MARCO ANTONIO GARMS

**MODELAGEM FUZZY PARA FIXAÇÃO
DE TRAJETÓRIAS EM SISTEMAS CAÓTICOS**

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para a obtenção
do título de Doutor em Engenharia de
Eletricidade

São Paulo
2007

MARCO ANTONIO GARMS

**MODELAGEM FUZZY PARA FIXAÇÃO
DE TRAJETÓRIAS EM SISTEMAS CAÓTICOS**

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para a obtenção
do título de Doutor em Engenharia de
Eletricidade.

Área de Concentração: Sistemas Digitais

Orientador:
Prof. Dr. Marco Túlio Carvalho de Andrade

São Paulo
2007

FICHA CATALOGRÁFICA

Garms, Marco Antonio

Modelagem fuzzy para fixação de trajetórias em sistemas caóticos / M.A. Garms. -- São Paulo, 2007.

185 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Computação e Sistemas Digitais.

1.Caos (Sistemas dinâmicos) 2.Controle (Teoria de sistema e controle) 3.Fuzzy I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Computação e Sistemas Digitais II.t.

DEDICATÓRIA

À Concetta, Davi, Tais,

Tadeusa, Nelson e Adelaide.

Em memória de Juvenil, Irma e Tadeu.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Doutor Marco Túlio Carvalho de Andrade, por sua orientação segura e pela compreensão das dificuldades enfrentadas.

Ao professor Doutor Iberê Luis Caldas, por suas indicações e sugestões valiosas.

Aos professores Doutores José Roberto Castilho Piqueira e Elbert Einstein Nehrer Macau pelas orientações na etapa de Qualificação desta Tese.

A todos que colaboraram de algum modo com este trabalho, especialmente ao amigo Winston Quirino França.

Resumo

Neste trabalho foi realizado um mapeamento de ferramentas analíticas para representação e tratamento computacional de Sistemas Fuzzy. Este mapeamento evidenciou a existência de relações e a adequação do uso da Teoria Fuzzy na construção de modelos para a solução de problemas envolvendo Sistemas Dinâmicos e, em particular, de Sistemas Dinâmicos Caóticos.

Propôs-se uma diferenciação entre dois tipos de Sistemas Dinâmicos Fuzzy (SDF's) – os Sistemas Dinâmicos Fuzzy Intrínsecos (SDFI's) e os Sistemas Dinâmicos Fuzzy Extrínsecos (SDFE's). Foram utilizados SDFE's na modelagem Fuzzy para a solução de problemas de fixação de trajetórias em sistemas caóticos. Foram desenvolvidos Estudos de Caso que permitiram verificar, por meio de simulações em bilhares e testes em circuito de Chua (este último implementado em protótipo físico) a adequação do uso desta técnica na solução destes problemas.

No desenvolvimento da Tese foram obtidas as seguintes realizações relacionadas ao circuito de Chua (CCH): Tratamento computacional sobre circuito real; Utilização de um conversor analógico-digital de oito bits seguido por filtro passa-baixas para compensar a baixa resolução na leitura dos sinais; Utilização de circuito girador para implementar o indutor do CCH; Proposta e realização de um circuito inédito para definir o resistor de controle, via porta paralela do PC, de modo simples e de fácil reprodução.

Com relação aos bilhares foram obtidas as seguintes realizações: Definição de um novo tipo de bilhar (Bilhar Newtoniano de Garms & Andrade); Desenvolvimento da análise detalhada das equações de simulação dos bilhares empregados nos Estudos de Caso.

Ao discutir-se a Lógica Seqüencial Fuzzy definiu-se e desenvolveu-se, por meio da aplicação de realimentação em Circuitos Seqüenciais Fuzzy nos Sistemas Dinâmicos, um Astável Fuzzy (oscilações não-periódicas), o qual exemplifica um SDFI.

Finalmente realizaram-se algumas interpretações da Física pela Teoria Fuzzy, utilizando-se o conceito de SDFI's.

Palavras-chave: Controle Fuzzy de Caos. Sistemas dinâmicos caóticos. Teoria Fuzzy.

Abstract

A mapping of analytical tools for representation and computational treatment of Fuzzy Systems was made in this thesis. This mapping evidenced the existence of relations and the adequacy of the use of the Fuzzy Theory in the models construction for the problems solution involving dynamic systems e, in particular, of chaotic systems.

A differentiation was considered about two types of Fuzzy Dynamic Systems - the Intrinsic Fuzzy Dynamic Systems (IFDS) and the Extrinsic Fuzzy Dynamic Systems (EFDS). The EFDS in the Fuzzy modeling is used for the problems solution of trajectories setting in chaotic systems. Case Studies had been developed that allow to verify, by means of simulation in billiards and tests in circuit of Chua (implemented in physical prototype), the adequacy of the use of this strategy in the solution of these problems.

Related with Chua circuit, can be mentioned the following achievements: Computational treatment on real circuit; Use of a 8-bits AD converter followed by lowpass filter to compensate this low resolution signals reading; Use of gyrator circuit to implement the inductor used in this circuit; Proposal and accomplishment of a circuit to define the control resistor, via PC parallel port, of simple reproduction.

Related with billiards, the following achievements are mentioned: Definition of a new billiard - Garms & Andrade Newtonian Billiard; Development of detailed equations of the simulations billiards analysis.

When discussing again the Sequential Logic Fuzzy, is defined and developed, by means of the application of feedback in Sequential Circuits Fuzzy in the Dynamic Systems, an Astable Fuzzy (non-periodic oscillations), which exemplifies an IFDS.

Finally, some interpretations of the Physics for the Fuzzy Theory are also presented with the use of the IFDS concept.

Keywords: Fuzzy Chaos Control. Chaotic Dynamic Systems. Fuzzy Theory.

Lista de Figuras

2.1	Controlador por Lógica Fuzzy.	25
2.2	Mapa de relacionamentos entre as diversas áreas e a Teoria Fuzzy	27
2.3	Mapa de relacionamentos para SDFI's.	33
2.4	Mapa de relacionamentos para SDFE's.	34
2.5	Mapa de relacionamentos e outros temas	35
2.6	Mapa de relacionamentos simplificado	36
3.1	Função Característica proposta para $f=f(v,d)$	40
3.2	FCB com dois níveis para cada variável	40
3.3	FCB com quatro níveis para cada variável	41
3.4	Funções de pertinência para a velocidade para As classes Baixa e Alta	43
3.5	Funções de Pertinência para v , d e f	43
3.6	Defuzificação da saída	46
3.7	Função Característica Fuzzy	47
3.8	Controlador Fuzzy do tipo PI.	50
3.9	Partição das classes e funções de pertinência para as variáveis e , de e du	51
3.10	Pertinência das entradas às suas classes	53
3.11	Disparo das Regras.	54
3.12	Conjunção das conclusões e defuzificação	54
3.13	Aproximação da função correção = $f(\text{erro})$ Com $du \equiv \text{correção}$	55
3.14	Padrões de par metálico para serviço ADSL.	58
4.1	Órbita no espaço de configuração do BC perturbado.	62
4.2	Transformação de sistema de coordenadas: de $x'Oy'$ para xOy	63
4.3	Coordenadas de P no sistema de referência xCy	66
4.4	Algoritmo para detecção do choque.	68
4.5	Mapa de Poincaré (sxp) para $\varepsilon = 0$	71
4.6	Mapa de Poincaré (sxp) para $\varepsilon = 0,05$	72
4.7	Mapa de Poincaré (sxp) para $\varepsilon = 0,3$	73
4.8	Órbita do BC com controle.	74
4.9	Bilhar Circular controlado	76
4.10	Ângulo de choque x número de	

iterações - BC sem controle	77
4.11 Ângulo de choque x número de	
iterações - BC controlado, $k=0,35$	77
4.12 Ângulo de choque x número de	
iterações - BC controlado, $k=0,1$	78
4.13 Função Característica Fuzzy para o controle do BC.	79
5.1 BNGA com $n=2$	83
5.2 Aceleração devido ao potencial newtoniano.	84
5.3 Transformação de sistema de coordenadas: de	
$x'Oy'$ para xOy	85
5.4 Um centro de força gravitacional	87
5.5 Dois centros de força gravitacionais	87
5.6 Mapa $v_x \times x$ do BNGA com $n=2$	89
5.7 Mapa $v_x \times x \times E$	90
5.8 Evolução no espaço das configurações $x \times y$	91
5.9 Mapa $v_y \times y$	92
5.10 Mudança de órbita.	93
5.11 FCF para entrada na órbita em torno de $x= -a$	95
5.12 FCF para início da transferência	
Holman de $x= -a$ para $x= a$	96
6.1 Implementação de uma RN utilizando-se AOP	101
6.2 Resistor negativo como gerador de corrente vinculado	102
6.3 Resistor não Linear.	103
6.4 Resistor Negativo Não Linear (RNN)	104
6.5 Curva característica do bipolo RNN	105
6.6 Circuito RLC	105
6.7 Regime permanente.	106
6.8 Regime transitório	107
6.9 Circuito de Chua	108
6.10 Espaço de fase - pontos $Q1$, $Q2$ e O	109
6.11 Órbitas no CCH: (a) Rossler e (b) doublé scrool.	111
6.12 Órbitas no CCH: ciclo limite	112
6.13 Implementação do CCH	113
6.14 Circuito de interface para Controle do CCH via PC.	115
6.15 Ajuste de resistor via PC.	116
6.16 Circuito girador para simulação de indutor.	117
6.17 Filtro Passa-baixas.	118

6.18	Função de Transferência $ H(\Omega) $	119
6.19	Controle OPF do CCH - sinais no tempo.	120
6.20	Controle OPF do CCH - diagramas no espaço de fase.	121
6.21	FCF normalizada para o controle do CCH	123
A.1	Retrato de fase para sistema linear A.1.	143
A.2	Autovalores $\lambda_{\pm}$ complexos:focos e centro na origem $(0,0)$	144
A.3	Autovalores $\lambda_{\pm}$ reais: nó elíptico e nó Hiperbólico na origem $(0,0)$	145
A.4	Diagramas de fase do sistema A.11.	148
A.5	Ciclo limite atrator	149
A.6	Atrator de Rossler	151
A.7	Mapa Logístico	154
A.8	Mapa de Henon com $a=0$ e $b=0,4$	155
A.9	Sensibilidade à condição inicial	158
A.10	Transformação de área em espaço de fase bidimensional.	161
A.11	Toro 2-dimensional no espaço de fase	164
A.12	Análise sobre o comportamento das Órbitas próximas às variedades.	168
B.1	Sistema com realimentação das saídas	174
B.2	Astável Binário.	175
B.3	Astável Fuzzy.	176
B.4	Gráfico $x(n) \times n$	177
B.5	Implementação física do Astável fuzzy.	178
B.6	Aproximação da parábola por dois segmentos de reta	179
B.7	Mapa $x(n+1) \times x(n)$	179
B.8	Sinal de saída $x(n) \times t$, do circuito da Figura 6.5	180
B.9	Autômato Fuzzy	181

Lista de Tabelas

2.1	Isomorfismo entre Álgebra Booleana e a Álgebra dos Conjuntos	24
2.2	Isomorfismo entre Álgebra Booleana e Cálculo Proposicional	24
3.1	Planilha Excel para a Tabela Fuzzy	45
3.2	Planilha Excel para a Tabela Fuzzy com FCB	48
3.3	Tabela de valores de du.	51
3.4	Variáveis de entrada	57
3.5	Regras de Inferência Fuzzy	57
5.1	Condições de teste das Figuras 5.6 e 5.7	88
5.2	Condições para a Figura 5.9.	91
5.3	Região de controle	92
5.4	Resultados da simulação para a transferência Holman. . .	97
5.5	Resultados da simulação para a transferência y constante	98
6.1	Segmentos do espaço de fase do CCH	110
A.1	Expoente de Lyapunov	157

Lista de Algoritmos

4.1	<i>Movimento do BC sem perturbação</i>	65
4.2	<i>Movimento do BC com perturbação</i>	67
4.3	<i>Movimento do BC (completo).</i>	69
4.4	<i>Controle do BC.</i>	75
5.1	<i>Simulação do BNGA sem choques</i>	85
5.2	<i>Simulação do BNGA com choques</i>	86
6.1	<i>Coleta de dados e controle do CCH</i>	122

Lista de Símbolos

$\leq$	Menor ou igual (álgebra booleana)
$\subseteq$	Inclusão (álgebra dos conjuntos)
$\wedge$	and (cálculo proposicional)
$\vee$	or (cálculo proposicional)
$\Rightarrow$	Implicação (cálculo proposicional)
ε	Parâmetro de perturbação no BC
η	Número de pontos de contato por volta (BC)
Ω	Quantidade conservada no BNGA para n=2
λ	autovalor
$\Delta\alpha$	Correção do ângulo de reflexão para controle do BC
φ, I	Variáveis ângulo-ação
μ_A	Função de pertinência para a classe A
λ_i	Expoente de Lyapunov
$ r_P - r_i $	Distância do ponto P à massa i
$\sim$	not (cálculo proposicional)
0	Elemento 0 (álgebra booleana, cálculo proposicional)
1	Elemento 1 (álgebra booleana, cálculo proposicional)
and	Operação lógica (álgebra booleana)
$C\theta$	Co-seno de θ
$d\sigma$	2-forma diferencial
d, D	distância
E	Energia total (BNGA)
f, F	frenagem
$F\{f(n)\}$	Transformada z da função f(n)
$H(\Omega)$	Função de transferência do filtro digital
$H(p, q)$	Função Hamiltoniana de um sistema
H^+, H	Variedades estável e instável
i_{AB}	Corrente elétrica no ramo AB (CCH)
i_L	Corrente elétrica no indutor (CCH)
k	Ganho da correção para controle do BC
K_i	Constante no Potencial Gravitacional Newtoniano (no BNCA)
L_1, L_2	Quantidade de movimento angular (BNGA)
n	Número de centros com massa no BNGA
neq	Número de bits para conversão AD equivalente
not	Operação lógica (álgebra booleana)
or	Operação lógica (álgebra booleana)
p_x, p_y	Quantidade de movimento
Q	Ponto quiescente (CCH)
Q1	Ponto quiescente (CCH)
Q2	Ponto quiescente (CCH)

R	Raio genérico do BC sem perturbação
r, φ	Coordenadas polares para descrever BC
R'	Resistor de controle do CCH
$Re\{z\}$	Parte real do número complexo z
$s \times p$	Mapa de Poincaré adotado para BC
$S\theta$	Seno de θ
s, p	Coordenadas do espaço de fase do BC
T	Energia cinética (BNGA)
$T\theta$	Matriz de transformação de rotação do ângulo θ
t_n	Tempo n em sistema discreto (SDFI)
$V(rp)$	Potencial Gravitacional Newtoniano no ponto P (no BNCA)
v, V	velocidade
v, w	Velocidades de aproximação e de afastamento do círculo de raio R do BC
V_0	Tensão elétrica correspondente ao ponto de quebra do RNL (CCH)
V_A	Classe velocidade alta
v_{AB}	Tensão elétrica entre os postos A e B (CCH)
V_B	Classe velocidade baixa
$VC1$	Tensão elétrica no capacitor 1 (CCH)
$VC2$	Tensão elétrica no capacitor 2 (CCH)
VL	Tensão elétrica no indutor (CCH)
$v_x \times x \times E$	Mapa adotado para BNGA
W	Energia Potencial (BNGA)
$x'Oy'$	Sistema de coordenadas cartesianas no espaço de configuração
x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0}	Condições iniciais para teste no BNGA
XC	Reatância capacitiva
x_i	Variável contínua
XL	Reatância indutiva
x_n	Variável binária correspondente ao tempo n (SDFI)
$x_n \times t$	Evolução temporal da saída do Astável Fuzzy
$x_{n+1} \times x_n$	Mapa discreto
xOy	Sistema de coordenadas cartesianas no espaço de configuração

Lista de Abreviaturas

<i>A</i>	<i>Alto</i>
<i>AA</i>	<i>Muito alto</i>
<i>AB</i>	<i>Alto</i>
<i>AOP</i>	<i>Amplificador Operacional (CCH)</i>
<i>B</i>	<i>Baixo</i>
<i>BA</i>	<i>Baixo</i>
<i>BB</i>	<i>Muito baixo</i>
<i>BC</i>	<i>Bilhar Circular</i>
<i>BNGA</i>	<i>Bilhar Newtoniano de [Garms] & Andrade</i>
<i>CCH</i>	<i>Circuito de Chua</i>
<i>CI</i>	<i>Circuito Integrado</i>
<i>CMOS</i>	<i>Complementary Metal Oxide Silicon</i>
<i>DA</i>	<i>Digital to Analogic convert</i>
<i>FCB</i>	<i>Função Característica Booleana</i>
<i>FCF</i>	<i>Função Característica Fuzzy</i>
<i>FLC</i>	<i>Fuzzy Logic Control</i>
<i>KAM</i>	<i>Teorema devido a Arnold, Kolmogorov e Moser</i>
<i>LF</i>	<i>Lógica Fuzzy</i>
<i>M</i>	<i>Médio</i>
<i>MUX</i>	<i>Multiplex</i>
<i>OGY</i>	<i>Método de Controle devido a Ott, Grebogi e Yorke</i>
<i>OPF</i>	<i>Método de controle de caos (occasional proportional feedback)</i>
<i>PC</i>	<i>Personal Computer</i>
<i>PG</i>	<i>Progressão geométrica</i>
<i>RLC</i>	<i>Circuito composto por resistor, indutor e capacitor (CCH)</i>
<i>RN</i>	<i>Resistor elétrico negativo (CCH)</i>
<i>RNL</i>	<i>Resistor elétrico não linear (CCH)</i>
<i>RNN</i>	<i>Resistor elétrico negativo não linear (CCH)</i>
<i>SDFE</i>	<i>Sistemas Dinâmicos Fuzzy Extrínsecos</i>
<i>SDFI</i>	<i>Sistemas Dinâmicos Fuzzy Intrínsecos</i>
<i>SH</i>	<i>Sample & Hold</i>
<i>SL</i>	<i>Sistema Linear</i>
<i>SNL</i>	<i>Sistema Não Linear</i>
<i>TF</i>	<i>Teoria Fuzzy</i>

SUMÁRIO

1. Introdução	18
1.1 Motivação e justificativa	19
1.2 Objetivos	20
1.3 Metodologia	21
1.4 Estrutura do Texto.	21
2. Proposta de um Mapa de Relacionamentos	23
2.1 Teoria Fuzzy - Histórico.	23
2.2 Evolução da Teoria Fuzzy - Mapa de Relacionamentos.	27
2.2.1 Teoria Fuzzy e Lógica Seqüencial.	28
2.2.2 Equações Diferenciais, Sistemas Dinâmicos e Caos	28
2.2.3 Equações Diferenciais Fuzzy e Sistemas Dinâmicos Fuzzy.	29
2.2.4 Teoria Física	29
2.2.5 Teoria de Controle.	30
2.3 Sistemas Dinâmicos Fuzzy Intrínsecos.	32
2.4 Sistemas Dinâmicos Fuzzy Extrínsecos.	33
2.5 Outros temas.	35
2.6 Escopo do Trabalho.	36
2.7 Bibliografia Comentada.	37
3. Tópicos da Teoria Fuzzy	39
3.1 Conceitos Básicos da Teoria Fuzzy	39
3.1.1 Função Característica de entrada/saída.	39
3.1.2 Função Característica Fuzzy	42
3.1.3 Motivações para uso das FCF's	48
3.2 Controlador Fuzzy (CF).	50
3.2.1 Definições do CF.	50
3.2.2 Processamento Fuzzy	52
3.3 Técnicas de definição de uma FCF.	55
3.4 Reconhecimento de Padrões	56
3.5 Bibliografia Comentada.	58

4. Bilhar Circular (BC)	61
4.1 Definição do BC	61
4.2 Implementação do BC	62
4.2.1 Choque elástico no BC sem perturbação	62
4.2.2 Choque elástico no BC com perturbação	65
4.2.3 Detecção do choque.	67
4.3 Caracterização do BC.	71
4.3.1 BC não perturbado	71
4.3.2 BC perturbado	72
4.4 Controle do BC.	74
4.4.1 Descrição do controle	74
4.4.2 Resultados.	76
4.5 Considerações Finais.	79
4.6 Bibliografia Comentada.	80
 5. Estudos de caso para SDFE's: Bilhar Newtoniano de [Garms] & Andrade	 81
5.1 Definição do BNGA	81
5.2 Implementação do BNGA	83
5.2.1 BNGA sem choques.	83
5.2.2 BNGA com choques.	85
5.3 Caracterização do BNGA.	88
5.4 Controle do BNGA.	92
5.4.1 Descrição	92
5.4.2 Implementação das regras Fuzzy.	94
5.4.3 Resultados.	97
5.5 Considerações Finais.	98
5.6 Bibliografia Comentada.	99
 6. Circuito de Chua (CCH)	 100
6.1 Análise quantitativa do circuito de Chua.	100
6.1.1 Resistor Negativo	101
6.1.2 Resistor não Linear	103
6.1.3 Resistor Negativo não Linear.	104
6.1.4 Circuito RLC.	105
6.1.5 Análise do CCH.	108

6.2 Implementação do CCH.	112
6.2.1 Aspectos Gerais	112
6.2.2 Interface para o PC.	114
6.2.3 Circuito girador como indutor	116
6.2.3 Filtro Passa Baixas	118
6.3 Controle Fuzzy do CCH	120
6.3.1 Análise quantitativa	120
6.3.2 Algoritmo para o controle do CCH	122
6.4 Considerações Finais	123
6.5 Bibliografia Comentada	124
7. Considerações Finais	125
7.1 Cumprimento dos objetivos	125
7.2 Contribuições do trabalho	126
7.3 Conclusões.	128
7.4 Trabalhos Futuros	129
Referências	130
Referências Adicionais	138
Apêndice A: Introdução aos Sistemas Dinâmicos e Controle de Caos	141
A.1 Sistemas Lineares.	141
A.1.1 Retrato de fase	142
A.1.2 Pontos fixos atratores ou repulsores.	143
A.2 Sistemas não Lineares	145
A.2.1 Sistema linear aproximante.	146
A.2.2 Atratores e repulsores simples.	148
A.3.3 Atrator estranho.	150
A.3 Mapas.	153
A.4 Caracterização do caos- Expoentes de Lyapunov	155
A.5 Sistemas Conservativos	159
A.5.1 Equações de Hamilton e preservação da "área" no espaço de fase.	160
A.5.2 Dimensão do espaço de soluções.	163
A.5.3 Mapas e seção de Poincaré	165

A.5.4 Variedade estável e variedade instável - origem do caos hamiltoniano.	166
A.5.5 Ilhas e emaranhados.	167
A.6 Controle de caos OGY.	169
A.7 Considerações Finais	170
A.8 Bibliografia Comentada	171
 Apêndice B: Estudo de casos para SDFI's	173
B.1 Estendendo a Lógica Fuzzy para Sistemas Seqüenciais	173
B.1.1 Sistemas realimentados.	174
B.1.2 Flip-Flop Astável	175
B.1.3 Flip-Flop Astável Fuzzy	175
B.2 Autômato Fuzzy $\times$ Lógica Combinatória.	180
B.3 Física & Fuzzy.	182
B.4 Considerações Finais.	183
B.5 Bibliografia Comentada.	184

1. Introdução

O controle de caos tem sido muito investigado em aplicações das mais variadas áreas tais como a emissão em lasers [ROY & MURPHY & MAIER & GILLS & HUNT - 1992] ou ainda na demanda de energia em sistemas elétricos de potência [CHEN & DONG - 1998].

Muitas destas aplicações são baseadas no método OGY (Ott, Grebogi e Yorke) de controle de caos [OTT & GREBOGI & YORKE - 1990], o qual permite estabilizar órbitas periódicas instáveis, imersas no atrator caótico, por meio da introdução de pequenas alterações de parâmetros de controle.

Uma variação do método OGY é o “Occasional Proportional Feedback” – OPF que, ao invés de usar a dinâmica do sistema para variar adequadamente um parâmetro, calcula a correção em uma das variáveis, para forçá-la a passar por um pequeno intervalo prefixado no espaço de fase [HUNT - 1991].

O OPF tem sido aplicado em diversas situações reais, por meio de circuitos analógicos [GALIAS & MURPHY &, OGORZALEK - 1997]. Entretanto, implementações digitais desse método estavam limitadas pelo número de bits da conversão analógico-digital (AD) e pelo tempo desta conversão [CHEN & DONG - 1998] [OGORZALEK & CHEN - 1999].

Mesmo com esses métodos que prescrevem a variação do controle, a sequência das alterações aplicadas ainda pode ser agilizada por uma fase de aprendizagem ou de avaliação preliminar. Para isto, percebeu-se que é conveniente aplicar os conceitos da Teoria Fuzzy. Desta forma, obtêm-se respostas adequadas na atuação sobre os parâmetros de controle ainda que as informações na avaliação da variável de referência sejam imprecisas, ou definidas de maneira vaga [PALM & DRIANKOV & HELLENDOM - 1996] [PASSINO & YURKOVICH - 1997].

Um controlador fuzzy pode incorporar o conhecimento de peritos na forma de regras lógicas fuzzy, as quais, sob várias condições, levam a ações tipicamente humanas. A Lógica Fuzzy, que se baseia em uma lógica multivalorada, foi proposta por Zadeh em 1965, para imitar o raciocínio do tipo qualitativo, que é, tipicamente, o mecanismo utilizado pelos seres humanos [ZADEH-1965].

A Matemática clássica e a teoria de controle convencional apresentam limitações quando aplicadas à modelagem e controle de sistemas físicos cuja modelagem é vaga, incerta ou ainda mal formulada. No entanto, a Teoria Fuzzy aplicada a controle, mostrou-se adequada para este uso. Uma das características marcantes da Teoria Fuzzy é sua capacidade de modelar problemas práticos de controle que são de difícil descrição por meio de fórmulas matemáticas exatas e que assim não podem ser tratados adequadamente com técnicas de controle convencionais.

Da mesma maneira anteriormente exposta, a Teoria Fuzzy também vem sendo aplicada fortemente no controle de sistemas caóticos [CHEN & DONG - 1998] [OGORZALEK & CHEN - 1999] [CALVO & CARTWRIGHT - 1998].

1.1 Motivação e Justificativa

A motivação para se usar a lógica fuzzy em controle de caos origina-se no fato de que sistemas com esta característica são complexos e de difícil modelagem por métodos convencionais. A aproximação de funções pela lógica fuzzy permite criar uma superfície de controle, combinando regras baseadas em operadores matemáticos, mesmo quando aplicadas em sistemas de modelagem vaga, incerta e incompleta.

O tema inicialmente proposto para ser desenvolvido no trabalho da Tese era o da “Investigação de Ferramentas Analíticas Para Representação e Tratamento Computacional de Sistemas Fuzzy”. Para auxiliar a focar o assunto da tese foi realizado um mapeamento das áreas do conhecimento onde a Teoria Fuzzy estava sendo aplicada e/ou desenvolvida no estado da arte dos desenvolvimentos formais, científicos e tecnológicos.

Este mapeamento mostrou a existência de relações e a adequação do uso da Teoria Fuzzy na construção de modelos para a solução de problemas envolvendo sistemas dinâmicos e, em particular, de sistemas caóticos.

Permitiu também definir um Sistema Dinâmico Fuzzy Extrínseco como sendo aquele para o qual as regras fuzzy, empregadas em seu controle, são externas à sua determinação. Nesta Tese, optou-se por estudar tal controle, o que implicou na proposta do tema “Modelagem Fuzzy para Fixação de Trajetórias em Sistemas Caóticos”.

Num Sistema Dinâmico Fuzzy Intrínseco, as regras fuzzy fazem parte de sua definição sendo necessários muitos outros conceitos e resultados matemáticos para estudá-los. Para o aprofundamento deste tema, e por sua extensão, considerou-se que outro trabalho específico seria necessário.

1.2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é o de propor, implementar, simular e testar em protótipos reais, o controle do caos apoiado em técnicas Fuzzy, tanto em sistemas conservativos como em dissipativos. Os experimentos previstos para atingir os objetivos foram realizados por meio de simulações e também com a obtenção de medidas sobre um protótipo físico. Este último foi implementado e comandado computacionalmente, em tempo real.

Outro objetivo é o de realizar a implementação de uma plataforma de baixo custo para viabilizar a materialização física de um circuito de teste. Este tipo de plataforma impunha problemas com relação a erros de quantização na digitalização de variáveis. Para contornar este problema, optou-se pelo tratamento por meio de um filtro passa-baixas implementado em Software. Constatou-se, posteriormente, que este tipo de tratamento em sistemas caóticos não se encontrava na literatura, constituindo uma contribuição que surgiu com a realização do trabalho.

Buscou-se também ter como alvo o desenvolvimento de um tratamento analítico geral, que relacionasse a Teoria Fuzzy com suas diversas áreas correlatas. O levantamento do estado da arte nestas áreas de conhecimento apontou as relações entre a Teoria Fuzzy e tais áreas, o que possibilitou nortear conceitos abrangentes que permitissem uma sistematização do estudo das aplicações da Teoria Fuzzy sobre elas.

Tal levantamento mostrou-se ser um meio efetivo para se extrair o estágio atual da aplicação da Teoria Fuzzy, em particular nos sistemas caóticos, objetivando suas possíveis evoluções e identificação de direções a serem exploradas.

1.3 Metodologia

Visando organizar e discutir os resultados presentes na literatura, visualizar as possíveis aplicações e evoluções da Teoria Fuzzy, bem como definir as estratégias adotadas no trabalho, iniciou-se o estudo de ferramentas analíticas para representação e tratamento computacional de Sistemas Fuzzy, criando-se um mapa de relacionamentos entre as várias áreas e esta teoria.

A seguir, estabeleceu-se o aprofundamento do controle fuzzy de caos como etapa inicial para cobrir os diversos temas evidenciados por este mapa.

O trabalho faz uso do desenvolvimento de Estudos de Caso que permitam verificar a adequação do emprego do Controle Fuzzy para fixação de trajetórias em sistemas caóticos. Tais estudos estarão baseados em simulações de bilhares e em testes sobre um circuito de Chua [MADAN - 1993], este último implementado em protótipo físico.

Alguns temas relacionados ao conceito de Sistema Dinâmico Fuzzy Intrínseco também foram considerados: discussão da Lógica Sequencial Fuzzy por meio do desenvolvimento de um Astável Fuzzy e a realização de interpretações da Física por meio da Teoria Fuzzy.

A parte experimental foi consolidada pela implementação de protótipos eletrônicos físicos e a simulação de comportamento em situações reais.

1.4 Estrutura do Texto

O Capítulo 2 apresenta o Mapa de Relacionamentos, já citado, com a conseqüente definição do alvo do trabalho a ser desenvolvido.

O Capítulo 3 destaca os aspectos principais da Técnica Fuzzy de Aproximação de Funções, fundamental para a modelagem do controle de fixação de trajetórias, bem como exemplifica o reconhecimento fuzzy de padrões.

O controle fuzzy de caos em bilhares, os quais representam Sistemas Dinâmicos Fuzzy Extrínsecos e Conservativos, é considerado nos dois próximos capítulos. No Capítulo 4, explora-se o Bilhar Circular e no Capítulo 5 um tipo de Bilhar inédito e mais complexo: o Bilhar Newtoniano de Garms & Andrade (BNGA).

No Capítulo 6, verifica-se, por meio de teste real no Circuito de Chua, que representa um Sistema Dinâmico Fuzzy Extrínseco não Conservativo, a adequação do uso da modelagem fuzzy na fixação de trajetórias em sistemas caóticos implementados fisicamente.

No Capítulo 7, são apresentadas as conclusões, verificado o cumprimento dos objetivos, são descritas as contribuições do trabalho e propostos os trabalhos futuros.

No Apêndice A, faz-se uma apresentação geral dos Sistemas Dinâmicos visando uma uniformização dos termos e conceitos empregados no controle fuzzy do caos. Finalmente, no Apêndice B, propõe-se um Astável Fuzzy para exemplificar um Sistema Dinâmico Fuzzy Intrínseco.

2. Proposta de um Mapa de Relacionamentos

Neste Capítulo discute-se um Mapa de Relacionamentos entre a Teoria Fuzzy e outras áreas do conhecimento que foram consideradas, em uma primeira análise, como sendo correlatas. Foca-se o trabalho realizado a partir deste mapa.

Faz-se uso de um breve histórico do desenvolvimento da Teoria Fuzzy para iniciar a discussão do escopo do trabalho. Apresenta-se, por meio de um mapa, a relação entre esta teoria e as diversas áreas do conhecimento que pudessem, no entendimento adotado, ter alguma relação com a teoria Fuzzy. Tais áreas abrangem:

- Equações Diferenciais;
- Sistemas Dinâmicos;
- Caos;
- Física;
- Computação Quântica.

2.1 Teoria Fuzzy - Histórico

Em [ZADEH-1965], destacam-se os problemas que surgem ao analisar sistemas complexos ou mal definidos, que não são tratados adequadamente com as técnicas quantitativas convencionais. Neste artigo, o autor propõe como alternativa o uso da Lógica Fuzzy e seus fundamentos teóricos.

Zadeh relacionou decisões sobre “dados imprecisos” à pertinência de elementos aos “Conjuntos Fuzzy”, definindo-a pela “função de pertinência” de um elemento a um dado conjunto. Enquanto em conjuntos clássicos, a pertinência só pode assumir dois valores discretos “{0,1}”, ou ainda, Verdadeiro ou Falso, em um Conjunto Fuzzy esta função é contínua no intervalo fechado [0,1].

Em Lógica Clássica, as operações da Álgebra Booleana “and”, “or” e “not” sobre variáveis podem ser representadas respectivamente pelas operações interseção, união e complemento entre conjuntos.

Com o intuito de se dispor de uma extensão do significado de alguns operadores clássicos para os operadores fuzzy pode-se analisar o seguinte isomorfismo entre, por exemplo, Álgebra Booleana e a Álgebra dos Conjuntos (Tabela 2.1).

Álgebra dos Conjuntos	Álgebra Booleana
Interseção	and
União	or
Complemento	not
Conjunto Vazio	0
Conjunto Universo	1
$\subseteq$	$\leq$

Tabela 2.1 - Isomorfismo entre Álgebra Booleana e a Álgebra dos Conjuntos.

Zadeh aproveitou-se de isomorfismos semelhantes e promoveu a extensão de operadores da Lógica Booleana para operadores da Lógica Fuzzy. Fez isto ao explorar este isomorfismo considerando as operações de mesma categoria realizadas sobre Conjuntos Fuzzy, ao invés de operações sobre Conjuntos Clássicos.

Ele também estendeu o Cálculo Proposicional Clássico para o domínio Fuzzy, utilizado para as tomadas de decisão (raciocínio aproximado), ao considerar o seguinte isomorfismo entre Álgebra Booleana e Cálculo Proposicional (Tabela 2.2).

Cálculo Proposicional	Álgebra Booleana
$\wedge$	and
$\vee$	or
$\sim$	not
0	0
1	1
$\Rightarrow$	$\leq$

Tabela 2.2 - Isomorfismo entre Álgebra Booleana e Cálculo Proposicional.

Em [LEE 1-1990] e [LEE 2-1990], propõe-se a configuração genérica de um Controle por Lógica Fuzzy (FLC - Fuzzy Logic Control), que pode ser visto na Figura 2.1.

O projeto de um controlador por Lógica Fuzzy, segundo este autor, consiste em desenvolver componentes representados na Figura 2.1, os quais se relacionam às seguintes etapas:

1) Fuzificação:

- a) Definir as variáveis de entrada;
- b) Mapear valores lidos para os universos de discurso;
- c) Fuzificar valores, isto é, converter os valores categóricos lidos para valores lingüísticos.

Figura 2.1 – Controlador por Lógica Fuzzy.

2) Base de Conhecimento:

Base de Regras - Elaborar o conjunto de regras lingüísticas de controle que descrevem o comportamento desejado.

3) Unidade de Decisão:

- a) Estabelecer o mecanismo de inferência;
- b) Definir operadores.

Esta Unidade, que corresponde ao núcleo de um FLC, permite simular a habilidade humana de tomada de decisões. Baseia-se em regras lingüísticas de controle das quais se inferem ações de controle por meio de implicações e regras de inferência Fuzzy.

4) Defuzificação:

- a) Mapear as escalas de conversão dos valores de variáveis de saída em seus universos de discurso;
- b) Obter a ação de controle não Fuzzy (categórica ou “crisp”) a partir de uma ação Fuzzy inferida.

Ainda em [LEE 1-1990] e [LEE 2-1990], define-se para cada etapa as estratégias necessárias e como realizá-las a fim de obter as características adequadas para o desenvolvimento do FLC. Este autor, com relação às regras de Controle Fuzzy, discute os tipos, possíveis justificativas, propriedades desejadas e ainda considera quatro métodos básicos para derivá-las:

- 1) Experiência de especialistas e conhecimento de Engenharia de Controle;
- 2) Baseado nas ações de controle do operador;
- 3) Baseado no modelo Fuzzy do processo;
- 4) Baseado em aprendizagem.

Na conclusão de [LEE 2-1990], discutem-se aplicações da época em que este artigo foi apresentado. Em muitas destas aplicações são desenvolvidos FLC's obtendo-se as regras a partir do conhecimento de especialistas da área específica ou por meio de colaboração entre estes especialistas. A aquisição de conhecimento para os FLC's representa um papel importante na determinação do nível de desempenho de um sistema de controle fuzzy.

Também foram obtidos muitos resultados satisfatórios em pesquisas sobre sistemas fuzzy com a capacidade de aprendizado por meio da experiência. Nesta área, a combinação de técnicas de Lógica Fuzzy e de Redes Neurais permitiu desenvolver sistemas capazes de emular a habilidade humana de aprendizagem e adaptação [TANAKA-95].

2.2 Evolução da TF – Mapa de Relacionamentos

Por seu caráter multidisciplinar, muitas são as áreas com as quais a Teoria Fuzzy foi ou poderá ser relacionada. Para estabelecer um plano de estudo, sistematizar a questão e organizar todas as informações em foco foi proposto (Figura 2.2) um mapa desses relacionamentos.

Figura 2.2 – Mapa de Relacionamentos entre as diversas áreas e a Teoria Fuzzy.

A seguir, nos próximos itens, estes Blocos, que compõem o Mapa de Relacionamentos proposto, são discutidos. Pretende-se com isto estabelecer uma visão global sobre estes temas, tanto do ponto de vista de sua situação atual, como de possíveis evoluções ou extensões (que podem compor o escopo deste trabalho de Tese). Tais Blocos são agrupados em conceitos mais amplos para tornar coesa esta análise.

2.2.1 Teoria Fuzzy e Lógica Seqüencial

A Teoria Fuzzy e Lógica Seqüencial correspondem respectivamente aos Blocos 1 e 2 da Figura 2.2.

Na Teoria Fuzzy, usualmente, apenas a lógica combinatória é considerada explicitamente. Neste caso, para gerar atuações em sistemas aplicados a cada entrada, obtém-se a saída correspondente por meio da função característica fuzzy de entrada saída [GARMS & ANDRADE – 2001].

Em [WEBER & KLEIN-2003] propõe-se um Flip-Flop JK Fuzzy. Embora não se discuta uma interpretação para este dispositivo, percebe-se que há uma realimentação de suas saídas para suas entradas. Tendo-se em vista que os Flip-Flop's da Lógica Seqüencial Booleana também se baseiam neste tipo de realimentação, por analogia, pode-se considerar que um Flip-Flop Fuzzy estará relacionado a uma Lógica Seqüencial Fuzzy.

Desta análise, constata-se que se pode propor o estabelecimento do conceito de “Lógica Seqüencial Fuzzy”, interpretando-se os dispositivos construídos segundo suas diretrizes como Sistemas Dinâmicos Fuzzy. Ressalta-se que esta conceituação, ou este tipo de abordagem de estudo, não foi encontrado na literatura especializada. No Apêndice B, este desenvolvimento é apresentado na modelagem e simulação de um Flip-Flop Astável Fuzzy (caracterizado como um exemplo de Lógica Seqüencial Fuzzy).

2.2.2 Equações Diferenciais, Sistemas Dinâmicos e Caos

Equações Diferenciais, Sistemas Dinâmicos e a Teoria do Caos correspondem aos Blocos 5, 6 e 9 da Figura 2.2.

O Mapa de Relacionamentos estabelecido evidencia que o estudo amplo de Sistemas Dinâmicos é essencial para o tratamento dos diversos temas referenciados.

Para dar suporte ao estudo de Sistemas Dinâmicos realiza-se uma síntese, no Apêndice A, que inclui:

- Teoria de Sistemas Dinâmicos;
- Equações diferenciais;
- Mapas discretos;
- Sistemas conservativos ou não;
- Sistemas caóticos ou não;
- Preservação de órbitas, teorema KAM, para os sistemas conservativos perturbados;
- Atratores estranhos para os sistemas não conservativos;
- Caracterização de caos e seu controle (ver seção 2.2.5).

2.2.3 Equações Diferenciais Fuzzy e Sistemas Dinâmicos Fuzzy (Blocos 10 e 11)

Comumente, não se consideram as incertezas de variáveis e parâmetros relacionadas ao conjunto de equações diferenciais utilizado para modelar um sistema determinístico. É possível tratá-las por meio do estudo dos Sistemas Dinâmicos Fuzzy e, desse modo, aproximar-se mais da realidade [KALEVA - 1987] [BARROS-1997].

Neste caso, as regras fuzzy são intrínsecas à definição de um Sistema Dinâmico Fuzzy do mesmo modo que na realimentação da saída para a entrada em sistemas de Lógica Sequencial Fuzzy (Seção 2.2.1).

2.2.4 Teoria da Física

A Teoria Física está relacionada aos Blocos 18, 19 e 20 da Figura 2.2.

Em [FRIEDMAN & SANDLER-1999] é proposto um modo para determinar a evolução de um Sistema Físico, quando se dispõe apenas de alguma informação lingüística sobre a importância relativa dos estados entre si, resultando em regras fuzzy que descrevem seu comportamento. Tais Sistemas também serão classificados como Sistemas Dinâmicos Fuzzy Intrínsecos, devido às regras fuzzy fazerem parte de sua definição.

No Capítulo 7, são discutidas possíveis relações entre a Teoria Fuzzy e a Física (exemplos de Sistemas Dinâmicos Fuzzy Intrínsecos), encontradas na literatura.

2.2.5 Teoria de Controle

O controle clássico (Bloco 3 – Figura 2.2) e o controle fuzzy (Bloco 4 – Figura 2.2) estão bem estabelecidos, não sendo o foco de nossa atenção. Aqui se pretende realçar o estudo do controle de caos (Bloco 7 – Figura 2.2) com destaque ao controle fuzzy de caos (Bloco 8 – Figura 2.2).

O conceito de controle de caos é discutido, assumindo-se que tal controle é visto como uma forma de alcançar e manter uma órbita especificada a partir de um dado ponto.

Algumas características do comportamento caótico são:

- Sensibilidade a variações das condições iniciais que causam grandes mudanças nas trajetórias;
- Órbitas aperiódicas muito próximas de órbitas periódicas instáveis.

Neste tipo de controle, é necessário o emprego de pequenas quantidades de energia. Utiliza-se das características de comportamento caótico supracitadas para deslocar o sistema por meio de trechos de órbita que se aproximam da órbita desejada.

Estas características de comportamento também são empregadas para depois manter o sistema, sob controle, nesta órbita, por meio de pequenas correções [OTT & GREBOGI & SHINBROT & YORKE-1990].

Por outro lado, o tempo de transporte para a órbita alvo pode ser muito grande, sendo desenvolvidas técnicas de rastreamento para minimizá-lo [KOSTELICH & OTT & GREBOGI & YORKE-1993].

O controle do caos denominado OGY pode ser estudado em [OTT & GREBOGI & YORKE-1990] e em [LAI-1994]. Nesta Tese ele também é descrito na Seção A.6.

Em [MACAU & GREBOGI-2004] citam-se casos concretos de sucesso na aplicação do controle de caos relacionados a órbitas de sondas:

- Lançada para investigar interações entre a magnetosfera e o vento solar, a sonda espacial ISEE-3 foi reutilizada após esta missão para explorar o cometa Halley, sem que para isto se empregassem os métodos clássicos de transferência de órbita, pois a quantidade de combustível não era suficiente para tal reutilização.
- A sonda japonesa Hiten, lançada à Lua em 1990, devido a um funcionamento inadequado do veículo lançador, permaneceu em órbita ao redor da Terra. Em 1992, a Hiten foi capturada pela Lua, levada por uma trajetória caótica forçada.

Esta técnica de definição de órbita caótica para a Lua com baixo dispêndio de energia pode ser encontrada em [BOLLT & MEISS-1995].

Outros exemplos, tais como o da instabilidade de lasers, também podem ser tratados por meio da técnica de controle de caos desenvolvida por Hunt: “Occasional Proportional Feedback” (OPF) [HUNT-1991], a qual é uma variação da técnica OGY.

Para estudar a viabilidade dos controladores fuzzy de caos, baseados diretamente na experiência e habilidade humanas, foram realizadas as seguintes implementações e/ou simulações, sendo os resultados apresentados nos Capítulos 4, 5 e 6:

- Simulação do bilhar circular perturbado (Capítulo 4);
- Simulação do bilhar definido sobre uma simplificação do problema restrito de três corpos (Bilhar Newtoniano de Garms & Andrade) (Capítulo 5);
- Implementação de um controlador fuzzy de caos em tempo real e sem simulações, para o Circuito de Chua (Capítulo 6).

Ressalta-se que, embora a Teoria Fuzzy de controle de caos tenha sido aplicada a Sistemas Dinâmicos não Conservativos nos trabalhos pesquisados, não são encontrados na literatura exemplos de aplicação a Sistemas Dinâmicos Conservativos, como é o caso dos bilhares desenvolvidos nesta Tese.

Observa-se ainda que, para o controlador fuzzy de caos, as regras fuzzy não fazem parte da definição do sistema e, portanto, neste caso, são extrínsecas a ele. Nesta Tese estes sistemas serão denominados “Sistemas Dinâmicos Fuzzy Extrínsecos”.

Além disso, também se podem classificar os controladores fuzzy convencionais como Sistemas Dinâmicos Fuzzy Extrínsecos [DRIANKOV & HELLENDORRN & REINFRANK - 1996] [PASSINO & YURKOVICH - 1997] [KOSKO -1997] (ver Bloco 4 - Figura 2.2).

2.3 Sistemas Dinâmicos Fuzzy Intrínsecos

Para organizar a análise, os temas foram agrupados com a classificação anteriormente proposta, qual seja, a de Sistemas Dinâmicos Fuzzy Intrínsecos (SDFI's) e a de Sistemas Dinâmicos Fuzzy Extrínsecos (SDFE's).

No caso dos Sistemas Dinâmicos Fuzzy Intrínsecos as regras fuzzy fazem parte da sua definição (Figura 2.3).

Os Blocos 5,9 e 6 formam o estudo dos Sistemas Dinâmicos. Em conjunto com os Blocos 1, 2 e 10, referentes aos temas da Teoria Fuzzy relevantes ao estudo dos Sistemas Dinâmicos Fuzzy Intrínsecos, formam a base para o estudo do Bloco 11, o qual representa um Sistema deste tipo.

Figura 2.3 – Mapa de relacionamentos para Sistemas Dinâmicos Fuzzy Intrínsecos.

Aplicações dos Sistemas Dinâmicos Fuzzy Intrínsecos são, por exemplo, o estudo da dinâmica das populações, a definição das Leis Físicas e o estudo das Inferências Lógicas.

2.4 Sistemas Dinâmicos Fuzzy Extrínsecos

O próximo conceito aglutinador é o de Sistema Dinâmico Fuzzy Extrínseco, sendo que as regras fuzzy não fazem parte da sua definição (Figura 2.4).

Figura 2.4 – Mapa de relacionamentos para Sistemas Dinâmicos Fuzzy Extrínsecos.

Considerando-se que:

- 1) Os Blocos 1, 2, 5, 6, e 9 são também necessários ao estudo dos Sistemas Dinâmicos Fuzzy Intrínsecos (Figura 2.2). Ou seja, no estudo dos Sistemas Dinâmicos e na Teoria Fuzzy são comuns as duas classes propostas: a SDFE e a SDFI.
- 2) Os Blocos 1, 2, 3 e 4 foram trabalhados na dissertação de mestrado, no tema “Aplicação da Teoria Fuzzy em Sistemas de Auxílio Motor”, [GARMS & ANDRADE - 2001]. Estão relacionados principalmente à lógica combinatória fuzzy e, neste caso, as saídas só dependem das entradas.
- 3) Percebeu-se, dos artigos estudados (Seção 2.7), que seria possível aprofundar alguns temas relacionados ao controle fuzzy de caos (Bloco 8), tais como, a resolução dos conversores analógico-digitais utilizados e a implementação controle fuzzy de caos em sistemas conservativos;
- 4) Portanto, investindo-se no estudo dos Blocos 5, 6 e 9, ainda não diretamente examinados pelo autor, seria possível conseguir-se uma cobertura bem abrangente dos Sistemas Dinâmicos Fuzzy Extrínsecos.

2.5 Outros temas

Outros tópicos relevantes (Figura 2.5) em geral são tratados extensamente na literatura e a princípio não serão aqui considerados diretamente.

Figura 2.5 – Mapa de relacionamentos e outros temas.

No entanto, ao longo do trabalho, serão discutidas questões sobre inferências da lógica fuzzy, bem como as técnicas de aproximação fuzzy de funções e de reconhecimento de padrões serão apresentadas no próximo capítulo, por serem fundamentais para o escopo do trabalho que efetivamente será desenvolvido.

Quanto à Computação Quântica, inicialmente pensou-se em considerá-la mais em detalhes, mas isto não foi possível. Não foi retirada do mapa de relacionamentos para que este tivesse uma grande abrangência, indicando, por outro lado, um possível estudo futuro.

2.6 Escopo do Trabalho

Devido à extensão destes temas, decidiu-se priorizar o estudo dos Sistemas Dinâmicos Fuzzy Extrínsecos relacionados ao controle de caos, o que permitiu aplicações mais diretas e também a aquisição da base e experiência inicial necessárias ao estudo posterior dos Sistemas Dinâmicos Fuzzy Intrínsecos.

Na Figura 2.6 destacaram-se os temas sobre Sistemas Dinâmicos Fuzzy Extrínsecos que serão discutidos no desenvolvimento desta Tese.

Figura 2.6 – Mapa de Relacionamentos simplificado.

Com base neste mapa foram definidas a Metodologia e a Estrutura do trabalho apresentadas nas Seções 1.3 e 1.4.

2.7 Bibliografia Comentada

Será apresentada a seguir uma bibliografia comentada sobre o tema central escolhido. Ela está relacionada aos Sistemas Dinâmicos Fuzzy Extrínsecos ou, mais precisamente, à modelagem fuzzy para fixação de trajetórias em sistemas caóticos. Ela abrange os Capítulos 4 a 6.

[PALM & DRIANKOV & HELLENDOM-1996] e [PASSINO & YURKOVICH-1997] versam sobre a Teoria e Controle Fuzzy.

[OTT & GREBOGI & YORKE-1990] versa sobre o Controle de Caos.

Além da evolução independente destas técnicas, sua inter-relação foi estabelecida em diversas pesquisas, sendo que, do panorama atual, destacam-se os seguintes trabalhos:

- O controle de caos para sistemas dissipativos está bem difundido, por exemplo [SOUZA & CALDAS-2004];
- Em [HUNT-1991] é apresentado o método “occasional proportional feedback” - OPF, variação do OGY, o qual vem sendo aplicado em diversas situações reais através de circuitos analógicos [GALIAS & MURPHY & OGORZALEK-1997];
- Sobre o controle de caos para sistemas conservativos em [LAI & DING & GREBOGI-1993] discutem-se diferenças na aplicação do método de controle OGY e, além disso, mais recentemente, em [VITTOT & CHANDRE & CIRAOLLO & LIMA-2004], por exemplo, outras abordagens foram analisadas;
- Para sistemas digitais foram apresentadas e discutidas limitações em [CHEN & DONG-1998] e [OGORZALEK & CHEN-1999], que estão relacionadas ao número de bits da conversão analógico digital e ao tempo desta conversão;
- Definiu-se o uso de técnica fuzzy para controle de sistemas caóticos dissipativos em [CHEN & DONG-1998], [OGORZALEK & CHEN-1999], [CALVO & CARTWRIGHT-1998], [TANAKA & IKEDA & WANG-1998], [JOO & SHIEH & CHEN-1999], [HIRASAWA & WANG & MURATA & HU & JIN-2000], [REN & LIU-2002], [UDAWATTA & WATANABE & KIGUCHI & IZUMI-2002] e [WANG & SHANG & WANG – 2004], entre outros.

Estes resultados estabeleceram firmemente a viabilidade, modos de aplicação, características e limitações do controle fuzzy de sistemas caóticos.

Entretanto, depreende-se do exposto que há necessidade de se realizar experimentos e/ou simulações relacionadas ao controle fuzzy de caos em sistemas caóticos Hamiltonianos. Isto também ocorre com o problema do controle computacional, em tempo real, de sistemas implementados fisicamente (não simulados)

Observa-se que o cerne do controle fuzzy, que é modelar a operação humana, em geral foi só implicitamente considerado. Devido a isto se procurou, no trabalho que foi desenvolvido nesta Tese, explicitar o ponto de vista do operador.

3. Tópicos da Teoria Fuzzy

Neste capítulo discute-se a aproximação de Funções Características de entrada/saída, usando-se uma extensão da Lógica Booleana: a Lógica Fuzzy. Mostra-se que esta extensão é conseguida por meio da flexibilização do conceito de função de pertinência de um elemento a um conjunto. Finalmente, apresentam-se um Controlador Fuzzy e um exemplo de Reconhecimento Fuzzy de Padrões (ver bloco 21 da Figura 2.2).

3.1 Conceitos Básicos da Teoria Fuzzy

Neste capítulo apresenta-se um tratamento introdutório sobre a aproximação de Funções Características Fuzzy de entrada/saída. Objetiva-se uma uniformização de termos e conceitos (da Teoria Fuzzy) relacionados ao emprego destas funções no controle fuzzy do caos (capítulos 4, 5 e 6).

Os temas desenvolvidos são os seguintes:

- Estuda-se um problema específico: a obtenção de uma Função Característica Fuzzy de entrada/saída para frear uma partícula;
- Da solução estabelecida para este problema, extrai-se a técnica fuzzy relacionada à aproximação de funções;
- Como exemplos de aplicação desta técnica, apresentam-se um Controlador Fuzzy e um Reconhecedor Fuzzy de Padrões.

3.1.1 Função Característica de entrada / saída

O conceito de função característica de entrada/saída pode ser enunciado por meio do desenvolvimento de um exemplo. Considere-se o seguinte problema: deseja-se parar uma partícula que está com uma velocidade inicial **v** sendo que a distância percorrida durante a frenagem deve ser igual ou menor a **d**.

Para o grau de frenagem **f** define-se uma Função Característica (FC) que relaciona a(s) saída(s) (neste caso **f**) com as entradas (neste caso **v** e **d**):

$$f = f(v, d)$$

Espera-se que **f** deva crescer com o aumento de **v** e com a diminuição de **d**. Uma FC possível é apresentada na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Função Característica proposta para $f=f(v,d)$.

Discretizando-se esta função em dois níveis, para cada uma das variáveis relevantes, resulta a FCB (Função Característica Booleana) da Figura 3.2. Apesar de ter um comportamento global semelhante ao da função original, nota-se que a ela corresponderão frenagens bruscas.

Figura 3.2 – FCB com dois níveis para cada variável.

Aumentando-se o número de níveis para quatro, por exemplo, resulta a FCB da Figura 3.3.

Figura 3.3 - FCB com quatro níveis para cada variável.

Analisando-se as Tabelas Booleanas das Figuras 3.2 e 3.3, pode-se constatar que há uma expressão em forma de lógica sentencial (regra) para cada uma de suas linhas. Por exemplo:

- Se velocidade alta (A) e distância baixa (B) então frenagem alta (A);
- Se velocidade muito alta (AA) e distância muito baixa (BB) então frenagem muito alta (AA).

Obs: para 2 níveis, definiram-se as classes: B= baixa , A= alta;

para 4 níveis, definiram-se as classes: BB= muito baixa , BA= baixa, AB= alta e AA= muito alta.

Para cada uma destas regras, as asserções sobre as variáveis de entrada são denominadas *antecedentes* e as asserções sobre as variáveis de saída são os *consequentes*.

Desse modo, a Função Característica pode ser construída pela aplicação de operadores da Lógica Booleana (LB) para obtenção dos resultados desejados, nas classes definidas para as variáveis do processo.

Nota-se que as classes booleanas são disjuntas, isto é, para uma variável e num dado momento só é possível uma alternativa. Por exemplo:

$$\text{velocidade é Baixa} \Leftrightarrow v \in V_B = \{ v: |v| < 7,5 \} \quad \text{ou}$$

$$\text{velocidade é Alta} \Leftrightarrow v \in V_A = \{ v: |v| \geq 7,5 \} \quad \text{sendo } V_A = \overline{V_B}$$

Cada saída é obtida através da aplicação das seguintes etapas:

- (i) Digitalização das variáveis de entrada – Definição das classes às quais cada uma delas pertence;
- (ii) Aplicação das regras expressas pelas Tabelas Booleanas – Obtenção da classe a qual cada variável de saída pertence;
- (iii) Obtenção das saídas – Geração do valor correspondente à classe obtida em (ii), para cada variável saída.

A função resultante com apenas quatro níveis (Figura 3.3) distancia-se razoavelmente da FC proposta (Figura 3.1). Para uma melhor aproximação, pode-se aumentar o número de níveis. A seguir, será discutida uma alternativa para que se obtenha este resultado.

3.1.2 Função Característica Fuzzy

Na abordagem da Teoria Fuzzy, e contrariamente às FCB's, as classes das variáveis se interpenetram (classes Fuzzy). Em vista disto, podem-se ponderar os limites das variáveis (no exemplo **v**, **d**, e **f**) para obter a FCF (como será visto mais adiante).

Antes, considerar-se-á a seguinte interpretação para a interpenetração das classes: na Lógica Fuzzy (LF), uma dada variável pode pertencer a mais de uma classe num dado instante, e, para isto define-se um grau de pertinência de um elemento a um conjunto sobre um intervalo contínuo [0,1].

Na Teoria de Conjuntos Clássica, utilizada pela Lógica Booleana, um elemento ou pertence a um dado conjunto (grau de pertinência = 1), ou não pertence (grau de pertinência = 0). Na LF, relaciona-se o grau de pertinência com a confiança que se tem que uma dada asseveração irá,

ou não, se cumprir. Ao fazer-se a afirmação “o elemento x pertence ao conjunto X” o valor de pertinência retrataria a confiança que se tem de que esta asserção é verdadeira.

Na Figura 3.4 são apresentados exemplos de funções de pertinência da variável velocidade, para as classes Baixa e Alta.

Nesta mesma Figura são definidas as funções $\mu_A(v)$ e $\mu_B(v)$ que representam o grau de pertinência para cada valor de velocidade v , ao conjunto V_B (classe das velocidades baixas) e ao conjunto V_A (classe das velocidades altas).

Figura 3.4 – Funções de pertinência da variável velocidade, para as classes Baixa e Alta

Para o caso específico em que velocidade for igual a 9 (em unidade conveniente), por meio das funções $\mu_A(v)$ e $\mu_B(v)$, estabeleceu-se que:

- A velocidade é Baixa com grau de pertinência (confiança) 0,2;
- A velocidade é Alta com grau de pertinência (confiança) de 0,8.

São consideradas três classes no problema de frenagem proposto: B – Baixa, M – Média e A - Alta. Na figura 3.5 pode-se apreciar um exemplo de funções de pertinência para estas classes.

Figura 3.5 – Funções de Pertinência para v , d e f .

A saída, neste caso, é obtida por meio da realização das seguintes ações, divididas em etapas:

1. Fuzificação das variáveis de entrada – Definição dos graus de pertinência de cada variável de entrada às respectivas classes;
2. Aplicação das regras expressas pelas Tabelas Fuzzy – Obtenção dos graus de pertinência da variável de saída às suas respectivas classes;
3. Obtenção dos valores categóricos (crisp) das variáveis de saída - Defuzificação das variáveis de saída, gerando-se o valor numérico correspondente a partir dos resultados obtidos em (2).

Apresenta-se em seguida uma solução particular para o exemplo em estudo. Nesta, pode-se verificar a aplicação das etapas supracitadas. Seu detalhamento é apresentado na Tabela 3.1. Para sua interpretação, foi definida a legenda que se segue:

V – velocidade, D - distância, F – grau de frenagem, B – baixo, A – alto e M - média

Obs: os números entre parênteses ao longo dos próximos parágrafos referem-se aos agrupamentos de cálculos da Tabela 3.1, nela assinalados também entre parênteses.

E N T R A D A S													
	V	D			V	D			V	D			
crisp	9,5	8		li	B	4,00	4,0		B	0,00	0,00		
	(1)			mi	M	8,00	7,0	fuz	M	0,25	0,88		
				tes	A	10,00	15,0		A	0,75	0,13		
(2)						(3)							
R E G R A S													
se	V	D	então	F		V	D	míni mo	FB	FM	FA		
0	A	B		A		0,75	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		
1	A	M		M		0,75	0,88	0,75	0,00	0,75	0,00		
2	A	A		B		0,75	0,13	0,13	0,13	0,00	0,00		
3	M	B		M		0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		
4	M	M		B		0,25	0,88	0,25	0,25	0,00	0,00		
5	B	B		B		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		
(4)						(5)			(6)				
S A Í D A S													
	F				F		0	1	2	3	4	5	
crisp	38	(7)		li	B	10	F	0	37,5	1,3	0,0	2,5	0,0
	1,13			mi	M	50	(8)	fuz		(9)			
				tes	A	100							

Tabela 3.1 – Planilha Excel para Tabela Fuzzy.

(1) Entradas ($V=9,5$ e $D=8$, no exemplo)

(2) Limites (funções de pertinência) para as entradas, Figura 3.5

(3) Graus de pertinência (**Etapa 1**) para V e D . Exemplo:

$D=8 \Rightarrow D$ é Baixa com grau de pertinência 0

$D=8 \Rightarrow D$ é Média com grau de pertinência 0.88

$D=8 \Rightarrow D$ é Alta com grau de pertinência 0.13

(4) Regras (uma regra / linha)

(5) As variáveis de entrada (V e D) recebem os valores de (3), correspondentes aos antecedentes de cada regra, como também se obtém o mínimo entre eles para cada linha

(6) Os valores obtidos na coluna “mínimo” são transferidos às classes correspondentes aos conseqüentes de cada regra, da variável de saída – **Etapa 2**

(8) Limites (funções de pertinência) para a saída, Figura 3.5

(9) Cálculo da parcela da saída usando (6) e (8). Exemplo para a regra 4:

$$0,25 \times 10 + 0 \times 50 + 0 \times 100 = 2,5$$

(7) Cálculo da saída (**Etapa 3**)

$$F = \frac{\text{soma das colunas em (9)}}{\text{soma das colunas em (5)}} \cong \frac{42}{1,13} = 38$$

Para analisar a Etapa 2, será considerada a regra número 1 - ver (4) da Tabela 3.1 - isto é:

se a velocidade é Alta e a distância é Média então a frenagem é Média

Neste exemplo, e com os valores de entrada definidos (1), sabe-se que a velocidade é Alta com confiança 0,75 e que a distância é Média com confiança 0,88 (5). Resulta por esta regra, que a frenagem deve ser Média, mas com que confiança?

É razoável assumir-se que a confiança que se tem sobre o conseqüente de uma regra deve ser igual ao mínimo entre os graus de pertinência dos antecedentes (a menor confiança). O valor da coluna “mínimo” (5), resultante da aplicação desta conclusão (0.75, neste exemplo), é transferido para a classe “Média” da frenagem em (6), linha da regra 1, pois este é o conseqüente da regra que está sendo discutida.

Observe-se que diversas regras podem ser acionadas por vez (4), e que o valor da pertinência resultante para qualquer variável é contínuo entre zero e um (5).

Para obter-se a saída, os cálculos (9) e (7), da Etapa 3, usam o conceito de centro de gravidade: os graus de pertinência obtidos pela aplicação de cada regra são as massas (6), e os limites da função de pertinência da variável de saída são as posições (8) – ver Figura 3.6.

Figura 3.6 – Defuzzificação da saída.

As funções de pertinência (Etapas 1 e 3), a maneira de interpretar as regras (Etapa 2) e a maneira de gerar a saída (Etapa 3), podem ser definidas a partir de outros critérios e/ou estratégias [DRIANKOV & HELLENDORRN & REINFRANK-1996].

Por outro lado, deve-se lembrar que estas são Etapas intermediárias cujo objetivo relevante é a obtenção de uma FC adequada à solução de um dado problema.

Varrendo-se os diversos valores de entrada da Tabela 3.1, obtêm-se as saídas que compõe o gráfico da Função Característica Fuzzy obtida (Figura 3.7). Ela atua de modo “mais suave” que a sua versão digitalizada de dois ou de quatro níveis (Figuras 3.2 e 3.3).

Figura 3.7 – Função Característica Fuzzy.

Alterando-se os limites das classes e/ou o seu número, bem como as regras, resultará diferentes Funções Características. Na Tabela 3.2, é apresentada uma solução que utiliza a Lógica Fuzzy que é equivalente àquela obtida através da Lógica Booleana (2 níveis).

Estreitando-se as classes “Médias” de entrada (2), verifica-se que praticamente apenas uma regra é acionada por vez (4), e que o valor da pertinência resultante para qualquer variável é igual a zero ou igual a um (5). Estas são exatamente as características da Lógica Booleana e, desse modo, pode-se dizer que ela está contida na Lógica Fuzzy.

E N T R A D A S											
	V	D			V	D			V	D	
crisp	20	20		li	B	7,90	6,8		B	0,00	0,00
		(1)		mi	M	7,95	6,9	fuz	M	0,00	0,00
				tes	A	8,00	7,0		A	1,00	1,00
					(2)				(3)		
R E G R A S											
se	V	D	então	F	V	D	min.	FB	FM	FA	
0	B	B		B	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
1	B	A		B	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
2	A	B		A	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
3	A	A		B	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0,00	
			(4)			(5)			(6)		
S A I D A S											
	F				F		0	1	2	3	
crisp	10			li	B	10	F	0	0	0	10
	1,00			mi	M	50		fuz		(9)	
	(7)			tes	A	100					
					(8)						

Tabela 3.2 – Planilha Excel para Tabela Fuzzy com FCB.

3.1.3 Motivações para o uso das FCF's

É interessante analisar o número de Funções Características (NFC) que se pode obter através do uso da LF. O número de regras Fuzzy (NRN) possíveis (número de linhas da Tabela Fuzzy, ver Tabela 3.1, parte 4), para cada saída, é dado por:

$$\text{NRN} = (m)^{n_e}, \text{ onde:}$$

n_e = número de variáveis de entrada

m = número de classes (supondo o mesmo número para todas as variáveis)

Para o caso de 3 classes, 1 variável de saída e supondo que o valor central da classe “Média” pode variar entre 3 possibilidades (1/4, 1/2 e 3/4 da faixa disponível), tem-se:

$$\text{NFC} = 3^3 \text{NRN} = 3^3 \times 1 \times (3)^{3^3} \cong 2,1 \times 10^{14}$$

Obs: na Lógica Booleana de 4 níveis com 2 variáveis de entrada e uma de saída existem $(2^{16})^2 \cong 1,7 \times 10^{10}$ possibilidades para uma FC.

Percebe-se que, mesmo limitando-se as escolhas para as posições das classes, haverá um enorme número de possibilidades para a FC desejada, quando se utiliza a Lógica Fuzzy (LF) e esta característica estimula o seu uso.

Entretanto, esta variedade de opções é também motivo de crítica:

“Como definir a forma das funções de pertinência, o número de classes, seus limites, as regras e os métodos de conjunção das regras e de defuzificação?”.

Contudo, deve-se notar que esta liberdade de escolha provém em sua origem da flexibilidade que se tem em selecionar uma FC para um determinado problema. No caso do exemplo, a FC escolhida (Figura 3.1) tem uma grande dose de arbitrariedade.

Em geral, procuram-se funções lineares (ganhos e atenuações), devido à sua simplicidade e ao domínio teórico sobre os resultados. No caso de Sistemas Lineares: há soluções fechadas e completas, pode-se definir bases vetoriais ortogonais, os resultados são extensíveis a Sistemas Multidimensionais através de matrizes, as otimizações são globais, etc.

As FCF's são não lineares, pois, pelo menos, há saturações: níveis máximo e mínimo (ver como exemplo a Figura 3.7). Portanto, existem muitos resultados da “Teoria de Controle não Linear” que podem ser aproveitados para o estudo dos Controladores Fuzzy, sendo esta uma das direções das pesquisas em LF.

Talvez a principal motivação de se utilizar a LF provenha da generalização dos resultados vistos na seção 3.1.2. Para um problema qualquer, normalmente não é “tão simples” se propor uma FC adequada e, mais ainda, quando o número de variáveis de entrada é grande (>3) não é possível a representação gráfica/visualização da FC de modo direto.

Por outro lado, quase sempre é possível o levantamento de regras/opiniões de operadores ou especialistas humanos sobre um sistema, sobre uma máquina ou assunto específico. Mais ainda, a cada asserção considerada e/ou elaborada pelo especialista, sobre o problema, há uma confiança (ou grau de verdade) que pode variar entre totalmente errada ($=0$) e totalmente certa ($=1$).

Estas informações podem ser mapeadas pela LF, como visto na seção 3.1.2, obtendo-se assim, de forma indireta, FCF's cujas saídas tendem a ter um comportamento semelhante àsquelas geradas por ações humanas correspondentes, das quais se selecionam aquelas que conduzem a desempenhos “adequados”.

Finalmente, pode-se notar que os extremos das FCF's são definidos devendo ser fisicamente realizáveis: a aplicação da LF para obter uma FCF garante estes extremos, além de permitir uma passagem gradativa entre eles, e esta é também outra característica desejável para as FC's.

3.2 Controlador Fuzzy (CF)

3.2.1 Definições do CF

Com relação às aplicações sobre os Estudos de Caso desta Tese, importa também discutir a implementação de um CF do ponto de vista de sequência de etapas necessárias para, dadas as condições de entrada, obter a ação de saída ou, em outras palavras, realizar as inferências fuzzy.

O tipo de CF que será agora apresentado baseia-se no controlador clássico PID, mais precisamente PI, no qual são consideradas duas variáveis de entrada, quais sejam, o erro (e) e a “tendência” do erro (de). Também se considera uma variável de saída, que é a variação do sinal de atuação (du). Na Figura 3.8, apresenta-se a estrutura de um Sistema de Controle que utiliza este tipo de controlador.

Figura 3.8 – Controlador Fuzzy do tipo PI.

São realizados internamente todos os tratamentos de entrada e saída, (atrasos, somas, diferenças e ganhos), de modo que uma vez estabelecida a sequência de valores de erro (de), obtém-se os valores de ação (u). Nestas condições, para gerar o sinal de controle, deve-se somar o último valor da saída (u_{n-1}) ao valor de du resultante.

Para realizar a primeira etapa da obtenção das inferências fuzzy (saídas), vista em 3.2, necessita-se definir as partições de cada variável, **e**, **de** e **du**, além das funções de pertinência envolvidas (Figura 3.9).

Todas as variáveis foram normalizadas para o intervalo $[-1, 1]$ e, desta forma, para uma aplicação específica, os ganhos **ge**, **gde** e **gu** devem ser ajustados para relacionar as faixas reais de cada variável com este intervalo.

Figura 3.9 – Partição das classes e funções de pertinência para as variáveis **e**, **de** e **du**.

Na referência [DRIANKOV & HELLENDORRN & REINFRANK-96] há um estudo extenso sobre os CF's, no qual está baseado o exemplo de um CF do tipo PI. A operação deste controlador baseia-se na FCF apresentada na Tabela 3.3 e que relaciona **du** com **e** e **de**.

$e \rightarrow$ $de \downarrow$	NB	NS	ZE	PS	PB
NB	PB	PB	PS	PS	ZE
NS	PB	PS	PS	ZE	NS
ZE	PS	PS (1)	ZE (2)	NS	NS
PS	PS	ZE (3)	NS (4)	NS	NB
PB	ZE	NS	NS	NB	NB

Tabela 3.3- Tabela de valores de **du**.

O equilíbrio que se espera atingir corresponde ao centro da Tabela 3.3 (diagonal indicada). Os demais zeros significam que, apesar do sistema estar fora do equilíbrio desejado ($e \equiv ZE$), a tendência do erro (**de**) é de corrigir o sistema. Por exemplo:

*Se o erro (**e**) é um pouco negativo (NS) e a tendência do erro (**de**) é de aumentar positivamente um pouco (PS) então a variação da ação de controle (**du**) deve ser zero (ZE).*

Para cima da diagonal, a ação de controle (**du**) é ativada, observando-se que, quanto mais distante da diagonal, maior e mais positiva será esta ação. Por exemplo:

*Se o erro (**e**) é muito negativo (NB) e a tendência do erro (**de**) é de diminuir mais um pouco (NS) então a variação da ação de controle (**du**) deve ser corrigida com um grande aumento positivo (PB).*

Finalmente, tomando-se por base a diagonal traçada na Tabela 3.3, a parte inferior desta Tabela é simétrica com relação à sua parte superior, isto é, em módulo da variável **du** atua-se da mesma forma para estas duas regiões. Por exemplo:

Se o erro é muito positivo (PB) e a tendência do erro é de aumentar um pouco (PS) então a variação da ação de controle deve ser corrigida com um grande aumento negativo (NB).

3.2.2 Processamento Fuzzy

A seguir, são detalhadas as etapas do Processamento Fuzzy para obtenção da ação de saída, dadas as condições de entrada.

Etapas 1:

Para cada amostragem, verifica-se o grau de pertinência das variáveis de entrada **e** e **de**, a cada uma das classes (valores lingüísticos) possíveis, Figura 3.10.

Figura 3.10 - Pertinência das entradas às suas classes.

Etapla 2:

Com os valores lingüísticos e as pertinências de cada entrada, verificam-se quais regras de inferência são disparadas. No exemplo, marcamos as regras acionadas (Tabela 3.3) com os números entre parênteses de (1) a (4).

O grau de veracidade de cada uma das inferências é obtido por meio do cálculo do mínimo dos graus de pertinência das entradas (interseção padrão para operadores do tipo T-norma Triangular), sendo a classe da variável de saída aquela da própria regra acionada (Figura 3.11).

Figura 3.11 – Disparo das Regras.

Etapas 3:

A conjunção (padrão) das conclusões consiste em tomar o valor máximo (união padrão para operadores do tipo T-conorma Triangular) entre os obtidos. Deve-se proceder desta forma para cada classe de variável de saída. Tal resultado é apresentado na Figura 3.12.

Figura 3.12 – Conjunção das conclusões e defuzzificação.

Etapa 4:

A defuzificação de variável de saída é a última etapa. Para esta adota-se o método de cálculo pelo centro de gravidade da figura obtida na etapa anterior:

$$du = \frac{\int_{-1}^1 xf(x)dx}{\int_{-1}^1 f(x)dx} \approx -0,2$$

Esta sequência de etapas de processamentos define, ou melhor, aproxima a função FCF: $correção = f(erro, desvio do erro)$, sendo $du \equiv correção$ (variação da ação de controle).

3.3 Técnica para definição de uma FCF

Discute-se, a seguir, um caso simples, correspondente à função FCF $correção = f(erro)$ da Figura 3.13, para descrever a técnica utilizada nesta Tese para a definição de uma FCF.

Figura 3.13 – Aproximação da função $correção = f(erro)$ com $du \equiv correção$.

Fixa-se experimentalmente um ponto da curva desta função pelas coordenadas dos centros das funções de pertinência referentes a cada regra fuzzy que relaciona uma classe do eixo horizontal com uma classe do eixo vertical.

A interpolação para valores da variável de entrada diferentes dos centros das funções de pertinência é obtida automaticamente pelas Etapas descritas na seção 3.2.2 e corresponde à “ponderação” ou “mistura” das regras que foram acionadas, Figuras 3.6 e 3.12.

Alterando a posição, o número, o tipo das funções de pertinência e as regras fuzzy, definem-se a forma da função FCF desejada, ou seja, determina-se a atuação a ser realizada. Observe-se, como descrito na seção 3.1.3, que, basicamente, o que se está mapeando é o comportamento de operadores humanos por meio das regras fuzzy.

Não é necessário para uma FCF que uma de suas variáveis de entrada esteja explicitamente ligada a um erro, como foi o caso da Figura 3.13. No exemplo da Figura 3.7, a FCF que define o grau de frenagem não está ligada a um erro específico e o que se busca é um equilíbrio entre uma parada suave e a segurança de não se aproximar demasiadamente de um obstáculo (conceitos tipicamente fuzzy).

Nos próximos capítulos, diversas Funções Características Fuzzy, ligadas ou não diretamente a um erro, serão modeladas com o objetivo de fixar trajetórias nos seguintes sistemas caóticos: Bilhar Circular perturbado (capítulo 4), Bilhar Newtoniano de Garms e Andrade (capítulo 5) e circuito de Chua (capítulo 6).

3.4 Reconhecimento de Padrões

Nesta seção, discute-se um exemplo prático e sua solução utilizando algoritmo fuzzy para Reconhecimento de Padrões.

O problema aqui proposto tem por objetivo detectar, através da medida de parâmetros que definem a qualidade de um par metálico telefônico, as possíveis ações para operacionalizar o serviço ADSL (*Asymmetric Digital Subscriber Lines* – utilizado na transmissão de dados de banda larga pela Internet) no par selecionado, [GARMS & TOZZE & FERNANDES - 2003].

Classificou-se um terminal telefônico por meio dos seguintes tipos básicos:

1. Sem restrições;
2. Localizar e retirar paralelos;
3. Substituir a menor bitola;
4. Indisponível.

Os parâmetros selecionados para classificar os padrões de cada tipo de perfil foram os seguintes:

- Resistência do par metálico;
- Capacitância do par metálico.

Fuzificação das variáveis de entrada

A seguir, apresenta-se a Tabela 3.4 na qual são definidos os centros das partições das variáveis de entrada.

	R[Ω]	C[nF]
B	500	50
M	1000	100
A	1500	150

Tabela 3.4 – Variáveis de entrada.

Regras de Inferência Fuzzy

Nas Tabelas 3.5 são apresentadas as regras de inferência fuzzy utilizadas.

Disponíveis					Recuperáveis (Bitola)				
<u>se</u>	<u>R</u>	<u>C</u>	<u>então</u>	<u>D</u>	<u>se</u>	<u>R</u>	<u>C</u>	<u>então</u>	<u>RB</u>
	B	B		A		A	B		B
	B	M		M		A	M		B
	B	A		B		A	A		B
	M	B		M		M	B		A
	M	M		B		M	M		M
	A	B		B		M	A		M
Recuperáveis (Paralelos)					Indisponíveis				
<u>se</u>	<u>R</u>	<u>C</u>	<u>então</u>	<u>RP</u>	<u>se</u>	<u>R</u>	<u>C</u>	<u>então</u>	<u>I</u>
	B	M		M		M	B		B
	B	A		A		M	M		M
	M	M		A		M	A		M
	M	A		A		A	B		M
	A	M		M		A	M		A
	A	A		B		A	A		A

Tabelas 3.5 – Regras de Inferência Fuzzy.

Defuzzificação das variáveis de saída

Apresentam-se, na Figura 3.14, os padrões de par metálico para serviço ADSL obtidos varrendo-se os diversos valores das variáveis de entrada da Tabela 3.4 e calculando-se o grau de confiança de cada padrão, de acordo as Tabelas 3.5 e com o descrito na seção 3.1.2.

Figura 3.14 - Padrões de par metálico para serviço ADSL.

3.5 Bibliografia Comentada

Recomenda-se o texto [KLIR & CLAIR & YUAN - 97] para uma introdução à teoria dos conjuntos nebulosos e à lógica fuzzy. Textos com tratamento formal extenso e mais detalhado sobre estas teorias podem ser encontrados em [KLIR & YUAN - 95] e em [YAGER & FILEV-94].

A referência [RABUSKE-95] apresenta uma visão mais abrangente, voltada para o desenvolvimento e aplicação de métodos heurísticos para solução de problemas. Além da lógica clássica, apresenta outras, tais como: lógica de 3-valores, de Kleene, de Lukasiewicz, de Bochvar, modal, intuicionista e fuzzy.

Um estudo sobre a aplicação da Lógica Fuzzy aos controladores fuzzy convencionais pode ser encontrado em:

- [MAEDA & SATO & MURAKAMI-90] - controlador nebuloso supervisor sobre controlador PID;
- [QIN & BORDERS-94]- controlador nebuloso tipo PI / não linear;
- [GALICHET & FOULLOY-95] - método de projeto de controladores nebulosos;
- [KIM & CHO & PARK-96]- projeto de controlador nebuloso adaptativo;
- [YEN & DAUGHERITY & WANG & RATHAKRISHNAN-95] - controle adaptativo supervisor nebuloso aplicado a controladores PID com estudos de casos;
- [MUSKINJA & TOVORNIK & DONLANGIÉ-97] - controle adaptativo baseado em controlador nebuloso supervisor;
- [ARBEX - 96] - conceitos básicos da teoria de conjuntos e lógica fuzzy para o desenvolvimento de controladores fuzzy;
- [PREDEBON & ANDRADE - 2000] – apresenta reconhecedor de padrões fuzzy aplicado a sistemas de telecomunicações.

Uma síntese destas técnicas encontra-se nos livros: [ORDÓÑEZ & ZUMBERGE & SPOONER & PASSINO-97] - controle adaptativo nebuloso baseado técnicas de sistemas não lineares; [PALM & DRIANKOV & HELLENDORRN-96] - modelos de controle nebuloso com estudo de estabilidade, desempenho e robustez; [DRIANKOV & HELLENDORRN & REINFRANK-96] e [PASSINO & YURKOVICH-97] - textos extensos sobre controladores nebulosos, supervisor, PID's, controle adaptativo, controle não linear e estabilidade em sistemas SISO E MIMO, critério do círculo, e [WANG-97] teoria de controle nebuloso adaptativo e não adaptativo.

O critério do círculo para estabilidade em controladores fuzzy foi aplicado na Dissertação de Mestrado [GARMS & ANDRADE - 2001].

Em [KOSKO-97] deu-se ênfase na aproximação de funções usando a teoria fuzzy, como discutido na seção 3.2.

Aspectos mais gerais sobre controladores não lineares podem ser estudados em [KAPITANIAK-2000]. Os conceitos de dinâmica não linear, aplicados a sistemas reais, são apresentados em [STROGATZ-94]. A teoria sobre dinâmica não linear e caos, particularmente sobre bifurcações, fluxos, plano de fase, círculos limites, Mapas de Poincaré, fractais e atratores estranhos, pode ser visto em [KHALIL-96]. Este último se trata de um texto abrangente e profundo sobre métodos e técnicas em controle não linear, que inclui a estabilidade de Lyapunov e a L2 estabilidade entre outros temas.

4. Bilhar Circular

Neste capítulo verifica-se por meio de simulações em bilhares circulares a adequação do uso da modelagem fuzzy na fixação de trajetórias em sistemas conservativos e caóticos - ver bloco 8, Figura 2.2 – assumindo-se que se trata de um Controle Fuzzy de Caos Hamiltoniano.

Neste capítulo estuda-se o controle fuzzy do caos de um Sistema Dinâmico Conservativo (o Bilhar Circular) de acordo com o proposto na seção 4 do capítulo 1. Pode-se perceber que se trata de uma aplicação dos SDFE's, conforme explanado anteriormente. São discutidas e analisadas a definição, a implementação, a caracterização e o controle do bilhar circular, para, em seguida, relacionar-se com as conclusões obtidas nas simulações realizadas.

4.1 Definição do BC

Os bilhares foram desenvolvidos para o estudo do comportamento caótico de sistemas conservativos [BERRY-1981]. Por serem relativamente simples, se comparados com sistemas reais, consegue-se impor mais facilmente situações nas quais comprovam-se previsões teóricas.

Em particular, o BC é definido pela circunferência:

$$r(\varphi) = cte \quad (= 1 \text{ por normalização}) \quad (4.1)$$

Considerando-se uma perturbação $\varepsilon \approx 0$ o BC fica definido pela equação:

$$r(\varphi) = 1 + \varepsilon \cos \varphi \quad (4.2)$$

O foco está no movimento, restrito ao interior desta curva limite, de uma partícula cujo módulo de sua velocidade é constante.

Tal movimento é composto por trechos de reta que mudam de direção a cada vez que a partícula toca a fronteira, expressão (4.2), sendo que, em cada choque elástico, os ângulos reflexão e de incidência (α) são iguais, Figura 4.1.

Este sistema dinâmico é do tipo conservativo, devido ao fato das colisões serem elásticas implicando, portanto, na conservação de energia.

Figura 4.1 – Órbita no espaço de configuração do BC perturbado.

A seção de Poincaré foi estabelecida [BERRY-1981] como sendo a própria curva da equação (4.2), sendo as coordenadas do espaço de fase assim definidas:

- s : A posição ao longo da curva limite a partir de uma origem e com o perímetro normalizado com o valor igual a 1;
- p : O co-seno do ângulo α de incidência considerado com relação à tangente à curva no ponto de choque.

Supondo a massa da partícula unitária como também o módulo de sua velocidade, como este módulo não é alterado pelos choques, resulta $p_{\text{tang}} = m|\vec{v}| \cos \alpha = \cos \alpha$ para a projeção, sobre a tangente à curva no ponto de choque, da quantidade de movimento da partícula. Esta é a razão para selecionar-se $\cos \alpha$ como uma das coordenadas do espaço de fase.

4.2 Implementação do BC - Algoritmos para simulação

4.2.1 Choque elástico no BC sem perturbação

Nesta seção, será descrito o Algoritmo para obtenção da velocidade de uma partícula em movimento plano após choque elástico sobre o círculo de raio R .

Figura 4.2 – Transformação de sistema de coordenadas: de $x'Oy'$ para xOy .

Considere-se a Figura 4.2, onde:

- v e w : são respectivamente as velocidades de aproximação e de afastamento do círculo de raio R sendo $v = (v_x, v_y)$ e $w = (w_x, w_y)$;
- P : ponto no qual ocorre o choque e de coordenadas x_P e y_P sendo $R = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$;
- O : centro do círculo;
- xOy : sistema de coordenadas retangular preestabelecido do espaço de configuração com os versores i e j correspondentes respectivamente aos eixos Ox e Oy ;
- $x'Oy'$: sistema de coordenadas retangular do espaço de configuração com os versores i' e j' correspondentes respectivamente aos eixos Ox' e Oy' obtidos pela rotação de um ângulo θ dos eixos Ox e Oy de tal modo que o segmento OP fique pertencendo ao eixo Ox' .

Impõe-se que o choque, sobre o círculo que define o BC, seja elástico para calcular a velocidade imediatamente após a ocorrência do choque $\vec{w}$ em função velocidade incidente $\vec{v}$.

As coordenadas do ponto P ficam então definidas pelas expressões:

$$P - O = x i + y j = x' i' + y' j' \quad (4.3)$$

Sendo T_θ a matriz da transformação de rotação entre os sistemas de coordenadas $x'Oy'$ e xOy , pode-se escrever:

$$T_\theta = \begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta \\ S_\theta & C_\theta \end{bmatrix} \text{ pois } T_\theta i = T_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\theta \\ S_\theta \end{pmatrix} = i' \text{ e } T_\theta j = T_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S_\theta \\ C_\theta \end{pmatrix} = j' \quad (4.4)$$

Substituindo-se (4.4) em (4.3) resulta:

$$P - O = x' T_\theta i + y' T_\theta j = T_\theta x' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + T_\theta y' \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T_\theta \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

ou $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T_{-\theta} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow v' = T_{-\theta} v$ com $T_{-\theta} = \begin{bmatrix} C_{-\theta} & -S_{-\theta} \\ S_{-\theta} & C_{-\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta & S_\theta \\ -S_\theta & C_\theta \end{bmatrix} \quad (4.5)$

O vetor velocidade incidente v então é descrito no sistema de coordenadas $x'Oy'$ por:

$$v' = \begin{bmatrix} v_x' \\ v_y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta & S_\theta \\ -S_\theta & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta v_x + S_\theta v_y \\ -S_\theta v_x + C_\theta v_y \end{bmatrix}$$

Neste sistema de coordenadas, o vetor velocidade refletida w corresponde a inverter a coordenada x' do vetor velocidade incidente v , isto é:

$$w' = \begin{bmatrix} -v_x' \\ v_y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_\theta v_x - S_\theta v_y \\ -S_\theta v_x + C_\theta v_y \end{bmatrix}$$

Finalmente, para obter o vetor velocidade refletido w no sistema de coordenadas xOy basta aplicar a transformação de sistema de coordenadas de $x'Oy'$ para xOy , isto é, T_θ :

$$w = T_\theta w' = \begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta \\ S_\theta & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C_\theta v_x - S_\theta v_y \\ -S_\theta v_x + C_\theta v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (S_\theta^2 - C_\theta^2)v_x - 2S_\theta C_\theta v_y \\ (C_\theta^2 - S_\theta^2)v_y - 2S_\theta C_\theta v_x \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} S_\theta^2 - C_\theta^2 & -2S_\theta C_\theta \\ -2S_\theta C_\theta & C_\theta^2 - S_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Usando as identidades trigonométricas $S_{2\theta} = 2S_\theta C_\theta$ e $C_{2\theta} = C_\theta^2 - S_\theta^2$, resulta:

$$w = \begin{bmatrix} -C_{2\theta} & -S_{2\theta} \\ -S_{2\theta} & C_{2\theta} \end{bmatrix} v \quad (4.7)$$

Ou, ainda, com os valores de seno e co-seno de θ dados por:

$$S_\theta = \frac{y_P}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}} = \frac{y_P}{R} \text{ e } C_\theta = \frac{x_P}{R}$$

Pode-se escrever:

$$2 S_{\theta} C_{\theta} = \frac{2x_P y_P}{R^2} \quad \text{e} \quad S_{\theta}^2 - C_{\theta}^2 = \frac{y_P^2 - x_P^2}{R^2}$$

Substituindo-as em (4.6) tem-se:

$$w = \begin{bmatrix} \frac{y_P^2 - x_P^2}{R^2} & -\frac{2x_P y_P}{R^2} \\ -\frac{2x_P y_P}{R^2} & \frac{x_P^2 - y_P^2}{R^2} \end{bmatrix} v \quad (4.8)$$

Deve-se notar que para calcular-se (4.8) são necessários apenas os valores de x_P , y_P , R , v_x e v_y . Então, o Algoritmo para o BC fica sendo o seguinte:

- (i) $x \leftarrow x + v_x \Delta t$; $y \leftarrow y + v_y \Delta t$. // calcula próximo o ponto da órbita
- (ii) Se ocorreu choque obter x_P e y_P , coordenadas do choque, e usar as expressões (4.8) para calcular a velocidade refletida w a partir do vetor velocidade incidente v e a seguir realizar as atribuições $x \leftarrow x_P$, $y \leftarrow y_P$, $v_x \leftarrow w_x$ e $v_y \leftarrow w_y$.
- (iii) Avançar o tempo de um incremento de Δt segundos.
- (iv) Repetir indefinidamente a seqüência de (i) a (iii).

Algoritmo 4.1 - Movimento do BC sem perturbação.

A detecção do choque e a obtenção das coordenadas do ponto deste evento serão discutidas na seção 4.2.3.

4.2.2 Choque elástico no BC com perturbação

Este problema é semelhante ao tratado na seção 4.2.1, sendo a diferença principal a de que a fronteira em que ocorre o choque não é um círculo perfeito.

Nestas condições, esta fronteira, Figura 4.3, é descrita pela equação polar $r(\varphi)$ que, para o caso do BC, é dada por:

$$r = r(\varphi) = 1 + \varepsilon \cos \varphi \quad (4.9)$$

onde para um ponto da fronteira P , definido por (X_P, Y_P) no sistema de coordenadas XOY preestabelecido do espaço de configuração, pode-se escrever:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{e} \quad \varphi = \arctan Y/X \quad (4.10)$$

Para se obter o vetor velocidade refletida $\vec{w}$ a partir do vetor velocidade incidente $\vec{v}$ no ponto P , é necessário considerar o círculo osculador da curva $r(\varphi)$ sobre este ponto. Isto corresponde a calcular as coordenadas do ponto C do centro deste círculo, Figura 4.3. O raio deste círculo osculador é igual ao módulo do vetor $P-C$ desta Figura.

Figura 4.3 – Coordenadas de P no sistema de referência xCy .

Deste modo o problema é resolvido no sistema de coordenadas xCy , com os eixos paralelos aos do sistema XOY , exatamente como na seção 4.2.1, por meio da expressão (4.8). No entanto, para este caso deve-se considerar para raio do círculo o valor dado pela expressão $R = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$, o que substituído em (4.8) resulta:

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} \frac{y_p^2 - x_p^2}{R^2} & -\frac{2x_p y_p}{R^2} \\ -\frac{2x_p y_p}{R^2} & \frac{x_p^2 - y_p^2}{R^2} \end{bmatrix} \vec{v}, \quad R = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \quad (4.11)$$

Como as coordenadas medidas nos sistemas XOY e xCy diferem entre si apenas pelo vetor constante $O-C$ então o valor da velocidade $\vec{w}$ tem o mesmo valor em ambos.

Pode-se constatar por inspeção da Figura 4.3 que o valor das coordenadas de P no sistema de referência xCy podem ser obtidos pela expressão:

$$(x_p, y_p) = -n = -\frac{d^2}{d\varphi^2}(r(\varphi)C_\varphi, r(\varphi)S_\varphi) \quad (4.12)$$

sendo $r(\varphi)$ dado por (4.9).

Calculando-se (4.12) a partir de (4.9) e (4.10), obtém-se:

$$x_P = -\frac{d^2}{d\varphi^2} r C_\varphi = -\frac{d^2}{d\varphi^2} (1 + \varepsilon C_\varphi) C_\varphi = C_\varphi - 2\varepsilon (C_\varphi^2 - S_\varphi^2) \quad (4.13)$$

e

$$y_P = -\frac{d^2}{d\varphi^2} r S_\varphi = -\frac{d^2}{d\varphi^2} (1 + \varepsilon C_\varphi) S_\varphi = S_\varphi + 2\varepsilon (C_\varphi^2 - S_\varphi^2) \quad (4.14)$$

$$\text{sendo } C_\varphi = \frac{X_P}{\sqrt{X_P^2 + Y_P^2}} \text{ e } S_\varphi = \frac{Y_P}{\sqrt{X_P^2 + Y_P^2}} \quad (4.15)$$

A evolução do movimento é obtida a partir do Algoritmo 4.2 sendo que, antes de executá-lo, define-se a condição inicial pelas atribuições de $X \leftarrow X_0$, $v_x \leftarrow v_{x0}$, $Y \leftarrow Y_0$, $v_y \leftarrow v_{y0}$ e $t \leftarrow 0$.

- (i) $X \leftarrow X + v_x \Delta t$; $Y \leftarrow Y + v_y \Delta t$. // calcula próximo o ponto da órbita
- (ii) Se ocorreu choque obter X_P e Y_P , coordenadas do choque, e usar as expressões (4.15), (4.13), (4.14) e (4.11) para calcular a velocidade refletida w a partir do vetor velocidade incidente v e a seguir, realizar as atribuições $X \leftarrow X_P$; $Y \leftarrow Y_P$; $v_x \leftarrow w_x$; $v_y \leftarrow w_y$.
- (iii) Avançar o tempo de um incremento de Δt segundos.
- (iv) Repetir indefinidamente a seqüência de (i) a (iii).

Obs: A órbita é formada pela seqüência de pontos (X, Y) obtida a cada iteração.

Algoritmo 4.2 - Movimento do BC com perturbação.

4.2.3 Detecção do choque

Para a detecção e tratamento deste choque deve-se solucionar o seguinte sistema de equações (ver Figura 4.4):

$$\sqrt{X_P^2 + Y_P^2} = 1 + \varepsilon \cos \left(\arctg \frac{Y_P}{X_P} \right) \quad (4.16)$$

$$Y_P = \frac{v_y}{v_x} X_P + \left(Y_I - \frac{v_y}{v_x} X_I \right), (X_I, Y_I) \text{ coordenadas do último choque}$$

Figura 4.4 – Algoritmo para detecção do choque.

Para $\varepsilon = 0$ o sistema (4.16) pode ser solucionado substituindo-se a 2ª equação na 1ª, o que resulta numa equação do 2º grau em X_P .

Entretanto, caso $\varepsilon \neq 0$, este sistema deve ser solucionado numericamente, tarefa que é realizado pelo Algoritmo 4.3 aqui proposto. Para que se possa identificar as variáveis utilizadas recomenda-se que se consulte a Figura 4.4.

Este Algoritmo foi usado tanto para o círculo sem perturbação ($\varepsilon = 0$) como para com perturbação ($\varepsilon \neq 0$).

- (i) Calcular $X \leftarrow X + v_x \Delta t$ e $Y \leftarrow Y + v_y \Delta t$. // calcula próximo ponto da órbita
- (ii) Executar:
- (a) $d \leftarrow \sqrt{X^2 + Y^2}$; $C_{-\varphi'} \leftarrow \frac{X}{d}$; // $(X, Y) \equiv$ ponto Q (Figura 4.4)
- $r' \leftarrow (1 + \varepsilon C_{-\varphi'})$ // $(r', \varphi') \equiv$ ponto P' (idem)
- (b) se $d > r'$ // se ocorreu choque
- (c) $\Delta = \Delta t$
- (d) enquanto $(|d - r'| > 10^{-6})$ e $(|\Delta| > 10^{-7})$ // busca binária do ponto de choque
- (e) se $(d < r)$ faça $\Delta \leftarrow \frac{\Delta}{2}$ senão $\Delta \leftarrow -\frac{\Delta}{2}$
- (f) $X \leftarrow X + v_x \Delta$; $Y \leftarrow Y + v_y \Delta$;
- $d \leftarrow \sqrt{X^2 + Y^2}$; $C_{-\varphi'} \leftarrow \frac{X}{d}$; $r' \leftarrow (1 + \varepsilon C_{-\varphi'})$
- (g) fim enquanto // $(X, Y) \equiv$ solução de 4.16
- (h) $X_{P'} \leftarrow \frac{X(1 + \varepsilon C_{-\varphi'})}{d}$; $Y_{P'} \leftarrow \frac{Y(1 + \varepsilon C_{-\varphi'})}{d}$;
- (h*) $X_P \leftarrow X_{P'}$; $Y_P \leftarrow Y_{P'}$ // para garantir (X_P, Y_P) no círculo
- (j) usar as expressões (4.15), (4.13), (4.14) e (4.11) para obter velocidade refletida w a partir do vetor velocidade incidente v e a seguir realizar as atribuições $X \leftarrow X_P$, $Y \leftarrow Y_P$, $v_x \leftarrow w_x$ e $v_y \leftarrow w_y$.
- (k) fim se
- (iii) Avançar o tempo de um incremento de Δt segundos.
- (iv) Repetir indefinidamente a seqüência de (i) a (iii).

Obs: os valores de ε , Δt são inicializados na chamada do programa e são da ordem de 0,1 e 0,0001.

Algoritmo 4.3 - Movimento do BC (completo) com e sem perturbação, com detalhamento da detecção do choque e da determinação das coordenadas (X_P, Y_P) deste evento.

O item (ii) do Algoritmo 4.3 corresponde ao detalhamento do mesmo item do Algoritmo 4.2. Neste são realizadas a detecção do choque e a determinação das coordenadas (X_P, Y_P) deste evento.

Considerando-se uma iteração antes da ocorrência do choque, a partícula encontra-se no ponto R da Figura 4.3, interno ao círculo. O próximo ponto da trajetória, ponto Q , está deslocado $\vec{v}\Delta t$ do ponto anterior R e, nestas condições, é exterior ao círculo perturbado.

A condição de choque é então escrita como $d = |Q-O| > |P'-O| = r'$, sendo o ponto P' correspondente ao cruzamento da reta $Q-O$ com o círculo perturbado. Tal é o teste utilizado na linha (b) do Algoritmo 4.3 para verificar-se esta ocorrência.

As linhas de comando (d) a (g) deste Algoritmo compõem uma busca binária para se obter as coordenadas do ponto de choque, ponto P : escolhe-se o ponto médio do segmento definido pelo último e penúltimo pontos da sequência (o segmento $Q-R$ para a primeira iteração após o choque). Isto deve ser feito na direção $-\vec{v}$, caso o ponto resultar exterior, e na direção de $\vec{v}$, caso o ponto resultar interior ao círculo.

A cada iteração, o ponto escolhido se aproxima de P . Quando o erro, $|d - r'|$, for menor que 10^{-6} ou o incremento Δ for menor que 10^{-7} , o processo é finalizado (ver linha (d) do Algoritmo 4.3).

É importante que o ponto obtido para o choque pertença ao círculo perturbado, pois nas próximas iterações a órbita continuaria evoluindo para fora deste círculo caso tivesse resultado exterior ao círculo!

Para visualizar como está última condição será assegurada, considera-se o ponto Q (exterior) como o ponto resultante final da busca binária acima descrita. Segue, pela execução da linha de comando (h) deste mesmo Algoritmo, que a partir do ponto Q obtém-se o ponto P' (Figura 4.4). Logo o ponto resultante P' pertence ao círculo perturbado, pois, usando as expressões impostas pela linha de comando (h), pode-se escrever:

$$r' = \sqrt{X_{P'}^2 + Y_{P'}^2} = \sqrt{\left(\frac{X(1 + \varepsilon C_{-\phi'})}{(\sqrt{X^2 + Y^2})}\right)^2 + \left(\frac{Y(1 + \varepsilon C_{-\phi'})}{(\sqrt{X^2 + Y^2})}\right)^2} = 1 + \varepsilon C_{-\phi'} \Rightarrow P' \in \text{circulo}$$

Pela linha (h^*) do Algoritmo 4.3 (e por aproximação) se estabelece o ponto de choque P como sendo igual a P' obtido no passo anterior. É deste modo que se garante que o ponto de choque obtido pertença ao círculo perturbado (o erro resultante pode ser avaliado de acordo com a linha (d) do Algoritmo, como sendo: $erro = |P-P'| \approx 10^{-6}$).

4.3 Caracterização do BC

4.3.1 BC não perturbado

Na Figura 4.5, apresenta-se a seção de Poincaré obtida por meio de programa escrito em C++, de acordo com o Algoritmo 4.3 (veja também o Algoritmo 4.4), para simular o BC. Para esta Figura, a perturbação é nula, isto é, o valor de ε é igual a zero.

Figura 4.5 – Mapa de Poincaré ($s \times p$) para $\varepsilon = 0$.

Se o ângulo α for submúltiplo de 180° , a órbita será fechada formando uma figura regular com $\eta = \pm 180^\circ / \alpha$ pontos de contato com a fronteira. Por exemplo, para $\eta = \pm 3$, a figura obtida no espaço de configuração é a de um triângulo.

Os dois conjuntos de três pontos alinhados horizontalmente em $p = 0,5$ e em $p = -0,5$ no espaço de fase, Figura 4.5, correspondem a órbitas em forma de triângulo no espaço de configuração, sendo o movimento da partícula no sentido horário e anti-horário respectivamente.

Caso o módulo de η seja um número irracional, os pontos isolados do caso anterior preencherão os segmentos de retas horizontais: veja os dois exemplos em p pouco acima de $0,5$ e em p pouco abaixo de $-0,5$ da Figura 4.5 e que correspondem a movimentos no sentido horário e anti-horário respectivamente.

Devido à simetria da figura obtida nos extremos do eixo horizontal (0 e 1), pode-se considerá-los unidos. Forma-se, assim, um cilindro e, nestas condições, tais segmentos de reta horizontal da Figura 5 passam a serem vistos como “círculos”.

4.3.2 BC perturbado

Com o parâmetro ε um pouco acima de zero, Figura 4.6, surgem ovais em torno de pontos como, por exemplo, em (s, p) igual a $(0, 0)$ ou $(0,5; 0)$ ou $(0,3; -0,5)$ e outros. O conjunto destas ovais em torno de cada ponto central é denominado ilha.

Figura 4.6 – Mapa de Poincaré $(s \times p)$ para $\varepsilon = 0,05$.

No sentido horizontal entre as ilhas aparecem regiões com comportamento caótico, havendo certo emaranhamento das curvas nesta região. Este comportamento é previsto pelo teorema de Poincaré-Birkhoff, [KORSH & LANG - 1991] e [MONTEIRO - 2006].

Mais distante verticalmente do centro das ilhas distinguem-se curvas fechadas (considerando o mapa na forma de um cilindro) que estão relacionadas aos valores irracionais de η . Note que os “círculos”, discutidos na seção anterior para o caso em que não há perturbação ($\varepsilon = 0$), também correspondem a valores irracionais de η .

Quando se passa de $\varepsilon = 0$ para $\varepsilon \neq 0$ prova-se que, para alguns valores irracionais de η , os “círculos” (Figura 4.5) transformam-se nas curvas fechadas (Figura 4.6), distorcidas com relação à forma circular original. A preservação de curvas fechadas com ε “suficientemente” irracional constitui o teorema KAM, [KORSH & LANG - 1991] [MONTEIRO - 2006].

Para valores de ε maiores “cresce o número de curvas irracionais que são destruídas” com o conseqüente aumento das regiões com comportamento caótico e correspondente diminuição do número de ilhas (Figura 4.7).

Figura 4.7 – Mapa de Poincaré ($s \times p$) para $\varepsilon = 0,3$.

4.4 Controle do BC

4.4.1 Descrição do controle

Para fixar uma órbita específica no BC perturbado, definiu-se o controle descrito a seguir. A Figura 4.8 corresponde a um BC controlado no qual se distingue a reta tangente à fronteira do bilhar em um dos pontos de choque.

O elemento “rebatedor” desta Figura é posicionado ao longo da linha tracejada, parte do contorno do círculo perturbado – equação 4.2, e só atua nesta janela. A janela de controle para os testes foi definida para φ na faixa entre -15° e $+15^\circ$ com relação ao centro do círculo, sendo 0° correspondente ao ponto O .

Este elemento pode ser girado com relação à tangente de certo ângulo $\Delta\alpha$, de modo a dirigir a órbita para torná-la fechada, como também para passar próxima aos pontos O e P .

Figura 4.8 – Órbita do BC com controle.

Para tal, na iminência de cada choque, coordenada s (correspondente ao ângulo φ) e, pela posição original da tangente, avaliam-se:

- O ponto em que ocorrerá o choque seguinte, coordenada s_+ ($\equiv \varphi_+$);
- O erro respectivo com relação ao próximo ponto da órbita desejada - Coordenada s_P ($\equiv \varphi_P$).

Considera-se também o erro de s ($\equiv \varphi$) com relação ao ponto de coordenada s_O ($\equiv \varphi_O$).

O ângulo de reflexão α , Figura 4.8, é corrigido em função destes erros, posicionando-se o elemento rebatedor no ponto de choque, caso este ocorra na janela pontilhada apresentada naquela Figura, e girando-o de um ângulo $\Delta\alpha$ tal que:

$$\alpha = \alpha + \Delta\alpha; \quad \Delta\alpha \propto [(\varphi - \varphi_O) + (\varphi_+ - \varphi_P)] = \text{erro} \quad (4.17)$$

Isto pode ser realizado atuando-se no ângulo 2θ da expressão (4.7), utilizada no cálculo da velocidade refletida w em função da velocidade incidente v , da seguinte maneira:

$$\beta = 2\theta - k\Delta\alpha = \arctg\left(\frac{S_{2\theta}}{C_{2\theta}}\right) - k\Delta\alpha \Rightarrow^{4.7} w = \begin{bmatrix} -C_\beta & -S_\beta \\ -S_\beta & C_\beta \end{bmatrix} v \quad (4.18)$$

Então, o Algoritmo para o BC perturbado e controlado fica sendo o seguinte:

- (i) Calcular $X \leftarrow X + v_x \Delta t$ e $Y \leftarrow Y + v_y \Delta t$
- (ii) *Quando for ocorrer um choque, usar as expressões (4.11), (4.13), (4.14), (4.15), (4.17) e (4.18) para obter a correção do ângulo de reflexão $\Delta\alpha$ (obs: este valor é forçado a zero fora da janela definida na Figura 4.8) e a velocidade refletida w a partir do vetor velocidade incidente v para, a seguir, realizar as atribuições $X \leftarrow X_P, Y \leftarrow Y_P, v_x \leftarrow w_x$ e $v_y \leftarrow w_y$.*
- (iii) Avançar o tempo de um incremento de Δt segundos.

Algoritmo 4.4 - Controle do BC.

Implementou-se o controle convencional por meio da expressão (4.18), bem como pelo uso de uma Função Característica Fuzzy (FCF).

Com O na origem ($s = 0$), ajustando-se a posição do ponto P (Figura 4.8) e o ganho k da expressão (4.18), conseguiu-se obter órbitas fechadas de períodos 3 e 5.

4.4.2 Resultados

A seguir descreve-se a abordagem utilizada para simulação dos controles fuzzy e convencional.

Apresenta-se na Figura 4.9 um exemplo de órbita controlada para o BC, linha cheia, bem como parte do transitório, linha pontilhada.

Figura 4.9 – Bilhar Circular controlado.

Nas Figuras 4.10 e 4.11, apresentam-se o BC respectivamente não controlado e controlado, com $k = 0,35$, por meio convencional, sendo que, neste caso, o controle foi ligado a partir da 2ª iteração.

Figura 4.10 – Ângulo de choque $\times$ número de iterações – BC sem controle.

Pela Figura 4.11, nota-se a ocorrência de um transitório, sendo aproximadamente sua duração de 25 iterações e seu sobresinal de 0,8 rad.

Figura 4.11 – Ângulo de choque $\times$ número de iterações – BC controlado, $k=0,35$.

Alterando-se o valor de k , o transitório assume valores diferentes ou, ainda, o controle é perdido.

Na Figura 4.12, apresenta-se o caso para $k = 0,1$, também com o controle ligado a partir da 2ª iteração e, neste caso, a duração obtida para o transitório foi de 60 iterações sendo o sobresinal de 1,1 rad.

Para $k = 0,5$, obteve-se para a duração do transitório o valor de 10 iterações e, para o sobresinal 0,5 rad. Para $k = 0,65$, não houve fixação da órbita.

Figura 4.12 – Ângulo de choque $\times$ número de iterações – BC controlado, $k = 0,1$.

Por meio da FCF apresentada na Figura 4.13, obteve-se o transitório com duração de 9 iterações e sobresinal de 1,1 rad.

Figura 4.13 – Função Característica Fuzzy para o controle do BC.

Nesta Figura, apresentam-se as classes e regras fuzzy, relacionadas às variáveis *erro* e $\Delta\alpha$, que foram ajustadas experimentalmente por meio dos pontos que definem os centros das funções de pertinência das diversas classes (ver seção 3.3).

Simulou-se o comportamento das classes e regras, definidas da maneira exposta anteriormente, e integradas ao Bilhar Circular, por meio de um programa escrito em linguagem C++.

4.5 Considerações Finais

O tipo de controle sobre o BC perturbado encontrado na literatura atua sobre o parâmetro ε , expressão 4.2.

Nesta Tese a estratégia de controle (do BC) foi baseada no comportamento de jogadores em um jogo de ping-pong ou de pimball, seção 4.4.1 e Figura 4.8. Esta similaridade tornou mais direta a obtenção das regras fuzzy para definir a FCF utilizada, Figura 4.13.

Aplicou-se o controle de órbitas no BC perturbado, tanto por meio convencional, como empregando-se métodos Fuzzy. No que diz respeito ao transitório e ao sobresinal gerados (seção 4.4.2) os melhores resultados obtidos foram os seguintes:

- Convencional ($k=0,5$): um transitório de 10 iterações e um sobresinal de 0,5 rad;
- Fuzzy (Figura 4.13): um transitório de 9 iterações e um sobresinal de 1,1 rad;

Para o controle Fuzzy a duração do transitório foi da ordem de 10% menor que o obtido para o controle convencional. De modo inverso, para o controle convencional o sobresinal foi da ordem de 50% menor que o obtido para o controle fuzzy.

Tais valores revelam que não há uma preponderância evidente (como por exemplo a obtenção de uma duração de transitório e de um sobresinal ambos menores) de um dos dois tipos (convencional e fuzzy) de controle sobre o outro, nas condições estabelecidas para o caso de estudo.

4.6 Bibliografia Comentada

Referências sobre aspectos específicos dos sistemas dinâmicos, incluindo os teoremas KAM e de Poincaré-Birkoff, são apresentadas em [JOSE & SALETAN – 1998].

Sobre bilhares, recomendam-se, entre outros, os trabalhos de [BERRY-1981], um estudo abrangente com abordagem teórica, e [KORSH & JODL - 1994], que inclui programas, sem o código fonte, para explorar o comportamento caótico de diversos tipos de bilhares.

O controle do bilhar circular sobre o parâmetro ε pode ser visto em [REYL & FLEPP & BADDI & BRUN – 1993] e em [DUBÉ & DESPRÉS – 2000].

5. Estudos de caso para SDFE's: Bilhar Newtoniano de Garms & Andrade

Neste capítulo verifica-se por meio de simulações em um novo tipo de bilhar Newtoniano a adequação do uso da modelagem fuzzy na fixação de trajetórias em sistemas conservativos (bloco 8 da Figura 2.2).

Neste capítulo, será estudado o controle fuzzy em um Bilhar Newtoniano concebido para este fim e denominado Bilhar Newtoniano de Garms & Andrade (BNGA). Este último constitui uma proposta de um novo Bilhar do tipo Newtoniano que, acredita-se (e verifica-se *a posteriori*), permite a simulação de situações não cobertas por Bilhares de tipo similar encontrados na literatura. Entende-se que esta proposta de Bilhar corresponde a uma contribuição inovadora deste trabalho.

A estrutura deste capítulo é a que se segue: definição, implementação, caracterização e controle do BNGA, sucedido pelas conclusões sobre a simulação realizada.

5.1 Definição do BNGA

O BNGA, concebido e sintetizado neste trabalho, é composto, em sua configuração mais geral, por n centros fixos com massas pontuais, que pertencem a um dado plano no qual uma partícula se movimenta.

Cada uma destas massas exerce, num ponto P deste plano, um potencial gravitacional newtoniano que é dado pela seguinte expressão:

$$V(r_p) = \frac{-K_i}{|r_p - r_i|} \quad (5.1)$$

onde K_i , r_i e r_p são, respectivamente, uma constante, as coordenadas do centro i e as coordenadas do ponto P . O potencial total é a soma dos potenciais devidos a cada massa.

Considera-se, ainda, em torno de cada centro com massa, um anel de raio ε para o qual, se uma partícula o atingir, será rebatida (choque perfeitamente elástico) com o ângulo de reflexão igual ao de incidência.

Foram assumidas algumas premissas para que se pudessem impor algumas restrições de condições de funcionamento para o BNGA:

- Que a partícula não se aproximasse muito de um centro com massa;
- Que houvesse conservação de energia.

A primeira delas garante que não haja perda de precisão numérica nas condições de acelerações extremas que ocorrem quando a distância da partícula a um centro com massa é muito pequena. Por outro lado, esta estratégia implica na possibilidade de haver caos mesmo para $n=1$ (caso o anel não seja um círculo perfeito).

As variáveis x , y , $p_x = mv_x$ e $p_y = mv_y$ são escolhidas como as quatro coordenadas que definem o espaço de fase deste sistema dinâmico, [CHOW-1995], [LANDAU & LIFCHITZ-1966] e [GOLDSTEIN-1972]. Considerando-se a massa da partícula $m=1$, então, p_x e p_y podem ser substituídos por v_x e v_y .

Para $n=1$ e sem a ocorrência de choques, este bilhar irá corresponder ao problema de Kepler para o qual há duas quantidades conservadas (integrais do movimento): a energia total e a quantidade de movimento angular. Tal sistema dinâmico é integrável, [CHOW-1995], [LANDAU & LIFCHITZ-1966] e [GOLDSTEIN-1972].

As órbitas obtidas possuem a forma de cônicas, ou seja, elipses, hipérboles ou parábolas. A órbita elíptica, neste caso, mantém seus eixos fixos (não precessiona). Ocorrendo choques no anel (circular ou do tipo elíptico), o problema torna-se semelhante ao estudado na seção 2 do capítulo 4.

O caso de $n \geq 2$ corresponde ao problema de $n+1$ corpos no plano com as massas tendo posições definidas. Particularmente, este trabalho se interessa pelo caso $n=2$ cuja representação no espaço de configuração [CHOW-1995] se encontra na Figura 5.1, e corresponde a uma simplificação do problema restrito de três corpos, no qual os corpos de maior massa estão fixos.

Figura 5.1 – BNGA com $n=2$.

Este problema é analisado em [LANDAU & LIFCHITZ-1966] e [HELFRICH-1972], por exemplo. A partir destas premissas pode-se inferir que:

- Caso não ocorram choques nos anéis, há duas integrais do movimento: a energia total e a grandeza Ω :

$$E = \frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2} - \frac{K_1}{r_1} - \frac{K_2}{r_2} \quad (5.2)$$

$$\Omega = L_1.L_2 + 2ma(K_1 \cos \theta_1 - K_2 \cos \theta_2) \quad (5.3)$$

- Nestas condições, o BNGA é integrável, sendo as soluções obtidas a partir das funções elípticas de Jacobi e de Weierstrass, [GOLDSTEIN-1972] e [PARS-1965].
- Caso ocorram choques, isto implica em caos, como será apresentado na seção 5.3.

Para o cálculo de Ω , os valores de L_1, L_2, θ_1 e θ_2 estão definidos na Figura 5.1. Por esta simulação, é possível verificar, quando não está ocorrendo choques, as conservações de Ω e de E ao longo do movimento.

5.2 Implementação do BNGA

5.2.1 BNGA sem choques

As equações do movimento podem ser obtidas a partir da Figura 5.2 para o caso em que não está ocorrendo choque da partícula de massa m com o anel definido no BNGA.

Figura 5.2 – Aceleração devido ao potencial newtoniano.

A aceleração é calculada a partir do potencial newtoniano de uma massa pontual (M) na origem do sistema de coordenadas ($V = -K' M / r$), resultando na seguinte equação:

$$a = (a_x, a_y) = F / m = \nabla V / m = -\frac{K' M m}{m r^2} = \frac{-K}{x^2 + y^2} \quad (5.4)$$

De (5.4) pode-se escrever:

$$a_x = a \cdot \frac{(x,0)}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = -\frac{Kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \text{ e } a_y = a \cdot \frac{(y,0)}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = -\frac{Ky}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (5.5)$$

Além disso, estando o sistema nas condições (x, y) e (v_x, v_y) , ele fica submetido por Δt segundos à aceleração (a_x, a_y) - expressão (5.5) - considerada constante durante este intervalo de tempo.

Desse modo, o sistema evolui para (x, y) e (v_x, v_y) dados pela aproximação:

$$v_x \leftarrow v_x + a_x \Delta t, \quad v_y \leftarrow v_y + a_y \Delta t, \quad x \leftarrow x + v_x \Delta t \text{ e } y \leftarrow y + v_y \Delta t \quad (5.6)$$

O erro das expressões em (5.6) é tanto menor quanto menor for o valor do incremento de tempo Δt segundos, já que a aceleração durante o intervalo de tempo considerado efetivamente não é constante.

A evolução do movimento é obtida a partir do Algoritmo 5.1, [FEYMMAN-1987], descrito a seguir, sendo que, antes de executá-lo, define-se a condição inicial pelas atribuições de $x \leftarrow x_0$, $v_x \leftarrow v_{x0}$, $y \leftarrow y_0$, $v_y \leftarrow v_{y0}$ e $t \leftarrow 0$.

Para obter-se a seqüência de valores $(x(t), y(t))$ em incrementos de tempo de Δt segundos, executa-se a seqüência:

- (i) *Calcular a aceleração (a_x, a_y), a velocidade (v_x, v_y) e as coordenadas da posição (x, y) da partícula pelas expressões (5.5) e (5.6) (obs: devem-se somar as forças exercidas por cada centro com massa, caso exista mais de um);*
- (ii) *Avançar o tempo de um incremento de Δt segundos;*
- (iii) *Repetir indefinidamente a seqüência de (i) a (ii).*

Algoritmo 5.1 – Simulação do BNGA sem choques.

5.2.2 BNGA com choques

Se ocorrer colisão no anel circular em torno de um centro com massa, impõe-se que este choque seja elástico, Figura 5.3. Isto significa recalcular a velocidade antes de executar novamente o item (i) do Algoritmo 5.1.

Nesta seção, será descrito o algoritmo para obtenção da velocidade de uma partícula em movimento plano após choque elástico sobre um anel de raio ε .

Figura 5.3 – Transformação de sistema de coordenadas: de $x'O'y'$ para xOy .

O problema é resolvido de modo semelhante ao usado na seção 4.2.1, através da expressão (4.8), considerando-se agora como sendo ε o raio do círculo, ao invés do valor R , isto é:

$$w = \begin{bmatrix} \frac{y_p^2 - x_p^2}{\varepsilon^2} & -\frac{2x_p y_p}{\varepsilon^2} \\ -\frac{2x_p y_p}{\varepsilon^2} & \frac{x_p^2 - y_p^2}{\varepsilon^2} \end{bmatrix} v \quad (5.7)$$

Para calcular (5.7) são necessários apenas os valores de x_p , y_p , ε , v_x e v_y e, sendo assim, levando-se em conta os choques sobre o anel de raio ε , resulta o Algoritmo 5.2 para o BNGA:

- (i) *Calcular a aceleração (a_x , a_y), a velocidade (v_x , v_y) e as coordenadas da posição (x , y) da partícula pelas expressões (5.5) e (5.6) (obs: devem-se somar as forças exercidas por cada centro com massa caso exista mais de um);*
- (ii) *Se ocorreu choque usar as expressões (5.7) para obter velocidade refletida w a partir do vetor velocidade incidente v e a seguir realizar as atribuições $v_x \leftarrow w_x$ e $v_y \leftarrow w_y$.*
- (iii) *Avançar o tempo de um incremento de Δt segundos;*
- (iv) *Repetir indefinidamente a seqüência de (i) a (iii).*

Algoritmo 5.2 – Simulação do BNGA com choques.

Um primeiro exemplo de aplicação deste programa é apresentado na Figura 5.4: uma órbita possível obtida para o problema de Kepler. Neste caso, as órbitas elípticas são fechadas (não ocorre precessão).

Órbita elíptica (fixa)

Figura 5.4 –Um centro de força gravitacional.

Na Figura 5.5, são apresentadas órbitas relacionadas à simplificação do problema restrito de três corpos. Observa-se que tais movimentos são planos, embora para efeito de visualização tenha sido representado no eixo z o potencial total a que a partícula está submetida (para as Figuras 5.5.b e c).

(a) Órbita “elíptica”

(b) em forma de oito

(c) “elíptica”

Obs: ocorre precessão em todos estes casos

Figura 5.5 – Dois centros de força gravitacionais.

Uma variação possível no BNGA poderia ser obtida impondo-se um movimento elíptico em um dos centros com massa, junto com o seu anel. Este caso corresponderia ao problema de três corpos em que a partícula é de massa praticamente nula, não interferindo assim no movimento dos outros dois corpos.

5.3 Caracterização do BNGA

Com a finalidade de realização dos testes, selecionou-se uma faixa de valores para os parâmetros e condições iniciais, Tabela 5.1. Os valores x_0 , v_{x0} , y_0 e v_{y0} nesta Tabela correspondem ao ponto da trajetória no início da simulação.

n	a	$K=K_1=K_2$	ε	$\pm x_0$	v_{x0}	y_0	v_{y0}
2	0,5	1,0	0,2	$[1,45, 2,45]$	0,0	0,0	1,0

Tabela 5.1 – Condições de teste das Figuras 5.6 e 5.7.

Por simplicidade, considera-se $m = M = K = K_1 = K_2 = 1$ e assim resulta, pela Tabela 5.1 e impondo-se ainda $x_0 = 1,5$, os seguintes valores típicos para as energias envolvidas:

$$T = 0,5 m v^2 = 0,5 \text{ (energia cinética)}$$

$$W = -\frac{K_1}{a + x_0} - \frac{K_2}{x_0 - a} = -\frac{1}{0,5 + 1,5} - \frac{1}{1,5 - 0,5} = -1,5 \text{ (energia potencial)}$$

$$E = T + W = -1,0 \text{ (energia total)}$$

Nesta condição ($E < 0$), a partícula fica presa no potencial gravitacional total e a sua órbita se desenvolve próxima aos centros de atração, o que é desejável para o estudo do comportamento deste sistema em condições em que este potencial é relevante.

O mapa $x \times v_x$, no plano $y = 0$ para este BNGA, Figura 5.6, foi obtido por simulação e tem a energia total E , expressão (5.2), como parâmetro.

Figura 5.6 – Mapa $v_x \times x$ do BNGA com $n=2$ tendo a energia $-E$ como parâmetro.

As projeções horizontal e vertical deste mapa são apresentadas na Figuras 5.7.

Destes gráficos, pode-se notar que, para $E < -0,9$, energias baixas, o sistema torna-se caótico e, caso contrário, energias altas, o sistema encontra-se nas curvas fechadas da Figura 5.6 que lembram as ilhas discutidas na seção 4.3.2.

Figura 5.7 – Mapa $v_x \times x \times E$: (a) projeção horizontal e (b) projeção vertical.

Pode-se notar, portanto, que há uma bifurcação [MONTEIRO - 2006] para $E = -0,9$. O sistema passa de um regime caótico para um regime periódico porque, para energias baixas, há a ocorrência de choques (Figura 5.8.a), enquanto que isto não acontece para energias altas (Figura 5.8.b).

Figura 5.8 – Evolução no espaço das configurações $x \times y$:
(a) energias “baixas” e (b) energias “altas”.

No próximo estudo, deseja-se adaptar o BNGA para o estudo da transferência de órbita de um centro para o outro e, neste caso, é interessante que a distância entre os centros gravitacionais seja maior que o valor da Tabela 5.1.

Para obter a Tabela 5.2, distanciaram-se os centros gravitacionais de $2a = 1$ para $2a = 8$.

n	a	$K=K_1=K_2$	ε	x_0	v_{x0}	y_0	v_{y0}
2	4,0	1,0	0,2	9,0	0,0	0,0	0,6

Tabela 5.2 – Condições para a Figura 5.9.

Com o BNGA determinado pela Tabela 5.2 resulta, no plano $x=0$, o Mapa $y \times v_y$ da Figura 5.9.

Figura 5.9 – Mapa $v_y \times y$.

Para esta situação, o movimento é caótico, energia baixa: a partícula está se movimentando em torno no centro $x=a=7$, sendo neste caso $r_{orbita0} = x_0 - a = 9 - 7 = 2$.

5.4 Controle Fuzzy do BNGA

5.4.1 Descrição

O controle fuzzy foi desenvolvido para condições definidas na Tabela 5.3 (que flexibiliza a Tabela 5.2). Na Tabela 5.3 as distâncias ($2a$) entre os centros gravitacionais, nos diversos casos estudados, são maiores que aquela estabelecida quando da caracterização do bilhar (seção 5.3).

$K=K_1=K_2$	a	r_{orbita}	v_{y0}
[0,8 , 1,2]	[4,0 , 9,0]	[2,0 , 3,0]	[0,4 , 0,7]

Tabela 5.3 - Região de controle.

Alguns resultados típicos obtidos por simulação por meio de programa escrito em C++ são apresentados na Figura 5.10. Na Figura 5.10.a, como na Figura 5.3, para efeito de visualização representou-se no eixo z o potencial total a que a partícula está submetida.

Figura 5.10 – Mudança de órbita: (a) e (b) tipo Hohmann e (c) com y constante.

O controle atua nas seguintes três fases:

- (1) A partícula fica presa numa órbita em torno do ponto $x = a$, isto é, à direita na Figura 5.10.
- (2) Ocorre uma órbita de transferência entre $x = a$ e $x = -a$.
- (3) A partícula fica presa numa órbita em torno do ponto $x = -a$, isto é, à esquerda na Figura 5.10.

Nas fases (1) e (3), trata-se de fixar órbita em torno do centro com massa de modo que esta não precessione. A estratégia adotada foi definida pela analogia de se andar de bicicleta numa

pista oval – esta analogia tem por objetivo observar que as regras fuzzy estabelecidas para este problema são semelhantes às regras utilizadas pelo ciclista (operador) nesta situação.

Tal estratégia caracteriza-se pelas seguintes ações:

- (i) Quando a partícula corta o eixo de dos x ($y=0$) pelo lado mais próximo da origem, gira-se o vetor velocidade para que ele fique perpendicular a este eixo;
- (ii) Quando ela corta o eixo dos x pelo outro lado mais distante da origem, verifica-se a diferença entre o raio da órbita desejado ($r_{órbita}$) e o raio da órbita real (r) neste instante e realimenta-se este erro para a velocidade v_x da partícula;
- (iii) São evitados choques no anel – pelas ações (i) e (ii), pois sem elas, devido à precessão, a partícula tende a se aproximar do centro gravitacional, o que irá implicar na ocorrência de choques mecânicos entre a partícula e o anel (Figura 5.5.a).

A órbita pode ser mantida fixa utilizando-se regras fuzzy tais como: *se erro ($r-r_{órbita}$) muito negativo então aumentar v_x de um valor muito positivo*, referida ao item (ii) anterior.

As variações de velocidade, aplicadas no instante definido em (i) para manter a velocidade perpendicular ao eixo, são pequenas, pois esta é uma característica natural da órbita escolhida por meio das condições iniciais, vetor $(x_0, v_{x0}, y_0, v_{y0})$, caso a perturbação fosse nula.

Selecionaram-se duas formas possíveis de transferência, fase (2):

- (i) Tipo Hohmann (Figuras 5.10.a e b) - altera-se a órbita em dois pontos, isto é, com $y=0$, quando se aumenta v_y para saltar para o outro centro com massa (uma analogia seria a de dar uma pancada como num jogo de golfe), e com $x= -a$ quando a partícula é freada para que ela entre em órbita em torno deste ponto;
- (ii) y constante (Figura 5.10.c) - quando $x= a$ passa-se a manter y constante por meio de controle de erro até atingir $x= -a$ e, então brecar a partícula para que ela entre em órbita em torno deste ponto (uma analogia seria a de patinar sobre uma superfície inclinada).

5.4.2 Implementação de regras fuzzy para o controle do BNGA

É possível realizar-se todos estes controles aplicando-se a Teoria Fuzzy, inclusive a entrada na órbita do centro com massa em $x= -a$.

Neste caso, considera-se a FCF (capítulo 3) definida por $v_x = f(y)$, sendo v_x (saída) correspondente à velocidade a ser impressa na direção x no momento da passagem por $x = -a$ e y (entrada) a “altura” ao centro gravitacional, no mesmo instante.

É aplicada no instante em que a partícula passa pela coordenada $x = -a$ de modo a freá-la para que caia em direção ao centro de gravidade nesta posição. A partícula é, então, capturada numa órbita fechada em torno deste centro.

Quanto mais alto ($y \uparrow$) menor a velocidade “horizontal” ($v_x \downarrow$) a ser definida, pois, caso contrário, a partícula tenderia a se distanciar em demasia do centro em $x = -a$.

Na Figura 5.11, apresentam-se as classes e regras fuzzy implementadas no programa em linguagem C++ e ajustadas experimentalmente para obter esta FCF na simulação realizada.

Figura 5.11 – FCF para entrada na órbita em torno de $x = -a$.

No caso do salto Hohmann, deve-se obter o valor da velocidade a ser imposta no início deste salto, $v_y = f(K, a, r)$. Esta função tem como domínio a região definida pela Tabela 5.3, sendo r o valor do raio da órbita no momento da partida.

Ela foi aproximada por meio de regras Fuzzy sintonizadas experimentalmente para pontos específicos sendo que, posteriormente, verificou-se a adequação da interpolação Fuzzy para outros pontos do domínio estabelecido.

Segue um exemplo de regra Fuzzy para este caso: se a distância ao outro centro é grande e a constante gravitacional (K) é alta e o raio da órbita de partida (r) é pequeno então a velocidade de saída v_y é muito alta.

Note-se que nesta situação a força de atração do centro em $x=a$ é muito grande e que, portanto, deve-se imprimir uma velocidade de partida bem elevada para vencê-la.

A função obtida é exemplificada nas condições dos dois gráficos da Figura 5.12.

Figura 5.12 - FCF para início da transferência Holman de $x = -a$ para $x = +a$.

5.4.3 Resultados

As simulações realizadas, Tabelas 5.4 e 5.5, têm por objetivo obter os valores médios da energia gasta e do tempo de transferência sobre os diversos valores das variáveis de entrada. A Tabela 5.5 relaciona-se à transferência com y constante utilizando controle de erro convencional e a Tabela 5.4 à transferência Hohmann por meio de regras Fuzzy.

Estimou-se o gasto em energia somando-se o quadrado das variações da velocidade da partícula, impostas pelo controle, ao longo da órbita de transferência.

Para realizar a transferência Hohmann utilizou-se a FCF definida em 5.4.2, Figura 5.12. Neste caso, resultaram as seguintes médias: 64 uT - unidades de tempo e 0.3 uE - unidades de energia.

K	a	x_0	v_{y0}	Energia gasta na transferência	Tempo gasto na transferência
0,8	5	7	0,5	0,67	29
0,8	5	8	0,4	0,22	68
1	5	7	0,6	1,22	23
1	5	8	0,45	0,3	52
1,2	5	7	0,6	0,45	35
1,2	5	8	0,5	0,38	52
0,8	7	9	0,5	0,14	70
0,8	7	10	0,45	0,17	98
1	7	9	0,6	0,23	55
1	7	10	0,5	0,24	68
1,2	7	9	0,65	0,29	50
1,2	7	10	0,55	0,29	67
0,8	9	11	0,5	0,15	96
0,8	9	12	0,45	0,13	132
1	9	11	0,6	0,19	72
1	9	12	0,5	0,18	91
1,2	9	11	0,65	0,24	73
1,2	9	12	0,55	0,23	84
médias				0,30	64

K -constante da expressão 5.4; a – ver Figura 5.1;

condições iniciais: vetor $(x_0, v_{x0}, y_0, v_{y0})$ com $v_{x0} = 0$ e $y_0 = 0$.

Tabela 5.4 – Resultados da simulação para a transferência Hohmann.

Na transferência com y constante os valores médios obtidos foram os seguintes: 5,1 uT para o tempo e 20 uE para a energia.

k	a	x_0	v_{y0}	Energia gasta na	Tempo gasto na
				transferência	transferência
0,8	5	7	0,5	5,6	8,5
0,8	5	8	0,4	5,5	30
1	5	7	0,6	5,4	8,5
1	5	8	0,45	5,4	18
1,2	5	7	0,6	5	9,3
1,2	5	8	0,5	5,4	15
0,8	7	9	0,5	5,3	17
0,8	7	10	0,45	5,6	53
1	7	9	0,6	5,3	14
1	7	10	0,5	5,5	26
1,2	7	9	0,65	5,3	12
1,2	7	10	0,55	5,4	19
0,8	9	11	0,5	5,5	15
0,8	9	12	0,45	5,5	51
1	9	11	0,6	5,4	16
1	9	12	0,5	5,5	29
1,2	9	11	0,65	5,3	16
1,2	9	12	0,55	5,4	25
médias				5,1	20

K -constante da expressão 5.4; a – ver Figura 5.1;

condições iniciais: vetor $(x_0, v_{x0}, y_0, v_{y0})$ com $v_{x0} = 0$ e $y_0 = 0$.

Tabela 5.5 – Resultados da simulação para a transferência y constante.

5.5 Considerações Finais

As estratégias de controle adotadas foram baseadas em comportamentos diversos, tais como, andar de bicicleta numa pista oval, jogar golfe ou patinar sobre uma pista inclinada. Os comportamentos analisados resultaram no estabelecimento das estratégias dos operadores envolvidos e na definição das correspondentes regras fuzzy. Tais regras serviram de base para se obter as FCF's utilizadas, como por exemplo as apresentadas nas Figuras 5.11 e 1.12.

Para a transferência entre órbitas no BNGA aplicaram-se o método convencional (y constante) e o método Fuzzy (Figura 5.12). Os resultados médios obtidos quanto ao tempo de transferência e da energia gasta nesta transferência foram os seguintes:

- y constante: 5,1 uE para gasto de energia e 20 uT para tempo de transferência;
- Fuzzy: 0,30 uE para gasto de energia e 64 uT para tempo de transferência.

Neste caso a transferência Hohmann (Fuzzy) é mais lenta. Por outro lado ela é mais econômica quanto ao gasto de energia comparativamente ao caso da transferência com y constante (convencional), que por sua vez é mais rápida, porém mais dispendiosa.

À luz dos resultados destas simulações foi possível fixar órbitas no BNGA, tanto por meio convencional, como por métodos Fuzzy. Os resultados não indicaram de modo preponderante – como por exemplo, a obtenção de um tempo de transferência e do gasto de energia ambos menores – um desempenho melhor de uma destas técnicas sobre a outra.

Em trabalhos futuros podem-se explorar variações sobre o controle fuzzy proposto, tais como para a transferência Hohmann, corrigir a órbita em outros pontos (não apenas no início e no fim da órbita de transferência) e/ou fazê-la passar pela origem do plano xy .

5.6 Bibliografia Comentada

O problema restrito de 3-corpos simplificado, base do BNGA, apesar desta denominação é um problema relativamente complexo, muito embora tenha solução analítica. Ele pode ser estudado em diversas referências:

- [LANDAU & LIFCHITZ-1966], páginas 209 e 210 – problema 1, aplica a teoria de Hamilton-Jacob para obter a constante de movimento Ω , equação 5.3, e as soluções deste sistema em forma de integrais.
- [PARS-1965], página 309 a 319, obtém as soluções analíticas das integrais usando ou as funções Jacobianas elípticas ou as funções Weierstrassian elípticas.
- [ERIKSON & HILL - 1949] por meio da quantização desta teoria, estuda o comportamento de um elétron em moléculas diatômicas.
- [HELFRICH-1972] também estuda este problema, mas apresenta-o com mais detalhe.

Dentre as soluções analíticas previstas em [PARS-1965], encontram-se as apresentadas na Figura 5.5, obtidas aqui pela simulação do BNGA. Mesmo para este caso simplificado, nota-se a complexidade das soluções alcançadas.

6. Circuito de Chua (CCH)

Neste capítulo discute-se o CCH sob o ponto de vista qualitativo e por meio da análise do comportamento dos elementos que o compõem. Verifica-se a adequação do uso da modelagem fuzzy (computacional) na fixação de trajetórias em sistemas caóticos, por meio de teste real em protótipo físico do CCH. (ver bloco 8 da Figura 2.2).

Neste capítulo, será estudado o controle computacional fuzzy do caos aplicado a um CCH real (protótipo físico).

A estrutura deste capítulo é a que se segue: faz-se uma análise quantitativa do CCH, discute-se sua implementação, realiza-se o controle do CCH e apresentam-se as conclusões dos testes realizados.

6.1 Análise quantitativa do circuito de Chua

O estudo do CCH pode ser encontrado em diversas referências relevantes [MADAN - 1993] [MONTEIRO – 2006] [SANTOS & CALDAS - 2001].

Neste trabalho propõe-se um estudo qualitativo do CCH, cuja extensão e tipo de abordagem não foi encontrada na literatura especializada, constituindo uma proposta que, acredita-se, seja uma contribuição original. Os elementos ou tópicos considerados nesta análise quantitativa, objeto deste item, são os seguintes:

- Resistor elétrico negativo (RN);
- Resistor elétrico não linear (RNL);
- Resistor elétrico negativo não linear (RNN);
- Circuito RLC: transitórios e diagrama de fase;
- Dimensão do espaço de fase para ocorrência de caos em sistemas contínuos.

Para finalizar, discute-se o princípio de funcionamento do CCH.

6.1.1. Resistor Negativo

Na Figura 6.1 apresenta-se uma possível implementação de um RN que faz uso de um Amplificador Operacional (AOP). Os terminais AB desta Figura formam um bipolo que apresenta o comportamento requerido para o CCH.

Figura 6.1 – Implementação de uma RN utilizando-se AOP.

O AOP (interior ao bipolo) e os resistores R^* , atuando em conjunto, implementam um amplificador não inversor de ganho dois. Sua saída gera uma diferença de potencial igual a $2v_{AB}$, sendo v_{AB} a diferença de potencial na entrada do bipolo.

Usando-se a lei de Kirchhoff referente às malhas [ORSINI - 1971], deduz-se que sobre o resistor R irá se formar uma diferença de potencial igual a $v = -v_{AB}$. Conseqüentemente, uma corrente igual a $i_{AB} = v / R = -v_{AB} / R$ irá percorrer o resistor R (correspondente à corrente na entrada do bipolo AB). Obtém-se daí a relação $R_N = v_{AB} / i_{AB} = -R$, a qual define o “resistor negativo” visto no circuito pelos terminais AB.

Pode-se interpretar este resultado considerando-se um R_N como um gerador de corrente vinculado com relação linear entre corrente e tensão (Figura 6.2):

- Na Figura 6.2 parte (a), adota-se para o bipolo a convenção de receptor de energia (bipolo tipo carga): as cargas elétricas positivas fluem (corrente) do potencial maior para o potencial menor, perdendo assim energia;

- Na Figura 6.2 parte (b), adota-se para o bipolo a convenção de fonte de energia (bipolo tipo fonte): as cargas elétricas positivas fluem do potencial menor para o potencial maior, ganhando assim energia.

Figura 6.2 – Resistor negativo como gerador de corrente vinculado.

No caso (a), o bipolo é do tipo carga, sendo esta convenção a mesma adotada na Figura 6.1 e, portanto, a equação da reta que o representa foi obtida anteriormente, sendo dada por $V_{AB} / i_{AB} = -R$. Esta reta ocupa o segundo e quarto quadrantes da curva característica $V_{AB} \times i_{AB}$.

Por outro lado, adotando-se a convenção de bipolo tipo fonte, esta reta irá ocupar o primeiro e terceiro quadrantes, caso (b).

Neste caso, o sentido adotado e o sentido real da corrente coincidem e isto indica que o RNN é efetivamente uma fonte. Significa também que o RNN fornece energia, a qual provém das fontes de tensão (que não foram representadas na Figura 6.1) que alimentam o AOP utilizado.

6.1.2. Resistor não Linear

O próximo elemento a ser analisado é um RNL, cuja implementação adotada é a apresentada na Figura 6.3. Ficam definidas as seguintes inclinações, na curva característica $i \times v$, devido à ação dos diodos (aqui considerados ideais):

$$v \in [-V_0, +V_0] \Rightarrow dv/di = R_a \quad (6.1)$$

$$v \notin [-V_0, +V_0] \Rightarrow dv/di = R_a R_b / (R_a + R_b) \quad (6.2)$$

A inclinação (6.2) é obtida calculando o resistor Thevenin do circuito apresentado na Figura 6.3, relativo ao caso em que $v \notin [-V_0, +V_0]$, sendo igual ao resistor equivalente paralelo entre R_a e R_b .

Figura 6.3 – Resistor não linear.

Analisando-se a Figura 6.3, percebe-se que a curva $v \times i$ do resistor é linear por partes e por isto será discutida a validade de se considerar não linear este tipo de bipolo:

- Como não ocorre uma proporcionalidade entre tensão e corrente em seus terminais (para todos os valores), então, por este conceito, ele é um RNL legítimo;

- Entretanto, para cada trecho definido em (6.1) e (6.2), o circuito é formado por bipolos lineares e, portanto, o sistema de equações diferenciais que o representa é linear, podendo assim ser resolvido, para cada um destes trechos, por métodos aplicáveis a este tipo de sistema. Neste caso, a cada trecho, este bipolo ou é um resistor puro ou é um resistor em série com uma fonte de tensão, logo não um RNL;
- No CCH é importante que não haja uma proporcionalidade entre tensão e corrente para toda a faixa de valores de tensão aplicada aos seus terminais.

Em vista da análise anterior da Figura 6.3 conclui-se que o circuito implementado para tal bipolo é adequado para esta aplicação, independentemente do enfoque adotado (em todo domínio ou em cada faixa). Por outro lado, a denominação de RNL para este bipolo é normalmente empregada no estudo do CCH, sendo aqui também utilizada.

6.1.3. Resistor Negativo não Linear

Trocando-se o resistor R_a da Figura 6.3 pelo circuito de um RN da Figura 6.1, resulta o R_{NN} da Figura 6.4.

Aplicando-se o teorema de Thevenin no circuito da Figura 6.4 e considerando-se uma queda de $0,6V$ para o caso de condução em diodos de Silício, obtêm-se os valores de R_a , R_b e V_0 apresentados.

Figura 6.4 – Resistor Negativo Não Linear (R_{NN}).

Finalmente, utilizando-se estes valores, e de acordo com as expressões (6.1) e (6.2), pode-se levantar a curva característica do bipolo R_{NN} apresentada na Figura 6.5 (convenção de bipolo tipo carga).

Figura 6.5 – Curva característica do bipolo (tipo carga) R_{NN} .

6.1.4. Circuito RLC

Nesta seção, serão discutidos os comportamentos permanente e transitório do circuito da Figura 6.6, para preparar o estudo do comportamento do circuito paralelo LC utilizado no CCH.

Figura 6.6- Circuito RLC.

Regime Permanente

Em regime permanente, e dado que existem perdas no circuito, as variações dos sinais de corrente e tensão tendem a se anular, isto é $dv/dt \rightarrow 0$ e $di/dt \rightarrow 0$.

Deste modo, o indutor tende a um curto circuito ($v_L = L di_L/dt = 0$), e o capacitor tende a um circuito aberto ($i_C = C dv_C/dt = 0$). Nestas condições, conclui-se que $i_L = i_{AB}$.

As equações que definem a fonte e a carga do circuito da Figura 6.6 para o regime permanente podem então ser escritas:

$$v_{AB} = V - R_1 i_L \quad (\text{fonte}) \quad (6.3)$$

$$v_{AB} = R_2 i_L \quad (\text{carga}) \quad (6.4)$$

Usando-as, constroem-se as retas da fonte e da carga apresentadas no gráfico da Figura 6.7. O ponto de cruzamento dessas retas (Q) corresponde à igualdade das expressões (6.3) e (6.4) e, portanto, define os valores de tensão e corrente que se estabelecem no regime permanente.

Figura 6.7 – Regime permanente.

Regime Transitório

Para estudar o regime transitório deste circuito deve-se estabelecer a equação diferencial que o representa e resolvê-la. Aplicando-se a análise nodal [ORSINI - 1971] no ponto de encontro entre R_2 , L e C , obtém-se:

$$i_{AB} = i_R = i_C + i_L \quad (6.5)$$

com $i_C = C \frac{dv}{dt}$, $i_L = \frac{1}{L} \int v dt$ e $R = R_1 + R_2$

para $t > 0$.

Por tentativa, propõe-se a seguinte função para a solução de (6.5):

$$v_{AB} = v = A e^{-\alpha t} \sin \omega t \quad (6.6)$$

Deriva-se e integra-se a expressão (6.6) e substituem-se os resultados em (6.5) com as condições de contorno: para $t = 0 \Rightarrow i_L = 0$ e para $t \rightarrow \infty \Rightarrow i_L = V/R$. Os resultados são os seguintes:

$$i_C = \frac{V}{R} e^{-\alpha t} \cos \omega t - \frac{\sqrt{L/C}}{2R} e^{-\alpha t} \sin \omega t \quad (6.7)$$

$$i_L = -\frac{V}{R} e^{-\alpha t} \cos \omega t - \frac{\sqrt{L/C}}{2R} e^{-\alpha t} \sin \omega t + \frac{V}{R} \quad (6.8)$$

$$i_R = \frac{V}{R} - \frac{\sqrt{L/C}}{R} e^{-\alpha t} \sin \omega t$$

com

$$A = \frac{\sqrt{L/C}}{R} V, \alpha = \frac{1}{2RC} \text{ e } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ para } \alpha \cong 0 \quad (6.9)$$

Usando-se as expressões (6.9), (6.6) e (6.8), desenha-se o diagrama no espaço de fase $i_L \times v_{AB}$ apresentado na Figura 6.8.

Figura 6.8 – Regime transitório.

Observa-se que, se α fosse igual a zero, teríamos nas direções dos eixos i_L e v_{AB} sinais senoidais de mesma frequência e com defasagem entre si, diferente de zero. Isto implicaria num movimento composto no diagrama de fase $i_L \times v_{AB}$ (órbita) na forma de uma elipse.

Com α diferente de zero, ocorre um amortecimento, sendo que a órbita correspondente é em forma de elipse, que diminui exponencialmente a cada volta (espiral - Figura 6.8). Para $t \rightarrow \infty$, os sinais i_L e v_{AB} tendem para as coordenadas do ponto Q, como previsto pela Figura 6.7.

6.1.5 Análise do CCH

Trocando-se o bipolo tipo fonte da Figura 6.6 pelo R_{NN} , descrito na seção 6.1.3, em paralelo com um capacitor (C_2), obtém-se o CCH (Figura 6.9).

Introduziu-se o capacitor C_2 para aumentar a dimensão do espaço de fase de dois para três com relação ao circuito original da Figura 6.6 e, assim, permitir a ocorrência de caos (ver seção A.2.3 do Apêndice). Neste caso, as variáveis de estado podem ser definidas como sendo: v_{C1} , v_{C2} e i_L .

Figura 6.9 – Circuito de Chua.

O resistor R' é do tipo usual (positivo) e será utilizado posteriormente para discutir o controle do CCH. Inicialmente, pode-se considerá-lo infinito.

A partir da inspeção da Figura 6.10, pode-se realizar a extração dos pontos do regime em que dv/dt e $di/dt \rightarrow 0$, ou seja, dos pontos Q_1 , Q_2 e O . A órbita se estabelecerá em torno dos pontos Q_1 e Q_2 , de uma maneira semelhante ao estudado na seção 6.1.4.

No diagrama de fase $i_L \times v_{AB}$ desta Figura, representa-se o R_{NN} como um bipolo tipo fonte, sendo a carga o resistor $R = 1k7\Omega$.

Figura 6.10 – Espaço de fase – pontos Q_1 , Q_2 e O .

O valor de C_2 é da ordem de $10 \times C_1$. Portanto, sua reatância capacitiva é maior que as demais impedâncias envolvidas no circuito para a frequência típica relacionada a uma volta do atrator, ou seja, a frequência de ressonância do circuito LC_1 . Para $L = 0,6H$ e $C_1 = 33\mu F$, tem-se:

$$XL = XC_1 = \sqrt{\frac{L}{C_1}} \cong 450\Omega, R = 1700\Omega, R_{NN} \in [-2350, -1300\Omega] \text{ e } XC_2 \cong 4500\Omega$$

Esta reatância está em paralelo com o R_{NN} , por conseguinte, em primeira aproximação, e por seu valor relativamente alto, ela não será considerada para se obter a Tabela 6.1. Nesta calculou-se a carga do circuito ressonante LC_1 como sendo a associação série dos resistores R e R_{NN} , isto é, $R_T = R + R_{NN}$.

	(ii)	(i)	(ii)
R_{NN}	$-2350 \, \Omega$	$-1300 \, \Omega$	$-2350 \, \Omega$
$R_T = R + R_{NN}$	$-635 \, \Omega$	$400 \, \Omega$	$-635 \, \Omega$
$\alpha = 1/2R_TC_I$	$\alpha < 0$	> 0	< 0
$e^{-\alpha t}$	<i>crescente</i>	<i>decrecente</i>	<i>crescente</i>

Tabela 6.1 – Segmentos do espaço de fase do CCH: (i) dissipação e
(ii) fornecimento de energia

Distinguem-se os segmentos:

- Em (ii), a órbita é de uma elipse crescente devido ao fornecimento de energia pelo R_{NN} ser maior que a dissipação pelo resistor R e, caso contrário;
- Em (i), a órbita é de uma elipse decrescente devido ao fornecimento de energia pelo R_{NN} ser menor que a dissipação pelo resistor R .

Na Figura 6.11, obtida por meio do circuito desenvolvido neste trabalho (seção 6.2), são apresentados casos típicos para as possíveis órbitas num CCH no diagrama de fase $v \times v_{AB}$: (a) tipo Rossler e (b) *double scrool*.

Figura 6.11 – Órbitas no CCH: (a) tipo Rossler e (b) *double scrool*.

Como previsto, nas regiões (ii) ocorrem espirais crescentes e, na região (i), a órbita tende a decrescer, podendo implicar na sua re-entrada para pontos mais próximos de Q_1 ou Q_2 .

Dependendo das condições, a órbita pode permanecer somente em torno de um dos pontos Q_1 ou Q_2 (atrator tipo Rossler) ou, então, alternando entre eles (atrator tipo *double scrool*).

Variando-se os resistores R e R' pode-se obter também um outro tipo de atrator: o ciclo limite (Figura 6.12).

Figura 6.12 – Órbitas no CCH: ciclo limite.

É importante ressaltar que a ocorrência ou não de caos, bem como o tipo de atrator resultante, dependerá dos valores dos componentes usados que, para cada situação, deverão obedecer a certas relações obtidas por uma análise quantitativa deste circuito [MADAN - 1993].

6.2 Implementação do CCH

6.2.1 Aspectos gerais

A implementação do hardware e software associados ao controle do CCH (Figura 6.13) será detalhada nas próximas seções. A seguir apresenta-se um resumo.

Figura 6.13 – Implementação do CCH.

Desenvolveu-se um circuito conversor AD (análogo-digital) de baixo custo, para ler os sinais v_{C1} e v_{C2} , selecionados para compor o espaço de fase deste sistema dinâmico. Tais leituras são transferidas para um computador PC compatível por meio de sua interface paralela e de software desenvolvido em C++ (DOS).

O valor do resistor R' (que está associado em paralelo com R_{NN}) é alterado em instantes definidos pelo controle OPF, para fixar a órbita [GALIAS & MURPHY & OGORZALEK-1997]. Esta alteração é realizada por software, com um controlador fuzzy de erro, e por hardware, a partir de saídas desta interface paralela.

O indutor utilizado no CCH foi implementado por meio de circuito girador, o que permitiu o ajuste simples de valores numa extensa faixa. Por exemplo, para $C = C_2 = 3,3 \mu\text{F}$ e $C_1 = 33 \mu\text{F}$, o resultado foi um tempo de uma volta pela órbita da ordem de 100ms.

O período de amostragem dos sinais v_{C1} e v_{C2} foi fixado em 1ms, o que implica que estes apresentem uma taxa de ocorrência de aproximadamente 100 amostras por volta. Foram adotadas resoluções de 256 níveis para as excursões em cada um dos eixos de coordenadas, horizontal e vertical.

Optou-se por utilizar um conversor AD de menor resolução (oito bits), embora isto não seja geralmente indicado por introduzir erro de quantização, cujo nível é da ordem da sensibilidade de um sistema caótico a pequenas variações [CHEN & DONG-1998].

Propôs-se e testou-se a seguinte estratégia para tratar este erro: os sinais v_{C1} e v_{C2} são filtrados por um filtro do tipo passa-baixas, implementado por software e com frequência de corte igual a 10 Hz.

6.2.2 Interface para PC

Para os testes no controle fuzzy do CCH, apresenta-se na Figura 6.14 a interface, com um computador PC – compatível. Tal interface foi implementada especificamente para este trabalho utilizando-se CI's CMOS.

Esta interface de controle realiza a leitura e geração de sinais para amostrar as tensões sobre os capacitores C_1 e C_2 , e para impor o valor de R' .

As leituras de v_{C1} e v_{C2} são realizadas por meio dos seguintes elementos (Figura 6.14): contador 4040, conversor DA, Mux 1 e comparador LM311. Utilizando a interface paralela do PC, é gerado o sinal *TIPO* para selecionar qual sinal (v_{C1} ou v_{C2}) será lido.

Figura 6.15 – Ajuste de resistor via PC.

6.2.3 Circuito girador como indutor

É apresentado na Figura 6.16 o circuito girador que foi utilizado na simulação do indutor no CCH. Considerando-se os amplificadores operacionais ideais, por conseguinte, as correntes em seus ramos $\pm$ são nulas, assim como a diferença de potencial entre eles.

Desta condição e aplicando-se as leis de Kirchhoff, pode-se escrever:

$$i = i_1, i_1' = i_1 + i_2, i_3' = i_3 + i_4, i_4 = i_5$$

$$v_1 = v_2, v_3 = v_4, v_5 = v \quad (6.10)$$

Usando as expressões (6.1) vem de $v_5 = v$ então $i_5 = \frac{v}{R_5} = i_4$ donde $v_4 = R_4 i_4 = R_4 \frac{v}{R_5} = v_3$

$$\text{e } i_3 = \frac{v_3}{R_3} = \frac{R_4 v}{R_5 R_3} = i_2.$$

Figura 6.16 – Circuito girador para simulação de indutor.

Logo $v_2 = \frac{i_2}{sC_2} = \frac{R_4 v}{R_5 R_3} \frac{1}{sC_2} = v_1$ da qual resulta $i_1 = \frac{v_1}{R_1} = \frac{R_4 v}{R_5 R_3} \frac{1}{sC_2} \frac{1}{R_1} = i$ e finalmente:

$$\frac{v}{si} = L = \frac{R_1 C_2 R_3 R_5}{R_4} \quad (6.11)$$

Conclui-se que a tensão e a corrente na saída do amplificador operacional A_1 são dadas por:

$$v_{s1} = v_5 + v_4 - v_3 - v_2 = v_5 - v_2 = v \left(1 - \frac{1}{s} \frac{R_4}{R_5 R_3 C_2} \right) \quad (6.12)$$

$$i_{s1} = -i_1' = -i_1 - i_2 = -v \frac{R_4}{R_3 R_5} \left(1 + \frac{1}{s R_1 C_2} \right) \quad (6.13)$$

De modo semelhante, a tensão e a corrente na saída do amplificador operacional A_2 seguem as expressões:

$$v_{s2} = v_5 + v_4 = v \left(1 + \frac{R_4}{R_5} \right) \quad (6.14)$$

$$i_{s2} = i_3' = i_3 + i_4 = \frac{v}{R_5} \left(1 + \frac{R_4}{R_3} \right) \quad (6.15)$$

Utilizando-se as expressões de (6.12) a (6.15), é possível projetar as excursões destes sinais em função dos limites do amplificador utilizado.

6.2.3 Filtro passa-baixas

Para diminuir o ruído de quantização, utilizou-se o filtro passa-baixas implementado em software de acordo com a Figura 6.17. As amostras são definidas como $x_n = x(nT_a)$ sendo T_a o período de amostragem.

Figura 6.17 - Filtro Passa-baixas.

O sinal filtrado corresponde à média aritmética das últimas m amostras:

$$y_n = \frac{x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+(m-1)}}{m} = \frac{x_n + x_n z^{-1} + \dots + x_n z^{-(m-1)}}{m} \quad (6.16)$$

Aplicando a Transformada Discreta de Fourier [HSU - 1995] na expressão (6.16), usando a seguinte propriedade desta transformada $F\{xz^{-k}\} = F\{x\}e^{-jk\Omega} = X(\Omega)e^{-jk\Omega}$ com $\Omega = \omega T_a$, resulta:

$$F\{y_n\} = Y(\Omega) = F\left\{\frac{x_n + x_n z^{-1} + \dots + x_n z^{-(m-1)}}{m}\right\} = \frac{F\left\{x_n \sum_{k=0}^{m-1} z^{-k}\right\}}{m} = X(\Omega) \frac{\sum_{k=0}^{m-1} e^{-jk\Omega}}{m}$$

Desta última expressão conclui-se que a função de transferência do filtro resulta em:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} e^{-jk\Omega}}{m} \quad (6.17)$$

A somatória na equação (6.17) é uma PG valendo $\sum_{k=0}^{m-1} r^{-k} = (r^m - 1) / (r - 1)$ com $r = e^{-j\Omega}$.

Assim, esta somatória pode ser escrita como:

$$H(\Omega) = \frac{1}{m} \frac{e^{-jm\Omega} - 1}{e^{-j\Omega} - 1} = \frac{1}{m} \frac{e^{-jm\Omega/2}}{e^{-j\Omega/2}} \frac{e^{-jm\Omega/2} - e^{jm\Omega/2}}{e^{-j\Omega/2} - e^{j\Omega/2}} = \frac{1}{m} \frac{e^{-jm\Omega/2}}{e^{-j\Omega/2}} \frac{\sin(m\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \quad (6.18)$$

Considerando-se o módulo da função de transferência, obtém-se de (6.18):

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{m} \left| \frac{\sin(m\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \right| \quad (6.19)$$

O gráfico desta função é apresentado na Figura 6.18 para $m = 24$ sendo $T_a = 1 \text{mseg}$. Nestas condições, a banda de passagem é de aproximadamente 10 Hz.

Figura 6.18 – Função de Transferência $|H(\Omega)| = \left| \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} \right|$.

O ruído de quantização, [PROAKIS & SALEHI 1994], de uma conversão AD de n bits é dada por: $SNR \cong -6n \text{ dB}$ igual a -48 dB para $n = 8$. Por outro lado, a banda deste ruído vale $B \cong 1/2T_a = 500 \text{ Hz}$. Logo, pode-se escrever:

$$SNR_{FPB} \cong SNR + 10 \log \frac{10 \text{ Hz}}{500 \text{ Hz}} \cong -48 - 17 = -65 \text{ dB}$$

Pode-se concluir daí que o número de bits equivalente após a filtragem é igual a:

$$n_{eq} = -(-65) / 6 \cong 11 \text{ bits}$$

sendo que, de acordo com [OGORZALEK & CHEN - 1999], esta resolução está no limite típico da sensibilidade de um sistema caótico a pequenas variações.

6.3 Controle Fuzzy do CCH

6.3.1 Análise qualitativa

Por meio de uma análise qualitativa, pode-se entender como neste trabalho se fixa uma órbita em torno de um ponto de referência no espaço de fase do CCH (Figuras 6.19 e 6.20):

- Para fechar a órbita, caso ela passe para fora do ponto de referência, aumenta-se a dissipação através da diminuição, por um pequeno intervalo de tempo, de um resistor (R') em paralelo com R_{NN} ou, em caso contrário;
- Se a órbita passar para dentro do ponto de referência, diminui-se a dissipação através do aumento, por um pequeno intervalo de tempo, deste resistor.

Figura 6.19 – Controle OPF do CCH – sinais no tempo.

Figura 6.20 – Controle OPF do CCH – diagramas no espaço de fase.

Com estes procedimentos, a órbita é “empurrada” na direção do ponto selecionado e, nestas condições, ela pode tornar-se fechada e periódica. Este é o controle do tipo Ocasional

Proportional Feedback (OPF) [HUNT - 1991] baseado no método de controle OGY [OTT, GREBOGI & YORKE - 1990].

6.3.2 Algoritmo para Controle do CCH

Apresenta-se a seguir o Algoritmo 6.1, para coleta de dados e controle do CCH, que foi utilizado para a obtenção das figuras 6.19 e 6.20.

```

1. Faça:
(a) Ler strobe
(b) se strobe=1 então
(c)   ler vc1
(d)   gerar Acknowledge    // obs: strobe volta pra zero
(e)   ler vc2
(f)   gerar Acknowledge    // obs: strobe volta pra zero
(g)   guardar vc1 e vc2 em fifo
      //implementada por fila circular e ponteiros de entrada e saída
      // fifo com tamanho máximo de  $\cong 4000$ 
(h)   calcular vc'1 e vc'2    // médias das 24 últimas amostras
(i)   guardar vc'1 e vc'2 em fifo //amostras filtradas
(j)   apresentar gráfico vc'1 × vc'2 // Figura 6.20 (últimas m amostras)
(k)   se vc'1 passar por vref1 no sentido crescente então    //controle
(l)       erro ← vc'2 – vref2
(m)       se |erro| < máximo
(n)            $\Delta R' \leftarrow f(\text{erro}) \times \Delta R'_{\text{max}}$     // FCF - Figura 6.21
(o)           impor saída  R' ← R'0 +  $\Delta R'$ 
(p)           {impor saída R' ← R'0 // após intervalo de tempo igual a  $\tau$ }
(q)           fim se
(r)   fim se
(s)   fim se

```

Algoritmo 6.1 – Coleta de dados e controle do CCH.

Algumas variações e detalhes de implementação não foram descritos, embora este pseudocódigo represente o controle fuzzy básico aplicado ao CCH.

Figura 6.21 – FCF normalizada para o controle do CCH.

6.4 Considerações Finais

A utilização de computadores permite a verificação do desempenho do controle para um caso real, além de propiciar uma maior flexibilidade quanto ao armazenamento e ao tratamento de órbitas com a técnica Fuzzy.

Por exemplo, normalmente utiliza-se um transistor FET para impor o resistor R' de controle. Alterando-se o potencial do *gate* ajusta-se o valor apresentado entre os terminais dreno e fonte deste componente. Deste modo, o valor do resistor obtido a priori não se relaciona de modo simples com o sinal de controle (depende, por exemplo, de variações estatísticas dos parâmetros do FET e/ou da temperatura, exigindo calibrações).

A proposta de utilização de chaves bilaterais (Figura 6.15), para implementar o resistor R' , não foi encontrada na literatura especializada constituindo uma contribuição original. Neste caso, o valor obtido para este resistor é bem definido com relação ao sinal binário de controle imposto por meio da porta paralela do PC. Isto permitiu relacionar, de modo simples e reproduzível, comportamentos do circuito de Chua (como por exemplo, a definição do tipo de atrator) com o valor do sinal binário de controle.

Também verificou-se ser possível o controle computacional fuzzy de um CCH com amostragem realizada por conversor AD de oito bits seguido por filtro passa-baixas para compensar esta baixa resolução.

Além disso, o *Hardware* projetado utiliza circuitos CMOS via interface paralela comum para interligar-se a um PC compatível. O *Software* é executado no sistema operacional (ou em janela) DOS sendo desenvolvido na linguagem C++.

Pode-se aplicar este projeto na área didática devido ao seu baixo custo e ao fato de não serem necessários recursos especiais de *Hardware* e *Software*.

6.5 Bibliografia Comentada

O controle OPF normalmente é implementado, utilizando-se circuitos analógicos. Verifica-se que tanto em [CHEN & DONG-1998], que aborda aplicações do caos, como também em [TORRES - 2001], que versa sobre o controle e sincronismo de osciladores caóticos, foram utilizadas interfaces AD conectadas a um computador para a leitura dos sinais de um sistema real.

No caso da segunda referência citada, foi utilizada uma placa de aquisição de dados e um ambiente de tempo real no sistema operacional Linux. No caso da primeira não foi detalhada a condição em que foram realizados os testes.

Para um estudo completo do CCH, o qual inclui temas sobre bifurcação, sincronização, aplicações, controle do caos e análise, recomenda-se consultar [MADAN - 1993].

7. Considerações Finais

Neste capítulo, são apresentadas as conclusões, verificado o cumprimento dos objetivos, descritas as contribuições do trabalho e propostos os trabalhos futuros.

7.1 Cumprimento dos objetivos

Nos capítulos 4, 5 e 6, por meio de simulações em bilhares e testes no circuito de Chua, procurou-se estabelecer e avaliar o desempenho da modelagem fuzzy, aplicando-se o conceito de Sistemas Dinâmicos Fuzzy Extrínsecos para fixação de trajetórias em sistemas caóticos conservativos ou não, objeto desta Tese.

O controle fuzzy sobre o BC perturbado (capítulo 4) foi desenvolvido tomando-se por base as respostas de jogadores em um jogo de ping-pong ou de pimball. Esta analogia foi utilizada para se estabelecer regras fuzzy, no controle do BC, por semelhança com o comportamento humano do operador (jogador).

Foram comparados os resultados das técnicas de controle, convencional e fuzzy, aplicadas à fixação de órbitas no BC perturbado. Para o controle fuzzy resultou uma duração do transitório menor e um sobre-sinal maior que os obtidos com o controle convencional. Deste modo, nas condições do teste, não se determinou uma preponderância evidente, em termos de desempenho, do controle convencional sobre o controle fuzzy e vice e versa.

Para o controle do BNGA (capítulo 5) foram consideradas diversas situações semelhantes (andar de bicicleta numa pista oval, jogar golfe ou patinar sobre uma pista inclinada) àquelas empregadas, por um controle clássico, na transferência de órbita de um centro de massa para o outro. Os comportamentos humanos serviram de base para se estabelecer as regras fuzzy que definiram as FCF's utilizadas no controle fuzzy desta transferência.

A análise dos resultados das técnicas de controle, convencional e fuzzy, aplicadas a fixação de órbitas no BNGA, permitiu detectar que ao controle fuzzy correspondeu um tempo médio de transferência maior e um gasto médio de energia menor para esta transferência comparativamente aos valores obtidos com o controle convencional. Logo, nas condições do teste, também não se determinou uma preponderância evidente de um dos dois tipos de controle (convencional ou fuzzy) sobre o outro.

Para o circuito de Chua (capítulo 6) testou-se com sucesso um controle computacional fuzzy. O controle do circuito de Chua empregou uma FCF do tipo *correção* = $f(\text{erro})$, examinada na seção 3.3. Observa-se que, fundamentalmente um controlador fuzzy de erro simula ações humanas para que este seja minimizado, como pode ser apreendido da discussão apresentada na seção 3.2.1.

Logo, os resultados obtidos nos Estudos de Caso demonstraram desempenhos adequados de controladores fuzzy (baseados diretamente em habilidades humanas) aplicados aos sistemas caóticos conservativos ou não.

7.2 Contribuições do trabalho

O mapeamento realizado sobre a Teoria Fuzzy com outras áreas do conhecimento evidenciou uma forte relação desta teoria com a dos Sistemas Dinâmicos, sendo que neste trabalho, foi proposta a seguinte classificação (taxonomia) para caracterizar esta relação:

- Sistemas Dinâmicos Fuzzy Extrínsecos (SDFE): As regras fuzzy não fazem parte das equações do sistema.
- Sistemas Dinâmicos Fuzzy Intrínsecos (SDFI): As equações do sistema são estabelecidas através de regras fuzzy.

Com esta classificação, dividiu-se o enfrentamento do problema do desenvolvimento de ferramentas analíticas para o domínio de sistemas fuzzy em duas fases. A primeira que é objeto deste trabalho e está relacionada aos SDFE's, permitiu o uso do controle fuzzy de caos, tanto para sistemas não conservativos, como para os sistemas hamiltonianos (conservativos).

Neste trabalho desenvolveu-se, testou-se e verificou-se a viabilidade da aplicação do controle fuzzy de caos em sistemas hamiltonianos, o que, até o momento da realização deste trabalho, não foi detectado em publicações (revistas e/ou eventos) relevantes na literatura especializada.

Baseando-se na literatura especializada, ou através de argumentações próprias, mostraram-se diversas aplicações do SDFI's, tais como no estudo de dinâmica de populações, da Física e de Inferências em Lógica Fuzzy, o que demonstra a importância e abrangência desta classe de sistemas.

Para consolidar a conceituação dos SDFI's, discutiu-se a Lógica Sequencial Fuzzy, definindo-se um Astável Fuzzy pela realimentação em circuitos combinatórios fuzzy. Demonstrou-se que o seu comportamento é descrito pela função logística com parâmetro igual a 4, sendo que isto corresponde a um comportamento caótico.

Foi também proposto, desenvolvido e construído o circuito de um Astável Fuzzy.

Destacam-se ainda, da pesquisa realizada sobre Sistemas Dinâmicos (SD), alguns tópicos que foram desenvolvidos:

- A seqüência de temas escolhida para a introdução dos SD's;
- Os exemplos sobre o Ciclo Limite por sua simplicidade;
- O cálculo do Expoente de Lyapunov por sua didática;
- A análise (didática) sobre o comportamento das órbitas próximas às variedades;
- A definição de um novo tipo de bilhar: O Bilhar Newtoniano de Garms & Andrade, utilizado no estudo de caso sobre controle fuzzy de caos em sistemas hamiltonianos (não foi encontrada proposta de modelo similar na literatura);
- As análises detalhadas de como foram obtidas as equações de simulação, tanto do BC como do BNGA.

Sobre o circuito Chua podem-se destacar as seguintes particularidades de implementação e/ou contribuição:

- Tratamento computacional sobre circuito de Chua real;
- Desenvolvimento e implementação de todos os circuitos, algoritmos e programas;
- Utilização de um conversor AD de oito bits seguido por filtro passa-baixas implementado por software para compensar a baixa resolução (contribuição não encontrada na literatura);
- Utilização de circuito girador para implementar o indutor, de modo a tornar mais simples a alteração de seu valor;
- Proposta e implementação de um circuito para definir o resistor de controle (R' – Figura 6.9) que permitiu relacionar de modo simples e reproduzível comportamentos do circuito de Chua com o valor do sinal binário de controle (aplicado via porta paralela do PC), que foi outra contribuição não encontrada na literatura.

7.3 Conclusões

Nos Estudos de Caso procurou-se buscar situações de sistemas caóticos que pudessem ser modelados e/ou controlados de maneira análoga ao comportamento de especialistas humanos. Baseando-se na modelagem Fuzzy da habilidade humana, que seria mapeada por meio de Funções Características Fuzzy, foi possível fixar para os Estudos de Caso uma trajetória, ou um “passeio” por pontos ou regiões predefinidas do espaço de fase, ou do próprio espaço de configuração.

É possível sustentar a conclusão anterior porque, embora os Estudos de Caso estejam relacionados a situações específicas, uma maneira de se estender estes resultados parte das seguintes afirmações gerais:

- Pode-se controlar o caos se, periodicamente, somarmos um sinal na excitação ou alterarmos um parâmetro do sistema [PETTINI-1988];
- Sendo dados dois pontos do espaço de fase em uma região densamente preenchida, então existe uma trajetória tão próxima quanto se queira destes pontos [OTT & GREBOGI C e YORKE -1990].

Considerando-se o anteriormente exposto e os experimentos realizados, pode-se, então, concluir a efetividade do controle fuzzy do caos (conservativo ou não) com base em ações racionais.

Por outro lado, os SDFI's apresentam-se em diversas situações, tais como dinâmica de populações, em estudos da Física e Ciência e em Lógica Fuzzy. Dos artigos referentes a estes temas, alguns podem ter um caráter especulativo, embora no conjunto indiquem a necessidade de resultados mais abrangentes que englobem comportamentos complexos.

7.4 Trabalhos Futuros

O estudo dos SDFI's exigiria muitos outros conceitos e resultados matemáticos, além dos apresentados no Apêndice B. Sendo assim, deixou-se para um outro trabalho específico o aprofundamento deste segundo tema, muito embora seu tratamento tenha continuidade a partir do presente estudo sobre sistemas dinâmicos e controle fuzzy.

Para tal, todos os algoritmos desenvolvidos, tanto para obtenção das tabelas, gráficos e figuras, como para as simulações e para o controle real (circuito de Chua), estão disponíveis e serão importantes para estudos futuros. Por outro lado, na seção A.8 apresentou-se um roteiro bibliográfico para o aprofundamento no estudo dos Sistemas Dinâmicos.

Em [SANJEEV-2006] foi proposto e estudado um modelo não linear para a “Máquina-Humana”, sendo tal modelo aplicado a um sistema de controle de altitude de um avião. Neste estudo o comportamento humano revelou-se caótico quando em situação de alto risco, o que indica a possibilidade de se explorar o controle fuzzy de caos baseado em reações humanas caóticas em situações extremas.

Quanto aos SFDE's, pode-se explorar o controle fuzzy de caos baseado em reações humanas caóticas em situações extremas como as discutidas no artigo citado.

Referências

- [AGUIAR-1992] – AGUIAR M.A.M. Caos em Sistemas Hamiltonianos. Minicurso apresentado no Instituto de Física da USP, Fev. 1992.
- [ALLIGOOD & SAUER & YORKE-1997] – ALLIGOOD K.T., SAUER T. D. e YORKE J.A. Chaos an Introduction to Dynamical Systems. Springer-Verlag, 1997.
- [ALMEIDA – 1991]- ALMEIDA A.M.O. Sistemas Hamiltonianos. Editora Unicamp, 1991.
- [ANILE & FALCIDIENO-2000] - ANILE A.M. e FALCIDIENO B. Modeling uncertain data with fuzzy B-splines. Fuzzy Sets and Systems 113 (2000) 397-410.
- [ARBEX-96] - ARBEX R.T. Um ambiente para desenvolvimento de controladores Fuzzy. Dissertação para obtenção de título de Mestre em Engenharia, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1996.
- [ARNOLD-1985] – ARNOLD V. Equações diferenciais ordinárias. Editora Mir, 1985.
- [ARNOLD-1987] - ARNOLD V. Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica. Editora Mir, 1987.
- [ARNOLD & AVEZ-1968] - ARNOLD V. e AVEZ A. Ergodic Problems of Classical Mechanics. W.A. Benjamin, Inc, 1968.
- [ARROWSMITH & PLACE-1982] – ARROWSMITH D.K. e PLACE C.M. Ordinary Differential Equations. Chapman and Hall, 1982.
- [BARROS-1997] - BARROS L.C. Sobre Sistemas Dinâmicos Fuzzy - Teoria e Aplicações. Tese de Doutorado - IMECC - UNICAMP, 1997.
- [BARROS & BASSANEZI & TONELLI-2000] - BARROS, L.C., BASSANEZI, RC. e TONELLI, P.A. Attractors and asymptotic stability for fuzzy dynamical systems. Fuzzy Sets and Systems 113, p.473-483, 2000.
- [BELINDO & ACOSTA & VALENCIA & HUERTAS- 1992] – BELINDO M.J., ACOSTA A.J., VALENCIA M. e HUERTAS J.L. Simple binary Random Number. Electronics Letters, 1992, vol. 28 no. 7, pp. 617-618.
- [BELLO & KWAN & TUNG – 1997] - BELLO A., KWAN B.W. e TUNG L.J. Electronic Implementation of Fuzzy Systems. IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics. 'Computational Cybernetics and Simulation', 1997, p.3686-3691 vol.4.
- [BERGÉ & POMEAU & GANGE-1994] - BERGÉ P., POMEAU Y. e GANGE M.D. Dos Ritmos ao Caos. Editora Unesp, 1994.
- [BERRY- 1981]- BERRY M. V. Regularity and Chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of circular 'billiard'. Eur.J.Phys. v.2, p. 91-102. 1981.

[BOLLT & MEISS-1995] BOLLT E.M e MEISS J.D. Targeting chaotic orbits to the Moon through recurrence. Physics Letters A 204 p. 373-378, Aug..1995.

[CALVO & CARTWRIGHT-1998] - CALVO O. e CARTWRIGHT J.H.E. Fuzzy Control of Chaos. Int. J. Bifurcation and Chaos 8, 1743-1747, 1998.

[CHEN & DONG-1998] - CHEN G., DONG X. From Chaos to Order. World Scientific 1998.

[CHOW- 1995] – CHOW T.L. Classical Mechanics. John Wiley & Sons, Inc., 1995.

[DRIANKOV & HELLENDORRN & REINFRANK-1996] - DRIANKOV D., HELLENDORRN H. e REINFRANK M. An Introduction to Fuzzy Control. Prentice Hall, 1996.

[DUBÉ & DESPRÉS – 2000] – DUBÉ L. J., DESPRÉS D. The Control of Dynamical Systems – Recovering Order from Chaos. ArXiv: nlin.CD/ 0008006 v1, 4 Aug 2000.

[DUDEK & DAVVAZ & JUN - 2005] – DUDEK W.A., DAVAAVAZ b., JUN Y.B. On intuitionistic fuzzy sub-hyperquasigroups of hyperquasigroups. ArXiv: math.GM/0503138 v1, 8 Mar 2005.

[ERIKSON & HILL- 1949] – ERIKSON H.A., HILL E.L. A note on the One-Electron States of Diatomic Molecules. Physical Review, v.75, No. 1, January 1949.

[FERRARA & PRADO-1994] – FERRARA N.F. e PRADO C.P.C. Caos uma Introdução. Editora Edgard Blucher Ltda, 1994.

[FEYMMAN-1987] - FEYMAN R. P. Física. vol 1, cap. 9. Addison Wesley, 1987.

[FRIEDEN – 2004] - FRIEDEN B.R. Science from Fisher Information. Cambridge University Press, 2004.

[FRIEDMAN & SANDLER-1995] - F. YAAKOV FRIEDMAN Y. e SANDLER L. Evolution of systems under fuzzy dynamic laws. Fuzzy Sets and Systems 86, p 61-74, Aug. 1995.

[FRIEDMAN & SANDLER-1999] - F. YAAKOV FRIEDMAN Y. e SANDLER L. Fuzzy dynamics as an alternative to statistical mechanics. Fuzzy Sets and Systems 106 (1999) 61-74.

[GALIAS & MURPHY & OGORZALEK- 1997]- GALIAS A.M., MURPHY C.A., OGORZALEK M.J. Eletronic Caos Controller. Chaos, Solitons & Fractal , v.8, No. 9, p. 1471-1484, 1997.

[GALICHET & FOULLOY-95] - GALICHET S.e FOULLOY L. Fuzzy Controllers: Synthesis and Equivalences. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 4,no. 1,p.14-23,May, 1996.

[GARMS & ANDRADE - 2001] - GARMS M.A. e ANDRADE M. T. C. Aplicação da Teoria Nebulosa em Sistemas de Auxílio motor. Dissertação de Mestrado – Escola Politécnica - USP, 2001.

[GARMS & TOZZE & FERNANDES-2003] - GARMS M.A., TOZZE O. e FERNANDES R. Characterisation of central Office main distribution frame for ADSL-DMT services. IEE Science, Measurement & Technology, v.150, no.6, p.266-272, November 2003.

[GNICOLIS-1995]- GNICOLIS G. Introduction to Nonlinear Science. Cambridge University Press, 1995.

[GOLDSTEIN- 1972] – GOLDSTEIN H. Classical Mechanics. Addison Wesley Publishing Company, 1972.

[GRANIK & CAULFIELD- 2001] – GRANIK A. e CAULFIELD H.J. Fuzziness Quantum Mechanics. ArXiv:quant-ph/0107054 v1, 9 Jul 2001.

[GRIM-1993] - GRIM P. Self-Reference and Chaos in Fuzzy Logic. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 1, no. 4, p. 237-253, Nov 1993.

[GUCKENHEIMER & HOLMES-1983] – GUCKENHEIMER J. e HOLMES P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vectors Fields. Springer-Verlag, 1983.

[HELFRICH- 1972] – HELFRICH K. Constants of Motion for Separable One-Particle Problems with Cylinder Symmetry. Theoret. Chim. Acta, v24, p. 271-282, 1972.

[HIRASAWA & WANG & MURATA & HU & JIN- 2000] - HIRASAWA K., WANG X., MURATA J., HU J., JIN C. Universal learning network and its application to chaos control. Neural Networks, 13(2), p. 239-253, Mar 2000.

[HIRSCH & SMALE-1974] - HIRSCH M.W. e SMALE S. Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra. Academic Press, 1974.

[HOLMGREN-1996] – HOLMGREN R.A. A First Course in Discrete Dynamical Systems. Springer-Verlag, 1996.

[HSU - 1995] – HSU H.P. Signals and Systems - Schaum's Outlines Series. MacGraw-Hill, 1995.

[HUNT-1991] - HUNT E.R. Stabilizing High-Period Orbits in a Chaotic System: The Diode Resonator. Physical Review Letters , v.67, No. 15, p. 1953-1955, October 1991.

[JOSÉ & SALETAN-1998] - JOSÉ V. J. e SALETAN E.S. Classical Dynamics a Contemporary Approach. Cambridge University Press, 1998.

[JOO & SHIEH & CHEN- 1999] – JOO Y.H., SHIEH L.S., CHEN G. Hybrid State-Space Fuzzy Model-Based Controller with Dual-Rate Sampling for Digital Control of Chaotic Systems, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, v.7, No. 4, August 1999.

[KALEVA- 1987] – KALEVA O. Fuzzy Differential Equations. Fuzzy Sets And Systems. 1987.

[KANDEL & LANGHOLZ -1994] - KANDEL A. e LANGHOLZ G. Fuzzy Control Systems. CRC Press, 1994.

[KAPITANIAK-2000] - KAPITANIAK T. Chaos for Engineers, Theory, Applications, and Control. Springer-Verlag, 2000.

[KAUFMANN & GUPTA-1991] – KAUFMANN A. e GUPTA M.M. Introduction to Fuzzy Arithmetic. International Thomson Computer Press, 1991.

[KHALIL-96] - KHALIL H.K. Nonlinear Systems Prentice Hall, 1996.

[KIM & CHO & PARK-96] - KIM S., CHO Y. e PARK M. A Multirule Base Controller Using the Robust Property of a Fuzzy Controller and its Design Method. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 4, no. 3, p.315-327, Aug, 1996.

[KLIR & CLAIR & YUAN - 97] - KLIR G.J., CLAIR U.H. ST. e YUAN B. Fuzzy Set Theory. Foundations and Applications. Prentice Hall, 1997.

[KLIR & YUAN - 95] - KLIR G.J. e YUAN B. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Prentice Hall, 1995.

[KORSH & LANG- 1991] – KORSH H.J., LANG J. A new integrable gravitational billiard. J. Phys. A: Math. Gen., p. 45-52, 1991.

[KORSH & JODL- 1994] – KORSH H.J., JODL J. Chaos – A program collection for the PC. Springer-Verlag, 1994.

[KOSKO-1997] - KOSKO B. Fuzzy Engineering. Prentice Hall, 1997.

[KOSTELICH & OTT & GREBOGI & YORKE-1993] - KOSTELICH E.J., OTT E., GREBOGI C. e YORKE J.A. Higher-dimensional targeting. Physical Review E , v.65, No. 47, p. 305-310, January 1993.

[LANDAU & LIFCHITZ- 1966]- LANDAU L., LIFCHITZ E. Mécanique, p.204-210, MIR, 1966.

[LAI-1994] - LAI Y.C. Controlling chaos. Computers Physics 8, 62-67, 1994.

[LAI & DING & GREBOGI- 1993]- LAI Y.C., DING M., GREBOGI C. Controlling Hamiltonian chaos. Physical Review E , v.47, No. 1, p. 86-92, January 1993.

[LEE 1-1990] - LEE C.C. Fuzzy Logic in control Systems - Part I. Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, vol. 20, no. 2, p.404-418, March/April, 1990.

[LEE 2-1990] - LEE C.C. Fuzzy Logic in control Systems - Part II. Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, vol. 20, no. 2, p.419-435, March/April, 1990.

[LEMOS-2004] – LEMOS N. A. Mecânica Analítica. Livraria da Física Editora, 2004.

[MACAU & GREBOGI-2004] - MACAU E.E.N. e GREBOGI C. Surfando no Caos. Ciência Hoje, vol 34, no. 204, p.20-27, maio 2004.

[MADAN- 1993] – MADAN R.N. Chua's Circuit: A Paradigm for CHAOS. World Scientific, 1993.

[MAEDA & SATO & MURAKAMI-90] - MAEDA, SATO T. e MURAKAMINS. Design of the self-tuning fuzzy controller. Proceedings of the International Conference on Fuzzy Logic and Neural Networks, Iizuka, Japan, p. 393-396, 1990.

[MUSKINJA & TOVORNIK & DONLANGIÉ-97] - MUSKINJA N., TOVORNIK B. e DONLANGIÉ D. How to Design a Discrete Supervisory Controller for Real-Time Fuzzy Control Systems. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 5, no. 2, p.14-23, May, 1997.

[MARSDEN & RATIU-1999] - MARSDEN J.E. e RATIU T.S. Introduction to Mechanics and Symmetry. Springer-Verlag, 1999.

[MATEESCU-1995] - MATEESCU A. Lexical analysis with a simple finite-fuzzy-automaton model. Journal of Computer Science, 1995.

[MONTEIRO- 2006]- MONTEIRO L.H.A. Sistemas Dinâmicos. Livraria da Física editora, 2006.

[MUSKINJA & TOVORNIK & DONLANGIÉ-97] - MUSKINJA N., TOVORNIK B. e DONLANGIÉ D. How to Design a Discrete Supervisory Controller for Real-Time Fuzzy Control Systems. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 5, no. 2, p.14-23, May, 1997.

[OGORZALEK & CHEN- 1999] – OGORZALEK M.J., CHEN G. (editor) Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems: Design and Implementation of Chaos Control Systems, p. 45-69, CRC Press 1999.

[ORDÓÑEZ & ZUMBERGE & SPOONER & PASSINO-97] - ORDÓÑEZ R., ZUMBERGE J., SPOONER J.T.e PASSINO K.M. Adaptive Fuzzy Control: Experiments and Comparative Analyses. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 5, no. 2, p.167-188, May, 1997.

[ORSINI- 1971]- ORSINI L. Q. Circuitos Elétricos. Editora Edgar Blucher, 1971.

[OTT & GREBOGI & YORKE-1990] - OTT E., GREBOGI C. e YORKE J. A. Controlling chaos. Phys. Rev. Lett. 64, 1196-1199, 1990.

[OTT & GREBOGI & SHINBROT & YORKE-1990] - SHINBROT T. S., OTT E., GREBOGI C. e YORKE J.A. Using Chaos to Direct Trajectories to Targets. Physical Review Letters, v.65, No. 26, p. 3215-3218, December 1990.

[PALM & DRIANKOV & HELLENDORF-1996] - PALM R., DRIANKOV D. e HELLENDORF H. Model Based Fuzzy Control. Springer-Verlag, 1996.

[PARS- 1965]- PARSE L.A. A Treatise on Analytical Dynamics. Heinemann Educational Books, 1965.

[PASSINO & YURKOVICH- 1997] - PASSINO K.M. e YURKOVICH S. Fuzzy Control. Addison Wesley, 1997.

[PASTERNAK-1992] - PASTERNAK P. Do Caos à Inteligência Artificial. Editora Unesp, 1992.

[PATYRA & MAREK - 1996] - PATYRA e MAREK J. Fuzzy Logic Hardware Implementations. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, v.4, no.4, p.401-475, Nov. 1996.

[PEITGEN & JURGENS & SAUPE-1992] - PEITGEN H.O., JURGENS H. e SAUPE D. Chaos and Fractals. Springer-Verlag, 1992.

[PERCIVAL & RICHARDS-1982] – PERCIVAL I. e RICHARDS D. Introduction to Dynamics. Cambridge University Press, 1982.

[PETTINI- 1988]- PETTINI I. Controlling Chaos through parametric excitations. Dynamics and Stochastic Processes. Springer-Verlag, p. 242-250, 1988.

[PREDEBON & ANDRADE - 2000] - PREDEBON M. A. e ANDRADE M. T. C. Aplicação da Teoria FUZZY em Telecomunicações. Trabalho para Pós Graduação em Sistemas de Telecomunicações e Redes. Escola Politécnica Universidade de São Paulo, USP, Abril 2000.

[PRIGOGINE 1 – 1996] - PRIGOGINE I. O fim das certezas. Editora Unesp, 1993.

[PRIGOGINE 2 – 1996] - PRIGOGINE I. As leis do Caos. Editora Unesp, 1996.

[PROAKIS & SALEHI 1994]- PROAKIS J.G. e SALEHI M. Communication Systems Engineering. Prentice Hall, 1994.

[QIN & BORDERS-94] - QIN S.J.e BORDERS G. A Multiregion Fuzzy Logic Controller for Nonlinear Process Control IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 2, no. 1, p.75-81, Feb, 1994.

[RABUSKE-95] - RABUSKE R.A. Inteligência Artificial. Ed. da UFSC, 1995.

[REN & LIU-2002] – REN H., D. LIU. Chaos Control and Anti-control via a Fuzzy Neural Network Inverse System Method. Chinese Phys. Lett., v 19, No. 8, 2002.

[REYL & FLEPP & BADDI & BRUN – 1993] - REYL C., FLEPP L., BADDI R., BRUN E. Phys. Rev. E 47, 267 – 1993.

[RIGATOS & TZAFESTAS-2002] - RIGATOS G. e TZAFESTAS S.G. Parallelization of a Fuzzy Control Algorithm Using Quantum Computation. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol.10, no.4, p.451-469, Aug 2002.

[ROY & MAIER & HUNT-1992] - ROY R., MURPHY T.W., MAIER T.D., GILLS Z. e HUNT E. R. Dynamical Control of a Chaotic Laser: Experimental Stabilization of a Globally Coupled System. Physical Review Letters, v.68, No. 9, p. 1259-1262, March 1992.

[SANJEEV-2006]- SANJEEV S. An Exploratory Study of Chaos in Human-Machine System Dynamics. IEEE Transactions on Systems, Man, And Cybernetics—Part A: Systems and Humans, vol. 36, no. 2, Mar 2006.

[SANZ - 1994]- SANZ A. Analog implementation of Fuzzy controller. IEEE World Congress on Computational Intelligence, Proceedings of the Third IEEE Conference on Fuzzy Systems, June 1994, p.279-283 vol. 1.

[SANTOS & CALDAS- 2001]- SANTOS E.P. e CALDAS I.L. Bifurcações, Controle e Sincronização nos Circuitos de Matsumoto-Chua. Tese apresentada no Instituto de Física da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências, 2001.

[SEIKKALA-1987] - SEIKKALA S. On the fuzzy initial value problem. Fuzzy Sets and Systems 24, p. 309-330, 1987.

[SOUZA & CALDAS- 2004]- SOUZA S.L.T., CALDAS I.L. Controlling chaotic orbits in mechanical systems with impacts. Chaos, Solitons and Fractals 19, p. 171-178, 2004.

[STROGATZ-1994] - STROGATZ S.H. NonLinear Dynamics and Chaos. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[TANAKA-95] - TANAKA K. Stability and Stabilizability of Fuzzy-Neural-Linear Control Systems. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 3, no. 4, p.438-445, Nov, 1995.

[TANAKA & IKEDA & WANG- 1998] - TANAKA K., IKEDA T., WANG H.O. A unified Approach to Controlling Chaos via LMI-Based Fuzzy Control System Design. IEEE Transactions on circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, v.45, No. 10, October 1998.

[TORRES – 2001] – TORRES L. A. B. Controle e Sincronismo de Osciladores Caóticos. Tese de Doutorado. UFMG/PPGEE, outubro 2001.

[THIRRING-1978] – THIRRING W. Classical Dynamical Systems – A course in Mathematical Physics I. Springer-Verlag, 1978.

[UDAWATTA & WATANABE & KIGUCHI & IZUMI- 2002] – UDAWATTA L., WATANABE K., KIGUCHI K., IZUMI K. Fuzzy-Chaos Hybrid Controller for Controlling of Nonlinear Systems. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, v.10, No. 3, June 2002.

[VITTOT & CHANDRE & CIRAOLO & LIMA- 2004] – VITTOT M., CHANDRE C., CIRAOLO G., LIMA R. Localized control for non-resonant Hamiltonian systems. ArXiv:nlin.CD/0405056 v1, 24 May 2004.

[WANG-97] - WANG X.L. A course in Fuzzy Systems and Control. Prentice Hall, 1997.

[WANG & SHANG & WANG – 2004] – WAN F., SHANG H. e WANG L. X. Control of discrete-time chaotic systems using one-step-ahead adaptive fuzzy controller. 2004 IEEE International Conference Proceedings on Fuzzy Systems, 2004. Volume 3, 25-29 July 2004 Page(s):1281 - 1286 vol.3.

[WEBER & KLEIN-2003] - WEBER L. e KLEIN P.A.T. Aplicação da Lógica Fuzzy em Software e Hardware. Editora da ULBRA, 2003.

[WRESZINSKI-1997] – WRESZINSKI W.F. Mecânica Clássica Moderna. Editora da Universidade de São Paulo, 1997.

[YAGER & FILEV-94] - YAGER R.R e FILEV D.P. Essentials of Fuzzy Modeling and Control. Wiley-Interscience, 1994.

[YDRIS-2001] – YDRIS B. Fuzzy Phisics. ArXiv: hep-th/ 0110006 v1, 30 Sep 2001.

[YEN & DAUGHERITY & WANG & RATHAKRISHNAN-95] - YEN J., DAUGHERITY W.C., WANG H., RATHAKRISHNAN B. Two Automated Tuning Methods for Fuzzy Logic-Based Process Control. Industrial Applications of Fuzzy Logic and Intelligent Systems (YEN J., LANGARI R., ZADEH L.A.) Inst. of Electrical, capítulo 12, p.227-245, April, 1995.

[ZADEH-1965] - ZADEH L. A. Fuzzy Sets Information and Control, vol. 8, p.338-353, 1965.

Referências Adicionais

[ANDRADE - 1998] - TÚLIO M.C.A. Computação Fuzzy. Notas de aula da disciplina PCS711 do curso de pós-graduação do Departamento de Engenharia de Computação e Sistemas Digitais da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1997.

[BARROS & BASSANEZI & TONELLI-1987] - BARROS, L.C., BASSANEZI, RC. e TONELLI, P.A. On the continuity of Zadeh's extension. Seventh IFSA World Congress – Prague, 1987.

[BARROS & BASSANEZI & TONELLI - 2000] - BARROS L.C., BASSANEZI R.C. e TONELLI P.A. Fuzzy modelling in population dynamics. Ecological Modelling 128 (2000) 27-33.

[BUCKLEY & FEURING & HAYASHI - 1999] - BUCKLEY, J.J., FEURING T., HAYASHI Y.

Multivariate non-linear fuzzy regression. IEEE International Fuzzy Systems Conference Proceedings, 1999. FUZZ-IEEE '99. , 22-25 Aug. 1999, Page(s):714 - 718 vol.2.

[CHEN & CHEN – 2000] – CHEN L. e CHEN G. Fuzzy modeling, prediction, and control of uncertain chaotic systems based on time series. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 47, Issue 10, Oct. 2000 Page(s):1527 – 1531.

[CHEN & LEE & CHANG - 1996] – CHEN B.S, LEE C.H. e CHANG Y.C. H_{∞} tracking design of uncertain nonlinear SISO systems: adaptive fuzzy approach. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 4, Issue 1, Feb. 1996, Page(s): 32 – 43.

[CORDON & HERRERA - 2000] – CORDON O. e HERRERA F. A Proposal for Improving the Accuracy of Linguistic Modeling. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 8, no. 3, p.335-344, Jun, 2000.

[DIAMOND & KLOEDEN-1990] – DIAMOND P., KLOEDEN P. Metric Spaces of Fuzzy Sets. Fuzzy Sets And Systems. 1990.

[DOMINGUES & RIGHETO & TEIXEIRA & OKI - 2003] - DOMINGUES P.E., RIGHETO E., TEIXEIRA M.C.M. e OKI N. A controller design used in Lorenz synchronization chaotic system for secure communication based on LMI fuzzy control system Circuits and Systems, 2003. Proceedings of the 46th IEEE International Midwest Symposium on MWSCAS '03. 27-30 Dec. 2003, Page(s): 916 – 921, vol. 2.

[GANG & LAIJIU - 1995] - GNAG J. e LAIJIU C. Linguistic stability analysis of fuzzy closed loop control systems. Fuzzy sets and Systems 82,p.27-34, 1995.

[INOUE & UENO & MOTOMURA & MATSUO & SETOGUCHI – 1991] - INOUE T., UENO F., MOTOMURA T., MATSUO R., SETOGUCHI O. Analysis and design of analog CMOS building blocks for integrated fuzzy inference circuits. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1991, 11-14 June 1991, Page (s): 2024 - 2027 vol.4.

[KALEVA & SEIKKALA- 1984] – KALEVA O., SEIKKALA S. On Fuzzy Metric Spaces. Fuzzy Sets And Systems. 1984.

- [KLOEDEN – 1982]. Fuzzy Dynamical Systems. Fuzzy Sets And Systems. 1982.
- [LEUNG & LAM & TAM-1998] - LEUNG F.H.F., LAM H.K. e TAM P.K.S. Design of fuzzy controllers for uncertain nonlinear systems using stability and robustness analyses. Fuzzy sets and Systems 35, p.237-243, 1998.
- [LI & PARK & JOO-2001] – LI Z., PARK J.B. e JOO Y.H. Chaotifying continuous-time TS fuzzy systems via discretization. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 48, Issue 10, Oct. 2001 Page(s): 1237 – 1243.
- [LIN & WANG – 2005] - LIN Y., WANG F.Y. Predicting chaotic time series using adaptive wavelet-fuzzy inference system. IEEE Intelligent Vehicles Symposium, 2005. Proceedings. 6-8 June 2005 Page(s):888 – 893.
- [MALKI & LI & CHEN - 1994] - MALKI H.A., LI H. e CHEN G. New Design and Stability Analysis of Fuzzy Proportional-Derivative Control Systems. Transactions on Fuzzy Systems, vol.2, no. 4, p.245-252, Nov, 1994.
- [NASCIMENTO JR.& YONEYAMA-2000] - NASCIMENTO JR. C.L. e YONEYAMA T. Inteligência Artificial em controle e automação. Ed. Edgard Blucher, 2000.
- [SONG & ZUO & ZHANG – 2005] – SONG H., ZUO J. Z. e ZHANG F.M. A new model of generating chaos. Fourth IEEE Conference on Cognitive Informatics, 2005. (ICCI 2005), p. 80 – 85, Aug. 2005.
- [SOUZA & TONELLI - 2001] – SOUZA S. A. O., TONELLI P. A. Dissipatividade em Sistemas Dinâmicos Fuzzy Discretos. Tese de Doutorado - IME - USP, 2001.
- [TACOSHI - 2000] – TACOSHI JR., M. Modelamento de tarifação por conjuntos nebulosos para controle de admissão de conexão em redes ATM. Tese para obtenção de título de Doutor em Engenharia, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2000.
- [TEIXEIRA & ZAK - 1999] – TEIXEIRA M. C. M. & ZAK S. H. Stabilizing Controller Design for Uncertain Nonlinear Systems Using Fuzzy Models. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 7, no. 2, p.133-142, Apr, 1999.
- [WANG & TANAKA & GRIFFIN - 1995] - WANG H.O., TANAKA K., GRIFFIN M.G. An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 4, no. 1, p.14-23, Feb, 1996.
- [YEH - 2000] – YEAH Z.M. A Systematic Method for Design of Multivariable Fuzzy Logic Control Systems. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol.7, p.741-752, 1999.
- [YEONG & CHANG – 2001] - YEONG e CHANG C. A robust tracking control for chaotic Chua's circuits via fuzzy approach. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 48, Issue 7, July 2001, Page(s): 889 – 895.
- [WANG & ZHANG & LIU – 2005] - WANG Z., ZHANG H. e LIU D. Chaotification of nonlinear systems described by the fuzzy hyperbolic model. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 2005. ISCAS 2005. 23-26 May 2005, Page(s): 3387 – 3390, vol. 4.

[WU & MA & PERNG & CHIN & LEE - 2006] – WU B. F., MA L.S., PERNG J.W., CHIN H.I. e LEE T.T. Adaptive Synchronization for Unknown Chaotic Systems with Fuzzy-Neural Network Observer. IEEE International Conference on Engineering of Intelligent Systems, 2006. 22-23 April 2006, Page(s):1 – 6.

[ZADEH - 1968] - ZADEH L. A. Probability Measures of Fuzzy Events. Journal of Mathematical Analysis and Applications vol. 23, p. 421-427, 1968.

[ZHANG & CHUNG & HUI – 1999] – ZHANG J., CHUNG H. e HUI S.Y.R. Development of an embedded fuzzy-based replication technique for chaotic system. IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, 1999. 9-12 May 1999, Page(s):1029 – 1034, vol.2.

Apêndice A: Introdução aos Sistemas Dinâmicos e Controle de Caos

Neste Apêndice faz-se uma apresentação geral dos Sistemas Dinâmicos, discutindo-se conceitos e métodos, tais como retrato de fase, pontos atratores em sistemas lineares, análise qualitativa de sistemas não lineares (SNL), ciclo limite, atratores estranhos, comportamento caótico de um SNL e o método OGY de controle do caos (ver blocos de 5 a 7 da Figura 2.2.) Entende-se que estes conceitos são fundamentais para o entendimento do objeto da Tese.

Neste Apêndice apresenta-se um tratamento introdutório e abrangente sobre sistemas dinâmicos, visando-se um conhecimento em extensão e uma uniformização de termos e conceitos empregados para discutir-se o controle fuzzy do caos. Para tal, estabeleceu-se a seguinte seqüência de temas:

- Introduzir os conceitos de retrato de fase e de pontos atratores em sistemas lineares (SL);
- Aplicar estes conceitos para análise qualitativa de sistemas não lineares (SNL).
- Verificar a existência de outros tipos de atratores em SNLs tais como o ciclo limite e os atratores estranhos.
- Relacionar os atratores estranhos ao comportamento caótico de um SNL.
- Classificar os SNL's em conservativos e não conservativos e estudar a origem do caos para cada uma destas classes.
- Apresentar o método OGY de controle do caos.

A.1 Sistemas Lineares

Um sistema linear qualquer pode ser estudado analiticamente de modo completo e serve de base ao estudo de sistemas não lineares muito mais gerais e complexos, como será discutido na seção A.2.1.

Pode-se definir um Sistema Linear por meio do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$x'_j = \frac{d}{dt} x_j = u_j(x) = \sum_{i=1, \dots, n} a_{ji} x_i, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.1})$$

onde as funções $u_j(x)$ são polinômios de primeiro grau, sendo denominadas lineares.

Tal sistema de equações é dito autônomo, pois por definição não possui dependência explícita do tempo. Sistemas não autônomos podem ser convertidos em autônomos, considerando-se o tempo t como uma variável adicional x_{n+1} .

A.1.1 Retrato de fase

Considere o seguinte exemplo:

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \\x'_2 &= -x_2\end{aligned}\tag{A.2}$$

Cuja solução, verificada por meio de substituição em A.2, é:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_{10}e^t \\x_2 &= x_{20}e^{-t}\end{aligned}\tag{A.3}$$

Esta solução pode ser representada por meio de curvas no espaço $x_1 \times x_2$, denominadas trajetórias ou órbitas, as quais compõem o retrato de fase deste sistema dinâmico. Por meio do retrato de fase é possível um estudo qualitativo das soluções.

Para escrever-se a equação destas curvas para o sistema A.2, basta multiplicar as soluções x_1 e x_2 obtidas, expressões (A.3), o que resulta em $x_1.x_2 = x_{10}e^t.x_{20}e^{-t} = k$, com k constante, pois x_{10} e x_{20} são os valores iniciais de x_1 e x_2 e, portanto, constantes. A equação $x_1.x_2 = k$ representa uma hipérbole determinada por k .

Logo, as hipérboles da Figura A.1 correspondem às trajetórias que compõem o retrato de fase do sistema A.2, sendo cada qual definida por um conjunto de condições iniciais para as quais $x_{10}.x_{20} = k$. As setas nesta Figura indicam a direção em que a curva é construída para t crescente.

Figura A.1 – Retrato de fase para o sistema linear A.1.

A.1.2 Pontos fixos atratores ou repulsores

Considere o ponto na origem $(0,0)$, isto é, $x_1 = x_2 = 0$. Substituindo-se em A.3 resulta $x'_1 = x'_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = cte (=0)$, ou seja, o sistema estando neste ponto, aí permanece sendo por esta razão denominado ponto fixo.

Por meio do retrato de fase, vemos que a vertical pela origem a ela se dirige e que as demais curvas deste plano dela se afastam. Logo, a origem é um ponto de equilíbrio instável ou ainda um nó repulsor, exceto para o caso daquela vertical, sendo denominado ponto fixo hiperbólico. Na análise qualitativa por um retrato de fase, os pontos fixos podem ser repulsores ou atratores.

Voltando ao sistema geral (A.1), verifica-se que se trata de um problema clássico de um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem, cuja solução é dada por: $x_i(t) = x_{i0}e^{\lambda t}$ (A.4)

Particularizando (A.1) para o caso de duas coordenadas x_1 e x_2 e substituindo-se (A.4) em (A.1) resulta:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou $(A - \lambda I)x_0 = 0$ (A.5)

O determinante da matriz A deve se anular para que sistema (A.5) tenha solução não trivial.

Logo:

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Esta é uma equação do segundo grau, cujas raízes $\lambda_{\pm}$ são denominadas autovalores do sistema diferencial. Nas Figuras A.2 e A.3 apresentam-se alguns retratos de fase que podem ser obtidos de modo semelhante ao da Figura A.1 e são relacionados às características dos autovalores, tais como se eles são reais ou imaginários e/ou se o sinal de sua parte real é positivo ou negativo.

Observa-se que os autovalores e suas características definem os tipos de equilíbrio relacionados aos pontos fixos, ou seja, estabelecem o comportamento da solução.

Figura A.2 – Autovalores $\lambda_{\pm}$ complexos: focos e centro na origem (0,0).

Nas Figuras A.2.c e A.3.b, a origem é um ponto fixo atrator e nas Figuras A.2.a e A.3.a é um ponto fixo repulsor. A origem, no caso da Figura A.2.b é denominada de centro. Ressalte-se que podem existir pontos fixos não necessariamente na origem, e que há outras variações dos tipos de retrato de fases apresentados [ARROWSMITH & PLACE-1982].

Figura A.3 – Autovalores $\lambda_{\pm}$ reais: nó elíptico e nó hiperbólico na origem (0,0).

A ordem da equação de autovalores é igual à dimensão n do sistema diferencial A.1, que corresponde ao número de raízes desta equação. No exemplo visto, ele é igual a dois (2° grau).

Para sistemas de ordem mais elevada, crescerá o número de raízes (autovalores), implicando num maior número de combinações entre as possíveis características destas raízes e conseqüentemente de tipos de solução.

A.2 Sistemas não Lineares

Um sistema não-linear obedece à seguinte equação diferencial:

$$x'_i = u_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \quad (\text{A.7})$$

onde pelo menos uma das funções u_i é não linear, ou seja, não segue o modelo de polinômios de primeiro grau definido pela expressão (A.1).

Um sistema dinâmico não linear pode apresentar comportamento irregular relacionado a uma dependência extremamente sensível às condições iniciais. Esta característica associada às

incertezas dos valores impede que sejam feitas previsões para longos intervalos de tempo, sendo este comportamento denominado de caos determinístico.

A.2.1 Sistema linear aproximante

Em uma equação diferencial não linear podem ocorrer atratores de tipos diferentes dos encontrados nos sistemas lineares.

Além disto, na maioria das vezes não se encontram soluções analíticas para estas equações. Contudo, será discutido como uma análise qualitativa de um sistema não linear se realiza por meio de um sistema linear aproximante, usando os resultados da seção A.1, sendo que como observado no início deste parágrafo, constata-se ser este procedimento essencial.

Por meio da expansão em série de Taylor da função (A.7), em torno de um suposto ponto de equilíbrio $x = x_0$, pode-se escrever:

$$x' = u(x_0 + \varepsilon) = u(x_0) + (\nabla u) \cdot \varepsilon + O(|\varepsilon|^2), \quad \varepsilon \cong 0 \quad (\text{A.8})$$

De $x = x_0 + \varepsilon$ resulta que $x' = \varepsilon'$, pois o vetor de condições iniciais x_0 é constante. Supondo-se ainda sem perda de generalidade que $u(x_0) = 0$ bem como considerando o erro $O(|\varepsilon|^2)$ desprezível, resulta o seguinte sistema linear aproximante, válido em torno do ponto de equilíbrio:

$$\varepsilon' = (\nabla u) \cdot \varepsilon \quad (\text{A.9})$$

Por simplicidade, considera-se novamente o caso de duas variáveis x_1 e x_2 o que resulta para a expressão A.9:

$$\varepsilon_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \Big|_{x_0} \varepsilon_1 + \frac{\partial u_j}{\partial x_2} \Big|_{x_0} \varepsilon_2 = \sum_{i=1,2} a_{ij} \varepsilon_i, \quad j = 1, 2 \quad (\text{A.10})$$

com $a_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Big|_{x_0}$

A matriz $A = [a_{ij}]$ é denominada matriz Jacobiana do sistema diferencial não linear A.7. Como seu sistema aproximante (A.10) é linear, então, a princípio, pode-se aplicar a análise apresentada na seção anterior.

Seja por exemplo o seguinte sistema não linear:

$$\begin{aligned}x'_1 &= u_1(x_1, x_2) = -x_1 + x_2(e^{x_1} - 1) \\x'_2 &= u_2(x_1, x_2) = \frac{x_2(1 + e^{x_1})}{2}\end{aligned}\tag{A.11}$$

Na origem, $x_1 = x_2 = 0$ em (A.11), resulta $x_1 = x_2 = 0$ e, portanto, este é um ponto fixo no retrato de fase deste sistema.

A matriz Jacobiana para o sistema (A.11) neste ponto fixo é dada por:

$$A = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x_1} u_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} u_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} u_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} u_2 \end{array} \right]_{(x_1, x_2) = (0, 0)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a linearização pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\varepsilon'_1 &= -1\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 \\ \varepsilon'_2 &= 0\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2\end{aligned}$$

o qual é um sistema linear simples com um ponto hiperbólico na origem e, portanto de equilíbrio instável (obs: é o mesmo sistema descrito pelas equações A.2).

Na Figura A.4 apresentam-se os retratos de fase do sistema linear aproximante e do sistema real. Nota-se que na vizinhança do ponto fixo, neste caso a origem, os dois sistemas têm comportamento similar. Deste modo, sem resolver diretamente o sistema (A.11), pôde-se avaliar o comportamento de suas soluções e o tipo de equilíbrio de seu ponto fixo pelo seu aproximante linear.

Entretanto, nem sempre é possível realizar este tipo de análise. Para casos de pontos com característica de centro (Figura A.2.b), o sistema linearizado apresenta um comportamento totalmente diferente do sistema real. Para uma análise mais extensa veja [ARROWSMITH & PLACE-1982] e [MONTEIRO-2006].

Figura A.4 – Diagramas de fase do sistema (A.11).

A.2.2 Atratores e repulsores simples

Até o momento foram considerados apenas pontos do tipo atratores/repulsores, entretanto também pode haver outros subconjuntos do espaço de fase que se comportam como atratores/repulsores.

Considere-se como exemplo o seguinte sistema de equações diferenciais não lineares:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \left(\frac{R}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) x_1 - \omega x_2 \\ x'_2 &= \left(\frac{R}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) x_2 + \omega x_1 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

onde ω e R são constantes.

Derivando com relação ao tempo as equações de transformação $x_1 = r \cos \theta$ e $x_2 = r \sin \theta$

(logo $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$) obtém-se:

$$\begin{aligned} x'_1 &= r' \cos \theta - r \theta' \sin \theta \\ x'_2 &= r' \sin \theta + r \theta' \cos \theta \end{aligned}$$

O que, se comparado com o sistema de equações diferenciais (A.12) resulta em:

$$r' = R - r \text{ além de } \theta' = \omega. \quad (\text{A.13})$$

A solução de (A.13) é $\theta = \omega t$ e $r = R + \Delta R e^{-t}$, com ω , R e ΔR constantes, como se pode verificar por substituição direta.

Na Figura A.5 apresentam-se as trajetórias para os dois casos possíveis, isto é, para ΔR positivo ou negativo, bem como o subconjunto atrator que neste caso é formado pelos pontos do círculo de raio R pois $\lim_{t \rightarrow \infty} r = R$ para os dois casos. Este atrator é denominado de ciclo limite.

Figura A.5 - Ciclo limite atrator.

Em geral, a parte da órbita que ocorre antes de se aproximar infinitesimalmente do atrator é denominada de seqüência transitória ou, simplesmente, transitório. Neste caso, o ciclo atrator associado ao regime permanente é denominado o conjunto ω -limite deste sistema dinâmico [MONTEIRO-2006].

Ao simular um sistema para obter-se apenas o atrator, se este existir, deve-se desconsiderar no mínimo as n_{tr} primeiras iterações, valor que pode ser obtido por tentativa e erro, a partir de um ponto inicial qualquer do espaço de fase: esta operação será denominada de descarte do transitório.

No atual exemplo, a órbita resultante após o descarte do transitório corresponde ao círculo atrator de raio R .

Os pontos fixos e os ciclos limites são denominados atratores/repulsores simples.

A.2.3 Atrator estranho

Um outro tipo de atrator, denominado estranho, é um conjunto limite complexo, um objeto fractal caracterizado por uma dimensão não inteira [MONTEIRO-2006] [FERRARA & PRADO-1994].

Considere-se o seguinte sistema de equações diferenciais não lineares de 3ª ordem:

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_2 - x_3 \\x'_2 &= x_1 + ax_2 \\x'_3 &= b + (x_1 - c)x_3\end{aligned}\tag{A.14}$$

Com a seguinte escolha de parâmetros $a = 0,1$, $b = 0,1$ e $c = 14$ resulta o atrator estranho denominado atrator de Rossler. Por simulação, por meio de programa escrito em linguagem C e usando o método de Runge-Kunta de 4ª ordem, obtém-se a representação pictórica do Atrator de Rossler (Figura A.6), descartado o transitório.

Do sistema (A.14) fazendo-se $x_3 = 0$, obtém-se:

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_2 \\x'_2 &= x_1 + ax_2\end{aligned}\tag{A.15}$$

que é um sistema linear com a origem sendo um ponto fixo.

Figura A.6 – Atrator de Rossler.

A condição para a solução não trivial de (A.15) é obtida da condição $|A - \lambda I| = 0$ com a matriz A igual a:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & a - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - a) + 1 = \lambda^2 - a\lambda + 1 = 0.$$

As raízes desta equação são as seguintes: $\lambda_{\pm} = 0,5 \left(a \pm \sqrt{a^2 - 4} \right)$.

Para $a = 0,1$ as raízes são complexas conjugadas com parte real positiva. Daí depreende-se que a origem é um foco repulsor, implicando que, quando a órbita esteja próxima ao plano x_1 x_2 , ela seja uma espiral crescente em torno deste ponto fixo. Isto implica, para este caso, no crescimento das excursões de x_1 e de x_2 ao longo do tempo.

Com este crescimento a órbita passa a se afastar do plano x_1 x_2 e, devido a isto, a análise anterior passa a não valer mais. Para esta nova condição e, em um dado momento, as excursões de x_1 e de x_2 começam a diminuir. Isto faz com que a órbita seja re-injetada, em direção à origem deste mesmo plano, reiniciando novamente a espiral crescente.

Note-se que a órbita resultante geralmente não é fechada. A órbita fechada só ocorre para valores bem determinados dos parâmetros (a, b, c) deste sistema de equações diferenciais.

Exceto para estes casos, as órbitas apresentadas na Figura A.6, não são periódicas, são sensíveis às condições iniciais e formam um atrator caótico [ALLIGOOD & SAUER & YORKE-1997].

Além deste “tipo de caos”, que, como será discutido, está ligado ao conceito de sistemas não conservativos, há um outro que a ele se contrapõe por estar ligado a sistemas conservativos.

Por outro lado, para que num sistema contínuo não conservativo, como é o caso do sistema estudado nesta seção, se forme um atrator estranho é condição necessária que sua dimensão seja maior ou igual a três [PEITGEN & JURGENS & SAUPE-1992].

Para tornar esta afirmação plausível considere-se o sistema (A.14) o qual é de ordem três. Na Figura A.6.a verifica-se que a forma da órbita para este sistema é de uma espiral crescente sendo que há momentos para os quais acontecem re-injeções em direção ao centro da mesma.

Nestas condições, o atrator fica limitado a uma região. Devido a estas re-injeções, ocorreriam cruzamentos os quais, no entanto, não são permitidos de acordo com o Teorema da Unicidade das soluções para os sistemas de equações diferenciais contínuos.

Na Figura A.6.b considera-se também a outra variável x_3 , e assim verifica-se que realmente não estão ocorrendo cruzamentos, pois a existência desta terceira dimensão permite a re-entrada através de caminhos que estão acima dos trechos anteriores da órbita.

Para o estudo de caos, tanto em sistemas não conservativos como em sistemas conservativos, será necessário introduzir antes os mapas que representam sistemas discretos no tempo, o que será realizado a seguir.

A.3 Mapas

Um sistema discreto no tempo obedece à seguinte equação de diferenças finitas:

$$(x_{0(n+1)}, x_{1(n+1)}, \dots, x_{k(n+1)}) = (u_0(x_{0(n)}, x_{1(n)}, \dots, x_{k(n)}), \dots, u_k(x_{0(n)}, x_{1(n)}, \dots, x_{k(n)})) \quad (\text{A.16})$$

Seja a equação do mapa logístico:

$$x_{i+1} = u(x_i) = a x_i (1 - x_i) \quad (\text{A.17})$$

onde $x_i = x(i, \Delta t)$ e com a pertencente ao intervalo $[0, 4]$.

Este mapa unidimensional $x_{i+1} = u(x_i)$ pode ser construído da seguinte maneira (mapa da teia de aranha):

- (i) Define-se para o eixo horizontal o valor de x_n e para o eixo vertical o valor:
$$y_n = x_{n+1}; \quad (\text{A.18})$$
- (ii) Constroem-se a parábola $y = u(x) = ax(1-x)$ e a reta diagonal $y = x$;
- (iii) Levanta-se a vertical do valor $x = x_0$ até a parábola para obter o ponto cuja abscissa é y_0 ;
- (iv) Desenha-se a horizontal $y = y_0$ até a diagonal para obter o ponto cuja ordenada é igual à x_1 , pois $y_0 = x_1$ pela expressão (A.18);
- (v) Repete-se indefinidamente (iii) e (iv) trocando-se x inicial em (iii) pelo valor obtido em (iv) anterior e deste modo se obtém a sequência: $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$.

Para diversos valores do parâmetro de controle a resultam comportamentos diferentes, como por exemplo, os apresentados nos mapas da Figura A.7. Acima de $a \approx 3,6$ o comportamento caótico torna-se comum.

(a)

(b)

(c)

Figura A.7 – Mapa logístico: (a) ponto fixo ($a=3,7$);
(b) órbita de período 2 ($a=3,3$) e (c) órbita caótica ($a=4,0$).

Um exemplo de mapa bidimensional $(x_{1(i+1)}, x_{2(i+1)}) = u(x_{1(i)}, x_{2(i)})$ é o mapa de Henon e cujo sistema de equações de diferenças finitas é dado por:

$$\begin{aligned} x_{1(n+1)} &= a - x_{1(n)}^2 + bx_{2(n)} \\ x_{2(n+1)} &= x_{1(n)} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Por meio de programa escrito em C e após o descarte da fase transitória (ver seção A.1.2), obteve-se a Figura A.8 para este atrator estranho com a e b fixados respectivamente em 0 e 0,4.

Figura A.8 – Mapa de Henon com $a = 0$ e $b = 0.4$.

A.4 Caracterização do caos - Expoentes de Lyapunov

Considere o mapa logístico com $a = 4$, que é caótico como visto na seção A.3 e, portanto, sensível às condições iniciais. Devido a esta característica, partindo-se de dois pontos muito próximos após algumas iterações, a distância entre os pontos correspondentes as órbitas originadas para cada um destes pontos iniciais tende a aumentar.

Neste caso, o aumento é “em média exponencial” e para comprovar isto se construiu a Tabela A.1, por meio das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 4x(1-x); \\
x_i &= f(x_{i-1}) \text{ e } x_i' = f(x_{i-1}'); \\
x_0' &= x_0 + \Delta \text{ com } \Delta \cong 0; \\
\Delta_i &= |x_i - x_i'| \text{ com } \Delta_0 = |\Delta|; \\
\text{assumindo } \lambda_i &\text{ como um expoente tal que } \Delta_i = \Delta_{i-1} e^{\lambda_i}
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Destas expressões pode-se comentar o seguinte:

- da última resulta $\lambda_i = \ln\left(\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}\right)$; (A.21)
- as órbitas de x_i e x_i' são diferentes devido a partirem de valores distintos respectivamente iguais a x_0 e $x_0' = x_0 + \Delta$, sendo Δ um valor bem pequeno;
- a distância entre as órbitas de x_i e x_i' é dada por Δ_i ;

A partir da Tabela A.1 obtém-se as órbitas de x_i e x_i' (Figura A.9.a) e o gráfico $\lambda_i \times i$. (Figura A.9.b).

$\Delta_0 = 0.0000001$, $x_0 = 0.51$

i	x_i	x_i'	$\Delta_i = x_i - x_i' $	$\ln(\Delta_i/\Delta_{i-1})$ ($= \lambda_i$)
0	5.1000E-01	5.1000E-01	0,000000100000	
1	9,9960E-01	9,9960E-01	0,000000008000	-1,5257
2	1,5994E-03	1,5994E-03	0,000000031975	1,3855
3	6,3872E-03	6,3873E-03	0,000000127489	1,3831
4	1,5386E-02	1,5386E-02	0,000000503442	1,3734
5	9,8965E-02	9,8967E-02	0,000001911526	1,3342
6	1,5668E-01	1,5669E-01	0,000006132697	1,1657
7	9,1784E-01	9,1785E-01	0,000007031193	0,1367
8	1,0163E-01	1,0161E-01	0,000023503580	1,2068
9	8,4260E-01	8,4257E-01	0,000037300568	0,4619
10	5,3049E-01	5,3059E-01	0,000102229269	1,0082
11	9,9628E-01	9,9626E-01	0,000024975720	-1,4093
12	1,4817E-02	1,4916E-02	0,000099157503	1,3788
13	5,8389E-02	5,8774E-02	0,000384837155	1,3561
14	1,1992E-01	1,2128E-01	0,001358994687	1,2617
15	6,8622E-01	6,8925E-01	0,003037648848	0,8043
16	8,6129E-01	8,5673E-01	0,004562203358	0,4067
17	4,7787E-01	4,9097E-01	0,013103080855	1,0550
18	9,9804E-01	9,9967E-01	0,001633049780	-1,0824
19	7,8207E-03	1,3035E-03	0,006517273100	1,3840
20	1,1038E-02	5,2070E-03	0,025831233047	1,3771
21	1,2030E-01	1,0720E-02	0,099579888106	1,3494
22	4,2331E-01	8,1162E-02	0,342148813729	
23	9,7647E-01	1,9830E-01	0,678177329561	
24	9,1887E-02	8,3726E-01	0,745377362171	
25	1,3378E-01	5,4501E-01	0,211235793276	
26	8,8948E-01	9,9190E-01	0,102418835743	
27	1,9323E-01	1,2153E-02	0,361076897711	
28	9,5440E-01	1,2448E-01	0,829923589369	
29	1,7408E-01	4,3593E-01	0,261849930273	
30	5,7511E-01	9,8358E-01	0,408475122481	

Tabela A.1 – Expoente de Lyapunov.

Após $i = 20$ iterações nota-se pela Figura A.9.a ou Tabela A.1 que as órbitas passam a divergir rapidamente, sendo que a distância entre elas ultrapassa o limite de um décimo rapidamente a partir deste valor.

Figura A.9 – Sensibilidade à condição inicial.

Enquanto a distância é pequena ($i < 20$), o valor do expoente λ_i fica em torno de um valor médio, Figura A.9.b, dado por:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (\text{A.22})$$

Para uma definição formal do expoente de Lyapunov, inclusive para sistemas de tempo contínuo, veja [FERRARA & PRADO-1994]. Aqui será utilizado o valor médio de λ_i para avaliar o expoente de Lyapunov de um sistema dinâmico [PEITGEN & JURGENS & SAUPE-1992].

No caso do exemplo estudado, mapa logístico com $a = 4$, e para $1 \leq i \leq 20$, o valor calculado por meio da Tabela A.1 é $\bar{\lambda} \cong 0,67$.

Pelas expressões (A.18) pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} = \frac{1}{n} \ln \prod_{i=1}^n \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} = \\ &= \frac{1}{n} \ln \left(\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} \dots \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \right) = \frac{1}{n} \ln \frac{\Delta_n}{\Delta_0} \\ \Rightarrow \Delta_n &= \Delta_0 \cdot e^{n\bar{\lambda}}\end{aligned}\tag{A.23}$$

Logo, é possível estimar o valor de Δ_n a partir de n , Δ_0 e de $\bar{\lambda}$. Note-se que o crescimento da distância entre as órbitas é exponencial em média, sendo que o expoente de Lyapunov avaliado ($\bar{\lambda}$) define a estabilidade de um sistema dinâmico discreto unidimensional:

- $\bar{\lambda} > 0$: órbitas divergem exponencialmente - caos;
- $\bar{\lambda} < 0$: órbitas convergem exponencialmente;
- $\bar{\lambda} = 0$: órbitas mantêm a distância entre si.

A existência de um ou mais expoentes de Lyapunov positivos define uma instabilidade orbital em sistemas dissipativos determinísticos, o que eventualmente poderá implicar em soluções caóticas associadas a atratores estranhos [FERRARA & PRADO-1994] - páginas de 135 a 148.

A.5 Sistemas conservativos

Informalmente, poder-se-ia associar um sistema conservativo ao caso (b) da Figura A.2, correspondente a um centro. Para este caso $Re\{\lambda_{\pm}\} = 0$, o que fisicamente implica não haver dissipação e nem fornecimento de energia para o sistema, ou seja, que esta quantidade é conservada.

Ressalta-se que as soluções do sistema linear aproximante não se assemelham às soluções reais de um sistema conservativo não linear, ver seção A.2.1.

A.5.1 Equações de Hamilton e preservação da “área” no espaço de fase

Um sistema conservativo pode ser descrito usando-se o formalismo Hamiltoniano da Mecânica Clássica [CHOW-1966], para o qual uma trajetória no espaço de fase $p \times q$ é obtida por meio das seguintes assim denominadas equações do movimento:

$$p'_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.24})$$

onde:

- $H(p, q, t)$ é o Hamiltoniano do sistema;
- $q = (q_1, \dots, q_n)$ são as coordenadas generalizadas que formam o espaço de configuração do sistema e
- $p = (p_1, \dots, p_n)$ são os momentos generalizados.

O espaço de fase ($p \times q$) tem genericamente dimensão $2n$, sendo o seu elemento de hipervolume dado por:

$$dp_1 \dots dp_n dq_1 \dots dq_n \quad (\text{A.25})$$

Se o Hamiltoniano não depender explicitamente do tempo, ele será uma constante do movimento, e caso os vínculos holônomos (restrições no espaço de configuração expressas por meio de equações das coordenadas) também não dependam do tempo, então o Hamiltoniano será igual à energia, isto é, $E = H(p, q) = \text{constante}$ [CHOW-1966].

Considere um sistema conservativo de dimensão dois e sua evolução em Δt segundos, do ponto (q, p) ao ponto $(q + \Delta q, p + \Delta p)$ no espaço de fase bidimensional deste sistema (Figura A.10).

Figura A.10 – Transformação da área em espaço de fase bidimensional.

A área σ delimitada pelos vetores de deslocamento da posição de referência δ_1 e δ_2 , com duas direções independentes escolhidas arbitrariamente e com $|\delta_i| \neq 0$, irá evoluir para σ' definida por δ'_1 e δ'_2 . Ela vale:

$$\sigma = |\delta_1 \wedge \delta_2| k = \begin{vmatrix} \delta_{1q} & \delta_{1p} \\ \delta_{2q} & \delta_{2p} \end{vmatrix} k = (\delta_{1q} \delta_{2p} - \delta_{2q} \delta_{1p}) k$$

$$\text{ou } \sigma = \delta_{1q} \delta_{2p} - \delta_{2q} \delta_{1p} \quad (\text{A.26})$$

(na direção do versor k e com o sinal indicando o sentido).

De modo semelhante obtém-se: $\sigma' = \delta'_{1q} \delta'_{2p} - \delta'_{2q} \delta'_{1p}$.

Por outro lado, por (A.24) obtém-se:

$$dp = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q} dt \text{ e } d(p + \delta p) = -\frac{\partial H(q + \delta q, p + \delta p, t)}{\partial q} dt$$

ou ainda desta última expressão pode-se escrever:

$$\begin{aligned} -dp - d\delta p &= \frac{\partial \left(H(q, p, t) + \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q} \delta q + \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p} \delta p + TOI \right)}{\partial q} dt = \\ &= \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q} dt + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q} \delta q + \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p} \delta p \right) dt \end{aligned}$$

e usando $dp = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q} dt$ no resultado anterior tem-se:

$$d\delta p = -\left[\frac{\partial^2 H(q, p, t)}{\partial q^2} \delta q + \frac{\partial^2 H(q, p, t)}{\partial q \partial p} \delta p \right] dt \quad (\text{A.27})$$

De modo semelhante:

$$d\delta q = \left[\frac{\partial^2 H(q, p, t)}{\partial p \partial q} \delta q + \frac{\partial^2 H(q, p, t)}{\partial p^2} \delta p \right] dt \quad (\text{A.28})$$

Para $\Delta t \rightarrow dt$ então $\Delta\sigma = \sigma - \sigma' \rightarrow d\sigma$ e de (A.26) resulta:

$$d\sigma = d(\delta_{1q}\delta_{2p} - \delta_{2q}\delta_{1p}) = \delta_{1q}d\delta_{2p} + \delta_{2p}d\delta_{1q} - (\delta_{2q}d\delta_{1p} + \delta_{1p}d\delta_{2q})$$

Usando (A.27) e (A.28) nesta última expressão obtém-se:

$$\begin{aligned} d\sigma = & +\delta_{1q} \left[-\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \delta_{2q} + \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \delta_{2p} \right) \right] dt + \delta_{2p} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \delta_{1q} + \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \delta_{1p} \right) dt \\ & - \delta_{2q} \left[-\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \delta_{1q} + \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \delta_{1p} \right) \right] dt - \delta_{1p} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \delta_{2q} + \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \delta_{2p} \right) dt \end{aligned}$$

ou simplificando:

$$d\sigma = 0 \quad (\text{A.29})$$

A grandeza $d\sigma$ é uma 2-forma diferencial, sendo que a expressão (A.29) indica que ela é conservada ao longo do movimento. O conceito de forma diferencial é empregado na descrição geométrica de Sistemas Dinâmicos [JOSÉ & SALETAN-1998].

Nas condições descritas na Figura A.10 a expressão (A.29) é equivalente à $\sigma' = \sigma$ e isto implica na conservação de áreas no espaço de fase ao longo do movimento: uma área, que determina em seu interior um conjunto de pontos, inicialmente delimitada por uma curva γ é assim conservada, embora γ possa ser alterada em posição e forma durante a evolução destes pontos.

Generalizando, num espaço de fase $2n$ dimensional de um Sistema Hamiltoniano, há a conservação de hipervolumes e tal propriedade será importante para se determinar a origem do caos neste tipo de sistema, veja seção A.5.4.

A.5.2 Dimensão do espaço de soluções

Um sistema conservativo, por exemplo, é definido pelo movimento de uma massa m num potencial gravitacional newtoniano bidimensional:

$$V(x, y) = \frac{-K}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Resulta para o Hamiltoniano:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y) = E \quad (\text{constante}) \quad (\text{A.30})$$

Das equações do movimento (A.24) implica-se o seguinte sistema de equações diferenciais não linear:

$$p'_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{Kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad x' = \frac{p_x}{m} \quad \text{e} \quad p'_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{Ky}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad y' = \frac{p_y}{m} \quad (\text{A.31})$$

Isolando-se p_x desta expressão (A.30) resulta:

$$p_x = u(p_y, x, y, E) \quad (\text{A.32})$$

Portanto, as soluções deste sistema que ficariam restritas ao espaço 4-dimensional (x, y, p_x, p_y) , devido à conservação de energia passam a ser limitadas pela superfície 3-dimensional $p_x = u(p_y, x, y, E)$ tendo E como parâmetro.

Constantes do movimento podem reduzir a dimensionalidade do espaço das soluções, contudo nem sempre é possível obtê-las. No exemplo, o momento angular $L = xp_y - yp_x$ também é uma constante.

Generalizando, tem-se:

$$F(p_x, p_y, x, y) = K_2 \quad (=L, \text{ constante para o exemplo}) \quad (\text{A.33})$$

Isolando-se p_y de (A.33) e substituindo-se p_x pela (A.32) resulta:

$$p_y = v(p_x, x, y, K_2) = v(u(p_y, x, y, E), x, y, K_2)$$

Finalmente, a separação de p_y desta última expressão implica em:

$$p_y = w(x, y, E, K_2) \quad (\text{A.34})$$

Assim, as restrições $H(p_x, p_y, x, y) = E = K_1$ e $L = xp_y - yp_x = K_2$ reduzem o espaço das soluções de 4 para 2-dimensões, sendo que a solução fica definida por $p_y = w(x, y, K_1, K_2)$ com K_1 e K_2 parâmetros constantes.

Este espaço corresponde a um toro 2-dimensional, como ilustrado na Figura A.11.

Figura A.11 - Toro 2-dimensional no espaço de fase.

Para sistemas do tipo integrável, é possível transformar as variáveis coordenadas e momentos em variáveis de ângulo-ação, isto é, os ângulos $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ e as ações $I = (I_1, I_2)$ para obter as equações do movimento a partir do Hamiltoniano, que também para estas condições só depende de I_1 e I_2 , isto é, $H = H(I_1, I_2)$.

Portanto, de (A.24) têm-se:

$$I'_i = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_i} = 0 \Rightarrow I_i = c_i; \quad c_i \text{ constantes}$$

e

$$\varphi'_i = \frac{\partial H}{\partial I_i} = \omega_i; \quad i = 1, 2$$

cuja solução por integração é dada por:

$$\varphi_i = \int_{\alpha_i} \omega_i dt \Rightarrow \varphi_i(t) = \varphi_i(0) + \omega_i t \quad (\text{A.35})$$

onde α_1 e α_2 são dois diferentes caminhos fechados no toro (Figura A.11).

Dependendo da relação entre as frequências ω_1 e ω_2 a trajetória pode ser:

- Relação racional: trajetória fechada.
- Relação irracional: trajetória cobre todo o toro.

Em condições adequadas pode-se mostrar que relacionadas a $k \leq n$ constantes do movimento e ao conceito de parênteses de Poisson [LANDAU & LIFCHITZ -1966] um espaço de fase $2n$ dimensional fica restrito a uma superfície $(2n-k)$ dimensional.

Para $k = n$ a redução é máxima, sendo que neste caso a trajetória tem a topologia de um toro de dimensão $2n-n = n$, com resultados semelhantes ao do toro bidimensional. Um sistema com esta característica diz-se integrável.

Tais sistemas são raros, embora tenham sido praticamente os únicos estudados em Mecânica até recentemente. Mais comum na natureza são os sistemas ditos não integráveis, para os quais a trajetória se aproxima arbitrariamente de um ponto qualquer do espaço de fase, e neste caso diz-se que a trajetória preenche este espaço, [ARNOLD & AVEZ-1968].

Para um sistema conservativo inicialmente não caótico (integrável) que possua trajetórias periódicas, aplicando-se uma perturbação isto implicará, na Seção de Poincaré, em geração de pontos fixos estáveis, denominados elípticos. Pode-se gerar também pontos fixos instáveis, denominados hiperbólicos, sendo que esta classificação dos pontos vem do estudo dos sistemas lineares (Figuras A.2 e A.3).

No estudo da estabilidade dos sistemas dinâmicos conservativos não integráveis analisa-se a Seção de Poincaré por meio dos teoremas KAM e de Poincaré-Birkhoff [JOSÉ & SALETAN-1998].

A.5.3 Mapa e Seção de Poincaré

Considere-se por simplicidade o espaço de fase 4-dimensional (x, p_x, y, p_y) de um sistema conservativo. Como E é constante, as soluções possíveis ficam restritas a um espaço 3-dimensional, ver seção A.5.2.

Introduzindo no espaço de fase uma superfície de secção, denominada Seção de Poincaré, reduz-se de 1 a dimensão deste espaço de fase. No exemplo selecionou-se como Seção de Poincaré o plano x, p_x (variáveis independentes).

Deste modo, ao invés de estudar uma trajetória completa, pode-se monitorar apenas os pontos de sua intersecção com a superfície de Poincaré, obtendo um mapa discreto - o mapa de Poincaré – o qual mapeia um ponto da intersecção nesta superfície $(p_{x(n)}, x_{(n)})$ para o próximo $(p_{x(n+1)}, x_{(n+1)})$.

A dinâmica simplifica-se no mapa discreto de Poincaré 2-dimensional:

$$(p_{x(n+1)}, x_{(n+1)}) = (u(p_{x(n)}, x_{(n)}), v(p_{x(n)}, x_{(n)})) = T(p_{x(n)}, x_{(n)}) \quad (\text{A.36})$$

Órbitas com

$$T^k(p_{x0}, x_0) = (p_{x0}, x_0) \quad (\text{A.37})$$

são chamadas órbitas k-periódicas. Estes pontos fixos do mapa T^k com suas propriedades de estabilidade têm um papel importante na organização do fluxo no espaço de fase e no mapa de Poincaré.

Note-se que órbitas k-periódicas aparecem como um conjunto de k pontos discretos neste mapa. Uma trajetória quase-periódica forma uma curva fechada na Seção de Poincaré e corresponde à intersecção do toro coberto pela trajetória com a Seção de Poincaré.

Este conceito pode ser estendido para espaços de fase n-dimensionais.

Como exemplo de aplicação do mapa de Poincaré, veja o Bilhar Circular (BC), seção 4.3.2.

A.5.4 Variedade estável e variedade instável – origem do caos hamiltoniano

Define-se a variedade estável H^+ do ponto fixo hiperbólico (p_h, x_h) como o conjunto dos pontos na secção de Poincaré, que tendem a este ponto fixo hiperbólico após infinitas iterações: $H^+ = \{(p, x) \mid \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(p, x) = (p_h, x_h)\}$ (A.40)

Define-se a variedade instável H^- do ponto fixo hiperbólico (p_h, x_h) como o conjunto dos pontos na Seção de Poincaré que tendem a este ponto para iterações inversas:

$$H^- = \{(p, x) \mid \lim_{n \rightarrow \infty} T^{-n}(p, x) = (p_h, x_h)\} \quad (\text{A.41})$$

Em espaços de fase bidimensionais as variedades são curvas (dimensão 1). Por exemplo, no sistema linear da Figura A.1 o eixo x_2 corresponde à variedade estável H^+ e o eixo x_1 corresponde à variedade instável H^- .

A aplicação T (ou a sua aplicação inversa T^{-1}) representa a transição de um passo entre dois pontos na Seção de Poincaré de uma órbita que atuando sobre pontos da variedade estável H^+ (ou sobre da variedade instável H^-) realiza um movimento em direção ao ponto fixo hiperbólico.

Prova-se que não é possível ocorrer um laço, ou de modo equivalente um autocruzamento, na variedade H^+ (ou na H^-) embora possa acontecer um cruzamento entre as variedades H^+ e H^- , devido as órbitas a elas relacionadas serem diferentes [JOSÉ & SALETAN-1998].

Caso haja um cruzamento transversal, [ALLIGOOD & SAUER & YORKE-1997], entre H^+ e H^- , a próxima iteração T deve pertencer tanto a H^+ como a H^- , sendo que esta situação repete-se indefinidamente a partir daí.

Deste modo estas variedades passam a encontrar-se a cada nova iteração T , gerando uma série infinita de pontos homoclínicos (heteroclínicos), que ficam mapeados um sobre o outro e que convergem ao ponto fixo hiperbólico.

Assim, há um emaranhamento entre H^+ e H^- , além da formação de infinitas voltas em cada uma destas variedades. Estas variedades ocorrem devido à impossibilidade de haver autocruzamento nelas, aliada à preservação das áreas nos Sistemas Hamiltonianos. Isto é o que leva a poder se observar na vizinhança dos pontos hiperbólicos uma dinâmica caótica, como a que se pode verificar na análise das Figuras 3.6 e 3.7.

A.5.5 Ilhas e emaranhados

O comportamento local de uma órbita é ditado pela forma da variedade mais próxima. Para se perceber isto de modo qualitativo, será utilizada uma analogia sobre as órbitas num plano de fase bidimensional, como o da Figura A.1, e a projeção sobre este plano do movimento sem atrito de uma bolinha sobre uma superfície do tipo sela, adequadamente disposta, Figura A.12.a.

Tal superfície é posicionada de modo que ao seu centro de simetria P se faz corresponder o ponto hiperbólico analisado e alinhando-se os seus eixos principais às variedades. Assim, garante-se que uma órbita sobre a variedade estável H^+ dela se afaste caso ocorra qualquer deslocamento do movimento da bolinha com relação ao eixo correspondente.

Resulta que as projeções dos possíveis movimentos da bolinha, Figura A.12.a, se assemelham às órbitas da Figura A.1. Além disto, comparando-se as órbitas com as variedades, nota-se que cada pequeno trecho de órbita próximo a uma variedade tende a ser paralelo a ela e de mesmo sentido.

Considerem-se agora dois pontos hiperbólicos P e Q , Figuras A.12.b e A.12.c.

Figura A.12 – Análise sobre o comportamento das órbitas próximas às variedades para:
 (a) um ponto hiperbólico; (b) sem emaranhamento; (c) com emaranhamento.

A composição das superfícies de sela destes pontos possui uma região entre eles com concavidade para baixo, onde se forma um ponto fixo C , do tipo centro, em cujo entorno próximo são geradas órbitas fechadas. Ao conjunto formado pelo centro C e suas órbitas fechadas denomina-se ilha.

No caso da Figura A.12.b as variedades H^+ e H^- não se cruzam transversalmente, mas se aproximam suavemente, do mesmo modo que H e H'^+ , e é por isto que não há emaranhamento entre elas como o discutido na seção A.5. Como exemplo, ver o pêndulo simples sem amortecimento e não forçado em [MONTEIRO-2006].

A Figura A.12.c representa um esboço para quando há emaranhamento. Como exemplo, veja a Figura 4.6 sobre o BC perturbado.

Em [AGUIAR-1992] apresenta-se em detalhes a teoria clássica dos sistemas hamiltonianos não-integráveis, incluindo situações com um número maior de pontos hiperbólicos.

A.6 Controle de Caos OGY

O Controle de Caos OGY para estabilizar órbitas periódicas instáveis dentro de um atrator caótico explora a sensibilidade com relação às condições iniciais e às perturbações que são inerentes aos sistemas caóticos.

Isto é feito alterando-se os parâmetros do sistema de modo a compensar o afastamento da órbita periódica selecionada, na qual o Sistema se encontre infinitesimalmente próximo. Para aplicar o controle espera-se que o Sistema atinja uma vizinhança da órbita desejada, o que sempre irá ocorrer devido à natureza caótica do atrator.

Para exemplificar, será considerado um sistema simples: o mapa de logístico unidimensional, ver seção A.3:

$$x_{i+1} = u(x_i) = a x_i (1 - x_i)$$

onde x_i é restrito ao intervalo de unidade $[0,1]$, e a é um parâmetro de controle.

Denota-se a órbita de período m a ser controlada como x_i , $i = 1, \dots, m$ com $x_{i+1} = f(x_i)$ e $x_{m+1} = x_1$. Assumindo que no tempo n , a trajetória se aproxime da componente i da órbita de período m e, resulta da dinâmica linearizada em torno da componente $i+1$:

$$x_{n+1} - x_{i+1} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_n=x_i} (x_n - x_i) + \left. \frac{\partial f}{\partial a} \right|_{a=a_0} \Delta a; \quad \Delta a = a - a_0 \quad (\text{A.42})$$

onde as derivadas parciais em (A.42) são avaliadas em $x = x_i$ e $a = a_0$ (valor do parâmetro sem correção).

Requer-se que o ponto x_{n+1} fique na vizinhança de x_{i+1} e isto implica que $x_{n+1} - x_{i+1} = 0$ ou que, por (A.42), o parâmetro a deve ser corrigido por:

$$\Delta a = a_0 \frac{(2x_i - 1)(x_n - x_i)}{x_i(1 - x_i)} \text{ e } a = a_0 + \Delta a \quad (\text{A.43})$$

Sugere-se que se consulte a referência [LAI-1994] na qual aparece a aplicação do controle OGY, expressão (A.43), sobre o mapa logístico caótico para fixar órbitas de diversos períodos.

Os cálculos para se obter a correção do parâmetro podem ser realizados previamente, isto é, não em tempo de execução. Caso não se conheçam as equações que regem o Sistema emprega-se um modelo baseado em amostras retardadas no tempo [FERRARA & PRADO-1994].

Em [OTT & GREBOGI & YORKE-1990], na qual esta técnica foi proposta, se estuda o caso multidimensional.

A.7 Considerações Finais

Considerando-se a Teoria da Gravitação Universal de Newton (1683) como início efetivo do estudo dos Sistemas Dinâmicos, até o presente momento passaram-se um pouco mais de três séculos de evolução. Esta evolução deu-se por meio da contribuição de incontáveis e renomados cientistas como Leibnitz, Lagrange, Laplace, Poincaré e Lorenz.

Este campo tornou-se mais abrangente envolvendo equações diferenciais, mecânicas clássica, relativística e quântica, teoria do caos, equilíbrio de populações, sistema financeiro etc.

Não se pretendeu aqui apresentar uma síntese sobre Sistemas Dinâmicos que fizesse jus a tal abrangência e importância. Existem muitos e bons livros que tratam este assunto com diversos graus de profundidade e abordagem, e, sendo assim não se justificaria este Apêndice.

Entretanto, apresentou-se uma visão introdutória sobre conceitos importantes, e adequada para a aplicação ao estudo aqui realizado.

Na próxima seção é discutida uma bibliografia que deve ser usada para aprofundamento dos assuntos tratados.

A.8 Bibliografia Comentada

Em [BERGÉ & POMEAU & GANGE-1994] é apresentada a Teoria do Caos do ponto de vista da divulgação científica e em [PASTERNAK-1992], por meio de entrevistas, projeta-se o impacto desta teoria bem como o da Inteligência Artificial sobre a ciência e a tecnologia.

Em [PRIGOGINE 1–1996] e [PRIGOGINE 2–1996], na busca de uma ciência não limitada a situações simplificadoras, discute-se o tratamento das complexidades do mundo real por meio de leis que considerem o não equilíbrio.

Voltados para a Física ou para a Engenharia, encontram-se estudos analíticos sobre a caracterização do caos bem como o de seu controle e sincronização. Este enfoque pode ser encontrado em [ARROWSMITH & PLACE-1982], [FERRARA & PRADO-1994], [MONTEIRO-2006], [PEITGEN & JURGENS & SAUPE-1992], [ALLIGOOD & SAUER & YORKE-1997], [KAPITANIAK-2000] e [KOSCH & JODL-1994].

Mais dirigidos ao estudo da Física sobre a Mecânica Clássica, incluindo tópicos como Lagrangiana, Hamiltoniana, transformações canônicas, Equação de Hamilton-Jacobi, teoria da perturbação, caos e Teorema KAM, destacam-se [AGUIAR-1992], [ALMEIDA-1991], [GOLDSTEIN-1950], [LANDAU & LIFCHITZ-1966], [PERCIVAL & RICHARDS-1982], [CHOW-1995], [LEMOES-2004], [WRESZINSKI-1997] e [JOSÉ & SALETAN-1998].

Considerando um aspecto matemático mais formal, estudam-se: equações diferenciais, sistemas lineares, mapas, fluxo, estabilidade, atratores, Mecânicas Lagrangiana e Hamiltoniana, teoria da perturbação, propriedade ergódica de sistemas dinâmicos, classificação dos pontos de equilíbrio, espaços simpléticos, variedades, princípio variacional e Teorema KAM.

Para estes assuntos citam-se [HOLMGREN-1996], [ARNOLD-1987], [ARNOLD & AVEZ-1968], [ARNOLD-1985], [ALMEIDA-1991], [GUCKENHEIMER & HOLMES-1983], [HIRSCH & SMALE-1974], [MARSDEN & RATIU-1999] e [THIRRING-1978].

Finalmente, apresenta-se um possível roteiro para uma sondagem e aprofundamento em Sistemas Dinâmicos: [BERGÉ & POMEAU & GANGE-1994], [ARROWSMITH & PLACE-1982], [MONTEIRO-2006], [HOLMGREN-1996], [ALLIGOOD & SAUER & YORKE-1997], [CHOW-1995], [PERCIVAL & RICHARDS-1982], [KOSCH & JODL-1994], [LEMO-2004], [WRESZINSKI-1997], [AGUIAR-1992] e [JOSÉ & SALETAN-1998].

Apêndice B: Estudos de caso para SDFI's

Neste Apêndice são apresentados alguns exemplos de SDFI's. São feitas propostas e discussões sobre a Lógica Fuzzy Seqüencial e a interpretação de leis físicas pela Teoria Fuzzy. Pode-se relacioná-lo aos blocos 11 e 20 da Figura 2.2.

Como discutido na seção 1.4, neste item pretende-se conceituar a lógica seqüencial fuzzy, e interpretando-a como um Sistema Dinâmico Fuzzy Intrínseco.

Este Apêndice está estruturado com a seguinte seqüência de assuntos

- A partir da discussão sobre sistemas digitais realimentados (flip-flops) é proposto um circuito lógico Astável Fuzzy, para estudo;
- Demonstra-se que a sua saída segue a equação logística apresentando oscilações caóticas, diferentemente do Astável Clássico, cujas oscilações são periódicas;
- Observa-se este comportamento por meio de simulação e pela proposta e implementação física de um circuito Astável Fuzzy;
- Comparam-se os conceitos de autômato fuzzy e de lógica combinatória fuzzy;
- Discute-se também a interpretação de leis físicas pela Teoria Fuzzy, presentes na literatura.

B.1 Estendendo a Lógica Fuzzy para Sistemas Seqüenciais

Nesta seção será discutida uma extensão da Lógica Combinatória Fuzzy que culminará em um artefato de Lógica Seqüencial Fuzzy. Neste artefato as variáveis de saída podem ser realimentadas para a entrada, obtendo-se elementos de memória. Para atingi-lo, compara-se o comportamento entre o Astável Clássico – que gera um sinal de período definido – e o Astável Fuzzy proposto – que por sua vez gera um sinal aperiódico.

Esta comparação é realizada de três maneiras. Primeiramente por meio de um tratamento analítico, pelo qual comprova-se que a saída do Astável Fuzzy satisfaz a Função Logística. Em segundo lugar por meio de simulações. Em terceiro lugar pela implementação física de um circuito eletrônico, onde se verifica que este apresenta oscilações caóticas, diferentemente do Astável Clássico, cujas oscilações são periódicas.

B.1.1 Sistemas Realimentados

Na lógica combinatória fuzzy, dada uma entrada, obtém-se a saída correspondente por meio da função característica fuzzy de entrada/saída [GARMS & ANDRADE - 2001].

Em sistemas digitais baseados na lógica sequencial para definir-se o estado futuro realimenta-se o estado atual (que compõem as saídas no modelo de Moore) para a entrada. Pode-se interpretar esta realimentação dos estados atuais como sendo uma realimentação da saída para a composição das variáveis de excitação dos elementos de memória.

Considere-se, ainda, o caso mais geral de um sistema discreto com realimentação, como sendo um mapa que relaciona o vetor de saída, no tempo t_{n+1} , com o vetor de entrada no tempo t_n e com os vetores de saída nos tempos $t_{n-m}, \dots, t_{n-1}, t_n$ (Figura B.1).

Figura B.1 – Sistema com realimentação das saídas.

Este sistema pode ser representado pela equação matricial:

$$s_{n+1} = f(e_n, s_{n-m}, \dots, s_n) \quad (\text{B.1})$$

Sistemas digitais evoluem no tempo guiados pelos atrasos Δ inerentes aos circuitos que os implementam (circuitos assíncronos), ou controlados por um clock externo (síncronos). Para um flip-flop as tensões e os intervalos de tempo são discretos.

B.1.2 Flip-Flop Astável

Considere-se o flip-flop astável como exemplo de um sistema sequencial digital. A equação que modela o comportamento deste sistema é dada por $x = \bar{x}$ sendo, portanto, uma contradição na lógica booleana tradicional.

Levando-se em conta os atrasos e a realimentação, esta equação pode ser escrita da seguinte maneira:

$$x_n = \text{not}(x_{n-1}) \quad (\text{B.2})$$

Supondo-se inicialmente a saída em zero, então, por (B.2), no próximo intervalo (Δ segundos depois), ela vai para o nível um. No intervalo seguinte volta para o nível zero, e assim sucessivamente. O sinal obtido na saída é uma onda quadrada com limites entre 0 e 1 e com período igual a 2Δ (Figura B.2).

Figura B.2 – Astável binário.

Note-se que esta oscilação é devida à contradição expressa em (B.2) e aos atrasos intrínsecos à implementação.

B.1.3 Flip-Flop Astável Fuzzy

No Cálculo Proposicional Fuzzy também são conhecidas abordagens para modelar o processo de realimentação. Em [GRIM - 1993] são propostas Regras Contraditórias (que expressam a contradição supracitada):

“The Fuzzy Liar is very true”.

Um outro exemplo, com realimentação explícita entre saída e entrada, é o seguinte:

- (i) Esta sentença é falsa e
- (ii) A sentença (i) é verdadeira.

Baseando-se nestas abordagens, define-se o elemento de circuito Astável Fuzzy como sendo uma tripla $\langle \text{regra; funções de pertinência; operadores} \rangle$ onde o valor “regra” é equivalente à estrutura do Astável (Figura B.3).

Neste elemento a grandeza x é a variável lingüística de entrada que deve ser precedida da definição das funções de pertinência de suas etiquetas lingüísticas.

Regra: if not(x) and x then y

Figura B.3 – Astável Fuzzy.

Para o circuito proposto adotou-se a tripla de valores $\langle \text{regra; funções de pertinência; operadores} \rangle$, onde:

- Regra: “if not(x) and x then y ” que equivale ao Princípio do terceiro excluído do Cálculo Proposicional Clássico;
- Funções de pertinência: de acordo com a Figura B.3;
- Operador “AND”: Aplica-se a T-norma “Produto Normalizado” para modelar este operador.

Com esta tripla resulta a expressão (B.3) para representar a evolução dinâmica do Astável Fuzzy, sendo que o parâmetro inteiro 4 garante a normalização na operação “AND”:

$$y = x_{n_defuz} = \mu(x_n) = 4\mu(x_{n-1})\mu(\bar{x}_{n-1}) = 4x(1-x) \quad (B.3)$$

Comparando-se a expressão (B.3) com a expressão da Função Logística $x_{i+1} = u(x_i) = a x_i(1-x_i)$, conclui-se que, com as hipóteses adotadas, a sequência de saída do astável pode ser obtida pela iteração do Mapa Logístico com $a = 4$. Nestas condições, sabe-se que esta sequência é aperiódica [MONTEIRO - 2006].

Na Figura B.4 apresenta-se o resultado da simulação da evolução temporal da saída da expressão (B.3), obtida empregando-se o Software *Mathematica*.

Figura B.4 – Gráfico $x_n \times n$.

Também foi realizada uma implementação do circuito físico do Astável Fuzzy (Figura B.5), baseado na expressão (B.3). O mapeamento das funções realizadas pelos blocos deste circuito é o que se segue:

- Bloco A – Aproxima a função $v_{sA} = -v_{eA}^2 / 10$ por meio de segmentos lineares;
- Bloco B – Obtém $v_{sB} = -8(0,5v_{eA} + 0,5v_{sA}) = 4(v_{eA}^2 / 10) - 4 v_{eA}$;
- Bloco C – Gerador de Relógio para comandar a transferência pelo Sample & Hold;
- Bloco SH (*Sample & Hold*) – Mantém o valor de x_n para gerar o próximo valor x_{n+1} .

Figura B.6 – Aproximação da parábola por dois segmentos de reta.

Devido a esta aproximação, as medidas no circuito da Figura B.5 resultaram no Mapa tipo Tenda, Figura B.7, e não no Mapa Logístico como previsto. Contudo, o Mapa tipo Tenda também leva a órbitas aperiódicas [GNICOLIS – 1995].

Figura B.7- Mapa $x_{n+1} \times x_n$.

No gráfico da Figura B.8 é apresentada uma amostra da evolução temporal do sinal x_n obtida por meio de medidas no circuito analisado.

Figura B.8 – Sinal de saída, $x_n \times t$, do circuito da Figura B.5.

B.2 Autômato Fuzzy $\times$ Lógica Combinatória

Na seção anterior, devido ao conjunto de estados no estável binário, $\{0,1\}$, ao passar para contínuo nesta faixa para o estável fuzzy, perdeu-se a representação através de autômatos finitos deste sistema.

Uma alternativa para construir-se um Sistema Sequencial Fuzzy seria através de autômatos finitos, mantendo-se um número finito de estados e permitindo-se que as regras das transições fossem do tipo fuzzy.

Nestas condições ter-se-ia um Sistema Sequencial baseado em transições fuzzy, o qual é também denominado Sistema Sequencial (ou Autômato) Fuzzy. Tal sistema pode modelar situações reais como mostrado na Figura B.9. Esta estratégia é comum e encontram-se muitos trabalhos sobre ela na literatura, ver [MATEESCU-1995].

Figura B.9 – Autômato Fuzzy.

Considere a seguinte interpretação de um Autômato Fuzzy:

- As transições são modeladas por regras fuzzy para um número finito de estados possíveis;
- Numa dada situação, cada uma das transições tem um grau de veracidade obtido através da aplicação da Teoria Fuzzy relacionada às t-normas e t-conormas;
- Resulta uma superposição dos estados para o estado final composto ao qual se pode relacionar com a defuzificação das regras acionadas.

Seja o exemplo da Figura B.9 e o seguinte conjunto de regras fuzzy:

- *se carro da frente longe então manter velocidade máxima;*
- *se carro da frente perto então manter velocidade mínima.*

Para obter-se a velocidade em função da distância do carro da frente pela lógica combinatória fuzzy [GARMS & ANDRADE - 2001] os passos utilizados são os mesmos dos definidos para o autômato fuzzy anteriormente descrito. Nestas condições pode-se dizer que este elemento de lógica combinatória fuzzy é equivalente ao autômato fuzzy da Figura B.9.

No entanto, mesmo considerando-se o exemplo desta Figura descrito pela lógica combinatória equivalente, nota-se que há uma realimentação implícita.

Neste caso, quando se aumenta a velocidade tende a ocorrer uma aproximação ao carro da frente ou de modo oposto tende a haver um afastamento caso a velocidade tenha sido diminuída. Logo, dependendo das funções de pertinência, das t-normas e t-conormas utilizadas, neste sistema também poderão ocorrer oscilações caóticas.

B.3 Física & Fuzzy

Uma alternativa para aquela apresentada na seção 1.4 sobre a aplicação da Teoria Fuzzy nas leis da Física seria explorar o resultado apresentado em [FRIEDEN-2004], relacionado-o ao estabelecimento das equações fundamentais desta ciência na forma Lagrangiana [LANDAU & LIFCHITS -1966]. Isto seria feito a partir da teoria da informação, mais especificamente do conceito de Informação (entropia) de Fisher.

A técnica descrita em [FRIEDEN-2004] relaciona Informação à obtenção de Leis Físicas e a de [KANDEL & LANGHOLZ -1994] relaciona Informação com Funções de Pertinência Fuzzy. Sendo assim, seria possível, a princípio, estabelecer uma ponte entre Funções de Pertinência Fuzzy com as Leis Físicas.

Além disto, em [GRANIK & CAULFIELD-2001], a Mecânica Quântica é desenvolvida como uma Mecânica Fuzzy relacionada à incerteza das medidas em contraposição à interpretação usual crisp, sendo a “função de onda” tratada como uma “função determinística”, embora com um caráter Fuzzy.

A interpretação do Autômato Fuzzy, descrita em B.2 como tendo diversos estados possíveis e com transições modeladas por regras fuzzy, leva a uma superposição de estados. Este conjunto de estados define o estado final utilizando-se do mecanismo de defuzzificação destas regras. Isto é semelhante à superposição de estados quânticos e a um modelo de realização de seu colapso, em Mecânica Quântica. Tal semelhança também aponta na direção de um relacionamento entre esta teoria e a Teoria Fuzzy.

Uma característica interessante desta alternativa é de que se consideraria desde então possibilidades ao invés de probabilidades, e assim não seriam exigidos diversos casos para se obter resultados estatísticos válidos. Estes últimos estariam implicando em interpretações estranhas para os fenômenos [GRANIK & CAULFIELD-2001].

No caso descrito, os estados passam a ser intrinsecamente fuzzy e a teoria dos números não seria adequada para descrevê-los, sendo necessária a teoria dos números fuzzy [KAUFMANN & GUPTA-1991].

Uma regra fuzzy que comumente representa ações humanas poderia então ser interpretada de modo mais amplo, como sendo relacionada às leis Físicas e/ou aos comportamentos da Natureza e/ou de Sistemas em geral.

B.4 Considerações Finais

Neste Apêndice apresentou-se o desenvolvimento de um circuito caótico, denominado Astável Fuzzy, o que constitui, até onde se tem notícia em vista da literatura especializada, uma contribuição original.

Um emprego para este circuito é o estudo do controle de caos para sistemas experimentais (não simulados). Este circuito também pode ser aplicado para gerar um sinal multi-nível aleatório e sua implementação é relativamente simples, sendo composta por dois circuitos integrados lineares: o LM 348 (4 OP-AMPS) e o LM398 (Sample & Hold).

Para que se possa realizar a implementação sugerida anteriormente, a saída do circuito proposto deve ser amostrada por intervalos de tempo maiores que $T_a > (10/\lambda)T_{CLK}$, onde $\lambda \cong 0,7$ é o expoente de Lyapunov da sequência gerada e T_{CLK} é o período do clock que corresponde a cada passo de iteração do mapa. Nestas condições, a sequência gerada é aleatória e não simplesmente pseudo-aleatória.

Os geradores aleatórios são importantes em muitas áreas: Computação (ex: simulações, jogos), Comunicações (ex: modulação CDMA), Ciência (ex: estudo do caos) e outras.

São conhecidas diversas técnicas na construção de circuitos cuja finalidade é gerar sinais aleatórios para os diferentes tipos de aplicação [PROAKIS & SALEHI - 1994] [BELINDO & ACOSTA & VALENCIA & HUERTAS -1992]. Entretanto, pela facilidade de sua obtenção é mais comum a implementação de geradores pseudo-aleatórios, cuja sequência gerada repete-se após longos intervalos, embora esta característica limite o seu campo de uso.

Observa-se que o Astável Fuzzy proposto é um circuito relativamente simples que permite gerar seqüências realmente aleatórias.

O circuito sugerido permitiu estudar o comportamento de Sistemas Fuzzy onde o Modelo Fuzzy adotado emprega regras auto-referenciais. Tem-se para este caso uma proposta de estrutura de circuito – Astável Fuzzy – e sua correspondente modelagem matemática – Tripla <regra; funções de pertinência; operadores>.

Percebeu-se que tal equacionamento matemático é equivalente à Função Logística. Portanto podem-se estender as propriedades dos Sistemas Dinâmicos Discretos que obedecem a esta função [MONTEIRO – 2006] para os sistemas modelados por este Astável Fuzzy.

Além disto, a função de atraso explícito do elemento SH indica seu uso para reter valores não permanentes, de variáveis contínuas (ou de suas pertinências às classes fuzzy). Este elemento (SH) memoriza informação e pode ser visto com um Flip-Flop Fuzzy tipo D.

Também se sugere o emprego de blocos SH para desempenhar o papel de elemento de memória da parte fuzzy de Sistemas baseados em Lógica Sequencial Fuzzy, implementados sem computadores digitais. Esta técnica visa obter respostas rápidas [SANZ - 1994], [BELLO & KWAN & TUNG - 1997] e [PATYRA & MAREK - 1996].

A parte *crisp* deste tipo de Sistema (portas, flip-flops etc.) pode ser realizada por meio de circuitos digitais C-MOS, com alimentação de 0 e +Vcc, e a parte fuzzy (portas, fuzificações/defuzificações etc.) por meio de Amplificadores Operacionais e de SH's, com alimentação $\pm V_{cc}$.

O Astável Fuzzy e a aplicação da Teoria Fuzzy na Física exemplificam os SDFI's para os quais as regras fuzzy fazem parte da definição do sistema.

B.5 Bibliografia Comentada

Os SDFI's se apresentam em diversas situações tais como dinâmica de populações: [BARROS & BASSANEZI & TONELLI-2000] e [BARROS-1997], em estudos da Física e Ciência: [FRIEDMAN & SANDLER-1995], [FRIEDMAN & SANDLER-1999] e [GRANIK & CAULFIELD-2001] bem como em Lógica Fuzzy: [GRIM-1993] e como aqui discutido.

Destes trabalhos alguns podem ter um caráter especulativo, no entanto sinalizam a necessidade de uma ciência e tecnologias mais abrangentes, no sentido de considerar situações com comportamentos mais complexos, [PRIGOGINE 1–1996] e [PRIGOGINE 2–1996], o que poderia ser explorado também através dos SDFI's.

Aparentemente nesta linha de trabalho citam-se apenas dois trabalhos, [YDRIS-2001] e [DUDEK & DAVVAZ & JUN - 2005], sobre Física e Matemática avançadas, relacionadas a variedades fuzzy, teoria de grupos, simetrias, topologia e teoria de campos sendo que suas referências remetem a uma quantidade muito maior de estudos semelhantes.