantes: possui caminho longo em relação ao tamanho do ambiente e constantemente está na presença de corredores estreitos. Como no caso do ambiente densamente ocupado, espera-se que haja um grande mapa de rotas e que seja fortemente dependente da quantidade de configurações amostradas.

Figura 7.3: Ambiente de uma casa: (a) ambiente de trabalho, (b) caminho ótimo e (c) espaço de configurações.

Finalmente, o quinto ambiente, mostrado na Figura 7.5, é conhecido como passagem estreita e caracteriza-se por ser um caminho que também possui uma pequena margem de manobra do robô, porém, a diferença básica entre o ambiente do orifício e este é que o primeiro possui margem de manobra ínfima durante um percurso muito pequeno, enquanto que no ambiente com passagem estreita a margem de manobra é um pouco maior, porém o percurso também o é.

Figura 7.4: Ambiente de labirinto: (a) ambiente de trabalho, (b) caminho ótimo e (c) espaço de configurações.

7.4 Caminho Ótimo

Para que pudesse ser verificada a qualidade das respostas produzidas pelo algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas, expresso por meio do comprimento do caminho encontrado, foi calculado *a priori* o comprimento do caminho ótimo de cada ambiente.

Para o cálculo do comprimento ótimo foi utilizado o próprio algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas com algumas modificações. A principal

Figura 7.5: Ambiente com passagem estreita: (a) ambiente de trabalho, (b) caminho ótimo e (c) espaço de configurações.

delas foi a inclusão de ciclos no grafo produzido durante a fase de construção do mapa de rotas. O grande problema desta modificação foi no tempo de processamento do algoritmo que se elevou bruscamente.

Além da inclusão de ciclos no mapa de rotas, o número de configurações amostradas foi igual ao número de configurações livres do ambiente (discretizado) e foi utilizada a técnica de seleção de vértices k -próximos com raio de seleção igual a 1,5 *pixel* e o valor de k igual a 8 vértices. Com todas essas modificações no algoritmo, o tempo de processamento ficou da ordem de 10 a 15 horas para cada ambiente.

Finalmente, para que o algoritmo pudesse calcular o caminho ótimo nos cinco ambientes, foram fornecidas as configurações de origem e destino, conforme a Tabela 7.2. Nesta tabela as configurações de origem e destino seguem a seguinte padronização: primeiramente é apresentada a configuração no eixo horizontal (x), em seguida a configuração no eixo vertical (y) e a origem dos eixos corresponde à configuração no canto superior esquerdo dos ambientes. Os caminhos ótimos obtidos dos cinco ambientes são apresentados nas Figuras 7.1 (b), 7.2 (b), 7.3 (b), 7.4 (b) e 7.5 (b) e seus comprimentos, na última coluna da Tabela 7.2.

Tabela 7.2: Informações as sobre configurações de origem e destino e comprimento do caminho ótimo.

Ambiente	Origem		Destino		Comprimento Ótimo
	x	y	x	y	
Densamente ocupado	25	25	475	475	933,83
Orifício	25	25	475	475	626,85
Casa	187	475	232	475	766,59
Labirinto	25	25	475	475	2754,98
Passagem estreita	25	25	475	475	745,16

7.5 Número de Configurações Amostradas

Um outro fator de grande influência na execução do algoritmo é a quantidade de configurações livres amostradas. Essa quantidade deve ser suficiente para que haja o menor número possível de componentes conexos no mapa de rotas, mas também para que seja possível encontrar pelo menos um caminho, caso ele exista, que possibilite alcançar as configurações de origem e destino.

A quantidade apropriada de configurações livres amostradas depende do ambiente de trabalho e também das configurações de origem e destino. Ambientes com grandes regiões com configurações livres usualmente necessitam de um número pequeno de amostras para expressar a conectividade do ambiente. Por outro lado, ambientes com um grande número de configurações proibidas, que fazem com que o caminho resultante tenha muitas mudanças de direção ou que passem por passagens estreitas, geralmente necessitam de um número maior de amostras.

Kavraki, Kolountzakis e Latombe (1996) equacionaram a probabilidade de um caminho entre duas configurações ser conectado:

$$P_{Falha} \leq \frac{2L}{D} \left(1 - \frac{\pi D^2}{4N_L} \right)^N, \quad (7.1)$$

onde P_{Falha} é a probabilidade do caminho não ser conectado, L é o comprimento do caminho, D é a distância média do caminho aos obstáculos, N_L é o número total de configurações livres no ambiente total e N é o número de configurações distintas amostradas aleatoriamente.

Como o interesse aqui consiste no número de configurações livres amostradas, N , para que haja um caminho conectado entre as configurações de origem e destino, da equação 7.1, vem:

$$N \geq \frac{\log \left(\frac{P_{Falha} D}{2L} \right)}{\log \left(1 - \frac{\pi D^2}{4N_L} \right)}. \quad (7.2)$$

Para determinar a probabilidade P_{Falha} escolheu-se a distribuição Normal, uma vez que, por meio do *Teorema do Limite Central*, a soma de variáveis aleatórias independentes tende a uma distribuição Normal quando esta soma tende ao infinito. Para evitar o excesso de conservadorismo, foi escolhida a distribuição Normal com apenas um desvio padrão, o que corresponde a um intervalo

de confiança de 68,27%. Dessa forma, foi adotada a probabilidade P_{Falha} como sendo de 31,73%, que é o complemento do intervalo de confiança.

Finalmente, os outros fatores para resolução da equação 7.2 foram obtidos experimentalmente a partir dos cinco ambientes, exceto o valor da distância média do caminho aos obstáculos, D , que foi obtida empiricamente. Os dados são resumidos na Tabela 7.3.

Tabela 7.3: Número mínimo de vértices amostrados.

Ambiente	P_{Falha}	L	D	N_L	N
Densamente ocupado	31,73%	995,41	20	55.948	885
Orifício	31,73%	637,87	34	206.120	908
Casa	31,73%	783,48	38	179.483	647
Labirinto	31,73%	2768,62	28	70.415	645
Passagem estreita	31,73%	755,54	27	140.072	1076

A última coluna da Tabela 7.3 apresenta o número mínimo de configurações livres amostradas para que o caminho entre as configurações de origem e destino seja conectado com probabilidade de sucesso de pelo menos 68,27%. Estes valores de N foram utilizados nos experimentos, definindo o critério de parada do algoritmo de construção do mapa de rotas (passo 3 do algoritmo da Figura 4.1)

7.6 Número de Vértices Seleccionados

O número de vértices seleccionados, k , está presente nas três técnicas de seleção de vértices deste trabalho, k -próximos, k -visíveis e k -componentes (conforme Capítulo 6), e representa a quantidade de vértices que podem constituir arestas com o vértice amostrado c , conforme linha 6 do algoritmo apresentado na Figura 4.1.

Como já citado no Capítulo 6, a seleção de vértices é uma das escolhas que mais influencia no desempenho do algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas (SVESTKA; OVERMARS, 1998), uma vez que pode ocasionar que a topologia do grafo possua uma quantidade excessiva de arestas desnecessárias para a resolução do problema.

No trabalho de Geraerts (2006) foram realizados experimentos para verificar o melhor valor para a variável k . Os experimentos realizados foram com k variando de 5 a 50, com passo de 5, e de 50 a 100, com passo de 25. Todos os experimentos realizados utilizaram a técnica de amostragem pelo método de Halton e a técnica

de seleção de vértices k -próximos. Após k igual a 20 não houve grandes modificações no tempo de execução (parâmetro utilizado como padrão de comparação) para os seis ambientes, em três-dimensões, testados no referenciado trabalho.

Já no presente trabalho, embasado nos dados preliminares de Geraerts (2006), verificou-se o comportamento do algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas com k variando de 2 a 20, com passo de 2. Espera-se que os resultados obtidos sejam parecidos, mesmo com ambientes e técnicas de amostragem e seleção de vértices diferentes.

7.7 Raio do Círculo de Seleção dos Vértices

O raio do círculo de seleção dos vértices somente é utilizado na técnica dos k -próximos. Nesta técnica, esta variável é uma das que mais afeta a qualidade da resposta: se for sub-dimensionada, é provável que o algoritmo não obtenha resposta; se for super-dimensionada, haverá uma grande quantidade de vértices para o algoritmo processar, fazendo com que o tempo de processamento também seja elevado.

Entretanto, Kavraki, Kolountzakis e Latombe (1996) sugerem que o valor mínimo de espaçamento entre as configurações livres amostradas deve ser pelo menos igual à distância do caminho aos obstáculos (variável D da seção 7.5). Dessa forma, conclui-se que o raio da área de seleção de vértices deve ser no mínimo igual a este valor.

Para que o algoritmo também explore alguns outros vértices próximos, utilizou-se o valor do raio do círculo de seleção dos vértices igual à soma da distância média do caminho aos obstáculos, determinada empiricamente, com o diâmetro do modelo do robô móvel. O robô móvel adotado é modelado como uma circunferência de 45cm de diâmetro o que corresponde, nos ambientes descritos na seção 7.3, a aproximadamente um círculo de 23 *pixels* de diâmetro.

Tabela 7.4: Raio do círculo de seleção dos vértices.

Ambiente	D	Robô	Raio
Densamente ocupado	20	23	43
Orifício	34	23	57
Casa	38	23	61
Labirinto	28	23	51
Passagem estreita	27	23	50

A Tabela 7.4 apresenta os valores do raio do círculo de seleção dos vértices a partir dos dados da distância média do caminho aos obstáculos e do diâmetro do robô móvel. Vale lembrar que esses dados estão expressos em *pixel*.

7.8 Matriz de Experimentos

Os experimentos realizados estão descritos na Tabela 7.5, que traz um resumo das informações apresentadas neste capítulo.

Tabela 7.5: Matriz de experimentos.

Ambiente	k -Próximos	k -Visíveis	k -Componentes	Amostragem
Densamente ocupado	N=885 $2 \leq k \leq 20$ Raio=43	N=885 $2 \leq k \leq 20$ -	N=885 $2 \leq k \leq 20$ -	Aleatória Halton Eixo-médio Bordas Gaussiano
Orifício	N=908 $2 \leq k \leq 20$ Raio=57	N=908 $2 \leq k \leq 20$ -	N=908 $2 \leq k \leq 20$ -	Aleatória Halton Eixo-médio Bordas Gaussiano
Casa	N=647 $2 \leq k \leq 20$ Raio=61	N=647 $2 \leq k \leq 20$ -	N=647 $2 \leq k \leq 20$ -	Aleatória Halton Eixo-médio Bordas Gaussiano
Labirinto	N=645 $2 \leq k \leq 20$ Raio=51	N=645 $2 \leq k \leq 20$ -	N=645 $2 \leq k \leq 20$ -	Aleatória Halton Eixo-médio Bordas Gaussiano
Passagem estreita	N=1076 $2 \leq k \leq 20$ Raio=50	N=1076 $2 \leq k \leq 20$ -	N=1076 $2 \leq k \leq 20$ -	Aleatória Halton Eixo-médio Bordas Gaussiano

8 Resultados e Análises

Este capítulo apresenta os resultados dos experimentos realizados em cinco diferentes ambientes para verificação da influência da combinação de diferentes técnicas de amostragem e de seleção de vértices no algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas. Todos os experimentos realizados seguiram a metodologia descrita no Capítulo 7.

Para qualificar e quantificar as características das combinações das técnicas de amostragem e de seleção de vértices foram verificados três fatores: o percentual de soluções encontradas, o tempo de processamento do algoritmo e o comprimento dos caminhos encontrados.

A seguir são apresentados os resultados dos experimentos realizados divididos em três partes: a primeira, Análise das Técnicas de Amostragem, apresenta a influência das técnicas de amostragem no espaço de configurações, a segunda, Análise das Técnicas de Seleção de Vértices, por sua vez apresenta a influência das técnicas de seleção de vértices utilizando sempre uma mesma técnica de amostragem e, finalmente, a terceira, Resultado dos Experimentos, apresenta graficamente os resultados da combinação das diversas técnicas de amostragem e seleção de vértices.

8.1 Análise das Técnicas de Amostragem

Como descrito anteriormente, esta seção apresenta a influência das técnicas de amostragem no espaço de configurações em cada um dos cinco ambientes. Nesta seção as Figuras 8.1, 8.2, 8.3, 8.4 e 8.5, representadas no espaço de configurações, seguem a seguinte padronização: (a) caminho ótimo no espaço de configurações (linha azul), (b) amostragem aleatória, (c) amostragem pelo método de Halton, (d) amostragem no eixo-médio, (e) amostragem nas bordas do espaço de configurações livres e (f) amostragem pelo método Gaussiano. Além disso, outro fato relevante é que todas as técnicas de amostragem apresentam o mesmo número de amostras para um mesmo ambiente, conforme os dados da Tabela 7.3.

No ambiente densamente ocupado, conforme Figura 8.1, a amostragem aleatória não cobre de maneira uniforme o ambiente, fazendo com que, em algumas regiões, haja um acúmulo de amostras e, em outras, a quantidade de amostras seja reduzida ou não exista. Por outro lado, a amostragem pelo método de Halton possui uma cobertura mais uniforme, fazendo com que todas as regiões do ambiente possuam a mesma quantidade de amostras. A amostragem no eixo-médio, devido à quantidade de singularidades do ambiente, faz com o número de amostras pareça reduzido, porém essas amostras estão estrategicamente posicionadas. Já as amostragens nas bordas do espaço de configurações livres e pelo método Gaussiano possuem a distribuição das amostras muito parecidas, devido principalmente à quantidade reduzida de configurações livres.

Já no ambiente de orifício, conforme Figura 8.2, devido à grande quantidade de configurações livres, fica mais evidenciada a mesma característica das técnicas de amostragem aleatória e pelo método de Halton apresentadas no ambiente densamente ocupado: a amostragem aleatória não cobre tão bem o espaço de configurações livres como a amostragem pelo método de Halton, apesar das duas técnicas de amostragem possuírem o mesmo número de amostras. Com relação à amostragem no eixo-médio, em muitas vezes esta é conservadora demais, porém, na região mais difícil do ambiente, que é o orifício, as amostragens estão dispostas da melhor forma possível, ou seja, com igual distância entre as configurações proibidas. Já a amostragem nas bordas do espaço de configurações livres penaliza muito o comprimento do caminho para a maioria dos questionamentos realizados, uma vez que é um mero seguidor de paredes. Finalmente, a amostragem pelo método Gaussiano apresenta amostras um pouco mais próximas do caminho ótimo que a amostragem nas bordas devido à presença de uma porcentagem das amostras que “explora” regiões um pouco mais distantes das bordas.

Neste ambiente, apenas as técnicas de amostragem uniformes, aleatória e pelo método de Halton possuem amostras ao longo de todo caminho ótimo, uma vez que cobrem todas as regiões do ambiente; porém, estas duas técnicas de amostragem têm maior dificuldade de selecionar amostras na região do orifício.

O ambiente de uma casa, conforme Figura 8.3, apresenta as mesmas características do ambiente de orifício, mas sem a dificuldade imposta pelo orifício propriamente dito. Sendo assim, as técnicas de amostragem aleatória e pelo método de Halton e, neste caso, acrescidas da amostragem no eixo-médio, apresentam uma grande parte das amostras ao longo de todo o caminho ótimo.

Novamente, as técnicas de amostragem nas bordas do espaço de configurações

livres e pelo método Gaussiano geram amostras longe do caminho ótimo, com ligeira vantagem para a amostragem pelo método Gaussiano, devido à dispersão das amostras fora da região das bordas.

No ambiente de labirinto, conforme Figura 8.4, tem-se uma ligeira vantagem da técnica de amostragem nas bordas do espaço de configurações livres, uma vez que o caminho ótimo está quase na sua totalidade nas bordas do ambiente. Apesar disso, devido às estreitas passagens do espaço de configurações livres, as outras quatro técnicas de amostragem também se mostram boas candidatas ao menor comprimento do caminho.

Outro fato interessante é que as técnicas de amostragem aleatória e pelo método Gaussiano são muito parecidas neste ambiente, fato também relacionado aos longos corredores estreitos do espaço de configurações livres.

Finalmente, o ambiente com passagem estreita, conforme Figura 8.5, possui as mesmas características do ambiente de orifício, só que com um agravante: o orifício possui um comprimento maior, apesar da maior distância entre as configurações proibidas na região de dificuldade. Neste caso, todas as argumentações feitas para o ambiente de orifício são válidas neste ambiente. As duas técnicas de amostragem uniforme são mais favorecidas neste ambiente do que no ambiente de orifício devido às passagens não serem tão estreitas, possibilitando a seleção de amostras nesta região. Porém, existe o risco real de que o grafo derivado da fase de construção do mapa de rotas não seja conectado, principalmente com o uso da técnica de amostragem aleatória.

8.2 Análise das Técnicas de Seleção de Vértices

Esta seção apresenta a influências das técnicas de seleção de vértices, com o uso de uma mesma técnica de amostragem, em cada um dos cinco ambientes. A seleção de vértices está diretamente ligada à composição das arestas do grafo derivado da fase de construção do mapa de rotas, uma vez que seleciona os vértices que irão se unir ao vértice amostrado c , descrito no algoritmo da Figura 4.1.

Para este comparativo foi utilizada a amostragem pelo método de Halton como técnica de amostragem, uma vez que esta técnica apresenta maior uniformidade na cobertura do ambiente. Além de todas as técnicas de seleção de vértices utilizarem a mesma técnica de amostragem, as amostras usadas são as mesmas e processadas pelo algoritmo na mesma ordem, em cada um dos cinco ambientes de teste.

Figura 8.1: Ambiente densamente ocupado: (a) caminho ótimo no espaço de configurações, (b) amostragem aleatória, (c) amostragem pelo método de Halton, (d) amostragem no eixo-médio, (e) Amostragem nas bordas do espaço de configurações livres e (f) amostragem pelo método Gaussiano.

Figura 8.2: Ambiente de orifício: (a) caminho ótimo no espaço de configurações, (b) amostragem aleatória, (c) amostragem pelo método de Halton, (d) amostragem no eixo-médio, (e) Amostragem nas bordas do espaço de configurações livres e (f) amostragem pelo método Gaussiano.

Figura 8.3: Ambiente de uma casa: (a) caminho ótimo no espaço de configurações, (b) amostragem aleatória, (c) amostragem pelo método de Halton, (d) amostragem no eixo-médio, (e) Amostragem nas bordas do espaço de configurações livres e (f) amostragem pelo método Gaussiano.

Figura 8.4: Ambiente de labirinto: (a) caminho ótimo no espaço de configurações, (b) amostragem aleatória, (c) amostragem pelo método de Halton, (d) amostragem no eixo-médio, (e) Amostragem nas bordas do espaço de configurações livres e (f) amostragem pelo método Gaussiano.

Figura 8.5: Ambiente com passagem estreita: (a) caminho ótimo no espaço de configurações, (b) amostragem aleatória, (c) amostragem pelo método de Halton, (d) amostragem no eixo-médio, (e) Amostragem nas bordas do espaço de configurações livres e (f) amostragem pelo método Gaussiano.

Nesta seção as Figuras 8.6, 8.7, 8.8, 8.9 e 8.10 seguem a seguinte padronização: (a) k -próximos com $k=2$, (b) k -próximos com $k=10$, (c) k -próximos com $k=20$, (d) k -visíveis com $k=2$, (e) k -visíveis com $k=10$, (f) k -visíveis com $k=20$, (g) k -componentes com $k=2$, (h) k -componentes com $k=10$ e (i) k -componentes com $k=20$.

As técnicas de seleção de vértices no ambiente densamente ocupado, conforme pode ser observado na Figura 8.6, podem ser analisadas de duas maneiras: por meio da comparação entre as três diferentes técnicas de seleção de vértices e pela quantidade de vértices selecionados (valor da variável k).

Com relação às técnicas de seleção de vértices, aparentemente as técnicas dos k -próximos e dos k -visíveis possuem uma distribuição similar das arestas, diferentemente da técnica dos k -componentes, que é completamente diferente das anteriores.

Quando são analisadas as três técnicas, mas agora em relação à quantidade de vértices selecionados, observa-se que a técnica dos k -componentes já obtém um grafo conectado com $k=2$ (Figura 8.6 (g)), o que só ocorre nas técnicas dos k -próximos e dos k -visíveis quando a quantidade de vértices selecionados é maior (Figuras 8.6 (b), (c), (e) e (f)). Porém, em todas as três técnicas de seleção de vértices, quando o número de vértices selecionados é grande, por exemplo $k=20$, há vértices com alto grau, o que não é bom para a qualidade da resposta durante a fase de questionamento.

No ambiente de orifício, conforme pode ser observado na Figura 8.7, a argumentação é a mesma feita no ambiente densamente ocupado, apesar dos ambientes possuírem características complementemente diferentes. Novamente, as técnicas de seleção de vértices k -próximos e k -visíveis são praticamente idênticas e novamente a técnica dos k -componentes também consegue obter um grafo conectado com apenas dois vértices selecionados ($k=2$).

Apesar de possuírem o mesmo conjunto de amostras, somente a técnica de seleção de vértices k -componentes conseguiu introduzir uma aresta para transpor o orifício (Figuras 8.7 (g), (h) e (i)). Esta importante constatação está relacionada às técnicas dos k -próximos e dos k -visíveis valorizarem mais a proximidade em prejuízo da conectividade.

Um fato interessante observado na Figura 8.7 (g) é a presença de grandes arestas que são sobrepostas a outras. Este fato é decorrência da ordem com que as configurações foram amostradas e do número de vértices selecionados, fazendo

com que as primeiras arestas possuíssem grande comprimento e que causassem a sobreposição de arestas que foram introduzidas posteriormente no mapa de rotas.

Figura 8.6: Técnicas de seleção de vértices no ambiente densamente ocupado: k -próximos com (a) $k=2$, (b) $k=10$ e (c) $k=20$, k -visíveis com (d) $k=2$, (e) $k=10$ e (f) $k=20$ e, k -componentes com (g) $k=2$, (h) $k=10$ e (i) $k=20$.

O ambiente de uma casa, conforme pode ser observado na Figura 8.8, apresenta as mesmas características dos dois ambientes anteriores: a distribuição das arestas nas técnicas dos k -próximos e dos k -visíveis é praticamente idêntica e, na técnica dos k -componentes, o mapa de rotas é conectado com apenas dois vértices selecionados. Neste último, há também a presença de arestas grandes e sobrepostas. Felizmente, neste caso, o mapa de rotas possui solução para as três técnicas de seleção de vértices quando o número de vértices é suficiente, neste caso para $k=10$ e $k=20$.

O ambiente de labirinto, conforme pode ser observado na Figura 8.9, possui uma característica interessante e que ajuda na qualidade das respostas. Devido ao ambiente possuir configurações livres compostas por corredores estreitos, os vértices nos quais incidem várias arestas sempre o fazem no sentido longitudinal, favorecendo assim o algoritmo a encontrar um caminho de menor comprimento, uma vez que este também será no sentido longitudinal, para este tipo de ambiente. Como nos outros três ambientes, aqui também as técnicas de seleção de vértices k -próximos e k -visíveis são praticamente idênticas, e a técnica dos k -componentes também encontra um grafo conectado com $k=2$.

Figura 8.7: Técnicas de seleção de vértices no ambiente de orifício: k -próximos com (a) $k=2$, (b) $k=10$ e (c) $k=20$, k -visíveis com (d) $k=2$, (e) $k=10$ e (f) $k=20$ e, k -componentes com (g) $k=2$, (h) $k=10$ e (i) $k=20$.

Finalmente, o ambiente com passagem estreita, conforme pode ser observado na Figura 8.10, é muito parecido com o ambiente de orifício, só que a região de dificuldade é mais extensa, porém esta dificuldade é mais tênue. Sendo assim, todas as análises feitas para o ambiente de orifício são válidas neste ambiente, exceto no que está relacionado com a presença de arestas pelo orifício: neste caso foi possível tecer arestas na passagem estreita com todas as técnicas de seleção de vértices.

Figura 8.8: Técnicas de seleção de vértices no ambiente de uma casa: k -próximos com (a) $k=2$, (b) $k=10$ e (c) $k=20$, k -visíveis com (d) $k=2$, (e) $k=10$ e (f) $k=20$ e, k -componentes com (g) $k=2$, (h) $k=10$ e (i) $k=20$.

De forma geral, observa-se que em todos os cinco ambientes as técnicas de seleção de vértices k -próximos e k -visíveis são praticamente idênticas, cabe agora a verificação das características específicas, como o percentual de soluções encontradas, o tempo de processamento e o comprimento dos caminhos encontrados para que se possa diferenciá-las.

Figura 8.9: Técnicas de seleção de vértices no ambiente de labirinto: k -próximos com (a) $k=2$, (b) $k=10$ e (c) $k=20$, k -visíveis com (d) $k=2$, (e) $k=10$ e (f) $k=20$ e, k -componentes com (g) $k=2$, (h) $k=10$ e (i) $k=20$.

Figura 8.10: Técnicas de seleção de vértices no ambiente com passagem estreita: k -próximos com (a) $k=2$, (b) $k=10$ e (c) $k=20$, k -visíveis com (d) $k=2$, (e) $k=10$ e (f) $k=20$ e, k -componentes com (g) $k=2$, (h) $k=10$ e (i) $k=20$.

8.3 Resultados dos Experimentos

Como descrito no início deste capítulo, esta seção apresenta graficamente os resultados da combinação das diversas técnicas de amostragem e seleção de vértices em cada um dos cinco ambientes. Os dados completos dos experimentos realizados são apresentados em forma de tabelas no Apêndice A.

Nesta seção, as Figuras 8.11, 8.12, 8.13, 8.14 e 8.15 são compostas por nove gráficos, cujos eixos horizontais representam a quantidade de vértices selecionados (k), e são padronizadas em linhas e em colunas da seguinte maneira: Na primeira linha das figuras encontram-se os gráficos da técnica de seleção de vértices k -próximos; já na segunda linha, os gráficos da técnica dos k -visíveis e, finalmente, na terceira linha os gráficos da técnica dos k -componentes. A primeira coluna à esquerda apresenta os gráficos do percentual das soluções encontradas, a segunda coluna, o tempo médio de processamento das soluções encontradas e, finalmente, a terceira coluna, o comprimento médio das soluções encontradas.

Os gráficos que apresentam o tempo de processamento dizem respeito à soma dos tempos das fases de construção do mapa de rotas e de questionamento; porém, apenas o tempo da fase de construção do mapa de rotas é significativo, uma vez que o tempo da fase de questionamento variou entre 33 e 110 *ms*, que, no pior caso, representou menos de 2% do tempo total de processamento. Ainda dentro do tempo de processamento da fase de construção do mapa de rotas, observou-se que o tempo de amostragem das configurações é ínfimo, variando entre 5 e 25 *ms*, o que indica que o tempo de processamento está sendo utilizado quase que na totalidade nas rotinas de construção das arestas do mapa de rotas.

8.3.1 Ambiente Densamente Ocupado

No ambiente densamente ocupado, conforme pode ser verificado na Figura 8.11, as técnicas de amostragem seguem a seguinte ordem decrescente com relação ao percentual de soluções encontradas: método de Halton, bordas do espaço de configurações livres, eixo-médio, método Gaussiano e aleatória. Esta ordem se manteve praticamente igual nas três técnicas de seleção de vértices, onde a única exceção foi com a amostragem no eixo-médio com a seleção de vértices k -próximos, a qual se estabilizou a partir de 14 vértices selecionados. Já com relação às técnicas de seleção de vértices, estas seguiram a seguinte ordem decrescente no mesmo critério: k -componentes, k -visíveis e k -próximos, onde as duas últimas técnicas são praticamente equivalentes.

Em linhas gerais, a combinação de técnicas mais vantajosas, segundo o critério de percentual de soluções encontradas, seriam as técnicas de amostragem pelo método de Halton em conjunto com a seleção de vértice k -componentes. A amostragem pelo método de Halton possui uma ligeira vantagem com relação às outras técnicas devido à uniformidade na seleção das amostras; já a seleção de vértices k -componentes prima pela conectividade entre as amostras selecionadas.

Figura 8.11: Resultado dos experimentos no ambiente densamente ocupado.

Neste mesmo ambiente, as técnicas de amostragem mudam um pouco de ordem com relação ao tempo médio de processamento das soluções encontradas, observando a seguinte ordem decrescente no conjunto de todas as técnicas de seleção de vértices: aleatória, método de Halton, método Gaussiano, bordas do espaço de configurações livres e eixo-médio. Já com relação às técnicas de seleção de vértices, as mesmas seguiram a seguinte ordem decrescente: k -próximos, k -visíveis e k -componentes, onde as duas primeiras seguem uma tendência exponencial e a última, uma tendência logarítmica.

Considerando o critério de tempo de processamento, a melhor combinação seria composta pelas técnicas de amostragem aleatória em conjunto com a seleção de vértices k -próximos. Pelo que se pode observar, a técnica de seleção de vértices k -próximos é computacionalmente mais vantajosa que as outras duas técnicas, apesar de a diferença para a técnica dos k -visíveis ser muito pequena.

Já no critério do comprimento médio das soluções encontradas, não é possível determinar uma tendência clara das curvas. Este fato pode estar relacionado com o número de amostras selecionadas, onde, em alguns conjuntos de amostras, quanto menor o valor de k , melhor será o caminho encontrado. Mesmo assim foi possível ordenar as técnicas de amostragem, para todas as técnicas de seleção de vértices, da seguinte maneira: eixo-médio, método de Halton, aleatória, método Gaussiano e bordas do espaço de configurações livres. Já nas técnicas de seleção de vértices, os valores de comprimento mínimo são praticamente os mesmos para as três técnicas, com uma ligeira vantagem para a técnica dos k -visíveis.

Dessa forma, a técnica de amostragem mais indicada para este tipo de ambiente, observando o critério de comprimento médio dos caminhos encontrados, seria a técnica do eixo-médio. Já nas técnicas de seleção a mais recomendada seria a técnica dos k -visíveis, porém as outras duas técnicas também forneceriam bons resultados.

Com relação à quantidade de vértices selecionados (variável k), esse valor varia conforme o parâmetro que se deseja analisar. Caso a opção seja pelo percentual de soluções encontradas, a melhor escolha será $k=2$ para a técnica dos k -componentes; porém, se a opção for o tempo de processamento, a melhor escolha será $k=4$ para a técnica dos k -próximos; finalmente, caso se deseje analisar o comprimento dos caminhos, a melhor escolha será $k=6$, novamente para a técnica dos k -visíveis.

8.3.2 Ambiente de Orifício

No ambiente de orifício, conforme pode ser observado na Figura 8.12, fica evidente que as técnicas de amostragem uniformes não são indicadas para este tipo de problema, uma vez que necessitam de eventos favoráveis para que sejam selecionadas amostras na região do orifício. Sendo assim, as técnicas de amostragem seguem a seguinte ordem decrescente com relação ao percentual das soluções encontradas: eixo-médio, bordas do espaço de configurações livres, método Gaussiano, aleatória e método de Halton. Nesta ordenação talvez a única dúvida fosse na ordem das técnicas de amostragem uniforme para as técnicas de seleção de

vértices k -visíveis e k -próximos, porém, o gráfico indica uma tendência ligeiramente favorável à amostragem aleatória. Já com relação às técnicas de seleção de vértices, novamente estas seguiram a seguinte ordem: k -componentes, k -visíveis e k -próximos, onde também as duas últimas técnicas são equivalentes.

Figura 8.12: Resultado dos experimentos no ambiente de orifício.

Portanto, quando se busca um maior percentual de soluções encontradas no ambiente de orifício a combinação mais indicada é composta pelas técnicas de amostragem no eixo-médio e de seleção de vértices k -componentes, porém a técnica de amostragem nas bordas do espaço de configurações também seria uma boa opção nesta condição. Como citado anteriormente, as técnicas de amostragem não-uniformes são mais indicadas para este tipo de ambiente, pois selecionam amostras nas regiões de maior dificuldade. Já a técnica de seleção de vértices k -componentes prima a conectividade das amostras, tornando-a mais eficiente do que as outras duas técnicas.

Considerando o critério de tempo médio de processamento das soluções en-

contradas, as técnicas de amostragem uniforme mostram um desempenho inferior aos das técnicas não-uniformes e obedecem a mesma ordenação do percentual de soluções encontradas, apesar de, na técnica de seleção de vértices k -componentes, haver uma troca entre as técnicas uniformes com as duas piores técnicas não-uniformes. A técnica de seleção de vértices k -próximos é novamente a melhor opção no fator tempo de processamento, e continua, juntamente com a técnica dos k -visíveis, com tendência exponencial; por sua vez, a técnica dos k -componentes tende à estabilidade com o aumento de k .

Diferentemente do ambiente anterior, onde esta técnica de amostragem seria a pior opção, no ambiente de orifício a amostragem no eixo-médio é a melhor opção para o critério de tempo de processamento e pode ser utilizada, com ótimos resultados, com as técnicas de seleção de vértices k -visíveis e k -próximos.

Já a o comprimento médio das soluções encontradas neste ambiente aparentemente possuem maior coerência, obedecendo à seguinte ordenação decrescente: eixo-médio, método de Halton, aleatória, método Gaussiano e bordas do espaço de configurações livres. No comparativo entre as técnicas de seleção de vértices para este critério, as técnicas dos k -próximos e dos k -visíveis possuem as melhores respostas.

Por meio da análise destes três fatores, a técnica de amostragem no eixo-médio também se mostra a melhor opção entre todas as outras, cabendo determinar a técnica de seleção de vértices que é mais indicada para cada requisito.

Com relação à quantidade de vértices selecionados, caso tenha-se optado pelo percentual de soluções encontradas, a melhor escolha será $k=2$ com a técnica dos k -componentes; porém se a opção for pelo tempo de processamento, a melhor escolha será $k=4$ com a técnica dos k -próximos; finalmente, caso se deseje analisar o comprimento dos caminhos, a melhor opção será $k=20$ com as técnicas de seleção de vértices k -visíveis e k -próximos.

8.3.3 Ambiente de uma Casa

No ambiente de uma casa, conforme pode ser observado na Figura 8.13, o percentual das soluções encontradas possui quatro técnicas praticamente equivalentes, porém a amostragem pelo método Gaussiano consegue atingir valores próximos a 100%, com relação ao número de vértices selecionados, nas técnicas dos k -próximos e dos k -visíveis, primeiro. Dessa forma, a melhor técnica de amostragem seria o método Gaussiano, mas as técnicas de amostragem no eixo-médio,

pelo método de Halton e nas bordas do espaço de configurações livres poderiam também ser utilizadas com méritos. Novamente, a melhor técnica de seleção de vértices seria a técnica dos k -componentes.

Figura 8.13: Resultado dos experimentos no ambiente de uma casa.

Com relação ao tempo de médio de processamento das soluções encontradas, a ordenação das técnicas de amostragem é a seguinte: eixo-médio, método Gaussiano, aleatória, método de Halton e bordas do espaço de configurações livres, porém o método Gaussiano perde a sua vantagem quando utilizado com a técnica de seleção k -componentes. Já nas técnicas de seleção de vértices, novamente, a melhor opção é a técnica dos k -próximos.

Como no ambiente anterior, a tendência das curvas se manteve inalterada: exponencial para as técnicas dos k -visíveis e dos k -próximos e praticamente estável para a técnica dos k -componentes. Um fato interessante observado nos tempos médios de processamento das soluções encontradas das técnicas de seleção de vértices k -visíveis e k -próximos é a tendência da curva da técnica de amostragem

nas bordas do espaço de configurações livres que destoa das outras curva. Possivelmente, neste ambiente, esta técnica de amostragem possui um gasto computacional maior que das outras técnicas quando o número de vértices selecionados é aumentado.

O comprimento médio das soluções encontradas possui tendência de queda para as três técnicas de seleção de vértices e também para as cinco técnicas de amostragem. Este fato é fruto das características do ambiente, que possui grandes regiões com configurações livres e obstáculos que não proporcionam grandes dificuldades ao algoritmo de planejamento. Com relação à ordem das técnicas de amostragem neste requisito, tem-se o seguinte resultado: eixo-médio, método de Halton, aleatória, método Gaussiano e bordas do espaço de configurações livres. Diferentemente do que ocorreu com os outros ambientes, a técnica de seleção de vértices k -componentes é a mais vantajosa, porém esta melhoria só ocorre para uma quantidade de vértices selecionados superior a 16.

A análise da quantidade de vértices selecionados é praticamente a mesma dos outros dois ambientes, havendo mudanças somente quando o critério analisado é o comprimento do caminho, que neste ambiente, a melhor opção é $k=20$ para a técnica de seleção de vértices k -componentes.

8.3.4 Ambiente de Labirinto

No ambiente de labirinto, conforme pode ser observado na Figura 8.14, a análise do percentual de soluções encontradas mostra que, no conjunto das técnicas de amostragem, o método de Halton atinge valores próximos a 100% primeiro, porém as outras quatro técnicas de amostragem conseguem encontrar um número maior de soluções. Dessa forma, quando se deseja eficiência, a técnica pelo método de Halton é a melhor opção, por outro lado quando se prima a quantidade de respostas encontradas, qualquer uma das cinco técnicas é válida, mas com uma pequena desvantagem para o método de Halton. Já quando são analisadas as técnicas de seleção de vértices, a técnica dos k -componentes possui larga vantagem com relação as outras duas.

Já no tempo médio de processamento das soluções encontradas, todas as cinco técnicas de amostragem possuem praticamente os mesmos valores, com ligeira vantagem para as técnicas de amostragem uniformes. Na seleção de vértices, as técnicas dos k -visíveis e dos k -próximos são a melhor opção para atuarem em conjunto com qualquer uma das técnicas de amostragem, porém há uma ligeira vantagem para a técnica dos k -próximos.

Diferentemente do que ocorreu nos últimos dois ambientes, orifício e casa, a técnica de seleção de vértices k -componentes assume novamente tendência logarítmica. Já as técnicas dos k -próximos e dos k -visíveis seguem a mesma tendência de todos os outros ambiente, ou seja, exponencial.

Figura 8.14: Resultado dos experimentos no ambiente de labirinto.

Com relação ao comprimento médio das soluções encontradas, ocorre um fato interessante: todas as técnicas possuem tendência de crescimento, mas nas técnicas de amostragem pelo método de Halton e no eixo-médio este crescimento é muito mais evidente do que nas outras três técnicas de amostragem. Dessa forma, existem duas técnicas de amostragem indicadas para esta tarefa: a amostragem no eixo-médio para valores de k inferiores a 11 e amostragem pelo método Gaussiano para valores de k superiores a 11. Em ambas as técnicas de amostragem a técnica de seleção de vértices k -componentes é a mais vantajosa, principalmente devido à estabilidade da curva da amostragem pelo método Gaussiano.

Novamente a análise da quantidade de vértices selecionados é praticamente a

mesma para todos os ambientes, ocorrendo apenas mudanças quando se analisa o comprimento do caminho. Neste ambiente, a melhor opção é $k=2$ para a técnica de seleção de vértices k -componentes.

8.3.5 Ambiente com Passagem Estreita

No ambiente com passagem estreita, conforme pode ser observado na Figura 8.15, como também ocorreu no ambiente de orifício, as técnicas de amostragem uniformes são prejudicadas. Este fato está relacionado novamente com a necessidade de serem selecionadas amostras na região da passagem estreita, apesar da dificuldade ser um pouco mais tênue do que no ambiente do orifício. Sendo assim, quando são observados o percentual das soluções encontradas, as técnicas de amostragem mais indicadas são as três técnicas de amostragem não-uniformes: eixo-médio, método Gaussiano e bordas do espaço de configurações livres. Como ocorreu em todos os ambiente, novamente a técnica de seleção de vértices k -componentes é a mais indicada.

Com relação ao tempo médio de processamento das soluções encontradas é possível ordenar as técnicas de amostragem da seguinte forma: eixo-médio, método Gaussiano, bordas do espaço de configurações livres, aleatória e método de Halton. Novamente pode-se observar que as técnicas de amostragem não-uniformes são mais eficientes com relação às uniformes. Também se repete a equivalência entre duas técnicas de seleção de vértices, k -próximos e k -visíveis, e novamente a técnica dos k -próximos possui uma ligeira vantagem.

Comparando-se com os outros quatro ambientes, o ambiente com passagem pode ser considerado o mais complexo de se resolver. Esta conclusão é derivada do tempo médio de processamento das soluções encontradas, que é o mais elevado. Esta informação também está correlacionada com o número de amostras do ambiente, que também é o mais elevado.

O comprimento médio das soluções encontradas apresenta um fato interessante nas técnicas de seleção k -próximos e k -visíveis, onde a amostragem no eixo-médio não apresenta variações significativas do comprimento do caminho. Este fato indica que provavelmente a solução encontrada percorre toda a extensão do eixo-médio. As técnicas de amostragem uniformes também apresentaram valores satisfatórios, porém são inferiores à amostragem no eixo-médio. Novamente, repete-se a equivalência entre as técnicas de seleção de vértices k -próximos e k -visíveis, além da vantagem que possuem em relação à técnica de seleção de vértices k -componentes.

Finalmente, a análise do número de vértices selecionados mostra que $k=2$ é a melhor opção para percentual de soluções encontradas para a técnica de seleção de vértices k -componentes, $k=4$ para o menor tempo de processamento com a técnica dos k -próximos e, finalmente, $k=20$ para o comprimento do caminho para as técnicas de seleção de vértices k -próximos e k -visíveis.

Figura 8.15: Resultado dos experimentos no ambiente com passagem estreita.

8.4 Análise dos Resultados

Por meio dos resultados dos experimentos, foi possível estabelecer uma correlação, conforme mostra a Tabela 8.1, entre os ambientes testados, o percentual de soluções encontradas, o tempo de processamento e o comprimento das soluções encontradas para o número de vértices selecionados, k , e para as técnicas de amostragem e de seleção de vértices.

Por meio da Tabela 8.1 é possível resumir as seguintes considerações: 1) a

Tabela 8.1: Técnicas de amostragem e seleção de vértices mais indicadas para cada ambiente.

Ambiente	Parâmetros	k	Amostragem	Seleção de Vértices
Densamente ocupado	Percentual	2	Halton	k -componentes
	Tempo	4	Aleatória	k -próximos
	Comprimento	6	Eixo-médio	k -visíveis
Orifício	Percentual	2	Eixo-médio	k -componentes
	Tempo	4	Eixo-médio	k -próximos
	Comprimento	20	Eixo-médio	k -próximos/ k -visíveis
Casa	Percentual	2	Gaussiano	k -componentes
	Tempo	4	Eixo-médio	k -próximos
	Comprimento	20	Eixo-médio	k -componentes
Labirinto	Percentual	2	Halton	k -componentes
	Tempo	4	Aleatória	k -próximos
	Comprimento	2	Eixo-médio	k -componentes
Passagem estreita	Percentual	2	Eixo-médio	k -componentes
	Tempo	4	Eixo-médio	k -próximos
	Comprimento	20	Eixo-médio	k -próximos/ k -visíveis

técnica de amostragem no eixo-médio é recomendada para ambientes com passagens, como é o caso dos experimentos em ambientes com orifícios e de passagem estreita, caso se deseje o maior percentual de soluções encontradas, 2) a técnica de amostragem no eixo-médio também apresenta ótimos resultados para o comprimento dos caminhos encontrados em todos os cinco ambientes testados, além dos caminhos estarem em regiões mais seguras, ou seja, mais longe dos obstáculos, 3) as técnicas de amostragem uniforme são indicadas para encontrar um maior percentual de soluções, com menor tempo de processamento, em ambientes densamente ocupados e de labirinto, 4) a técnica de seleção de vértices k -componentes é a que apresenta o melhor percentual de soluções encontradas com a menor quantidade de vértices selecionados para todos os ambientes, e 5) a técnica de seleção de vértices k -próximos é a que apresenta o menor tempo de processamento para todos os ambientes.

9 Conclusão

Este trabalho apresentou o algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas para encontrar um caminho factível entre duas configurações livres, o qual é apropriado para ser empregado em sistemas embarcados e utilizado em ambientes internos, com características encontradas em residências, indústrias e hospitais.

Mais especificamente, deseja-se escolher a melhor combinação entre cinco técnicas de amostragem e três de seleção de vértices, utilizados na fase de construção do mapa de rotas deste algoritmo. Para que isto seja possível, foram observados o percentual, o tempo de processamento e o comprimento das soluções encontradas em cinco ambientes diferentes. Os ambientes dos experimentos apresentam dificuldades específicas e tentam simular características que podem ser encontradas em ambientes reais.

Dessa forma, este capítulo apresenta as considerações a respeito dos experimentos realizados, tentando definir quais combinações de técnicas de amostragem e seleção de vértices são mais indicadas para ambientes com características semelhantes a um dos cinco ambientes testados. Além disso, são apresentadas sugestões de trabalhos futuros sobre o algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas.

9.1 Discussão sobre os Resultados

O algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas mostrou-se eficaz na realização de sua tarefa, que consiste em encontrar um caminho factível entre as configurações de origem e de destino, principalmente com relação ao tempo de processamento da fase de questionamento, o que remete à utilização em sistemas robóticos embarcados.

No âmbito das técnicas de amostragem ficou comprovado, como afirmado na grande maioria dos artigos correlatos (BOOR; OVERMARS; STAPPEN, 1999), (NIS-SOUX; SIMEON; LAUMOND, 1999), (BRANICKY et al., 2001) e (GERAERTS; OVER-

MARS, 2006), que as técnicas de amostragem uniformes não são indicadas para ambientes com passagens de dimensões reduzidas, como foi o caso dos experimentos nos ambientes de orifício e de passagem estreita deste trabalho. Com relação ao comprimento dos caminhos encontrados, não é possível estabelecer qualquer correlação válida para todos os ambientes. Apesar destas constatações, todas as técnicas de amostragem apresentaram bons resultados para alguma das três características observadas em algum dos cinco ambientes testados.

Com relação às técnicas de seleção de vértices, pode-se verificar que as técnicas dos k -próximos e dos k -visíveis foram praticamente idênticas para os cinco ambientes testados. Esta comprovação está relacionada ao número de amostras selecionadas, variável k , estar condizente com o raio de seleção de amostras da técnica dos k -próximos; dessa forma, a técnica dos k -visíveis não conseguiu selecionar vértices com distância maior que a definida para o raio de seleção de amostras, fazendo com que estas duas técnicas selecionassem praticamente o mesmo conjunto de vértices. Com o aumento do valor do número de vértices selecionados para valores maiores dos que foram testados, ou com a redução do raio de seleção de amostras, as duas técnicas assumiriam características distintas, provavelmente indicando vantagem para a técnica k -visíveis. Um fato interessante da técnica de seleção de vértices k -componentes é que, caso seja respeitado um número mínimo de vértices amostrados, será necessário selecionar apenas dois vértices para que o grafo resultante da fase de construção do mapa de rotas seja conectado.

O valor do número de vértices amostrados, obtido pelo método teórico de Kavvaki, Kolountzakis e Latombe (1996), apresentou ótimos resultados para todos os ambientes e para todas as técnicas de amostragem, com exceção das técnicas de amostragem uniforme no ambiente de orifício. Neste ambiente, as técnicas de amostragem uniforme apresentaram percentual de soluções encontradas aquém do que foi estipulado (maior que 68,27%, conforme descrito na seção 7.5 deste trabalho), porém estes dados apresentavam tendência de crescimento para números de vértices selecionados superiores a vinte, o que indica que o percentual de soluções encontradas pode se equiparar ao das outras técnicas de amostragem quando o valor da variável k tender ao infinito.

Já o número de vértices selecionados, variável k , também foi escolhido adequadamente, uma vez que os resultados do percentual de soluções encontradas próximos ao limite superior, de vinte vértices, não se modificaram consideravelmente em relação a valores menores de k . Porém, poderia haver alguma modificação no comprimento do caminho encontrado se o valor de k fosse aumentado, mas esta modificação não seria vantajosa devido ao aumento do tempo de proces-

samento. Estes dados vêm corroborar com a análise realizada na seção 7.6, onde apenas os resultados com k até vinte vértices eram significativos nos experimentos feitos por Geraerts (2006).

Com o intuito de facilitar a escolha adequada da quantidade de vértices selecionados e das técnicas de amostragem e seleção de vértices a serem utilizados no planejamento probabilístico de mapa de rotas, a Tabela 9.1 foi elaborada com base nas informações apresentadas no Capítulo 8 e no Apêndice A, considerando que é fundamental que se obtenha um alto percentual de soluções encontradas para diferentes questionamentos, em um mesmo ambiente. Neste caso, considerou-se adequado um percentual de soluções encontradas maior ou igual a 90%, entretanto, a escolha entre o menor comprimento do caminho encontrado ou o menor tempo de processamento recai sobre os requisitos da aplicação, quando ambos não puderem ser satisfeitos simultaneamente. Assim, a Tabela 9.1 indica qual seria a melhor combinação das técnicas de amostragem e seleção de vértices, além do número de vértices selecionados, considerando: a) maior prioridade para caminhos com menor comprimento (em detrimento do menor tempo de processamento) e b) maior prioridade para caminhos encontrados em um menor tempo de processamento (em detrimento daqueles de menor comprimento).

Tabela 9.1: Técnicas de amostragem e seleção de vértices mais indicadas para cada ambiente com prioridade no menor comprimento do caminho e no menor tempo de processamento.

Ambiente	PRIORIDADE	
	Menor comprimento do caminho	Tempo de processamento
Densamente ocupado	Eixo-médio k -componentes $k=12$	Halton k -próximos $k=8$
Orifício	Eixo-médio k -próximos/ k -visíveis $k=20$	Eixo-médio k -próximos $k=8$
Casa	Eixo-médio k -componentes $k=20$	Gaussiano k -próximos $k=10$
Labirinto	Eixo-médio k -componentes $k=2$	Halton k -próximos $k=8$
Passagem estreita	Eixo-médio k -próximos/ k -visíveis $k=20$	Eixo-médio k -próximos $k=8$

Quando os dados da Tabela 9.1 são comparados com os dados da Tabela 8.1,

pode-se observar que existem algumas diferenças entre eles. Estas diferenças são fruto da inclusão de um limite mínimo de soluções encontradas (neste caso 90%), que faz esta análise mais criteriosa e realista do que a anterior. Dessa forma, a combinação de técnicas de amostragem e seleção de vértices que fornece um número maior de soluções, aliado ao menor tempo de processamento e ao menor comprimento de caminho é almejado.

Infelizmente, não é possível determinar uma única técnica de amostragem ou de seleção de vértices que satisfaça todos os requisitos, em todos os ambientes, ao mesmo tempo. É necessária a verificação das características do ambiente que mais se encaixam com os ambientes aqui testados e quais requisitos são mais importantes para o algoritmo de planejamento, o que depende da aplicação em questão.

Finalmente, para que se possa utilizar os dados apresentados na Tabela 9.1 é necessário primeiro selecionar um dos cinco ambientes testados, verificando principalmente as características do ambiente em que o algoritmo de planejamento será utilizado. Em seguida, é necessário optar entre soluções com menor tempo de processamento, ou por soluções com menor comprimento de caminho. Desta forma, os dados obtidos fornecerão as bases para se otimizar a utilização do algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas.

9.2 Trabalhos Futuros

Nesta seção são apresentadas algumas sugestões de trabalho futuros sobre alguns pontos específicos do algoritmo de planejamento probabilístico de mapa de rotas que não foram explorados neste trabalho, mas que poderiam adicionar grandes melhorias na implementação do mesmo.

Talvez uma melhoria significativa poderia ser alcançada em termos de qualidade do caminho gerado, caso o mapa de rotas incluísse a presença de ciclos. Com os ciclos no mapa de rotas haveria um número maior de possibilidades de rotas a explorar com o mesmo número de configurações amostradas, resultando em caminhos de menor comprimento. Apesar dessa vantagem, o uso de ciclos causaria um incremento do tempo de processamento do algoritmo, tanto na fase de construção do mapa de rotas quanto, principalmente, na fase de questionamento. Na fase de construção do mapa de rotas, a função *possible_connect* é uma das que consome a maior parte do tempo de processamento, fato que seria mais evidente caso o número de arestas fosse aumentado. Com um número maior de

arestas, a busca por uma solução na fase de questionamento também seria maior, o que poderia ser um empecilho para a utilização deste algoritmo em sistemas robóticos embarcados.

Com relação à modelagem do robô móvel, a utilização de um modelo mais completo, ou seja, não-holonômico, faria com que as simulações ficassem mais próximas do que ocorre com o robô móvel real. Estas modificações devem ser realizadas em dois pontos do algoritmo: na modelagem do espaço de configurações e na função *possible_connect* da fase de construção do mapa de rotas. Na modelagem do espaço de configurações deveriam ser utilizados como variáveis os movimentos translacional e rotacional do robô, além das equações cinemáticas e dinâmicas do mesmo. Já na função *possible_connect* a verificação de colisão utilizando um segmento de reta deveria levar em conta também a orientação do robô e as suas equações dinâmicas.

Já nas técnicas de amostragem, pode-se observar uma clara divisão entre as técnicas de amostragem uniformes e as não-uniformes, porém a formulação de uma técnica híbrida talvez incluísse as vantagens dos dois grupos numa mesma técnica. Nessa nova técnica deveria ser avaliado quais técnicas seriam mais indicadas à combinação e qual deveria ser o percentual de amostras de cada técnica.

Com relação aos experimentos, estes poderiam ser realizados com configurações de origem e destino aleatórias, uma vez que a análise dos resultados seria realizada em todo o ambiente e não apenas em uma posição específica. Porém, não seria possível determinar o caminho mínimo rapidamente.

Para que a escolha da melhor combinação de técnicas de amostragem e seleção de vértices fosse realizada de forma automática, poderia ser utilizado um sistema de controle híbrido para seleção das técnicas mais apropriadas em função do sensoramento do ambiente em questão.

A introdução de uma fase de pós-processamento, após a fase de construção do mapa de rotas, para inserir automaticamente ciclos em arestas chaves do grafo, faria com que o comprimento dos caminhos encontrados na fase de questionamento pudesse ser reduzido. Uma fase de pós-processamento, mas agora após a fase de questionamento, também poderia ser utilizada para tornar os caminhos resultantes mais suaves e curtos.

O desenvolvimento de uma maior integração entre as fases de construção do mapa de rotas e de questionamento, poderia, inicialmente, construir mapas reduzidos e, ao se ter dificuldades na fase de questionamento, poderia ser incrementada

a construção do mapa de rotas; este ciclo questionamento-construção poderia ser repetido sempre que necessário.

Um outro trabalho interessante, seria expandir o trabalho para planejar caminhos e mapas de rotas para uma equipe de robôs que se movimentam simultaneamente em um mesmo espaço de trabalho.

Finalmente, um último trabalho futuro, também bastante relevante, seria realizar experimentos com robôs reais planejando e navegando em ambientes reais.

Referências

- AMATO, N.; BAYAZIT, O.; DAGLE, L.; JONES, C.; VALLEJO, D. Choosing good distance metrics and local planners for probabilistic roadmap methods. In: *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'98)*. Leuven, Belgium: IEEE Robotics and Automation Society, 1998. v. 1, p. 630–637.
- AMATO, N.; WU, Y. A randomized roadmap method for path and manipulation planning. In: *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'96)*. Minneapolis, USA: IEEE Robotics and Automation Society, 1996. v. 1, p. 113–120.
- ARKIN, R. C. *Behavior-Based Robotics*. Cambridge, USA: The MIT Press, 1998.
- BARRAQUAND, J.; KAVRAKI, L.; LATOMBE, J.-C.; LI, T.-Y.; MOTWANI, R.; RAGHAVAN, P. A random sampling scheme for path planning. *International Journal of Robotics Research*, v. 16, p. 744–759, 1997.
- BOOR, V.; OVERMARS, M.; STAPPEN, F. van der. The gaussian sampling strategy for probabilistic roadmap planners. In: *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'99)*. Detroit, USA: IEEE Robotics and Automation Society, 1999. v. 2, p. 1018–1023.
- BRANICKY, M.; LAVALLE, S.; OLSON, K.; YANG, L. Quasi-randomized path planning. In: *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'01)*. Seoul, South Korea: IEEE Robotics and Automation Society, 2001. v. 2, p. 1481–1487.
- CHEN, P.; HWANG, Y. Sandros: A dynamic graph search algorithm for motion planning. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 14, p. 390–403, 1998.
- CHOSSET, H.; BURDICK, J. Sensor-based exploration: The hierarchical generalized voronoi graph. *International Journal of Robotics Research*, v. 19, p. 96–125, 2000.
- CORMEN, T.; LEISERSON, C.; RIVEST, R.; STEIN, C. *Introduction to Algorithms*. Cambridge, USA: The MIT Press, 2001.
- DALE, L.; AMATO, N. Probabilistic roadmaps: Putting it all together. In: *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'01)*. Seoul, South Korea: IEEE Robotics and Automation Society, 2001. v. 2, p. 1940–1947.
- DIJKSTRA, E. A note on two problems in connection with graphs. *Numerical Mathematics*, v. 1, p. 269–271, 1959.

- DRUMMOND, C. Accelerating reinforcement learning by composing solutions of automatically identified subtasks. *Journal of Artificial Intelligence Research*, v. 16, p. 59–104, 2002.
- DUDEK, G.; JENKIN, M. *Computational Principles of Mobile Robotics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000.
- ETZIONI, O.; WELD, D. A softbot based interface to the internet. *Communications of the Association of Computing Machinery*, v. 37, p. 72–75, 1994.
- EVEN, S. *Graph Algorithms*. Potomac, USA: Computer Science Press, 1979.
- GERAERTS, R. *Sampling-based Motion Planning: Analysis and Path Quality*. Utrecht University, The Netherlands: PhD Thesis, 2006.
- GERAERTS, R.; OVERMARS, M. A comparative study of probabilistic roadmap planners. In: *Proceedings of the Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics (WAFR'02)*. Nice, France: Algorithmic Foundations of Robotics Press, 2002. p. 43–57.
- GERAERTS, R.; OVERMARS, M. Sampling techniques for probabilistic roadmap planners. In: *Proceedings of the Conference on Intelligent Autonomous Systems*. Amsterdam, The Netherlands: IOS Press, 2004. p. 600–609.
- GERAERTS, R.; OVERMARS, M. Sampling and node adding in probabilistic roadmap planners. *Robotics and Autonomous Systems*, v. 54, p. 165–173, 2006.
- GHALLAB, M.; NAU, D.; TRAVERSO, P. *Automated Planning: Theory and Practice*. San Francisco, USA: Morgan Kaufmann Publishers, 2004.
- HALPERIN, D.; OVERMARS, M.; SHARIR, M. Efficient motion planning for an l-shaped object. *SIAM Journal on Computing*, v. 21, p. 1–23, 1992.
- HOFF, K.; CULVER, T.; KEYSER, J.; LIN, M.; MANOCHA, D. Interactive motion planning using hardware-accelerated computation of generalized voronoi diagrams. In: *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'00)*. San Francisco, USA: IEEE Robotics and Automation Society, 2000. v. 7, p. 2931–2937.
- KAVRAKI, L. *Random Networks in Configuration Space for Fast Path Planning*. Stanford University, USA: PhD Thesis, 1995.
- KAVRAKI, L.; KOLOUNTZAKIS, K.; LATOMBE, J.-C. Analysis of probabilistic roadmaps for path planning. In: *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'96)*. Minneapolis, USA: IEEE Robotics and Automation Society, 1996. v. 4, p. 3020–3025.
- KAVRAKI, L.; KOLOUNTZAKIS, M.; LATOMBE, J.-C. Analysis of probabilistic roadmaps for path planning. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 14, p. 166–171, 1998.
- KAVRAKI, L.; LATOMBE, J.-C. Randomized preprocessing of configuration space for fast path planning. In: *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'94)*. San Diego, USA: IEEE Robotics and Automation Society, 1994. v. 3, p. 2138–2145.

- KAVRAKI, L.; SVESTKA, P.; LATOMBE, J.-C.; OVERMARS, M. Probabilistic roadmap for path planning in high-dimensional configuration spaces. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, v. 12, p. 566–580, 1996.
- KHATIB, O. Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots. *International Journal of Robotics Research*, v. 5, p. 90–98, 1986.
- LATOMBE, J.-C. *Robot Motion Planning*. Norwell, USA: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- LAVALLE, S. *Planning Algorithms*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2006.
- LIU, G.; TRINKLE, J. Complete path planning for planar closed chains among point obstacles. *Robotics: Science and Systems*, v. 1, p. 33–40, 2005.
- LOZANO-PÉREZ, T. Spatial planning: A configuration space approach. *IEEE Transaction on Computers*, C-32, p. 108–120, 1983.
- MURPHY, R. *Introduction to AI Robotics*. Cambridge, USA: The MIT Press, 2000.
- NEHMZOW, U. *Mobile Robotics: A Practical Introduction*. New York, USA: Springer-Verlag, 2002.
- NISSOUX, C.; SIMEON, T.; LAUMOND, J.-P. Visibility-based probabilistic roadmaps. In: *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'99)*. Kyongjy, South Korea: IEEE Robotics and Automation Society, 1999. v. 3, p. 1316–1321.
- OVERMARS, M. *A Random Approach to Motion Planning*. Utrecht University, The Netherlands: Technical Report RUU-CS-92-32, 1992.
- PACHECO, R. N.; COSTA, A. H. R. Navegação de robôs móveis utilizando o método de campos potenciais. In: *Workshop de Computação WORKCOMP'2002*. São José dos Campos, Brasil: Milton T. S. Sakude and Cecília de A. Castro Cesar (eds.), 2002. v. 1, p. 125–130.
- RIMON, E.; KODITSCHKEK, D. Exact robot navigation using artificial potential fields. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, v. 8, p. 501–518, 1992.
- RUSSEL, S.; NORVIG, P. *Artificial Intelligence: A modern Approach*. New Jersey, USA: Prentice Hall, 2002.
- SALOMON, B.; GARBER, M.; LIN, M.; MANOCHA, D. *Interactive navigation in complex environments using path planning*. p. 41–50: Symposium on Interactive 3D graphics, 2003.
- SELVATICI, A. H. P.; COSTA, A. H. R. *Architecture for Mobile Robots Based on Reactive Behaviors In: Mobile Robots: The Evolutionary Approach*. Berlin, 1st ed., v. 50, p. 161–184: Springer, 2007.
- SÁNCHEZ, G.; LATOMBE, J.-C. Single-query bi-directional probabilistic roadmap planner with lazy collision checking. *International Symposium on Robotics Research*, p. 403–418, 2001.

- SOWA, J. *Knowledge Representation: Logical, Philosophical, and Computational Foundations*. Pacific Grove, USA: Brooks/Cole Publishing, 2000.
- SUN, Z.; HSU, D.; JIANG, T.; KURNIAWATI, H.; REIF, J. Narrow passage sampling for probabilistic roadmap planning. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 21, p. 1105–1115, 2005.
- SVESTKA, P. *Robot Motion Planning Using Probabilistic Road Maps*. Utrecht University, The Netherlands: PhD Thesis, 1997.
- SVESTKA, P.; OVERMARS, M. *Probabilistic Path Planning In: Robot Motion Planning and Control*. New York, USA, p. 255-304: Springer-Verlag, 1998.
- VARADHAN, G.; MANOCHA, D. A deterministic sampling approach for complete motion planning. *Robotics: Science and Systems*, v. 1, p. 25–32, 2005.
- VLEUGELS, J.; OVERMARS, M. Approximating voronoi diagrams of convex sites in any dimension. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, v. 8, p. 201–221, 1998.
- WANG, X.; HICKERNELL, F. *Randomized Halton Sequences*. 32: 887-899: Mathematics and Computer Modeling, 2000.
- WILMARTH, S.; AMATO, N.; STILLER, P. Maprm: A probabilistic roadmap planner with sampling on the medial axis of the free space. In: *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'99)*. Detroit, USA: IEEE Robotics and Automation Society, 1999. v. 2, p. 1024–1031.
- ZHU, D.; LATOMBE, J.-C. New heuristic algorithms for efficient hierarchical path planning. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 7, p. 9–20, 1991.

Apêndice A – Resultados Completos dos Experimentos

Nas seções A.1, A.2, A.3, A.4 e A.5 são apresentados os resultados completos dos experimentos nos ambientes densamente ocupado, de orifício, de uma casa, de labirinto e com passagem estreita, respectivamente.

Os resultados deste apêndice são apresentados em forma de tabelas com os seguintes dados: técnica de seleção de vértices, número de vértices selecionados, percentual das soluções encontradas, a média, $\mu(tc)$, e o desvio padrão, $\sigma(tc)$, do tempo de processamento na fase de construção do mapa de rotas dos experimentos que obtiveram solução, a média, $\mu(tq)$, e o desvio padrão, $\sigma(tq)$, do tempo de processamento na fase de questionamento dos experimentos que obtiveram solução e, finalmente, a média, $\mu(Cc)$, e o desvio padrão, $\sigma(Cc)$, do comprimento dos caminhos encontrados, onde todas as unidades de tempo estão referenciadas em segundos e as unidades de distância em *pixel*.

Devido a elevada quantidade de dados envolvida, cada ambiente foi dividido em cinco tabelas diferentes, onde cada tabela apresenta os dados referentes a cada uma das cinco técnicas de amostragem: aleatória, método de Halton, eixo-médio, bordas do espaço de configurações livres e método Gaussiano.

A.1 Ambiente Densamente Ocupado

Tabela A.1: Resultado dos experimentos no ambiente densamente ocupado para a técnica de amostragem aleatória.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	13 %	3.090	0.058	0.042	0.019	1002.7	9.1
	8	43 %	3.854	0.079	0.049	0.014	1003.6	8.0
	10	60 %	4.815	0.116	0.049	0.023	1004.2	7.8
	12	72 %	5.838	0.147	0.049	0.019	1004.9	7.6
	14	83 %	6.988	0.207	0.049	0.019	1005.2	7.6
	16	84 %	8.170	0.274	0.050	0.018	1004.6	7.8
	18	85 %	9.315	0.349	0.055	0.021	1004.4	7.7
	20	85 %	10.458	0.432	0.056	0.022	1003.9	7.6
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	13 %	3.377	0.062	0.068	0.023	1002.7	7.4
	8	42 %	4.274	0.090	0.052	0.021	1003.8	8.1
	10	59 %	5.366	0.111	0.059	0.017	1004.3	8.7
	12	73 %	6.652	0.165	0.062	0.022	1004.8	8.7
	14	84 %	8.176	0.246	0.059	0.016	1005.1	8.6
	16	85 %	9.940	0.342	0.061	0.022	1004.5	8.4
	18	88 %	11.928	0.420	0.059	0.014	1004.4	7.8
	20	88 %	14.167	0.512	0.061	0.017	1004.0	7.7
k -componentes	2	92 %	126.248	5.416	0.057	0.020	1011.3	8.5
	4	92 %	183.143	2.982	0.055	0.000	1005.5	9.2
	6	92 %	209.275	5.395	0.055	0.000	1002.1	6.8
	8	92 %	226.901	8.341	0.066	0.022	1002.1	6.8
	10	92 %	242.791	6.756	0.055	0.000	1002.1	6.8
	12	92 %	250.341	5.066	0.077	0.027	1001.9	6.6
	14	92 %	262.549	6.108	0.088	0.027	1001.9	6.6
	16	92 %	270.396	11.773	0.066	0.022	1003.5	5.8
	18	92 %	274.615	11.757	0.055	0.000	1003.5	5.8
	20	92 %	279.077	8.764	0.055	0.000	1003.5	5.8

Tabela A.2: Resultado dos experimentos no ambiente densamente ocupado para a técnica de amostragem pelo método de Halton.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	9 %	2.485	0.035	0.055	0.026	1000.5	4.0
	6	56 %	3.147	0.076	0.050	0.021	1000.3	5.8
	8	90 %	3.963	0.081	0.054	0.019	1001.6	6.2
	10	93 %	4.928	0.104	0.053	0.019	1001.2	5.5
	12	95 %	6.011	0.140	0.055	0.023	1001.6	5.9
	14	98 %	7.185	0.183	0.054	0.019	1001.5	6.8
	16	98 %	8.414	0.203	0.056	0.018	1000.9	5.1
	18	98 %	9.660	0.238	0.055	0.022	1001.5	4.8
	20	98 %	10.866	0.261	0.054	0.025	1000.6	4.2
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	9 %	2.784	0.032	0.061	0.017	1000.5	4.0
	6	56 %	3.512	0.071	0.060	0.016	1000.3	5.8
	8	90 %	4.414	0.087	0.065	0.023	1001.6	6.2
	10	93 %	5.539	0.109	0.063	0.021	1001.2	5.5
	12	95 %	6.859	0.143	0.063	0.021	1001.6	5.9
	14	98 %	8.433	0.271	0.068	0.024	1001.5	6.8
	16	98 %	10.210	0.304	0.069	0.024	1000.9	5.1
	18	98 %	12.188	0.299	0.067	0.023	1001.5	4.8
	20	98 %	14.445	0.385	0.067	0.023	1000.6	4.2
k -componentes	2	98 %	129.945	3.386	0.055	0.000	1003.6	2.8
	4	98 %	189.176	5.627	0.055	0.000	1005.7	4.1
	6	98 %	215.143	4.871	0.066	0.022	1007.4	10.7
	8	98 %	231.319	7.025	0.066	0.022	1007.5	9.6
	10	98 %	247.132	6.061	0.055	0.000	1004.3	4.1
	12	98 %	256.286	5.966	0.055	0.000	1001.5	3.6
	14	98 %	270.220	9.575	0.055	0.000	1001.1	4.2
	16	98 %	277.868	13.451	0.066	0.022	1001.5	2.3
	18	98 %	285.626	14.309	0.066	0.022	1001.4	3.7
	20	98 %	288.440	13.359	0.055	0.000	1003.4	4.2

Tabela A.3: Resultado dos experimentos no ambiente densamente ocupado para a técnica de amostragem no eixo 0.000médio.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	13 %	3.069	0.043	0.055	0.000	995.3	0.7
	8	52 %	4.066	0.111	0.052	0.023	996.7	1.8
	10	77 %	5.326	0.167	0.052	0.020	997.4	1.7
	12	81 %	6.776	0.238	0.054	0.027	997.7	1.5
	14	85 %	8.365	0.312	0.055	0.022	998.1	1.3
	16	85 %	10.045	0.437	0.053	0.016	998.2	1.3
	18	85 %	11.562	0.453	0.060	0.023	998.2	1.2
	20	85 %	12.990	0.516	0.056	0.021	998.2	1.2
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	13 %	3.496	0.056	0.072	0.025	995.2	0.6
	8	52 %	4.547	0.106	0.070	0.024	996.7	1.8
	10	79 %	5.953	0.172	0.069	0.024	997.3	1.7
	12	83 %	7.665	0.243	0.070	0.024	997.7	1.5
	14	88 %	9.725	0.328	0.070	0.024	998.0	1.3
	16	91 %	12.135	0.445	0.072	0.025	998.1	1.1
	18	91 %	14.770	0.545	0.069	0.024	998.1	1.0
	20	93 %	17.729	0.665	0.074	0.026	998.5	3.8
k -componentes	2	95 %	132.330	11.855	0.066	0.022	999.3	5.7
	4	95 %	197.648	16.409	0.055	0.000	1001.6	13.1
	6	95 %	227.176	18.030	0.055	0.035	1001.3	12.9
	8	95 %	249.747	19.895	0.066	0.022	999.1	2.4
	10	95 %	262.374	24.715	0.055	0.035	998.2	1.1
	12	95 %	280.769	24.707	0.066	0.022	998.0	1.2
	14	95 %	290.582	27.292	0.055	0.000	998.5	0.7
	16	95 %	293.901	25.089	0.055	0.035	998.3	0.7
	18	95 %	302.868	25.015	0.044	0.022	998.1	0.7
	20	95 %	311.077	23.299	0.055	0.000	998.1	0.7

Tabela A.4: Resultado dos experimentos no ambiente densamente ocupado para a técnica de amostragem nas bordas do espaço de configurações livres.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	20 %	3.071	0.053	0.049	0.016	1011.6	4.7
	8	73 %	3.915	0.085	0.053	0.020	1009.5	7.1
	10	86 %	4.981	0.132	0.054	0.014	1008.8	7.5
	12	92 %	6.225	0.168	0.055	0.021	1007.7	8.0
	14	93 %	7.608	0.226	0.061	0.025	1007.4	8.2
	16	94 %	9.070	0.278	0.055	0.018	1006.7	8.1
	18	94 %	10.540	0.350	0.054	0.022	1007.1	8.3
	20	94 %	11.946	0.395	0.056	0.023	1006.5	8.4
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	20 %	3.524	0.066	0.088	0.027	1011.6	4.7
	8	73 %	4.450	0.088	0.077	0.027	1009.5	7.1
	10	86 %	5.653	0.138	0.082	0.027	1008.8	7.5
	12	93 %	7.139	0.180	0.074	0.026	1007.8	8.0
	14	94 %	8.902	0.249	0.071	0.025	1007.4	8.2
	16	95 %	10.918	0.315	0.079	0.027	1006.8	8.1
	18	95 %	13.215	0.414	0.078	0.027	1007.5	8.3
	20	95 %	15.773	0.514	0.080	0.027	1006.6	8.3
k -componentes	2	97 %	129.506	5.044	0.055	0.000	1005.5	7.3
	4	97 %	197.538	6.114	0.077	0.027	1005.7	5.5
	6	97 %	224.176	10.552	0.077	0.027	1006.1	4.9
	8	97 %	242.615	8.790	0.066	0.022	1006.1	4.9
	10	97 %	258.462	7.118	0.066	0.022	1001.9	4.1
	12	97 %	269.835	9.273	0.066	0.022	1001.9	4.1
	14	97 %	281.626	12.052	0.066	0.022	1001.0	3.6
	16	97 %	292.670	11.385	0.066	0.022	1001.0	3.6
	18	97 %	299.209	11.990	0.066	0.022	1001.0	3.6
	20	97 %	310.121	8.516	0.066	0.041	1001.1	3.5

Tabela A.5: Resultado dos experimentos no ambiente densamente ocupado para a técnica de amostragem pelo método Gaussiano.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	16 %	3.042	0.058	0.055	0.019	1010.0	9.1
	8	43 %	3.893	0.079	0.051	0.014	1006.3	8.0
	10	65 %	4.905	0.116	0.056	0.023	1005.0	7.8
	12	80 %	6.060	0.147	0.054	0.019	1005.0	7.6
	14	84 %	7.333	0.207	0.050	0.019	1004.7	7.6
	16	85 %	8.671	0.274	0.054	0.018	1004.4	7.8
	18	87 %	9.987	0.349	0.057	0.021	1004.3	7.7
	20	87 %	11.257	0.432	0.054	0.022	1004.2	7.6
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	15 %	3.429	0.061	0.055	0.000	1010.6	9.2
	8	43 %	4.360	0.085	0.059	0.014	1006.3	8.0
	10	64 %	5.529	0.137	0.060	0.016	1005.2	7.8
	12	81 %	6.910	0.159	0.063	0.021	1005.4	8.2
	14	87 %	8.560	0.233	0.069	0.024	1004.9	8.2
	16	88 %	10.480	0.311	0.062	0.018	1004.8	8.4
	18	90 %	12.641	0.415	0.069	0.024	1004.5	8.3
	20	91 %	15.112	0.573	0.067	0.023	1004.4	8.1
k -componentes	2	94 %	137.418	9.556	0.055	0.000	1014.2	11.2
	4	94 %	198.176	12.174	0.055	0.000	1009.2	14.3
	6	94 %	228.604	11.623	0.066	0.022	1009.3	14.2
	8	94 %	243.275	10.767	0.055	0.000	1009.4	14.1
	10	94 %	261.330	14.746	0.055	0.000	1011.6	12.9
	12	94 %	267.538	16.415	0.055	0.000	1011.6	12.9
	14	94 %	281.154	6.607	0.055	0.000	1011.6	12.9
	16	94 %	293.989	10.814	0.055	0.000	1011.6	12.9
	18	94 %	302.462	10.031	0.066	0.022	1011.6	12.9
	20	94 %	312.033	12.728	0.055	0.000	1011.6	12.9

A.2 Ambiente de Orifício

Tabela A.6: Resultado dos experimentos no ambiente de orifício para a técnica de amostragem aleatória.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	6 %	3.416	0.234	0.055	0.000	645.2	5.0
	6	8 %	5.412	0.435	0.062	0.018	647.4	5.8
	8	10 %	7.352	0.421	0.071	0.025	645.7	4.4
	10	12 %	9.560	0.484	0.078	0.035	645.1	3.9
	12	16 %	12.015	0.609	0.055	0.019	645.5	4.3
	14	17 %	14.541	0.665	0.065	0.021	646.1	4.4
	16	22 %	17.210	0.834	0.072	0.026	646.4	5.6
	18	27 %	20.073	0.836	0.061	0.017	647.1	5.6
	20	29 %	22.963	0.906	0.059	0.020	646.6	6.3
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	6 %	3.645	0.214	0.082	0.027	645.2	5.0
	6	8 %	5.659	0.461	0.062	0.018	647.4	5.8
	8	10 %	7.615	0.426	0.060	0.016	645.7	4.4
	10	12 %	9.789	0.486	0.069	0.024	645.1	3.9
	12	16 %	12.225	0.611	0.072	0.025	645.5	4.3
	14	17 %	14.735	0.640	0.071	0.025	646.1	4.4
	16	22 %	17.468	0.856	0.070	0.024	646.3	5.7
	18	27 %	20.403	0.854	0.073	0.026	646.7	5.3
	20	29 %	23.339	0.921	0.066	0.027	646.3	6.0
k -componentes	2	35 %	182.505	11.204	0.066	0.022	646.3	5.6
	4	35 %	244.725	7.615	0.066	0.022	648.2	3.3
	6	35 %	259.099	14.270	0.055	0.000	649.7	8.8
	8	35 %	264.868	9.555	0.088	0.027	649.9	8.9
	10	35 %	268.242	13.007	0.066	0.022	648.3	5.8
	12	35 %	271.473	14.095	0.066	0.041	647.6	7.0
	14	35 %	270.132	9.296	0.077	0.027	648.3	6.2
	16	35 %	267.440	14.209	0.055	0.000	648.3	6.2
	18	35 %	267.319	11.967	0.077	0.027	648.8	6.5
	20	35 %	275.703	10.756	0.077	0.027	648.9	6.3

Tabela A.7: Resultado dos experimentos no ambiente de orifício para a técnica de amostragem pelo método de Halton.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	2 %	4.230	0.303	0.055	0.000	640.1	1.4
	6	4 %	5.591	0.714	0.055	0.000	639.8	2.2
	8	12 %	8.109	0.672	0.064	0.020	640.5	2.8
	10	20 %	10.453	1.066	0.063	0.020	641.6	4.0
	12	20 %	13.131	1.086	0.066	0.022	642.1	2.8
	14	26 %	15.820	1.068	0.072	0.025	641.6	4.2
	16	26 %	18.461	1.223	0.070	0.024	641.9	4.5
	18	28 %	21.128	1.369	0.078	0.027	642.9	3.7
	20	28 %	23.966	1.227	0.071	0.025	642.4	3.4
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	2 %	4.478	0.331	0.055	0.000	640.1	1.4
	6	4 %	5.797	0.695	0.055	0.000	639.8	2.2
	8	12 %	8.329	0.687	0.064	0.020	640.5	2.8
	10	20 %	10.662	1.079	0.066	0.022	641.6	4.0
	12	20 %	13.346	1.082	0.066	0.022	642.1	2.8
	14	26 %	15.993	1.057	0.080	0.027	641.6	4.3
	16	26 %	18.708	1.219	0.072	0.025	641.3	4.6
	18	28 %	21.407	1.439	0.077	0.027	645.7	6.5
	20	28 %	24.311	1.344	0.071	0.025	645.0	7.1
k -componentes	2	32 %	188.451	5.752	0.066	0.022	647.5	2.0
	4	32 %	240.747	17.850	0.077	0.027	645.1	2.4
	6	32 %	258.473	13.729	0.077	0.027	644.4	4.9
	8	32 %	261.220	5.684	0.066	0.022	644.5	4.6
	10	32 %	262.813	8.266	0.066	0.022	643.5	4.4
	12	32 %	266.396	13.219	0.055	0.000	643.1	3.8
	14	32 %	268.011	5.144	0.066	0.022	643.0	4.3
	16	32 %	271.659	10.504	0.055	0.000	641.9	3.2
	18	32 %	271.516	12.465	0.055	0.000	640.8	5.4
	20	32 %	276.495	10.682	0.044	0.022	641.5	4.3

Tabela A.8: Resultado dos experimentos no ambiente de orifício para a técnica de amostragem no eixo-médio.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	1 %	2.582	0.000	0.055	0.000	638.3	0.0
	6	50 %	3.070	0.047	0.067	0.023	638.3	0.1
	8	93 %	3.720	0.044	0.070	0.025	638.3	0.1
	10	99 %	4.512	0.062	0.073	0.026	638.3	0.0
	12	100 %	5.441	0.081	0.074	0.026	638.3	0.0
	14	100 %	6.521	0.107	0.066	0.022	638.3	0.0
	16	100 %	7.735	0.126	0.070	0.024	638.3	0.0
	18	100 %	9.097	0.161	0.074	0.026	638.3	0.0
	20	100 %	10.631	0.208	0.076	0.027	638.3	0.0
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	49 %	3.278	0.044	0.067	0.023	638.3	0.1
	8	94 %	3.924	0.049	0.070	0.024	638.3	0.0
	10	100 %	4.713	0.065	0.074	0.026	638.3	0.0
	12	100 %	5.777	0.419	0.074	0.027	638.3	0.0
	14	100 %	6.697	0.100	0.066	0.022	638.3	0.0
	16	100 %	7.908	0.132	0.068	0.023	638.3	0.0
	18	100 %	9.282	0.159	0.069	0.024	638.3	0.0
	20	100 %	10.822	0.199	0.074	0.026	638.3	0.0
k -componentes	2	100 %	163.319	8.250	0.066	0.022	639.2	1.2
	4	100 %	223.593	14.435	0.055	0.000	642.2	8.1
	6	100 %	227.835	9.141	0.055	0.000	642.4	2.7
	8	100 %	233.121	5.169	0.066	0.022	643.0	2.2
	10	100 %	239.341	10.706	0.055	0.000	642.4	7.0
	12	100 %	236.352	7.651	0.066	0.022	641.0	2.8
	14	100 %	235.209	8.781	0.055	0.000	640.9	3.2
	16	100 %	237.604	7.610	0.066	0.022	640.7	3.0
	18	100 %	236.319	8.292	0.066	0.022	640.1	2.8
	20	100 %	244.374	8.570	0.044	0.022	640.1	2.8

Tabela A.9: Resultado dos experimentos no ambiente de orifício para a técnica de amostragem nas bordas do espaço de configurações livres.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	25 %	3.141	0.062	0.084	0.027	649.0	3.2
	8	71 %	3.909	0.115	0.089	0.027	649.6	3.2
	10	83 %	4.916	0.189	0.089	0.027	649.7	3.1
	12	93 %	6.084	0.236	0.092	0.026	649.9	2.7
	14	95 %	7.464	0.265	0.087	0.027	649.9	2.8
	16	98 %	9.193	0.373	0.092	0.026	650.0	2.8
	18	99 %	11.225	0.521	0.092	0.026	650.2	2.8
	20	99 %	13.691	0.661	0.094	0.025	650.5	2.9
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	24 %	3.315	0.050	0.085	0.027	649.0	3.2
	8	71 %	4.083	0.112	0.088	0.027	649.6	3.2
	10	83 %	5.085	0.189	0.081	0.027	649.8	3.3
	12	93 %	6.253	0.242	0.079	0.027	649.9	2.7
	14	95 %	7.592	0.258	0.087	0.027	649.9	2.8
	16	98 %	9.367	0.373	0.085	0.027	650.1	2.8
	18	99 %	11.375	0.514	0.087	0.027	650.3	2.8
	20	99 %	13.865	0.688	0.087	0.027	650.5	2.9
k -componentes	2	99 %	178.692	9.190	0.066	0.022	652.6	7.2
	4	99 %	239.824	6.293	0.066	0.022	651.3	5.2
	6	99 %	259.385	15.837	0.055	0.000	650.3	2.1
	8	99 %	258.462	18.430	0.055	0.000	651.2	5.7
	10	99 %	269.582	19.581	0.077	0.027	650.7	2.4
	12	99 %	278.297	19.010	0.044	0.022	650.7	1.7
	14	99 %	278.967	22.173	0.066	0.022	653.1	11.3
	16	99 %	287.879	25.854	0.066	0.022	654.4	11.5
	18	99 %	289.187	23.102	0.077	0.027	654.0	8.1
	20	99 %	298.011	19.720	0.055	0.000	652.8	5.8

Tabela A.10: Resultado dos experimentos no ambiente de orifício para a técnica de amostragem pelo método Gaussiano.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	13 %	2.844	0.074	0.080	0.027	643.8	5.0
	6	44 %	3.946	0.443	0.076	0.029	646.3	7.0
	8	54 %	4.830	0.187	0.071	0.025	646.7	6.4
	10	62 %	5.957	0.230	0.069	0.024	646.8	6.5
	12	68 %	7.230	0.338	0.069	0.024	646.8	6.4
	14	72 %	8.622	0.331	0.078	0.027	646.4	6.2
	16	76 %	10.299	0.716	0.079	0.027	646.8	6.1
	18	78 %	11.852	0.410	0.077	0.027	646.4	6.2
	20	81 %	13.815	0.555	0.075	0.027	646.6	6.3
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	14 %	3.050	0.063	0.071	0.025	643.4	5.0
	6	44 %	3.958	0.120	0.076	0.027	646.3	7.0
	8	54 %	5.036	0.192	0.081	0.027	646.7	6.4
	10	62 %	6.169	0.235	0.068	0.024	646.8	6.5
	12	67 %	7.437	0.341	0.071	0.025	646.9	6.4
	14	71 %	8.825	0.337	0.075	0.026	646.4	6.3
	16	76 %	10.314	0.342	0.075	0.027	646.8	6.1
	18	78 %	12.054	0.413	0.076	0.027	646.4	6.2
	20	81 %	13.969	0.458	0.082	0.027	646.6	6.3
k -componentes	2	87 %	184.538	6.601	0.055	0.000	641.4	2.7
	4	87 %	237.615	13.622	0.055	0.000	643.9	4.3
	6	87 %	252.374	10.504	0.066	0.022	645.5	7.1
	8	87 %	253.077	6.453	0.066	0.022	649.1	7.9
	10	87 %	269.945	21.549	0.055	0.000	651.3	6.6
	12	87 %	282.000	19.415	0.088	0.027	651.9	5.7
	14	87 %	280.033	22.278	0.099	0.022	651.3	5.3
	16	87 %	283.352	19.340	0.066	0.022	652.6	10.1
	18	87 %	285.956	18.906	0.066	0.022	653.1	10.3
	20	87 %	287.264	14.881	0.077	0.027	651.3	9.9

A.3 Ambiente de uma Casa

Tabela A.11: Resultado dos experimentos no ambiente de uma casa para a técnica de amostragem aleatória.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	27 %	2.414	0.076	0.053	0.018	857.2	21.3
	8	43 %	3.077	0.106	0.054	0.014	848.1	23.6
	10	62 %	3.859	0.142	0.054	0.023	843.8	23.8
	12	73 %	4.740	0.172	0.060	0.029	839.5	25.4
	14	77 %	5.713	0.200	0.059	0.021	834.1	29.2
	16	82 %	6.881	0.425	0.055	0.019	831.3	29.9
	18	88 %	7.814	0.265	0.056	0.013	829.1	31.5
	20	89 %	8.904	0.295	0.055	0.022	829.7	31.6
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	27 %	2.542	0.081	0.051	0.014	856.6	21.3
	8	43 %	3.207	0.105	0.051	0.018	847.5	23.6
	10	62 %	3.995	0.145	0.052	0.023	843.2	23.8
	12	73 %	4.885	0.171	0.051	0.026	838.2	25.6
	14	77 %	5.867	0.203	0.053	0.019	833.4	29.2
	16	83 %	6.934	0.234	0.054	0.017	829.5	30.8
	18	89 %	8.063	0.262	0.059	0.021	824.8	34.3
	20	90 %	9.335	0.308	0.053	0.025	821.9	34.5
k -componentes	2	92 %	44.846	1.822	0.055	0.000	882.0	13.4
	4	92 %	59.066	1.520	0.055	0.000	840.4	39.0
	6	92 %	61.846	2.732	0.066	0.022	829.3	56.4
	8	92 %	65.341	2.473	0.055	0.000	822.9	50.1
	10	92 %	66.352	2.748	0.055	0.000	820.0	54.1
	12	92 %	68.033	3.660	0.066	0.022	810.0	47.7
	14	92 %	69.176	2.462	0.055	0.000	801.9	46.1
	16	92 %	69.286	1.765	0.055	0.000	801.9	46.1
	18	92 %	71.011	3.869	0.055	0.000	796.3	46.1
	20	92 %	71.055	4.396	0.066	0.022	794.0	25.4

Tabela A.12: Resultado dos experimentos no ambiente de uma casa para a técnica de amostragem pelo método de Halton.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	34 %	2.088	0.094	0.066	0.022	849.1	11.8
	6	57 %	2.631	0.127	0.058	0.016	844.8	13.9
	8	76 %	3.351	0.186	0.056	0.020	830.3	15.8
	10	87 %	4.169	0.169	0.060	0.018	824.7	16.8
	12	89 %	5.057	0.159	0.060	0.020	821.7	19.7
	14	93 %	6.013	0.177	0.061	0.017	808.9	18.7
	16	96 %	7.095	0.209	0.057	0.014	803.2	17.2
	18	100 %	8.168	0.231	0.061	0.020	796.8	18.9
	20	100 %	9.268	0.252	0.061	0.017	797.8	23.8
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	34 %	2.225	0.095	0.053	0.021	848.5	11.8
	6	57 %	2.761	0.131	0.061	0.025	844.2	13.9
	8	76 %	3.472	0.183	0.058	0.018	829.7	15.8
	10	87 %	4.286	0.162	0.060	0.023	824.1	16.8
	12	89 %	5.174	0.164	0.062	0.023	821.1	19.7
	14	92 %	6.135	0.174	0.059	0.023	808.6	18.6
	16	96 %	7.215	0.200	0.064	0.026	803.3	17.4
	18	100 %	8.371	0.220	0.056	0.017	796.4	21.7
	20	100 %	9.587	0.240	0.061	0.019	793.8	24.8
k -componentes	2	100 %	44.516	1.451	0.055	0.000	885.7	10.3
	4	100 %	58.769	1.445	0.044	0.022	869.5	19.4
	6	100 %	63.879	1.863	0.033	0.027	863.5	19.2
	8	100 %	66.396	0.793	0.066	0.022	848.3	29.3
	10	100 %	68.011	3.635	0.055	0.000	834.7	35.8
	12	100 %	68.418	2.353	0.044	0.022	828.1	35.1
	14	100 %	69.945	2.266	0.055	0.035	804.3	13.3
	16	100 %	71.571	1.324	0.066	0.022	803.1	14.7
	18	100 %	73.626	2.451	0.055	0.035	788.0	20.9
	20	100 %	73.989	4.094	0.066	0.022	786.6	21.5

Tabela A.13: Resultado dos experimentos no ambiente de uma casa para a técnica de amostragem no eixo-médio.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	28 %	1.988	0.046	0.069	0.024	860.6	16.8
	8	64 %	2.393	0.062	0.065	0.021	846.0	17.7
	10	82 %	2.930	0.082	0.070	0.025	835.5	17.1
	12	88 %	3.585	0.099	0.067	0.023	830.7	19.0
	14	93 %	4.342	0.128	0.068	0.023	825.5	21.2
	16	98 %	5.183	0.145	0.069	0.024	822.5	24.6
	18	99 %	6.088	0.178	0.069	0.024	817.7	27.6
	20	100 %	7.027	0.211	0.071	0.025	816.1	30.1
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	27 %	2.104	0.043	0.057	0.010	859.7	17.1
	8	64 %	2.511	0.061	0.058	0.016	845.6	17.8
	10	82 %	3.048	0.077	0.059	0.017	834.9	17.1
	12	88 %	3.688	0.100	0.063	0.021	830.1	19.1
	14	93 %	4.465	0.123	0.064	0.021	824.9	21.2
	16	98 %	5.333	0.148	0.066	0.023	821.2	24.2
	18	99 %	6.322	0.183	0.063	0.020	817.5	28.9
	20	100 %	7.399	0.218	0.065	0.021	817.2	32.4
k -componentes	2	100 %	38.747	1.842	0.088	0.027	895.4	4.4
	4	100 %	53.659	2.617	0.055	0.000	896.3	2.7
	6	100 %	57.473	1.901	0.055	0.000	892.4	3.7
	8	100 %	58.747	2.008	0.055	0.000	893.9	3.5
	10	100 %	61.429	2.721	0.055	0.000	881.3	4.8
	12	100 %	62.044	3.439	0.044	0.022	844.3	57.6
	14	100 %	63.275	4.255	0.055	0.000	808.7	68.2
	16	100 %	64.055	2.281	0.055	0.000	795.9	76.9
	18	100 %	64.473	2.587	0.033	0.027	785.6	85.0
	20	100 %	65.099	3.521	0.044	0.022	783.7	86.6

Tabela A.14: Resultado dos experimentos no ambiente de uma casa para a técnica de amostragem nas bordas do espaço de configurações livres.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	16 %	2.246	0.056	0.069	0.024	867.3	20.6
	8	46 %	3.022	0.096	0.074	0.026	862.2	21.5
	10	64 %	4.129	0.156	0.077	0.027	861.1	21.2
	12	77 %	5.568	0.230	0.078	0.027	853.5	27.8
	14	86 %	7.270	0.312	0.076	0.027	850.5	29.3
	16	94 %	9.070	0.418	0.077	0.027	850.3	29.7
	18	97 %	11.022	0.760	0.080	0.027	848.1	30.4
	20	97 %	12.742	0.577	0.080	0.027	845.6	30.8
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	16 %	2.352	0.053	0.072	0.025	866.7	20.6
	8	47 %	3.126	0.094	0.070	0.025	862.2	21.6
	10	66 %	4.230	0.151	0.074	0.026	859.3	23.1
	12	79 %	5.713	0.271	0.067	0.023	852.7	28.3
	14	88 %	7.374	0.316	0.076	0.027	845.5	33.2
	16	96 %	9.248	0.414	0.073	0.026	842.9	37.0
	18	98 %	11.219	0.480	0.076	0.027	838.3	42.3
	20	98 %	13.167	0.606	0.078	0.027	836.0	42.2
k -componentes	2	98 %	56.582	2.136	0.077	0.027	878.9	28.6
	4	98 %	74.802	3.864	0.044	0.022	853.4	51.5
	6	98 %	82.088	3.911	0.055	0.035	846.3	28.9
	8	98 %	85.154	2.529	0.055	0.000	849.4	21.4
	10	98 %	89.198	3.850	0.055	0.000	848.0	22.0
	12	98 %	90.604	5.364	0.066	0.022	843.0	27.0
	14	98 %	95.308	5.619	0.066	0.022	843.0	27.0
	16	98 %	97.341	4.727	0.055	0.000	836.3	27.0
	18	98 %	98.407	5.785	0.055	0.000	826.2	62.5
	20	98 %	103.264	7.479	0.055	0.000	822.0	62.5

Tabela A.15: Resultado dos experimentos no ambiente de uma casa para a técnica de amostragem pelo método Gaussiano.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	4 %	1.841	0.048	0.069	0.024	880.9	9.7
	6	44 %	2.194	0.059	0.074	0.026	865.9	16.2
	8	79 %	2.742	0.082	0.065	0.021	857.0	19.3
	10	91 %	3.433	0.126	0.066	0.024	854.1	19.2
	12	97 %	4.289	0.149	0.063	0.020	849.1	23.1
	14	97 %	5.263	0.181	0.068	0.023	845.3	24.8
	16	98 %	6.382	0.206	0.068	0.024	844.0	25.7
	18	99 %	7.630	0.253	0.065	0.022	842.7	26.4
	20	99 %	8.904	0.290	0.070	0.025	839.2	30.1
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	4 %	1.923	0.039	0.041	0.024	880.3	9.7
	6	44 %	2.326	0.057	0.064	0.023	865.2	16.2
	8	79 %	2.864	0.080	0.061	0.017	856.8	19.6
	10	91 %	3.557	0.124	0.061	0.021	852.5	21.3
	12	97 %	4.403	0.149	0.064	0.020	848.4	23.1
	14	97 %	5.420	0.185	0.063	0.020	843.2	25.9
	16	98 %	6.568	0.206	0.063	0.024	841.3	27.7
	18	99 %	7.923	0.249	0.064	0.022	838.3	31.3
	20	99 %	9.371	0.293	0.064	0.022	831.8	35.9
k -componentes	2	99 %	52.319	2.261	0.055	0.000	892.8	8.4
	4	99 %	70.813	2.433	0.066	0.022	873.0	18.7
	6	99 %	77.582	2.529	0.055	0.000	873.4	14.8
	8	99 %	81.253	2.609	0.055	0.000	868.1	18.0
	10	99 %	84.143	2.403	0.055	0.000	868.1	18.0
	12	99 %	86.890	2.439	0.055	0.000	861.1	24.2
	14	99 %	88.725	1.336	0.055	0.000	839.2	57.8
	16	99 %	89.923	1.891	0.055	0.035	827.4	57.4
	18	99 %	91.956	3.318	0.066	0.022	822.9	57.4
	20	99 %	94.077	3.415	0.066	0.022	818.6	58.2

A.4 Ambiente de Labirinto

Tabela A.16: Resultado dos experimentos no ambiente de labirinto para a técnica de amostragem aleatória.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	6 %	1.859	0.020	0.064	0.020	2786.0	16.9
	8	58 %	2.190	0.038	0.067	0.023	2791.9	22.4
	10	91 %	2.584	0.043	0.065	0.021	2797.6	24.0
	12	97 %	3.038	0.041	0.070	0.024	2801.7	25.1
	14	100 %	3.559	0.056	0.067	0.023	2801.9	26.6
	16	100 %	4.136	0.070	0.061	0.017	2802.7	26.8
	18	100 %	4.744	0.084	0.069	0.024	2804.6	27.5
	20	100 %	5.379	0.114	0.068	0.023	2806.6	28.2
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	5 %	1.967	0.022	0.066	0.022	2779.3	8.6
	8	58 %	2.299	0.032	0.073	0.026	2791.9	22.4
	10	90 %	2.695	0.042	0.061	0.017	2797.3	23.8
	12	97 %	3.142	0.050	0.067	0.023	2801.8	26.1
	14	100 %	3.669	0.059	0.068	0.023	2804.0	29.7
	16	100 %	4.260	0.075	0.065	0.022	2804.4	29.9
	18	100 %	4.948	0.101	0.066	0.022	2806.8	31.4
	20	100 %	5.726	0.148	0.065	0.021	2808.4	31.7
k -componentes	2	100 %	46.868	0.803	0.055	0.000	2800.8	21.0
	4	100 %	64.088	0.836	0.066	0.022	2806.8	43.2
	6	100 %	69.560	1.278	0.066	0.022	2803.2	28.3
	8	100 %	72.506	1.651	0.055	0.000	2806.7	16.1
	10	100 %	75.692	1.104	0.066	0.022	2816.5	58.8
	12	100 %	79.286	3.076	0.055	0.000	2816.5	58.8
	14	100 %	80.709	1.279	0.055	0.000	2816.5	58.8
	16	100 %	82.692	3.317	0.066	0.022	2816.5	58.8
	18	100 %	85.462	1.368	0.066	0.022	2816.5	58.8
	20	100 %	87.582	3.010	0.066	0.022	2819.6	58.5

Tabela A.17: Resultado dos experimentos no ambiente de labirinto para a técnica de amostragem pelo método de Halton.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	19 %	1.675	0.033	0.067	0.022	2786.4	18.0
	6	73 %	1.924	0.042	0.078	0.027	2793.5	18.6
	8	92 %	2.253	0.061	0.072	0.026	2793.9	17.5
	10	96 %	2.655	0.075	0.074	0.026	2802.3	19.1
	12	97 %	3.129	0.075	0.069	0.024	2819.1	19.9
	14	97 %	3.650	0.074	0.074	0.026	2825.3	24.3
	16	97 %	4.244	0.102	0.071	0.025	2832.2	25.9
	18	97 %	4.886	0.136	0.071	0.025	2825.9	29.9
	20	97 %	5.562	0.142	0.076	0.027	2826.5	30.5
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	19 %	1.750	0.035	0.075	0.027	2786.4	18.0
	6	73 %	2.002	0.047	0.075	0.026	2793.5	18.6
	8	92 %	2.320	0.066	0.075	0.027	2793.9	17.5
	10	96 %	2.722	0.069	0.073	0.026	2802.3	19.1
	12	97 %	3.187	0.079	0.069	0.024	2818.1	20.8
	14	97 %	3.704	0.074	0.073	0.026	2829.0	25.3
	16	97 %	4.296	0.111	0.073	0.026	2838.0	23.8
	18	97 %	4.953	0.150	0.072	0.025	2848.1	32.2
	20	97 %	5.690	0.174	0.070	0.024	2854.4	36.1
k -componentes	2	97 %	46.703	1.694	0.066	0.022	2786.3	12.7
	4	97 %	64.989	3.778	0.055	0.000	2780.8	10.6
	6	97 %	68.352	1.995	0.055	0.000	2785.5	19.0
	8	97 %	71.604	2.153	0.055	0.000	2796.6	20.4
	10	97 %	73.055	1.813	0.066	0.022	2796.7	20.4
	12	97 %	75.549	1.869	0.055	0.000	2801.4	26.6
	14	97 %	78.549	2.158	0.055	0.000	2811.3	37.9
	16	97 %	79.791	1.617	0.077	0.027	2809.9	35.4
	18	97 %	80.440	2.050	0.055	0.000	2836.9	42.5
	20	97 %	82.670	1.369	0.066	0.022	2843.8	48.9

Tabela A.18: Resultado dos experimentos no ambiente de labirinto para a técnica de amostragem no eixo-médio.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	9 %	1.978	0.033	0.067	0.023	2772.6	5.2
	8	65 %	2.310	0.042	0.076	0.027	2776.5	8.9
	10	88 %	2.716	0.045	0.070	0.024	2784.0	13.9
	12	98 %	3.183	0.061	0.073	0.026	2792.2	16.2
	14	100 %	3.705	0.065	0.069	0.024	2803.0	17.7
	16	100 %	4.261	0.073	0.079	0.027	2813.3	18.4
	18	100 %	4.871	0.095	0.074	0.026	2821.1	17.4
	20	100 %	5.569	0.543	0.082	0.027	2824.9	17.5
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	8 %	2.088	0.043	0.082	0.027	2770.9	2.3
	8	65 %	2.414	0.038	0.069	0.024	2776.4	9.0
	10	88 %	2.816	0.047	0.074	0.026	2784.0	13.8
	12	98 %	3.292	0.056	0.071	0.025	2794.3	21.2
	14	100 %	3.815	0.064	0.072	0.025	2804.8	21.2
	16	100 %	4.404	0.076	0.073	0.026	2815.9	22.8
	18	100 %	5.074	0.099	0.079	0.027	2831.9	26.3
	20	100 %	5.810	0.127	0.077	0.027	2844.3	25.9
k -componentes	2	100 %	49.549	1.727	0.066	0.022	2770.6	3.2
	4	100 %	67.253	1.840	0.055	0.000	2773.5	7.6
	6	100 %	71.110	1.434	0.088	0.027	2772.1	2.6
	8	100 %	77.462	1.847	0.055	0.000	2773.8	3.4
	10	100 %	78.747	0.835	0.066	0.022	2778.6	7.3
	12	100 %	80.374	1.216	0.066	0.022	2788.2	15.3
	14	100 %	84.220	2.769	0.066	0.022	2795.6	13.7
	16	100 %	86.604	2.611	0.055	0.000	2802.7	18.3
	18	100 %	88.945	4.018	0.055	0.000	2824.3	39.4
	20	100 %	90.440	3.407	0.055	0.000	2828.6	38.1

Tabela A.19: Resultado dos experimentos no ambiente de labirinto para a técnica de amostragem nas bordas do espaço de configurações livres.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	12 %	2.125	0.047	0.087	0.027	2802.2	21.0
	8	57 %	2.456	0.034	0.093	0.026	2799.0	23.1
	10	89 %	2.853	0.039	0.091	0.026	2804.0	25.8
	12	98 %	3.320	0.047	0.085	0.027	2804.4	26.5
	14	98 %	3.837	0.055	0.087	0.027	2805.2	27.1
	16	98 %	4.407	0.064	0.085	0.027	2806.3	26.7
	18	98 %	5.009	0.078	0.087	0.027	2807.8	28.1
	20	98 %	5.629	0.094	0.089	0.027	2809.0	28.2
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	12 %	2.221	0.027	0.096	0.024	2802.2	21.0
	8	56 %	2.557	0.031	0.087	0.027	2799.0	23.3
	10	89 %	2.955	0.040	0.085	0.027	2805.2	26.7
	12	99 %	3.424	0.046	0.085	0.027	2805.1	26.9
	14	100 %	3.955	0.059	0.085	0.027	2805.8	27.3
	16	100 %	4.553	0.072	0.087	0.027	2808.0	28.1
	18	100 %	5.254	0.094	0.090	0.027	2808.2	28.6
	20	100 %	6.061	0.122	0.086	0.027	2810.2	29.9
k -componentes	2	100 %	45.802	1.324	0.066	0.022	2802.4	17.8
	4	100 %	63.538	2.799	0.066	0.022	2812.6	63.6
	6	100 %	68.681	2.717	0.055	0.000	2811.3	27.0
	8	100 %	71.143	2.108	0.055	0.000	2813.0	29.5
	10	100 %	75.440	2.893	0.066	0.022	2823.5	37.1
	12	100 %	77.659	2.122	0.066	0.022	2825.2	41.4
	14	100 %	79.231	2.175	0.055	0.000	2825.2	41.4
	16	100 %	83.681	2.875	0.066	0.022	2819.6	44.8
	18	100 %	85.538	2.644	0.055	0.000	2827.1	55.2
	20	100 %	87.110	2.161	0.055	0.000	2835.7	47.1

Tabela A.20: Resultado dos experimentos no ambiente de labirinto para a técnica de amostragem pelo método Gaussiano.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	4 %	1.951	0.034	0.110	0.000	2795.9	21.5
	8	61 %	2.299	0.038	0.071	0.025	2795.2	23.3
	10	87 %	2.684	0.044	0.075	0.026	2796.3	23.8
	12	97 %	3.147	0.052	0.069	0.024	2799.8	23.2
	14	98 %	3.660	0.056	0.075	0.026	2800.2	23.5
	16	98 %	4.229	0.061	0.072	0.025	2801.4	23.6
	18	98 %	4.826	0.082	0.075	0.026	2804.6	26.2
	20	99 %	5.444	0.105	0.075	0.026	2805.4	26.6
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	4 %	2.006	0.034	0.069	0.024	2795.9	21.5
	8	61 %	2.318	0.035	0.072	0.025	2794.5	23.5
	10	87 %	2.706	0.038	0.072	0.025	2797.0	23.9
	12	97 %	3.161	0.050	0.073	0.026	2799.8	23.2
	14	98 %	3.692	0.058	0.072	0.026	2801.2	24.8
	16	99 %	4.392	0.165	0.076	0.027	2802.3	25.4
	18	99 %	5.110	0.104	0.069	0.024	2806.1	27.5
	20	100 %	5.904	0.145	0.071	0.025	2806.8	28.0
k -componentes	2	100 %	47.758	0.981	0.066	0.022	2792.3	20.3
	4	100 %	66.659	1.795	0.066	0.022	2782.2	19.4
	6	100 %	72.286	0.516	0.066	0.022	2783.5	22.0
	8	100 %	78.165	2.098	0.066	0.022	2783.5	22.0
	10	100 %	80.440	2.910	0.055	0.000	2783.5	22.0
	12	100 %	81.000	2.898	0.066	0.022	2783.5	22.0
	14	100 %	82.473	1.890	0.066	0.022	2783.5	22.0
	16	100 %	85.440	2.806	0.066	0.022	2783.5	22.0
	18	100 %	90.527	2.022	0.066	0.022	2783.5	22.0
	20	100 %	92.758	3.974	0.055	0.000	2783.5	22.0

A.5 Ambiente com Passagem Estreita

Tabela A.21: Resultado dos experimentos no ambiente com passagem estreita para a técnica de amostragem aleatória.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	18 %	4.359	0.184	0.082	0.027	766.0	6.6
	6	45 %	7.055	0.294	0.077	0.027	765.4	6.1
	8	57 %	9.780	0.363	0.084	0.027	765.1	6.4
	10	66 %	12.847	0.402	0.077	0.027	762.4	5.1
	12	69 %	15.843	0.565	0.079	0.027	763.0	4.8
	14	72 %	19.020	0.655	0.080	0.027	763.0	4.5
	16	72 %	22.722	1.320	0.087	0.031	763.2	4.9
	18	72 %	25.989	1.193	0.078	0.027	763.1	4.9
	20	72 %	29.576	1.290	0.087	0.027	763.8	4.9
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	21 %	4.765	0.201	0.078	0.027	764.5	7.1
	6	45 %	7.396	0.271	0.073	0.026	765.4	6.1
	8	57 %	10.145	0.379	0.075	0.027	765.1	6.4
	10	66 %	13.182	0.428	0.077	0.032	762.4	5.1
	12	75 %	16.239	0.631	0.073	0.026	762.4	5.0
	14	78 %	19.503	0.766	0.078	0.027	762.4	4.7
	16	78 %	22.954	1.008	0.082	0.027	762.7	5.1
	18	78 %	26.532	1.260	0.078	0.027	762.3	5.3
	20	78 %	30.283	1.350	0.087	0.027	763.2	5.1
k -componentes	2	80 %	377.813	19.048	0.066	0.022	767.0	14.2
	4	80 %	491.418	28.415	0.077	0.027	767.3	8.0
	6	80 %	544.473	32.089	0.077	0.027	766.9	10.8
	8	80 %	548.407	23.244	0.077	0.027	765.2	4.8
	10	80 %	558.648	45.353	0.066	0.022	764.8	3.9
	12	80 %	551.560	43.571	0.088	0.027	765.4	5.6
	14	80 %	575.077	33.375	0.077	0.027	768.0	6.8
	16	80 %	589.286	27.381	0.099	0.022	768.2	2.7
	18	80 %	567.154	21.825	0.077	0.027	765.5	7.2
	20	80 %	575.516	24.683	0.088	0.027	765.0	7.4

Tabela A.22: Resultado dos experimentos no ambiente com passagem estreita para a técnica de amostragem pelo método de Halton.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	45 %	5.190	0.540	0.095	0.024	759.4	3.3
	6	75 %	8.017	0.928	0.090	0.026	760.4	4.3
	8	84 %	10.583	1.613	0.073	0.026	760.6	4.3
	10	84 %	13.322	1.809	0.078	0.031	761.0	3.9
	12	84 %	16.439	1.649	0.069	0.024	761.3	5.4
	14	84 %	19.763	1.435	0.075	0.026	760.9	5.5
	16	84 %	23.470	1.669	0.082	0.027	761.1	4.6
	18	84 %	26.866	1.604	0.082	0.027	763.1	6.1
	20	84 %	31.191	2.274	0.078	0.027	763.0	6.4
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	45 %	5.553	0.570	0.084	0.027	759.4	3.3
	6	75 %	8.397	0.905	0.077	0.027	760.4	4.3
	8	87 %	10.775	1.776	0.070	0.025	760.5	4.2
	10	90 %	13.463	1.995	0.074	0.026	760.9	3.7
	12	96 %	16.728	1.627	0.077	0.027	762.5	5.7
	14	96 %	20.019	1.460	0.076	0.027	760.8	5.3
	16	96 %	23.666	1.722	0.076	0.027	760.8	4.5
	18	96 %	27.346	1.662	0.077	0.027	762.8	6.1
	20	96 %	31.626	2.255	0.072	0.025	762.4	6.3
k -componentes	2	96 %	394.989	27.878	0.077	0.027	764.0	5.0
	4	96 %	498.923	43.055	0.088	0.027	760.8	4.6
	6	96 %	543.648	39.704	0.077	0.027	761.4	2.3
	8	96 %	554.692	44.054	0.077	0.027	761.6	3.4
	10	96 %	556.549	40.520	0.077	0.027	763.3	2.8
	12	96 %	534.154	49.374	0.055	0.000	765.7	7.4
	14	96 %	541.648	46.138	0.077	0.027	766.8	8.9
	16	96 %	527.176	62.978	0.077	0.027	764.4	8.9
	18	96 %	535.901	37.119	0.077	0.027	761.3	9.0
	20	96 %	539.857	45.027	0.077	0.027	759.9	2.3

Tabela A.23: Resultado dos experimentos no ambiente com passagem estreita para a técnica de amostragem no eixo-médio.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	69 %	3.765	0.050	0.081	0.027	755.4	0.1
	8	96 %	4.715	0.064	0.081	0.027	755.4	0.1
	10	100 %	5.831	0.085	0.080	0.027	755.4	0.0
	12	100 %	7.142	0.101	0.082	0.027	755.4	0.0
	14	100 %	8.650	0.144	0.088	0.027	755.4	0.0
	16	100 %	10.303	0.144	0.082	0.027	755.4	0.0
	18	100 %	12.143	0.163	0.080	0.027	755.4	0.0
	20	100 %	14.146	0.174	0.083	0.027	755.4	0.0
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	66 %	4.150	0.051	0.067	0.023	755.4	0.1
	8	93 %	5.076	0.062	0.085	0.027	755.4	0.1
	10	100 %	6.199	0.085	0.077	0.027	755.4	0.0
	12	100 %	7.508	0.097	0.077	0.027	755.4	0.0
	14	100 %	9.011	0.134	0.087	0.027	755.4	0.0
	16	100 %	10.660	0.144	0.082	0.027	755.4	0.0
	18	100 %	12.490	0.164	0.082	0.027	755.4	0.0
	20	100 %	14.489	0.168	0.082	0.027	755.4	0.0
k -componentes	2	100 %	309.286	32.156	0.077	0.027	756.6	2.0
	4	100 %	405.385	15.159	0.077	0.027	757.4	2.7
	6	100 %	424.692	14.409	0.099	0.022	759.5	4.9
	8	100 %	422.099	8.334	0.088	0.027	762.5	5.8
	10	100 %	440.099	8.914	0.066	0.022	762.8	6.2
	12	100 %	436.165	22.671	0.088	0.027	761.7	8.0
	14	100 %	445.890	19.342	0.066	0.022	761.5	8.0
	16	100 %	463.011	30.399	0.099	0.022	761.5	8.0
	18	100 %	477.582	30.413	0.088	0.027	759.5	8.0
	20	100 %	475.154	18.534	0.099	0.022	759.5	8.0

Tabela A.24: Resultado dos experimentos no ambiente com passagem estreita para a técnica de amostragem nas bordas do espaço de configurações livres.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	33 %	4.770	0.170	0.080	0.027	768.3	2.8
	8	78 %	6.348	0.311	0.082	0.027	770.4	4.4
	10	93 %	8.249	0.358	0.074	0.026	770.0	4.0
	12	93 %	10.466	0.498	0.087	0.027	769.7	4.1
	14	93 %	12.861	0.494	0.087	0.027	769.6	4.0
	16	96 %	15.402	0.637	0.081	0.027	769.8	3.9
	18	96 %	18.204	0.738	0.082	0.027	770.1	4.1
	20	100 %	21.088	0.835	0.085	0.027	770.2	3.9
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	33 %	5.120	0.148	0.095	0.024	768.3	2.8
	8	75 %	6.749	0.290	0.077	0.027	770.9	4.5
	10	93 %	8.609	0.344	0.090	0.026	770.2	4.0
	12	93 %	10.826	0.489	0.089	0.027	769.6	4.2
	14	93 %	13.219	0.484	0.078	0.027	769.6	4.0
	16	96 %	15.766	0.661	0.079	0.027	769.8	3.9
	18	96 %	18.551	0.724	0.088	0.027	770.1	4.1
	20	100 %	21.449	0.826	0.097	0.024	770.2	3.9
k -componentes	2	100 %	358.989	27.878	0.077	0.027	767.8	5.0
	4	100 %	477.923	43.055	0.088	0.027	768.3	4.6
	6	100 %	502.648	39.704	0.077	0.027	768.7	2.3
	8	100 %	518.692	44.054	0.077	0.027	770.4	3.4
	10	100 %	529.549	40.520	0.077	0.027	774.4	2.8
	12	100 %	541.154	49.374	0.055	0.000	778.7	7.4
	14	100 %	553.648	46.138	0.077	0.027	781.0	8.9
	16	100 %	563.176	62.978	0.077	0.027	781.0	8.9
	18	100 %	555.901	37.119	0.077	0.027	779.7	9.0
	20	100 %	552.857	45.027	0.077	0.027	774.5	2.3

Tabela A.25: Resultado dos experimentos no ambiente com passagem estreita para a técnica de amostragem pelo método Gaussiano.

Técnica	k	Soluções encontradas	$\mu(tc)$	$\sigma(tc)$	$\mu(tq)$	$\sigma(tq)$	$\mu(Cc)$	$\sigma(Cc)$
k -próximos	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	3 %	3.407	0.000	0.110	0.000	758.9	0.0
	6	57 %	4.878	0.183	0.095	0.024	764.6	8.3
	8	93 %	6.442	0.325	0.083	0.027	764.1	8.7
	10	96 %	8.093	0.332	0.079	0.027	763.3	7.8
	12	100 %	9.912	0.377	0.085	0.027	764.0	7.8
	14	100 %	11.946	0.419	0.082	0.027	764.8	7.7
	16	100 %	14.277	0.597	0.082	0.027	764.4	7.9
	18	100 %	16.299	0.625	0.088	0.027	764.4	7.8
	20	100 %	18.653	0.767	0.083	0.027	764.6	7.8
k -visíveis	2	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	4	0 %	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.0
	6	57 %	5.266	0.181	0.087	0.027	765.2	8.2
	8	93 %	6.831	0.305	0.082	0.027	764.1	8.7
	10	96 %	8.445	0.324	0.089	0.027	763.3	7.8
	12	100 %	10.283	0.372	0.082	0.027	764.0	7.8
	14	100 %	12.323	0.404	0.083	0.027	764.8	7.7
	16	100 %	14.524	0.541	0.082	0.027	764.4	7.9
	18	100 %	16.672	0.634	0.080	0.027	764.4	7.8
	20	100 %	19.009	0.750	0.088	0.027	764.6	7.8
k -componentes	2	100 %	231.912	7.584	0.077	0.027	757.9	1.2
	4	100 %	320.813	12.656	0.088	0.027	759.0	3.2
	6	100 %	338.527	4.427	0.088	0.027	762.6	5.9
	8	100 %	328.681	14.840	0.099	0.022	763.5	5.6
	10	100 %	346.396	11.344	0.077	0.027	762.7	1.8
	12	100 %	376.549	38.502	0.088	0.027	760.0	3.9
	14	100 %	383.967	24.957	0.088	0.027	760.0	3.9
	16	100 %	388.462	20.598	0.088	0.027	760.9	3.2
	18	100 %	379.495	33.272	0.066	0.022	760.9	3.2
	20	100 %	377.462	32.308	0.077	0.027	760.8	9.3