BRUNO PIMENTEL MACHADO

Modelo matemático baseado em lógica nebulosa para tratamento de
variáveis e avaliação de contexto de sistemas dinâmicos

São Paulo
2016

BRUNO PIMENTEL MACHADO

Modelo matemático baseado em lógica nebulosa para tratamento de
variáveis e avaliação de contexto de sistemas dinâmicos

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Ciências

São Paulo
2016

BRUNO PIMENTEL MACHADO

Modelo matemático baseado em lógica nebulosa para tratamento de
variáveis e avaliação de contexto de sistemas dinâmicos

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Ciências

Área de Concentração: Engenharia
de Computação

Orientador: Prof. André Riyuiti
Hirakawa

São Paulo
2016

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catlogação-na-publicação

Machado, Bruno

Modelo matemático baseado em lógica nebulosa para tratamento de variáveis e avaliação de contexto de sistemas dinâmicos / B. Machado -- versão corr. -- São Paulo, 2016.

85 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Computação e Sistemas Digitais.

1.Lógica Nebulosa 2.Variável Dinâmica 3.Comportamento Padrão
I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Computação e Sistemas Digitais II.t.

Dedico este trabalho à minha esposa Camila Pace Morando Guerrero e filho
Nicholas Guerrero Pimentel Machado.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor André Riyuiti Hirakawa, pela paciência, orientação e confiança depositada ao longo do trabalho.

Ao Brad Larsen, gerente de políticas do Departamento de Transportes de Minnesota, pela atenção e dados fornecidos dos indicadores de tráfego fornecidos.

Ao Igudes Martins, do Departamento de Marketing da SPTrans, pela atenção e dados fornecidos dos transportes públicos de São Paulo.

Ao Guilherme Castro, colega de estudos da Escola Politécnica, pelo suporte e indicação de artigos.

A todos que de forma direta ou indireta tenham de alguma maneira, contribuído na execução deste trabalho.

RESUMO

A pesquisa apresenta uma adaptação do modelo matemático de lógica nebulosa. A adaptação é uma alternativa capaz de representar o comportamento de uma variável subjetiva ao longo de um intervalo de tempo, assim como tratar variáveis estáticas (como o modelo computacional existente). Pesquisas realizadas apontam para uma lacuna no tratamento de variáveis dinâmicas (dependência no tempo) e a proposta permite que o contexto em que as variáveis estão inseridas tenha um papel no entendimento e tomada de decisão de problemas com estas características. Modelos computacionais existentes tratam a questão temporal como sequenciador de eventos ou custo, sem considerar a influência de fenômenos passados na condição corrente, ao contrário do modelo proposto que permite uma contribuição dos acontecimentos anteriores no entendimento e tratamento do estado atual. Apenas para citar alguns exemplos, o uso da solução proposta pode ser aplicado na determinação de nível de conforto em transporte público ou auxiliar na aferição de grau de risco de investimentos no mercado de ações. Em ambos os casos, comparações realizadas entre o modelo de lógica nebulosa existente e a adaptação sugerida apontam uma diferença no resultado final que pode ser entendida como uma maior qualidade na informação de suporte à tomada de decisão.

Palavras-Chave: Lógica Fuzzy. Variável Dinâmica. Comportamento padrão.

ABSTRACT

The research presents an adaptation of the mathematical model of fuzzy logic. The adaptation is an alternative capable of representing the behavior of a subjective variable over an interval of time, as well as treating any static variables (as existing computer models). Research conducted points to a gap in the treatment of dynamic variables (variables which depend on time). The context, in which the variable is embedded, plays a role in the understanding and decision making process of problems of this nature. Existing computer models treat the temporal issue as sequencing of events or cost, without considering the influence of passed occurrences in its current condition, unlike the proposed model that allows a contribution of earlier developments in the understanding and treatment of the current state. The proposed solution is applicable to determine the comfort level at public transportation or to support the risk definition at the stock market, just to list a couple of examples. On both scenarios, the existing fuzzy logic was compared to the proposed solution and it was observed differences on the outcomes that represent an increase on the overall quality of the information which supports the decision making process.

Keywords: Fuzzy Logic. Dynamic Variable. Standard Behavior.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	13
2. JUSTIFICATIVA	15
3. OBJETIVO.....	17
4. METODOLOGIA.....	19
5. SISTEMAS INTELIGENTES	21
I. Computação Evolutiva	21
II. Redes Neurais	23
III. Redes Bayesianas.....	28
IV. Lógica Nebulosa	31
6. CONTEXTUALIZAÇÃO.....	35
7. PROPOSTA	39
8. CENÁRIOS DE TESTE	43
I. Equações de Primeiro e Segundo Graus	43
II. Distúrbios.....	48
III. Problema de determinação de melhor rota	52
IV. Risco de ações na bolsa de valores.....	71
9. ANÁLISE DE RESULTADOS.....	75
10. CONCLUSÃO	79
11. REFERÊNCIAS	81

1. INTRODUÇÃO

Pesquisas que suportam o processo de decisão ou qualificação em diferentes contextos surgem todos os dias. Apenas para listar algumas das soluções mais conhecidas, temos Computação Evolutiva, Redes Neurais, Redes Bayesianas e Lógica Nebulosa.

O uso destas técnicas tem por objetivo aumentar a qualidade das decisões tomadas ou o entendimento do problema, através de meios matemáticos que melhor definem condições de sistemas em função de parâmetros de entrada. A gama de problemas que podem ser tratados com técnicas inteligentes é vasta podendo cobrir questões como sistemas de reconhecimento de linguagem audível, soluções de otimização de recursos fabris e determinações de menores rotas entre dois pontos, apenas para listar algumas.

Ainda que algumas técnicas possam ser aplicadas em diferentes contextos, normalmente elas são mais usadas para determinados fins. Computação Evolutiva é comumente associada à resolução de problemas de otimização. Redes neurais são usadas para tratar problemas que envolvem variáveis não lineares. Redes Bayesianas são mais associadas a problemas estocásticos. Números nebulosos, por sua vez, podem facilitar o entendimento de variáveis subjetivas e/ou incertas para melhor manipulação e determinação de regras de inferência.

Adaptações das diferentes técnicas surgem para tratar problemas com comportamentos mais específicos. Computação Evolutiva Interativa, por exemplo, surgiu da necessidade de tratar as funções de avaliação de resultados (*fitness*) a cada iteração, pela falta de uma função adequada para ser usada. O uso de redes neurais recorrentes surgiu para tratar a necessidade de realimentar os sistemas com dados já processados (como se fosse uma memória).

A adaptação proposta nesta pesquisa surgiu da necessidade de tratar um problema específico de tratamento de variáveis subjetivas com dependência no tempo. Este problema pode ser observado em diferentes contextos como a definição do nível de conforto de um indivíduo sujeito a determinadas condições por um período de tempo, ou na avaliação de risco ou volatilidade de ações na bolsa de valores. Nos

dois exemplos, as variáveis envolvidas no processo estão sujeitas à variação no tempo e estão associados a questões subjetivas.

2. JUSTIFICATIVA

Sistemas inteligentes têm ganhado a atenção de pesquisadores nos últimos cinquenta anos. “Inteligentes” vem da capacidade dos sistemas de *entender* os cenários a que são submetidos e através da *razão*, prover respostas a problemas que aparecem. Dentre as diversas definições existentes sobre o tema, a de Humphreys (1979, p.115) descreve bem o conceito de sistemas inteligentes: “Inteligência é a resultante do processo de aquisição, armazenamento em memória, recuperação, combinação, comparação e uso em novo contexto de informação e habilidades conceituais; é uma abstração.”.

De acordo com o estudo apresentado por Pannu (2015), as técnicas inteligentes mais pesquisadas são Computação Evolutiva, Lógica Nebulosa, Redes Neurais e sistemas híbridos. Outras também aparecem nos estudos, mas com menor espaço, como o caso das Redes Bayesianas. O uso destas técnicas procura aumentar a qualidade das decisões tomadas, através de meios matemáticos que melhor definem condições de sistemas em função de parâmetros de entrada e de contextos. As soluções se espalham em diferentes campos de pesquisa:

- Sistemas voltados para entendimento da língua falada;
- Sistemas capazes de aprender e se adaptar com base em experiência;
- Sistemas de resolução de problemas (sistemas especialistas);
- Sistemas de percepção visual;
- Sistemas de modelagem para predição de eventos;
- Robótica (englobando questões como navegação, segurança e outros).

Apesar do volume crescente de pesquisas, percebe-se que existe uma lacuna ainda a ser preenchida que trata um aspecto fundamental da inteligência artificial: o tempo (MANIADAKIS; TRAHANIAS; TANI, 2009). Maniadakis, Trahanias e Tani (2009) indicam que os trabalhos voltados para temas de inteligência se concentram em questões que envolvem a interação com meio de forma espacial e não temporal. Os autores afirmam que é necessário ampliar as pesquisas para contemplar aspectos básicos do tratamento do tempo como duração, simultaneidade, ordenação, momento (passado, presente e futuro) e fluxo do tempo.

Nos trabalhos em que o tempo é referenciado, normalmente ele aparece como um controle de sequenciamento de eventos, custo de alguma atividade ou restrição de qualquer natureza, sem influenciar diretamente no comportamento das variáveis envolvidas nos problemas. É o caso de trabalhos como o de Huang e Ding (2012) em que a referência do tempo estabelece uma restrição de horário de saída e chegada de determinados nós em um grafo em um problema de busca de melhor rota. Os autores apresentam diferentes cenários de teste estabelecendo uma relação causal entre o momento da chegada em determinado nó e o impacto que isto gera no horário de chegada ao destino final. Neste exemplo, o tempo é visto como custo e restrição, não tendo uma influência direta em outras variáveis que podem contribuir para a escolha do caminho.

Desta forma, observou-se uma oportunidade de explorar uma das técnicas de inteligência artificial, de tal forma a preencher parte da lacuna identificada de tratamento do contexto (visão temporal).

3. OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo matemático alternativo, baseado na lógica nebulosa, para tratamento de variáveis subjetivas com dependência no tempo.

Para atingir o objetivo, um novo modelo de cálculo de grau de pertinência foi criado. O modelo proposto parte do princípio que o comportamento padrão, da variável subjetiva com dependência no tempo, é conhecido e pode ser representado por uma função ou um conjunto de dados históricos. Variáveis linguísticas (de acordo com os princípios da lógica nebulosa tradicional) são definidas para a variável subjetiva. A adaptação consiste na estratégia de fuzzificação, definindo um período de contribuição de cada evento ocorrido. Os fundamentos de regras de inferência e defuzzificação não sofreram alterações no modelo proposto.

O uso do modelo proposto permite o tratamento de problemas como a determinação do nível de conforto em transporte público ou a avaliação do nível de risco de ações na bolsa de valores.

4. METODOLOGIA

Estudos realizados indicam não haver uma lógica matemática adequada para representar variáveis subjetivas com variação no tempo. Variáveis subjetivas são comumente associadas à lógica nebulosa de Zadeh (1965, 1973). As pesquisas realizadas apontam que sistemas desta natureza, quando submetidos à variação do tempo, são tratados de duas formas distintas:

➤ Conjunto de regras

Exemplos podem ser observados no estudo realizado sobre o robô NOMAD 200 em Mucientes et al. (2003). Trata-se de um robô com capacidade de se locomover autonomamente em um ambiente repleto de obstáculos. O robô é preparado com um conjunto de sensores que o permitem identificar distância e aproximação de objetos no ambiente. Foram desenvolvidas regras baseadas em lógica nebulosa que permitem ao NOMAD antecipar impactos e tomar ações de desvio e ajustes de velocidade. Como a distância entre o robô e os obstáculos mudam com o tempo (em função do deslocamento do próprio robô), as regras de inferência absorvem as questões temporais. Um exemplo apresentado no estudo pode ser observado abaixo:

SE o coeficiente de distância é alto nas últimas três medições E a distância à direita é média nas últimas três medições E a distância à direita diminui um pouco nas últimas duas medições E a velocidade é alta ENTÃO reduzir velocidade um pouco. (MUCIENTES et al., 2003)

Note que ao incorporar as regras temporais (como em ‘as últimas três medições’) o volume de regras a ser mantido para atender ao sistema aumenta significativamente.

➤ Análise atemporal

Apesar da variação ao longo do tempo, apenas determinados momentos específicos são avaliados, considerando uma visão cumulativa que o tempo pode ter causado nas variáveis envolvidas. É o caso de estudos como Bose e Chen (2011) que executam análises a cada quarto de ano para verificar o processo de migração de clientes em agrupamentos de acordo com seu relacionamento com o provedor de serviços. São estabelecidas definições

para cada grupo de acordo com o envolvimento do cliente com o provedor (descobrimento, exploração, expansão, comprometimento e dissolução) e a cada período de tempo, o mesmo grupo de clientes é submetido a uma análise para entender em que fase do relacionamento eles se encontram. Como a avaliação é feita por ciclos, são observadas as situações de cada indivíduo no instante da nova avaliação.

Outras lógicas matemáticas tratam questões temporais de diferentes maneiras. Como visto nas soluções envolvendo lógica nebulosa, outras lógicas existentes desconsideram o contexto (intervalo de tempo e comportamento das variáveis). Isto pode ser observado em Gen e Lin (2014) que demonstram como otimizar os esforços em uma fabricação garantindo o sequenciamento das atividades. Apesar da dependência no tempo, o algoritmo proposto avalia cada atividade como um bloco único, desconsiderando assim os efeitos contínuos do tempo.

Mesmo sem encontrar boas referências no tratamento de variáveis subjetivas com variação no tempo, a lógica nebulosa é a que melhor se aproxima por sua capacidade de tratar incertezas.

Ao verificar o comportamento da adaptação proposta da lógica nebulosa e seu modelo original em um estudo de caso envolvendo a determinação do grau de conforto no transporte público, observa-se que os modelos são aderentes e a proposta oferece uma visão de continuidade da variável dinâmica. Pode-se observar, no estudo de caso envolvendo o mercado de ações, como uma análise de comportamento, foco da proposta realizada, auxilia na tomada de decisões.

5. SISTEMAS INTELIGENTES

Como apontado por Pannu (2015), o volume de pesquisas voltadas para sistemas inteligentes tem crescido, em particular cobrindo os aspectos de Sistemas Evolutivos, Redes Neurais, Lógica Nebulosa e outros como Redes Bayesianas. Desta forma, nos subtópicos abaixo serão apresentadas descrições de cada uma dessas lógicas e exemplos de uso.

I. Computação Evolutiva

Computação Evolutiva engloba uma frente de diferentes técnicas / algoritmos (como Algoritmos Genéticos, Programação Evolucionária ou Evolutiva e estratégia de Evolução, apenas para listar três exemplos) que tem em comum o fato de trabalharem com o princípio Darwiano de evolução. Os algoritmos promovem a seleção de melhores indivíduos de uma população até que um objetivo determinado seja atingido (CLARK; WESTHEAD, 1996; FLEMING; PURSHOUSE, 2002; GEN; LIN, 2014; JUNG et al., 2013; SPEARS et al., 1993; TANG et al., 1996; WHITLEY, 1994).

A diferença entre as técnicas está relacionada com algumas etapas evolutivas do processo de geração de novas gerações. Algoritmos genéticos, por exemplo, possuem uma etapa chamada *Crossover*, na qual os genes dos cromossomos-pai são cruzados para a criação do cromossomo-filho. No caso de Programação Evolucionária, ao invés de haver cruzamento entre cromossomos, a evolução se faz através da inclusão de números randômicos nos cromossomos existentes e a comparação entre as gerações formadas. Em todos os casos, a evolução se faz através da avaliação de *fitness* de cada cromossomo resultante. Esta avaliação indica quão adequada é a resposta, tendo em vista o problema a ser tratado.

Em Gen e Lin (2014), algoritmos genéticos são usados, em um primeiro momento, para melhor definir o sequenciamento de atividades de fabricação. Os autores exploram diferentes formas de representar os cromossomos, assim como, de tratar as possíveis combinações de máquinas x atividades em um relacionamento $M \circ A$

(no qual uma máquina $m \in M$ pode executar uma atividade $a \in A$ de cada vez) considerando diferentes tempos de execução.

Em um segundo momento, os autores endereçam questões envolvendo a logística interna dos materiais. Testes são realizados considerando uma fábrica com seis locais de carga e descarga e o desafio é identificar a melhor forma de fazer as entregas assumindo restrições de direção de veículos, tempo de deslocamento e capacidade de transporte. Finalmente, são tratadas questões de planejamento de recursos para as produções.

Nos três problemas, foram definidos funções-objetivos, que nada mais são do que a forma como cada cromossomo é avaliado em relação ao objetivo estabelecido. Assim sendo, cada problema apresentado e discutido pelos autores é tratado de forma independente (possuem estruturas próprias de algoritmos genéticos), ainda que possa ser representado como subproblema de um problema maior. A questão tempo é colocada como fator de sequenciamento e / ou custo para a tomada de decisão, sem considerar os impactos que o tempo pode causar, por exemplo, em desgastes de máquinas, ou qualidade de produção.

Em um experimento diferente, Jung et al. (2013) usaram um recurso de programação evolutiva para estimar a preferência por roupas de um conjunto de pessoas. Os autores submeteram vinte pessoas a um teste em que roupas eram demonstradas em um monitor. Pelo tempo de fixação de visão nas roupas, o sistema avaliava a preferência sob três aspectos distintos: mangas, colarinho e cores. O cromossomo neste experimento consistia de uma sequência de sete dígitos booleanos. O primeiro representando uma de duas possíveis formas de mangas, os três seguintes representando uma de quatro formas possíveis de colarinho e por fim, três dígitos com a composição simples RGB (do inglês Red, Green, Blue) para determinar a cor da peça.

Apesar do baixo número de iterações (entre quatro e seis por participante), os resultados apresentam um alto grau de convergência nas propostas realizadas pelo sistema e as escolhas dos envolvidos. Este estudo foi selecionado especificamente pela forma como os pesos de cada escolha foi definido pelos autores. Jung et al. (2013) entendem que a escolha de roupas está associada a aspectos subjetivos e sujeito a mudanças de comportamento ao longo do tempo. Dessa forma, a função

usada para qualificar as escolhas atribui pesos para cada seleção, dando maior importância àquelas que foram sinalizadas por último.

A Computação Evolutiva, ainda que apareça como uma solução para uma série de problemas de otimização, apresenta algumas deficiências associadas ao esforço computacional para atingir resultados de qualidade (em sistemas com grande volume de variáveis) e de dependência com especialistas para definir as melhores funções de validação (BRANKE, 1999; JUNG et al., 2013; LI et al., 2013; RAJABI-BAHAABADI et al., 2015).

II. Redes Neurais

As redes neurais tiveram um primeiro momento de destaque na década de 1940 e é baseado no estudo biológico da célula nervosa (neurônio) como apresentado na Figura 1 (HOPFIELD; TANK, 1986; JAIN; MAO; MOHIUDDIN, 1996). Basicamente o neurônio tem um núcleo que carrega informações e sinapses que fazem a conexão com outros neurônios permitindo que dendritos e axônios troquem sinais.

Figura 1 – Arquiteturas de redes neurais

Fonte: Jain, Mao e Mohiuddin (1996)

Existem basicamente dois tipos de redes neurais (JAIN; MAO; MOHIUDDIN, 1996; LIPPMANN, 1987; YAO, 1999). As redes FeedForward (ou não-recorrentes) e as redes recorrentes. Conceitualmente, a diferença básica entre elas é o fato de a primeira trabalhar com grafos acíclicos e a segunda com grafos cíclicos (SCHMIDHUBER, 2015). Exemplos de arquiteturas existentes de redes não recorrentes e recorrentes podem ser observados na Figura 2.

Figura 2 – Arquiteturas de redes neurais

Fonte: Jain, Mao e Mohiuddin (1996)

Nas redes neurais, os sistemas são organizados em formato de grafos em que cada nó representa um neurônio. O relacionamento entre diferentes neurônios configuram sinapses. Uma rede neural pode ter tantos neurônios e sinapses quantos necessários, e a última camada de neurônios define o resultado do sistema.

Cada sinapse é representada pelo par (origem, destino) e a cada par é atribuído um peso que define o grau de influência que aquela sinapse tem na saída do neurônio destino, como apresentado pela equação (1). Uma função de ativação, definida pela equação (2), define se o neurônio é ou não relevante para a resposta do sistema.

$$v = \sum_{i=1}^m w_i x_i \quad (1)$$

A variável v representa o valor da somatória dos pesos (w_i) de todas as sinapses (m) multiplicados pelos seus respectivos valores de entrada (x_i).

$$f(v) = \begin{cases} 1 & \text{se } v \geq a \\ 0 & \text{se } v < a \end{cases} \quad (2)$$

A variável a representa um valor de controle para determinar se o neurônio deve ou não ser ativado. Alternativamente, uma função sigmoide pode ser usada para avaliar a ativação ou não do neurônio (equação (3)).

$$f(v) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{1}{1+e^{-v}} \geq 0,5 \\ 0 & \text{se } \frac{1}{1+e^{-v}} < 0,5 \end{cases} \quad (3)$$

Os resultados de redes neurais normalmente estão associados aos treinamentos que são usados para determinar seus pesos (JAIN; MAO; MOHIUDDIN, 1996; YAO, 1999). Existem diferentes tipos de algoritmos de treinamento que podem ser agrupados em três categorias distintas: supervisionados, não supervisionados e híbridos. Em algoritmos de treinamento supervisionado, para cada padrão de dados de entrada é fornecido também o resultado esperado. Assim, conclui-se que os treinamentos não supervisionados são aqueles que fornecem padrões de dados de entrada sem o resultado esperado. Neste segundo caso, a rede neural determina padrões de correlação entre os parâmetros de entrada para convergir para um resultado. Finalmente os sistemas híbridos combinam as duas técnicas, alimentando alguns resultados esperados junto com os padrões de dados de entrada, mas não todos eles.

Redes neurais FeedForward são caracterizadas pela ausência de memória, de tal forma que a resposta aos estímulos das sinapses é independente dos resultados anteriormente processados (JAIN; MAO; MOHIUDDIN, 1996; SASTRY; SANTHARAM; UNNIKRISHNAN, 1994). Por este motivo, considerar uma rede FeedForward para tratar problemas que envolvam tempo e contexto não é adequado, ainda que alternativas como redes dessa natureza possam armazenar um conjunto finito e pré-determinado de dados históricos (Deep Neural Network – DNN) (SAK; SENIOR; BEAUFAYS, 2014).

Um exemplo de uso de rede FeedForward diz respeito à soluções de reconhecimento de escrita. Choudhary e Rishi (2011), apresentam um estudo em que usam uma rede FeedForward para tentar identificar as letras cursivas de 35 pessoas. Para obter o sucesso esperado, cada letra foi convertida em uma matriz 8 x 6 em que é feito um mapa da letra, como demonstrado na Figura 3.

Figura 3 – Mapa de Letra

Fonte: Choudhary e Rishi (2011)

Cada posição na matriz aponta a presença ou não da letra no quadrante relacionado. Dessa forma, a rede montada possui 48 (8 x 6) neurônios de entrada. A saída são outros 26 neurônios para representar cada uma das 26 saídas possíveis. Taxas de erro podem ser diminuídas em função da carga de treinamento. Como o universo de entradas e saídas são conhecidos e não há uma relação direta entre o valor de entrada em um instante com o valor subsequente, a rede atende o objetivo proposto.

Por sua vez, redes recorrentes, por sua estrutura cíclica, permitem uma retroalimentação de valores anteriores que garantem à rede um comportamento de sistema dinâmico e não de função, como no caso das redes FeedForward (LUKOŠEVIČIUS; JAEGER, 2009). Isso significa que as redes recorrentes têm uma capacidade de tratar eventos passados como se fossem memórias dinâmicas. Cabe ressaltar que o uso de redes neurais de grande porte ainda apresenta dificuldades devido ao grande esforço computacional exigido para que sejam devidamente treinadas (LUKOŠEVIČIUS, 2007; PEDDINTI; POVEY; KHUDANPUR, 2015; SHAO, 2008).

Chen et al. (2015) apresentam um exemplo de uso de rede recorrente ao propor um algoritmo de tratamento de reconhecimento de voz. De acordo com os autores, este tipo de problema demanda um volume grande de treinamento antes que os pesos estejam devidamente calibrados, principalmente usando uma rede FeedForward, na qual, cada palavra nova deve ser confrontada contra um dicionário de todas as palavras possíveis. A rede recorrente tem um papel importante para reduzir o tempo de treino e processamento.

Na solução proposta, a rede é configurada com três camadas de neurônios, uma de entrada, uma interna e uma de saída. A camada interna faz o papel de memória e guarda o histórico do que já foi processado. As palavras identificadas são usadas em conjunto com uma base de conhecimento para limitar as opções das próximas palavras de entrada. Assim, com o uso de recursos probabilísticos (CHEN et al., 2015; SUNDERMEYER; NEY; SCHLÜTER, 2015) e a recorrência da rede neural, o processamento e treinamento envolvidos são drasticamente reduzidos.

Lukoševičius e Jaeger (2009) já haviam apontado a dificuldade de manter uma rede neural atualizada em função do esforço de treinamento e validação. Em seu estudo, os autores discorrem sobre as diferentes técnicas de treinamento e como as redes precisam ser recalibradas quando uma mudança significativa é identificada (como surgimento de novos parâmetros, regras ou mesmo interpretações). De acordo com eles, a atualização de um único parâmetro pode significar horas de treinamentos exaustivos, fazendo com que as redes neurais recorrentes sejam adequadas apenas para redes de menor porte (na ordem de dezenas de neurônios).

A alternativa proposta por Lukoševičius e Jaeger (2009) é usar uma técnica que não define pesos entre as sinapses internas à rede neural. A sugestão dos autores é usar uma técnica definida como Máquina de Estado Líquido. A técnica consiste em calibrar pesos apenas nas sinapses de saída. As sinapses internas são randomicamente definidas. Os resultados apresentam grande evolução na área de treinamento de redes neurais recorrentes, mas ainda possuem taxas de erro altas e precisam ser mais bem estudadas.

É importante notar, no entanto que, ainda que os problemas de processamento e treinamento das redes estivessem superados, a forma como o tempo é tratado na solução reflete a crítica apontada por Maniadakis, Trahanias e Tani (2009). O tempo nada mais é do que um fator de sequência de atividades. Nos trabalhos verificados envolvendo a questão temporal, o tempo é usado como sequenciador apenas, como forma de limitar os possíveis valores de saída da próxima iteração (ALI; KAMOUN, 1993; AHN; RAMAKRISHNA, 2002; CHEN et al., 2015; LUKOŠEVIČIUS; JAEGER, 2009; JAIN; MAO; MOHIUDDIN, 1996; PEDDINTI; POVEY; KHUDANPUR, 2015; SAK; SENIOR; BEAUFAS, 2014; YAO, 1999).

III. Redes Bayesianas

Apesar de não aparecer explicitamente na lista das técnicas computacionais com maior volume de pesquisa (PANNU, 2015), as redes bayesianas aparecem em um número considerável de estudos e dentre os artigos estudados, foi a alternativa que mais se aproximou do tratamento de tempo nas esferas defendidas por Maniadakis, Trahanias e Tani (2009).

Redes Bayesianas estão contidas na família de modelos gráficos probabilísticos (BEN GAL, 2007; PERFORS et al., 2011), no formado de grafos diretos acíclicos. Os nós no grafo representam variáveis e a ligação entre os nós definem as dependências entre as variáveis. Cada variável pode ser representada por uma probabilidade na faixa de valores $[0, 1]$ no qual 0 significa que a chance do evento ocorrer é nula e 1 representa certeza na probabilidade do evento ocorrer. As probabilidades podem ser incondicionais ou condicionais. Incondicionais são representadas por $P(h_i)$, em que h_i é a i -éssima hipótese levantada a respeito da variável, e probabilidades condicionais são representadas por $P(e|h_i)$ e dever ser lida como a probabilidade do evento e acontecer, sabendo que a hipótese h_i foi confirmada. A regra bayesiana se apoia a essas duas probabilidades para chegar à equação (4) na qual $\mathcal{H}$ representa o conjunto de hipóteses a respeito da variável.

$$P(h_i|d) = \frac{P(d|h_i)*P(h_i)}{\sum_{h_j \in \mathcal{H}} P(d|h_j)*P(h_j)} \quad (4)$$

O desafio nas redes bayesianas pode ser reduzido a dois temas principais: a estrutura da rede e a distribuição das probabilidades entre as hipóteses da variável. O tema tem sido alvo de inúmeras pesquisas fornecendo formas de avaliar a qualidade dos modelos e descrevendo as dificuldades de confirmar as previsões (JIANG; MAHADEVAN, 2009; PERFORS et al., 2011; YUAN; MALONE, 2013; ZHANG; MAHADEVAN, 2003).

Hofleitner et al. (2012) apresenta um estudo em que demonstra como uma rede bayesiana pode ser usada para estimar o tempo de viagem em cidades, a partir de uma amostra limitada de dados das ruas arteriais. O estudo parte do princípio que os dados sobre tráfego e condições gerais de avenidas e estradas são de fácil

obtenção, porém em ruas arteriais, em que não há um sistema de monitoração implantado, os dados são menos disponíveis e mais imprecisos.

As amostras são coletadas de carros de coleta que passam pelas vias e enviam sinais para uma central a cada intervalo de tempo fixo. Com base no volume de sinais recebidos por cada veículo em cada trecho, a central consegue estimar uma velocidade média. As diferentes amostras das vias dão base para uma função de distribuição de probabilidade para cada trecho visitado. A estimativa de tempo calculada pelos autores reflete a soma das diferentes funções de distribuição.

Para o cálculo dos tempos, os autores condicionam a probabilidade do trecho à probabilidade de tráfego intenso ou leve dos trechos vizinhos. A cada intervalo de tempo incorrido, a probabilidade a posterior é atualizada e novas previsões são realizadas para os trechos seguintes. Desta forma, Hofleitner et al. (2012) usam o tempo como um sequenciador de eventos. A consideração temporal diz respeito apenas à atualização das probabilidades com novos dados.

Outro trabalho na linha de determinação de tempo de viagem, é o realizado por Asghari et al. (2015). O estudo procura equilibrar dados históricos com dados atuais em função do momento em que a previsão para a viagem acontece. Assume-se que dados históricos de vias principais são de pleno conhecimento e os dados do trânsito corrente estão disponíveis para uso imediato. Assim, ao estimar o tempo de uma viagem que deva acontecer em um período curto de tempo (minutos), deve-se levar em conta que os dados atuais são mais confiáveis do que os dados históricos. Por outro lado, ao estimar o tempo de uma viagem que deva acontecer em um período longo de tempo (horas ou dias), os dados históricos têm maior confiabilidade.

A preocupação de Asghari et al. (2015) está relacionada à confiança de chegar ao destino no período correto. Na Figura 4, os autores apresentam duas rotas com origem e destino coincidentes. No caso da rota A, existe a possibilidade de atingir o objetivo em menos de cinquenta minutos, mas também há chances de que isto acontece apenas depois de sessenta e cinco minutos. Pela rota B, o destino é atingido entre pouco menos de cinquenta e cinco minutos e pouco mais de uma hora.

Figura 4 – Função de Distribuição de probabilidade de rotas A e B

Fonte: Asghari et al. (2015)

Similar ao estudo de Hofleitner et al. (2012), Asghari et al. (2015) sugere que para obter um tempo estimado adequado, o tempo de cada trecho deve ser constituído por uma função de distribuição de probabilidade e a soma de todos estes tempos devem resultar em um tempo total da viagem. No entanto, ao contrário do que propõem os primeiros autores, a proposta apresentada por Asghari et al. (2015) consiste em um levantamento estatístico considerando dia e hora dos eventos. Ou seja, a função de distribuição de probabilidade é segmentada de hora em hora. Além disso, existe uma contribuição direta da situação corrente para previsões de curto prazo, o que garante a contribuição nos cálculos de eventos que não respeitam as probabilidades históricas (como um eventual acidente provocando maior tempo de deslocamento em uma via em que não há históricos representativos deste tipo de evento).

Esta composição, de dados atuais e dados históricos, pode ser observada na Figura 5. De acordo com a condição corrente do trânsito, o tempo previsto de viagem é de sete unidades de tempo, e a linha em azul apresenta uma função de distribuição de probabilidade indicando que o tempo histórico não ultrapassa seis horas. Através de cálculos de interpolação linear, os autores chegam a um intervalo entre quatro e seis horas de viagem.

Figura 5 – Interpolação de dados históricos e atuais

Fonte: Asghari et al. (2015)

Asghari et al. (2015) são os que melhor se aproximam da definição de tratamento temporal proposto por Maniadakis, Trahanias e Tani (2009). Em seu estudo, aspectos como duração, simultaneidade, ordenação, momento (passado, presente e futuro) e fluxo de tempo são discutidos. Cabe ressaltar, no entanto, que como toda rede bayesiana, existe uma margem de possível melhora nos resultados (como concluído pelos próprios autores). Esta margem se dá pela limitada massa de dados usada e como apontado por outros estudos, pela complexidade de montar um modelo adequado que represente todos os cenários possíveis.

IV. Lógica Nebulosa

Zadeh (1965, 1973) definiu os conjuntos nebulosos como classes de objetos com graus de pertinência no intervalo $[0, 1]$, em que quanto maior o grau de pertinência, mais aderente será o objeto à característica determinante da classe. As classes podem representar objetos com quaisquer características, como classe de alturas e classe de temperaturas. Essas classes podem ser divididas em subclasses, também chamadas de variáveis linguísticas. Na classe de alturas, exemplos de variáveis linguísticas válidas seriam *Alta*, *Média* e *Baixa*. Uma pessoa pode ser classificada com grau de pertinência 0,6 para a variável *Alta*, e 0,4 para a variável *Média*, ou seja, um membro pode estar em mais de uma subclasse ao mesmo tempo.

A lógica nebulosa combina os conjuntos nebulosos, variáveis linguísticas e estruturas condicionais (SE – ENTÃO), para definir uma solução aproximada a um

problema através do uso de graus de pertinência. Os graus de pertinência são comumente representados por funções triangulares ou trapezoidais como demonstrados nas Figuras 6 e 7.

Figura 6 – Função de Pertinência Triangular
Grau de Pertinência

Fonte: Próprio Autor

Figura 7 – Função de Pertinência Trapezoidal
Grau de Pertinência

Fonte: Próprio Autor

A lógica nebulosa é aplicada em diferentes contextos. Bose e Chen (2011) apresentam o uso da lógica nebulosa para tratar a segmentação de clientes em diferentes categorias em função de sua propensão de se manter ou terminar o contrato com seus prestadores de serviços telefônicos. O estudo indica que existe

um padrão de comportamento que pode ser observado ao longo do tempo e que permite identificar usuários mais dispostos a fazer uma troca de prestador com base no uso de serviços contratados. Os autores mapearam aproximadamente dez mil clientes e monitoraram o uso dos serviços ao longo de doze meses. Usando lógica nebulosa, os clientes foram agrupados em duas categorias: Uso e Receita. Ao final do estudo, os autores concluem que as empresas poderiam aumentar as receitas se trabalhassem nos incentivos a seus clientes de acordo com as categorias mapeadas.

Llorca et al. (2011) sugerem o uso de lógica nebulosa para desenvolver um sistema que auxilia motoristas a evitar acidentes de trânsito. Através de um sensor de presença, posicionado na parte frontal do veículo de teste, a solução procura identificar pedestres que podem gerar uma situação de risco e age de acordo. Os autores tratam as variáveis Velocidade e Distância Lateral com o pedestre como nebulosas. Velocidade é classificada como: baixa, média ou alta. Distância Lateral (DL) indica se o veículo trafega na direção do usuário ($DL = 0$), se está à esquerda ($DL > 0$) ou se está à direita ($DL < 0$).

Com os dados de entrada, a solução determina o tempo de impacto. Esta informação é usada para determinar o ângulo de desvio que o veículo precisa seguir. A lógica nebulosa determina se a mudança será suave (se o tempo de impacto for alto e a velocidade for baixa) ou mais abrupta (se o tempo de impacto for baixo e a velocidade alta).

Hung e Chung (2006) apresentam uma adaptação da lógica nebulosa, em uma solução hierarquizada para o tratamento de deslocamento de um robô. Este robô deve navegar de um ponto 1 para um ponto 2 em um ambiente com obstáculos, e deve ter a capacidade de desviar de todos e chegar ao destino através do menor caminho. O volume de variáveis de entrada e saída (velocidade, direção, distância de obstáculos, distância de destino, apenas para listar alguns), faria com que a tabela de regras de inferência resultasse em uma matriz de difícil manutenção (ou mesmo inviável de acordo com os autores). Dessa forma, para reduzir a complexidade, os autores sugerem o uso de níveis hierárquicos entre as variáveis de entrada.

Em Sabounchi et al. (2011), os autores discutem o uso de lógica nebulosa em sistemas dinâmicos. A motivação do estudo está voltada para a necessidade de tratar adequadamente o impacto do tempo no comportamento dos sistemas. Na avaliação realizada pelos autores, poucos estudos discutem a questão do efeito do tempo em sistemas nebulosos e nenhum deles apresenta uma visão clara de como tratar estes efeitos. Em seu estudo, Sabounchi et al. (2011), usam um cenário de avaliação de vendas e serviços. Um produto é lançado no mercado e através de propaganda 'boca a boca', entrega de produto e avaliação do serviço de vendas, os autores projetam a aceitação do produto ao longo de semanas. Apesar das críticas quanto a outros estudos da área, os autores também não detalham como mapearam o tempo nas variáveis linguísticas selecionadas.

A Figura 8 resume os modelos matemáticos revisados.

Figura 8 – Modelos matemáticos

Fonte: Próprio Autor

6. CONTEXTUALIZAÇÃO

A necessidade de tratar questões temporais de variáveis subjetivas foi observada em pesquisa envolvendo a determinação de melhor rota em cidades inteligentes.

Caragliu, Bo e Nijkamp (2011), Chourabi et al. (2012) e Schaffers et al. (2011) discorrem sobre o conceito de cidade inteligente e de projetos em andamento. Baseados no conceito de internet das coisas e das tecnologias de informação e comunicação, os autores sugerem que é possível tratar diferentes questões (como gestão de trânsito e qualidade de transporte) de forma inteligente.

Piro et al. (2014) discutem a necessidade de uma infraestrutura adequada para suportar o nível de comunicação necessário para garantir que os serviços que definem a cidade como inteligente, estejam disponíveis. Em seu artigo, os autores apresentam uma ilustração de como uma cidade poderia ser conectada (Figura 9).

Figura 9 – Infraestrutura de Cidade Inteligente

Fonte: Piro et al. (2014)

Os estudos de cidades inteligentes apontam que a partir das informações de sensores espalhados na cidade, veículos e mesmo de aparelhos telefônicos, habitantes teriam condições de tomar melhores decisões quanto à suas atividades de dia a dia. Um fator que aparece recorrentemente trata a questão do transporte inteligente, sugerindo que passageiros de transporte público teriam condições de saber se veículos estariam cheios, o tempo de deslocamento preciso e outros

fatores que poderiam determinar o nível de conforto dos usuários (ou qualidade de vida) (BATTY et al., 2012; PIRO et al., 2014; SCHAFFER et al., 2011; SEIBERT, 2011).

Pesquisas envolvendo conforto em transporte público não estão associadas necessariamente a cidades inteligentes. Diferentes definições sobre o assunto são encontradas na literatura (CANTWELL; CAULFIELD; O'MAHONY, 2009; EBOLI; MAZZULLA, 2012; KOSTAKIS; PANDELIS, 2009; LIN et al., 2010).

Cantwell, Caulfield e O'Mahony (2009) apontam que fatores como a confiabilidade de horários de saída e chegada dos meios de transporte e falta de assentos afetam diretamente a avaliação dos passageiros quanto à qualidade do transporte. Mais do que isso, o estudo aponta que a percepção de tempo pode contribuir diretamente para elevar os níveis de estresse dos envolvidos.

Eboli e Mazzulla (2009) sugerem um conjunto diferente de fatores que podem determinar o nível de satisfação / conforto dos passageiros, como segurança, grau de limpeza e cobertura de serviço. Em outro estudo, Eboli e Mazzulla (2012) reforçam o impacto que o tempo pode causar à percepção de conforto dos usuários. Diferentes definições de satisfação / conforto aparecem na literatura e confirmam que o tema tem propriedades subjetivas e está relacionada a perfis de usuários e locais onde os estudos são feitos (KOSTAKIS; PANDELIS, 2009; LIN et al., 2010).

Baseado nas diferentes definições, o conforto pode ser descrito genericamente como a soma de elementos qualitativos, cada qual suportado por duas variáveis, a percepção do usuário e o grau de importância do elemento (MACHADO; HIRAKAWA; MARTINI, 2015). Uma representação gráfica pode ser observada na Figura 10. A percepção do usuário e o grau de importância de cada elemento qualitativo estão sujeitos a mudanças ao longo do tempo. Assim, a equação (5) apresenta uma definição genérica de conforto considerando o tempo.

Figura 10 – Arquiteturas de redes neurais

Fonte: Próprio Autor

$$C(t) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(t) * w_i(t)}{\sum_{i=1}^n w_i(t)} \quad (5)$$

A variável x_i representa a percepção do usuário para o elemento qualitativo i no tempo t em um range $[0,1]$. Por sua vez, w_i representa o peso ou grau de importância do elemento qualitativo i . Assim o conforto em determinado momento $C(t)$ seria dado pela média ponderada (ou centro de massa) de todos os elementos qualitativos identificados, de tal forma que $C(t) = 1$ representa conforto absoluto e $C(t) = 0$ representa a ausência total de conforto. Como cada percepção de usuário e cada grau de importância são variáveis subjetivas, elas poderiam ser tratadas como números nebulosos.

Karlsson e Larsson (2010) apresentaram uma tese na Suécia que fazia uma análise de dados coletados em campo sobre o comportamento do grau de conforto de passageiros de duas linhas de ônibus com características bem diferentes. O estudo apresentava dados segmentados por elemento qualitativo (como temperatura, ruído, conforto de assentos e outros) como pode ser observado na Figura 11. Em tentativa de obter os dados levantados em campo, as autoras foram contatadas. Infelizmente os dados originais de campo não existem mais.

Figura 11 – Rota 58 – Elementos Qualitativos

Fonte: Karlsson e Larsson (2010)

Como as tentativas de estabelecer um conjunto de elementos qualitativos para definir o conforto para um perfil não tiveram sucesso, a pesquisa foi redirecionada para focar em uma forma matemática de tratar uma variável ϕ genérica com comportamento dinâmico. Assumindo que, como indicado por Mazur (2006), há uma tendência de pesquisadores mapearem comportamentos psicológicos em equações matemáticas.

7. PROPOSTA

A lógica nebulosa é baseada no princípio de determinar graus de pertinência para variáveis de acordo com uma categorização. Como apontado anteriormente, esses graus de pertinência normalmente são representados por equações triangulares ou trapezoidais de acordo com as equações (6) e (7). Em sistemas nos quais o valor das variáveis categorizadas depende do tempo, as mesmas equações podem ser reescritas de acordo com as equações (8) e (9). Nas equações v representa o valor da variável, a, b, c representam os limites dos triângulos nas equações (6) e (8) e a, b, c, d representam os limites dos trapézios nas equações (7) e (9).

$$\mu(v) = \begin{cases} 0, v < a \\ \frac{v-a}{b-a}, a < v \leq b \\ \frac{b-v}{c-b}, b \leq v < c \\ 0, v > c \end{cases} \quad (6)$$

$$\mu(v) = \begin{cases} 0, v < a \\ \frac{v-a}{b-a}, a < v \leq b \\ 1, b < v < c \\ \frac{d-v}{d-c}, c \leq v < d \\ 0, v > d \end{cases} \quad (7)$$

$$\mu(v(t)) = \begin{cases} 0, v(t) < a \\ \frac{v(t)-a}{b-a}, a < v(t) \leq b \\ \frac{b-v(t)}{c-b}, b \leq v(t) < c \\ 0, v(t) > c \end{cases} \quad (8)$$

$$\mu(v(t)) = \begin{cases} 0, v(t) < a \\ \frac{v(t)-a}{b-a}, a < v(t) \leq b \\ 1, b < v(t) < c \\ \frac{d-v(t)}{d-c}, c \leq v(t) < d \\ 0, v(t) > d \end{cases} \quad (9)$$

A proposta consiste em uma adaptação da lógica nebulosa que permita considerar uma taxa de contribuição de eventos passados na avaliação do grau de pertinência

das variáveis linguísticas no presente e futuro, ou seja, trabalhar com graus de pertinência similares às equações (8) e (9) considerando o histórico de seus valores anteriores. A adaptação é baseada na equação (10) em que o grau de pertinência de um momento t_f é calculado a partir de um tempo inicial t_i e uma função $F(t)$ que representa o comportamento padrão da variável em questão.

$$\mu(F(t), t_i, t_f)_{\text{variável linguística}} = \frac{\int_{t=t_i}^{t_f} \mu(F(t))_{\text{variável linguística}} * t \, dt}{\int_{t=t_i}^{t_f} t \, dt} \quad (10)$$

O numerador da equação (10) representa o grau de pertinência do instante, enquanto o denominador determina o período em que este grau de pertinência terá influência. Intervalos menores entre t_i e t_f implicam em uma contribuição limitada de eventos passados, tal qual o limite de $t_i \equiv t_f$ representa o mesmo resultado que o grau de pertinência da lógica nebulosa original, ao passo que intervalos maiores significam uma contribuição mais duradoura dos eventos.

A representação gráfica do grau de pertinência proposto pode ser observada na Figura 12. Comparativamente, a Figura 13 representa a mesma condição usando a lógica nebulosa original. Nos dois casos uma função $F(\text{Variável}, \text{Tempo})$ foi adotada para fins de demonstração apenas.

Figura 12 – Grau de pertinência adaptado

Figura 13 – Grau de pertinência de Zadeh

Fonte: Próprio Autor

O processo de defuzzificação do modelo proposto não sofre alterações. Como apresentado por Sandri e Correa (1999), várias técnicas de defuzzificação podem ser usadas em um sistema nebuloso. E as mesmas técnicas (Mamdani, Takagi-Sugeno e Larsen apenas para citar algumas) podem ser usadas em sistemas nebulosos com a adaptação proposta, ou mesmo em condições híbridas (em que variáveis são tratadas com a adaptação dinâmica e variáveis são tratadas de forma estática).

O sistema nebuloso com a adaptação proposta pode ser resumido pela Figura 14. Variáveis estáticas e dinâmicas passam pelo processo de fuzzificação de acordo com sua característica. Em seguida, as regras de inferência são aplicadas e o processo de defuzzificação é realizado. Cabe ressaltar que, a adaptação proposta poderia ser usada para fuzzificação das variáveis estáticas.

Figura 14 – Sistema nebuloso adaptado

Fonte: Próprio Autor

A proposta procura contemplar os pontos básicos do tratamento do tempo apontados por Maniadakis, Trahanias e Tani (2009).

Duração

Através das variáveis t_i e t_f , é possível determinar o período de influência de cada variável. Assim a duração dos eventos pode ser ajustada de acordo com o sistema.

Simultaneidade e Ordenação

A solução proposta permite o uso de variáveis estáticas e dinâmicas combinadas no processo de fuzzificação. Eventos concorrentes e dependentes podem ser tratados em conjunto calculando os impactos nos resultados finais.

Momento (passado, presente e futuro) e fluxo do tempo

A representação do fluxo do tempo e a projeção da situação futura podem ser obtidas a partir da função $F(t)$ na equação (10).

8. CENÁRIOS DE TESTE

Cenários de teste foram criados para validar a solução proposta e comparar a forma de cálculo de grau de pertinência definida por Zadeh (1965) e a adaptação proposta neste estudo. Os testes foram agrupados em quatro partes: Equações de Primeiro e Segundo Graus, Distúrbios, Problemas de Melhor Rota e Avaliação de Risco em Mercado de Ações. As duas primeiras partes têm por objetivo validar que a solução proposta é consistente e que as curvas apresentadas são aderentes com o modelo tradicional. Ou seja, além de comparar os resultados, ao reduzir os tempos de análise, demonstram que as curvas são compatíveis. A parte de Problemas de Melhor Rota tratam casos de uso em um contexto voltado para transportes. Finalmente, o último estudo demonstra como uma avaliação do comportamento ao longo do tempo pode suportar a avaliação de riscos de papéis na bolsa de valores. Para fins de simplificação, a lógica nebulosa clássica será referenciada como *Tradicional*, e a versão apresentada será referenciada por *Proposta*.

I. Equações de Primeiro e Segundo Graus

Uma função de primeiro grau F_1 definida pela equação (11), as variáveis linguísticas triangulares L_1 , L_2 e L_3 definidas pelos vértices $\{a_n, 0\}$, $\{b_n, 1\}$, $\{c_n, 0\}$ e os valores dos limites de L_1 , L_2 e L_3 apresentados na Tabela I foram usados como base para os primeiros cenários de teste.

$$F_1(t) = K + 2 * t \quad (11)$$

Tabela I – Valores Limites de Variáveis Linguísticas

Variável L_n	Vértice $\{a_n, 0\}$	Vértice $\{b_n, 1\}$	Vértice $\{c_n, 0\}$
L_1	$\{0, 0\}$	$\{75, 1\}$	$\{150, 0\}$
L_2	$\{100, 0\}$	$\{175, 1\}$	$\{250, 0\}$
L_3	$\{200, 0\}$	$\{275, 1\}$	$\{350, 0\}$

Na equação (11), K é uma constante de valor 40,0 e t representa o tempo. Esta equação é comparável ao comportamento observado pelo elemento qualitativo ‘lotação’ na Figura 11, em que a importância aumenta linearmente com o passar do

tempo. As três variáveis linguísticas foram usadas para avaliar o grau de pertinência da função F_1 em um período de tempo compreendido pelo intervalo $[0, 200]$. As Figuras 15, 17 e 18 demonstram como os graus de pertinência de cada variável linguística se comportam para os modelos *Tradicional* e *Proposto*.

Figura 15 – Variável L_1

Fonte: Próprio Autor

Ao comparar as duas curvas é possível perceber que o modelo *Proposto* não atinge o limite superior observado pelo modelo *Tradicional*. Mais do que isso, o momento em que ambas as soluções atingem seus respectivos ápices não são coincidentes.

Atribuindo os valores do teste na equação (11) e realizando o cálculo do grau de pertinência definido pela equação (6) temos os seguintes resultados:

$$F_1(17,5) = 40 + 2 * 17,5 = 75$$

$$\mu(75) = \begin{cases} 0, & 75 < 0 \\ \frac{75 - 0}{75 - 0}, & 0 < 75 \leq 75 \\ \frac{150 - 75}{150 - 75}, & 75 \leq 75 < 150 \\ 0, & 75 > 150 \end{cases} = 1$$

Se utilizarmos os mesmos dados de referência para o cálculo no modelo *Proposto*, de acordo com a equação (10), temos o seguinte resultado:

$$\mu(F_1(t), 0, 17.5) = \frac{\int_{t=0}^{17.5} \mu(40 + 2 * t) * t \, dt}{\int_{t=0}^{17.5} t \, dt} = 0,844$$

O ápice do modelo *Proposto* é atingido por volta de 22 segundos, quando o grau de pertinência atinge o valor de 0,878. Este ‘atraso’ se dá pela propriedade cumulativa dos resultados anteriores para a formação do grau de pertinência no dado instante. Entre os instantes $[0, 17.5[$, o resultado da função F_1 é inferior ao valor de 75 que define a condição em que a variável linguística L_1 atinge seu valor máximo; assim todos os graus de pertinência de $[0, 17.5[$ diminuem o valor de $\mu(F(t), 0, 17.5)$.

Outro comportamento a ser observado é a duração do grau de pertinência da função F_1 para L_1 . Este efeito pode ser administrado pelas variáveis t_i , t_f da equação (10). Dessa forma, eventos que exigem uma maior influência, são avaliados com um intervalo de tempo mais abrangente, ao passo que eventos de memória mais recente, são limitados a faixas limitadas de tempo como pode ser observado na Figura 16.

Figura 16 – Variável L_1 com limite de tempo

Fonte: Próprio Autor

Ao analisar o mesmo comportamento do primeiro teste com as variáveis linguísticas L_2 e L_3 nas Figuras 17 e 18, observa-se que os valores máximos dos graus de pertinência são ainda menores.

Figura 17 – Variável L_2

Fonte: Próprio Autor

Figura 18 – Variável L_3

Fonte: Próprio Autor

Os mesmos testes foram repetidos com uma função de segundo grau F_2 definida pela equação (12) e o resultado pode ser observado na Figura 19. Note que o comportamento da equação pode ser comparado ao elemento qualitativo 'temperatura' na Figura 11.

$$F_2(t) = K + \frac{t^2}{5} \quad (12)$$

O modelo pode ser aplicado também para variáveis linguísticas com comportamento trapezoidal. Assumindo a mesma função de primeiro grau apresentado na equação

(11) e a variável linguística T_1 definida pelos vértices $\{0,0\}$, $\{75,1\}$, $\{120,1\}$, $\{200,0\}$, os mesmos testes foram realizados e o resultado pode ser observado na Figura 20.

Figura 19 – Resultado para Equações de Segundo Grau

Fonte: Próprio Autor

Figura 20 – Resultado para Equações de Segundo Grau

Fonte: Próprio Autor

Os resultados desta primeira fase de testes indicam que o grau de pertinência calculado pelo modelo *Proposto* é coerente com as curvas do modelo *Tradicional*, para variáveis linguísticas triangulares e trapezoidais. Ao diminuir o range das variáveis t_i , t_f da equação (10) ao limite de $t_f - t_i = 0$, o resultado do modelo *Proposto* e do modelo *Tradicional* são coincidentes.

II. Distúrbios

Uma das características do modelo *Proposto* é o tratamento de distúrbios dentro do comportamento padrão. Para demonstrar como esta característica se manifesta, foram definidas duas funções F_p e F_s de teste. Na primeira (13), o comportamento sofre uma perturbação por um pequeno espaço de tempo. A perturbação pode ser comparada com uma frenada brusca em um trânsito contínuo.

$$F_p(t) = \begin{cases} K, & t < \gamma \\ K + t/3, & t \geq \gamma \end{cases} \quad (13)$$

Para os testes, K é uma constante de valor 165 e a γ foi dado o valor de 90. Novamente t é usado para representar o tempo. A variável linguística L_2 da Tabela I foi usada para verificar os diferentes resultados do processo de fuzzificação.

Na Figura 21 é possível observar como o grau de pertinência calculado pelo modelo *Proposto* minimiza os picos e vales que são observados na função $F_p(t)$.

Figura 21 – Resultado para perturbação em $F_p(t)$

Fonte: Próprio Autor

Seguindo a mesma lógica observada no primeiro cenário, ao diminuir a diferença entre os valores das variáveis t_i , t_f da equação (10) a característica observada de minimizar as mudanças bruscas de valores é reduzida, como pode ser observado

nas Figuras 22 e 23 em que o tempo de análise se resume a um intervalo $t_f - t_i = 50$ e $t_f - t_i = 5$ respectivamente.

Figura 22 – Resultado para perturbação em $F_p(t)$ para $t_f - t_i = 50$

Fonte: Próprio Autor

Figura 23 – Resultado para Distúrbios em $F_p(t)$ para $t_f - t_i = 5$

Fonte: Próprio Autor

Dando sequência aos testes de distúrbios, uma segunda função foi proposta para comparar os resultados dos modelos *Traducional* e *Proposto*. Nesta segunda função, definida pela equação (14), foi definida uma curva senoidal. Este efeito é comparável

ao movimento de acelerar e frear de um veículo em um caminho com múltiplos semáforos.

$$F_s(t) = K + 30 * \sin(t) \quad (14)$$

O resultado observado na Figura 24 demonstra que a variação senoidal tende a ser tratada com uma curva com baixa variação no tempo. A fase em que o ciclo senoidal é iniciado, não afeta o resultado final.

Figura 24 – Resultado para Distúrbios em $F_s(t)$

Fonte: Próprio Autor

Quando o argumento de seno é modificado na função $F_s(t)$ de t para $t + 5$, o resultado depois de um ciclo é aproximadamente o mesmo como pode ser observado na Figura 25. Este resultado reforça a proposta de que os distúrbios são diluídos e o comportamento padrão é representado. Como o grau de pertinência em $t = 0$ tem a mesma contribuição que todos os graus de pertinência do intervalo $[0, n]$, é esperado que depois de estabilizado, o modelo atinja o mesmo resultado final.

Também é esperado ver o comportamento da curva do modelo *Proposto* ficar próximo do resultado do modelo *Tradicional* quando reduzimos os intervalos de tempo envolvidos. Mas como o valor da função $F_s(t)$ varia continuamente, os resultados não atingem os mesmos picos e vales observados do modelo *Tradicional* como se vê na Figura 26.

Figura 25 – Resultado para Distúrbios em $F_s(t)$ com argumento de seno modificado

Fonte: Próprio Autor

Figura 26 – Resultado para Distúrbios em $F_s(t)$ com intervalo de tempo reduzido

Fonte: Próprio Autor

Os resultados do teste de distúrbios indicam que o modelo *Proposto* consegue minimizar ruídos presentes no comportamento padrão de uma variável e a sensibilidade que permite essa supressão pode ser calibrada pelo intervalo de tempo analisado. Testes usando equações sinodais demonstram que não há uma frequência natural no qual o modelo entre em ressonância.

III. Problema de determinação de melhor rota

Foram definidos três cenários envolvendo problemas de determinação de melhor rota para avaliar os modelos *Tradicional* e *Proposto*. Os primeiros dois cenários foram baseados no estudo realizado por Huang e Ding (2012) em que a lógica nebulosa tradicional é usada para definir o melhor meio de transporte a partir de um conjunto de restrições de tempo. O último teste é baseado em um trabalho realizado por Karlsson e Larsson (2010) em que a avaliação de meios de transporte é associada à percepção de conforto de seus usuários.

O teste inicial é baseado na Figura 27. Os autores propõem um cenário em que o tempo de deslocamento de 1 para 2 através de A é de 65 minutos. O tempo de 1 para 2 por B pode ser de 50 minutos com um grau de certeza de 40% e de 100 minutos com um grau de certeza de 60%. A passagem de 2 para 3 por C tem um tempo de 20 minutos se a saída de 2 ocorrer em até 20 minutos, ou 120 minutos se a partida de 2 ocorrer depois de 20 minutos.

Figura 27 – Melhor Rota 01

Fonte: Huang e Ding (2012)

A solução dada no estudo original trata as incertezas do trecho B de acordo com a teoria de incertezas de Liu (2014). Caso o destino final fosse o nó 2, as credibilidades de 40% e 60% para atingir 2 em 50 e 100 minutos respectivamente, sugeririam que a opção A é a mais conveniente, uma vez que o tempo de viagem de B pode ser convertido em um valor único de 80 minutos de chance de atingir o nó 2. Mas visto que o destino final é 3, aplicando o mesmo conceito de Liu (2014), o tempo total de viagem a partir de A seria de 185 minutos, contra 160 minutos de B, visto que há uma chance de B atingir 2 antes de 60 minutos.

No teste original de Huang e Ding (2012), os autores procuram definir a melhor opção de transporte com base no tempo de deslocamento. O cenário foi modificado

e uma nova variável Φ foi definida. A variável Φ representa qualquer fator que possa ser usado como fator de decisão e que tenha variação ao longo do tempo (custo, conforto, lotação ou qualquer outro fator). A Figura 28 demonstra o novo cenário adaptado.

Figura 28 – Melhor Rota 01 - adaptada

Fonte: Próprio Autor

A função que define o comportamento de Φ foi definida de acordo com a equação (15). Nestas condições, o critério de decisão para a escolha da melhor rota não considera apenas o tempo de deslocamento do nó inicial ao final, além do tempo, a variável Φ tem um peso na decisão.

$$F_{\Phi}(w, t) = w + t \quad (15)$$

Nesta equação, a variável w representa o estado inicial de Φ e t representa o tempo de viagem. Assim sendo, quanto maior o tempo de trajeto, maior será o valor da variável Φ . Os valores iniciais de Φ_1 e Φ_2 foram definidos da seguinte maneira:

$$\Phi_1 = 310$$

$$\Phi_2 = \begin{cases} 250, & \text{se credibilidade} = 40\% \\ 300, & \text{se credibilidade} = 60\% \end{cases}$$

O valor de Φ_2 , segue o princípio do teste original dos autores Huang e Ding (2012), está atrelado ao grau de credibilidade, assim como o tempo de deslocamento em B que é de 50 minutos quando a credibilidade é de 40% e de 100 minutos no outro caso.

Foram ainda definidas variáveis linguísticas das variáveis Φ , *tempo* e da variável de saída *Decisão* que podem ser observadas nas Tabelas II, III e IV.

Tabela II – Variáveis Linguísticas de Φ

Variável L_n	Ponto $\{a_n, 0\}$	Ponto $\{b_n, 1\}$
L_{bom}	$\{400, 0\}$	$\{1000, 1\}$
L_{ruim}	$\{600, 0\}$	$\{0, 1\}$

Tabela III – Valores Limites de Variáveis Linguísticas de Tempo

Variável T_n	Vértice $\{a_n, 0\}$	Vértice $\{b_n, 1\}$	Vértice $\{c_n, 0\}$
T_{bom}	$\{0, 0\}$	$\{100, 1\}$	$\{200, 0\}$
T_{ruim}	$\{100, 0\}$	$\{200, 1\}$	$\{300, 0\}$

Tabela IV – Variáveis Linguísticas de Decisão

Variável D_n	Vértice $\{a_n, 0\}$	Vértice $\{b_n, 1\}$	Vértice $\{c_n, 0\}$
D_{boa}	$\{130, 0\}$	$\{170, 1\}$	$\{200, 0\}$
$D_{média}$	$\{90, 0\}$	$\{120, 1\}$	$\{150, 0\}$
D_{ruim}	$\{0, 0\}$	$\{65, 1\}$	$\{110, 0\}$

Com base nas definições das variáveis linguísticas, regras de inferências foram criadas, como observado na Tabela V.

Tabela V – Regras de Inferência

Variável L_n	Variável T_n	Variável D_n
L_{bom}	T_{bom}	D_{boa}
L_{bom}	T_{ruim}	$D_{média}$
L_{ruim}	T_{bom}	$D_{média}$
L_{ruim}	T_{ruim}	D_{ruim}

O tempo previsto de viagem de 1 a 3 através do caminho AC é de 185 minutos. Para determinar o tempo esperado através do caminho BC, é necessário considerar as credibilidades em cada caso. No caso em que o trecho B é executado em 50 minutos, temos que o tempo total de viagem BC seria de $50 + 20$, com um grau de credibilidade de 40%. No caso em que B tem um tempo de viagem de 100, o tempo total de viagem seria de 220, com um grau de credibilidade de 60%. O tempo estimado de viagem neste caso seria de $(50+20)*40\% + (100+120)*60\%$, totalizando uma viagem de 160 minutos. O mesmo princípio se aplica ao valor inicial de Φ_2

$(250 \cdot 40\% + 300 \cdot 60\% = 280)$. Um resumo do cenário pode ser observado na Tabela VI.

Tabela VI – Resumo de cenário de teste

Caminho	Tempo Total	Φ Inicial	Φ Final
AC	185	310	495
BC	160	280	440

No modelo *Tradicional*, o grau de pertinência de cada variável linguística das variáveis envolvidas é calculado para o instante específico (185 minutos para o caminho AC e 160 minutos para o caminho BC). Por outro lado, o modelo *Proposto* faz a avaliação considerando a influência de todos os instantes que antecedem o final da viagem.

Da equação (6), temos o cálculo do grau de pertinência das variáveis linguísticas T_{bom} e T_{ruim} conforme exemplo de T_{ruim} do caminho BC. Analogamente os demais graus de pertinência foram calculados e podem ser observados na Tabela VII.

$$\mu(160) = \begin{cases} 0, & 160 < 100 \\ \frac{160 - 100}{200 - 100}, & 100 < 160 \leq 200 \\ \frac{300 - 160}{300 - 200}, & 200 \leq 160 < 300 \\ 0, & 160 > 300 \end{cases} = \frac{60}{100} = 0,60$$

Tabela VII – Grau de Pertinência de variável Tempo

Caminho	Final da Viagem (minutos)	Variável Linguística	Grau de Pertinência
AC	185	T_{bom}	0,15
		T_{ruim}	0,85
BC	160	T_{bom}	0,40
		T_{ruim}	0,60

Os graus de pertinência das variáveis linguísticas da variável Φ foram calculados para os modelos Tradicional e Proposto. Para o modelo Proposto, a equação Y foi usada conforme exemplo de T_{ruim} do caminho BC. Os demais valores podem ser observados na Tabela VIII.

$$\mu(F_{\Phi}(280, t), 0, 160)_{ruim} = \frac{\int_{t=0}^{160} \mu(F_{\Phi}(280, t))_{ruim} * t dt}{\int_{t=0}^{160} t dt} = 0,36$$

Tabela VIII – Grau de Pertinência de variável Φ

Caminho	Valor Inicial	Variável	μ	μ
		Linguística	<i>Tradicional</i>	<i>Proposto</i>
AC	310	L_{bom}	0,16	0,07
		L_{ruim}	0,18	0,28
BC	280	L_{bom}	0,07	0,02
		L_{ruim}	0,27	0,36

Ao aplicar as regras de inferência apresentadas na Tabela V e defuzzificando o resultado de acordo com a Tabela IV, os valores da variável Decisão, para os caminhos AC e BC no modelo *Tradicional*, são respectivamente 80,30 e 77,37. O resultado indica que a melhor alternativa (de acordo com o modelo *Tradicional*) é a opção AC. Por outro lado, usando as mesmas referências e calculando os valores de acordo com o modelo *Proposto*, o caminho BC apresenta um valor para a variável Decisão de 72,71 e o caminho AC de 65,00. Neste caso, o resultado aponta que a melhor alternativa é a opção BC.

O resultado indica que uma grande exposição à condição ruim da variável Φ tem uma influência na avaliação geral do caminho AC a ponto de comprometer a decisão final, como pode ser observado na Figura 29.

Figura 29 – Decisão de caminho AC X BC

Fonte: Próprio Autor

Ainda no estudo de Huang e Ding (2012), um diferente cenário relacionado à determinação de melhor rota é proposto. Neste caso, o objetivo é navegar do primeiro ao último nó de um grafo de nove nós (Figura 30) respeitando restrições de tempo de chegada e saída, impostos para cada trecho, conforme apresentado na Tabela IX. Este cenário também foi adaptado para que além do tempo, a avaliação de uma variável adicional que depende do tempo também seja usada na avaliação (Tabela X). Para a comparação dos resultados, uma variável de saída (Escolha) foi definida de acordo com variáveis linguísticas e regras de inferência.

Figura 30 – Melhor Rota 02

Fonte: Huang e Ding (2012)

Tabela IX – Tabela de restrições de cenário de teste

Arco	Tempo de viagem	
(2, 4)	$TC_2 + TV_{2,4} \sim$	$\begin{cases} \tau(6, 8, 13) & 0 \leq TC_2 < 5 \\ \tau(16, 18, 23) & 5 \leq TC_2 < 15 \\ \tau(26, 28, 33) & 15 \leq TC_2 \end{cases}$
(3, 6)	$TC_3 + TV_{3,6} \sim$	$\begin{cases} \tau(70, 73, 75) & 0 \leq TC_3 < 8 \\ \tau(80, 83, 85) & 8 \leq TC_3 < 18 \\ \tau(90, 93, 95) & 18 \leq TC_3 \end{cases}$
(3, 7)	$TC_3 + TV_{3,7} \sim$	$\begin{cases} \tau(70, 73, 75) & 0 \leq TC_3 < 8 \\ \tau(80, 83, 85) & 8 \leq TC_3 < 18 \\ \tau(90, 93, 95) & 18 \leq TC_3 \end{cases}$
(4, 6)	$TC_4 + TV_{4,6} \sim$	$\begin{cases} \tau(8, 21, 26) & 0 \leq TC_4 < 8 \\ \tau(18, 20, 36) & 8 \leq TC_4 < 18 \\ \tau(28, 32, 46) & 18 \leq TC_4 \end{cases}$
(4, 8)	$TC_4 + TV_{4,8} \sim$	$\begin{cases} \tau(71, 74, 76) & 0 \leq TC_4 < 30 \\ \tau(81, 84, 86) & 30 \leq TC_4 \end{cases}$
(5, 4)	$TC_5 + TV_{5,4} \sim$	$\begin{cases} \tau(6, 8, 13) & 0 \leq TC_5 < 5 \\ \tau(16, 18, 23) & 5 \leq TC_5 < 15 \\ \tau(26, 28, 33) & 15 \leq TC_5 \end{cases}$
(6, 7)	$TC_6 + TV_{6,7} \sim$	$\begin{cases} \tau(35, 58, 62) & 0 \leq TC_6 < 21 \\ \tau(45, 69, 72) & 21 \leq TC_6 < 31 \\ \tau(55, 57, 82) & 31 \leq TC_6 < 41 \\ \tau(65, 90, 92) & 41 \leq TC_6 \end{cases}$
(6, 8)	$TC_6 + TV_{6,8} \sim$	$\begin{cases} \tau(40, 68, 75) & 0 \leq TC_6 < 35 \\ \tau(50, 79, 85) & 35 \leq TC_6 \end{cases}$
(7, 9)	$TC_7 + TV_{7,9} \sim$	$\begin{cases} \tau(62, 64, 81) & 0 \leq TC_7 < 58 \\ \tau(72, 74, 91) & 58 \leq TC_7 < 68 \\ \tau(82, 84, 101) & 68 \leq TC_7 \end{cases}$
(8, 9)	$TC_8 + TV_{8,9} \sim$	$\begin{cases} \tau(62, 65, 81) & 0 \leq TC_8 < 60 \\ \tau(72, 75, 91) & 60 \leq TC_8 < 70 \\ \tau(82, 85, 101) & 70 \leq TC_8 \end{cases}$

Tabela X – Tempo Inicial e Φ Inicial

Arco	Tempo de Viagem	Φ
(1, 2)	4	182
(1,3)	3	131
(1,4)	19	135
(1,5)	4	160

A variável TC_i representa o Tempo de Chegada ao nó i e a variável $TV_{i,j}$ é Tempo de Viagem de i até j . A cada arco foram associados tempos de deslocamento

nebulosos (τ) em função do momento de chegada ao nó em questão. Por exemplo, a viagem do nó 7 ao nó 9 pode ser feita em 62 a 81 unidades de tempo, com maior possibilidade de acontecer em 64, se a chegada ao nó 7 ocorrer em até 58 unidades de tempo.

No estudo original, os autores utilizam um algoritmo genético para identificar a melhor rota. O algoritmo original propõe um cromossomo de nove nós em que cada nó representa um trecho do caminho. O primeiro nó assume os valores de 1 a 4 em que 1 representa a alternativa 1>2, 2 representa 1>3, 3 representa 1>4 e finalmente 4 representa o trecho 1>5. Em casos em que o nó não faz parte do caminho, zero é atribuído. Um conjunto de cromossomos é iniciado com dados aleatórios (respeitando os limites de cada nó) e através de avaliações de *fitness* (que indicam quão próximo o cromossomo é do resultado ideal) são feitas combinações entre os melhores para chegar ao melhor conjunto de nós. Como o objetivo deste estudo não é avaliar o algoritmo genético, um algoritmo simplificado é usado para avaliar as diferentes rotas e comparar os modelos *Tradicional* e *Proposto* da lógica nebulosa. As variáveis n_o e n_d tratam o nó de origem e nó de destino respectivamente. D contém o conjunto de nós destino válidos a partir do nó de origem n_o . As variáveis x e t representam respectivamente um nó e um valor de tempo aleatoriamente sorteados do conjunto D e do intervalo (τ) . T é usado para calcular o tempo total de viagem.

Como o intervalo de tempo de viagem (τ) é um número nebuloso, o sorteio do número t utiliza o critério de α -Corte. O α -Corte limita o intervalo de valores válidos àqueles que são mais possíveis de acontecer. Para este cenário, o α -Corte foi definido em 90%.

Algoritmo Simplificado

1. Inicialização
 - a. $n_o \leftarrow 1$
 - b. $T \leftarrow 0$
2. $D \leftarrow \text{Nós destino válidos de } n_o$
3. $n_d \leftarrow x \mid x \in D$
4. $T \leftarrow T + t \mid t \in \alpha(\tau)$

5. $n_o \leftarrow n_d$
6. Repetir passos 2 a 5 até que n_d seja o nó final

Como no teste anterior, uma variável aqui nomeada Φ foi criada e associada aos arcos partindo do nó 1. O valor inicial de Φ pode ser observado na Tabela IX. Esta variável representa uma característica da viagem, que sofre mudanças ao longo do tempo, regida pela equação (16). A definição da função foi feita de forma empírica para demonstrar como a exposição à uma determinada condição ao longo do tempo pode influenciar na decisão final.

$$F_{\Phi}(w, t) = w + 10 * \sqrt{t} \quad (16)$$

As variáveis linguísticas das variáveis de entrada Φ e Tempo, da variável de saída Escolha e as regras de inferência usada para os testes podem ser observadas respectivamente nas Tabelas XI, XII, XIII e XIV.

Tabela XI – Definição de Variáveis Linguísticas de Φ

Variável Linguística	Vértice $\{a_n, 0\}$	Vértice $\{b_n, 1\}$	Vértice $\{c_n, 0\}$
L_{bom}	200,00	275,00	350,00
$L_{médio}$	100,00	175,00	250,00
L_{ruim}	0,00	75,00	150,00

Tabela XII – Definição de Variáveis Linguísticas de Tempo

Variável Linguística	Vértice $\{a_n, 0\}$	Vértice $\{b_n, 1\}$	Vértice $\{c_n, 0\}$
T_{bom}	62,00	65,00	81,00
$T_{médio}$	72,00	75,00	91,00
T_{ruim}	82,00	85,00	101,00

Tabela XIII – Definição de Variáveis Linguísticas de Escolha

Variável Linguística	Vértice $\{a_n, 0\}$	Vértice $\{b_n, 1\}$	Vértice $\{c_n, 0\}$
E_{melhor}	450,00	600,00	700,00
E_{boa}	300,00	400,00	550,00
$E_{regular}$	150,00	250,00	350,00
E_{ruim}	0,00	100,00	200,00

Tabela XIV– Regras de Inferência de Cenário de teste

Variável L_n	Variável T_n	Variável D_n
L_{bom}	T_{bom}	E_{melhor}
L_{bom}	$T_{médio}$	E_{boa}
L_{bom}	T_{ruim}	$E_{regular}$
$L_{médio}$	T_{bom}	E_{boa}
$L_{médio}$	$T_{médio}$	E_{boa}
$L_{médio}$	T_{ruim}	$E_{regular}$
L_{ruim}	T_{bom}	$E_{regular}$
L_{ruim}	$T_{médio}$	E_{ruim}
L_{ruim}	T_{ruim}	E_{ruim}

Existem 12 possíveis caminhos no grafo da Figura 31. A partir do Algoritmo Simplificado apresentado anteriormente, o tempo médio estimado para cada alternativa foi calculado. Um resumo do resultado das iterações pode ser observado na Tabela XV.

Tabela XV – Tempo de Viagem de caminhos de grafo

Caminho	Tempo de Viagem			Grau de Pertinência		
	Mínimo	Médio	Máximo	Mínimo	Médio	Máximo
1>2>4>6>7>9	63,80011	70,62550	85,69699	0,90001	0,95043	0,99995
1>2>4>6>8>9	74,70033	75,63075	76,59929	0,90004	0,95117	0,99996
1>2>4>8>9	84,70013	85,63462	86,59997	0,90000	0,95026	0,99999
1>3>6>7>9	83,80036	84,73415	85,69899	0,90006	0,94989	0,99996
1>3>6>8>9	84,70019	85,64246	86,59934	0,90004	0,94947	0,99996
1>3>7>9	83,80010	84,74598	85,69996	0,90000	0,95052	1,00000
1>4>6>7>9	63,80010	70,57921	75,69746	0,90004	0,94979	0,99999
1>4>6>8>9	74,70008	75,66126	76,59936	0,90003	0,95035	0,99995
1>4>8>9	84,70010	85,65892	86,59993	0,90000	0,94981	0,99998
1>5>4>6>7>9	63,80019	69,72600	85,69996	0,90000	0,95073	0,99994
1>5>4>6>8>9	74,70017	75,65224	76,59966	0,90002	0,94951	0,99995
1>5>4>8>9	84,70044	85,65470	86,60000	0,90000	0,94947	0,99999

Os testes foram baseados nos tempos médios calculados para cada caminho. Ou seja, o valor da variável Φ foi o resultado de seu valor inicial, apresentado na Tabela X e o tempo médio associado à viagem, da Tabela XV, de acordo com a equação

(8). A Tabela XVI apresenta a visão final dos cenários, considerando os tempos de viagem, variável Φ e caminhos possíveis.

Tabela XVI – Resumo de cenário de teste

Caminho	Φ Inicial	Tempo	Φ Final
1>2>4>6>7>9	182	70,63	266,04
1>2>4>6>8>9	182	75,63	268,97
1>2>4>8>9	182	85,63	274,54
1>3>6>7>9	131	84,73	223,05
1>3>6>8>9	131	85,64	223,54
1>3>7>9	131	84,75	223,06
1>4>6>7>9	135	70,58	219,01
1>4>6>8>9	135	75,66	221,98
1>4>8>9	135	85,66	227,55
1>5>4>6>7>9	160	69,73	243,50
1>5>4>6>8>9	160	75,65	246,98
1>5>4>8>9	160	85,65	252,55

Com base nos valores calculados de tempo de viagem e de Φ , pode-se determinar os valores da variável de Escolha para cada caminho possível. Como a variável Φ tem seu comportamento influenciado pelo tempo, o grau de pertinência de suas variáveis linguísticas deve ser calculado com base no modelo *Proposto* e modelo *Tradicional*. Como exemplo, o a variável linguística L_{bom} de Φ para o caminho 1>2>4>6>7>9 foi verificada e o resultado pode ser observado na Figura 31.

Figura 31 – L_{bom} de Φ para caminho 1>2>4>6>7>9

Repetiu-se o mesmo procedimento para todas as variáveis linguísticas e todos os caminhos possíveis e os resultados podem ser observados na Tabela XVII.

Tabela XVII – Graus de pertinência de variáveis linguísticas de Φ

Caminho	Modelo <i>Tradicional</i>			Modelo <i>Proposto</i>		
	L_{ruim}	$L_{médio}$	L_{bom}	L_{ruim}	$L_{médio}$	L_{bom}
1>2>4>6>7>9	0,000000	0,000000	0,880555	0,000000	0,077720	0,656545
1>2>4>6>8>9	0,000000	0,000000	0,919540	0,000000	0,067784	0,687720
1>2>4>8>9	0,000000	0,000000	0,993820	0,000000	0,052876	0,747125
1>3>6>7>9	0,000000	0,359348	0,307319	0,000092	0,592560	0,119950
1>3>6>8>9	0,000000	0,352775	0,313892	0,000090	0,587561	0,123981
1>3>7>9	0,000000	0,359203	0,307464	0,000092	0,592450	0,120039
1>4>6>7>9	0,000000	0,413175	0,253492	0,000041	0,626243	0,091572
1>4>6>8>9	0,000000	0,373563	0,293103	0,000035	0,595977	0,115200
1>4>8>9	0,000000	0,299297	0,367369	0,000028	0,538662	0,162730
1>5>4>6>7>9	0,000000	0,086607	0,580060	0,000000	0,309202	0,362997
1>5>4>6>8>9	0,000000	0,040307	0,626360	0,000000	0,272175	0,399193
1>5>4>8>9	0,000000	0,000000	0,700630	0,000000	0,214593	0,457560

Finalmente, ao determinar os graus de pertinência da variável Tempo, é possível aplicar as regras de inferência para determinar o valor da variável Escolha e assim suportar o processo de decisão. A variável Tempo pode ser vista na Tabela XVIII e o resultado da aplicação das regras de inferência na Tabela XIX.

Tabela XVIII – Graus de pertinência de variáveis linguísticas de Tempo

Caminho	Tempo Médio	Tempo		
		T_{ruim}	$T_{médio}$	T_{bom}
1>2>4>6>7>9	70,63	0,000000	0,000000	0,648406
1>2>4>6>8>9	75,63	0,000000	0,960578	0,335578
1>2>4>8>9	85,63	0,960336	0,335336	0,000000
1>3>6>7>9	84,73	0,911384	0,391616	0,000000
1>3>6>8>9	85,64	0,959846	0,334846	0,000000
1>3>7>9	84,75	0,915326	0,390876	0,000000
1>4>6>7>9	70,58	0,000000	0,000000	0,651300
1>4>6>8>9	75,66	0,000000	0,958671	0,333671
1>4>8>9	85,66	0,958818	0,333818	0,000000
1>5>4>6>7>9	69,73	0,000000	0,000000	0,704625

Continua

Tabela XVIII – Graus de pertinência de variáveis linguísticas de Tempo

Caminho	Tempo Médio	Tempo		
		T_{ruim}	$T_{médio}$	T_{bom}
1>5>4>6>8>9	75,65	0,000000	0,959235	0,334235
1>5>4>8>9	85,65	0,959081	0,334081	0,000000

Tabela XIX – Resultado das regras de Inferência aplicadas

Caminho	Tempo Médio	Φ Final	Modelo <i>Tradicional</i>		Modelo <i>Proposto</i>	
			Escolha	Ordem	Escolha	Ordem
1>2>4>6>7>9	70,63	266,04	581,19	1	563,02	1
1>2>4>6>8>9	75,63	268,97	470,23	4	465,27	3
1>2>4>8>9	85,63	274,54	320,02	10	313,87	10
1>3>6>7>9	84,73	223,05	320,20	7	321,57	7
1>3>6>8>9	85,64	223,54	312,32	11	314,40	9
1>3>7>9	84,75	223,06	319,96	8	321,37	8
1>4>6>7>9	70,58	219,01	480,44	3	440,45	5
1>4>6>8>9	75,66	221,98	454,24	5	429,77	6
1>4>8>9	85,66	227,55	312,27	12	313,66	11
1>5>4>6>7>9	69,73	243,50	559,16	2	506,53	2
1>5>4>6>8>9	75,65	246,98	464,20	6	461,57	4
1>5>4>8>9	85,65	252,55	312,60	9	311,15	12

Apesar dos resultados dos dois modelos apontarem que o melhor caminho é o 1>2>4>6>7>9, é possível observar diferenças nas demais escolhas, como apresentado na Figura 32. As diferenças superiores a 5% foram destacadas na Tabela XIX.

Figura 32 – Comparação entre modelos

Fonte: Próprio Autor

Karlsson e Larsson (2010) apresentaram uma tese em que avaliam duas rotas de ônibus na cidade de Gotemburgo na Suécia. Neste estudo, as autoras comparam um conjunto de fatores como temperatura, disponibilidade de assentos, conforto de assentos, iluminação e outros, demonstrando como a percepção dos usuários sofre mudanças ao longo do tempo. O último cenário de teste é baseado neste estudo. Para determinar a melhor opção, além do tempo de deslocamento, outras duas variáveis devem ser consideradas como indicado na Figura 33. As rotas podem ser observadas na Figura 34 e as condições dos testes podem ser verificadas na Tabela XX.

Cada variável é composta de duas visões, a situação atual e a percepção geral. A percepção geral tem um comportamento dinâmico e reflete a percepção do usuário do início da viagem até o fim. Dessa forma, a situação atual (modelo *Tradicional*) e a percepção geral (modelo *Proposto*), definem a qualidade da viagem. Variáveis linguísticas foram definidas para avaliar a situação atual e a percepção geral. Essas variáveis linguísticas podem ser observadas na Tabela XXI.

Figura 33 – Comparação entre modelos

Fonte: Próprio Autor

Figura 34 – Cenário de Teste

Fonte: Próprio Autor

Tabela XX – Condições de cenário de teste

Trecho	Situação durante trecho para $S_1(t)$	Situação durante trecho para $S_2(t)$	Tempo
1 – 2	8	25	5
2 – 3	25	27	7
3 – 4	35	30	8
4 – 5	12	25	7
1 – 5	22	26	4
5 – 6	27	27	8
6 – 7	25	27	7
7 – 8	20	23	12

Tabela XXI – Variáveis linguísticas de Situação Atual e Percepção Geral

Variável Linguística	Vértice $\{a_n, 0\}$	Vértice $\{b_n, 1\}$	Vértice $\{c_n, 0\}$
$A1SA_{bom}$	-	0	15
$A1SA_{médio}$	12	20	25
$A1SA_{ruim}$	23	40	-
$A1PG_{boa}$	70	100	-
$A1PG_{média}$	40	60	80
$A1PG_{ruim}$	-	0	50
$A2SA_{baixa}$	0	18	23
$A2SA_{adequada}$	20	23	27
$A2SA_{alta}$	26	29	35
$A2PG_{boa}$	70	100	-
$A2PG_{média}$	40	60	80
$A2PG_{ruim}$	-	0	50

A percepção geral do usuário (P_1 e P_2) é regida através das equações (17) e (18) para as Variáveis 1 e 2 respectivamente. A situação está sujeita a mudanças ao longo do trecho de acordo com as variáveis $S_1(t)$ e $S_2(t)$ (Tabela XX). A variável t representa o tempo da viagem. Pode-se observar que quanto menor o tempo de deslocamento geral, menor a influência da situação à percepção geral da viagem.

$$P_1(t) = \begin{cases} 80 + 20 * \frac{40 - S_1(t)}{40}, & \text{se } t \leq 5 \\ 50 + 50 * \frac{40 - S_1(t)}{40}, & \text{se } t \leq 25 \\ 30 + 50 * \frac{40 - S_1(t)}{40}, & \text{se } t > 25 \end{cases} \quad (17)$$

$$P_2(t) = \begin{cases} 80 + 20 * \frac{35 - S_2(t)}{35 - 18}, & \text{se } t \leq 12 \\ 40 + 60 * \frac{35 - S_2(t)}{35 - 18}, & \text{se } t \leq 20 \\ 10 + 60 * \frac{35 - S_2(t)}{35 - 18}, & \text{se } t > 20 \end{cases} \quad (18)$$

Cada cenário é avaliado respeitando os tempos dos trechos e as regras de inferência da Tabela XXII. De acordo com a hierarquia da Figura 33, as regras de inferência para determinar o fator de melhor escolha também foram definidas e se encontram na Tabela XXIII. Finalmente, os limites das variáveis linguísticas de Tempo e Escolha estão nas tabelas XXIV e XXV.

Tabela XXII – Regras de Inferência de Variáveis 1 e 2

Variável $V\#_n$	Situação Atual	Percepção Geral
$V1_{bom}$	$A1SA_{bom}$	$A1PG_{boa}$
$V1_{regular}$	$A1SA_{bom}$	$A1PG_{média}$
$V1_{regular}$	$A1SA_{bom}$	$A1PG_{ruim}$
$V1_{regular}$	$A1SA_{médio}$	$A1PG_{boa}$
$V1_{regular}$	$A1SA_{médio}$	$A1PG_{média}$
$V1_{ruim}$	$A1SA_{médio}$	$A1PG_{ruim}$
$V1_{regular}$	$A1SA_{ruim}$	$A1PG_{boa}$
$V1_{ruim}$	$A1SA_{ruim}$	$A1PG_{média}$
$V1_{ruim}$	$A1SA_{ruim}$	$A1PG_{ruim}$
$V2_{regular}$	$A2SA_{baixa}$	$A2PG_{boa}$
$V2_{regular}$	$A2SA_{baixa}$	$A2PG_{média}$
$V2_{ruim}$	$A2SA_{baixa}$	$A2PG_{ruim}$
$V2_{bom}$	$A2SA_{adequada}$	$A2PG_{boa}$
$V2_{regular}$	$A2SA_{adequada}$	$A2PG_{média}$
$V2_{regular}$	$A2SA_{adequada}$	$A2PG_{ruim}$
$V2_{regular}$	$A2SA_{alta}$	$A2PG_{boa}$
$V2_{regular}$	$A2SA_{alta}$	$A2PG_{média}$
$V2_{ruim}$	$A2SA_{alta}$	$A2PG_{ruim}$

Tabela XXIII – Regras de Inferência de Escolha

Variável $V1_n$	Variável $V2_n$	Tempo T_n	Escolha E_n
$V1_{bom}$	$V2_{bom}$	T_{cedo}	E_{boa}
$V1_{regular}$	$V2_{bom}$	T_{cedo}	E_{boa}
$V1_{ruim}$	$V2_{bom}$	T_{cedo}	$E_{média}$
$V1_{bom}$	$V2_{regular}$	T_{cedo}	E_{boa}
$V1_{regular}$	$V2_{regular}$	T_{cedo}	$E_{média}$
$V1_{ruim}$	$V2_{regular}$	T_{cedo}	E_{ruim}
$V1_{bom}$	$V2_{ruim}$	T_{cedo}	$E_{média}$
$V1_{regular}$	$V2_{ruim}$	T_{cedo}	E_{ruim}
$V1_{ruim}$	$V2_{ruim}$	T_{cedo}	E_{ruim}
$V1_{bom}$	$V2_{bom}$	T_{tarde}	$E_{média}$

Continua

Continuação

Variável $V1_n$	Variável $V2_n$	Tempo T_n	Escolha E_n
$V1_{regular}$	$V2_{bom}$	T_{tarde}	$E_{média}$
$V1_{ruim}$	$V2_{bom}$	T_{tarde}	E_{ruim}
$V1_{bom}$	$V2_{regular}$	T_{tarde}	$E_{média}$
$V1_{regular}$	$V2_{regular}$	T_{tarde}	E_{ruim}
$V1_{ruim}$	$V2_{regular}$	T_{tarde}	E_{ruim}
$V1_{bom}$	$V2_{ruim}$	T_{tarde}	$E_{média}$
$V1_{regular}$	$V2_{ruim}$	T_{tarde}	E_{ruim}
$V1_{ruim}$	$V2_{ruim}$	T_{tarde}	E_{ruim}

Tabela XXIV – Variáveis linguísticas de Tempo

Variável Linguística	Vértice $\{a_n, 0\}$	Vértice $\{b_n, 1\}$	Vértice $\{c_n, 0\}$
T_{cedo}	-	0	35
T_{tarde}	50	30	-

Tabela XXV – Variáveis linguísticas de Escolha

Variável Linguística	Vértice $\{a_n, 0\}$	Vértice $\{b_n, 1\}$	Vértice $\{c_n, 0\}$
E_{boa}	150	200	250
$E_{média}$	75	125	175
E_{ruim}	0	50	100

Ao aplicar as regras de inferência e defuzzificação, chega-se à conclusão que caso a solução fosse validada pelo modelo *Tradicional* (ou seja, ignorando a dinâmica da variável Percepção Geral), o resultado final apontaria o trecho 1-2-3-4-8 como a melhor alternativa. A Tabela XXVI apresenta o resumo com os resultados.

Tabela XXVI – Resumo de cenário de teste

Trecho	Tempo Total	Modelo <i>Tradicional</i>	Modelo <i>Proposto</i>
1-2-3-4-8	27	66,05	78,10
1-5-6-7-8	31	137,44	120,91

Para fins de comparação, as Figuras 35, 36, 37 e 38 apresentam o grau de pertinência da variável Percepção Geral da Variável 2 do momento inicial da viagem até o destino alcançado.

Figura 35 – Percepção Geral Variável 2 (Modelo *Tradicional*) trecho 1-2-3-4-5

Fonte: Próprio Autor

Figura 36 – Percepção Geral Variável 2 (Modelo *Proposto*) – trecho 1-2-3-4-5

Fonte: Próprio Autor

Figura 37 – Percepção Geral Variável 2 (Modelo *Tradicional*) – trecho 1-5-6-7-8

Fonte: Próprio Autor

Figura 38 – Percepção Geral Variável 2 (Modelo *Proposto*)

Fonte: Próprio Autor

IV. Risco de ações na bolsa de valores

O valor de ações na bolsa de valores é alvo de estudo de diferentes autores, muitas vezes associando a volatilidade à fatores de risco (ARTZNER et al., 1999; BAKER; WURGLER, 2007; CAMPBELL et al., 2001; LI, 1998). A análise superficial de resultados pode levar a tomadas de decisões com resultados indesejados. Foram coletados dados entre 01 de janeiro de 2016 e 01 de junho de 2016 de onze empresas no ramo de construção civil da Bolsa de Valores de São Paulo. A Tabela

XXVII apresenta o valor em 04 de janeiro (primeiro dia útil com operação) e o resultado em 01 de junho com os percentuais de variação.

Tabela XXVII – Valores de referência para teste de ações

Ação	Valor Inicial	Valor Final	Variação
Ação 1	R\$ 7,28	R\$ 9,84	35,16%
Ação 2	R\$ 3,42	R\$ 5,28	54,39%
Ação 3	R\$ 4,03	R\$ 4,17	3,47%
Ação 4	R\$ 12,04	R\$ 15,61	29,65%
Ação 5	R\$ 2,36	R\$ 1,87	-20,76%
Ação 6	R\$ 1,20	R\$ 1,13	-5,83%
Ação 7	R\$ 8,33	R\$ 10,09	21,13%
Ação 8	R\$ 1,65	R\$ 2,90	75,76%
Ação 9	R\$ 0,64	R\$ 4,16	550,00%
Ação 10	R\$ 2,59	R\$ 2,39	-7,72%
Ação 11	R\$ 0,03	R\$ 1,68	5500,00%

Com base na análise atemporal dos dados, considerando apenas o resultado final da valorização das ações após cinco meses, um investidor interessado em ingressar no mercado priorizaria as opções 11, 9, 8 e 2 nessa ordem. Os valores foram submetidos às lógicas nebulosas *Tradicional* e *Proposta* para confirmar se a sugestão de investimento é mantida.

Para a avaliação, foram definidas variáveis linguísticas como apresentado na Tabela XXVIII.

Tabela XXVIII – Variável linguística de variação de valor em % para 5 meses

Variável Linguística	Vértice $\{a_n, 0\}$	Vértice $\{b_n, 1\}$	Vértice $\{c_n, 0\}$
$V_{muito\ positiva}$	10,00%	700,00%	
$V_{positiva}$	0,10%	30,00%	100,00%
$V_{negativa}$	-0,10%	-30,00%	-100,00%
$V_{muito\ negativa}$	-10,00%	-700,00%	

O resultado do modelo *Tradicional* pode ser observado na Tabela XXX e o da lógica *Proposta* na Tabela XXXI. A definição de preferência foi dada pela defuzzificação dos resultados (para facilitar a análise das classificações das variáveis linguísticas) assumindo que as variações muito positivas no processo de defuzzificação assumem os valores {50, 100}, as positivas {5, 40, 70}, as negativas {2, 4, 5} e finalmente as muito negativas {0, 0, 3}.

Tabela XXX – Modelo *Tradicional*

Variável Linguística	$V_{muito\ positiva}$	$V_{positiva}$	$V_{negativa}$	$V_{muito\ negativa}$	Preferência
Ação 1	0,036	0,926	0,000	0,000	39,91
Ação 2	0,064	0,652	0,000	0,000	41,27
Ação 3	0,000	0,116	0,000	0,000	37,63
Ação 4	0,028	0,988	0,000	0,000	39,57
Ação 5	0,000	0,000	0,692	0,016	3,58
Ação 6	0,000	0,000	0,194	0,000	3,50
Ação 7	0,016	0,704	0,000	0,000	39,00
Ação 8	0,095	0,346	0,000	0,000	44,46
Ação 9	0,783	0,000	0,000	0,000	82,97
Ação 10	0,000	0,000	0,257	0,000	3,50
Ação 11	1,000	0,000	0,000	0,000	83,67

Tabela XXXI – Modelo *Proposto*

Variável Linguística	$V_{muito\ positiva}$	$V_{positiva}$	$V_{negativa}$	$V_{muito\ negativa}$	Preferência
Ação 1	0,170	0,153	0,219	0,112	53,83
Ação 2	0,225	0,123	0,179	0,136	59,52
Ação 3	0,111	0,168	0,192	0,100	48,74
Ação 4	0,171	0,177	0,157	0,125	52,97
Ação 5	0,140	0,140	0,217	0,152	52,32
Ação 6	0,203	0,110	0,173	0,197	59,41
Ação 7	0,097	0,232	0,166	0,083	45,74
Ação 8	0,303	0,085	0,112	0,323	66,58
Ação 9	0,280	0,100	0,092	0,314	64,59
Ação 10	0,195	0,126	0,165	0,175	57,71
Ação 11	0,189	0,013	0,041	0,245	73,79

Para a análise dos resultados no modelo Proposto, como a variação é avaliada dia a dia, os valores de variáveis linguísticas da Tabela XXVIII são convertidos de uma taxa equivalente a 5 meses para uma visão diária.

9. ANÁLISE DE RESULTADOS

Os testes foram separados em quatro partes distintas para confirmar que a adaptação proposta apresentaria resultados coerentes com o modelo original e para comparar a forma como cada lógica trataria diferentes cenários.

Os testes de funções de primeiro e segundo grau demonstraram não haver restrições do grau da equação para o uso do modelo *Proposto* e as curvas resultantes são coerentes com as curvas do modelo *Tradicional*. A conclusão é mais evidente quando o tempo de análise dado por $t_f - t_i$ é reduzido ao limite de $t_f = t_i$, resultando em gráficos e valores idênticos.

O objetivo dos testes de distúrbios era confirmar que o modelo conseguiria administrar ruídos e eventos fora do comportamento padrão. Os testes demonstraram que a reação é mais acentuada quanto menor o tempo de análise ($t_f - t_i$) e em casos extremos ($t_f = t_i$) a reação é a mesma do modelo *Tradicional* (como esperado). Por outro lado, episódios fora do padrão em uma sequência longa de análise (ao limite de $t_f - t_i \rightarrow \infty$) os eventos são menos considerados ou descartados. Um cenário envolvendo uma curva senoidal também foi usado para demonstrar que o modelo *Proposto* converge para uma posição que representa de forma mais equilibrada as mudanças uniformes do sistema.

As duas partes reforçam que a solução é válida e apresenta resultados coerentes para diferentes tipos de equação. A última parte dos testes foi focada em um estudo de caso conhecido por determinação de menor rota. No cenário de teste tradicional, dado um grafo cíclico, procura-se identificar a melhor forma de se deslocar de um nó origem a um nó destino envolvendo o menor número de nós. Na literatura, encontram-se várias adaptações do cenário, tratando diferentes formas de determinar o que é a menor rota, e envolvendo múltiplos critérios para determinar a melhor opção.

No teste inicial da bateria de testes envolvendo a questão de melhor rota, um cenário de testes proposto por Huang e Ding (2012) foi modificado com a inclusão de uma variável Φ que representa a satisfação do usuário. A partir da premissa que a satisfação do usuário é crescente e linear (equação 15), adotou-se um valor inicial

para cada caminho (os valores são diferentes visto que são veículos diferentes em cada opção). Neste cenário, os objetivos para identificar a rota seriam o menor tempo de deslocamento e maior satisfação do usuário. Os objetivos são conflitantes, uma vez que a satisfação do usuário nas viagens possíveis é crescente em função do tempo, mas o tempo de deslocamento é um critério para determinar a melhor rota.

As duas opções de viagem começam com um nível de satisfação baixo, mas com o passar do tempo, ambas começam a apresentar avaliações positivas. Na avaliação do cenário com o modelo *Tradicional*, o caminho de maior satisfação do usuário é o selecionado, mas no modelo *Proposto*, o caminho de menor tempo de deslocamento é o preterido. Como o período em que a satisfação do usuário é ruim por um longo período de tempo, a contribuição do histórico da satisfação negativa pesa contra o resultado final positivo, justificando assim a diferença de respostas.

No segundo cenário na categoria de determinação de melhor rota, outro teste de Huang e Ding (2012) foi escolhido. Dessa vez um usuário precisa se deslocar de um nó a outro em uma malha com algumas restrições de tempo. Os autores determinam janelas de tempo (refletidas na Tabela IX) para estimar o tempo de deslocamento (número nebuloso) até o próximo nó. Como no caso anterior, foi adotada uma variável que representa a satisfação do usuário para contrastar com o tempo de deslocamento. A equação (16) foi usada neste cenário e partiu-se do princípio que o nível de satisfação estaria atrelado diretamente ao primeiro deslocamento da viagem. Como no outro cenário, foram observadas diferenças nos resultados finais, em alguns casos as diferenças ultrapassam 5% como apresentado na Tabela XIX.

Para o terceiro cenário foi criado um teste baseado na tese de Karlsson e Larlsson (2010). O material original não entra no mérito de número de paradas, mas sugere que as viagens acontecem em intervalos entre 20 e 40 minutos e que os passageiros estão sujeitos a diferentes condições que afetam a forma como avaliam a qualidade do transporte público. Desta forma, no cenário criado, estabeleceu-se um grafo com dois caminhos possíveis (Figura 34).

Neste teste, ao invés de uma variável, foram adotadas duas variáveis que representam respectivamente a lotação e a temperatura interna do ônibus, além do tempo de deslocamento. As duas variáveis são usadas para compor a variável

Qualidade de Viagem e baseados no estudo de Asghari et al. (2015), duas visões foram adotadas: Presente (representado pela variável de Situação Atual) e Histórico (representado pela variável de Percepção Geral). Cada percepção foi associada com um padrão de comportamento que mudava em função do tempo, de tal forma que quanto maior o tempo de deslocamento, pior a percepção do usuário.

Apesar do trecho final da viagem ser confortável para o caminho 1-2-3-4-8, até atingir o nó 4, a viagem opera com uma lotação alta e em altas temperaturas, o que tem um grande impacto na percepção geral do usuário. Por outro lado, a viagem pelo caminho 1-5-6-7-8 é mais longa, mas apresenta características mais estáveis ao longo da viagem. Além de apresentar mais uma aplicação do modelo *Proposto*, este teste final também demonstrou o uso da lógica nebulosa tradicional operada em conjunto com a adaptação proposta.

Por fim baseado em dados reais da Bolsa de Valores de São Paulo de onze ações no ramo de construção civil, foi realizada uma comparação entre os modelos. As diferenças mais significativas foram destacadas nas Tabelas XXX e XXXI. No caso da ação 8, o modelo *Proposto* apresentou um resultado próximo de 50% maior do que o previsto pelo modelo *Tradicional*. A grande diferença se dá pela consistência do papel ao longo do período. Entre as onze ações analisadas, a ação 8 é que tem menor intervalo de variação e apresenta menor volatilidade. Por outro lado, a ação 9 foi a que apresentou a maior variação de valores ao longo do período, com crescimentos e quedas significativas (15 dos 102 dados coletados para a ação apontam para um pico ou um vale superior à [10%] no dia).

10. CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho era apresentar um modelo matemático que poderia ser usado para tratar variáveis subjetivas com dependência no tempo. Ao identificar uma lacuna no tratamento de variáveis dinâmicas, foi proposta uma nova forma de calcular o grau de pertinência de variáveis subjetivas de tal forma a refletir a contribuição de eventos passados na definição do estado atual. O novo modelo computacional foi validado e além de assimilar variáveis com dependência no tempo, também pode ser usado para tratar variáveis estáticas, como a lógica nebulosa clássica. A adaptação promove mudanças no processo de fuzzificação, sem que mudanças sejam aplicadas nos processos de inferência e defuzzificação.

Inicialmente acreditava-se que adotar o processo de centro de massa para determinar um grau de pertinência representativo do período seria adequado. A ideia era adotar um mecanismo similar ao processo de defuzzificação de Sugeno, no qual o grau de pertinência de cada momento é usado como peso na definição do valor determinístico de saída. A defuzzificação de Sugeno apresenta bons resultados porque o grau de pertinência entre todas as variáveis envolvidas é limitado ao mesmo intervalo de $[0, 1]$. No entanto, ficou comprovado em seguida que o centro de massa apresenta algumas restrições no modelo proposto em casos comuns como:

- Variáveis linguísticas com valores negativos e positivos: o centro de massa fica inconsistente com massas negativas.
- Variáveis que atingem o valor ZERO: o grau de pertinência fica inconsistente, sem considerar o período em que o valor da variável é zero.
- Variáveis que possuem grandes variações de valores entre as variáveis linguísticas. As variáveis linguísticas com maiores valores desviam os resultados como se tivessem pesos maiores na classificação.

Assim sendo, a variável que representa tempo foi usada como peso. Além de evitar problemas como os pontos listados acima, os pesos de eventos passados diminuem gradativamente, dando maior importância aos eventos presentes.

O caso de uso de determinação de melhor rota apresentou resultados que apontam que o uso da lógica nebulosa clássica pode implicar na escolha de caminhos menos

adequados. A lógica nebulosa clássica normalmente avalia a situação de cada trecho no instante de chegada e em caso de variações ao longo do caminho, o contexto é descartado e ignorado. O modelo computacional proposto permite a consideração de eventos intermediários de refletir nas decisões finais.

Trabalhos futuros devem seguir na identificação de aplicações de uso para o modelo proposto considerando cenários em que o contexto de variáveis com variação no tempo é relevante na tomada de decisão.

Estes cenários não se limitam a verificação de conforto em transporte público (tratando as variações de temperatura, lotação, níveis de ruído e outros) ou a avaliação de risco de ações.

Outros exemplos de possíveis usos envolvem a determinação do tempo de sinais em semáforos (baseado no fluxo de carros, tempo de espera de pedestres e estados de semáforos vizinhos) ou ainda avaliar desempenho de funcionários (com base em presença, constância de entregas, desvios de resultados, apenas para citar algumas variáveis).

Trabalhos futuros nesta linha devem cobrir o levantamento de equações que representam o comportamento padrão de variáveis dinâmicas, ou o levantamento de dados históricos que permitam observar tais variações, assim como a adequada determinação de variáveis linguísticas que definam o sistema em estudo.

11.REFERÊNCIAS

- AHN, Chang Wook; RAMAKRISHNA, Rudrapatna S. A genetic algorithm for shortest path routing problem and the sizing of populations. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, New York, v. 6, n. 6, p. 566-579, 2002.
- ALI, Mustafa K. Mehmet; KAMOUN, Faouzi. Neural networks for shortest path computation and routing in computer networks. **IEEE Transactions on Neural Networks**, New York, v. 4, n. 6, p. 941-954, 1993.
- ASGHARI, Mohammad et al. Probabilistic estimation of link travel times in dynamic road networks. In: ACM SIGSPATIAL, 23., 2015, Washington, DC. **Proceedings**. New York: ACM, s.d. 10 p.
- ARTZNER, Philippe et al. Coherent Measures of Risk. **Mathematical Finance**. Oxford, v. 9, n. 3, p. 203-228, 1999.
- BAKER, Malcolm; WURGLER, Jeffrey. Investor Sentiment in the Stock Market. **National Bureau of Economic Research**, Cambridge, v. 21, n. 2, p. 129-152, 2007.
- BATTY, Michael et al. Smart cities of the future. **European Physical Journal Special Topics**, Les Ulis, v. 214, n. 1, p. 481-518, 2012.
- BEN-GAL, I. Bayesian Networks. In: Ruggeri F., Faltin F. (eds) **Encyclopedia of Statistics in Quality & Reliability**, New York: Wiley, 2007.
- BOSE, Indranil; CHEN, Xi. A Fuzzy Clustering Based Analysis of Migratory Customer Behavior. In: Computational and Information Sciences (ICCIS), 4., 2012, **Proceedings**. Chengdu: IEEE, 2011. p. 480-483.
- BRANKE, Jürgen. Memory enhanced evolutionary algorithms for changing optimization problems. In: Congress on Evolutionary Computation, 3., 1999, Washington, DC. **Proceedings**. New York: IEEE, 1999. 8 p.
- CAMPBELL, John Y. et al. Have Individual Stocks Become More Volatile? An Empirical Exploration of Idiosyncratic Risk. **Journal of Finance**, New York, v. 56, n. 1, p. 1-43, 2001.
- CANTWELL, Mairead; CAULFIELD, Brian; O'MAHONY, Margaret. Examining the factors that impact public transport commuting satisfaction. **Journal of Public Transportation**, Tampa, v. 12, n. 2, p. 1, 2009.
- CARAGLIU, Andrea; DEL BO, Chiara; NIJKAMP, Peter. Smart cities in Europe. **Journal of Urban Technology**, Brooklyn, v. 18, n. 2, p. 65-82, 2011.
- CHEN, X. et al. Recurrent neural network language model training with noise contrastive estimation for speech recognition. In: International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 40., 2015, Brisbane. **Proceedings**. New York: IEEE, 2015. p. 5411-5415.

CHOUDHARY, Amit; RISHI, Rahul. Improving the character recognition efficiency of feed forward BP neural network. **International Journal of Computer Science & Information Technology**, Chennai, v. 3, n. 1, p. 85-96, 2011.

CHOURABI, Hafedh et al. Understanding smart cities: An integrative framework. In: International Conference on System Sciences, 45., 2012, Maui. **Proceedings**. New York: IEEE, 2012. p. 2289-2297.

CLARK, David E.; WESTHEAD, David R. Evolutionary algorithms in computer-aided molecular design. **Journal of Computer-Aided Molecular Design**, Leiden, v. 10, n. 4, p. 337-358, 1996.

EBOLI, Laura; MAZZULLA, Gabriella. A new customer satisfaction index for evaluating transit service quality. **Journal of Public Transportation**, Tampa, v. 12, n. 3, p. 2, 2009.

EBOLI, Laura; MAZZULLA, Gabriella. Performance indicators for an objective measure of public transport service quality. **European Transport**, Trieste, v. 51, p. 1-21, 2012.

FLEMING, Peter J.; PURSHOUSE, Robin C. Evolutionary algorithms in control systems engineering: a survey. **Control engineering practice**, Stuttgart, v. 10, n. 11, p. 1223-1241, 2002.

GEN, Mitsuo; LIN, Lin. Multiobjective evolutionary algorithm for manufacturing scheduling problems: state-of-the-art survey. **Journal of Intelligent Manufacturing**, London, v. 25, n. 5, p. 849-866, 2014.

HOFLEITNER, Aude et al. Learning the dynamics of arterial traffic from probe data using a dynamic Bayesian network. **IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems**, New York, v. 13, n. 4, p. 1679-1693, 2012.

HOPFIELD, John J. et al. Computing with neural circuits- A model. **Science**, Washington, v. 233, n. 4764, p. 625-633, 1986.

HUANG, Wei; DING, Lixin. The shortest path problem on a fuzzy time-dependent network. **IEEE Transactions on Communications**, New York, v. 60, n. 11, p. 3376-3385, 2012.

HUMPHREYS, Lloyd G. The construct of general intelligence. **Intelligence**, Champaign, v. 3, n. 2, p. 105-120, 1979.

HUNG, Lon-Chen; CHUNG, Hung-Yuan. Design of hierarchical fuzzy logic control for mobile robot system. In: Robotics, Automation and Mechatronics, 2006, Bangkok. **Proceedings**. New York: IEEE, 2006. p. 1-6.

JAIN, Anil K.; MAO, Jianchang; MOHIUDDIN, K. M. Artificial neural networks: A tutorial. **Computer**, New York, n. 3, p. 31-44, 1996.

JIANG, Xiaomo; MAHADEVAN, Sankaran. Bayesian structural equation modeling method for hierarchical model validation. **Reliability Engineering & System Safety**, Barking, v. 94, n. 4, p. 796-809, 2009.

JUNG, Jehan et al. Evolutionary programming based recommendation system for online shopping. In: Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference (APSIPA), 2013, Kaohsiung. **Proceedings**. New York: IEEE, 2013. p. 1-4.

KARLSSON, Jenny; LARSSON, Emelie. **Passengers' Valuation of Quality in Public Transport with Focus on Comfort: A Study of Local and Regional Buses in the City of Gothenburg**. 2010. 103 p. Dissertação (Mestrado) - Department of Civil and Environmental Engineering, Chalmers University of Technology, Gothenburg, 2010.

KOSTAKIS, Arris-Panagiotis; PANDELIS, Ipsilandis. Measuring Customer Satisfaction in Public Transportation An empirical study based in urban buses in the city of Larissa (Greece)-"The MUSA methodology". In: MIBES, 2009, Florina. **Proceedings**. Larissa: MIBES, 2009. p. 260-275.

LI, Ke et al. Adaptive operator selection with bandits for a multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, New York, v. 18, n. 1, p. 114-130, 2014.

LI, Yuming. Expected stock return, risk premium and volatilities of economic factors. **Journal of Empirical Finance**, Fullerton, v. 5, p. 69-97, 1998.

LIN, Cheng-Yu et al. A comfort measuring system for public transportation systems using participatory phone sensing. In: International Workshop on Sensing for App Phones, 1., 2010, Zurich. **Proceedings**. Zurich: ACM, s.d. p. 30-35.

LIPPMANN, Richard P. An introduction to computing with neural nets. **ASSP Magazine, IEEE**, New York, v. 4, n. 2, p. 4-22, 1987.

LIU, Baoding. **Uncertainty theory**. 5^a ed. Beijing: Uncertainty Theory Laboratory, 2014. 498 p.

LLORCA, David Fernández et al. Autonomous pedestrian collision avoidance using a fuzzy steering controller. **IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems**, New York, v. 12, n. 2, p. 390-401, 2011.

LUKOŠEVICIUS, Mantas. **Echo state networks with trained feedbacks**. Bremen: Jacobs University Bremen, 2007. 38 p. (Technical Report, 4)

LUKOŠEVIČIUS, Mantas; JAEGER, Herbert. Reservoir computing approaches to recurrent neural network training. **Computer Science Review**, Amsterdam, v. 3, n. 3, p. 127-149, 2009.

MACHADO, Bruno P.; HIRAKAWA, André R.; MARTINI, José Sidnei C.. Determinação do nível de conforto adaptativo em transporte público baseado em lógica nebulosa dependente no tempo. In: Workshop de Tecnologia Adaptativa – WTA, 9., 2015, São Paulo. **Memórias**. São Paulo: EPUSP, 2015, p. 117-122.

MANIADAKIS, Michail; TRAHANIAS, Panos; TANI, Jun. Explorations on artificial time perception. **Neural Networks**, New York, v. 22, n. 5, p. 509-517, 2009.

- MAZUR, James E. Mathematical models and the experimental analysis of behavior. **Journal of the Experimental Analysis of Behavior**, Bloomington, v. 85, n. 2, p. 275-291, 2006.
- MUCIENTES, M. et al. A fuzzy temporal rule-based velocity controller for mobile robotics. **Fuzzy Sets and Systems**, New York, v. 134, n. 1, p. 83-99, 2003.
- PANNU, Avneet. Artificial Intelligence and its Application in Different Areas. **International Journal of Engineering and Innovative Technology**, Bhopal, v. 4, n. 10, 2015.
- PEDDINTI, Vijayaditya; POVEY, Daniel; KHUDANPUR, Sanjeev. A time delay neural network architecture for efficient modeling of long temporal contexts. In: Interspeech, 16., 2015, Dresden. **Proceedings**. Singapore: ISCA, s.d, p. 2-6.
- PERFORS, Amy et al. A tutorial introduction to Bayesian models of cognitive development. **Cognition**, Amsterdam, v. 120, n. 3, p. 302-321, 2011.
- PIRO, Giuseppe et al. Information centric services in smart cities. **Journal of Systems and Software**, New York, v. 88, p. 169-188, 2014.
- RAJABI-BAHAABADI, Mojtaba et al. Multi-objective path finding in stochastic time-dependent road networks using non-dominated sorting genetic algorithm. **Expert Systems with Applications**, Oxford, v. 42, n. 12, p. 5056-5064, 2015.
- SABOUNCHI, N.S.Z. et al. Fuzzy Modeling of Linguistic Variables in a System Dynamics Context. In: International Conference of the System Dynamics Society, 29., 2011, Washington. **Proceedings**. New York: System Dynamics Society, 2011.
- SAK, Haşim; SENIOR, Andrew; BEAUFAYS, Françoise. Long short-term memory based recurrent neural network architectures for large vocabulary speech recognition. **arXiv:1402.1128**. New York: Cornell University Library, 2014.
- SANDRI, Sandra; CORREA, Cláudio. Lógica Nebulosa. In: Escola de Redes Neurais, 5., 1999, São José dos Campos. **Anais**. São José dos Campos: ITA, p. 73-90, 1999.
- SASTRY, P. S.; SANTHARAM, G.; UNNIKRISHNAN, K. P. Memory neuron networks for identification and control of dynamical systems. **IEEE Transactions on Neural Networks**, New York, v. 5, n. 2, p. 306-319, 1994.
- SCHAFFERS, Hans et al. Smart Cities and the Future Internet: Towards Cooperation Frameworks for Open Innovation. In: DOMINGUE, J. et al. **The Future Internet**. 6656. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2011. p. 431-446.
- SCHMIDHUBER, Jürgen. Deep learning in neural networks: An overview. **Neural Networks**, New York, v. 61, p. 85-117, 2015.
- SEIBERT, Chad. Adaptive GPS Algorithms. In: Midwest Instruction and Computing Symposium, 44., 2011, Duluth. **Proceedings**. Duluth: College of St. Scholastica, p. 1-9, 2011.

SHAO, Hanyong. Delay-dependent stability for recurrent neural networks with time-varying delays. **IEEE Transactions on Neural Networks**, New York, v. 19, n. 9, p. 1647-1651, 2008.

SPEARS, William M. et al. An overview of evolutionary computation. In: European Conference on Machine Learning, 93., 1993, Vienna. **Proceedings**. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 1993. p. 442-459.

SUNDERMEYER, Martin; NEY, Hermann; SCHLUTER, Ralf. From Feedforward to Recurrent LSTM Neural Networks for Language Modeling. **IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing**, Piscataway, v. 23, n. 3, p. 517-529, 2015.

TANG, Kit-Sang et al. Genetic algorithms and their applications. **Signal Processing Magazine, IEEE**, New York, v. 13, n. 6, p. 22-37, 1996.

WHITLEY, Darrell. A genetic algorithm tutorial. **Statistics and computing**, London, v. 4, n. 2, p. 65-85, 1994.

YAO, Xin. Evolving artificial neural networks. **Proceedings of the IEEE**, New York, v. 87, n. 9, p. 1423-1447, 1999.

YUAN, Changhe; MALONE, Brandon. Learning Optimal Bayesian Networks: A Shortest Path Perspective. **Journal Artificial Intelligence Research**, San Francisco, v. 48, p. 23-65, 2013.

ZADEH, Lotfi A. Fuzzy sets. **Information and control**, Edinburgh, v. 8, n. 3, p. 338-353, 1965.

ZADEH, Lotfi A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, New York, n. 1, p. 28-44, 1973.

ZHANG, Ruoxue; MAHADEVAN, Sankaran. Bayesian methodology for reliability model acceptance. **Reliability Engineering & System Safety**, Barking, v. 80, n. 1, p. 95-103, 2003.