UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

MURILO HIROAKI SEKO

Antenas de ressoador dielétrico de banda dupla em frequências de
micro-ondas

São Paulo
2018

MURILO HIROAKI SEKO

Antenas de ressoador dielétrico de banda dupla em frequências de
micro-ondas

Versão Corrigida

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para a
obtenção do título de Doutor em Ciências

São Paulo
2018

MURILO HIROAKI SEKO

Antenas de ressoador dielétrico de banda dupla em frequências de
micro-ondas

Versão Corrigida

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para a
obtenção do título de Doutor em Ciências

Área de concentração: Microeletrônica

Orientadora: Profa. Dra. Fatima Salete
Correra

São Paulo
2018

Autorizo a reprodução e a divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e de pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de sua orientadora.

São Paulo, 25 de maio de 2018.

Assinatura do autor _____

Assinatura da orientadora _____

Catálogo-na-publicação
Divisão de Biblioteca
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Seko, Murilo Hiroaki

Antenas de ressoador dielétrico de banda dupla em frequências de micro-ondas / M. H. Seko – versão corr. – São Paulo, 2018.
237 p.

Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos.

1. Antenas 2. Tecnologia de micro-ondas 3. Telecomunicações I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos II. t.

Aos meus pais, Wagner e Paula, e à minha irmã, Cristiane.

AGRADECIMENTOS

À Profa. Dra. Fatima Salete Correra, minha orientadora, por conduzir todo o processo de orientação desta pesquisa de doutorado sempre com muito empenho, paciência e disposição; pela confiança que me foi depositada durante a realização deste trabalho; por estar presente de forma contínua contribuindo para o meu desenvolvimento profissional, intelectual e pessoal.

To Prof. Stuart A. Long, my supervisor at the University of Houston, for his inestimable assistance during my stay in the United States, where I worked as a visiting researcher; for his interest in my research work; for his attentive guidance; for his promptness in helping me; and for his trust as well.

To Prof. David R. Jackson, for his valuable suggestions and contributions to this research, which were very helpful in solving problems and for the improvement of this work, and for his willingness to help.

Aos especialistas Antonio Sandro Verri e Antonio Dias de Matteo, pelas contribuições dadas durante a realização deste trabalho, e ao técnico Jair Pereira de Souza, pelo auxílio na construção de protótipos de circuitos e de antenas.

To Sohini Sengupta, Krishna Kota, Xinyu Liu, Xiao Ding, Walter Fuscaldo, Henry Council, Ni Wang, and Ran Guo, my colleagues at the University of Houston, for their support and for our discussions, many of which very prolific and enlightening.

Ao Laboratório de Microeletrônica, por disponibilizar as áreas de seus laboratórios, bem como materiais, equipamentos, instrumentos e serviços.

À Universidade de São Paulo, pela oportunidade de realização do curso de doutorado.

To the Applied Electromagnetics Laboratory, for making available the areas of its laboratories, as well as materials, equipment, instruments, and services.

To the University of Houston, for the opportunity to participate in the graduate research exchange program.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela concessão da bolsa de doutorado.

A todas as outras pessoas que também contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento deste trabalho.

“Inspiration is a guest that does not willingly visit the lazy”¹
(“A inspiração é uma convidada que não visita voluntariamente os preguiçosos”)

Piotr Ilitch Tchaikovsky

RESUMO

Este trabalho visou ao desenvolvimento de antenas de ressoador dielétrico de banda dupla em frequências de micro-ondas por meio do estabelecimento de uma metodologia de projeto para as mesmas e da proposição de configurações inéditas de antenas desse tipo. Estudos realizados sobre antenas de ressoador dielétrico e sobre suas técnicas de projeto forneceram a base para a elaboração de um procedimento de projeto para antenas de banda dupla que explora a flexibilidade das antenas de ressoador dielétrico. Empregando-se esse procedimento de projeto, duas antenas com configurações originais foram desenvolvidas para operar em frequências de micro-ondas. Uma delas é uma antena de ressoador dielétrico cilíndrica sobre plano de terra, destinada a operar nas frequências centrais de 3,94 GHz e de 5,42 GHz, com diagrama de radiação direcional e polarização circular na primeira banda de operação e com diagrama de radiação omnidirecional e polarização linear na segunda. A outra antena consiste em uma antena de ressoador dielétrico cilíndrica sobre substrato dielétrico aterrado, cujas frequências centrais de operação são 3,99 GHz e 6,20 GHz, com diagrama de radiação direcional e polarização circular em ambas as bandas de operação. O projeto das duas antenas também levou a contribuições novas adicionais em alguns temas específicos relacionados: estruturas de excitação para antenas de ressoador dielétrico, circuitos acopladores híbridos de 90° de banda dupla, circuitos de alimentação para antenas de banda dupla e modelos matemáticos para o ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre. Os comportamentos previstos teoricamente para as antenas projetadas são confirmados por meio de resultados obtidos por simulação eletromagnética e por medição experimental, o que indica a validade das hipóteses adotadas, das configurações de antena propostas e da metodologia de projeto concebida, demonstrando também a flexibilidade desta para variadas especificações de antena. Os avanços obtidos com este trabalho e as melhorias que podem ser efetuadas sobre o mesmo são identificados examinando-se resultados recentemente publicados na literatura técnica. Este trabalho foi realizado na forma de uma pesquisa de doutorado sanduíche, desenvolvida parcialmente na University of Houston sob a supervisão do Prof. Stuart A. Long.

Palavras-chave: Antenas. Ressonadores dielétricos. Antenas de ressoador dielétrico. Banda dupla. Micro-ondas.

ABSTRACT

This work aimed at the development of microwave dual-band dielectric resonator antennas by means of establishing a design methodology for them and of proposing novel configurations of this antenna type. Studies on dielectric resonator antennas and on their design techniques provided the ground for elaborating a design procedure for dual-band antennas that exploits the flexibility of dielectric resonator antennas. By employing this design procedure, two antennas with original configurations have been developed for operation at microwave frequencies. One of them is a cylindrical dielectric resonator antenna on a ground plane, intended for operation at the center frequencies of 3.94 GHz and 5.42 GHz, with a directional radiation pattern and circular polarization in the first operating band and with an omnidirectional radiation pattern and linear polarization in the second one. The other antenna consists of a cylindrical dielectric resonator antenna on a grounded dielectric substrate, whose operating center frequencies are 3.99 GHz and 6.20 GHz, with a directional radiation pattern and circular polarization in both operating bands. The design of the two antennas also led to additional new contributions in some related specific subjects: excitation structures for dielectric resonator antennas, dual-band 90°-hybrid couplers, feeding circuits for dual-band antennas, and mathematical models for the cylindrical dielectric resonator isolated in free space. The behaviors theoretically expected for the designed antennas are confirmed by means of results obtained from electromagnetic simulation and from experimental measurements, which indicates the validity of the assumed hypotheses, of the proposed antenna configurations and of the conceived design methodology, also demonstrating the flexibility of the latter for various antenna specifications. The advances obtained with this work and the improvements that can be made on it are identified by examining results recently published in the technical literature. This work was carried out as a sandwich doctoral research, developed at the University of Houston under the supervision of Prof. Stuart A. Long.

Keywords: Antennas. Dielectric resonators. Dielectric resonator antennas. Dual band. Microwaves.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 — Antenas de ressoador dielétrico	35
Figura 2 — Ressorador dielétrico montado em um circuito de micro-ondas	42
Figura 3 — Configurações geométricas dos modelos de Cohn: (a) primeira e (b), (c) segunda ordens	46
Figura 4 — Configuração geométrica do modelo de Itoh e Rudokas	46
Figura 5 — Ressorador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre	49
Figura 6 — Distribuições vetoriais de campo eletromagnético no ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre: modos (a) $TE_{01\delta}$, (b) $TM_{01\delta}$, (c) $HEM_{11\delta}$ e (d) $HEM_{12\delta}$	51
Figura 7 — Distribuições vetoriais de campo eletromagnético em cortes transversais do ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre: modos (a) $TE_{01\delta}$, (b) $TM_{01\delta}$, (c) $HEM_{11\delta}$ e (d) $HEM_{12\delta}$	52
Figura 8 — Dipolos radiantes equivalentes para o ressoador dielétrico cilíndrico: modos (a) $TE_{01\delta}$, (b) $TM_{01\delta}$, (c) $HEM_{11\delta}$ e (d) $HEM_{12\delta}$	56
Figura 9 — Antena de ressoador dielétrico cilíndrica: (a) sobre plano de terra e (b) sobre substrato dielétrico aterrado	59
Figura 10 — Antenas de ressoador dielétrico excitadas por sonda coaxial	62
Figura 11 — Antenas de ressoador dielétrico excitadas por linha de transmissão planar	63
Figura 12 — Antena de ressoador dielétrico excitada por abertura	64
Figura 13 — Metodologia de projeto para antenas de ressoador dielétrico de banda dupla	67
Figura 14 — Tipos de diagrama de radiação da antena de ressoador dielétrico cilíndrica sobre plano de terra: modos (a) $TM_{01\delta}$ e (b) $HEM_{11\delta}$	69
Figura 15 — Tipos de diagrama de radiação da antena de ressoador dielétrico cilíndrica sobre substrato dielétrico aterrado: modos (a) $TE_{01\delta}$, (b), $TM_{01\delta}$ (c) $HEM_{11\delta}$ e (d) $HEM_{12\delta}$	70

Figura 16 — Antena de ressoador dielétrico excitada por sonda de campo elétrico: (a) vista em corte lateral e (b) vista frontal	78
Figura 17 — Perda de retorno simulada do ressoador dielétrico excitado por sonda de campo elétrico	80
Figura 18 — Diagrama de radiação de ganho simulado do ressoador dielétrico excitado por sonda de campo elétrico em 3,79 GHz: corte nos planos (a) yz e (b) zx	80
Figura 19 — Antena de ressoador dielétrico excitada por sonda de campo magnético: (a) vista em corte lateral e (b) vista frontal	81
Figura 20 — Protótipo de um ressoador dielétrico excitado por sonda de campo magnético: vistas em perspectiva (a) frontal e (b) traseira	83
Figura 21 — Perdas de retorno simulada e medida do ressoador dielétrico excitado por sonda de campo magnético	83
Figura 22 — Diagramas de radiação de ganho medido e simulado do ressoador dielétrico excitado por sonda de campo magnético em 5,31 GHz: corte nos planos (a) yz e (b) zx	84
Figura 23 — Radiador e estruturas de excitação da antena sobre plano de terra	85
Figura 24 — Circuito de alimentação da antena sobre plano de terra	87
Figura 25 — Filtro tipo A	89
Figura 26 — Filtro tipo B	90
Figura 27 — Acoplador híbrido de 90°	91
Figura 28 — Leiaute do circuito de alimentação da antena sobre plano de terra.....	93
Figura 29 — Módulo simulado dos principais parâmetros de espalhamento do circuito de alimentação da antena sobre plano de terra: (a) S_{11} , (b) S_{21} , (c) S_{31} , (d) S_{41} e (e) S_{32}	94
Figura 30 — Diferença de fase simulada entre S_{31} e S_{21} para o circuito de alimentação da antena sobre plano de terra	94
Figura 31 — Modelo da antena sobre plano de terra: vistas em perspectiva (a) frontal e (b) traseira	96

Figura 32 — Módulo simulado de S_{11} e de S_{21} da antena sobre plano de terra.....	97
Figura 33 — Diagrama de radiação de ganho total simulado da antena sobre plano de terra: (a) 3,79 GHz e (b) 5,23 GHz	98
Figura 34 — Protótipo da antena sobre plano de terra: vistas em perspectiva (a) frontal e (b) traseira	100
Figura 35 — Módulo medido de S_{11} e de S_{21} da antena sobre plano de terra	100
Figura 36 — Módulos medido e simulado de S_{11} e de S_{21} da antena sobre plano de terra: (a) S_{11} e (b) S_{21}	101
Figura 37 — Montagem para a medição em câmara anecoica da antena sobre plano de terra: instalação para a medição nos planos (a) yz e (b) zx	102
Figura 38 — Diagramas de radiação de ganho medido e simulado da antena sobre plano de terra em 3,83 GHz: corte nos planos (a) yz e (b) zx	102
Figura 39 — Diagramas de radiação de ganho medido e simulado da antena sobre plano de terra em 5,28 GHz: corte nos planos (a) yz e (b) zx	103
Figura 40 — Antena de ressoador dielétrico excitada por fita conforme: (a) vista em corte lateral e (b) vista frontal.....	110
Figura 41 — Perda de retorno simulada do ressoador dielétrico excitado por fita conforme	111
Figura 42 — Diagrama de radiação de ganho simulado do ressoador dielétrico excitado por fita conforme em 4,62 GHz: corte nos planos (a) yz e (b) zx	112
Figura 43 — Antena de ressoador dielétrico excitada por plaqueta não ressonante: (a) vista em corte lateral e (b) vista frontal	113
Figura 44 — Antena de ressoador dielétrico excitada por plaqueta não ressonante modificada: (a) vista em corte lateral e (b) vista frontal	114
Figura 45 — Modelo aproximado para a linha de microfita estreita	115
Figura 46 — Protótipo de um ressoador dielétrico excitado por plaqueta não ressonante modificada: vista em perspectiva frontal (a) com e (b) sem o ressoador dielétrico	117

Figura 47 — Perdas de retorno simulada e medida do ressonador dielétrico excitado por plaqueta não ressonante modificada	117
Figura 48 — Diagramas de radiação de ganho medido e simulado do ressonador dielétrico excitado por plaqueta não ressonante modificada em 6,18 GHz: corte nos planos (a) yz e (b) zx	118
Figura 49 — Radiador e estruturas de excitação da antena sobre substrato dielétrico aterrado	119
Figura 50 — Perda de retorno simulada para o ressonador dielétrico da antena sobre substrato dielétrico aterrado: (a) excitação dos modos $HEM_{11\delta}$ e (b) $HEM_{12\delta}$	120
Figura 51 — Circuito de alimentação da antena sobre substrato dielétrico aterrado	122
Figura 52 — Circuitos (a) tipo Π e (b) tipo T	125
Figura 53 — Acopladores (a) tipo Π e (b) tipo T	125
Figura 54 — Opções de realização de Z_{II}' ou de Z_T' por toco: (a) simples em circuito aberto, (b) simples em curto-circuito, (c) duplo em circuito aberto, (d) duplo em curto-circuito	128
Figura 55 — Leiaute do circuito de alimentação da antena sobre substrato dielétrico aterrado	134
Figura 56 — Módulo simulado dos principais parâmetros de espalhamento do circuito de alimentação da antena sobre substrato dielétrico aterrado: (a) S_{11} , (b) S_{21} , (c) S_{31} , (d) S_{41} , (e) S_{51} , (f) S_{32} e (g) S_{54}	135
Figura 57 — Diferenças de fase simuladas para o circuito de alimentação da antena sobre substrato dielétrico aterrado: (a) entre S_{31} e S_{21} e (b) entre S_{51} e S_{41}	136
Figura 58 — Modelo da antena sobre substrato dielétrico aterrado: vistas em perspectiva (a) frontal e (b) traseira	137
Figura 59 — Módulo simulado de S_{11} e de S_{21} da antena sobre substrato dielétrico aterrado	138
Figura 60 — Diagrama de radiação de ganho total simulado da antena sobre substrato dielétrico aterrado: (a) 4,01 GHz e (b) 6,18 GHz	139

Figura 61 — Protótipo da antena sobre substrato dielétrico aterrado: vistas (a) em perspectiva frontal e (b) superior em ângulo	140
Figura 62 — Módulo medido de S_{11} e de S_{21} da antena sobre substrato dielétrico aterrado.....	141
Figura 63 — Módulos medido e simulado de S_{11} e de S_{21} da antena sobre substrato dielétrico aterrado: (a) S_{11} e (b) S_{21}	141
Figura 64 — Montagem para a medição em câmara anecoica da antena sobre substrato dielétrico aterrado: instalação para a medição nos planos (a) yz e (b) zx	142
Figura 65 — Diagramas de radiação de ganho medido e simulado da antena sobre substrato dielétrico aterrado em 3,99 GHz: corte nos planos (a) yz e (b) zx	143
Figura 66 — Diagramas de radiação de ganho medido e simulado da antena sobre substrato dielétrico aterrado em 6,20 GHz: corte nos planos (a) yz e (b) zx	144
Figura 67 — Modelo matemático proposto para o ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre.....	154

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 — Dados de ressoadores dielétricos cilíndricos RESOMICS®, da Murata Manufacturing Company, Ltd.	44
Tabela 2 — Características de radiação possíveis para os modos ressonantes de ordem mais baixa da antena de ressoador dielétrico cilíndrica.....	70
Tabela 3 — Principais parâmetros geométricos das linhas de microfita do circuito de alimentação da antena sobre plano de terra	92
Tabela 4 — Resultados da antena sobre plano de terra	105
Tabela 5 — Equações para o acoplador tipo Π	127
Tabela 6 — Equações para o acoplador tipo T	127
Tabela 7 — Equações para o teco duplo em circuito aberto aplicado ao acoplador tipo Π	129
Tabela 8 — Equações para o teco duplo em curto-circuito aplicado ao acoplador tipo Π	130
Tabela 9 — Equações para o teco duplo em circuito aberto aplicado ao acoplador tipo T	130
Tabela 10 — Equações para o teco duplo em curto-circuito aplicado ao acoplador tipo T	130
Tabela 11 — Principais parâmetros geométricos das linhas de microfita do circuito de alimentação da antena sobre substrato dielétrico aterrado.....	133
Tabela 12 — Resultados da antena sobre substrato dielétrico aterrado.....	145
Tabela 13 — Frequência de ressonância dos modos $TE_{01\delta}$, $TM_{01\delta}$, $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$ do ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre para valores variados de a , de $2h$ e de ϵ_{rd}	199

LISTA DE ABREVIATURAS E DE SIGLAS

FEM	<i>finite element method</i>
GPS	Global Positioning System
HEM	híbrido
IEEE	Institute of Electrical and Electronic Engineers
IRE	Institute of Radio Engineers
ISM	<i>industrial, scientific and medical</i>
MIC	<i>microwave integrated circuit</i>
MoM	<i>method of moments</i>
RF	radiofrequência
RFID	<i>radio-frequency identification</i>
SI	Sistema Internacional de Unidades
SMA	<i>sub-miniature version A</i>
TE	transversal elétrico
TEM	transversal eletromagnético
TM	transversal magnético
WLAN	<i>wireless local area network</i>
WPAN	<i>wireless personal area network</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

ϵ_r	constante dielétrica
τ_f	coeficiente de temperatura da frequência de ressonância
Q	índice de mérito
ω_0	frequência angular de ressonância
f_0	frequência linear de ressonância
W_s	energia eletromagnética total armazenada
P_L	potência total de perda
P_c	perda condutiva
P_d	perda dielétrica
P_r	perda por radiação (potência radiada)
Q_c	índice de mérito devido à perda condutiva
Q_d	índice de mérito devido à perda dielétrica
Q_r	índice de mérito devido à perda por radiação
$\text{tg } \delta$	tangente de perda
f	frequência linear
K	constante característica de material relativa a perda dielétrica
$\mathbf{E}$	vetor campo elétrico complexo
$\mathbf{H}$	vetor campo magnético complexo
μ	permeabilidade magnética
ϵ	permissividade elétrica
ω	frequência angular
k	número de onda
xyz	sistema de coordenadas cartesianas
x	primeira direção do sistema de coordenadas cartesianas
y	segunda direção do sistema de coordenadas cartesianas

z	terceira direção do sistema de coordenadas cartesianas ou direção longitudinal do sistema de coordenadas cilíndricas
$\rho\phi z$	sistema de coordenadas cilíndricas
ρ	direção radial do sistema de coordenadas cilíndricas ou esféricas
ϕ	direção azimutal do sistema de coordenadas cilíndricas ou esféricas
$\rho\theta\phi$	sistema de coordenadas esféricas
θ	direção de elevação do sistema de coordenadas esféricas
E_u	componente do vetor campo elétrico complexo na direção u
H_u	componente do vetor campo magnético complexo na direção u
u	direção de um sistema de coordenadas
$\mathbf{n}$	versor na direção normal à interface entre dois materiais dielétricos genéricos 1 e 2, que aponta do material 1 para o material 2
$\mathbf{E}_1$	vetor campo elétrico complexo no material 1
$\mathbf{H}_1$	vetor campo magnético complexo no material 1
$\mathbf{E}_2$	vetor campo elétrico complexo no material 2
$\mathbf{H}_2$	vetor campo magnético complexo no material 2
ε_1	permissividade elétrica do material 1
μ_1	permeabilidade magnética do material 1
ε_2	permissividade elétrica do material 2
μ_2	permeabilidade magnética do material 2
a	raio do ressoador dielétrico ou do radiador da antena de ressoador dielétrico cilíndrica
h	meia altura do ressoador dielétrico ou altura do radiador da antena de ressoador dielétrico cilíndrica
ε_{rd}	constante dielétrica do ressoador dielétrico
ε_0	permissividade elétrica do vácuo
m	índice angular ou ordem de funções de Bessel ou de Hankel

n	índice radial
l	índice axial
p	parte inteira do índice axial
δ	parte fracionária do índice axial
$f_0^{(TE_{01\delta})}$	frequência de ressonância do modo $TE_{01\delta}$
$f_0^{(TM_{01\delta})}$	frequência de ressonância do modo $TM_{01\delta}$
$f_0^{(HEM_{11\delta})}$	frequência de ressonância do modo $HEM_{11\delta}$
$f_0^{(HEM_{21\delta})}$	frequência de ressonância do modo $HEM_{12\delta}$
V	volume
S	superfície
E_θ	componente do vetor campo elétrico complexo na direção θ
E_ϕ	componente do vetor campo elétrico complexo na direção ϕ
η_0	impedância intrínseca do vácuo
μ_0	permeabilidade magnética do vácuo
ϵ_{rs}	constante dielétrica do substrato dielétrico aterrado
BW	largura de banda fracionária
SWR_{max}	máxima taxa de onda estacionária de tensão
Λ_{max}	máximo módulo do coeficiente de reflexão de tensão
Z_0	impedância característica de referência
RL_{min}	perda de retorno mínima
f_1	frequência central da primeira banda
f_2	frequência central da segunda banda
Δ	distância entre o dipolo equivalente e o plano de terra
h_s	espessura do substrato dielétrico aterrado
d_{ep}	diâmetro da sonda de campo elétrico
l_{ep}	comprimento da sonda de campo elétrico

c_{ep}	diâmetro da área de isolamento da sonda de campo elétrico
y_{ep}	distância entre a sonda de campo elétrico e o centro do radiador
G_{θ}	ganho na direção θ
G_{ϕ}	ganho na direção ϕ
yz	plano do sistema de coordenadas cartesianas definido por y e por z
zx	plano do sistema de coordenadas cartesianas definido por z e por x
d_{mp}	diâmetro da sonda de campo magnético
l_{mp}	primeiro comprimento da sonda de campo magnético
m_{mp}	segundo comprimento da sonda de campo magnético
y_{mp}	distância entre a sonda de campo magnético e o centro do radiador
c_{mp}	diâmetro da área de isolamento da sonda de campo magnético
λ_g	comprimento de onda guiada
N_1	número inteiro não negativo
N_2	número inteiro não negativo
N_3	número inteiro não negativo
N_4	número inteiro não negativo
①	nó inicial de interconexão
f_{sh}	frequência de curto-circuito
f_{op}	frequência de circuito aberto
o	número inteiro não negativo
q	número inteiro não negativo
Z_{Aa}	impedância característica do toco em circuito aberto do filtro tipo A
θ_{Aa}	comprimento elétrico do toco em circuito aberto do filtro tipo A
Z_{Ab}	impedância característica do toco em curto-circuito do filtro tipo A
θ_{Ab}	comprimento elétrico do toco em curto-circuito do filtro tipo A
Z_{Ba}	impedância característica do toco em circuito aberto do filtro tipo B

θ_{Ba}	comprimento elétrico do toco em circuito aberto do filtro tipo B
Z_{Bb}	impedância característica do toco em curto-circuito do filtro tipo B
θ_{Bb}	comprimento elétrico do toco em curto-circuito do filtro tipo B
P_1	porta de número 1
P_2	porta de número 2
P_3	porta de número 3
P_4	porta de número 4
P_5	porta de número 5
S_{11}	parâmetro de espalhamento entre a porta 1 e ela mesma
S_{21}	parâmetro de espalhamento entre a porta 2 e a porta 1
S_{31}	parâmetro de espalhamento entre a porta 3 e a porta 1
S_{41}	parâmetro de espalhamento entre a porta 4 e a porta 1
S_{32}	parâmetro de espalhamento entre a porta 3 e a porta 2
G_{RH}	ganho em polarização circular à direita
G_{LH}	ganho em polarização circular à esquerda
w_{cs}	largura da fita conforme
l_{cs}	comprimento da fita conforme
d_{np}	diâmetro da plaqueta não ressonante
t_{np}	espessura da plaqueta não ressonante
w_{np}	largura da linha de microfita estreita
l_{np}	comprimento da linha de microfita estreita
②	nó inicial de interconexão
Z_{Π}	impedância característica dos trechos de linha de transmissão que formam o anel do acoplador tipo Π
Z_T	impedância característica dos trechos de linha de transmissão que formam o anel do acoplador tipo T

θ_{Π}	comprimento elétrico dos trechos de linha de transmissão que formam o anel do acoplador tipo Π
θ_T	comprimento elétrico dos trechos de linha de transmissão que formam o anel do acoplador tipo T
Z_{Π}'	impedância em paralelo inserida ao longo do anel do acoplador tipo Π
Z_T'	impedância em paralelo inserida ao longo do anel do acoplador tipo T
$\Delta\phi_1$	diferença de fase entre os sinais de P_3 e P_2 em f_1
$\Delta\phi_2$	diferença de fase entre os sinais de P_3 e P_2 em f_2
f_M	frequência média
Z_{op}	impedância característica do toco simples em circuito aberto
Z_{sh}	impedância característica do toco simples em curto-circuito
θ_{op}	comprimento elétrico do toco simples em circuito aberto
θ_{sh}	comprimento elétrico do toco simples em curto-circuito
Z_{op1}	impedância característica do primeiro segmento do toco duplo em circuito aberto
Z_{op2}	impedância característica do segundo segmento do toco duplo em circuito aberto
θ_{op1}	comprimento elétrico do primeiro segmento do toco duplo em circuito aberto
θ_{op2}	comprimento elétrico do segundo segmento do toco duplo em circuito aberto
Z_{sh1}	impedância característica do primeiro segmento do toco duplo em curto-circuito
Z_{sh2}	impedância característica do segundo segmento do toco duplo em curto-circuito
θ_{sh1}	comprimento elétrico do primeiro segmento do toco duplo em curto-circuito
θ_{sh2}	comprimento elétrico do segundo segmento do toco duplo em curto-circuito
σ	fator de frequência
α_{op}	razão de impedância característica do toco duplo em circuito aberto
β_{op}	razão de comprimento elétrico do toco duplo em circuito aberto

α_{sh}	razão de impedância característica do toco duplo em curto-circuito
β_{sh}	razão de comprimento elétrico do toco duplo em curto-circuito
S_{51}	parâmetro de espalhamento entre a porta 5 e a porta 1
S_{54}	parâmetro de espalhamento entre a porta 5 e a porta 4
O	origem do sistema de coordenadas
L	componente do vetor campo elétrico complexo na direção z ou do vetor campo magnético complexo na mesma direção
E_z	componente do vetor campo elétrico complexo na direção z
H_z	componente do vetor campo magnético complexo na direção z
P	função que depende somente de ρ
F	função que depende somente de ϕ
Z	função que depende somente de z
C_1	constante complexa
C_2	constante complexa
J_m	função de Bessel de primeira espécie de ordem m
Y_m	função de Bessel de segunda espécie de ordem m
$H_m^{(1)}$	função de Hankel de primeira espécie de ordem m
$H_m^{(2)}$	função de Hankel de segunda espécie de ordem m
I_m	função de Bessel modificada de primeira espécie de ordem m
K_m	função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem m
τ	número de onda radial
C_1'	constante complexa
C_2'	constante complexa
C_1''	constante complexa
C_2''	constante complexa
β	número de onda axial

μ_{rd}	permeabilidade magnética relativa do ressoador dielétrico
τ_1	número de onda radial no meio 1
m_1	número de onda angular no meio 1
β_1	número de onda axial no meio 1
τ_2	número de onda radial no meio 2
m_2	número de onda angular no meio 2
β_2	número de onda axial no meio 2
τ_{3a}	número de onda radial no meio 3a
m_{3a}	número de onda angular no meio 3a
β_{3a}	número de onda axial no meio 3a
τ_{3b}	número de onda radial no meio 3b
m_{3b}	número de onda angular no meio 3b
β_{3b}	número de onda axial no meio 3b
k_0	número de onda no vácuo
k_d	número de onda no ressoador dielétrico
ε_d	permissividade elétrica do ressoador dielétrico
μ_d	permeabilidade magnética do ressoador dielétrico
C_{LE1}	constante complexa
C_{LH1}	constante complexa
C_{LE2}	constante complexa
C_{LH2}	constante complexa
C_{LE3a}	constante complexa
C_{LH3a}	constante complexa
C_{LE3b}	constante complexa
C_{LH3b}	constante complexa
$C_{\phi 1}^{(1)}$	constante complexa

$C_{\phi 1}^{(2)}$	constante complexa
$C_{\phi 2}^{(1)}$	constante complexa
$C_{\phi 2}^{(2)}$	constante complexa
$C_{\phi 3a}^{(1)}$	constante complexa
$C_{\phi 3a}^{(2)}$	constante complexa
$C_{\phi 3b}^{(1)}$	constante complexa
$C_{\phi 3b}^{(2)}$	constante complexa
$C_{z1}^{(1)}$	constante complexa
$C_{z1}^{(2)}$	constante complexa
$C_{z2}^{(1)}$	constante complexa
$C_{z2}^{(2)}$	constante complexa
τ_A	número de onda radial em $0 < \rho < a$
τ_B	número de onda radial em $\rho > a$
β_A	número de onda axial em $-h < z < h$
β_B	número de onda axial em $z < -h$
β_C	número de onda axial em $z > h$
$C_{\phi 1}$	constante complexa
Φ_1	constante real
$C_{\phi 2}$	constante complexa
$C_{\phi 3a}$	constante complexa
$C_{\phi 3b}$	constante complexa
Φ_2	constante real
Φ_{3a}	constante real
Φ_{3b}	constante real
Φ	constante real
C_{E1}	constante complexa

C_{H1}	constante complexa
C_{E2}	constante complexa
C_{H2}	constante complexa
C_{E3a}	constante complexa
C_{H3a}	constante complexa
C_{E3b}	constante complexa
C_{H3b}	constante complexa
E_ρ	componente do vetor campo elétrico complexo na direção ρ
H_ρ	componente do vetor campo magnético complexo na direção ρ
H_ϕ	componente do vetor campo magnético complexo na direção ϕ
J_m'	derivada primeira da função de Bessel de primeira espécie de ordem m
K_m'	derivada primeira da função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem m
ζ	autovalor radial em $0 < \rho < a$
ψ	autovalor axial em $\rho > a$
v	autovalor axial em $-h < z < h$
v	autovalor axial em $z < -h$
A	constante complexa
$\mathbf{J}$	vetor densidade de corrente elétrica complexo
$\mathbf{M}$	vetor densidade de corrente magnética complexo
$\boldsymbol{\phi}$	versor na direção ϕ
C_{E4a}	constante complexa
C_{E4b}	constante complexa
$\mathbf{J}_s$	vetor densidade de corrente elétrica superficial complexo
$\mathbf{n}_{ab}$	versor na direção normal à interface entre o meio 4a e os meios 2 e 3a e à interface entre o meio 4b e os meios 2 e 3b, que aponta dos meios 2, 3a e 3b para os meios 4a e 4b

$\mathbf{H}_a$	vetor campo magnético complexo nos meios 2, 3a e 3b
$\mathbf{H}_b$	vetor campo magnético complexo nos meios 4a e 4b
$\mathbf{E}_a$	vetor campo elétrico complexo nos meios 2, 3a e 3b
ω_c	frequência angular de ressonância corrigida
S_{ab}	superfície correspondente à interface entre o meio 4a e os meios 2 e 3a e à interface entre o meio 4b e os meios 2 e 3b
n_{E1}	termo do numerador referente ao campo elétrico no meio 1
n_{E2}	termo do numerador referente ao campo elétrico no meio 2
n_{E3a}	termo do numerador referente ao campo elétrico no meio 3a
n_{E3b}	termo do numerador referente ao campo elétrico no meio 3b
n_{E4a}	termo do numerador referente ao campo elétrico no meio 4a
n_{E4b}	termo do numerador referente ao campo elétrico no meio 4b
n_{EV}	termo do numerador referente ao campo elétrico nas interfaces verticais onde há descontinuidade de campo eletromagnético
n_{EH}	termo do numerador referente ao campo elétrico nas interfaces horizontais onde há descontinuidade de campo eletromagnético
d_{E1}	termo do denominador referente ao campo elétrico no meio 1
d_{E2}	termo do denominador referente ao campo elétrico no meio 2
d_{E3a}	termo do denominador referente ao campo elétrico no meio 3a
d_{E3b}	termo do denominador referente ao campo elétrico no meio 3b
d_{E4a}	termo do denominador referente ao campo elétrico no meio 4a
d_{E4b}	termo do denominador referente ao campo elétrico no meio 4b
V_1	volume do meio 1
V_2	volume do meio 2
V_{3a}	volume do meio 3a
V_{3b}	volume do meio 3b
V_{4a}	volume do meio 4a

V_{4b}	volume do meio 4b
S_{24a}	superfície de interface entre os meios 2 e 4a
S_{24b}	superfície de interface entre os meios 2 e 4b
S_{3a4a}	superfície de interface entre os meios 3a e 4a
S_{3b4b}	superfície de interface entre os meios 3b e 4b
$\boldsymbol{\rho}$	versor na direção ρ
$\mathbf{z}$	versor na direção z
J_m''	derivada segunda da função de Bessel de primeira espécie de ordem m
I_1	integral
I_2	integral
I_3	integral
I_4	integral
I_5	integral
K_m''	derivada segunda da função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem m
K_m'''	derivada terceira da função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem m
f_c	frequência linear de ressonância corrigida
C_{H4a}	constante complexa
C_{H4b}	constante complexa
$\mathbf{M}_s$	vetor densidade de corrente elétrica superficial complexo
$\mathbf{E}_b$	vetor campo elétrico complexo nos meios 4a e 4b
n_{H1}	termo do numerador referente ao campo magnético no meio 1
n_{H2}	termo do numerador referente ao campo magnético no meio 2
n_{H3a}	termo do numerador referente ao campo magnético no meio 3a
n_{H3b}	termo do numerador referente ao campo magnético no meio 3b
n_{H4a}	termo do numerador referente ao campo magnético no meio 4a

n_{H4b}	termo do numerador referente ao campo magnético no meio 4b
n_{HV}	termo do numerador referente ao campo magnético nas interfaces verticais onde há descontinuidade de campo eletromagnético
n_{HH}	termo do numerador referente ao campo magnético nas interfaces horizontais onde há descontinuidade de campo eletromagnético
d_{H1}	termo do denominador referente ao campo magnético no meio 1
d_{H2}	termo do denominador referente ao campo magnético no meio 2
d_{H3a}	termo do denominador referente ao campo magnético no meio 3a
d_{H3b}	termo do denominador referente ao campo magnético no meio 3b
d_{H4a}	termo do denominador referente ao campo magnético no meio 4a
d_{H4b}	termo do denominador referente ao campo magnético no meio 4b
C_{E4a}'	constante complexa
C_{H4a}'	constante complexa
C_{E4b}'	constante complexa
C_{H4b}'	constante complexa
C_{E4a}''	constante complexa
C_{H4a}''	constante complexa
C_{E4b}''	constante complexa
C_{H4b}''	constante complexa
$\mathbf{n}_{cd}$	versor na direção normal à interface entre o meio 1 e os meios 3a e 3b, que aponta do meio 1 para os meios 3a e 3b
$\mathbf{E}_c$	vetor campo elétrico complexo no meio 1
$\mathbf{H}_c$	vetor campo magnético complexo no meio 1
$\mathbf{E}_d$	vetor campo elétrico complexo nos meios 3a e 3b
$\mathbf{H}_d$	vetor campo magnético complexo nos meios 3a e 3b
S_{cd}	superfície correspondente à interface entre o meio 1 e os meios 3a e 3b

n_{EM}	termo do numerador referente ao campo elétrico na interface entre o meio 1 e os meios 3a e 3b
n_{HM}	termo do numerador referente ao campo magnético na interface entre o meio 1 e os meios 3a e 3b
S_{13a}	superfície de interface entre os meios 1 e 3a
S_{13b}	superfície de interface entre os meios 1 e 3b
I_6	integral
I_7	integral
I_8	integral
I_9	integral
I_{10}	integral
I_{11}	integral
I_{12}	integral
I_{13}	integral
$\mathbf{n}_s$	versor na direção normal à superfície do ressoador dielétrico, que aponta para fora do mesmo
$\mathbf{A}$	potencial vetorial magnético complexo
$\mathbf{F}$	potencial vetorial elétrico complexo
S_r	superfície do ressoador dielétrico
r_s	distância entre a origem do sistema de coordenadas e o ponto considerado na superfície do ressoador
ζ_{os}	ângulo definido pelo ponto de observação, pela origem do sistema de coordenadas e pelo ponto considerado na superfície do ressoador, com vértice na origem do sistema de coordenadas
A_θ	componente do potencial vetorial magnético complexo na direção θ
F_θ	componente do potencial vetorial elétrico complexo na direção θ
A_ϕ	componente do potencial vetorial magnético complexo na direção ϕ
F_ϕ	componente do potencial vetorial elétrico complexo na direção ϕ

U_θ	intensidade de radiação na direção θ
U_ϕ	intensidade de radiação na direção ϕ
θ_C	comprimento elétrico de trecho de linha de transmissão do acoplador híbrido de 90°
r	número inteiro não negativo
$\Delta\phi$	diferença de fase entre os sinais de P_3 e P_2
$\mathbf{C}$	matriz ABCD de trecho de linha de transmissão do acoplador híbrido de 90°
Z_C	impedância característica de trecho de linha de transmissão do acoplador híbrido de 90°
Π	matriz ABCD do circuito tipo Π
Y_Π'	admitância em paralelo inserida ao longo do anel do acoplador tipo Π
Π_1	matriz ABCD do circuito tipo Π em f_1
Π_2	matriz ABCD do circuito tipo Π em f_2
$\theta_\Pi^{(1)}$	comprimento elétrico dos trechos de linha de transmissão que formam o anel do acoplador tipo Π em f_1
$\theta_\Pi^{(2)}$	comprimento elétrico dos trechos de linha de transmissão que formam o anel do acoplador tipo Π em f_2
$Y_\Pi^{(1)'} $	admitância em paralelo inserida ao longo do anel do acoplador tipo Π em f_1
$Y_\Pi^{(2)'} $	admitância em paralelo inserida ao longo do anel do acoplador tipo Π em f_2
s	número inteiro não negativo
t	número inteiro não negativo
f_A	frequência arbitrária
f_B	frequência arbitrária
$\theta_L^{(A)}$	comprimento elétrico de trecho de linha de transmissão em f_A
$\theta_L^{(B)}$	comprimento elétrico de trecho de linha de transmissão em f_B
$\theta_\Pi^{(M)}$	comprimento elétrico dos trechos de linha de transmissão que formam o anel do acoplador tipo Π em f_M

$\theta_{op1}^{(1)}$	comprimento elétrico do primeiro segmento do toco duplo em circuito aberto em f_1
$\theta_{op1}^{(2)}$	comprimento elétrico do primeiro segmento do toco duplo em circuito aberto em f_2
$\theta_{op2}^{(1)}$	comprimento elétrico do segundo segmento do toco duplo em circuito aberto em f_1
$\theta_{op2}^{(2)}$	comprimento elétrico do segundo segmento do toco duplo em circuito aberto em f_2
$\theta_{op1}^{(M)}$	comprimento elétrico do primeiro segmento do toco duplo em circuito aberto em f_M
$\theta_{op2}^{(M)}$	comprimento elétrico do segundo segmento do toco duplo em circuito aberto em f_M
$\theta_{sh1}^{(1)}$	comprimento elétrico do primeiro segmento do toco duplo em curto-circuito em f_1
$\theta_{sh1}^{(2)}$	comprimento elétrico do primeiro segmento do toco duplo em curto-circuito em f_2
$\theta_{sh2}^{(1)}$	comprimento elétrico do segundo segmento do toco duplo em curto-circuito em f_1
$\theta_{sh2}^{(2)}$	comprimento elétrico do segundo segmento do toco duplo em curto-circuito em f_2
$\theta_{sh1}^{(M)}$	comprimento elétrico do primeiro segmento do toco duplo em curto-circuito em f_M
$\theta_{sh2}^{(M)}$	comprimento elétrico do segundo segmento do toco duplo em curto-circuito em f_M
T	matriz ABCD do circuito tipo T
Y_T'	admitância em paralelo inserida ao longo do anel do acoplador tipo T
T ₁	matriz ABCD do circuito tipo T em f_1
T ₂	matriz ABCD do circuito tipo T em f_2

- $\theta_T^{(1)}$ comprimento elétrico dos trechos de linha de transmissão que formam o anel do acoplador tipo T em f_1
- $\theta_T^{(2)}$ comprimento elétrico dos trechos de linha de transmissão que formam o anel do acoplador tipo T em f_2
- $Y_T^{(1) '}$ admitância em paralelo inserida ao longo do anel do acoplador tipo T em f_1
- $Y_T^{(2) '}$ admitância em paralelo inserida ao longo do anel do acoplador tipo T em f_2
- $\theta_T^{(M)}$ comprimento elétrico dos trechos de linha de transmissão que formam o anel do acoplador tipo T em f_M

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	34
1.1	MOTIVAÇÃO	34
1.2	OBJETIVO	37
1.3	DESCRIÇÃO DE SEÇÕES	38
2	PRINCÍPIOS TEÓRICOS	40
2.1	RESSOADORES DIELÉTRICOS	40
2.1.1	Análise teórica	44
2.1.2	Ressorador cilíndrico	49
2.1.3	Radiação	54
2.2	ANTENAS DE RESSOADOR DIELÉTRICO	57
2.2.1	Antena cilíndrica	59
2.2.2	Métodos convencionais de excitação	62
2.2.3	Técnicas de melhoria ou alteração de desempenho	65
3	METODOLOGIA DE PROJETO PARA ANTENAS DE BANDA DUPLA	67
3.1	CONCEPÇÃO OPERACIONAL.....	68
3.1.1	Especificações de projeto.....	68
3.1.2	Seleção dos modos ressonantes.....	68
3.1.3	Escolha do tipo de configuração de antena.....	71
3.2	ESTRUTURAÇÃO E DIMENSIONAMENTO	71
3.2.1	Cálculo do ressoador dielétrico	71
3.2.2	Projeto das estruturas de excitação.....	73
3.2.3	Projeto do circuito de alimentação.....	73
3.3	REALIZAÇÃO PRÁTICA	73
3.3.1	Fabricação de protótipo	73
3.3.2	Caracterização experimental	74

3.3.3	Validação de resultados	74
4	ANTENA SOBRE PLANO DE TERRA	75
4.1	CONCEPÇÃO OPERACIONAL.....	75
4.2	CÁLCULO DO RESSOADOR DIELÉTRICO	76
4.3	PROJETO DAS ESTRUTURAS DE EXCITAÇÃO.....	77
4.3.1	Excitação do modo $HEM_{11\delta}$	77
4.3.2	Excitação do modo $TM_{01\delta}$	81
4.3.3	Otimização e simulação completa das estruturas de excitação	85
4.4	PROJETO DO CIRCUITO DE ALIMENTAÇÃO.....	86
4.4.1	Filtros.....	89
4.4.2	Acoplador híbrido de 90°	91
4.4.3	Otimização e simulação completa do circuito de alimentação.....	92
4.5	OTIMIZAÇÃO E SIMULAÇÃO COMPLETA DA ANTENA	95
4.6	REALIZAÇÃO PRÁTICA	99
4.7	CONCLUSÕES.....	104
5	ANTENA SOBRE SUBSTRATO DIELÉTRICO ATERRADO	107
5.1	CONCEPÇÃO OPERACIONAL.....	108
5.2	CÁLCULO DO RESSOADOR DIELÉTRICO	109
5.3	PROJETO DAS ESTRUTURAS DE EXCITAÇÃO.....	110
5.3.1	Excitação do modo $HEM_{11\delta}$	110
5.3.2	Excitação do modo $HEM_{12\delta}$	113
5.3.3	Otimização e simulação completa das estruturas de excitação	118
5.4	PROJETO DO CIRCUITO DE ALIMENTAÇÃO.....	121
5.4.1	Filtros.....	124
5.4.2	Acoplador híbrido de 90° de banda dupla.....	125
5.4.3	Otimização e simulação completa do circuito de alimentação.....	133

5.5	OTIMIZAÇÃO E SIMULAÇÃO COMPLETA DA ANTENA	137
5.6	REALIZAÇÃO PRÁTICA	140
5.7	CONCLUSÕES.....	145
6	MODELO PARA O RESSOADOR DIELÉTRICO CILÍNDRICO ISOLADO .	149
6.1	SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	151
6.1.1	Modos TE	167
6.1.2	Modos TM.....	169
6.1.3	Modos HEM.....	172
6.2	APLICAÇÃO DA TÉCNICA VARIACIONAL	177
6.2.1	Modos TE	178
6.2.2	Modos TM.....	184
6.2.3	Modos HEM.....	189
6.3	COMPARAÇÃO DE RESULTADOS.....	198
6.4	PROCEDIMENTOS PARA O CÁLCULO DE OUTROS PARÂMETROS ...	203
6.5	CONCLUSÕES.....	206
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	208
7.1	CONCLUSÃO	208
7.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	210
	REFERÊNCIAS	211
	APÊNDICE — ACOPLADOR HÍBRIDO DE 90° DE BANDA DUPLA	220

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Nos últimos anos, as telecomunicações vêm experimentando um rápido avanço tecnológico juntamente com a microeletrônica e com a computação. O progresso científico nessas áreas tem possibilitado um desenvolvimento contínuo de sistemas de comunicação sem fio com crescente capacidade de processamento de dados, para aplicações cada vez mais diversas e sofisticadas, a custos acessíveis e com consumo energético aceitável.

Esse panorama tecnológico tem favorecido um aumento significativo da utilização das comunicações sem fio em várias áreas da sociedade, gerando um crescimento considerável do número de usuários e impulsionando uma grande expansão das redes de telecomunicação.

Recentemente, a forte popularização das comunicações sem fio vem provocando uma utilização intensa do espectro eletromagnético em radiofrequência (RF), com destaque para as frequências do início da faixa de frequência de micro-ondas, como as das bandas L e S. Dessa forma, a fim de evitar a saturação do espectro nessas faixas, bandas em frequências mais elevadas e com menor ocupação têm sido consideradas como alternativas para a operação dos sistemas de comunicação sem fio. Exemplos que podem ser citados desse fato vão desde o surgimento de aplicações comerciais populares como redes locais sem fio — *wireless local area network* (WLAN) —, redes pessoais sem fio — *wireless personal area network* (WPAN) — e identificação por radiofrequência — *radio-frequency identification* (RFID) — na banda *industrial scientific and medical* (ISM) de 5,8 GHz até os desenvolvimentos em sistemas destinados a operar em frequências próximas de 60 GHz²⁻⁶.

Além disso, o emprego de sistemas que operam em duas ou mais faixas de frequência já é uma realidade corriqueira para diversas aplicações atuais das comunicações sem fio, muitas das quais utilizam bandas múltiplas com o objetivo de obter taxas de transmissão de dados mais elevadas, capacidade superior de alocação de usuários, maior confiabilidade na transmissão de sinais por meio de diversidade de frequência e acesso a diferentes serviços que operam em faixas de frequência distintas.

Sendo assim, verifica-se que as antenas de ressoador dielétrico apresentam um grande potencial para aplicação em sistemas atuais de comunicação sem fio, constituindo uma alternativa promissora para o atendimento das crescentes exigências dos mesmos.

Essas antenas consistem em um bloco de material dielétrico geralmente disposto sobre um plano de terra metálico ou sobre um substrato dielétrico aterrado. A Figura 1 apresenta algumas antenas de ressoador dielétrico, ilustrando diferentes geometrias de radiador (ressoador dielétrico).

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Antenas desse tipo geralmente oferecem vários benefícios como, por exemplo, pequenas dimensões geométricas, perdas reduzidas, facilidade de integração com circuitos planares de micro-ondas e possibilidade de obtenção de diversas características de radiação, tais como vários formatos de diagrama de radiação e diferentes tipos de polarização⁷⁻¹¹.

Normalmente, as antenas de ressoador dielétrico apresentam como desvantagem uma complexidade mais elevada de fabricação comparativamente a outros tipos tradicionais de antena, o que pode levar a um custo superior de produção¹¹.

Não obstante, as antenas de ressoador dielétrico podem exibir, em determinadas situações, vantagens em relação a outros tipos clássicos de antena comumente empregados em frequências de micro-ondas, tais como antenas filamentosas e antenas de microfitas.

As antenas de ressoador dielétrico podem ser significativamente miniaturizadas dependendo da escolha do material dielétrico que as constitui, o que é particularmente conveniente para antenas destinadas a operar nas frequências iniciais do espectro das micro-ondas. Contudo, ressalta-se que há um limite para a diminuição das

dimensões geométricas das antenas, uma vez que ela tem um impacto direto sobre o desempenho de radiação das mesmas.

Em frequências de ondas milimétricas, as antenas de ressonador dielétrico têm a vantagem de apresentar uma perda condutiva tipicamente reduzida, sendo assim uma opção de interesse.

Especificamente em relação às populares antenas *patch* de microfita, as antenas de ressonador dielétrico sobre plano de terra possuem a vantagem de não exibirem perda por onda de superfície^{10, 12}, o que contribui para uma maior eficiência de radiação. Adicionalmente, as antenas de ressonador dielétrico normalmente apresentam largura de banda de impedância superior à exibida por antenas de microfita que empregam o mesmo material dielétrico, levando-se em conta as configurações geométricas mais tradicionais de ambos os tipos de antena^{7, 10}.

Ainda, podem ser construídas antenas de ressonador dielétrico que operam em mais de uma faixa de frequência⁹⁻¹¹. Em especial, é teoricamente possível projetar antenas com um único elemento radiador de geometria simples para operar em duas bandas com frequência central arbitrária, dispondo-se ainda de opções de escolha para os tipos de polarização e de diagrama de radiação em cada uma delas. Essa flexibilidade, explicada mais adiante neste documento, não é observada em outros tipos de antena.

Levando-se em conta todas essas características, pode-se concluir que antenas de ressonador dielétrico de banda dupla são uma alternativa atraente para sistemas atuais de comunicação sem fio, muitos dos quais operam em frequências cada vez mais elevadas e com multiplicidade de banda de operação, possuindo ainda requisitos adicionais para suas antenas, tais como tamanho reduzido, baixas perdas e tipos específicos de polarização e de diagrama de radiação.

Contudo, antenas de ressonador dielétrico que possuem duas ou mais bandas de operação não são tão comumente reportadas em publicações científicas quanto antenas planares de banda múltipla. Além disso, não se encontram procedimentos de projeto específicos para antenas de ressonador dielétrico de banda dupla que explorem todos os graus de liberdade destas citados anteriormente.

Esse cenário motivou a realização do trabalho apresentado nesta tese de doutorado, desenvolvido na forma de uma pesquisa de doutorado sanduíche que envolveu a Universidade de São Paulo, onde o autor atuou como aluno de doutorado sob a

orientação da Profa. Dra. Fatima S. Correra, e a University of Houston, onde o autor exerceu a função de pesquisador visitante durante o período de um ano sob a supervisão do Prof. Stuart A. Long, pioneiro na proposição das antenas de ressoador dielétrico.

1.2 OBJETIVO

O objetivo deste trabalho foi desenvolver antenas de ressoador dielétrico de banda dupla em frequências de micro-ondas, estabelecendo-se uma metodologia de projeto para as mesmas e propondo-se configurações inéditas de antenas desse tipo.

Para alcançar esse objetivo, estudos sobre antenas de ressoador dielétrico e sobre suas técnicas de projeto foram realizados nesta pesquisa por meio de revisão bibliográfica, de simulação computacional e de caracterização experimental, efetuados com base em resultados já publicados sobre o assunto. A partir desses estudos, uma metodologia de projeto para antenas de ressoador dielétrico de banda dupla foi concebida e posteriormente utilizada no desenvolvimento de duas antenas com novas configurações para operação em frequências de micro-ondas. A necessidade de superar problemas cujas soluções não se encontravam disponíveis na literatura técnica conduziu a contribuições originais adicionais, as quais são abordadas posteriormente nesta tese e ocorreram nos seguintes tópicos: estruturas de excitação para antenas de ressoador dielétrico, circuitos acopladores híbridos de 90° de banda dupla, circuitos de alimentação para antenas de banda dupla e modelos matemáticos para o ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre.

O cumprimento do objetivo deste trabalho é validado comparando-se os resultados previstos teoricamente com os calculados por meio de simulação eletromagnética e com os obtidos experimentalmente. Os méritos e as limitações das antenas desenvolvidas bem como da metodologia de projeto proposta são discutidos confrontando-se os benefícios e as desvantagens exibidos pelas antenas desenvolvidas neste trabalho e por antenas reportadas na literatura técnica.

1.3 DESCRIÇÃO DE SEÇÕES

O presente documento inicia-se com a introdutória seção 1, que situa brevemente este trabalho dentro do cenário tecnológico contemporâneo e demonstra a aplicabilidade das antenas de ressoador dielétrico nos sistemas atuais de comunicação sem fio. São apresentados também o objetivo desta pesquisa e a organização desta tese.

A seção 2 aborda sucintamente os princípios teóricos que fundamentam este trabalho. De início, os ressoadores dielétricos são introduzidos e descritos, apresentando-se suas características principais, alguns modelos matemáticos empregados para sua análise teórica, o ressoador dielétrico cilíndrico e o fenômeno da radiação eletromagnética em ressoadores dielétricos. Em seguida, as antenas de ressoador dielétrico são tratadas, dando-se maior ênfase à antena cilíndrica, às técnicas convencionais de excitação e a outras técnicas de projeto.

A metodologia de projeto para antenas de ressoador dielétrico de banda dupla elaborada neste trabalho é exposta na seção 3. Essa seção estabelece um procedimento passo a passo compatível com especificações diversas de antena, o qual explora as diferentes propriedades dos diversos modos ressonantes de baixa ordem excitáveis em ressoadores dielétricos.

As duas antenas desenvolvidas nesta pesquisa empregaram a metodologia de projeto proposta na seção 3 e são detalhadas nas seções 4 e 5. Essas seções abordam, respectivamente, os dois tipos de configuração previstos na metodologia mencionada: antena sobre plano de terra e antena sobre substrato dielétrico aterrado. As antenas desenvolvidas são descritas e discutidas seguindo-se a sequência lógica de seu fluxo de projeto, que engloba todas as etapas de desenvolvimento das mesmas, desde as especificações de projeto até as medições experimentais sobre os protótipos de antena construídos, com a subsequente validação de resultados por meio de análise e de comparação destes.

Na seção 6, é apresentado um modelo matemático analítico aproximado para o ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre. O referido modelo consiste em uma extensão de um modelo matemático existente e foi concebido neste trabalho como uma ferramenta alternativa para análise e projeto de antenas de ressoador dielétrico cilíndrico sobre plano de terra. Nessa seção, o desenvolvimento matemático das equações do modelo é mostrado discutindo-se os procedimentos adotados e

justificando-se as hipóteses assumidas. Esse modelo é validado comparando-se os resultados obtidos com o mesmo com resultados disponíveis na literatura técnica.

Por fim, a seção 7 apresenta as conclusões deste trabalho juntamente com sugestões de pesquisas que podem ser realizadas futuramente como continuidade e também como complementação ao mesmo.

2 PRINCÍPIOS TEÓRICOS

Esta seção introduz, de forma sintética, os fundamentos teóricos nos quais este trabalho se baseia.

Primeiramente, os ressoadores dielétricos são apresentados e discutidos. Em seguida, são abordadas as antenas de ressoador dielétrico.

Observa-se que todas as grandezas físicas mencionadas no presente texto pressupõem a utilização de unidades de acordo com o Sistema Internacional de Unidades (SI). Adicionalmente, os módulos dos vetores complexos de campos elétrico e magnético apresentados neste documento correspondem aos valores de pico dos campos harmônicos senoidais aos quais esses vetores se referem.

2.1 RESSOADORES DIELÉTRICOS

Em 1939, Richtmyer¹³ observou que objetos de material dielétrico não metalizados apresentam um comportamento eletromagnético ressonante. Isso significa que eles exibem em determinadas frequências, denominadas frequências de ressonância, uma distribuição de campo eletromagnético com padrão de onda estacionária, chamada de modo ressonante, em que a energia armazenada oscila entre os tipos elétrico e magnético, caracterizando um confinamento de energia eletromagnética similar ao verificado em cavidades ressonantes metálicas. Esse tipo de estrutura foi chamado de ressoador dielétrico.

Somente a partir da década de 1970, entretanto, os ressoadores dielétricos começaram a ser aplicados mais comumente em circuitos de micro-ondas. Nessa época, novos materiais dielétricos e novas técnicas de fabricação desse tipo de material foram introduzidos, o que possibilitou a obtenção de constantes dielétricas elevadas, juntamente com características melhoradas de perda dielétrica e de estabilidade térmica^{14, 15}.

Os ressoadores dielétricos são tradicionalmente usados em circuitos de micro-ondas que empregam elementos ressonantes, tais como filtros e osciladores, nos quais atuam como componentes armazenadores de energia eletromagnética. A princípio, os ressoadores dielétricos podem assumir diferentes formas geométricas, tais como

cilindro, bloco retangular e semiesfera (ilustradas na Figura 1), sendo o cilindro a mais comumente utilizada.

O uso de ressoadores dielétricos pode trazer vantagens em relação ao emprego de ressoadores realizados em outras tecnologias de micro-ondas. Por exemplo, em comparação às cavidades ressonantes metálicas, os ressoadores dielétricos geralmente possuem peso mais baixo e dimensões geométricas menores. Além disso, eles exibem perdas tipicamente inferiores às apresentadas por ressoadores construídos em tecnologia de microfita, sendo também facilmente integráveis a circuitos planares de micro-ondas.

Os ressoadores dielétricos exibem uma interface direta com seu meio externo. Dessa forma, parte do campo eletromagnético ressonante excitado nos mesmos e, portanto, da energia armazenada pelos ressoadores dielétricos localiza-se ao redor destes, e a intensidade de campo eletromagnético decai rapidamente com a distância, de maneira aproximadamente exponencial¹⁶. Adicionalmente, esse tipo de estrutura apresenta perda por radiação¹³, além da perda dielétrica inerente ao material dielétrico empregado, o que em geral não é observado nas cavidades ressonantes metálicas, dado que estas normalmente são constituídas de uma peça metálica fechada preenchida com ar.

Por outro lado, a perda por radiação dos ressoadores dielétricos pode ser evitada com a utilização de caixas eletromagneticamente blindadas, que normalmente acomodam circuitos de micro-ondas. Essa blindagem eletromagnética é comumente utilizada em filtros e osciladores de micro-ondas e ocasiona o aumento do índice de mérito dos mesmos, uma vez que há redução de sua perda por radiação. Além disso, o uso de caixas eletromagneticamente blindadas permite a sintonização desses circuitos por meio de parafusos metálicos ou feitos com material dielétrico posicionados acima dos ressoadores nos circuitos. A modificação da distância entre parafuso e ressoador dielétrico ocasiona uma variação da frequência de ressonância deste.

Em antenas de ressoador dielétrico, os ressoadores dielétricos são montados de forma a permitir a radiação de campo eletromagnético, dispensando blindagem eletromagnética, como mostrado anteriormente na Figura 1.

A Figura 2 ilustra uma montagem típica de um ressoador dielétrico em um circuito de micro-ondas.

Figura 2 — Ressorador dielétrico montado em um circuito de micro-ondas

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

As principais propriedades de material dos ressoadores dielétricos consideradas para aplicação em circuitos de micro-ondas são: constante dielétrica (ϵ_r), coeficiente de temperatura da frequência de ressonância (τ_f) e índice de mérito (Q).

A constante dielétrica, geometria e dimensões geométricas do ressonador dielétrico determinam sua frequência de ressonância. Usualmente, são empregadas constantes dielétricas entre 10 e 100. Valores mais elevados desse parâmetro levam a tamanhos menores de ressonador dielétrico, para uma mesma frequência de ressonância, e a um maior confinamento da energia eletromagnética dentro do ressonador^{16–18}.

A frequência de ressonância do ressonador dielétrico é influenciada também por sua montagem no circuito e pela temperatura de operação. Esse efeito é considerado pelo coeficiente de temperatura da frequência de ressonância, o qual depende da constante de dilatação térmica do material que compõe o ressonador, da variação de sua constante dielétrica com temperatura e da expansão térmica de seu ambiente de operação.

Os fabricantes de ressonador dielétrico disponibilizam seus produtos com diferentes coeficientes de temperatura da frequência de ressonância. Por exemplo, podem ser encontrados comercialmente valores típicos dentro do intervalo entre $-10 \text{ ppm}/^\circ\text{C}$ a $10 \text{ ppm}/^\circ\text{C}$, o que permite ao projetista a escolha do valor mais adequado para sua aplicação. Especificamente para antenas de ressonador dielétrico, é desejável que esse parâmetro seja nulo, uma vez que a frequência de operação das mesmas não deve ser afetada por fatores ambientais externos.

O índice de mérito do ressonador dielétrico tem relação com a perda dielétrica característica do material que o constitui e é definido por^{13, 16}

$$Q = \omega_0 \frac{W_s}{P_L} = 2\pi f_0 \frac{W_s}{P_L} \quad (1)$$

onde ω_0 e f_0 são, respectivamente, as frequências angular e linear de ressonância do ressonador; W_s representa a energia eletromagnética total armazenada no mesmo (média em um ciclo completo de tempo); P_L é a potência total de perda do ressonador.

A potência total de perda P_L do ressonador dielétrico envolve as perdas condutiva P_c , dielétrica P_d e por radiação P_r :

$$P_L = P_c + P_d + P_r \quad (2)$$

Sendo assim, a eq. (1) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{Q} = \frac{P_L}{\omega_0 W_s} = \frac{P_c}{\omega_0 W_s} + \frac{P_d}{\omega_0 W_s} + \frac{P_r}{\omega_0 W_s} = \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_r} \quad (3)$$

onde Q_c , Q_d e Q_r são, respectivamente, os índices de mérito do ressonador dielétrico devido a suas perdas condutiva, dielétrica e por radiação.

Normalmente, para a medição do índice de mérito do ressonador dielétrico, o mesmo é colocado e excitado dentro de uma cavidade metálica fechada (eletromagneticamente blindada), o que impede a ocorrência de perda por radiação. Nessa condição, considerando-se desprezível a perda condutiva do material que compõe o ressonador e das paredes da referida cavidade, vale a relação¹⁶

$$Q \approx Q_d = \frac{1}{\text{tg } \delta} \quad (4)$$

onde $\text{tg } \delta$ é a tangente de perda do material que constitui o ressonador dielétrico. Esse parâmetro normalmente varia com a frequência f do campo eletromagnético no ressonador de acordo com a seguinte relação¹⁶:

$$Q_d = \frac{1}{\text{tg } \delta} = \frac{K}{f} \quad (5)$$

onde K é uma constante característica do material que compõe o ressonador dielétrico. Em geral, essa relação é válida em determinadas bandas dentro da faixa de frequência de micro-ondas para os materiais comumente utilizados em ressonadores dielétricos.

Observa-se que cada modo ressonante de um ressonador dielétrico possui uma determinada frequência de ressonância, uma distribuição própria de campo eletromagnético e características particulares de radiação. Portanto, cada um deles apresenta um índice de mérito característico, e a medição dentro de uma cavidade metálica fechada permite que a radiação seja desconsiderada possibilitando uma caracterização mais específica do material que constitui o ressonador.

A Tabela 1 reproduz dados de alguns ressoadores dielétricos cilíndricos comercialmente disponíveis, exemplificando valores típicos de constante dielétrica, de índice de mérito e de coeficiente de temperatura da frequência de ressonância.

Tabela 1 — Dados de ressoadores dielétricos cilíndricos RESOMICS®, da Murata Manufacturing Company, Ltd.

Série de produto	Constantes dielétricas disponíveis	Índice de mérito	Coeficientes de temperatura da frequência de ressonância disponíveis	Frequências de ressonância disponíveis
U	36,6 a 38,9	6.000 em 7 GHz	−4 ppm/°C a 10 ppm/°C	1,5 GHz a 12,5 GHz
M	38,5 a 39,2	7.000 em 7 GHz	0 ppm/°C a 6 ppm/°C	1,5 GHz a 12,5 GHz
V	33,5 a 35,1	12.000 em 10 GHz	0 ppm/°C a 8 ppm/°C	2,9 GHz a 13,2 GHz
R	29,7 a 31,5	15.000 em 10 GHz	0 ppm/°C a 6 ppm/°C	4,6 GHz a 24,2 GHz
B	27,9	18.000 em 10 GHz	0 ppm/°C a 6 ppm/°C	4,8 GHz a 25,9 GHz
E	24,2 a 24,9	24.000 em 10 GHz	0 ppm/°C a 6 ppm/°C	8,4 GHz a 25,2 GHz
F	23,8 a 24,2	35.000 em 10 GHz	0 ppm/°C a 4 ppm/°C	10 GHz a 25,2 GHz

Fonte: Murata Manufacturing Company, Ltd.¹⁹

2.1.1 Análise teórica

A análise teórica dos ressoadores dielétricos consiste em um problema de eletromagnetismo.

No problema em análise, o campo eletromagnético presente em todos os pontos do domínio deve obedecer às leis fundamentais do eletromagnetismo, que são sintetizadas pelas equações de Maxwell^{15, 18, 20}. Escritas em sua forma diferencial complexa — fasorial (campo eletromagnético harmônico no tempo) — para um meio linear, homogêneo, isotrópico, invariante no tempo e sem fontes (correntes ou cargas elétricas ou magnéticas), essas equações assumem a forma^{15, 18, 20}

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (9)$$

onde $\mathbf{E}$ corresponde ao vetor campo elétrico complexo, $\mathbf{H}$ denota o vetor campo magnético complexo, μ é a permeabilidade magnética do meio, ε representa a permissividade elétrica do meio, e ω é a frequência angular do campo eletromagnético. Ademais, admite-se que o meio não é dissipativo, o que faz com que a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do mesmo sejam números reais.

Procedendo-se à manipulação algébrica adequada com a aplicação de identidades dos operadores vetoriais lineares, as eq. (6)–(9) conduzem a duas equações de onda (equações de Helmholtz) vetoriais^{15, 18, 20}:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (10)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (11)$$

onde k denota o número de onda, dado por

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \quad (12)$$

Podem ser utilizados na solução do problema os sistemas de coordenadas cartesianas xyz , cilíndricas $\rho\phi z$ ou esféricas $\rho\theta\phi$, sendo a geometria do ressonador dielétrico a ser analisado o fator que determina qual deles é o mais conveniente.

A eq. (10) pode ser decomposta em três equações de onda escalares, sendo cada uma correspondente a um dos versores da base do sistema de coordenadas adotado. O mesmo se aplica à eq. (11).

Especificamente para os sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas, ao menos duas das seis equações de onda escalares são escritas na forma

$$\nabla^2 E_u + k^2 E_u = 0 \quad (13)$$

$$\nabla^2 H_u + k^2 H_u = 0 \quad (14)$$

onde E_u e H_u são as componentes na direção u dos vetores campo elétrico e campo magnético complexos, respectivamente. Para o sistema de coordenadas cartesianas, u pode ser qualquer uma das direções de sua base (x , y ou z); no caso do sistema de coordenadas cilíndricas, u é a direção z .

Demonstra-se ainda, a partir da manipulação algébrica das eq. (6) e (7), que todas as componentes vetoriais de campo eletromagnético podem ser expressas em função apenas de E_u e de H_u ^{15, 16, 18, 20}. Dessa forma, a complexidade matemática do problema é diminuída para os sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas, sendo necessário resolver apenas as eq. (13) e (14). Por outro lado, as eq. (10) e (11) devem ser resolvidas em sua forma original para o sistema de coordenadas esféricas.

Dado que as eq. (10), (11), (13) e (14) são diferenciais, a forma final de sua solução depende das condições de contorno adotadas. Estas, por sua vez, são determinadas pelo modelo matemático escolhido para representar o ressonador dielétrico em análise em seu ambiente de operação.

Diversos modelos matemáticos^{14, 16, 21} podem ser utilizados para essa finalidade, dos quais alguns podem representar mais adequadamente determinados ressoadores dielétricos em seu ambiente de operação, enquanto outros podem ter solução matemática mais simples. As Figuras 3 e 4 apresentam as configurações geométricas consideradas por alguns desses modelos.

Figura 3 — Configurações geométricas dos modelos de Cohn¹⁴: (a) primeira e (b), (c) segunda ordens

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Figura 4 — Configuração geométrica do modelo de Itoh e Rudokas²¹

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Observam-se nas Figuras 3 e 4 três tipos de condição de contorno tipicamente utilizados na análise de ressoadores dielétricos: interface entre materiais dielétricos perfeitos (sem perdas), interface com material condutor elétrico perfeito (parede elétrica) e interface com material condutor magnético perfeito (parede magnética).

A condição de contorno de interface entre materiais dielétricos perfeitos constitui uma aproximação adequada para representar interfaces entre materiais dielétricos com perdas reduzidas.

Nos pontos de uma superfície considerada uma interface entre materiais dielétricos perfeitos genéricos 1 e 2, valem as relações^{15, 18, 20}

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0} \quad (15)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{0} \quad (16)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 - \varepsilon_1 \mathbf{E}_1) = 0 \quad (17)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mu_2 \mathbf{H}_2 - \mu_1 \mathbf{H}_1) = 0 \quad (18)$$

onde $\mathbf{n}$ é o versor na direção normal à superfície, que aponta do material 1 para o material 2; $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{H}_1$ são os vetores campo elétrico e campo magnético complexos no material 1, respectivamente; $\mathbf{E}_2$ e $\mathbf{H}_2$ referem-se aos vetores campo elétrico e campo magnético complexos no material 2, respectivamente; ε_1 e μ_1 representam, respectivamente, a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do material 1; ε_2 e μ_2 denotam, respectivamente, a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do material 2.

As eq. (15) e (16) indicam que as componentes dos vetores campo elétrico e campo magnético tangenciais à superfície são contínuas na interface.

A parede elétrica pode ser utilizada como uma aproximação para superfícies de materiais condutores de alta condutividade elétrica. Além disso, essa condição de contorno pode ser empregada como uma aproximação para superfícies de interface entre materiais dielétricos com ampla diferença de constante dielétrica^{15–17}. Nesse caso, ela deve ser utilizada na análise de campos excitados dentro do material com menor constante dielétrica que se propagam em direção ao material com maior constante dielétrica¹⁶.

Em todos os pontos de uma superfície que é definida como uma parede elétrica, são válidas as expressões^{15, 18, 20}

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (19)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (20)$$

As eq. (19) e (20) indicam que a componente do vetor campo elétrico tangencial à superfície e a componente do vetor campo magnético normal à superfície são nulas na parede elétrica.

A parede magnética também pode ser utilizada como uma aproximação para superfícies de interface entre materiais dielétricos com ampla diferença de constante dielétrica¹⁶. Porém, nesse caso, ela deve ser usada na análise de campos excitados dentro do material com maior constante dielétrica que se propagam em direção ao material com menor constante dielétrica¹⁶.

De forma dual à parede elétrica, define-se a condição de parede magnética, válida em todos os pontos de uma superfície que é definida como tal^{15, 20}:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (21)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (22)$$

As eq. (21) e (22) indicam que a componente do vetor campo magnético tangencial à superfície e a componente do vetor campo elétrico normal à superfície são nulas na parede magnética.

Estando definido o modelo matemático a ser empregado para o ressonador dielétrico, a solução do problema pode ser obtida por meio da resolução das eq. (13) e (14), com a aplicação das condições de contorno previstas no referido modelo. O cálculo das outras componentes de campo eletromagnético é realizado a partir das soluções das eq. (13) e (14), como já mencionado anteriormente, o que é feito utilizando-se expressões derivadas das eq. (6) e (7). Esse procedimento é empregado na seção 6, onde um modelo matemático para o ressonador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre é proposto e analisado.

Observa-se, no entanto, que soluções matemáticas analíticas exatas existem somente para as geometrias esféricas (ou hemisféricas) e toroidais¹⁸. Para outros formatos de maior interesse prático, como o cilindro e o bloco retangular, o tratamento matemático é possível somente de forma não analítica ou aproximada^{21, 22}.

2.1.2 Ressorador cilíndrico

O ressoador dielétrico cilíndrico é o mais frequentemente empregado em circuitos de micro-ondas e em antenas de ressoador dielétrico. Trata-se do tipo utilizado nas antenas desenvolvidas neste trabalho e é apresentado a seguir. O estudo desse tipo de ressoador permite também a compreensão de alguns aspectos gerais do comportamento de ressoadores dielétricos com outras geometrias.

A Figura 5 ilustra um ressoador dielétrico cilíndrico de raio a e de altura $2h$ com constante dielétrica ϵ_{rd} isolado no espaço livre (vácuo), cuja permissividade elétrica vale ϵ_0 . É indicado também o sistema de coordenadas cilíndricas $\rho\phi z$, normalmente adotado para a análise do referido ressoador, cuja origem se situa no centro de simetria da estrutura.

Figura 5 — Ressorador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Conforme já introduzido anteriormente, o ressoador dielétrico é uma estrutura que opera em modos ressonantes. Cada um desses modos possui uma frequência de ressonância e uma distribuição de campo eletromagnético específicas, as quais dependem das seguintes características do ressoador: tamanho, formato geométrico, material e ambiente de operação.

Os modos ressonantes do ressoador dielétrico cilíndrico podem ser divididos em três tipos: transversal elétrico (TE), transversal magnético (TM) e híbrido (HEM). Os modos TE são aqueles cuja componente de campo elétrico em z (direção axial) é nula, mas a componente de campo magnético na mesma direção não é nula. Os modos TM têm como nula a componente de campo magnético em z , sendo a componente de campo elétrico nessa direção diferente de zero. Os modos HEM possuem componentes não

nulas de campos elétrico e magnético em z . Este último tipo de modo ressonante não existe em cavidades ressonantes metálicas e pode ser visto matematicamente como uma combinação de modos TE e TM¹⁶.

Cada modo ressonante possível em um ressoador dielétrico cilíndrico é identificado por quatro parâmetros: tipo (TE, TM ou HEM), índice angular m , índice radial n e índice axial l . A notação para representar tais modos, recomendada pelo Institute of Radio Engineers (IRE)²³, hoje Institute of Electrical and Electronic Engineers (IEEE), utiliza a forma abreviada do tipo de modo seguida dos índices subscritos angular, radial e axial, respectivamente, nas seguintes formas: TE_{mnl} , TM_{mnl} e HEM_{mnl} . Exemplos de modo ressonante do ressoador dielétrico cilíndrico são os modos $TE_{01\delta}$, $TM_{01\delta}$, $HEM_{11\delta}$, $HEM_{12\delta}$ e $HEM_{211+\delta}$.

O parâmetro m é um número natural que corresponde à ordem do modo ressonante em relação a ϕ (direção angular), indicando o número de ciclos senoidais que o campo eletromagnético completa ao longo de ϕ .

O parâmetro n refere-se à ordem do modo ressonante em relação a ρ (direção radial). É um número inteiro positivo que representa a quantidade de oscilações exibidas pelo campo eletromagnético ao longo de ρ dentro do ressoador.

O parâmetro l denota a ordem do modo ressonante em relação a z e é um número real positivo dado por

$$l = p + \delta \quad (23)$$

onde p e δ são, respectivamente, suas partes inteira e fracionária, sendo p um número natural, e δ um número real positivo menor do que a unidade. O número l denota quantos ciclos de meia senoide o campo eletromagnético apresenta ao longo de z internamente ao ressoador. Diferentemente das cavidades ressonantes metálicas cilíndricas, o parâmetro l não é inteiro porque não há condição de contorno que imponha a anulação de componentes de campo eletromagnético nas superfícies planas do ressoador. Quanto maior a constante dielétrica do ressoador, mais o valor de δ se aproxima da unidade¹⁶, dado que a parede magnética passa a ser cada vez mais uma melhor aproximação para esse caso.

Adicionalmente, os modos HEM não admitem valores nulos de m , ao passo que m vale sempre zero para os modos TE e TM, como pode ser visto nos exemplos de modo

ressonante citados anteriormente. Essa e algumas outras propriedades dos modos ressonantes do ressoador dielétrico cilíndrico podem ser adequadamente explicadas pelo modelo matemático apresentado na seção 6.

As distribuições de campo eletromagnético no ressoador dielétrico cilíndrico ao longo de ρ e de ϕ são aproximadamente as mesmas das encontradas em uma seção transversal do guia de ondas dielétrico circular^{15, 16}. Neste último tipo de estrutura, o campo eletromagnético ao longo de ρ varia de acordo com funções de Bessel de primeira espécie (função com caráter oscilatório), para $\rho \leq a$, e com funções de Bessel modificadas de segunda espécie (função com caráter evanescente), para $\rho \geq a$; ao longo de ϕ , o campo varia senoidalmente. No ressoador dielétrico cilíndrico, a variação do campo eletromagnético ao longo de z é aproximadamente senoidal, para $-h \leq z \leq h$, e de acordo com exponenciais decrescentes, para $z \leq -h$ e para $z \geq h$.

Ilustrações das distribuições vetoriais de campo eletromagnético dos quatro modos ressonantes de ordem mais baixa do ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre são mostradas nas Figuras 6 e 7.

Figura 6 — Distribuições vetoriais de campo eletromagnético no ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre: modos (a) TE_{010} , (b) TM_{010} , (c) HEM_{110} e (d) HEM_{120}

Fonte: adaptado de Luk e Leung¹⁰

Figura 7 — Distribuições vetoriais de campo eletromagnético em cortes transversais do ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre: modos (a) $TE_{01\delta}$, (b) $TM_{01\delta}$, (c) $HEM_{11\delta}$ e (d) $HEM_{12\delta}$

Fonte: adaptado de Kajfez e Guillon¹⁶

O modo fundamental (o de frequência de ressonância mais baixa) do ressoador dielétrico cilíndrico depende de suas dimensões geométricas, de seu material e de seu ambiente de operação e é, em geral, ou o modo $TE_{01\delta}$ ou o $HEM_{11\delta}$.

Como exposto anteriormente, não existe solução matemática analítica exata para a análise do ressoador dielétrico cilíndrico. Por esse motivo, vários pesquisadores propuseram métodos aproximados para a determinação de frequências de ressonância nesse tipo de estrutura.

Alguns desses métodos, como os propostos por Yee²⁴, por Cohn¹⁴, por Guillon e Garault²⁵ e por Long, McAllister e Shen²⁶, utilizam a parede magnética como uma aproximação para a condição de contorno de interface entre materiais dielétricos.

Outros, como os apresentados por Konishi, Hoshino e Utsumi²⁷, por Itoh e Rudokas²¹ e por Pospieszalski²⁸, não impõem esse tipo de aproximação, mas assumem determinadas distribuições de campo eletromagnético no ressoador, baseadas nas soluções genéricas da equação vetorial de Helmholtz em coordenadas cilíndricas (funções senoidais, exponenciais, de Bessel e modificadas desta).

Os métodos propostos por Jaworski e Pospieszalski²⁹ e por Tsuji, Shigesawa e Takiyama³⁰ computam o campo eletromagnético no ressoador como expansões em

série que teoricamente levam à solução exata do problema quando todos os infinitos termos das séries são considerados.

Glisson, Kajfez e James³¹ propuseram uma formulação integral que utiliza o método dos momentos — *method of moments* (MoM) — sobre um domínio geométrico discretizado em ressoadores com simetria axial. Essa abordagem numérica rigorosa também conduz teoricamente a resultados exatos quando a estrutura analisada é dividida geometricamente em elementos infinitesimais.

Dos métodos citados, os de solução numérica mais simples^{14, 21, 24, 26} têm precisão limitada, com erros que podem chegar a mais de 10% em relação a dados experimentais. Os métodos que exigem uma implementação computacional relativamente mais complexa^{25, 29, 30, 31} levam a resultados mais precisos, embora requeiram tempos maiores para a determinação de frequências de ressonância.

Para fins práticos de projeto de circuitos de micro-ondas e de antenas, estudiosos da área desenvolveram expressões aproximadas e simplificadas para o cálculo da frequência de ressonância dos modos ressonantes de ordem mais baixa do ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre^{8, 10, 11, 32}. Essas fórmulas foram concebidas por meio de extensiva simulação eletromagnética seguida da aplicação de técnicas matemáticas de ajuste de curva. O intuito dessas expressões é facilitar e agilizar o processo de computação da frequência de ressonância desses modos fornecendo ao mesmo tempo uma precisão aceitável para determinadas faixas de constante dielétrica e de razão de aspecto $a/(2h)$ do ressoador.

A seguir, são apresentadas as fórmulas fornecidas por Luk e Leung¹⁰ para a frequência de ressonância dos modos $TE_{01\delta}$, $TM_{01\delta}$, $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$, denotadas por $f_0^{(TE01\delta)}$, $f_0^{(TM01\delta)}$, $f_0^{(HEM11\delta)}$ e $f_0^{(HEM12\delta)}$, respectivamente:

$$f_0^{(TE01\delta)} = \frac{2,22 \cdot 10^7 \text{ m/s}}{a} \left[1 + 0,308 \frac{a}{2h} + 0,127 \left(\frac{a}{2h} \right)^2 - 0,0895 \left(\frac{a}{2h} \right)^3 \right] \epsilon_{rd}^{-0,475} \quad (24)$$

$$f_0^{(TM01\delta)} = \frac{4,27 \cdot 10^7 \text{ m/s}}{a} \left[1 + 3,02 \left(\frac{a}{2h} \right)^{0,881} + e^{0,962 \left(1 - 1,69 \frac{a}{2h} \right)} \right] \epsilon_{rd}^{-0,45} \quad (25)$$

$$f_0^{(HEM11\delta)} = \frac{2,98 \cdot 10^7 \text{ m/s}}{a} \left[1 + 0,321 \frac{a}{2h} + 0,87 \left(\frac{a}{2h} \right)^2 - 0,359 \left(\frac{a}{2h} \right)^3 + 0,055 \left(\frac{a}{2h} \right)^4 \right] \epsilon_{rd}^{-0,42} \quad (26)$$

$$f_0^{(HEM_{12\delta})} = \frac{1,28 \cdot 10^7 \text{ m/s}}{a} \left[1 + 0,12 \frac{a}{2h} + 0,06 \left(\frac{a}{2h} \right)^2 + 0,014 \left(\frac{a}{2h} \right)^3 - 0,712 e^{-1,25 \frac{a}{2h} \left(1 + 4,7 \frac{a}{2h} \right)} \right] \epsilon_{rd}^{-0,5} \quad (27)$$

Segundo Luk e Leung¹⁰, as expressões dadas pelas eq. (24)–(27) são válidas para uma ampla faixa de constante dielétrica, embora a mesma não tenha sido especificada. Adicionalmente, essas fórmulas consideram uma perda dielétrica nula para o ressonador dielétrico cilíndrico e, portanto, devem ser utilizadas para ressoadores feitos com material que apresenta baixa tangente de perda.

2.1.3 Radiação

Em aplicações tradicionais como filtros e osciladores de micro-ondas, os ressoadores dielétricos são utilizados como componentes armazenadores de energia eletromagnética, conforme já mencionado. Nessas aplicações, perdas — sejam elas dielétricas, condutivas ou por radiação — são indesejadas por causarem uma degradação da resposta desses circuitos.

A perda por radiação, além da perda dielétrica, é inerente aos ressoadores dielétricos¹³, razão pela qual caixas eletromagneticamente blindadas são utilizadas para acomodar esses circuitos, como exposto anteriormente.

Quando os ressoadores dielétricos operam sem blindagem eletromagnética, sua perda por radiação ocasiona uma redução de seu índice de mérito. Nessa condição, a perda por radiação é geralmente dominante sobre as outras, de forma que é válida a relação

$$Q \approx Q_r = \omega_0 \frac{W_s}{P_r} = 2\pi f_0 \frac{W_s}{P_r} \quad (28)$$

A eq. (28) pode ser calculada com o auxílio de^{15, 18, 20}

$$W_s = \frac{1}{4} \iiint_V \epsilon |\mathbf{E}|^2 dv + \frac{1}{4} \iiint_V \mu |\mathbf{H}|^2 dv \quad (29)$$

onde V representa o volume total (o ressonador dielétrico e seu entorno), e de^{15, 18, 20}

$$P_r = \frac{1}{2} \iint_S \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{s} \quad (30)$$

onde S é uma superfície fechada que envolve completamente o ressoador dielétrico.

Na condição em que o ressoador dielétrico se encontra na origem de um sistema de coordenadas esféricas $\rho\theta\phi$, e as componentes de campo eletromagnético tomadas para cálculo situam-se na região de campo distante do ressoador, no espaço livre, pode-se utilizar alternativamente a expressão³³

$$P_r \approx \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho^2}{2\eta_0} \left(|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 \right) \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (31)$$

onde E_θ e E_ϕ são, respectivamente, as componentes do vetor campo elétrico complexo nas direções θ e ϕ do sistema de coordenadas esféricas $\rho\theta\phi$. A impedância intrínseca do vácuo η_0 é dada por

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (32)$$

onde μ_0 se refere à permeabilidade magnética do vácuo.

Também podem ser encontradas na literatura técnica^{8, 10, 11, 32} fórmulas aproximadas e simplificadas para o índice de mérito devido à perda por radiação do ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre.

Van Bladel³⁴ publicou em 1974 um estudo no qual analisou propriedades dos modos ressonantes de ressoadores dielétricos com formato arbitrário compostos de material de alta constante dielétrica sem perda dielétrica, isolados no espaço livre. Nesse trabalho, ele investigou também o comportamento geral da distribuição de campo eletromagnético e da radiação nessas estruturas.

Uma conclusão notável desse estudo consiste no fato de que é possível obter, sem a necessidade de cálculos extensivos, uma avaliação preliminar sobre o diagrama de radiação de ressoadores dielétricos com formato arbitrário isolados no espaço livre⁸.

De acordo com a teoria desenvolvida por Van Bladel³⁴, os modos ressonantes dos ressoadores dielétricos podem ser classificados em dois tipos: os confinados e os não confinados.

Para os modos confinados, toda a superfície externa de um ressonador dielétrico atua aproximadamente como uma parede magnética, onde são válidas as eq. (21) e (22). O campo eletromagnético desses modos permanece, em sua maior parte, dentro do ressonador e em sua proximidade imediata³⁴. Os modos confinados podem existir apenas em ressonadores dielétricos cuja geometria é um corpo de revolução³⁴.

Nos modos não confinados, a condição de parede magnética não é obedecida em toda a superfície externa do ressonador dielétrico, e o campo eletromagnético espalha-se ao redor do mesmo³⁴. Na realidade, apenas a condição dada pela eq. (22) é obedecida na superfície externa do ressonador³⁴.

Segundo Van Bladel^{8, 34}, os modos ressonantes confinados de ordem mais baixa devem radiar como um dipolo elétrico, enquanto os modos não confinados de ordem mais baixa devem radiar como um dipolo magnético. Exemplos de modos ressonantes confinados e não confinados são, respectivamente, os modos $TM_{01\delta}$ e $TE_{01\delta}$ do ressonador dielétrico cilíndrico⁸.

Verifica-se que essa previsão de Van Bladel condiz com o que de fato ocorre no ressonador dielétrico⁸ cilíndrico e é suportada por evidências experimentais e teóricas e por resultados de simulação eletromagnética. O diagrama de radiação dos quatro modos ressonantes de ordem mais baixa do ressonador dielétrico cilíndrico pode ser aproximado por um dipolo curto equivalente elétrico ou magnético, em uma das configurações ilustradas na Figura 8^{8, 10}.

Figura 8 — Dipolos radiantes equivalentes para o ressonador dielétrico cilíndrico: modos (a) $TE_{01\delta}$, (b) $TM_{01\delta}$, (c) $HEM_{11\delta}$ e (d) $HEM_{12\delta}$

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Por fim, é válido mencionar que alguns modelos matemáticos para ressonadores dielétricos, como os propostos por Cohn¹⁴ e por Itoh e Rudokas²¹, impõem no exterior do ressonador distribuições de campo eletromagnético descritas por funções

matemáticas com caráter evanescente em vez daquelas que representam radiação. Nesses modelos, o ressoador dielétrico não radia, o que em tese contrariaria o princípio de que esse tipo de estrutura é inerentemente radiante¹³. Todavia, deve-se salientar que se tratam apenas de modelos matemáticos, os quais geralmente apresentam limitações. Nos modelos mencionados, não é possível obter de forma direta o diagrama de radiação nem o índice de mérito dos modos ressonantes do ressoador. Entretanto, podem ser empregados para essa tarefa métodos alternativos, tais como o utilizado por Long, McAllister e Shen²⁶, que substitui o campo eletromagnético sobre a superfície externa do ressoador dielétrico por densidades de corrente superficiais equivalentes, por meio das quais o campo radiado é calculado.

2.2 ANTENAS DE RESSOADOR DIELÉTRICO

Em 1983, Long, McAllister e Shen publicaram um artigo pioneiro²⁶, no qual demonstraram pela primeira vez um ressoador dielétrico empregado como o radiador de uma antena. Nesse caso, a perda por radiação do ressoador dielétrico, que era tida como indesejada para as aplicações tradicionais até então, foi usada na concepção de outro tipo de dispositivo.

Verificou-se assim que os ressoadores dielétricos podem ser úteis também como radiadores de onda eletromagnética, podendo ser utilizados em antenas. A partir de então, as antenas de ressoador dielétrico começaram a ser investigadas mais extensivamente.

As antenas de ressoador dielétrico são constituídas por um ressoador dielétrico normalmente colocado sobre um plano de terra metálico ou sobre um substrato dielétrico aterrado. Exemplos de antena de ressoador dielétrico podem ser vistos na Figura 1.

O ressoador pode, a princípio, assumir qualquer formato geométrico e é teoricamente capaz de produzir radiação eletromagnética isoladamente sem a presença de um plano de terra ou de um substrato dielétrico aterrado¹³. Apesar disso, a utilização destes constitui uma montagem prática e conveniente para circuitos e antenas que operam em frequências de micro-ondas. Nessas aplicações, emprega-se geralmente um substrato dielétrico aterrado sobre o qual são montados diversos elementos de circuito, tais como linhas de transmissão e componentes eletrônicos passivos e ativos.

Especificamente em antenas de micro-ondas, a utilização de um plano de terra sem substrato dielétrico é possível. O plano de terra pode ser conveniente para a instalação de estruturas de alimentação, como conectores, e pode servir ainda como refletor de radiação eletromagnética.

As antenas de ressonador dielétrico podem encontrar aplicação tanto nas frequências iniciais do espectro das micro-ondas quanto nas frequências mais altas deste.

Quando compostas de material de alta constante dielétrica, as antenas de ressonador dielétrico podem apresentar dimensões geométricas consideravelmente reduzidas, o que é apropriado para aplicação no início da faixa de frequência de micro-ondas.

Nas frequências mais elevadas do espectro das micro-ondas, as antenas de ressonador dielétrico normalmente exibem uma baixa perda condutiva¹⁰, o que leva a uma eficiência de radiação elevada e as torna atrativas para o uso nessas frequências.

Dado que o radiador desse tipo de antena é geralmente feito com material de baixa perda dielétrica, as antenas de ressonador dielétrico têm perdas tipicamente reduzidas tanto nas frequências superiores da faixa de micro-ondas quanto nas inferiores desta.

Como discutido anteriormente, os ressonadores dielétricos podem apresentar diversos modos ressonantes com características distintas entre si, o que viabiliza a obtenção de antenas com diferentes formatos de diagrama de radiação e com variados tipos de polarização.

No entanto, o principal entrave para uma ampla utilização desse tipo de antena é sua complexidade de fabricação, geralmente superior à de vários outros tipos de antena comercialmente disponíveis. Ainda nos dias atuais, essa limitação é objeto de investigação para estudiosos da área. As dificuldades de fabricação englobam métodos tanto de confecção do radiador³⁵⁻³⁷ quanto de montagem do mesmo sobre um plano de terra ou sobre um substrato dielétrico aterrado³⁸⁻³⁹, envolvendo problemas como o alinhamento e a adesão do radiador sobre sua superfície de apoio e o acoplamento mecânico entre o ressonador dielétrico e sua estrutura de excitação.

De forma semelhante ao que ocorre para os ressonadores dielétricos, o estudo analítico rigoroso das antenas de ressonador dielétrico é, em geral, matematicamente complexo, e somente as antenas de ressonador dielétrico hemisférica⁴⁰ e semitoroidal sobre plano de terra possuem solução matemática analítica exata¹⁸. Portanto, como já exposto antes, se faz necessário recorrer a modelos matemáticos aproximados para obter

soluções matemáticas mais simples e aplicáveis ao projeto de antenas de ressoador dielétrico.

No entanto, quando se deseja obter resultados mais precisos e calcular determinados parâmetros, tais como impedância de entrada e alteração de despenho devido à estrutura de excitação, técnicas numéricas são empregadas, sendo executadas com o auxílio de um computador.

Mesmo assim, alguns modelos matemáticos aproximados para antenas de ressoador dielétrico mostram-se úteis para o entendimento conceitual de seu funcionamento.

Devido a sua simplicidade geométrica, as antenas de ressoador dielétrico mais comumente utilizadas são a cilíndrica²⁶ e, em seguida, a retangular⁴¹. A antena de ressoador dielétrico cilíndrica é abordada a seguir.

2.2.1 Antena cilíndrica

A Figura 9 ilustra antenas de ressoador dielétrico cilíndricas construídas sobre um plano de terra e sobre um substrato dielétrico aterrado, cuja constante dielétrica é denotada por ϵ_{rs} , juntamente com o sistema de coordenadas cilíndricas $\rho\phi z$ usualmente adotado.

Figura 9 — Antena de ressoador dielétrico cilíndrica: (a) sobre plano de terra e (b) sobre substrato dielétrico aterrado

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

A antena mostrada na Figura 9(a) corresponde à estrutura proposta e analisada inicialmente por Long, McAllister e Shen²⁶. Para tal análise, esses autores utilizam um modelo matemático de primeira ordem que considera um cilindro de material dielétrico sem perdas situado sobre um plano de terra de material condutor elétrico perfeito, sendo o conjunto todo imerso no vácuo.

Nesse modelo, as superfícies superior e lateral do ressoador dielétrico cilíndrico são consideradas paredes magnéticas, enquanto a superfície inferior do mesmo é considerada uma parede elétrica.

Apesar de possuir uma solução matemática analítica exata, que fornece expressões algébricas simples e prontamente utilizáveis no projeto de antenas de ressoador dielétrico cilíndricas, esse modelo de primeira ordem possui uma limitação em relação à precisão de resultado. Essa limitação torna-se mais evidente em antenas que usam um radiador feito com material dielétrico de baixa constante dielétrica. Nessa situação, a condição de parede magnética não constitui uma boa representação física para a interface entre material dielétrico e ar. Isso resulta em uma imprecisão nos cálculos do campo eletromagnético dos modos ressonantes da antena e de sua frequência de ressonância. Além disso, esse modelo não prevê modos ressonantes híbridos, o que seria desejável do ponto de vista do entendimento conceitual da antena.

Todavia, os modelos matemáticos para o ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre, assim como as técnicas de análise para esse tipo de estrutura, podem ser utilizados para analisar e projetar antenas de ressoador dielétrico cilíndricas sobre plano de terra e podem conduzir a resultados mais precisos em comparação aos alcançáveis por meio do modelo de primeira ordem mencionado.

Se a antena de ressoador dielétrico cilíndrica for construída sobre um plano de terra feito com material de elevada condutividade elétrica, pode-se dizer que o mesmo atua aproximadamente como uma parede elétrica, onde são válidas as eq. (19) e (20). Ainda, considerando-se esse plano de terra suficientemente grande, a teoria da imagem^{15, 18, 20} pode ser utilizada para analisar a referida antena. Com isso, o estudo desse tipo de antena beneficia-se dos resultados da análise do ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre.

Pela teoria da imagem, a antena exibida na Figura 9(a) corresponde a um ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre com o mesmo raio do radiador dessa antena, mas com o dobro da altura deste. Os modos ressonantes suportados por ela equivalem a todos aqueles do referido ressoador que satisfazem a condição de parede elétrica no plano transversal que o divide pela metade.

Por exemplo, os modos $TM_{01\delta}$ e $HEM_{11\delta}$ do ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre, cuja distribuição de campo eletromagnético é ilustrada nas Figuras 6(b),

6(c), 7(b) e 7(c), obedecem à condição de parede elétrica no plano transversal que o reparte ao meio. Dessa forma, a distribuição de campo eletromagnético de cada um desses modos em qualquer um dos semiespaços limitados pelo referido plano constitui um modo ressonante da antena. A frequência de ressonância desses modos pode ser calculada por meio das eq. (25) e (26), considerando-se um ressoador com o mesmo raio do radiador da antena, mas com o dobro da altura deste. Devido a essa analogia, é conveniente denotar a altura do radiador da antena de ressoador dielétrico cilíndrica somente por h , em vez de $2h$, como apresentado na Figura 9. Adotando-se essa definição, as eq. (25) e (26) podem ser utilizadas diretamente sem alterações.

Observa-se ainda que, devido à utilização de um plano de terra, a antena de ressoador dielétrico cilíndrica sobre plano de terra tem seu volume reduzido pela metade em relação ao ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre. O diagrama de radiação dessa antena é idêntico ao do referido ressoador em um dos semiespaços limitados pelo plano de simetria transversal deste, sendo nulo no outro semiespaço. Isso ocorre porque o plano de terra atua como uma blindagem eletromagnética.

A antena de ressoador dielétrico cilíndrica sobre substrato dielétrico aterrado, apresentada na Figura 9(b), teoricamente admite todos os modos ressonantes do ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre. Porém, a presença do substrato dielétrico aterrado provoca uma distorção na distribuição de campo eletromagnético dos modos da antena e um deslocamento da frequência de ressonância dos mesmos, bem como alterações em suas características de radiação. A espessura do substrato e sua constante dielétrica são fatores que influenciam diretamente essas alterações.

Por fim, a banda de impedância fracionária BW das antenas de ressoador dielétrico pode ser calculada por meio de⁸:

$$BW = \frac{SWR_{max} - 1}{Q\sqrt{SWR_{max}}} \quad (33)$$

tal que

$$SWR_{max} = \frac{1 + \Lambda_{max}}{1 - \Lambda_{max}} \quad (34)$$

onde SWR_{max} e Λ_{max} são, respectivamente, os valores máximos definidos de taxa de onda estacionária de tensão e de módulo de coeficiente de reflexão de tensão (em

relação à impedância característica de referência Z_0 , usualmente 50Ω , que é o valor adotado neste trabalho), tomados dentro da banda de impedância.

Alternativamente, pode-se utilizar a definição de perda de retorno mínima RL_{min} :

$$RL_{min} = -20 \log(\Lambda_{max}) \quad (35)$$

Nesta tese, a banda de impedância é definida como a faixa de frequência na qual a perda de retorno é igual ou superior a 10 dB.

Na eq. (33), é importante ressaltar que Q leva em consideração toda a estrutura da antena, incluindo o plano de terra ou o substrato dielétrico.

2.2.2 Métodos convencionais de excitação

A estrutura de excitação é um item fundamental nas antenas de ressoador dielétrico. Trata-se de uma transição entre linha de transmissão de entrada (linha de alimentação) e estrutura radiante (radiador) que deve prover um mecanismo eficiente de transferência de energia eletromagnética entre as mesmas.

A forma como uma antena de ressoador dielétrico é excitada é um dos fatores que determinam qual ou quais de seus possíveis modos ressonantes são eficientemente excitados. Mais especificamente, o tipo de estrutura de excitação, sua localização de inserção e sua orientação espacial devem ser escolhidos de maneira a favorecer a excitação dos modos ressonantes desejados: a estrutura de excitação deve ser condizente com a orientação e intensidade do campo eletromagnético desses modos.

São três os tipos de estrutura de excitação comumente empregados em antenas de ressoador dielétrico: sonda coaxial^{10, 11, 26, 42, 43}, linha de transmissão planar^{10, 11, 44} e abertura^{10, 11, 45–47}.

A Figura 10 apresenta antenas de ressoador dielétrico excitadas por sonda coaxial.

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

A excitação por sonda coaxial emprega um conector coaxial cujo condutor externo é apoiado sobre uma face do plano de terra da antena, sendo conectado galvanicamente à referida face. O condutor interno desse conector prolonga-se e atravessa o plano de terra e o substrato dielétrico, se este existir, formando um pino vertical saliente (sonda coaxial) na face oposta do plano de terra, sobre a qual o ressoador dielétrico é apoiado. Esse pino pode estar posicionado dentro do ressoador ou situado externamente nas proximidades do mesmo, conforme mostra a Figura 10. Observa-se que a região do plano de terra ao redor da sonda coaxial deve ser removida de maneira a criar uma região de isolamento que evite um curto-circuito entre essas partes.

O comprimento da sonda coaxial e sua localização de inserção na antena controlam o acoplamento eletromagnético e o casamento de impedância entre o ressoador dielétrico e a linha de alimentação coaxial. A sonda coaxial é normalmente usada para excitar os modos $HEM_{11\delta}$ e $TM_{01\delta}$, como tratado mais adiante neste documento.

A literatura técnica⁴³ apresenta uma antena de ressoador dielétrico cilíndrica sobre plano de terra feita com material dielétrico de constante dielétrica $\epsilon_{rd} = 8$ e excitada no modo $HEM_{11\delta}$ por uma sonda coaxial. Essa antena exibe uma banda de impedância fracionária de 44,9%, significativamente superior ao que seria tipicamente alcançado por uma antena de microfita circular construída com mesmo material dielétrico.

A excitação por linha de transmissão planar é ilustrada na Figura 11.

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Nesse tipo de excitação, uma linha de transmissão planar é construída sobre o substrato dielétrico da antena. O ressoador dielétrico pode estar apoiado diretamente sobre a linha ou localizado ao lado da mesma, conforme apresentado na Figura 11.

O acoplamento eletromagnético e o casamento de impedância entre o ressoador dielétrico e a linha de alimentação são controlados pelo comprimento da linha e por

sua posição de inserção na antena. Geralmente, emprega-se a linha de transmissão planar para excitar os modos $HEM_{11\delta}$ e $TE_{01\delta}$ ^{11, 16}.

É reportada na literatura técnica⁴⁴ uma antena de ressoador dielétrico cilíndrica sobre substrato dielétrico aterrado excitada no modo $HEM_{11\delta}$ por uma linha de microfita. O radiador e o substrato dessa antena são compostos de material dielétrico de constante dielétrica $\epsilon_{rd} = 20,8$ e $\epsilon_{rs} = 2,5$, respectivamente. A banda de impedância fracionária apresentada pela referida antena é de aproximadamente 3%, que é um valor considerável levando-se em conta a alta constante dielétrica do radiador.

A Figura 12 mostra uma antena de ressoador dielétrico excitada por abertura.

Figura 12 — Antena de ressoador dielétrico excitada por abertura

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Na excitação por abertura, o ressoador dielétrico é apoiado sobre uma abertura (fenda) inserida no plano de terra de uma linha de transmissão planar. Essa abertura permite o acoplamento de campo eletromagnético entre a linha e o ressoador.

O casamento de impedância e o acoplamento eletromagnético entre o ressoador dielétrico e a linha de alimentação são controlados pelos parâmetros da abertura (posição, formato e tamanho) e da linha de alimentação (posição e comprimento). A abertura é comumente usada para excitar o modo $HEM_{11\delta}$ ^{11, 45–47}.

A excitação por abertura provê uma isolamento eletromagnético entre a linha de alimentação e o ressoador dielétrico, devido à presença do plano de terra entre esses dois elementos. Isso minimiza interferências de radiação eletromagnética provenientes da linha de alimentação e proporciona uma maior independência entre os projetos desta e do ressoador dielétrico. No entanto, esse método de excitação exige técnicas de fabricação de circuitos de dupla face e procedimentos de montagem que garantam o alinhamento do ressoador sobre a abertura.

Uma antena de ressoador dielétrico cilíndrica sobre plano de terra excitada no modo HEM_{110} por abertura é mostrada na literatura técnica⁴⁷. Essa antena exibe 5,5% de banda de impedância fracionária e utiliza um substrato dielétrico aterrado feito com material de constante dielétrica $\epsilon_{rs} = 10,2$, sobre o qual são gravadas uma linha de microfita e uma abertura retangular. O ressoador possui constante dielétrica $\epsilon_{rd} = 10,8$. Observa-se que os dois últimos tipos de estrutura de excitação abordados são de fácil integração com circuitos planares de micro-ondas, uma vez que empregam linhas de transmissão planares em sua composição.

2.2.3 Técnicas de melhoria ou alteração de desempenho

Quando concebidas em sua forma mais simples e tradicional, as antenas de ressoador dielétrico geralmente apresentam características típicas, tais como banda de operação única com largura fracionária que varia de algumas unidades até algumas dezenas de porcentagem, polarização linear, ganho mediano (em torno de 6 dB) e diagrama de radiação direcional.

Entretanto, algumas aplicações de comunicação sem fio requerem antenas com especificações diferentes das apresentadas por essas antenas na forma convencional. Por isso, vários estudos foram e ainda vêm sendo desenvolvidos com o intuito de obter características melhoradas ou diferentes para as antenas de ressoador dielétrico, como, por exemplo, banda de operação alargada, operação em múltiplas faixas de frequência, polarização circular e alto ganho. Esses tópicos têm gerado novas publicações científicas na área de antenas de ressoador dielétrico até os dias atuais.

Verifica-se que várias técnicas de projeto utilizadas em tipos clássicos de antena se mostram aplicáveis para as antenas de ressoador dielétrico. Por exemplo, a banda de impedância desse tipo de antena pode ser alargada diminuindo-se a constante dielétrica do material dielétrico utilizado pelo radiador^{10, 11}, alterando-se o formato geométrico deste^{9, 26, 32, 35, 40, 41, 48–50} ou suas proporções^{43, 51} ou ainda se escolhendo um método alternativo de excitação^{9–11, 26, 42–47}, estratégias que também são empregadas em antenas de microfita e em outros tipos de antenas planares⁵².

A utilização de um radiador multicamada é uma estratégia que pode ser utilizada tanto para o alargamento da banda de impedância^{9–11, 50, 53, 54} quanto para a obtenção de múltiplas bandas de operação^{50, 54}. Esses comportamentos normalmente são obtidos

por meio da excitação de um modo ressonante em cada camada do radiador. Semelhantemente, a excitação de vários modos ressonantes em um radiador único e uniforme também pode levar a esses efeitos⁵⁵⁻⁵⁷.

Uma técnica de projeto que pode ser usada para alterar o formato do diagrama de radiação^{8, 10, 57} ou para obter um ganho mais elevado^{58, 59} é a excitação de um modo ressonante diferente do fundamental. Um ganho mais alto também pode ser obtido com a utilização de um conjunto de antenas de ressoador dielétrico^{9, 50, 60, 61}.

Para a obtenção de polarização circular, podem ser utilizados um formato de radiador modificado para tal^{9-11, 62, 63}, uma estrutura de excitação única modificada^{9-11, 50, 64}, uma estrutura de excitação múltipla^{9, 50, 65} ou radiadores múltiplos^{9, 11}.

Um único ou múltiplos elementos parasitas, tais como fita^{10, 11, 66} ou plaqueta metálicas^{10, 11, 67} parasitas aderidas sobre a superfície do radiador, fenda parasita no plano de terra^{11, 68} ou ressoador dielétrico parasita^{11, 50, 69}, podem ocasionar alargamento de banda^{10, 11, 66, 69} ou polarização circular^{10, 11, 66-68}.

É possível reduzir o tamanho de uma antena de ressoador dielétrico por meio do aumento da constante dielétrica do radiador^{8-11, 50}, de um revestimento metálico parcial sobre sua superfície^{9, 11, 50, 70} ou de um ou mais cortes seccionais no referido radiador, com ou sem revestimento metálico sobre a face de corte^{9, 11, 50, 70}.

As estratégias mencionadas permitem obter, por exemplo, banda ultralarga⁷¹, ganho acima de 10 dB^{58, 60} e tamanho reduzido em 75%⁷⁰.

Observa-se que algumas das técnicas citadas podem prover um considerável ganho de desempenho, porém a custo da necessidade de métodos de fabricação mais complexos.

As técnicas de projeto apresentadas aqui não constituem uma lista exaustiva de todas as que existem para melhorar ou alterar o desempenho de antenas de ressoador dielétrico, mas ilustram a flexibilidade que estas vêm exibindo desde sua concepção.

3 METODOLOGIA DE PROJETO PARA ANTENAS DE BANDA DUPLA

Conforme exposto anteriormente, as antenas de ressoador dielétrico dispõem de uma flexibilidade ímpar para o projeto de antenas de banda dupla: a princípio, uma antena de ressoador dielétrico com radiador único de geometria simples pode ser projetada para operação em duas bandas com frequência central arbitrária, havendo ainda possibilidades de escolha para os tipos de polarização e de diagrama de radiação exibidos pela antena em cada uma das referidas bandas. Isso se deve aos vários modos ressonantes com características diversas que podem ser excitados na prática em antenas de ressoador dielétrico.

Com base nos princípios teóricos apresentados na seção 2, essa flexibilidade foi identificada, e uma metodologia de projeto foi criada neste trabalho para antenas de ressoador dielétrico de banda dupla, a qual é ilustrada na Figura 13.

Figura 13 — Metodologia de projeto para antenas de ressoador dielétrico de banda dupla

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

A metodologia de projeto proposta, cujas etapas são abordadas detalhadamente na presente seção, foi utilizada no desenvolvimento das antenas apresentadas nas seções 4 e 5. Embora tenha sido aplicado especificamente na síntese de antenas de ressoador dielétrico cilíndricas, o procedimento de projeto estabelecido também pode ser usado, após algumas modificações, no projeto de antenas de ressoador dielétrico que empregam radiador com um formato diferente do cilíndrico.

A metodologia de projeto desenvolvida é dividida em três conjuntos de etapas: concepção operacional, estruturação e dimensionamento e realização prática, conforme mostrado na Figura 13, as quais são detalhadas a seguir.

3.1 CONCEPÇÃO OPERACIONAL

A concepção operacional abrange as etapas de projeto relacionadas à idealização da antena, que incluem tópicos como a especificação do desempenho desejado, a determinação do modo de funcionamento e a seleção do tipo de estrutura física.

3.1.1 Especificações de projeto

A primeira etapa da metodologia de projeto consiste na definição das especificações de projeto, as quais compreendem as frequências centrais f_1 e f_2 , referentes às duas bandas de operação, e os tipos de polarização e de diagrama de radiação dentro de cada uma destas.

No caso da antena de ressonador dielétrico cilíndrica, são possíveis os diagramas de radiação direcional, com máxima radiação na direção paralela ao eixo axial do radiador, e omnidirecional. Com o diagrama de radiação direcional, são possíveis as polarizações linear, circular e elíptica. Por outro lado, somente a polarização linear pode ser realizada com o diagrama de radiação omnidirecional. O motivo da existência de tais possibilidades é apresentado a seguir.

3.1.2 Seleção dos modos ressonantes

Os modos ressonantes do radiador devem ser selecionados levando-se em consideração o desempenho especificado para a antena na etapa anterior.

Cada um dos quatro modos ressonantes de ordem mais baixa do ressonador dielétrico cilíndrico possui um diagrama de radiação equivalente ao produzido por um dipolo curto, conforme ilustrado na Figura 8.

Como já mencionado, a antena de ressonador dielétrico cilíndrica sobre plano de terra suporta os modos $TM_{01\delta}$ e $HEM_{11\delta}$, e o diagrama de radiação relativo a cada um desses modos ressonantes na antena corresponde à metade do diagrama de radiação

de seu dipolo equivalente, de acordo com a teoria da imagem. Sendo assim, os modos $TM_{01\delta}$ e $HEM_{11\delta}$ levam a antenas de ressonador dielétrico com radiação omnidirecional e direcional, respectivamente, como mostra a Figura 14.

Figura 14 — Tipos de diagrama de radiação da antena de ressonador dielétrico cilíndrica sobre plano de terra: modos (a) $TM_{01\delta}$ e (b) $HEM_{11\delta}$

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

A exemplo da Figura 14(a), observa-se que as ilustrações correspondentes a cortes de diagrama de radiação omnidirecional exibidas nesta tese referem-se todas a cortes em planos de radiação não isotrópica (planos de radiação direcional).

Em contrapartida, a antena de ressonador dielétrico cilíndrica sobre substrato dielétrico aterrado teoricamente suporta todos os quatro modos ressonantes de ordem mais baixa: os modos $TE_{01\delta}$, $TM_{01\delta}$, $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$. Conforme exposto anteriormente, o diagrama de radiação correspondente a cada um desses modos na antena difere do exibido pelo ressonador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre devido à presença do substrato dielétrico aterrado.

Com o intuito de obter ao menos uma avaliação preliminar sobre o tipo de diagrama de radiação gerado por esses modos ressonantes na antena, adota-se neste trabalho a seguinte aproximação: considera-se suficientemente grande e condutivo o plano de terra que reveste uma das faces do substrato dielétrico para que a teoria da imagem possa ser empregada. Assim, prevê-se com base nessa teoria que, dentro do semiespaço que é delimitado pelo plano de terra e contém o radiador, o diagrama de radiação relativo a cada modo ressonante é o resultado da soma das contribuições de seu dipolo equivalente e de sua imagem. No outro semiespaço, o diagrama de radiação é nulo.

Assumindo-se que a distância entre o dipolo equivalente e o plano de terra Δ é pequena, pode-se dizer que os modos $TE_{01\delta}$ e $TM_{01\delta}$ produzem radiação omnidirecional³³, enquanto os modos $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$ geram radiação direcional³³, conforme exibido na Figura 15.

Figura 15 — Tipos de diagrama de radiação da antena de ressonador dielétrico cilíndrica sobre substrato dielétrico aterrado: modos (a) $TE_{01\delta}$, (b) $TM_{01\delta}$ (c) $HEM_{11\delta}$ e (d) $HEM_{12\delta}$

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Portanto, quando o diagrama de radiação direcional é escolhido, deve ser utilizado o modo $HEM_{11\delta}$ ou o $HEM_{12\delta}$. No outro caso, deve-se empregar o modo $TE_{01\delta}$ ou o $TM_{01\delta}$.

A estratégia para a obtenção de polarização circular adotada nesta pesquisa consiste na excitação de dois modos ressonantes degenerados do tipo $HEM_{11\delta}$ ou $HEM_{12\delta}$, geometricamente ortogonais entre si e com uma defasagem relativa de campo eletromagnético de 90° . Os modos $TE_{01\delta}$ e $TM_{01\delta}$, que produzem radiação omnidirecional, são únicos, e, portanto, não é possível a existência de modos ressonantes degenerados desses tipos. Dessa forma, não se pode obter ao mesmo tempo polarização circular e diagrama de radiação omnidirecional.

A Tabela 2 sumariza as características de radiação que podem ser obtidas com a utilização dos modos ressonantes citados, baseadas na discussão realizada.

Tabela 2 — Características de radiação possíveis para os modos ressonantes de ordem mais baixa da antena de ressonador dielétrico cilíndrica

Característica de radiação	Modo $TE_{01\delta}$	Modo $TM_{01\delta}$	Modo $HEM_{11\delta}$	Modo $HEM_{12\delta}$
Diagrama omnidirecional	Sim	Sim	Não	Não
Diagrama direcional	Não	Não	Sim	Sim
Polarização linear	Sim	Sim	Sim	Sim
Polarização circular ou elíptica	Não	Não	Sim	Sim

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Normalmente, o modo fundamental da antena de ressonador dielétrico cilíndrica é o $HEM_{11\delta}$ ou o $TE_{01\delta}$, e o modo $HEM_{12\delta}$ possui uma frequência de ressonância superior à do $TM_{01\delta}$, a qual é usualmente acima da dos modos $HEM_{11\delta}$ e $TE_{01\delta}$. Portanto, considerando-se $f_1 < f_2$, deve-se ter o cuidado de selecionar o modo ressonante para f_1 e para f_2 de acordo com a ordem crescente de frequência de ressonância. Por exemplo, para uma antena que deve apresentar um diagrama de radiação direcional

em f_1 e omnidirecional em f_2 , devem ser escolhidos os modos $\text{HEM}_{11\delta}$ e $\text{TM}_{01\delta}$ em vez dos modos $\text{HEM}_{12\delta}$ e $\text{TE}_{01\delta}$.

Observa-se que modos ressonantes de ordem mais alta, tais como os modos $\text{HEM}_{21\delta}$ e $\text{TE}_{011+\delta}$, também podem ser empregados nas antenas de ressoador dielétrico cilíndricas, o que teoricamente estende suas possibilidades de projeto. Entretanto, optou-se por utilizar apenas os quatro modos ressonantes de ordem mais baixa devido às seguintes razões: eles são os mais estudados e experimentalmente demonstrados, e modos ressonantes de ordem elevada podem levar a um diagrama de radiação com lóbulos secundários múltiplos e conduzem a um tamanho maior de radiador para uma dada frequência de operação.

3.1.3 Escolha do tipo de configuração de antena

Os modos ressonantes selecionados são determinantes para a escolha do tipo de configuração de antena.

Como visto anteriormente, a antena de ressoador dielétrico cilíndrica sobre plano de terra admite somente os modos $\text{HEM}_{11\delta}$ e $\text{TM}_{01\delta}$. Portanto, se ao menos um dos modos $\text{TE}_{01\delta}$ ou $\text{HEM}_{12\delta}$ tiver sido selecionado, deve-se utilizar a configuração sobre substrato dielétrico aterrado. Caso contrário, é possível optar pelo emprego da configuração sobre plano de terra, a qual possui as vantagens de conduzir a um processo de cálculo mais simples para o radiador e de oferecer uma blindagem eletromagnética que isola o circuito de alimentação do radiador.

3.2 ESTRUTURAÇÃO E DIMENSIONAMENTO

A fase de estruturação e dimensionamento engloba as etapas de projeto que tratam da definição precisa da estrutura da antena e o cálculo de seus diversos parâmetros construtivos.

3.2.1 Cálculo do ressoador dielétrico

Estando escolhidos os modos ressonantes e a configuração de antena, os parâmetros do ressoador dielétrico podem ser calculados.

No ressoador dielétrico cilíndrico, esses parâmetros são: a constante dielétrica (ϵ_{rd}), o raio (a) e a altura (h).

Primeiramente, define-se a constante dielétrica. Ela deve ser escolhida com base em materiais existentes que forneçam um bom desempenho para o radiador nas frequências de operação da antena, ou seja, perdas reduzidas, elevada estabilidade térmica e baixa dispersão em frequência. A constante dielétrica não deve ser muito elevada a ponto de confinar demasiadamente o campo eletromagnético dentro do radiador, o que leva a uma banda de impedância estreita. Por outro lado, ela não deve ser muito baixa, já que usualmente se deseja uma antena de tamanho reduzido. São utilizadas comumente constantes dielétricas entre 5 e 30 para antenas de ressoador dielétrico. O próximo passo é calcular o raio do radiador cilíndrico e sua altura.

Para antenas de ressoador dielétrico cilíndricas sobre plano de terra, as eq. (25) e (26) podem ser utilizadas. Nesse caso, tem-se um sistema de duas equações não lineares que deve ser resolvido numericamente para as incógnitas a e h .

A frequência de ressonância dos modos ressonantes das antenas de ressoador dielétrico cilíndricas sobre substrato dielétrico aterrado depende dos parâmetros do substrato, que são a constante dielétrica (ϵ_{rs}) e a espessura (h_s). Recomenda-se que estes sejam escolhidos de forma a privilegiar o desempenho do circuito de alimentação da antena, ou seja, de maneira a otimizar suas dimensões geométricas e a suprimir a radiação produzida pelo mesmo.

Todavia, não há métodos conhecidos e comprovados que proporcionem o cálculo rápido, simples e preciso da frequência de ressonância de todos os quatro modos ressonantes de ordem mais baixa do ressoador dielétrico cilíndrico sobre substrato dielétrico aterrado.

Uma sugestão possível para o cálculo dos parâmetros do radiador é o uso de um método rigoroso de solução numérica, tal como o MoM ou o método dos elementos finitos — *finite element method* (FEM) —, em um processo iterativo que se inicia a partir de valores iniciais e converge para valores finais que levam à frequência de ressonância correta para cada modo ressonante escolhido. Porém, tal procedimento pode requerer a realização de numerosas iterações, demandando tempo e capacidade computacional para a obtenção de resultados com precisão satisfatória.

3.2.2 Projeto das estruturas de excitação

Para a excitação dos modos ressonantes desejados, deve-se inicialmente selecionar o tipo de estrutura de excitação adequado para os mesmos. Em seguida, o formato geométrico da estrutura escolhida bem como suas dimensões geométricas devem ser precisamente determinados de modo a garantir um casamento de impedância satisfatório entre o radiador e a linha de alimentação e a evitar a excitação de modos ressonantes indesejados.

No presente trabalho, essa tarefa é realizada com o auxílio de simulação eletromagnética.

3.2.3 Projeto do circuito de alimentação

O circuito de alimentação é o responsável por tratar o sinal de entrada da antena, garantindo que as estruturas de excitação recebam um sinal com características adequadas de frequência, de amplitude e de fase. Esse circuito pode conter diversos elementos, tais como linhas de transmissão, filtros, divisores de potência e acopladores.

Nesta pesquisa, o circuito de alimentação é projetado por meio de equações analíticas de linha de transmissão ideal e verificado utilizando-se simulação de modelo de circuito. Com a ajuda de simulação eletromagnética, o leiaute do circuito é desenhado, otimizado e verificado para implementação em tecnologia de microfita.

3.3 REALIZAÇÃO PRÁTICA

A realização prática compreende o conjunto das etapas de projeto experimentais com a subsequente validação do projeto da antena.

3.3.1 Fabricação de protótipo

A fabricação de um protótipo da antena projetada permite a comprovação experimental da configuração de antena proposta e da metodologia de projeto estabelecida.

Essa etapa envolve o processo de confecção do radiador, a construção das outras partes da antena e a montagem de todos seus componentes.

A fabricação de antenas de ressonador dielétrico geralmente exige a solução de diversos problemas de origem mecânica, tais como a confecção do radiador no formato geométrico adequado, a construção das estruturas de excitação, o acoplamento mecânico entre estas e o radiador e a aderência e o posicionamento do mesmo sobre o plano de terra ou sobre o substrato dielétrico aterrado.

Especificamente neste trabalho, o ressonador dielétrico foi obtido comercialmente já com as propriedades geométricas e de material requeridas.

Mais detalhes sobre os processos adotados para a construção das outras partes da antena e para a montagem de todos os componentes desta são discutidos diretamente nas seções 4 e 5, que abordam as antenas desenvolvidas na presente pesquisa.

3.3.2 Caracterização experimental

Os parâmetros mensuráveis que permitem avaliar o desempenho das antenas desenvolvidas são os parâmetros de espalhamento e o diagrama de radiação nas frequências de interesse. Os parâmetros de espalhamento medem-se por meio de um analisador de redes, enquanto o diagrama de radiação é obtido experimentalmente utilizando-se uma câmara anecoica blindada.

3.3.3 Validação de resultados

Como forma de confirmar a realização do objetivo deste trabalho, são confrontados os resultados medidos, os simulados e os previstos teoricamente. Esses resultados são comparados também com os exibidos por antenas de ressonador dielétrico reportadas recentemente na literatura técnica, o que permite apontar as vantagens das configurações de antena propostas e da metodologia de projeto concebida, bem como identificar os aspectos que ainda podem ser aprimorados nestas.

4 ANTENA SOBRE PLANO DE TERRA

A presente seção, bem como aquela que a sucede, apresenta e discute detalhadamente o desenvolvimento de uma antena de ressonador dielétrico de banda dupla, realizado empregando-se a metodologia de projeto elaborada nesta pesquisa. Cada uma dessas seções apresenta um dos dois tipos de configuração de antena previstos por essa metodologia: antena sobre plano de terra e antena sobre substrato dielétrico aterrado.

Além de constituírem exemplos de como aplicar o procedimento de projeto proposto, as referidas seções dedicam-se a consolidar os conceitos apresentados neste trabalho e a validar a metodologia de projeto concebida e as configurações de antena inéditas que foram criadas.

Nesta seção, o projeto de uma antena de ressonador dielétrico cilíndrica com duas bandas de operação, uma com polarização circular e outra com polarização linear, que utiliza um ressonador dielétrico sobre plano de terra é abordado.

4.1 CONCEPÇÃO OPERACIONAL

Primeiramente, foram escolhidas as seguintes especificações para a antena projetada:

- a) banda de operação inferior (primeira banda):
 - frequência central de 3,94 GHz;
 - diagrama de radiação direcional;
 - polarização circular;
- b) banda de operação superior (segunda banda):
 - frequência central de 5,42 GHz;
 - diagrama de radiação omnidirecional;
 - polarização linear.

Observa-se que essas especificações foram selecionadas arbitrariamente, sem vistas a uma aplicação prática específica.

O passo seguinte consiste na determinação dos modos ressonantes da antena, os quais são responsáveis por produzir o desempenho especificado para a mesma.

Considerando-se a antena de ressonador dielétrico cilíndrica, verifica-se por meio da Tabela 2 que os seguintes modos ressonantes apresentam potencial para serem utilizados na antena projetada: $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$, para a primeira banda, e $TE_{01\delta}$ e $TM_{01\delta}$, para a segunda. Dado que o modo $HEM_{12\delta}$ é geralmente o de maior frequência de ressonância dentre os citados, ele não deve ser utilizado para a primeira banda. Adicionalmente, o modo $TM_{01\delta}$ possui em geral uma frequência de ressonância superior à do modo $HEM_{11\delta}$, o que o faz adequado para a utilização na segunda banda.

Sendo assim, foram escolhidos os modos $HEM_{11\delta}$ e $TM_{01\delta}$, de forma que se tem $f_0^{(HEM_{11\delta})} = f_1 = 3,94 \text{ GHz}$ e $f_0^{(TM_{01\delta})} = f_2 = 5,42 \text{ GHz}$.

Com base na seleção dos modos $HEM_{11\delta}$ e $TM_{01\delta}$, optou-se pela utilização da configuração de antena sobre plano de terra. Esse tipo de configuração de antena, permitido para os modos ressonantes mencionados, provê uma isolamento eletromagnética entre o radiador e o circuito de alimentação e oferece uma maior facilidade de projeto, uma vez que o processo de cálculo da frequência de ressonância dos modos ressonantes é mais simples.

4.2 CÁLCULO DO RESSOADOR DIELÉTRICO

Escolheu-se para o radiador da antena um material dielétrico disponível comercialmente tal que $\epsilon_{rd} = 37,4$ e $Q_d = 10.000$ em $f = 10 \text{ GHz}$. Apesar de sua constante dielétrica relativamente elevada, esse material pôde ser obtido gratuitamente como amostra.

Portanto, aplicando-se a eq. (5), tem-se que a tangente de perda desse material dielétrico vale $3,94 \cdot 10^{-5}$ e $5,42 \cdot 10^{-5}$ na frequência central da primeira e da segunda bandas de operação, respectivamente. Verifica-se assim que o material dielétrico selecionado apresenta uma perda dielétrica significativamente baixa nas frequências para as quais a antena é especificada.

O raio do radiador e sua altura foram calculados com o auxílio das eq. (25) e (26), considerando-se os valores definidos para $f_0^{(HEM_{11\delta})}$, para $f_0^{(TM_{01\delta})}$ e para ϵ_{rd} . O sistema de duas equações não lineares resultante foi resolvido para as duas incógnitas a e h com o auxílio do programa MATLAB⁷², da MathWorks, Inc. Os resultados, obtidos por meio do método *dogleg*⁷³ com erro numérico absoluto inferior a 0,001 mm, foram $a = 6,00 \text{ mm}$ e $h = 5,15 \text{ mm}$.

4.3 PROJETO DAS ESTRUTURAS DE EXCITAÇÃO

O primeiro passo para o projeto das estruturas de excitação da antena foi a escolha do substrato dielétrico para a mesma. Além de fazer parte das estruturas de excitação, o substrato dielétrico suporta o plano de terra sobre o qual o radiador é colocado e provê a estrutura física para a construção do circuito de alimentação.

Foi escolhido um substrato dielétrico com as seguintes propriedades:

- a) espessura: 0,508 mm;
- b) constante dielétrica: 3,55 (material RO4003, da Rogers Corporation);
- c) tangente de perda: 0,0027 (material RO4003, da Rogers Corporation);
- d) condutividade elétrica do revestimento metálico: $5,8 \cdot 10^7$ S/m (cobre);
- e) espessura do revestimento metálico: 0,017 mm;
- f) largura e comprimento: 40 mm $\times$ 40 mm (aproximadamente meio comprimento de onda no espaço livre em $f_0^{(HEM_{11\delta})}$).

Esse substrato dielétrico mostra-se adequado para a construção do circuito de alimentação, uma vez que ele exibe uma perda dielétrica baixa e leva a linhas de microfita com largura aceitável (1,15 mm para uma impedância característica de 50 Ω , como mostrado mais adiante). Isso permite uma fácil fabricação do circuito, restringe sua área ocupada e limita a radiação produzida pelo mesmo.

Estando definido o substrato dielétrico, as estruturas de excitação foram projetadas com o auxílio de simulação computacional utilizando-se os programas Advanced Design System⁷⁴, da Keysight Technologies, Inc, e CST Studio Suite⁷⁵, da Computer Simulation Technology AG.

4.3.1 Excitação do modo $HEM_{11\delta}$

Para a excitação do modo $HEM_{11\delta}$, optou-se pela utilização de uma variante do método de excitação por sonda coaxial. Nesta tese, essa variante é denominada sonda de campo elétrico, em contraposição à sonda de campo magnético, que é abordada mais adiante neste texto.

A excitação por sonda de campo elétrico é semelhante à por sonda coaxial. A diferença entre as duas é de que, na primeira delas, uma das extremidades da sonda de excitação é conectada a uma linha de microfita em vez de ser conectada a um

conector coaxial. Essa linha de microfita é construída sobre um substrato dielétrico apoiado sobre a face do plano de terra oposta àquela do radiador. A estrutura descrita pode ser vista na Figura 16.

Figura 16 — Antena de ressoador dielétrico excitada por sonda de campo elétrico: (a) vista em corte lateral e (b) vista frontal

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Na excitação por sonda de campo elétrico, um pino metálico vertical de diâmetro d_{ep} (sonda) tem uma de suas extremidades soldadas a uma linha de microfita impressa em uma das faces do substrato dielétrico — como já mencionado, a outra face é revestida pelo plano de terra, sobre o qual o ressoador dielétrico é colocado —. A sonda atravessa o substrato dielétrico e o plano de terra, e sua outra extremidade é deixada em circuito aberto a uma distância l_{ep} deste. A área do plano de terra ao redor da sonda é removida de forma a gerar uma região de isolamento de diâmetro c_{ep} , que impede o contato galvânico entre o plano de terra e a sonda. A sonda localiza-se a uma distância y_{ep} do centro do radiador, podendo estar na parte interna ($y_{ep} < a + d_{ep}/2$) ou externa deste ($y_{ep} \geq a + d_{ep}/2$).

Esse método de excitação é adequado para modos ressonantes cujas linhas de campo elétrico são paralelas à orientação da sonda. Sendo assim, de acordo com a Figura 6, a sonda de campo elétrico pode excitar os modos $HEM_{11\delta}$ e $TM_{01\delta}$.

O casamento de impedância entre a linha de microfita e o radiador é afetado principalmente por três parâmetros: c_{ep} , l_{ep} e y_{ep} . Embora c_{ep} possa ser utilizado efetivamente para otimizar esse casamento de impedância, não é recomendável empregar um valor elevado desse parâmetro, uma vez que isso leva à remoção de uma área significativa do plano de terra, o que pode alterar expressivamente a frequência de ressonância dos modos ressonantes da antena e diminuir a eficácia da

blindagem eletromagnética proporcionada pelo plano de terra. O parâmetro d_{ep} exerce uma influência menor sobre o casamento de impedância entre a linha de microfita e o radiador e, por razões práticas, geralmente não é superior a 2 mm.

Escolheu-se usar a sonda externamente ao radiador e adjacente a este, o que implica

$$y_{ep} = a + \frac{d_{ep}}{2} \quad (36)$$

Essa disposição é conveniente em termos de facilidade de fabricação, uma vez que o ressoador dielétrico é geralmente constituído de um material cerâmico de alta dureza, o que dificulta sua furação sem danos. Adicionalmente, são evitados problemas como o alinhamento preciso do furo no radiador para a inserção da sonda e a presença de uma camada de ar que a circunda³⁹, que afetam a impedância de entrada da antena.

Considerando-se as propriedades do ressoador e do substrato dielétricos estabelecidas anteriormente, projetou-se uma sonda de campo elétrico para a excitação do modo HEM_{110} . Com o auxílio de simulação eletromagnética, realizada por meio do pacote CST Microwave Studio do programa CST Studio Suite, os parâmetros da sonda foram otimizados manualmente de forma a obter a máxima perda de retorno para esse modo ressonante. O método de solução numérica selecionado para utilização no pacote CST Microwave Studio é o FEM⁷⁶.

Para essa tarefa, as seguintes condições foram assumidas:

- a) uma sonda de 0,8 mm de diâmetro feita com cobre revestido de prata, cuja condutividade elétrica é igual a $6,1 \cdot 10^7$ S/m (disponível comercialmente);
- b) uma linha de microfita de alimentação de impedância característica 50Ω , a qual possui 1,15 mm de largura, calculada por meio da ferramenta LineCalc do programa Advanced Design System, que computa os parâmetros de linha de microfita por meio de equações aproximadas⁷⁴;
- c) o radiador é posicionado no centro do plano de terra;
- d) a linha de microfita prolonga-se desde a sonda até a borda do substrato dielétrico mais próxima.

Os parâmetros obtidos após a otimização da sonda foram: $l_{ep} = 5,75$ mm, $c_{ep} = 1,5$ mm, $d_{ep} = 0,8$ mm e $y_{ep} = 6,4$ mm.

A Figura 17 mostra a perda de retorno simulada em função da frequência para o ressoador dielétrico excitado pela sonda de campo elétrico projetada.

Figura 17 — Perda de retorno simulada do ressonador dielétrico excitado por sonda de campo elétrico

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

A Figura 17 indica que a sonda de campo elétrico é capaz de excitar o modo $\text{HEM}_{11\delta}$ com alta perda de retorno, evitando ao mesmo tempo uma excitação eficiente do modo $\text{TM}_{01\delta}$. Observa-se também que o modo $\text{HEM}_{121+\delta}$ é excitado em uma frequência próxima de 6,5 GHz. Todos esses modos ressonantes foram identificados visualizando-se sua distribuição de campo eletromagnético simulada.

A frequência de ressonância simulada do modo $\text{HEM}_{11\delta}$ é igual a 3,79 GHz, e a largura de banda de impedância fracionária simulada desse modo ressonante é de 1,58%, o que se considera razoável levando-se em conta a alta constante dielétrica do radiador.

A Figura 18 exibe o diagrama de radiação de ganho simulado em 3,79 GHz do ressonador dielétrico excitado pela sonda de campo elétrico. É mostrado o ganho nas direções θ e ϕ , respectivamente G_θ e G_ϕ , para os cortes nos planos yz e zx (o sistema de coordenadas adotado é o mesmo indicado na Figura 16).

Figura 18 — Diagrama de radiação de ganho simulado do ressonador dielétrico excitado por sonda de campo elétrico em 3,79 GHz: corte nos planos (a) yz e (b) zx

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

O comportamento esperado para o modo $HEM_{11\delta}$ pode ser visto na Figura 18: um diagrama de radiação direcional com polarização linear. Devido ao fato de o plano de terra ser finito, existe um lóbulo de radiação traseiro. O ganho simulado é de 5,67 dB.

Conforme mencionado anteriormente, a sonda de campo elétrico pode ser utilizada também para excitar o modo $TM_{01\delta}$ de forma eficaz, e a Figura 17 fornece indícios para tal afirmação. De fato, também se tentou projetar uma sonda de campo elétrico para essa finalidade. No entanto, como esclarecido mais adiante, é altamente desejável no presente projeto de antena que a estrutura de excitação dedicada a um dado modo ressonante excite eficientemente este e, ao mesmo tempo, rejeite o outro modo ressonante previsto para operar na antena. Como não foi possível projetar uma sonda de campo elétrico que atendesse a essa condição, ou seja, uma excitação eficiente do modo $TM_{01\delta}$ com a rejeição do modo $HEM_{11\delta}$, buscou-se outra forma de excitar o modo $TM_{01\delta}$, o que deu origem ao método de excitação abordado a seguir.

4.3.2 Excitação do modo $TM_{01\delta}$

Foi proposta nesta pesquisa uma estrutura inédita de excitação para o modo $TM_{01\delta}$, a qual foi denominada sonda de campo magnético e é ilustrada na Figura 19.

Figura 19 — Antena de ressonador dielétrico excitada por sonda de campo magnético: (a) vista em corte lateral e (b) vista frontal

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Verifica-se na Figura 19 que esse método de excitação é estruturalmente semelhante à excitação por sonda de campo elétrico. A diferença entre ambos é de que, na excitação por sonda de campo magnético, o pino metálico (sonda), de diâmetro d_{mp} , não é terminado em circuito aberto na extremidade não conectada à linha de microfita. Em vez disso, a sonda sofre uma dobra de 90° a uma distância l_{mp} do plano de terra

e, em seguida, outra dobra do mesmo tipo a uma distância m_{mp} da primeira dobra, de modo que a sonda se prolongue até alcançar o plano de terra, onde ela é conectada. A sonda assume, portanto, um formato de laço e é situada a uma distância y_{mp} do centro do ressonador dielétrico. Por razões de fabricação, é conveniente que ela seja colocada do lado externo do radiador. Também se deve remover a área do plano de terra nos arredores da sonda para que haja uma região de isolamento de diâmetro c_{mp} que interrompa o contato galvânico direto entre a sonda e o plano de terra.

A sonda de campo magnético é apropriada para modos ressonantes cujas linhas de campo magnético são perpendiculares ao laço formado pela sonda. Portanto, de acordo com a Figura 6, a sonda de campo magnético também pode ser usada para excitar os modos $HEM_{11\delta}$ e $TM_{01\delta}$.

Quatro parâmetros influenciam o casamento de impedância entre a linha de microfita e o radiador: c_{mp} , l_{mp} , m_{mp} e y_{mp} . O parâmetro c_{mp} pode ser empregado para otimizar esse casamento de impedância, mas um alto valor desse parâmetro conduz à subtração de uma área considerável do plano de terra, o que pode ocasionar um deslocamento apreciável da frequência de ressonância dos modos ressonantes da antena e reduzir a efetividade da blindagem eletromagnética oferecida pelo plano de terra. O casamento de impedância entre a linha de microfita e o radiador não é tão intensamente afetado por d_{mp} . Por questões de fabricação, recomenda-se que esse parâmetro não ultrapasse 2 mm.

Apesar de ser de fabricação mais complexa em comparação à sonda de campo elétrico, a sonda de campo magnético dispõe de um grau de liberdade adicional (o parâmetro m_{mp}), o que oferece, a princípio, uma possibilidade maior de obtenção de um bom casamento de impedância entre a linha de microfita e o radiador.

Também com o auxílio de simulação eletromagnética, uma sonda de campo magnético foi projetada para a excitação do modo $TM_{01\delta}$. Os parâmetros da sonda foram otimizados manualmente visando à obtenção da máxima perda de retorno para esse modo ressonante.

Foram consideradas as propriedades do ressonador e do substrato dielétricos já mencionadas, assim como as mesmas condições de simulação citadas anteriormente para o projeto da estrutura de excitação do modo $HEM_{11\delta}$.

Após a otimização da sonda, foram obtidos os seguintes parâmetros: $l_{mp} = 3,25$ mm, $m_{mp} = 2$ mm, $c_{mp} = 1,5$ mm, $d_{mp} = 0,8$ mm e $y_{mp} = 6,4$ mm.

Exclusivamente para fins de verificação desse método de excitação original, um protótipo de ressonador dielétrico excitado por sonda de campo magnético foi construído. Fotografias do referido protótipo são apresentadas na Figura 20.

Figura 20 — Protótipo de um ressonador dielétrico excitado por sonda de campo magnético: vistas em perspectiva (a) frontal e (b) traseira

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Os métodos empregados para fabricar esse protótipo bem como para caracterizá-lo são os mesmos utilizados para o protótipo final da antena desenvolvida e são expostos mais adiante.

As perdas de retorno simulada e medida em função da frequência para o ressonador dielétrico excitado por sonda de campo magnético são apresentadas na Figura 21.

Figura 21 — Perdas de retorno simulada e medida do ressonador dielétrico excitado por sonda de campo magnético

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Pode-se observar na Figura 21 que o modo $TM_{01\delta}$ é excitado pela sonda de campo magnético com perda de retorno elevada. Por outro lado, o modo $HEM_{11\delta}$ não é

excitado de forma eficaz, e verifica-se novamente a excitação do modo $\text{HEM}_{121+\delta}$ em uma frequência próxima de 6,5 GHz.

Ambas as frequências de ressonância medida e simulada do modo $\text{TM}_{01\delta}$ são iguais a 5,31 GHz, e as larguras de banda de impedância fracionárias medida e simulada desse modo ressonante são iguais a 3,40%. Considerando-se a alta constante dielétrica do radiador, essa largura de banda é expressiva. Ainda na Figura 21, observa-se uma ótima concordância entre a perda de retorno medida e a simulada.

Os diagramas de radiação de ganho medido e simulado do ressonador dielétrico excitado pela sonda de campo magnético são mostrados na Figura 22 para a frequência de 5,31 GHz. É exibido o ganho nas direções θ e ϕ para os cortes nos planos yz e zx (utiliza-se o mesmo sistema de coordenadas indicado na Figura 19).

Figura 22 — Diagramas de radiação de ganho medido e simulado do ressonador dielétrico excitado por sonda de campo magnético em 5,31 GHz: corte nos planos (a) yz e (b) zx

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

É possível visualizar na Figura 22 um diagrama de radiação omnidirecional com polarização linear, o que corresponde ao desempenho previsto para o modo $\text{TM}_{01\delta}$. Ademais, podem ser notados dois efeitos ocasionados pelo fato de o plano de terra não ser infinito: a presença de radiação na parte traseira da estrutura (no lado do plano de terra que contém a linha de microfita) e a alteração da direção de ganho máximo, de $\theta = 90^\circ$ — tal como mostrado na Figura 14(a) — para uma direção que se aproxima de $\theta = 45^\circ$. Os ganhos medido e simulado valem 1,97 dB e 3,17 dB, respectivamente. Os diagramas de radiação medido e simulado apresentam boa correspondência entre si, validando o método de excitação por sonda de campo magnético.

4.3.3 Otimização e simulação completa das estruturas de excitação

Com o intuito de obter polarização circular na banda de operação inferior, duas sondas de campo elétrico geometricamente separadas por um ângulo de 90° são utilizadas para excitar dois modos $HEM_{11\delta}$ degenerados ortogonais entre si. Uma sonda de campo magnético para a excitação do modo $TM_{01\delta}$ é inserida em um ponto que dista 135° de ambas as sondas de campo elétrico, resultando em uma configuração simétrica, como ilustra a Figura 23.

Figura 23 — Radiador e estruturas de excitação da antena sobre plano de terra

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

O objetivo dessa simetria é fazer com que ambas as sondas de campo elétrico “enxerguem” o mesmo ambiente geométrico e eletromagnético.

Deve-se lembrar que a polarização circular requer ainda que os modos ressonantes ortogonais que a geram tenham a mesma amplitude de campo eletromagnético e uma diferença de fase de 90° entre si, condição a ser obtida pelo circuito de alimentação.

Nota-se que cada estrutura de excitação passa a operar na presença de outras duas, o que pode afetar o funcionamento de todas elas.

Sendo assim, a estrutura completa do ressoador dielétrico com as três sondas foi simulada considerando-se duas situações distintas:

- a) excitação do modo $HEM_{11\delta}$: uma sonda de campo elétrico é alimentada, a entrada da outra sonda de campo elétrico é terminada por uma carga resistiva ideal de 50Ω , e a entrada da sonda de campo magnético permanece em circuito aberto;
- b) excitação do modo $TM_{01\delta}$: a sonda de campo magnético é alimentada enquanto a entrada de cada sonda de campo elétrico permanece em circuito aberto.

As situações descritas simulam o funcionamento das estruturas de excitação sob condições normais de operação na frequência de ressonância do modo ressonante para o qual foram projetadas. Como exposto mais adiante, as terminações em circuito aberto e em uma carga resistiva ideal de 50Ω modelam a impedância vista na entrada das estruturas de excitação em direção ao circuito de alimentação.

Após a simulação da estrutura exibida na Figura 23, não houve a necessidade de ajustar os parâmetros das sondas, pois os obtidos anteriormente também indicam uma perda de retorno simulada satisfatória para o modo ressonante excitado por cada sonda. A frequência de ressonância simulada do modo $HEM_{11\delta}$ é de 3,78 GHz, enquanto a do modo $TM_{01\delta}$ vale 5,20 GHz, o que indica um leve deslocamento da frequência de ressonância deste último modo ressonante.

Ademais, o ganho e o diagrama de radiação simulados nas frequências de interesse são semelhantes aos obtidos isoladamente com uma sonda única.

Além de indicar que cada estrutura de excitação sofre pouca influência devido à presença das outras, esses resultados sugerem também que o modo $HEM_{11\delta}$ gerado por uma sonda de campo elétrico não se acopla de forma eficiente à outra sonda de campo elétrico, o que seria indesejável. Se de fato houvesse tal acoplamento, parte da potência desse modo ressonante, em sua frequência de ressonância, seria absorvido pela carga resistiva ideal de 50Ω , e o ganho simulado para a estrutura ilustrada na Figura 23 seria mais baixo para o modo $HEM_{11\delta}$.

4.4 PROJETO DO CIRCUITO DE ALIMENTAÇÃO

Para que a antena desenvolvida tenha o desempenho especificado, é necessário que o circuito de alimentação forneça às estruturas de excitação um sinal de alimentação com as características descritas a seguir:

- a) na frequência de ressonância do modo $HEM_{11\delta}$, cada sonda de campo elétrico deve receber metade da potência total de entrada da antena, e a diferença de fase entre os sinais recebidos por essas sondas deve ser de 90° . Ainda nessa mesma frequência, a impedância vista na entrada da sonda de campo magnético em direção ao circuito de alimentação deve ser infinita (circuito aberto) para prevenir o acoplamento do modo $HEM_{11\delta}$ a essa sonda;

- b) na frequência de ressonância do modo $TM_{01\delta}$, toda a potência de entrada da antena deve ser recebida pela sonda de campo magnético, e a impedância vista na entrada das sondas de campo elétrico em direção ao circuito de alimentação deve ser infinita para evitar que haja acoplamento do modo $TM_{01\delta}$ a essas sondas.

Com o objetivo de satisfazer essas exigências, foi criado o circuito de alimentação esquematizado na Figura 24.

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Na Figura 24, λ_g refere-se ao comprimento de onda guiada; N_1 , N_2 , N_3 e N_4 são números inteiros não negativos; ① denota o nó inicial de interconexão. Todas as linhas de transmissão representadas têm uma impedância característica de 50Ω .

O circuito de alimentação da antena possui três subcircuitos principais:

- um circuito denominado filtro tipo A que se comporta como um curto-circuito para o terra na frequência de ressonância do modo $TM_{01\delta}$ e como um circuito aberto na frequência de ressonância do modo $HEM_{11\delta}$;
- um circuito chamado de filtro tipo B que age como um circuito aberto na frequência de ressonância do modo $TM_{01\delta}$ e como um curto-circuito para o terra na frequência de ressonância do modo $HEM_{11\delta}$;
- um acoplador híbrido de 90° que opera na frequência de ressonância do modo $HEM_{11\delta}$.

Quando o circuito de alimentação opera na frequência de ressonância do modo $HEM_{11\delta}$, toda a potência de entrada da antena é transmitida para o acoplador híbrido

de 90° . Isso ocorre porque a impedância vista no nó ① em direção à sonda de campo magnético é infinita. Essa condição é imposta pelo filtro tipo B, que age como um curto-circuito para o terra e encontra-se a uma distância de um múltiplo ímpar de um quarto de comprimento de onda guiada do nó mencionado.

Ainda na frequência de ressonância do modo $HEM_{11\delta}$, o acoplador híbrido de 90° divide o sinal de entrada da antena em dois sinais de mesma potência que exibem uma diferença de fase de 90° entre si. Esses sinais são transmitidos para as sondas de campo elétrico e são responsáveis por gerar polarização circular.

Também na frequência de ressonância do modo $HEM_{11\delta}$, as três instâncias do filtro tipo A comportam-se como um circuito aberto e, portanto, não têm influência sobre esses sinais, teoricamente. O filtro tipo B é colocado a um múltiplo ímpar de um quarto de comprimento de onda guiada da sonda de campo magnético. Sendo assim, a impedância vista na sonda de campo magnético em direção à entrada da antena é infinita. Essa condição previne o acoplamento do modo $HEM_{11\delta}$ à sonda de campo magnético.

Na frequência de ressonância do modo $TM_{01\delta}$, a sonda de campo magnético recebe toda a potência de entrada da antena. Isso se dá porque a impedância vista no nó ① em direção ao acoplador híbrido de 90° é infinita. Essa condição é imposta pelo filtro tipo A, que se comporta como um curto-circuito para o terra e localiza-se a uma distância de um múltiplo ímpar de um quarto de comprimento de onda guiada do referido nó.

Também na frequência de ressonância do modo $TM_{01\delta}$, o filtro tipo B age como um circuito aberto. Portanto, ele não afeta, a princípio, o sinal transmitido para a sonda de campo magnético. As duas instâncias do filtro tipo A próximas das sondas de campo elétrico são dispostas a um múltiplo ímpar de um quarto de comprimento de onda guiada dessas sondas. Assim, a impedância vista em cada sonda de campo elétrico em direção ao acoplador híbrido de 90° é infinita. Isso impede que o modo $TM_{01\delta}$ se acople às sondas de campo elétrico.

Assim, observa-se que o circuito de alimentação impede que um sinal na frequência de ressonância do modo $HEM_{11\delta}$ seja transmitido à sonda de campo magnético e evita que sinais na frequência de ressonância do modo $TM_{01\delta}$ alcance as sondas de campo elétrico. Apesar disso, é altamente desejável que cada sonda excite apenas o modo

ressonante para o qual é destinada, de forma a assegurar um desempenho ótimo para a antena.

Adotou-se $N_1 = N_2 = N_3 = 0$ e $N_4 = 1$ com o objetivo de alcançar o melhor desempenho em termos de perdas e de largura de banda e de obter a minimização da área ocupada pelo circuito de alimentação. Observa-se que $N_4 = 0$ impossibilitaria a realização prática deste.

O circuito de alimentação foi projetado considerando-se a frequência de ressonância simulada dos modos $HEM_{11\delta}$ e $TM_{01\delta}$ ($f_0^{(HEM_{11\delta})} = 3,78$ GHz e $f_0^{(TM_{01\delta})} = 5,20$ GHz).

4.4.1 Filtros

O filtro tipo A é composto de dois trechos de linha de transmissão em paralelo: um toco em circuito aberto e um em curto-circuito (diretamente conectado com o terra). A Figura 25 ilustra o filtro tipo A.

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

O toco em circuito aberto possui um comprimento que corresponde a um múltiplo ímpar de um quarto de comprimento de onda guiada na frequência em que o filtro opera como um curto-circuito (f_{sh}). O toco em curto-circuito apresenta uma ressonância com o toco em circuito aberto de forma a cancelar a admitância do filtro na frequência em que este se comporta como um circuito aberto (f_{op}). Considerando-se a teoria de linhas de transmissão^{17, 18, 22}, as seguintes expressões são derivadas para os tocos:

$$\theta_{Aa} = \frac{\pi}{2} + o\pi \text{ em } f_{sh}, o = 0, 1, 2, \quad (37)$$

$$\theta_{Ab} = \arctg\left(\frac{Z_{Aa}}{Z_{Ab}} \cot\left(\frac{f_{op}}{f_{sh}}\left(\frac{\pi}{2} + o\pi\right)\right)\right) + q\pi \text{ em } f_{op}, q = 0, 1, 2, \quad (38)$$

onde o e q são números inteiros não negativos; Z_{Aa} e θ_{Aa} representam, respectivamente, a impedância característica do toco em circuito aberto e o comprimento elétrico deste; Z_{Ab} e θ_{Ab} denotam a impedância característica do toco em curto-circuito e seu

comprimento elétrico, respectivamente. A impedância característica dos tocos pode ser teoricamente escolhida de forma arbitrária.

Para o filtro tipo A, deve-se ter $f_{op} = f_0^{(HEM11\delta)} = 3,78$ GHz e $f_{sh} = f_0^{(TM01\delta)} = 5,20$ GHz. Com o intuito de obter dimensões reduzidas para o filtro, escolheu-se $o = q = 0$, e, sendo assim, calcula-se $\theta_{Aa} = 90^\circ$ (em $f_0^{(TM01\delta)}$), a partir da eq. (37). A impedância característica dos tocos foi escolhida dentro do intervalo entre 30 Ω e 110 Ω , que corresponde a uma faixa de valores realizáveis na prática para o substrato dielétrico escolhido para a antena. Adicionalmente, determinou-se a impedância característica dos tocos de forma a maximizar a largura de banda do filtro em torno da frequência de rejeição (curto-circuito). No filtro tipo A, essa situação ocorre quando a impedância característica de ambos os tocos é máxima, ou seja, $Z_{Aa} = Z_{Ab} = 110$ Ω (esse comportamento foi verificado por meio de simulação de circuito empregando-se o programa Advanced Design System). Dessa forma, utilizando-se a eq. (38), obtém-se $\theta_{Ab} = 24,8^\circ$ (em $f_0^{(HEM11\delta)}$).

O filtro tipo B utiliza dois tocos em circuito aberto conectados em paralelo e é exibido na Figura 26.

Figura 26 — Filtro tipo B

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

O funcionamento desse filtro é semelhante ao do filtro tipo A. Um dos tocos (primeiro toco) tem um comprimento que é um múltiplo ímpar de um quarto de comprimento de onda guiada na frequência em que o filtro se comporta como um curto-circuito. O outro toco (segundo toco) exibe uma ressonância com o primeiro, anulando a admitância do filtro na frequência em que ele opera como um circuito aberto. Também a partir da teoria de linhas de transmissão, podem-se deduzir as expressões para os tocos:

$$\theta_{Ba} = \frac{\pi}{2} + o\pi \text{ em } f_{sh}, o = 0, 1, 2, \quad (39)$$

$$\theta_{Bb} = \arctg \left(-\frac{Z_{Bb}}{Z_{Ba}} \operatorname{tg} \left(\frac{f_{op}}{f_{sh}} \left(\frac{\pi}{2} + o\pi \right) \right) \right) + q\pi \text{ em } f_{op}, q = 0, 1, 2, \quad (40)$$

onde Z_{Ba} e θ_{Ba} representam, respectivamente, a impedância característica do primeiro toco e seu comprimento elétrico; Z_{Bb} e θ_{Bb} são a impedância característica do segundo

toco e o comprimento elétrico deste, respectivamente. Novamente, observa-se que a impedância característica dos tocos pode ser a princípio escolhida de forma arbitrária.

Deve-se ter para o filtro tipo B $f_{op} = f_0^{(TM01\delta)} = 5,20$ GHz e $f_{sh} = f_0^{(HEM11\delta)} = 3,78$ GHz. Considerando-se $o = q = 0$, a eq. (39) permite calcular $\theta_{Ba} = 90^\circ$ (em $f_0^{(HEM11\delta)}$). Para uma largura de banda máxima em torno da frequência de rejeição, o filtro tipo B requer que a impedância do primeiro toco seja máxima, e a do segundo mínima. Assim, obtém-se $Z_{Ba} = 110 \Omega$ e $Z_{Bb} = 30 \Omega$. A eq. (40) leva a $\theta_{Bb} = 21,9^\circ$ (em $f_0^{(TM01\delta)}$).

Observa-se que, alternativamente, cada um dos três filtros tipo A poderia ser substituído por um filtro tipo B calculado na condição em que $f_{op} = f_0^{(HEM11\delta)} = 3,78$ GHz e $f_{sh} = f_0^{(TM01\delta)} = 5,20$ GHz. Da mesma forma, o filtro B poderia ser trocado por um filtro tipo A projetado de modo que $f_{op} = f_0^{(TM01\delta)} = 5,20$ GHz e $f_{sh} = f_0^{(HEM11\delta)} = 3,78$ GHz. Isso significa que o circuito de alimentação poderia ser concebido de modo a empregar apenas um tipo de filtro (A ou B). Entretanto, isso levaria a pelo menos um filtro com uma linha de transmissão mais longa, o que aumentaria a área ocupada pelo circuito de alimentação.

4.4.2 Acoplador híbrido de 90°

O acoplador híbrido de 90° ^{17, 18, 22} é um circuito passivo tradicional de micro-ondas composto de quatro trechos de linha de transmissão interconectados de maneira a criar um anel. O acoplador possui quatro portas, cada uma situada em um ponto de conexão entre dois trechos consecutivos, como mostrado na Figura 27.

Figura 27 — Acoplador híbrido de 90°

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Dois trechos de linha de transmissão que se encontram em paralelo possuem impedância característica Z_0 , onde Z_0 é a impedância característica de referência (usualmente 50Ω , que é o valor adotado neste trabalho). Os outros dois trechos têm

impedância característica $Z_0/\sqrt{2}$. Todos os quatro trechos de linha de transmissão têm um comprimento de um quarto de comprimento de onda guiada na frequência de operação desejada.

O sinal de entrada do acoplador é recebido em uma de suas portas (P_1) e é dividido em dois sinais de igual amplitude que possuem uma diferença de fase de 90° entre si. Cada um desses sinais é entregue a uma das portas conectadas ao trecho de linha de transmissão que tem impedância característica Z_0 e não se encontra conectado a P_1 (P_2 e P_3). A outra porta (P_4) é denominada porta isolada e não recebe sinal quando o acoplador opera em condições ideais, ou seja, quando P_1 , P_2 e P_3 são terminadas em uma impedância igual a Z_0 . Na prática, não é possível satisfazer perfeitamente essa condição. Sendo assim, uma carga resistiva de valor Z_0 é usualmente colocada nessa porta para absorver os sinais refletidos nas outras portas, os quais são redirecionados para a mesma.

4.4.3 Otimização e simulação completa do circuito de alimentação

Considerando-se as propriedades do substrato dielétrico já citadas anteriormente (seção 4.3), calculou-se o circuito de alimentação para implementação em tecnologia de microfita. Os principais parâmetros geométricos de linha de microfita calculados por meio da ferramenta LineCalc são listados na Tabela 3.

Tabela 3 — Principais parâmetros geométricos das linhas de microfita do circuito de alimentação da antena sobre plano de terra

Impedância característica	Largura da microfita	Comprimento de onda guiada
50 Ω	1,15 mm	47,4 mm (em 3,78 GHz) e 34,3 mm (em 5,20 GHz)
$50/\sqrt{2}$ Ω	1,92 mm	46,3 mm (em 3,78 GHz) e 33,5 mm (em 5,20 GHz)
30 Ω	2,36 mm	46,1 mm (em 3,78 GHz) e 33,2 mm (em 5,20 GHz)
110 Ω	0,22 mm	49,6 mm (em 3,78 GHz) e 36,0 mm (em 5,20 GHz)

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

O leiaute do circuito de alimentação foi desenhado, simulado eletromagneticamente e otimizado manualmente com o auxílio da ferramenta Momentum do programa Advanced Design System, que adota o MoM⁷⁷ como método de solução numérica.

Para fins de comparação, executou-se também uma simulação de circuito, na qual se considera o circuito de alimentação realizado com linhas de transmissão ideais. Para

tal tarefa, foi utilizado o simulador de circuito disponível no programa Advanced Design System.

A Figura 28 mostra o leiaute otimizado do circuito de alimentação juntamente com as indicações de seus subcircuitos:

Figura 28 — Leiaute do circuito de alimentação da antena sobre plano de terra

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Como pode ser visto na Figura 28, o circuito de alimentação possui cinco portas: P_1 é a entrada da antena; P_2 e P_3 são as portas de saída destinadas às sondas de campo elétrico; P_4 corresponde à porta de saída para a sonda de campo magnético; P_5 refere-se à porta de saída para a carga resistiva de 50 Ω que termina a porta isolada do acoplador híbrido de 90°.

Os módulos dos principais parâmetros de espalhamento em função da frequência obtidos por simulação eletromagnética ("leiaute") e por simulação de circuito ("circ. ideal") são exibidos na Figura 29, enquanto as diferenças de fase simuladas entre S_{31} e S_{21} em função da frequência obtidas utilizando-se os mesmos métodos são mostradas na Figura 30.

Figura 29 — Módulo simulado dos principais parâmetros de espalhamento do circuito de alimentação da antena sobre plano de terra: (a) S_{11} , (b) S_{21} , (c) S_{31} , (d) S_{41} e (e) S_{32}

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Figura 30 — Diferença de fase simulada entre S_{31} e S_{21} para o circuito de alimentação da antena sobre plano de terra

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

As Figuras 29 e 30 sugerem o comportamento desejado para o circuito de alimentação:

- a) o módulo de S_{11} abaixo de -30 dB em 3,78 GHz e em 5,20 GHz ($f_0^{(HEM11\delta)}$ e $f_0^{(TM01\delta)}$, respectivamente) indica que o circuito recebe praticamente toda a potência de entrada nessas frequências;
- b) em 3,78 GHz, o módulo de S_{21} é igual a $-3,86$ dB, e o de S_{31} vale $-3,91$ dB (simulação eletromagnética do leiaute do circuito). Isso sinaliza que P_2 e P_3 recebem aproximadamente a mesma potência, a qual corresponde à metade da potência total de entrada (-3 dB) com cerca de 0,9 dB de perda de transmissão. O módulo de S_{21} e de S_{31} em 5,20 GHz é menor do que -30 dB, indicando que a potência de entrada recebida por P_2 e por P_3 é desprezível nessa frequência;
- c) o módulo de S_{41} abaixo de -40 dB em 3,78 GHz e igual a $-0,510$ dB em 5,20 GHz (simulação eletromagnética do leiaute do circuito) indica que P_4 praticamente não recebe potência de entrada na primeira frequência e recebe aproximadamente toda a potência de entrada com 0,510 dB de perda de transmissão na segunda frequência;
- d) em 3,78 GHz, o módulo de S_{32} vale menos do que -30 dB, indicando uma boa isolamento entre P_2 e P_3 ;
- e) uma diferença de fase de aproximadamente 90° entre os sinais de P_3 e de P_2 é observada em 3,78 GHz.

Em geral, verifica-se uma boa concordância entre os resultados obtidos por simulação eletromagnética e por simulação de circuito.

4.5 OTIMIZAÇÃO E SIMULAÇÃO COMPLETA DA ANTENA

A antena projetada foi desenhada e simulada eletromagneticamente no pacote CST Microwave Studio. Considerou-se a estrutura completa da antena: ressoador dielétrico, estruturas de excitação, plano de terra, substrato dielétrico e circuito de alimentação. A Figura 31 apresenta o modelo simulado da antena.

Figura 31 — Modelo da antena sobre plano de terra: vistas em perspectiva (a) frontal e (b) traseira

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Deve-se mencionar que a largura do substrato dielétrico e seu comprimento tiveram de ser aumentados de 40 mm para 55 mm para que o circuito de alimentação pudesse ser completamente acomodado no mesmo.

Para a simulação da antena, foram utilizadas duas portas de simulação: a primeira porta P_1 foi atribuída à entrada da antena, enquanto a segunda porta P_2 foi definida na porta isolada do acoplador híbrido de 90° , reservada para a carga resistiva de 50Ω . Utilizando-se essa configuração de duas portas, é possível identificar se a potência recebida pela antena está sendo radiada pelo ressonador dielétrico ou absorvida pela carga resistiva.

Nota-se que um valor baixo de módulo de coeficiente de reflexão de tensão (S_{11}) na entrada da antena não significa necessariamente que o sinal de entrada da antena está sendo acoplado adequadamente ao ressonador dielétrico e radiado pelo mesmo. Alternativamente, esse sinal poderia estar sendo refletido internamente no circuito de alimentação e redirecionado para P_2 , onde é absorvido pela carga resistiva de 50Ω , devido a descasamentos de impedância dentro do conjunto formado pelo circuito de alimentação, pelas estruturas de excitação e pelo próprio radiador. Dado que a impedância de ambas as portas de simulação vale 50Ω , P_2 comporta-se como uma carga casada, e o módulo do coeficiente de transmissão entre P_2 e P_1 (S_{21}) indica a quantidade de potência que é absorvida pela carga. Portanto, pode-se verificar se a antena está operando corretamente monitorando-se simultaneamente o módulo do coeficiente de transmissão entre P_2 e P_1 e o módulo do coeficiente de reflexão de tensão em P_1 , que devem ser reduzidos nas frequências em que a antena radia. Deve-se mencionar que, nesse contexto, consideram-se baixas as perdas dielétrica e condutiva do radiador e do substrato dielétrico.

Os primeiros resultados que foram obtidos com a simulação da antenna indicaram que a sonda de campo magnético tem certa influência sobre a distribuição do campo eletromagnético excitado pelas sondas de campo elétrico na frequência do modo HEM_{110} . Isso interfere na qualidade da polarização circular da onda eletromagnética radiada pela antenna nessa frequência, o que explica a obtenção de uma razão axial simulada superior a 3 dB, que é o valor máximo de referência padrão normalmente adotado para antenas de polarização circular.

Dessa forma, a antenna foi otimizada para uma razão axial mínima ajustando-se o ângulo entre as sondas de campo elétrico, que era originalmente de 90° .

Dado que a antenna é, em termos de geometria, aproximadamente simétrica na face do plano de terra, a elipse de polarização da onda eletromagnética radiada na direção perpendicular ao plano de terra também é praticamente simétrica em relação ao plano de simetria da antenna. Portanto, pode-se melhorar a razão axial alterando-se ligeiramente o ângulo entre as sondas de campo elétrico, mantendo-se ao mesmo tempo a simetria da antenna.

O ângulo entre as sondas de campo elétrico obtido após a otimização da antenna é de 94° . Vale observar que, devido à mudança do posicionamento das sondas, o leiaute do circuito de alimentação também teve de ser ajustado para preservar o comprimento das linhas de transmissão.

A Figura 32 exibe o módulo do coeficiente de reflexão de tensão na entrada da antenna (S_{11}) e o módulo do coeficiente de transmissão entre P_2 e P_1 (S_{21}) em função da frequência para a antenna otimizada obtidos por simulação eletromagnética.

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Pode-se verificar a partir dos resultados simulados que há duas faixas de frequência em que ambos os coeficientes de transmissão e de reflexão de tensão estão abaixo de -10 dB: entre 3,73 GHz e 3,80 GHz (largura de banda fracionária de 1,86%) e entre 5,17 GHz e 5,28 GHz (largura de banda fracionária de 2,11%). Nessas faixas, tanto o sinal refletido na entrada da antena quanto o sinal absorvido pela carga resistiva de $50\ \Omega$ têm uma potência igual ou menor a 10% da potência total de entrada, o que é uma evidência de que a antena está radiando. A frequência central da primeira faixa de frequência vale 3,79 GHz, e da segunda 5,23 GHz. Essas frequências correspondem aproximadamente à frequência de ressonância simulada do modo $HEM_{11\delta}$ e à do modo $TM_{01\delta}$ mostradas anteriormente (3,78 GHz e 5,20 GHz, respectivamente).

O diagrama de radiação de ganho total simulado da antena em 3,79 GHz e em 5,23 GHz é apresentado na Figura 33.

Figura 33 — Diagrama de radiação de ganho total simulado da antena sobre plano de terra:
(a) 3,79 GHz e (b) 5,23 GHz

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

A Figura 33 indica que a antena apresenta um diagrama de radiação direcional em 3,79 GHz e aproximadamente omnidirecional em 5,23 GHz. Esse comportamento condiz com o desempenho esperado para antena quando excitada nos modos $HEM_{11\delta}$ e $TM_{01\delta}$, respectivamente, conforme indicado na Figura 14. O ganho total simulado é igual a 4,78 dB em 3,79 GHz e a 3,30 dB em 5,23 GHz. Em 3,79 GHz, a razão axial

simulada na direção de ganho máximo, $\theta = 3,5^\circ$ e $\phi = 324^\circ$ (de acordo com o sistema de coordenadas adotado nas Figuras 31 e 33), vale 0,624 dB, o que revela uma boa polarização circular.

4.6 REALIZAÇÃO PRÁTICA

Um protótipo da antena projetada foi fabricado no Laboratório de Microeletrônica da Universidade de São Paulo empregando-se a tecnologia de circuito integrado de micro-ondas — *microwave integrated circuit* (MIC) —.

Os elementos em microfitas do circuito de alimentação foram definidos sobre o substrato dielétrico com o auxílio da máquina de microfresagem ProtoMat S62, da LPKF Laser & Electronics AG.

Todas as vias e as estruturas de excitação foram construídas utilizando-se um fio de 0,8 mm de diâmetro de cobre revestido com prata.

Foi utilizado um ressoador dielétrico comercialmente disponível, com as propriedades geométricas e de material estabelecidas anteriormente. Ele foi fixado sobre o plano de terra com cola em bastão por meio de um processo de prensagem, o qual foi executado com a ajuda de um grampo (prensa) e teve duração de cerca de duas horas, tempo necessário para a secagem da cola. Nesse processo de prensagem, foi aplicada uma pressão sobre o radiador e sobre o substrato dielétrico suficientemente grande para que houvesse uma quantidade mínima de cola entre o ressoador e o plano de terra, garantindo-se o contato direto entre esses elementos e uma boa adesão entre os mesmos.

Dois conectores do tipo *sub-miniature version A* (SMA), de impedância característica $50\ \Omega$, foram empregados para a transferência de sinais na antena: um para a entrada da antena e outro para a carga resistiva de $50\ \Omega$.

As vias, as estruturas de excitação e os conectores foram soldados no circuito de alimentação com solda de chumbo-estanho por meio de um ferro de solda. Alicates de corte e de bico e uma lixa foram empregados na fabricação das vias e das estruturas de excitação.

Fotografias do protótipo construído são exibidas na Figura 34.

Figura 34 — Protótipo da antena sobre plano de terra: vistas em perspectiva (a) frontal e (b) traseira

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

O protótipo da antena foi caracterizado no Applied Electromagnetics Laboratory da University of Houston por meio da medição de parâmetros de espalhamento e de diagrama de radiação.

Os parâmetros de espalhamento foram medidos com o analisador de redes vetorial N5247A, da Keysight Technologies, Inc. A porta 1 do analisador foi ligada na entrada da antena, e a porta 2 foi conectada à saída reservada para a carga resistiva de $50\ \Omega$, de forma similar à configuração de portas adotada na simulação da antena projetada.

A Figura 35 mostra o módulo do coeficiente de reflexão de tensão na entrada da antena (S_{11}) e o módulo do coeficiente de transmissão entre a saída reservada à carga resistiva de $50\ \Omega$ e a entrada da antena (S_{21}) em função da frequência medidos para o protótipo.

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

As faixas de frequência em que ambos os coeficientes de transmissão e de reflexão de tensão se encontram abaixo de $-10\ \text{dB}$ são: entre 3,80 GHz e 3,86 GHz (largura de banda fracionária de 1,57%) e entre 5,22 GHz e 5,36 GHz (largura de banda

fracionária de 2,65%). A frequência central dessas faixas, nas quais se pode considerar a antena radiando, vale 3,83 GHz e 5,28 GHz, respectivamente. Essas frequências, referentes aos modos $\text{HEM}_{11\delta}$ e $\text{TM}_{01\delta}$, respectivamente, bem como as bandas mencionadas estão de acordo com seus respectivos valores simulados — frequências de 3,79 GHz e de 5,23 GHz e bandas fracionárias de 1,86% (entre 3,73 GHz e 3,80 GHz) e de 2,11% (entre 5,17 GHz e 5,28 GHz) —. As larguras de banda citadas podem ser consideradas compatíveis com a alta constante dielétrica do ressonador dielétrico.

Nota-se ainda uma diferença entre as frequências medidas e simuladas e as frequências de operação especificadas para a antena (3,94 GHz e 5,42 GHz). É possível verificar que essa diferença já é identificada nos resultados simulados, e sugere-se que ela se deva à influência das estruturas de excitação na distribuição de campo eletromagnético no ressonador dielétrico, efeito que também afeta a qualidade da polarização circular da onda eletromagnética radiada pela antena na frequência do modo $\text{HEM}_{11\delta}$, como discutido anteriormente.

Para facilitar a comparação direta entre os resultados medidos e simulados exibidos nas Figuras 32 e 35, os mesmos são apresentados sobrepostos na Figura 36.

Figura 36 — Módulos medido e simulado de S_{11} e de S_{21} da antena sobre plano de terra: (a) S_{11} e (b) S_{21}

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Na Figura 36, pode-se observar em geral uma boa concordância entre os resultados medidos e simulados.

O diagrama de radiação do protótipo da antena foi medido em uma câmara anecoica blindada construída pela Rantec Division, Emerson Electric Company. Para essa tarefa, uma carga resistiva coaxial de 50 Ω foi utilizada na saída da antena destinada à mesma.

Fotografias do protótipo da antena montado na estrutura de fixação construída para a medição de seu diagrama de radiação são mostradas na Figura 37.

Figura 37 — Montagem para a medição em câmara anecoica da antena sobre plano de terra: instalação para a medição nos planos (a) yz e (b) zx

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

A Figura 38 apresenta os diagramas de radiação de ganho medido e simulado da antena em 3,83 GHz. Dado que a antena é circularmente polarizada nessa frequência, são mostrados os ganhos medido e simulado em polarização circular à direita e à esquerda, respectivamente G_{RH} e G_{LH} , para os cortes nos planos yz e zx (o sistema de coordenadas adotado é o mesmo indicado nas Figuras 31 e 33).

Figura 38 — Diagramas de radiação de ganho medido e simulado da antena sobre plano de terra em 3,83 GHz: corte nos planos (a) yz e (b) zx

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Em 3,83 GHz, o ganho medido (ganho máximo em polarização circular) vale 4,32 dB no plano yz ($\theta = 1^\circ$ e $\phi = 270^\circ$) e 4,46 dB no plano zx ($\theta = 13^\circ$ e $\phi = 0^\circ$). A razão axial medida na direção de ganho máximo é de 0,727 dB no plano yz e de 1,24 dB no plano zx . Para fins de comparação, são mostrados os valores simulados correspondentes aos citados: ganho de 4,73 dB no plano yz ($\theta = 3,5^\circ$ e $\phi = 270^\circ$) e de 4,75 dB no plano zx ($\theta = 4,5^\circ$ e $\phi = 0^\circ$) e razão axial de 0,624 dB no plano yz e de 0,671 dB no plano zx . Verifica-se que ambas as razões axiais medida e simulada encontram-se abaixo de 3 dB, o que indica uma polarização circular satisfatória.

A Figura 38 mostra que o diagrama de radiação medido é direcional e possui uma direção de ganho máximo próxima da direção perpendicular ao plano de terra, como previsto e especificado. O nível de polarização cruzada medido nos planos yz e zx vale cerca de -25 dB em torno da direção de ganho máximo, indicando uma boa pureza de polarização. É possível notar também a presença de radiação na parte traseira da antena como consequência do tamanho finito do plano de terra.

Os diagramas de radiação de ganho medido e simulado em 5,28 GHz são exibidos na Figura 39. Como a antena é linearmente polarizada nessa frequência, os ganhos medido e simulado nas direções θ e ϕ são fornecidos para os cortes nos planos yz e zx .

Figura 39 — Diagramas de radiação de ganho medido e simulado da antena sobre plano de terra em 5,28 GHz: corte nos planos (a) yz e (b) zx

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

O ganho medido (ganho máximo em polarização linear) em 5,28 GHz é de 2,40 dB no plano yz ($\theta = 38^\circ$ e $\phi = 270^\circ$) e de 2,23 dB no plano zx ($\theta = 53^\circ$ e $\phi = 0^\circ$). Os valores

simulados desse parâmetro são: 3,01 dB no plano yz ($\theta = 42,0^\circ$ e $\phi = 270^\circ$) e 2,43 dB no plano zx ($\theta = 49,5^\circ$ e $\phi = 0^\circ$).

É mostrado na Figura 39 um diagrama de radiação medido de característica aproximadamente omnidirecional com um mínimo praticamente na direção perpendicular ao plano de terra e com máximos entre os ângulos de elevação de 30° e de 60° . Esse desempenho é condizente com o previsto e com o especificado, considerando-se as dimensões geométricas finitas do plano de terra, que conduzem à radiação na parte traseira da antena e à mudança da direção de ganho máximo de $\theta = 90^\circ$ para uma que se aproxima de $\theta = 45^\circ$. Pode-se verificar um nível de polarização cruzada por volta de -15 dB em torno da direção de ganho máximo nos planos yz e zx , o que mostra uma pureza de polarização aceitável.

Em geral, uma boa concordância é observada nas Figuras 38 e 39 entre os diagramas de radiação de ganho medido e simulado em copolarização. Os diagramas de radiação de ganho medido e simulado em polarização cruzada apresentam algumas diferenças de formato entre si, porém possuem níveis compatíveis. Esse resultado é admissível, uma vez que a medição de ganho em polarização cruzada é altamente influenciada por reflexões de onda eletromagnética radiada que ocorrem devido a imperfeições do ambiente de caracterização da antena.

4.7 CONCLUSÕES

Foi desenvolvida uma antena de ressoador dielétrico cilíndrica sobre plano de terra com duas bandas de operação seguindo-se a metodologia de projeto proposta neste trabalho.

Em especial, a referida antena consiste no exemplo mais complexo de antena de ressoador dielétrico cilíndrica sobre plano de terra que pode ser projetada por meio da metodologia de projeto mencionada. De fato, o outro exemplo possível é o de uma antena do mesmo tipo com polarização linear nas duas bandas de operação, que requer um circuito de alimentação menos complexo e um esquema de excitação mais simplificado.

Os resultados obtidos no projeto da antena são resumidos na Tabela 4.

Tabela 4 — Resultados da antena sobre plano de terra

Banda	Parâmetro	Especificação	Simulação	Medição
1	Frequência central (f_1)	3,94 GHz	3,79 GHz	3,83 GHz
	Largura de banda fracionária (BW)	—	1,86%	1,57%
	Tipo de diagrama de radiação	Direcional	Direcional	Direcional
	Tipo de polarização	Circular	Circular	Circular
	Ganho total	—	4,78 dB	—
	Razão axial	< 3 dB	0,624 dB	—
	Ganho em polarização circular (plano yz)	—	4,73 dB	4,32 dB
	Razão axial (plano yz)	—	0,624 dB	0,727 dB
	Ganho em polarização circular (plano zx)	—	4,75 dB	4,46 dB
	Razão axial (plano zx)	—	0,671 dB	1,24 dB
2	Frequência central (f_2)	5,42 GHz	5,23 GHz	5,28 GHz
	Largura de banda fracionária (BW)	—	2,11%	2,65%
	Tipo de diagrama de radiação	Omnidirecional	Omnidirecional	Omnidirecional
	Tipo de polarização	Linear	Linear	Linear
	Ganho total	—	3,30 dB	—
	Ganho em polarização linear (plano yz)	—	3,01 dB	2,40 dB
	Ganho em polarização linear (plano zx)	—	2,43 dB	2,23 dB

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Os resultados medidos e simulados indicam que a antena desenvolvida opera de acordo com as especificações definidas para a mesma e apresenta o comportamento previsto pela teoria de antenas de ressoador dielétrico. Adicionalmente, a antena exibe um desempenho satisfatório em termos de largura de banda, de diagrama de radiação, de ganho e de polarização.

Em geral, os resultados medidos são condizentes com os simulados e com as especificações de projeto da antena, o que indica a validade da configuração de antena criada, da metodologia de projeto proposta e dos conceitos teóricos apresentados nesta pesquisa.

Na literatura técnica^{57, 78}, são reportadas duas antenas de ressoador dielétrico cilíndricas excitadas nos modos $HEM_{11\delta}$ e $TM_{01\delta}$, semelhantemente à antena discutida detalhadamente nesta seção. Uma delas⁷⁸ é circularmente polarizada na primeira banda de operação e linearmente polarizada na segunda, enquanto a outra⁵⁷ é linearmente polarizada nas duas bandas de operação. Nesta última antena, o ressoador dielétrico, além de servir como radiador, também funciona como um filtro

de micro-ondas quando excitado no modo $TE_{01\delta}$. Ambas as antenas apresentam uma largura de banda de impedância apreciável em cada modo ressonante e possuem um circuito de alimentação simples e estruturas de excitação independentes, o que facilita o procedimento de projeto. No entanto, cada modo ressonante deve ser excitado por uma porta distinta, e a estrutura de excitação do modo $TM_{01\delta}$ é de fabricação complexa. Além disso, a configuração do radiador sobre um substrato dielétrico aterrado dificulta o processo de cálculo do ressoador para as frequências de operação desejadas.

As outras publicações recentes sobre antenas de ressoador dielétrico de banda dupla apresentam em sua grande maioria antenas que possuem o mesmo tipo de polarização e de diagrama de radiação nas duas bandas de operação^{79–88}. Essas antenas normalmente encontram mais aplicações práticas. Entretanto, a antena desenvolvida no presente trabalho e discutida nesta seção pode ser utilizada, por exemplo, simultaneamente no sistema Global Positioning System (GPS), que se beneficia de antenas com polarização circular e com diagrama de radiação direcional, e em sistemas de WLAN, que frequentemente empregam antenas com radiação omnidirecional e com polarização linear.

5 ANTENA SOBRE SUBSTRATO DIELÉTRICO ATERRADO

Na presente seção, o projeto de uma antena de ressoador dielétrico cilíndrica com duas bandas de operação, ambas com polarização circular, que emprega um ressoador dielétrico sobre um substrato dielétrico aterrado é discutido.

Como mostrado mais adiante, o objetivo de obter polarização circular nas duas bandas de operação da antena conduziu à necessidade da utilização dos modos $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$. O modo $HEM_{12\delta}$ não pode existir em um ressoador dielétrico montado sobre um plano de terra, e, por isso, a configuração de antena sobre substrato dielétrico aterrado é adotada.

No entanto, o emprego desse tipo de configuração de antena leva a desafios adicionais de projeto, visto que não há métodos validados de implementação simples e de execução rápida para computar a frequência de ressonância dos dois modos ressonantes mencionados.

Optou-se então por realizar o projeto da antena abordada nesta seção utilizando-se o mesmo ressoador dielétrico referido na seção 4. Nesse caso, adotou-se como a frequência central das bandas de operação da antena a frequência de ressonância dos modos $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$ resultante de uma simulação eletromagnética, a qual foi realizada sobre o referido ressoador na condição em que ele é disposto sobre o substrato dielétrico escolhido para a construção da antena. Essa simulação inclui todas as estruturas de excitação usadas para os modos ressonantes desejados, de modo a considerar a influência de todas elas na frequência de ressonância dos mesmos.

Assim, essa antena serve como uma prova de conceito que demonstra a operação em polarização circular dentro de duas faixas de frequência distintas.

Por outro lado, é possível, com um esforço adicional, calcular as propriedades do ressoador dielétrico que, quando montado sobre o substrato dielétrico mencionado, apresenta modos $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$ cuja frequência de ressonância coincide com a frequência central das bandas de operação especificadas para a antena. Esse esforço poderia ser realizado, por exemplo, por meio de uma simulação eletromagnética extensiva, que emprega técnicas numéricas rigorosas, ou utilizando-se um modelo

matemático aproximado semelhante ao que é proposto neste trabalho e abordado na seção 6, mas com alterações que consideram o substrato dielétrico.

5.1 CONCEPÇÃO OPERACIONAL

Inicialmente, as seguintes especificações foram escolhidas para a antena projetada:

a) banda de operação inferior (primeira banda):

- diagrama de radiação direcional;
- polarização circular;

b) banda de operação superior (segunda banda):

- diagrama de radiação direcional;
- polarização circular.

Diferentemente do que foi feito para a antena sobre plano de terra (antena apresentada na seção 4), não se especificou a frequência central das bandas de operação da antena discutida na presente seção.

Como visto anteriormente, a metodologia de projeto proposta prevê a especificação da frequência central de cada banda de operação da antena a ser desenvolvida, já que essa informação é um requisito fundamental para o cálculo dos parâmetros do radiador.

No entanto, conforme já discutido antes, não existem métodos validados que ofereçam rapidez, simplicidade e precisão para o cálculo da frequência de ressonância de todos os quatro modos ressonantes de ordem mais baixa da antena de ressoador dielétrico cilíndrica sobre substrato dielétrico aterrado. Além disso, como mostrado mais adiante, um dos tipos de estrutura de excitação utilizados pela antena abordada nesta seção tem uma influência significativa sobre a frequência de ressonância dos modos ressonantes excitados na mesma. Esse efeito depende dos parâmetros geométricos do referido tipo de estrutura de excitação e do radiador, sendo de difícil quantificação.

Dessa forma, o mesmo ressoador dielétrico usado pela antena sobre plano de terra é empregado pela antena discutida nesta seção assumindo-se que o ressoador possui as propriedades geométricas e de material necessárias para obter a frequência central desejada das bandas de operação da antena.

O passo seguinte à definição das especificações da antena é a determinação de seus modos ressonantes.

Levando-se em conta a antena de ressoador dielétrico cilíndrica, a Tabela 2 indica que os modos $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$ devem ser utilizados. Dado que o modo $HEM_{11\delta}$ tem uma frequência de ressonância inferior à do $HEM_{12\delta}$, deve-se empregar o modo $HEM_{11\delta}$ para a primeira banda de operação e o modo $HEM_{12\delta}$ para a segunda.

Visto que o modo $HEM_{12\delta}$ requer o emprego da configuração de antena sobre substrato dielétrico aterrado, a mesma foi selecionada.

5.2 CÁLCULO DO RESSOADOR DIELÉTRICO

Em uma antena de ressoador dielétrico sobre substrato dielétrico aterrado, a frequência de ressonância de seus modos ressonantes depende, além dos parâmetros do radiador, das propriedades do substrato dielétrico, conforme já exposto.

Nesse caso, o substrato dielétrico da antena deve ser escolhido antes do cálculo do ressoador dielétrico, de acordo com o procedimento definido pela metodologia de projeto proposta.

Sendo assim, escolheu-se um substrato dielétrico com as seguintes propriedades:

- a) espessura: 0,813 mm;
- b) constante dielétrica: 3,55 (material RO4003, da Rogers Corporation);
- c) tangente de perda: 0,0027 (material RO4003, da Rogers Corporation);
- d) condutividade elétrica do revestimento metálico: $5,8 \cdot 10^7$ S/m (cobre);
- e) espessura do revestimento metálico: 0,017 mm;
- f) largura e comprimento: 40 mm $\times$ 40 mm (como na antena sobre plano de terra).

Esse substrato dielétrico é apropriado para a construção do circuito de alimentação, dado que possui uma perda dielétrica baixa e conduz a linhas de microfitas com largura aceitável (1,82 mm para uma impedância característica de 50 Ω , como visto mais adiante).

Conforme mencionado anteriormente, assumiu-se que o ressoador dielétrico possui as mesmas propriedades do utilizado pela antena sobre plano de terra, as quais são:

$$\epsilon_{rd} = 37,4, a = 6,00 \text{ mm e } h = 5,15 \text{ mm.}$$

5.3 PROJETO DAS ESTRUTURAS DE EXCITAÇÃO

As estruturas de excitação foram projetadas com o auxílio de simulação computacional empregando-se os programas Advanced Design System e CST Studio Suite.

5.3.1 Excitação do modo $HEM_{11\delta}$

O método de excitação escolhido para o modo $HEM_{11\delta}$ foi a excitação por fita conforme⁸⁹.

A fita conforme é uma estrutura de excitação conveniente para antenas de ressonador dielétrico sobre substrato dielétrico aterrado. Sua configuração geométrica é mostrada na Figura 40.

Figura 40 — Antena de ressonador dielétrico excitada por fita conforme: (a) vista em corte lateral e (b) vista frontal

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Na excitação por fita conforme, uma fita metálica retangular de largura w_{cs} e de comprimento l_{cs} é colocada sobre a superfície lateral do radiador de modo a amoldar-se sobre esta. Uma das extremidades da fita é conectada a uma linha de microfita construída sobre o substrato dielétrico, enquanto a outra é deixada em circuito aberto na superfície do ressonador dielétrico. Esse método de excitação é adequado para o modo $HEM_{11\delta}$ ⁸⁹.

O casamento de impedância entre a linha de microfita e o radiador é afetado tanto por w_{cs} quanto por l_{cs} . Geralmente, a largura da fita conforme é igual à da linha de microfita, e o comprimento da fita é o parâmetro utilizado para otimizar o referido casamento de impedância.

A fita conforme deve ter uma forte adesão e uma boa conformidade à superfície do ressonador dielétrico, uma vez que a presença de uma camada de ar ou de outro material isolante entre a fita e o radiador afeta a impedância de entrada da antena. Por isso, recomenda-se o uso de uma fita metálica com adesivo condutivo, de forma a evitar a presença de uma camada de material isolante entre o radiador e a fita.

Levando-se em conta as propriedades do ressonador e do substrato dielétricos definidas anteriormente, uma fita conforme para a excitação do modo HEM_{110} foi projetada. Os parâmetros da fita foram otimizados manualmente com o auxílio de simulação eletromagnética, realizada por meio do pacote CST Microwave Studio, de forma a obter a máxima perda de retorno para esse modo ressonante.

As seguintes condições foram assumidas para essa tarefa:

- uma fita de 0,05 mm de espessura feita com cobre (disponível comercialmente);
- uma linha de microfita de alimentação de impedância característica $50\ \Omega$, a qual possui 1,82 mm de largura, calculada por meio da ferramenta LineCalc;
- o radiador situa-se no centro do substrato dielétrico;
- a linha de microfita estende-se desde a parte da fita que toca a superfície do substrato dielétrico até a borda mais próxima deste.

Considerando-se que a fita possui a mesma largura da linha de microfita, os parâmetros obtidos após a otimização da fita foram: $w_{cs} = 1,82\text{ mm}$ e $l_{cs} = 1\text{ mm}$.

A perda de retorno simulada em função da frequência para o ressonador dielétrico excitado pela fita conforme projetada é exibida na Figura 41.

Figura 41 — Perda de retorno simulada do ressonador dielétrico excitado por fita conforme

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Verifica-se na Figura 41 uma excitação com alta perda de retorno para o modo $\text{HEM}_{11\delta}$, e constata-se que o modo $\text{HEM}_{12\delta}$ não é eficientemente excitado. Observa-se ainda que o modo $\text{HEM}_{21\delta}$, que ocorre em uma frequência próxima de 6,6 GHz, também é fracamente excitado. Todos esses modos ressonantes foram identificados visualizando-se sua distribuição de campo eletromagnético simulada.

A frequência de ressonância simulada do modo $\text{HEM}_{11\delta}$ vale 4,62 GHz, e a largura de banda de impedância fracionária simulada do referido modo ressonante é de 3,90%, que pode ser vista como satisfatória considerando-se a alta constante dielétrica do radiador.

A Figura 42 mostra o diagrama de radiação de ganho simulado em 4,62 GHz do ressonador dielétrico excitado pela fita conforme. É exibido o ganho nas direções θ e ϕ para os cortes nos planos yz e zx (adota-se o sistema de coordenadas indicado na Figura 40).

Figura 42 — Diagrama de radiação de ganho simulado do ressonador dielétrico excitado por fita conforme em 4,62 GHz: corte nos planos (a) yz e (b) zx

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Pode-se observar na Figura 42 o comportamento esperado para o modo $\text{HEM}_{11\delta}$: um diagrama de radiação direcional com polarização linear. Adicionalmente, constata-se um lóbulo de radiação traseiro, o que é coerente com o fato de o plano de terra ser finito. O ganho simulado vale 5,88 dB.

5.3.2 Excitação do modo $HEM_{12\delta}$

O uso do modo $HEM_{12\delta}$ no ressoador dielétrico cilíndrico não é reportado frequentemente na literatura técnica. Além disso, verificou-se durante a realização desta pesquisa que a excitação eficaz desse modo ressonante não é facilmente obtida. De fato, somente alguns métodos de excitação específicos^{59, 80, 90–92} mostram-se adequados para excitar o modo ressonante mencionado. De todos eles, apenas um⁹⁰ é de fácil fabricação e possibilita a excitação de dois modos $HEM_{12\delta}$ degenerados ortogonais entre si, condição utilizada nesta pesquisa para obter polarização circular. Esse método de excitação, que é referido neste texto como excitação por plaqueta não ressonante, é ilustrado na Figura 43, na qual o radiador se encontra desenhado na forma transparente de modo a permitir que se vejam as estruturas situadas abaixo do mesmo.

Figura 43 — Antena de ressoador dielétrico excitada por plaqueta não ressonante: (a) vista em corte lateral e (b) vista frontal

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Na excitação por plaqueta não ressonante, uma plaqueta metálica circular é impressa sobre o substrato dielétrico e situa-se entre este e o ressoador dielétrico. A plaqueta, concêntrica ao radiador e de diâmetro inferior ao do mesmo, é dita não ressonante porque ela não apresenta um modo ressonante próprio na frequência de operação da antena e, portanto, não se comporta como um radiador. Ela apenas se trata de um mecanismo de acoplamento de campo eletromagnético ao ressoador dielétrico para a excitação do modo $HEM_{12\delta}$ no mesmo. Uma linha de microfita é conectada à plaqueta e estende-se até o lado de fora do radiador.

Inicialmente, procurou-se utilizar uma plaqueta não ressonante para excitar o modo $HEM_{12\delta}$ no ressoador dielétrico especificado para a antena. No entanto, não foi

possível obter dimensões geométricas otimizadas para a plaqueta que conduzissem a um casamento de impedância satisfatório entre a linha de microfita e o radiador.

Por isso, foi proposta neste trabalho uma estrutura de excitação alternativa⁹³, que consiste em uma modificação da plaqueta ressonante. Essa nova estrutura de excitação para o modo $HEM_{12\delta}$ foi denominada plaqueta não ressonante modificada e é mostrada na Figura 44, na qual o radiador é também apresentado na forma transparente para facilitar a visualização das estruturas localizadas abaixo do mesmo.

Figura 44 — Antena de ressoador dielétrico excitada por plaqueta não ressonante modificada: (a) vista em corte lateral e (b) vista frontal

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

A excitação por plaqueta não ressonante modificada também emprega uma plaqueta metálica circular não ressonante como forma de excitar o modo $HEM_{12\delta}$. O ressoador dielétrico é colocado concentricamente sobre essa plaqueta, que é gravada sobre o substrato dielétrico e possui diâmetro d_{np} e espessura t_{np} . Uma linha de microfita estreita de largura w_{np} conecta a plaqueta a uma linha de microfita padrão, situada do lado de fora do radiador, por meio de uma inserção de comprimento l_{np} . Observa-se que a linha de microfita estreita e a inserção correspondem às melhorias que são introduzidas pelo método de excitação por plaqueta não ressonante modificada.

A linha de microfita estreita é um trecho de linha de transmissão que, levando-se em consideração o substrato dielétrico e o radiador, tem a mesma impedância característica da linha de microfita padrão. Ela é dita estreita porque sua largura é muito menor do que a da linha de microfita padrão, uma vez que o ressoador dielétrico possui uma alta constante dielétrica.

O cálculo da largura da linha de microfita estreita foi realizado nesta pesquisa com o auxílio de simulação eletromagnética, utilizando-se a ferramenta Momentum. Para

essa tarefa, empregou-se um modelo aproximado que assume uma linha de transmissão cuja seção transversal é ilustrada na Figura 45.

Figura 45 — Modelo aproximado para a linha de microfita estreita

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

No referido modelo aproximado, um meio dielétrico de altura infinita (semi-infinito) com constante dielétrica ϵ_{rd} modela o radiador e é colocado diretamente sobre a linha de microfita estreita, a qual repousa sobre o substrato dielétrico. A região restante entre o meio e o substrato dielétricos é preenchido por vácuo, de modo a simular a camada de ar presente em uma antena real fabricada. Para as propriedades do substrato e do ressoador dielétricos da antena detalhada nesta seção, a simulação do modelo conduziu a $w_{np} = 0,15$ mm para uma impedância característica de 50Ω .

Na excitação por plaqueta não ressonante (tradicional), a linha de microfita estreita não existe, e a linha de microfita padrão estende-se desde antes da borda do ressoador dielétrico até a plaqueta não ressonante, a qual é conectada diretamente sem o uso de uma inserção. Dessa forma, o segmento de linha de microfita abaixo do radiador e acima do substrato dielétrico atua como um trecho de linha de transmissão de impedância característica baixa. Quando a constante dielétrica do ressoador dielétrico é alta, como no caso das antenas projetadas neste trabalho, esse trecho de linha de transmissão tem uma impedância característica notadamente baixa e um comprimento elétrico, em geral, não desprezível (a depender do raio da plaqueta). Isso dificulta ou mesmo impossibilita um casamento de impedância adequado entre a linha de microfita padrão e o radiador.

Na excitação por plaqueta não ressonante modificada, esse problema não ocorre, e o casamento de impedância entre a linha de microfita padrão e o radiador pode ser ajustado para uma ampla faixa de constante dielétrica do mesmo alterando-se d_{np} e l_{np} . Porém, a análise desse tipo de estrutura de excitação⁹³ mostra que há um valor mínimo de d_{np} para que o modo $HEM_{12\delta}$ possa ser excitado corretamente, ou seja, com uma distribuição de campo eletromagnético pouco distorcida e com um diagrama

de radiação direcional cuja direção de ganho máximo é paralela ao eixo axial do radiador. Adicionalmente, essa análise também indica que diferentes valores de diretividade e de largura de banda de impedância podem ser obtidos para variados valores de d_{np} e de l_{np} .

É importante mencionar que esse método de excitação tem uma influência considerável sobre a frequência de ressonância dos modos ressonantes do ressoador dielétrico, sendo mais acentuada quanto maior for o tamanho da plaqueta não ressonante modificada. Isso ocorre porque a plaqueta é feita com material de alta condutividade elétrica, o que altera a condição de contorno do ressoador dielétrico. A quantificação dessa influência, entretanto, é matematicamente complexa, devendo ser computada com o auxílio de simulação eletromagnética⁹³.

Uma plaqueta não ressonante modificada foi projetada para a excitação do modo HEM_{120} com o auxílio de simulação eletromagnética. Os parâmetros da plaqueta foram otimizados manualmente de forma a obter a máxima perda de retorno para esse modo ressonante. Para isso, foram consideradas as seguintes condições:

- a) uma linha de microfita de alimentação de impedância característica 50Ω (padrão, com 1,82 mm de largura);
- b) o radiador é colocado no centro do substrato dielétrico;
- c) a linha de microfita inicia-se na borda do ressoador dielétrico e termina na borda do substrato dielétrico mais próxima.

Admitiram-se também as mesmas propriedades para o substrato e para o ressoador dielétricos estabelecidas no projeto da estrutura de excitação do modo HEM_{110} .

Foram obtidos os seguintes parâmetros após a otimização da plaqueta não ressonante modificada: $d_{np} = 8$ mm, $l_{np} = 1$ mm e $w_{np} = 0,15$ mm.

Um protótipo de ressoador dielétrico excitado por plaqueta não ressonante modificada foi construído exclusivamente para a verificação desse método de excitação proposto. A Figura 46 exhibe fotografias de tal protótipo.

Figura 46 — Protótipo de um ressonador dielétrico excitado por plaqueta não ressonante modificada: vista em perspectiva frontal (a) com e (b) sem o ressonador dielétrico

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Os métodos utilizados para fabricar esse protótipo e para caracterizá-lo são os mesmos usados para o protótipo final da antena projetada e são tratados mais adiante.

As perdas de retorno simulada e medida em função da frequência para o ressonador dielétrico excitado por plaqueta não ressonante modificada são exibidas na Figura 47.

Figura 47 — Perdas de retorno simulada e medida do ressonador dielétrico excitado por plaqueta não ressonante modificada

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Na Figura 47, verifica-se que o modo $\text{HEM}_{12\delta}$ é excitado pela plaqueta não ressonante modificada com alta perda de retorno. Em contrapartida, não se observa uma excitação eficiente do modo $\text{HEM}_{11\delta}$. Pode-se ver também que o modo $\text{HEM}_{21\delta}$ é excitado em uma frequência em torno de 5,9 GHz.

As frequências de ressonância medida e simulada do modo $\text{HEM}_{12\delta}$ valem 6,18 GHz e 6,20 GHz, respectivamente. As larguras de banda de impedância fracionárias medida e simulada desse modo ressonante são, respectivamente, 0,418% e 0,403%.

Apesar de as larguras de banda de impedância fracionárias medida e simulada do modo $\text{HEM}_{12\delta}$ serem relativamente inferiores ao respectivo valor simulado do modo

HEM_{11δ}, elas ainda podem ser considerados razoáveis, levando-se em conta a alta constante dielétrica do radiador. Ainda na Figura 47, uma concordância muito boa entre a perda de retorno medida e a simulada é observada.

A Figura 48 apresenta os diagramas de radiação de ganho medido e simulado do ressonador dielétrico excitado pela plaqueta não ressonante modificada para a frequência de 6,18 GHz. É mostrado o ganho nas direções θ e ϕ para os cortes nos planos yz e zx (o mesmo sistema de coordenadas indicado na Figura 44 é utilizado).

Figura 48 — Diagramas de radiação de ganho medido e simulado do ressonador dielétrico excitado por plaqueta não ressonante modificada em 6,18 GHz: corte nos planos (a) yz e (b) zx

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

A Figura 48 mostra um diagrama de radiação direcional com polarização linear, o que condiz com o desempenho previsto para o modo HEM_{12δ}. Ademais, um lóbulo de radiação traseiro é observado, o qual ocorre devido ao tamanho finito do plano de terra. Os ganhos medido e simulado são iguais a 6,00 dB e a 5,22 dB, respectivamente, e uma ligeira inclinação de cerca de 10° entre a direção de ganho máximo e a direção perpendicular ao plano de terra é observada. Verifica-se uma boa correspondência entre os diagramas de radiação medido e simulado, o que confirma o funcionamento do método de excitação por plaqueta não ressonante modificada.

5.3.3 Otimização e simulação completa das estruturas de excitação

Visando à obtenção de polarização circular na banda de operação inferior, um par de fitas conformes posicionadas ortogonalmente entre si⁶⁵ é utilizado para excitar dois modos HEM_{11δ} degenerados e perpendiculares um ao outro. A polarização circular na

banda superior é obtida empregando-se uma plaqueta não ressonante modificada com duas linhas de microfita estreitas também geometricamente separadas por um ângulo de 90° , com o intuito de excitar dois modos $HEM_{12\delta}$ degenerados e ortogonais entre si.

Todas as estruturas de excitação mencionadas são dispostas simetricamente, como ilustrado na Figura 49, na qual o radiador é apresentado transparente para permitir a visualização das estruturas localizadas abaixo do mesmo.

Figura 49 — Radiador e estruturas de excitação da antena sobre substrato dielétrico aterrado

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Devido a essa simetria, cada estrutura de excitação de um mesmo tipo “enxerga” o mesmo ambiente geométrico e eletromagnético.

É importante lembrar que os modos ressonantes ortogonais responsáveis pela geração de polarização circular devem ter a mesma amplitude de campo eletromagnético e uma diferença de fase de 90° entre si, o que é conseguido com a utilização do circuito de alimentação.

Na configuração mostrada na Figura 49, a operação de cada estrutura de excitação é afetada pela presença de todas as outras.

Portanto, simulou-se a estrutura completa do ressoador dielétrico com todas as estruturas de excitação levando-se em conta dois casos distintos:

- a) excitação do modo $HEM_{11\delta}$: uma fita conforme é alimentada enquanto a entrada da outra é terminada por uma carga resistiva ideal de $50\ \Omega$; a entrada de cada linha de microfita estreita permanece em circuito aberto;
- b) excitação do modo $HEM_{12\delta}$: uma linha de microfita estreita é alimentada enquanto a entrada da outra é terminada por uma carga resistiva ideal de $50\ \Omega$; a entrada de cada fita conforme permanece em circuito aberto.

Esses casos simulam a operação das estruturas de excitação sob condições normais de funcionamento na frequência de ressonância do modo ressonante para o qual foram projetadas. Conforme mostrado mais adiante, as terminações em circuito aberto e em uma carga resistiva ideal de $50\ \Omega$ modelam a impedância vista na entrada das estruturas de excitação em direção ao circuito de alimentação.

Após a simulação da estrutura mostrada na Figura 49, houve a necessidade de otimizar os parâmetros das estruturas de excitação para que a perda de retorno relativa ao modo ressonante excitado por cada uma delas fosse satisfatória. Os parâmetros finais obtidos após a referida otimização foram: $w_{cs} = 1,82\text{ mm}$ e $l_{cs} = 3\text{ mm}$, $d_{np} = 8\text{ mm}$, $l_{np} = 0,5\text{ mm}$ e $w_{np} = 0,15\text{ mm}$.

A Figura 50 apresenta a perda de retorno simulada para cada um dos casos mencionados (excitação do modo $\text{HEM}_{11\delta}$ e do modo $\text{HEM}_{12\delta}$) com as estruturas de excitação já otimizadas. Para fins de comparação, são também exibidos na Figura 50 os resultados simulados mostrados nas Figuras 41 e 47, que se referem à excitação dos modos $\text{HEM}_{11\delta}$ e $\text{HEM}_{12\delta}$ com uma estrutura de excitação simples (única).

Figura 50 — Perda de retorno simulada para o ressonador dielétrico da antena sobre substrato dielétrico aterrado: (a) excitação dos modos $\text{HEM}_{11\delta}$ e (b) $\text{HEM}_{12\delta}$

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

A Figura 50 indica que, quando todas as estruturas de excitação estão presentes, o modo $\text{HEM}_{11\delta}$ tem sua frequência de ressonância significativamente deslocada (de 4,62 GHz para 4,00 GHz), e a frequência de ressonância do modo $\text{HEM}_{12\delta}$ é ligeiramente alterada (de 6,20 GHz para 6,14 GHz), em comparação ao caso em que só há uma estrutura de excitação. A largura de banda de impedância fracionária simulada do modo $\text{HEM}_{11\delta}$ vale 1,90%, e a do modo $\text{HEM}_{12\delta}$ é igual a 0,651% (para uma estrutura de excitação única, esse valor é de 3,90% e de 0,418%, respectivamente).

Essa diferença considerável de resultado para o modo $HEM_{11\delta}$ pode ser explicada pelo fato de a plaqueta não ressonante modificada introduzir uma condição de contorno não prevista para o modo $HEM_{11\delta}$ quando excitado somente por uma fita conforme. Por outro lado, a referida condição de contorno já está presente no caso do modo $HEM_{12\delta}$ excitado por uma plaqueta ressonante modificada, de forma que a frequência de ressonância desse modo não é significativamente afetada.

Apesar disso, para ambos os modos $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$, o ganho e o diagrama de radiação simulados na frequência de ressonância assemelham-se aos obtidos isoladamente com uma estrutura de excitação única.

Esses resultados indicam que o modo $HEM_{11\delta}$ excitado por uma fita conforme não se acopla eficientemente à outra, e o modo $HEM_{12\delta}$ originário de uma linha de microfita estreita também não se acopla de forma eficaz à outra. De fato, se esses acoplamentos estivessem presentes, o que seria indesejável, a simulação da estrutura mostrada na Figura 49 resultaria em um ganho mais baixo, dado que parte da potência do modo ressonante em operação seria absorvida pela carga resistiva ideal de $50\ \Omega$.

Sendo assim, tem-se: $f_0^{(HEM_{11\delta})} = f_1 = 4,00\text{ GHz}$ e $f_0^{(HEM_{12\delta})} = f_2 = 6,14\text{ GHz}$.

5.4 PROJETO DO CIRCUITO DE ALIMENTAÇÃO

Para garantir o desempenho especificado para a antena desenvolvida, o circuito de alimentação deve prover às estruturas de excitação um sinal de alimentação com as seguintes características:

- a) na frequência de ressonância do modo $HEM_{11\delta}$, cada fita conforme deve receber metade da potência total de entrada da antena, e a diferença de fase entre os sinais recebidos por essas fitas deve ser de 90° . Nessa mesma frequência, a impedância vista na entrada das linhas de microfita estreitas em direção ao circuito de alimentação deve ser infinita para evitar que haja acoplamento do modo $HEM_{11\delta}$ às mesmas;
- b) na frequência de ressonância do modo $HEM_{12\delta}$, cada linha de microfita estreita deve receber metade da potência total de entrada da antena, e a diferença de fase entre os sinais recebidos por essas linhas de microfita deve valer 90° . Ainda na referida frequência, a impedância vista na entrada das fitas conformes

em direção ao circuito de alimentação deve ser infinita a fim de prevenir o acoplamento do modo $HEM_{12\delta}$ às mesmas.

Visando a satisfazer essas exigências, criou-se o circuito de alimentação esquematizado na Figura 51.

Figura 51 — Circuito de alimentação da antena sobre substrato dielétrico aterrado

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Na Figura 51, ① e ② denotam os nós iniciais de interconexão, e todas as linhas de transmissão representadas têm uma impedância característica de 50Ω .

O circuito de alimentação da antena possui três subcircuitos principais:

- um filtro tipo A que age como um circuito aberto na frequência de ressonância do modo $HEM_{11\delta}$ e como um curto-circuito para o terra na frequência de ressonância do modo $HEM_{12\delta}$;
- um filtro tipo B que se comporta como um curto-circuito para o terra na frequência de ressonância do modo $HEM_{11\delta}$ e como um circuito aberto na frequência de ressonância do modo $HEM_{12\delta}$;
- um acoplador híbrido de 90° de banda dupla que opera na frequência de ressonância dos modos $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$.

Na situação em que o circuito de alimentação opera na frequência de ressonância do modo $HEM_{11\delta}$, o acoplador híbrido de 90° de banda dupla divide o sinal de entrada da antena em dois sinais de mesma potência que possuem uma diferença de fase de 90° entre si. Em seguida, cada um desses sinais é transmitido para uma fita conforme, o que permite a geração de polarização circular. Isso acontece porque a impedância vista nos nós ① e ② em direção à respectiva linha de microfita estreita é infinita. Essa condição é imposta pelas duas instâncias do filtro tipo B, que funcionam como um curto-circuito para o terra e situam-se a uma distância de um múltiplo ímpar de um quarto de comprimento de onda guiada dos nós citados.

Ainda na frequência de ressonância do modo $HEM_{11\delta}$, ambas as instâncias do filtro tipo A agem como um circuito aberto e teoricamente não têm influência sobre o sinal transmitido a cada fita conforme. Cada instância do filtro tipo B situa-se a um múltiplo ímpar de um quarto de comprimento de onda guiada de uma das linhas de microfita estreitas. Dessa forma, a impedância vista em cada uma destas em direção à entrada da antena é infinita, o que impede o acoplamento do modo $HEM_{11\delta}$ às linhas de microfita estreitas.

Analogamente, na frequência de ressonância do modo $HEM_{12\delta}$, o sinal de entrada da antena é separado pelo acoplador híbrido de 90° de banda dupla em dois sinais de mesma potência com uma diferença relativa de fase de 90° . Cada um desses sinais é recebido por uma linha de microfita estreita, de forma a possibilitar a geração de polarização circular. Isso ocorre porque a impedância vista nos nós ① e ② em direção à respectiva fita conforme é infinita. Essa condição é imposta pelas duas instâncias do filtro tipo A, que agem como um curto-circuito para o terra e são colocadas a uma distância de um múltiplo ímpar de um quarto de comprimento de onda guiada dos nós mencionados.

Também na frequência de ressonância do modo $HEM_{12\delta}$, as duas instâncias do filtro tipo B comportam-se como um circuito aberto e a princípio não afetam o sinal recebido por cada linha de microfita estreita. Cada fita conforme localiza-se a um múltiplo ímpar de um quarto de comprimento de onda guiada de uma instância do filtro tipo A. Assim, a impedância vista em cada fita conforme em direção à entrada da antena é infinita, o que evita que o modo $HEM_{12\delta}$ se acople às mesmas.

Pode-se verificar, portanto, que o circuito de alimentação evita que sinais na frequência de ressonância do modo $HEM_{11\delta}$ alcance as linhas de microfita estreitas e

impede que sinais na frequência de ressonância do modo $HEM_{12\delta}$ sejam transmitidos às fitas conformes. Dessa forma, obtém-se um desempenho ótimo para a antena, visto que cada estrutura de excitação excita eficientemente apenas o modo ressonante para o qual é destinada.

Com o intuito de alcançar o melhor desempenho em termos de perdas e de largura de banda e de obter a minimização da área ocupada pelo circuito de alimentação, adotou-se $N_1 = N_2 = N_4 = 0$ e $N_3 = 2$. Pode-se verificar que a escolha de $N_3 < 2$ impossibilitaria a realização prática do circuito.

O circuito de alimentação foi projetado considerando-se a frequência de ressonância simulada dos modos $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$ ($f_0^{(HEM11\delta)} = 4,00$ GHz e $f_0^{(HEM12\delta)} = 6,14$ GHz).

5.4.1 Filtros

O filtro tipo A é o mesmo utilizado pela antena sobre plano de terra, o qual pode ser visto na Figura 25.

Deve-se ter para esse filtro $f_{op} = f_0^{(HEM11\delta)} = 4,00$ GHz e $f_{sh} = f_0^{(HEM12\delta)} = 6,14$ GHz. Por meio da eq. (37), calcula-se $\theta_{Aa} = 90^\circ$ (em $f_0^{(HEM12\delta)}$) para $o = q = 0$, o que assegura dimensões reduzidas para o filtro. Escolheu-se a impedância característica dos tocos dentro do intervalo entre 35Ω e 130Ω , que equivale a uma faixa de valores realizáveis na prática para o substrato dielétrico escolhido para a antena. Para uma largura de banda máxima em torno da frequência de rejeição, o filtro tipo A requer que a impedância de ambos os tocos seja máxima. Portanto, obtém-se $Z_{Aa} = Z_{Ab} = 130 \Omega$. A eq. (38) leva a $\theta_{Ab} = 31,4^\circ$ (em $f_0^{(HEM11\delta)}$).

O filtro tipo B também é o mesmo empregado pela antena sobre plano de terra, mostrado na Figura 26.

Para esse filtro, deve-se ter $f_{op} = f_0^{(HEM12\delta)} = 6,14$ GHz e $f_{sh} = f_0^{(HEM11\delta)} = 4,00$ GHz. Calcula-se a partir da eq. (39) $\theta_{Ba} = 90^\circ$ (em $f_0^{(HEM11\delta)}$) para $o = q = 0$. Para maximizar a largura de banda do filtro em torno da frequência de rejeição, deve-se escolher a impedância máxima para o primeiro toco e a mínima para o segundo. Dessa maneira, tem-se $Z_{Ba} = 130 \Omega$ e $Z_{Bb} = 35 \Omega$. A eq. (40) conduz a $\theta_{Bb} = 13,5^\circ$ (em $f_0^{(HEM12\delta)}$).

5.4.2 Acoplador híbrido de 90° de banda dupla

O acoplador híbrido de 90° tradicional, apresentado anteriormente na Figura 27, é normalmente destinado a operar em uma frequência específica. Por outro lado, ele também funciona em frequências que são múltiplos ímpares desta (harmônicos ímpares). No entanto, em um sistema de comunicação sem fio que opera em duas faixas de frequência distintas, a frequência central da segunda banda de operação não é necessariamente um harmônico ímpar da frequência central da primeira.

A literatura técnica apresenta dois tipos simples de acoplador híbrido de 90° capazes de funcionar em duas frequências distintas arbitrárias f_1 e f_2 : o acoplador tipo Π ^{94, 95} e o tipo T^{96, 97}.

Os acopladores tipo Π e tipo T são obtidos substituindo-se cada trecho de linha de transmissão do anel que forma o acoplador híbrido de 90° tradicional por um conjunto de três trechos de linha de transmissão conectados em um arranjo tipo Π ou tipo T, respectivamente. Os referidos arranjos, denominados neste texto circuitos tipo Π e tipo T, são mostrados na Figura 52, e a topologia de circuito dos acopladores tipo Π e tipo T é exibida na Figura 53.

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Nas Figuras 52 e 53, Z_{Π} e $Z_{\Pi}/\sqrt{2}$ representam a impedância característica dos trechos de linha de transmissão que constituem o anel do acoplador tipo Π ; Z_T e $Z_T/\sqrt{2}$ referem-se à impedância característica dos trechos de linha de transmissão que formam o anel do acoplador tipo T; θ_{Π} e θ_T denotam o comprimento elétrico dos trechos de linha de transmissão que compõem o anel dos acopladores tipo Π e tipo T, respectivamente; Z_{Π}' e Z_T' correspondem às impedâncias em paralelo inseridas ao longo do anel dos acopladores tipo Π e tipo T, respectivamente.

É conveniente recordar que P_1 é a porta de entrada dos acopladores tipo Π e tipo T, P_2 e P_3 são suas portas de saída, e P_4 é sua porta isolada, que normalmente recebe uma carga resistiva de 50Ω .

Nota-se que, no caso do acoplador tipo Π , cada nó referente a uma porta possui duas impedâncias em paralelo: uma de valor Z_{Π}' e outra de valor $Z_{\Pi}/\sqrt{2}$. Elas podem ser condensadas em uma só impedância equivalente igual a $Z_{\Pi}'/(1+\sqrt{2})$, como mostrado na Figura 53(a).

Os circuitos tipo Π e tipo T, quando empregados em seu respectivo acoplador, devem ter, em ambas as frequências em que este é destinado a operar, o mesmo comportamento exibido pelo trecho de linha de transmissão que substituem no acoplador híbrido de 90° tradicional, ou seja, impedância característica Z_0 (ou $Z_0/\sqrt{2}$) e comprimento elétrico de 90° .

Em um caso genérico, os acopladores tipo Π e tipo T podem ser projetados para obter tanto 90° quanto -90° para a diferença de fase $\Delta\phi_1$ entre os sinais de P_3 e P_2 em f_1 e também para a diferença de fase $\Delta\phi_2$ entre os sinais de P_3 e P_2 em f_2 .

Usando a teoria de linhas de transmissão^{17, 18, 22}, foi derivado neste trabalho o conjunto completo das equações para os acopladores tipo Π e tipo T, considerando-se todas as combinações possíveis de $\Delta\phi_1$ e de $\Delta\phi_2$ (tipos de resposta), o que não é encontrado na literatura técnica e, por isso, é apresentado neste documento. A dedução completa das expressões matemáticas referentes a tais acopladores é exibida no Apêndice desta tese.

As Tabelas 5 e 6 apresentam o conjunto de equações relativo aos acopladores tipo Π e tipo T, respectivamente.

Tabela 5 — Equações para o acoplador tipo Π

Tipo de resposta	$\Delta\phi_2 = -\frac{\pi}{2}$	$\Delta\phi_2 = +\frac{\pi}{2}$
$\Delta\phi_1 = -\frac{\pi}{2}$	$Z_{\Pi} = \begin{cases} \frac{Z_0}{\sin\left(\frac{f_1}{f_2 + f_1} o\pi\right)}, o = 1, 3, 5, \\ \frac{Z_0}{\sin\left(\frac{f_1}{f_2 - f_1} o\pi\right)}, o = 2, 4, 6, \end{cases} \quad (41)$	$Z_{\Pi} = \begin{cases} \frac{Z_0}{\sin\left(\frac{f_1}{f_2 - f_1} o\pi\right)}, o = 1, 3, 5, \\ \frac{Z_0}{\sin\left(\frac{f_1}{f_2 + f_1} o\pi\right)}, o = 2, 4, 6, \end{cases} \quad (43)$
	$\theta_{\Pi} = \begin{cases} \frac{o\pi}{2}, \text{ para } o \text{ ímpar} \\ \frac{f_2 + f_1}{f_2 - f_1} \frac{o\pi}{2}, \text{ para } o \text{ par} \end{cases} \text{ em } f_M \quad (42)$	$\theta_{\Pi} = \begin{cases} \frac{f_2 + f_1}{f_2 - f_1} \frac{o\pi}{2}, \text{ para } o \text{ ímpar} \\ \frac{o\pi}{2}, \text{ para } o \text{ par} \end{cases} \text{ em } f_M \quad (44)$
$\Delta\phi_1 = +\frac{\pi}{2}$	$Z_{\Pi} = \begin{cases} \frac{-Z_0}{\sin\left(\frac{f_1}{f_2 - f_1} o\pi\right)}, o = 1, 3, 5, \\ \frac{-Z_0}{\sin\left(\frac{f_1}{f_2 + f_1} o\pi\right)}, o = 2, 4, 6, \end{cases} \quad (45)$	$Z_{\Pi} = \begin{cases} \frac{-Z_0}{\sin\left(\frac{f_1}{f_2 + f_1} o\pi\right)}, o = 1, 3, 5, \\ \frac{-Z_0}{\sin\left(\frac{f_1}{f_2 - f_1} o\pi\right)}, o = 2, 4, 6, \end{cases} \quad (46)$
	θ_{Π} dado pela eq. (44)	θ_{Π} dado pela eq. (42)

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Tabela 6 — Equações para o acoplador tipo T

Tipo de resposta	$\Delta\phi_2 = -\frac{\pi}{2}$	$\Delta\phi_2 = +\frac{\pi}{2}$
$\Delta\phi_1 = -\frac{\pi}{2}$	$Z_T = \frac{Z_0 \sin\left(\frac{2f_1}{f_2 - f_1} o\pi\right)}{1 - \cos\left(\frac{2f_1}{f_2 - f_1} o\pi\right)}, o = 1, 2, 3, \quad (47)$	$Z_T = \frac{Z_0 \sin\left(\frac{2f_1}{f_2 + f_1} o\pi\right)}{1 - \cos\left(\frac{2f_1}{f_2 + f_1} o\pi\right)}, o = 1, 2, 3, \quad (49)$
	$\theta_T = \frac{f_2 + f_1}{f_2 - f_1} \frac{o\pi}{2} \text{ em } f_M \quad (48)$	$\theta_T = \frac{o\pi}{2} \text{ em } f_M \quad (50)$
$\Delta\phi_1 = +\frac{\pi}{2}$	$Z_T = \frac{-Z_0 \sin\left(\frac{2f_1}{f_2 + f_1} o\pi\right)}{1 - \cos\left(\frac{2f_1}{f_2 + f_1} o\pi\right)}, o = 1, 2, 3, \quad (51)$	$Z_T = \frac{-Z_0 \sin\left(\frac{2f_1}{f_2 - f_1} o\pi\right)}{1 - \cos\left(\frac{2f_1}{f_2 - f_1} o\pi\right)}, o = 1, 2, 3, \quad (52)$
	θ_T dado pela eq. (50)	θ_T dado pela eq. (48)

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Nas Tabelas 5 e 6, adota-se a definição de frequência média f_M :

$$f_M = \frac{f_2 + f_1}{2} \quad (53)$$

Pode-se verificar nas Tabelas 5 e 6 que, dependendo-se do valor de f_1 e de f_2 , as equações para Z_{Π} e para Z_T podem levar a uma impedância característica inexequível (muito alta, muito baixa ou ainda negativa). Nesse caso, para obter uma impedância característica praticável, deve-se escolher outro tipo de resposta ($\Delta\phi_1$ e $\Delta\phi_2$ diferentes) ou aumentar a ordem do acoplador (incrementar o), o que leva a dimensões físicas maiores para o mesmo.

As impedâncias Z_{Π}' e Z_T' podem ser realizadas por quatro tipos diferentes de trecho de linha de transmissão (toco): toco simples em circuito aberto^{94, 96}, toco simples em curto-circuito⁹⁴, toco duplo em circuito aberto^{95, 97} e toco duplo em curto-circuito. Esses tipos de toco são exibidos na Figura 54.

Figura 54 — Opções de realização de Z_{Π}' ou de Z_T' por toco: (a) simples em circuito aberto, (b) simples em curto-circuito, (c) duplo em circuito aberto, (d) duplo em curto-circuito

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Na Figura 54, Z_{op} e Z_{sh} denotam, respectivamente, a impedância característica dos tocos simples em circuito aberto e em curto-circuito; θ_{op} e θ_{sh} correspondem ao comprimento elétrico dos referidos tocos, respectivamente; Z_{op1} e Z_{op2} representam a impedância característica do primeiro e do segundo segmentos do toco duplo em circuito aberto, respectivamente; θ_{op1} e θ_{op2} referem-se, respectivamente, ao comprimento elétrico dos segmentos mencionados; Z_{sh1} e Z_{sh2} são, respectivamente, a impedância característica do primeiro e do segundo segmentos do toco duplo em curto-circuito; θ_{sh1} e θ_{sh2} tratam-se do comprimento elétrico desses mesmos segmentos, respectivamente.

Observa-se que o uso de toco duplo aterrado não é reportado na literatura técnica, tendo sido o desenvolvimento das equações para o mesmo uma contribuição original deste trabalho, a qual foi motivada pela necessidade de projetar um acoplador híbrido de 90° de banda dupla que opera na frequência central das duas bandas de operação da antena (4,00 GHz e 6,14 GHz). Acopladores tipo Π e tipo T que empregam tocos simples, tanto em circuito aberto quanto em curto-circuito, e tocos duplos em circuito aberto não resultaram em dimensões geométricas exequíveis e aceitáveis para a

implementação de tal acoplador em tecnologia de microfita no substrato dielétrico escolhido para a antena.

Matematicamente, os tocos simples podem ser considerados um caso particular dos tocos duplos, que ocorre quando os dois segmentos que constituem estes possuem a mesma impedância característica, ou quando um dos referidos segmentos tem comprimento elétrico nulo.

Sendo assim, são apresentadas nesta tese as equações referentes aos tocos duplos (em circuito aberto e em curto-circuito) aplicados a ambos os acopladores tipo Π e tipo T.

Foi deduzido nesta pesquisa o conjunto completo de equações para todas as combinações possíveis de $\Delta\phi_1$ e de $\Delta\phi_2$, o que também não é encontrado na literatura técnica. Todas essas equações são mostradas nas Tabelas 7–10, e sua demonstração matemática completa pode ser encontrada no Apêndice deste documento.

Tabela 7 — Equações para o toco duplo em circuito aberto aplicado ao acoplador tipo Π

Tipo de resposta	$\Delta\phi_2 = -\frac{\pi}{2}$	$\Delta\phi_2 = +\frac{\pi}{2}$
$\Delta\phi_1 = -\frac{\pi}{2}$	$\begin{cases} \operatorname{tg}(2\theta_{op1}) = \frac{2\alpha_{op} \operatorname{sen}(2\beta_{op}\theta_{op1})}{(1-\alpha_{op}^2)\cos(2\beta_{op}\sigma\theta_{op1}) - (1+\alpha_{op}^2)\cos(2\beta_{op}\theta_{op1})}, \\ \text{para } o \text{ ímpar em } f_M \\ \operatorname{tg}(2\sigma\theta_{op1}) = \frac{2\alpha_{op} \operatorname{sen}(2\beta_{op}\sigma\theta_{op1})}{(1-\alpha_{op}^2)\cos(2\beta_{op}\theta_{op1}) - (1+\alpha_{op}^2)\cos(2\beta_{op}\sigma\theta_{op1})}, \\ \text{para } o \text{ par em } f_M \end{cases} \quad (54)$ $Z_{op1} = Z_{\Pi} \operatorname{tg}((1-\sigma)\theta_{\Pi}) \frac{1+\alpha_{op} \operatorname{tg}((1-\sigma)\theta_{op1}) \cot(\beta_{op}(1-\sigma)\theta_{op1})}{\alpha_{op} \cot(\beta_{op}(1-\sigma)\theta_{op1}) - \operatorname{tg}((1-\sigma)\theta_{op1})}, \quad (55)$ <p>em f_M</p>	$\begin{cases} \operatorname{tg}(2\sigma\theta_{op1}) = \frac{2\alpha_{op} \operatorname{sen}(2\beta_{op}\sigma\theta_{op1})}{(1-\alpha_{op}^2)\cos(2\beta_{op}\theta_{op1}) - (1+\alpha_{op}^2)\cos(2\beta_{op}\sigma\theta_{op1})}, \\ \text{para } o \text{ ímpar em } f_M \\ \operatorname{tg}(2\theta_{op1}) = \frac{2\alpha_{op} \operatorname{sen}(2\beta_{op}\theta_{op1})}{(1-\alpha_{op}^2)\cos(2\beta_{op}\sigma\theta_{op1}) - (1+\alpha_{op}^2)\cos(2\beta_{op}\theta_{op1})}, \\ \text{para } o \text{ par em } f_M \end{cases} \quad (56)$ <p>Z_{op1} dado pela eq. (55)</p>
$\Delta\phi_1 = +\frac{\pi}{2}$	θ_{op1} dado pela eq. (56) Z_{op1} dado pela eq. (55)	θ_{op1} dado pela eq. (54) Z_{op1} dado pela eq. (55)

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Tabela 8 — Equações para o toco duplo em curto-circuito aplicado ao acoplador tipo Π

Tipo de resposta	$\Delta\phi_2 = -\frac{\pi}{2}$	$\Delta\phi_2 = +\frac{\pi}{2}$
$\Delta\phi_1 = -\frac{\pi}{2}$	$\begin{cases} \text{tg}(2\theta_{sh1}) = \frac{-2\alpha_{sh} \text{sen}(2\beta_{sh}\theta_{sh1})}{(1-\alpha_{sh}^2)\cos(2\beta_{sh}\theta_{sh1}) + (1+\alpha_{sh}^2)\cos(2\beta_{sh}\sigma\theta_{sh1})}, \\ \text{para } o \text{ ímpar em } f_M \\ \text{tg}(2\sigma\theta_{sh1}) = \frac{-2\alpha_{sh} \text{sen}(2\beta_{sh}\sigma\theta_{sh1})}{(1-\alpha_{sh}^2)\cos(2\beta_{sh}\theta_{sh1}) + (1+\alpha_{sh}^2)\cos(2\beta_{sh}\sigma\theta_{sh1})}, \\ \text{para } o \text{ par em } f_M \end{cases} \quad (57)$ $Z_{sh1} = Z_{\Pi} \text{tg}((1-\sigma)\theta_{\Pi}) \frac{\alpha_{sh} \text{tg}((1-\sigma)\theta_{sh1}) \text{tg}(\beta_{sh}(1-\sigma)\theta_{sh1}) - 1}{\text{tg}((1-\sigma)\theta_{sh1}) + \alpha_{sh} \text{tg}(\beta_{sh}(1-\sigma)\theta_{sh1})}, \quad (58)$ <p>em f_M</p>	$\begin{cases} \text{tg}(2\sigma\theta_{sh1}) = \frac{-2\alpha_{sh} \text{sen}(2\beta_{sh}\sigma\theta_{sh1})}{(1-\alpha_{sh}^2)\cos(2\beta_{sh}\theta_{sh1}) + (1+\alpha_{sh}^2)\cos(2\beta_{sh}\sigma\theta_{sh1})}, \\ \text{para } o \text{ ímpar em } f_M \\ \text{tg}(2\theta_{sh1}) = \frac{-2\alpha_{sh} \text{sen}(2\beta_{sh}\theta_{sh1})}{(1-\alpha_{sh}^2)\cos(2\beta_{sh}\sigma\theta_{sh1}) + (1+\alpha_{sh}^2)\cos(2\beta_{sh}\theta_{sh1})}, \\ \text{para } o \text{ par em } f_M \end{cases} \quad (59)$ <p>Z_{sh1} dado pela eq. (58)</p>
$\Delta\phi_1 = +\frac{\pi}{2}$	θ_{sh1} dado pela eq. (59) Z_{sh1} dado pela eq. (58)	θ_{sh1} dado pela eq. (57) Z_{sh1} dado pela eq. (58)

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Tabela 9 — Equações para o toco duplo em circuito aberto aplicado ao acoplador tipo T

Tipo de resposta	$\Delta\phi_2 = -\frac{\pi}{2}$	$\Delta\phi_2 = +\frac{\pi}{2}$
$\Delta\phi_1 = -\frac{\pi}{2}$	$\begin{cases} \text{tg}(2\sigma\theta_{op1}) = \frac{2\alpha_{op} \text{sen}(2\beta_{op}\sigma\theta_{op1})}{(1-\alpha_{op}^2)\cos(2\beta_{op}\theta_{op1}) - (1+\alpha_{op}^2)\cos(2\beta_{op}\sigma\theta_{op1})}, \\ \text{em } f_M \\ Z_{op1} = \frac{Z_T \text{tg}(2(1-\sigma)\theta_T) + 1 + \alpha_{op} \text{tg}((1-\sigma)\theta_{op1}) \cot(\beta_{op}(1-\sigma)\theta_{op1})}{2 \alpha_{op} \cot(\beta_{op}(1-\sigma)\theta_{op1}) - \text{tg}((1-\sigma)\theta_{op1})}, \end{cases} \quad (60)$ <p>em f_M</p> $Z_{op1} \text{ dado pela eq. (61)} \quad (61)$	$\begin{cases} \text{tg}(2\theta_{op1}) = \frac{2\alpha_{op} \text{sen}(2\beta_{op}\theta_{op1})}{(1-\alpha_{op}^2)\cos(2\beta_{op}\sigma\theta_{op1}) - (1+\alpha_{op}^2)\cos(2\beta_{op}\theta_{op1})}, \\ \text{em } f_M \end{cases} \quad (62)$ <p>Z_{op1} dado pela eq. (61)</p>
$\Delta\phi_1 = +\frac{\pi}{2}$	θ_{op1} dado pela eq. (62) Z_{op1} dado pela eq. (61)	θ_{op1} dado pela eq. (60) Z_{op1} dado pela eq. (61)

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Tabela 10 — Equações para o toco duplo em curto-circuito aplicado ao acoplador tipo T

Tipo de resposta	$\Delta\phi_2 = -\frac{\pi}{2}$	$\Delta\phi_2 = +\frac{\pi}{2}$
$\Delta\phi_1 = -\frac{\pi}{2}$	$\begin{cases} \text{tg}(2\sigma\theta_{sh1}) = \frac{-2\alpha_{sh} \text{sen}(2\beta_{sh}\sigma\theta_{sh1})}{(1-\alpha_{sh}^2)\cos(2\beta_{sh}\theta_{sh1}) + (1+\alpha_{sh}^2)\cos(2\beta_{sh}\sigma\theta_{sh1})}, \\ \text{em } f_M \\ Z_{sh1} = \frac{Z_T \text{tg}(2(1-\sigma)\theta_T) \alpha_{sh} \text{tg}((1-\sigma)\theta_{sh1}) \text{tg}(\beta_{sh}(1-\sigma)\theta_{sh1}) - 1}{2 \text{tg}((1-\sigma)\theta_{sh1}) + \alpha_{sh} \text{tg}(\beta_{sh}(1-\sigma)\theta_{sh1})}, \end{cases} \quad (63)$ <p>em f_M</p> $Z_{sh1} \text{ dado pela eq. (64)} \quad (64)$	$\begin{cases} \text{tg}(2\theta_{sh1}) = \frac{-2\alpha_{sh} \text{sen}(2\beta_{sh}\theta_{sh1})}{(1-\alpha_{sh}^2)\cos(2\beta_{sh}\sigma\theta_{sh1}) + (1+\alpha_{sh}^2)\cos(2\beta_{sh}\theta_{sh1})}, \\ \text{em } f_M \end{cases} \quad (65)$ <p>Z_{sh1} dado pela eq. (64)</p>
$\Delta\phi_1 = +\frac{\pi}{2}$	θ_{sh1} dado pela eq. (65) Z_{sh1} dado pela eq. (64)	θ_{sh1} dado pela eq. (63) Z_{sh1} dado pela eq. (64)

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

O fator de frequência σ , as razões de impedância característica α_{op} e de comprimento elétrico β_{op} do toco duplo em circuito aberto e as razões de impedância característica

α_{sh} e de comprimento elétrico β_{sh} do toco duplo em curto-circuito, que aparecem nas equações das Tabelas 7–10, são definidos por

$$\sigma = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1} \quad (66)$$

$$\alpha_{op} = \frac{Z_{op2}}{Z_{op1}} \quad (67)$$

$$\beta_{op} = \frac{\theta_{op2}}{\theta_{op1}} \quad (68)$$

$$\alpha_{sh} = \frac{Z_{sh2}}{Z_{sh1}} \quad (69)$$

$$\beta_{sh} = \frac{\theta_{sh2}}{\theta_{sh1}} \quad (70)$$

Observa-se que as eq. (54), (56), (57), (59), (60), (62), (63) e (65) são transcendentais e devem ser resolvidas numericamente. Adicionalmente, elas não têm solução única, e quanto maior for a ordem q da solução (número da solução em ordem crescente do valor desta), maior é o comprimento do toco ao qual se refere.

Especificados f_1 e f_2 , quatro graus de liberdade existem para o projeto dos acopladores tipo Π e tipo T com tocos duplos: o , q , α_{op} (ou α_{sh}) e β_{op} (ou β_{sh}). No caso dos tocos simples (em circuito aberto e em curto-circuito), dois graus de liberdade desaparecem, restando somente o e q . Assim, os tocos duplos conduzem a uma maior complexidade de cálculo para o projeto de acopladores tipo Π e tipo T.

Porém, comparativamente aos tocos simples, os tocos duplos normalmente possibilitam a obtenção de acopladores tipo Π e tipo T mais compactos e compostos de trechos de linha de transmissão com impedância exequível para mais pares de f_1 e f_2 ^{95, 97}.

Dessa forma, a apresentação do conjunto completo de equações para os acopladores tipo Π e tipo T realizada neste texto tem como objetivo oferecer várias possibilidades de obtenção de acopladores realizáveis na prática e de tamanho reduzido, visto que nenhuma das topologias de acoplador mostradas — tipo Π ou tipo T com tocos simples ou duplos em circuito aberto ou em curto-circuito — pode oferecer sozinha tais características para qualquer escolha do par de f_1 e f_2 .

Para projetar o acoplador tipo Π ou tipo T com tocos duplos em circuito aberto ou em curto-circuito, o seguinte procedimento geral é sugerido:

- a) cálculo dos trechos de linha de transmissão centrais do acoplador:
 - acoplador tipo Π : calculam-se Z_{Π} e θ_{Π} por meio das equações fornecidas na Tabela 5 para $o = 1, 2, 3, \dots$; deve-se escolher o conjunto de resultados correspondente ao valor de o que fornece θ_{Π} mínimo para Z_{Π} exequível;
 - acoplador tipo T: Z_T e θ_T são calculados usando-se as equações mostradas na Tabela 6 para $o = 1, 2, 3, \dots$; deve-se selecionar os resultados relativos ao valor de o que leva a θ_T mínimo para Z_T praticável;
- b) cálculo dos tocos do acoplador:
 - tocos em circuito aberto: geram-se gráficos de Z_{op1} , de Z_{op2} e de $(\theta_{op1} + \theta_{op2})$ em função de β_{op} para diversos valores de α_{op} com o auxílio das equações da Tabela 7 (acoplador tipo Π) ou da Tabela 9 (acoplador tipo T) — Z_{op2} e θ_{op2} são calculados por meio das eq. (67) e (68), respectivamente —; deve-se selecionar os resultados relativos à ordem q que leva a $(\theta_{op1} + \theta_{op2})$ mínimo para Z_{op1} e para Z_{op2} praticáveis;
 - tocos em curto-circuito: gráficos de Z_{sh1} , de Z_{sh2} e de $(\theta_{sh1} + \theta_{sh2})$ são traçados em função de β_{sh} para valores variados de α_{sh} por meio das equações da Tabela 8 (acoplador tipo Π) ou da Tabela 10 (acoplador tipo T) — Z_{sh2} e θ_{sh2} são calculados com o auxílio das eq. (69) e (70), respectivamente —; deve-se escolher o conjunto de resultados correspondente à ordem q que fornece $(\theta_{sh1} + \theta_{sh2})$ mínimo para Z_{sh1} e para Z_{sh2} exequíveis;
- c) se o comprimento calculado para os tocos for muito grande, mais uma tentativa pode ser realizada para obter um tamanho menor de acoplador: reinicia-se o procedimento de projeto a partir da primeira etapa (cálculo dos trechos de linha de transmissão centrais do acoplador), e adota-se um novo valor de o .

No projeto da antena detalhada nesta seção, tem-se $f_1 = 4,00$ GHz e $f_2 = 6,14$ GHz. Considerando-se essas frequências, o procedimento de projeto sugerido para os acopladores tipo Π e tipo T foi aplicado para o cálculo dos parâmetros de todas as topologias possíveis de acoplador apresentadas. A topologia que conduziu ao menor tamanho de acoplador com linhas de transmissão de impedância característica dentro da faixa entre 35Ω e 130Ω foi o acoplador tipo Π com tocos duplos em curto-circuito. Os parâmetros calculados desse acoplador são: $Z_{\Pi} = 52,9 \Omega$, $Z_{sh1} = 130 \Omega$, $Z_{sh2} = 35,0 \Omega$,

$\theta_{\Pi} = 90^\circ$, $\theta_{sh1} = 26,0^\circ$ e $\theta_{sh2} = 132^\circ$ (comprimentos elétricos dados em $f_M = 5,07$ GHz). No projeto do referido acoplador, realizado com o auxílio do programa MATLAB utilizando-se o método *dogleg*, foram encontrados $\alpha_{sh} = 0,269$ e $\beta_{sh} = 5,09$.

5.4.3 Otimização e simulação completa do circuito de alimentação

O circuito de alimentação foi calculado para implementação em tecnologia de microfita levando-se em conta as propriedades do substrato dielétrico já citadas (seção 5.2). Os principais parâmetros geométricos de linha de microfita calculados por meio da ferramenta LineCalc são exibidos na Tabela 11.

Tabela 11 — Principais parâmetros geométricos das linhas de microfita do circuito de alimentação da antena sobre substrato dielétrico aterrado

Impedância característica	Largura da microfita	Comprimento de onda guiada
50 Ω	1,82 mm	44,6 mm (em 4,00 GHz) e 28,9 mm (em 6,14 GHz)
52,9 Ω	1,67 mm	44,7 mm (em 4,00 GHz) e 29,0 mm (em 6,14 GHz)
52,9/ $\sqrt{2}$ Ω	2,82 mm	43,7 mm (em 4,00 GHz) e 28,3 mm (em 6,14 GHz)
35 Ω	3,00 mm	43,6 mm (em 4,00 GHz) e 28,2 mm (em 6,14 GHz)
130 Ω	0,22 mm	47,2 mm (em 4,00 GHz) e 30,6 mm (em 6,14 GHz)

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Por meio da ferramenta Momentum, o leiaute do circuito de alimentação foi desenhado, simulado eletromagneticamente e otimizado manualmente.

Uma simulação de circuito, na qual se considera o circuito de alimentação composto de linhas de transmissão ideais, foi efetuada com o auxílio do simulador de circuito disponível no programa Advanced Design System para fins de comparação.

O leiaute otimizado do circuito de alimentação é exibido na Figura 55, onde também podem ser vistas as indicações de seus subcircuitos:

Figura 55 — Leiaute do circuito de alimentação da antena sobre substrato dielétrico aterrado

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

O circuito de alimentação possui seis portas, como mostra a Figura 55: a porta P_1 é a entrada da antena; as portas P_2 e P_3 referem-se às portas de saída destinadas às fitas conformes; as portas P_4 e P_5 correspondem às portas de saída para as linhas de microfita estreitas (plaqueta não ressonante modificada); P_6 é a saída para a carga resistiva de 50 Ω que termina a porta isolada do acoplador híbrido de 90° de banda dupla.

A Figura 56 apresenta os módulos dos principais parâmetros de espalhamento em função da frequência obtidos por simulação eletromagnética (“leiaute”) e por simulação de circuito (“circ. ideal”), e a Figura 57 exibe as diferenças de fase simuladas entre S_{31} e S_{21} e entre S_{51} e S_{41} em função da frequência obtidas empregando-se os mesmos métodos.

Figura 56 — Módulo simulado dos principais parâmetros de espalhamento do circuito de alimentação da antena sobre substrato dielétrico aterrado: (a) S_{11} , (b) S_{21} , (c) S_{31} , (d) S_{41} , (e) S_{51} , (f) S_{32} e (g) S_{54}

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Figura 57 — Diferenças de fase simuladas para o circuito de alimentação da antena sobre substrato dielétrico aterrado: (a) entre S_{31} e S_{21} e (b) entre S_{51} e S_{41}

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

As Figuras 56 e 57 indicam o desempenho esperado para o circuito de alimentação:

- a) o módulo de S_{11} abaixo de -15 dB em 4,00 GHz e em 6,14 GHz ($f_0^{(HEM11\delta)}$ e $f_0^{(HEM12\delta)}$, respectivamente) indica que o circuito recebe mais do que 96% de toda a potência de entrada nessas frequências;
- b) em 4,00 GHz, o módulo de S_{21} vale $-3,89$ dB, e o de S_{31} é igual a $-3,76$ dB (simulação eletromagnética do leiaute do circuito). Isso indica que P_2 e P_3 recebem aproximadamente a mesma potência, que equivale à metade da potência total de entrada (-3 dB) com cerca de 0,8 dB de perda de transmissão. O módulo de S_{21} e de S_{31} em 6,14 GHz é inferior a -30 dB, sinalizando que a potência de entrada recebida por P_2 e por P_3 é desprezível nessa frequência;
- c) em 6,14 GHz, o módulo de S_{41} é igual a $-4,14$ dB, e o de S_{51} vale $-4,24$ dB (simulação eletromagnética do leiaute do circuito). Isso sinaliza que P_4 e P_5 recebem aproximadamente a mesma potência, que corresponde à metade da potência total de entrada (-3 dB) com cerca de 1,2 dB de perda de transmissão. O módulo de S_{51} e de S_{41} em 4,00 GHz é menor do que -30 dB, indicando que a potência de entrada recebida por P_4 e por P_5 é desprezível nessa frequência;
- d) o módulo de S_{32} é inferior a -20 dB em 4,00 GHz, e o módulo de S_{54} vale menos do que -15 dB em 6,14 GHz, indicando uma isolamento satisfatória entre P_2 e P_3 e entre P_4 e P_5 ;
- e) observa-se uma diferença de fase de cerca de 90° entre os sinais de P_3 e P_2 em 4,00 GHz e entre os sinais de P_5 e P_4 em 6,14 GHz.

Constata-se em geral uma boa correspondência entre os resultados obtidos por simulação eletromagnética e por simulação de circuito.

5.5 OTIMIZAÇÃO E SIMULAÇÃO COMPLETA DA ANTENA

No pacote CST Microwave Studio, a antena projetada foi desenhada e simulada eletromagneticamente considerando-se sua estrutura completa: ressoador dielétrico, estruturas de excitação, substrato dielétrico aterrado e circuito de alimentação. O modelo simulado da antena é ilustrado na Figura 58, onde o radiador aparece na forma transparente para permitir a visualização das estruturas localizadas abaixo do mesmo.

Figura 58 — Modelo da antena sobre substrato dielétrico aterrado: vistas em perspectiva (a) frontal e (b) traseira

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Para que o circuito de alimentação pudesse ser inteiramente acomodado no substrato dielétrico, o comprimento e a largura deste foram aumentados de 40 mm para 70 mm.

Duas portas de simulação foram empregadas para a simulação da antena: a primeira porta P_1 foi definida na entrada da antena, enquanto a segunda porta P_2 foi atribuída à porta isolada do acoplador híbrido de 90° de banda dupla, reservada para a carga resistiva de $50\ \Omega$. Conforme já exposto na seção 4, essa configuração de duas portas permite verificar se a antena está operando corretamente (a potência recebida por ela está sendo radiada pelo ressoador dielétrico e não absorvida pela carga resistiva), o que ocorre quando o módulo do coeficiente de transmissão entre P_2 e P_1 e o módulo do coeficiente de reflexão de tensão em P_1 apresentam ambos um valor baixo.

Por meio dos primeiros resultados que foram obtidos com a simulação da antena, verificou-se que as estruturas de excitação têm um efeito sobre a distribuição de campo eletromagnético de ambos os modos $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$, o que afeta a qualidade da polarização circular da onda eletromagnética radiada pela antena na frequência de ressonância dos referidos modos ressonantes. Como consequência disso, uma razão axial simulada acima de 3 dB foi obtida nessas frequências.

Sendo assim, otimizou-se a antena para uma razão axial mínima ajustando-se o ângulo entre as fitas conformes e entre as linhas de microfita estreitas, que originalmente era de 90° .

Visto que a antena é geometricamente simétrica, assume-se que a elipse de polarização da onda eletromagnética radiada na direção perpendicular ao substrato dielétrico é também simétrica em relação ao plano de simetria da antena. Dessa forma, a razão axial pode ser melhorada mudando-se ligeiramente o ângulo entre as fitas conformes e entre as linhas de microfita estreitas, conservando-se ao mesmo tempo a simetria da antena.

Após a otimização da antena, obteve-se o ângulo de 100° tanto para as fitas conformes quanto para as linhas de microfita estreitas. Observa-se que, devido à alteração do posicionamento das estruturas de excitação, o leiaute do circuito de alimentação foi ajustado para manter o comprimento das linhas de transmissão.

A Figura 59 mostra o módulo simulado do coeficiente de reflexão de tensão na entrada da antena (S_{11}) e o módulo simulado do coeficiente de transmissão entre P_2 e P_1 (S_{21}) em função da frequência para a antena otimizada.

Figura 59 — Módulo simulado de S_{11} e de S_{21} da antena sobre substrato dielétrico aterrado

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

A partir dos resultados simulados, verifica-se que existem duas faixas de frequência em que os ambos os coeficientes de transmissão e de reflexão de tensão estão abaixo de -10 dB: entre $3,95$ GHz e $4,07$ GHz (largura de banda fracionária de $2,99\%$) e entre $6,16$ GHz e $6,19$ GHz (largura de banda fracionária de $0,486\%$). Nessas faixas, como já discutido anteriormente, ambos o sinal refletido na entrada da antena e o sinal absorvido pela carga resistiva de $50\ \Omega$ possuem uma potência igual ou menor a 10% da potência total de entrada, o que é uma indicação de que a antena está radiando.

A frequência central das faixas de frequência citadas é de 4,01 GHz e de 6,18 GHz, respectivamente. Essas frequências condizem com a frequência de ressonância simulada do modo $HEM_{11\delta}$ e com a do modo $HEM_{12\delta}$ mostradas anteriormente (4,00 GHz e 6,14 GHz, respectivamente).

A Figura 60 apresenta o diagrama de radiação de ganho total simulado da antena em 4,01 GHz e em 6,18 GHz.

Figura 60 — Diagrama de radiação de ganho total simulado da antena sobre substrato dielétrico aterrado: (a) 4,01 GHz e (b) 6,18 GHz

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Na Figura 60, verifica-se um diagrama de radiação direcional tanto em 4,01 GHz quanto em 6,18 GHz, o que é coerente com o desempenho previsto para a antena quando excitada nos modos $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$, como indicado nas Figuras 15(c) e 15(d). O ganho total simulado vale 5,87 dB em 4,01 GHz e 4,59 dB em 6,18 GHz. A razão axial simulada na direção de ganho máximo em 4,01 GHz, $\theta = 10,0^\circ$ e $\phi = 306^\circ$ (de acordo com o sistema de coordenadas apresentado nas Figuras 58 e 60), é igual a 0,785 dB. Em 6,18 GHz, a razão axial simulada na direção de ganho máximo, $\theta = 22,0^\circ$ e $\phi = 69,5^\circ$, vale 1,66 dB. Esses resultados indicam uma polarização circular satisfatória na direção de ganho máximo na frequência de ressonância de ambos os modos $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$. Para fins de referência, convém citar os resultados obtidos para $\theta = 0^\circ$ nessas frequências: ganho de 5,70 dB e razão axial de 0,667 dB em 4,01 GHz, e ganho de 3,32 dB e razão axial de 4,42 dB em 6,18 GHz.

5.6 REALIZAÇÃO PRÁTICA

Um protótipo da antena projetada foi fabricado no Laboratório de Microeletrônica da Universidade de São Paulo empregando-se os mesmos métodos, materiais e ferramentas utilizados na confecção da antena sobre plano de terra (seção 4). Para a realização das fitas conformes, utilizou-se uma fita de 0,05 mm de espessura feita com cobre, a qual possui uma de suas faces revestida por adesivo condutivo. Essa fita foi cortada com o auxílio de um bisturi.

Foram empregados dois conectores do tipo SMA para a transferência de sinais na antena: um para a entrada da antena e outro para a carga resistiva de 50 Ω .

A Figura 61 exibe fotografias do protótipo construído.

Figura 61 — Protótipo da antena sobre substrato dielétrico aterrado: vistas (a) em perspectiva frontal e (b) superior em ângulo

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

A caracterização do protótipo da antena foi realizada no Applied Electromagnetics Laboratory da University of Houston por meio da medição de parâmetros de espalhamento e de diagrama de radiação. Foram utilizados os mesmos procedimentos, instrumentos e equipamentos empregados na caracterização da antena sobre plano de terra.

Os parâmetros de espalhamento foram medidos conectando-se a porta 1 do analisador de redes vetorial à entrada da antena e a porta 2 do mesmo à saída reservada para a carga resistiva de 50 Ω , similarmente ao que foi feito para a antena sobre plano de terra.

Na Figura 62, são mostrados o módulo do coeficiente de reflexão de tensão na entrada da antena (S_{11}) e o módulo do coeficiente de transmissão entre a saída reservada à

carga resistiva de $50\ \Omega$ e a entrada da antena (S_{21}) em função da frequência medidos para o protótipo.

Figura 62 — Módulo medido de S_{11} e de S_{21} da antena sobre substrato dielétrico aterrado

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Os coeficientes de transmissão e de reflexão de tensão são ambos inferiores a -10 dB nas faixas de frequência entre 3,95 GHz e 4,04 GHz (largura de banda fracionária de 2,25%) e entre 6,18 GHz e 6,23 GHz (largura de banda fracionária de 0,806%). A frequência central dessas faixas é de 3,99 GHz e de 6,20 GHz, respectivamente. Essas frequências, referentes aos modos HEM_{110} e HEM_{120} , respectivamente, assim como as bandas citadas estão em concordância com seus respectivos valores simulados — frequências de 4,01 GHz e de 6,18 GHz e bandas fracionárias de 2,99% (entre 3,95 GHz e 4,07 GHz) e de 0,486% (entre 6,16 GHz e 6,19 GHz) —. Podem-se considerar as larguras de banda mencionadas condizentes com a alta constante dielétrica do ressonador dielétrico.

Os resultados medidos e simulados mostrados nas Figuras 59 e 62 são exibidos sobrepostos na Figura 63 para facilitar a comparação direta entre os mesmos.

Figura 63 — Módulos medido e simulado de S_{11} e de S_{21} da antena sobre substrato dielétrico aterrado: (a) S_{11} e (b) S_{21}

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Pode-se verificar na Figura 63 uma boa concordância entre os resultados medidos e simulados em geral.

Para a medição do diagrama de radiação do protótipo da antena em câmara anecoica blindada, utilizou-se uma carga resistiva coaxial de $50\ \Omega$ na saída da antena destinada à mesma.

A Figura 64 mostra fotografias do protótipo da antena montado na estrutura de fixação construída para a medição de seu diagrama de radiação.

Figura 64 — Montagem para a medição em câmara anecoica da antena sobre substrato dielétrico aterrado: instalação para a medição nos planos (a) yz e (b) zx

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

A Figura 65 apresenta os diagramas de radiação de ganho medido e simulado da antena em 3,99 GHz. São fornecidos os ganhos medido e simulado em polarização circular à direita e à esquerda (G_{RH} e G_{LH} , respectivamente) para os cortes nos planos yz e zx (o sistema de coordenadas utilizado é o mesmo exibido nas Figuras 58 e 60).

Figura 65 — Diagramas de radiação de ganho medido e simulado da antena sobre substrato dielétrico aterrado em 3,99 GHz: corte nos planos (a) yz e (b) zx

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

O ganho medido (ganho máximo em polarização circular) é igual a 5,68 dB no plano yz ($\theta = 22^\circ$ e $\phi = 270^\circ$) e a 4,96 dB no plano zx ($\theta = 6^\circ$ e $\phi = 0^\circ$) em 3,99 GHz. Na direção de ganho máximo, a razão axial medida é de 1,79 dB no plano yz e de 1,16 dB no plano no plano zx . Para fins de comparação, são exibidos os valores simulados correspondentes aos mencionados: ganho de 5,81 dB no plano yz ($\theta = 7,5^\circ$ e $\phi = 270^\circ$) e de 5,72 dB no plano zx ($\theta = 3,0^\circ$ e $\phi = 0^\circ$) e razão axial de 0,514 no plano yz e de 0,855 no plano zx . Verifica-se que ambas as razões axiais medida e simulada estão abaixo de 3 dB, o que revela uma polarização circular satisfatória.

Verifica-se na Figura 65 que o diagrama de radiação medido é direcional, conforme esperado teoricamente e especificado. Em torno da direção de ganho máximo, o nível de polarização cruzada medido nos planos yz e zx é de cerca de -25 dB, o que sugere uma boa pureza de polarização.

A Figura 66 mostra os diagramas de radiação de ganho medido e simulado em 6,20 GHz. São exibidos os ganhos medido e simulado em polarização circular à direita e à esquerda para os cortes nos planos yz e zx .

Figura 66 — Diagramas de radiação de ganho medido e simulado da antena sobre substrato dielétrico aterrado em 6,20 GHz: corte nos planos (a) yz e (b) zx

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Em 6,20 GHz, o ganho medido (ganho máximo em polarização circular) vale 4,38 dB no plano yz ($\theta = 21^\circ$ e $\phi = 90^\circ$) e 4,24 dB no plano zx ($\theta = 12^\circ$ e $\phi = 0^\circ$). A razão axial medida na direção de ganho máximo é de 0,275 dB no plano yz e de 2,76 dB no plano no plano zx . Os valores simulados referentes aos citados são mostrados para fins de comparação: ganho de 4,24 dB no plano yz ($\theta = 20,0^\circ$ e $\phi = 90^\circ$) e de 3,59 dB no plano zx ($\theta = 12,0^\circ$ e $\phi = 0^\circ$) e razão axial de 0,302 no plano yz e de 2,87 no plano zx . Novamente, pode-se constatar que ambas as razões axiais medida e simulada são inferiores a 3 dB, o que indica uma polarização circular adequada.

A Figura 66 exibe um diagrama de radiação direcional, como especificado e previsto em teoria. O nível de polarização cruzada medido em torno da direção de ganho máximo é de cerca de -35 dB no plano yz e de -15 dB no plano zx , o que revela uma pureza de polarização aceitável.

Em ambas as frequências de 3,99 GHz e de 6,20 GHz, observa-se a presença de radiação na parte traseira da antena como consequência do tamanho finito do plano de terra. Também nas frequências mencionadas, pode-se verificar ainda que a direção de ganho máximo possui uma inclinação entre 10° e 25° em relação à direção perpendicular ao plano de terra, o que não é previsto teoricamente para os modos HEM_{110} e HEM_{120} . Sugere-se que a referida inclinação se deva à influência das estruturas de excitação sobre os modos ressonantes da antena e a uma possível contribuição de radiação proveniente do circuito de alimentação, o qual não é

protegido por uma blindagem eletromagnética, como no caso da antena sobre plano de terra.

Uma boa correspondência entre os diagramas de radiação de ganho medido e simulado é em geral observada nas Figuras 65 e 66.

5.7 CONCLUSÕES

Uma antena de ressoador dielétrico cilíndrica sobre substrato dielétrico aterrado com duas bandas de operação foi desenvolvida seguindo-se a metodologia de projeto proposta neste trabalho.

Essa antena, em particular, trata-se do exemplo mais complexo de antena de ressoador dielétrico cilíndrica sobre substrato dielétrico aterrado que pode ser projetada utilizando-se a referida metodologia de projeto. Os outros exemplos possíveis envolvem antenas com polarização circular em somente uma das bandas de operação ou com polarização linear em ambas, o que leva à necessidade de um esquema de excitação menos complexo e de um circuito de alimentação mais simplificado.

A Tabela 12 resume os resultados obtidos no projeto da antena.

Tabela 12 — Resultados da antena sobre substrato dielétrico aterrado

(continua)

Banda	Parâmetro	Especificação	Simulação	Medição
1	Frequência central (f_i)	—	4,01 GHz	3,99 GHz
	Largura de banda fracionária (BW)	—	2,99%	2,25%
	Tipo de diagrama de radiação	Direcional	Direcional	Direcional
	Tipo de polarização	Circular	Circular	Circular
	Ganho total	—	5,87 dB	—
	Razão axial	< 3 dB	0,785 dB	—
	Ganho em polarização circular (plano yz)	—	5,81 dB	5,68 dB
	Razão axial (plano yz)	—	0,514 dB	1,79 dB
	Ganho em polarização circular (plano zx)	—	5,72 dB	4,96 dB
	Razão axial (plano zx)	—	0,855 dB	1,16 dB

Tabela 12 — Resultados da antena sobre substrato dielétrico aterrado

(conclusão)

Banda	Parâmetro	Especificação	Simulação	Medição
2	Frequência central (f_2)	—	6,18 GHz	6,20 GHz
	Largura de banda fracionária (BW)	—	0,486%	0,806%
	Tipo de diagrama de radiação	Direcional	Direcional	Direcional
	Tipo de polarização	Circular	Circular	Circular
	Ganho total	—	4,59 dB	—
	Razão axial (direção de ganho máximo)	< 3 dB	1,66 dB	—
	Ganho em polarização linear (plano yz)	—	4,24 dB	4,38 dB
	Razão axial (plano yz)	—	0,302 dB	0,275 dB
	Ganho em polarização linear (plano zx)	—	3,59 dB	4,24 dB
	Razão axial (plano zx)	—	2,87 dB	2,76 dB

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

Por meio dos resultados medidos e simulados, verifica-se que a antena desenvolvida atende às especificações definidas para a mesma e opera de acordo com o comportamento previsto pela teoria de antenas de ressoador dielétrico. Observa-se também um desempenho satisfatório para a antena em relação à largura de banda, ao diagrama de radiação, ao ganho e à polarização.

Os resultados medidos apresentam em geral uma boa concordância com os simulados e com as especificações de projeto da antena, o que serve de validação para a configuração de antena criada, para a metodologia de projeto proposta e para os conceitos teóricos introduzidos neste trabalho.

Podem ser encontradas na literatura técnica algumas publicações^{81, 85–88} sobre antenas de ressoador dielétrico de banda dupla com polarização circular em ambas as bandas de operação.

Algumas dessas publicações^{85, 86} reportam antenas que utilizam um radiador com formato tradicional — circular ou retangular, por exemplo — modificado por cortes com o objetivo de obter polarização circular nas duas bandas de operação, sendo cada uma dessas bandas gerada por um modo ressonante distinto. Esse tipo de configuração de antena dispõe de uma estrutura de excitação única e simples, o que dispensa o uso de um circuito de alimentação para gerar dois sinais distintos de mesma amplitude e com diferença de fase de 90° entre si. Apesar disso, a fabricação de um radiador de geometria não tradicional é normalmente complexa, e a alteração

da geometria do ressoador dielétrico ocasiona um deslocamento da frequência de ressonância de seus modos ressonantes, o que nem sempre é facilmente quantificável.

Outras publicações^{87, 88} apresentam antenas que empregam uma abertura com a forma de uma cruz para excitar um ressoador dielétrico de geometria tradicional (excitação por abertura) fazendo com que o mesmo produza radiação circularmente polarizada nas duas bandas de operação, que também são originadas cada uma por um modo ressonante distinto. Esse tipo de configuração de antena dispõe de uma blindagem eletromagnética inerente à sua estrutura — o plano de terra no qual a abertura em forma de cruz é inserida —, a qual convenientemente isola o radiador da linha de alimentação. Entretanto, como já visto anteriormente, a excitação por abertura exige um método de fabricação de circuitos de dupla face assim como um processo de montagem que garanta o alinhamento preciso do radiador sobre a abertura.

Tanto nas antenas que utilizam um radiador modificado^{84, 86} quanto nas que empregam a excitação por uma abertura em forma de cruz^{87, 88}, a utilização de uma estrutura de excitação única e simples normalmente não leva a uma quantidade elevada de parâmetros de ajuste para a mesma. Isso pode dificultar sua otimização para a obtenção de uma perda de retorno satisfatória e de uma polarização circular de qualidade nas duas bandas de operação simultaneamente.

Outra publicação⁸¹ mostra uma antena de ressoador dielétrico cilíndrica sobre plano de terra que utiliza a mesma estratégia empregada neste trabalho para a obtenção de polarização circular nas duas bandas de operação: a excitação, em cada uma dessas bandas, de dois modos ressonantes degenerados geometricamente ortogonais entre si e com uma defasagem relativa de campo eletromagnético de 90°. Para isso, a antena apresentada na referida publicação utiliza os modos $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{112+\delta}$, dado que o modo $HEM_{12\delta}$ não é admitido em antenas de ressoador dielétrico cilíndricas sobre plano de terra. A referida antena emprega duas estruturas de excitação geometricamente separadas por um ângulo de 90° que funcionam nas duas bandas de operação. Dessa forma, o circuito de alimentação é composto apenas de um acoplador híbrido de 90° de banda dupla. Esse tipo de configuração de antena dispõe ainda de um plano de terra que isola o radiador do circuito de alimentação, de forma a evitar que a radiação proveniente deste, caso seja significativa, interfira no desempenho da antena. No entanto, o modo $HEM_{112+\delta}$ geralmente requer a utilização

de um radiador com uma altura considerável e, portanto, conduz a uma antena de alta espessura, o que não é desejável para alguns tipos de aplicações, tais como aparelhos de comunicação sem fio portáteis. Por outro lado, o uso de um ressoador dielétrico de altura reduzida é possível no caso em que se deseja que o modo $HEM_{112+\delta}$ tenha uma frequência de ressonância significativamente superior à do modo $HEM_{11\delta}$. Porém, nessas circunstâncias, existe uma possibilidade elevada de haver modos ressonantes de ordem superior com uma frequência de ressonância próxima à do modo $HEM_{112+\delta}$, o que pode afetar o comportamento da antena nessa frequência.

A antena de ressoador dielétrico cilíndrica sobre substrato dielétrico aterrado proposta neste trabalho e apresentada detalhadamente nesta seção utiliza um circuito de alimentação diferenciado que exige o projeto de componentes variados. Por outro lado, essa antena possui as seguintes qualidades frente às antenas de ressoador dielétrico mencionadas relatadas na literatura técnica: ela dispõe de uma metodologia de projeto bem definida, não requer processos de fabricação de alta complexidade e utiliza uma estrutura de excitação dedicada para cada modo ressonante a ser excitado no radiador, o que fornece uma ampla flexibilidade de projeto.

6 MODELO PARA O RESSOADOR DIELÉTRICO CILÍNDRICO ISOLADO

Conforme visto anteriormente, existem diversos métodos para a determinação de frequências de ressonância no ressoador dielétrico cilíndrico^{8, 10, 11, 14, 21, 24–32}.

Alguns desses métodos^{8, 10, 11, 32} consistem em expressões aproximadas de fácil utilização que, embora sejam precisas para determinadas faixas de constante dielétrica do ressoador e de sua razão de aspecto, só foram obtidas para alguns modos ressonantes e não fornecem informações sobre a distribuição de campo eletromagnético no ressoador, o que não permite o cálculo do diagrama de radiação para esses modos ressonantes.

Outros métodos^{14, 21, 24, 26} são baseados em modelos matemáticos aproximados que, apesar de fornecerem resultados com precisão limitada, conduzem a equações simples e facilmente utilizáveis de frequência de ressonância e de distribuição de campo eletromagnético no ressoador, a princípio para qualquer modo ressonante. Essas equações podem ser usadas para calcular o diagrama de radiação dos diversos modos ressonantes e são úteis para a compreensão teórica do funcionamento do ressoador e para uma previsão rápida de seu comportamento. Existem também métodos^{25, 27, 28} que aplicam correções a esses modelos matemáticos aproximados de forma a melhorar a precisão do cálculo de frequências de ressonância. No entanto, esses métodos foram implementados e validados apenas para o modo $TE_{01\delta}$, que é o de maior interesse prático para circuitos de micro-ondas.

Dois métodos^{29, 30} expressam o campo eletromagnético no ressoador na forma de expansões em série, as quais levam a uma precisão de resultado cada vez mais elevada quanto maior for o número de termos considerados nas séries. Um desses métodos²⁹ não é adequado para a utilização em antenas de ressoador dielétrico, uma vez que pressupõe a existência de uma blindagem eletromagnética que envolve o ressoador. O outro método³⁰ é teoricamente válido para qualquer modo ressonante e possibilita o cálculo do diagrama de radiação para os diversos modos ressonantes. No entanto, as expressões matemáticas empregadas nesse método (compostas de séries) não são ilustrativas para a compreensão física da atuação do ressoador.

Outro método³¹ é baseado em uma solução numérica rigorosa que permite, para qualquer modo ressonante, o cálculo da distribuição de campo eletromagnético no ressoador e do diagrama de radiação. Entretanto, esse método utiliza um algoritmo

de computação numérica que, além de também ser pouco esclarecedor em relação ao entendimento conceitual da operação do ressoador, exige tempo e capacidade computacional para a obtenção de resultados com alta precisão. Adicionalmente, como já discutido, esse método não é de grande praticidade para o projeto de antenas de banda dupla.

Verifica-se, portanto, que cada um desses métodos possui vantagens e limitações. Nenhum deles oferece ao mesmo tempo e para todos os modos ressonantes resultados com precisão satisfatória, equações de frequência de ressonância que são práticas para o projeto de antenas de banda dupla e equações de distribuição de campo eletromagnético no ressoador que são elucidativas do ponto de vista de sua operação.

Esse contexto despertou o interesse no desenvolvimento do modelo matemático analítico aproximado para o ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre discutido em detalhes nesta seção.

Como exposto anteriormente, esse tipo de estrutura pode ser utilizado para modelar a antena de ressoador dielétrico cilíndrica sobre plano de terra por meio da aplicação da teoria da imagem. Pelo mesmo princípio, pode-se verificar que a antena de ressoador dielétrico semicilíndrica sobre plano de terra³², que emprega um radiador na forma de um cilindro repartido ao meio em um plano que contém seu eixo axial, também pode ser modelada pelo ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre.

Sendo assim, um modelo matemático para esse tipo de estrutura é de grande utilidade para o projeto dos referidos tipos de antena, uma vez que ele pode ser utilizado para o cálculo de parâmetros importantes de seus modos ressonantes, tais como a frequência de ressonância e o índice de mérito, e também para estimar o diagrama de radiação dos mesmos.

O modelo matemático para o ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre proposto nesta pesquisa consiste em um caso particular do modelo proposto por Itoh e Rudokas²¹, porém expandido para o cálculo de todos os modos ressonantes do ressoador e seguido da aplicação da técnica variacional²⁰. Em comparação aos modelos matemáticos que empregam a aproximação de parede magnética^{14, 24, 26}, o modelo apresentado nesta seção constitui uma representação mais próxima da

realidade por não adotar esse tipo de condição de contorno, o que leva a resultados teoricamente mais fidedignos.

6.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA

Conforme mencionado anteriormente, a análise teórica dos ressoadores dielétricos consiste em um problema de eletromagnetismo. Mais especificamente, essa análise refere-se a um problema de valor de contorno cuja solução é obtida a partir das equações de Maxwell e de condições de contorno que representam as descontinuidades nas interfaces entre os diferentes meios materiais que compõem a geometria do problema. Esse problema de valor de contorno possui uma solução analítica exata somente para ressoadores esféricos, hemisféricos e toroidais, como já discutido.

O ressonador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre é considerado uma estrutura feita com materiais lineares, homogêneos, isotrópicos, invariantes no tempo e sem fontes. Nessas circunstâncias, as equações de Maxwell assumem a forma dada pelas eq. (6)–(9), que conduzem às equações de Helmholtz, expressas nas eq. (10) e (11).

Conforme já exposto, a solução dessas equações pode ser encontrada resolvendo-se alternativamente as equações de onda escalares dadas pelas eq. (13) e (14) para a direção z , considerando-se o sistema de coordenadas cilíndricas $\rho\phi z$. As componentes de campo eletromagnético nas outras direções são obtidas por meio de equações diferenciais derivadas a partir das eq. (6) e (7). A solução final das equações de Helmholtz deve satisfazer a condição de contorno de interface entre materiais dielétricos perfeitos, expressa pelas eq. (15)–(18), em toda a superfície do ressonador.

Como não existe uma solução analítica exata para o problema do ressonador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre, adotou-se nesta pesquisa a seguinte estratégia para calcular uma solução analítica aproximada:

- a) são obtidas soluções gerais para as eq. (13) e (14) — equações de onda escalares — para a direção axial z do ressonador em cada meio material que compõe o problema, sem a aplicação de condições de contorno; observa-se que, por conveniência geométrica, o sistema de coordenadas cilíndricas $\rho\phi z$ com origem O situada no ponto central de simetria do ressonador é adotado para essa tarefa;

- b) as componentes de campo eletromagnético nas outras direções (ρ e ϕ) são derivadas por meio da solução de equações diferenciais decorrentes das eq. (6) e (7);
- c) aplica-se a condição de contorno de interface entre materiais dielétricos perfeitos sobre a superfície do ressonador dielétrico, o que restringe as soluções obtidas para o campo eletromagnético, conduzindo à existência de modos ressonantes.

Dentro de qualquer meio material do problema, as equações de onda escalares dadas pelas eq. (13) e (14) assumem para a direção z a seguinte forma em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial L}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} + k^2 L = 0 \quad (71)$$

onde L é a componente do vetor campo elétrico complexo na direção z (E_z) ou do vetor campo magnético complexo na mesma direção (H_z). Como já definido antes, k é o número de onda, dado pela eq. (12).

A eq. (71) pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis^{15, 16, 18, 20, 22}, conduzindo a uma solução na forma

$$L(\rho, \phi, z) = P(\rho) F(\phi) Z(z) \quad (72)$$

onde P , F e Z são funções que dependem somente de ρ , de ϕ e de z , respectivamente. Essas funções podem ser escritas de diversas formas com o auxílio de diferentes funções matemáticas. Cada uma dessas funções representa um tipo de fenômeno físico diferente. Por isso, é conveniente escolher uma determinada forma matemática para cada uma das funções P , F e Z em cada região do problema, visto que diferentes fenômenos eletromagnéticos ocorrem em cada uma delas.

As expressões possíveis para P , para F e para Z são relacionadas a seguir¹⁵:

$$P(\rho) = \left\{ \begin{array}{l} C_1 J_m(\tau\rho) + C_2 Y_m(\tau\rho) \\ C_1 H_m^{(1)}(\tau\rho) + C_2 H_m^{(2)}(\tau\rho) \\ C_1 I_m(\tau\rho) + C_2 K_m(\tau\rho) \end{array} \right\} \quad (73)$$

onde C_1 e C_2 são constantes complexas; J_m e Y_m referem-se às funções de Bessel de primeira e de segunda espécies de ordem m , respectivamente; $H_m^{(1)}$ e $H_m^{(2)}$ correspondem às funções de Hankel de primeira e de segunda espécies de ordem m ,

respectivamente; I_m e K_m tratam-se das funções modificadas de Bessel de primeira e de segunda espécie de ordem m , respectivamente; τ é o número de onda radial;

$$F(\phi) = \begin{Bmatrix} C_1' \cos(m\phi) + C_2' \sin(m\phi) \\ C_1' e^{-jm\phi} + C_2' e^{jm\phi} \end{Bmatrix} \quad (74)$$

onde C_1' e C_2' são constantes complexas, e m deve ser inteiro;

$$Z(z) = \begin{Bmatrix} C_1'' \cos(\beta z) + C_2'' \sin(\beta z) \\ C_1'' e^{-j\beta z} + C_2'' e^{j\beta z} \\ C_1'' \cosh(\beta z) + C_2'' \sinh(\beta z) \\ C_1'' e^{-\beta z} + C_2'' e^{\beta z} \end{Bmatrix} \quad (75)$$

onde C_1'' e C_2'' são constantes complexas; e β é o número de onda axial.

Nas eq. (73)–(75), cada linha dentro das chaves representa uma solução para a função em análise (P , F ou Z), devendo-se selecionar a que melhor representa os fenômenos eletromagnéticos presentes no interior do ressonador dielétrico e em cada região de sua periferia.

Como dito anteriormente, cada função matemática presente nas eq. (73)–(75) representa um fenômeno físico:

- a) J_m e Y_m representam ondas estacionárias radiais;
- b) $H_m^{(1)}$ e $H_m^{(2)}$ representam ondas propagantes na direção radial negativa e positiva, respectivamente;
- c) I_m e K_m representam campos radiais crescente e evanescente, respectivamente, para ρ crescente;
- d) $\cos$ e $\sin$ representam ondas estacionárias azimutais (ou axiais);
- e) e^{-j} e e^j representam ondas propagantes na direção azimutal (ou axial) positiva e negativa, respectivamente;
- f) $\cosh$ e $\sinh$ representam somas de campos axiais evanescente e crescente;
- g) e^{-1} e e^1 representam campos axiais evanescente e crescente, respectivamente, para z crescente.

A solução da eq. (71) leva também a uma equação que relaciona os números de onda radial e axial:

$$\pm \tau^2 = k^2 \pm \beta^2 \quad (76)$$

Quando se define a função P por meio de funções de Bessel de primeira espécie ou de funções de Hankel, deve-se empregar $+\tau^2$ na eq. (76). Caso contrário, usa-se $-\tau^2$. No caso em que a função Z é escrita em termos de funções trigonométricas ou de funções exponenciais imaginárias, deve-se utilizar $-\beta^2$ na eq. (76). De outro modo, adota-se $+\beta^2$.

A geometria do problema é dividida em seis regiões, e as componentes vetoriais na direção z do campo eletromagnético (E_z e H_z) dentro de cada uma dessas regiões são expressas por um conjunto de funções matemáticas distinto, representativo de um comportamento físico específico, como ilustra a Figura 67.

Figura 67 — Modelo matemático proposto para o ressonador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre

Fonte: realização do próprio autor para esta tese

As seis regiões distintas mostradas na Figura 67 são definidas a seguir, juntamente com as hipóteses adotadas para seu modelamento:

- a) meio 1: ocupa a região em que $0 < \rho < a$ e $-h < z < h$ e possui constante dielétrica ε_{rd} e permeabilidade magnética relativa μ_{rd} , representando o ressonador dielétrico. Nessa região, o campo eletromagnético é assumido ressonante e, portanto, E_z e H_z são representados pelas funções $J_{m_1}(\tau_1\rho)$, $\cos(m_1\phi)$, $\sin(m_1\phi)$, $\cos(\beta_1z)$ e $\sin(\beta_1z)$, onde τ_1 , m_1 e β_1 são os números de onda radial, angular e axial, respectivamente. Pode-se verificar que a função $Y_{m_1}(\tau_1\rho)$ é desconsiderada — anula-se C_2 na eq. (73) — porque tende a infinito em $\rho = 0$, o que é inconcebível do ponto de vista físico;
- b) meio 2: envolve a região em que $\rho > a$ e $-h < z < h$ e tem permissividade elétrica ε_0 e permeabilidade magnética μ_0 , representando o vácuo. O campo eletromagnético no meio 2 é ressonante ao longo de ϕ e de z e evanescente ao longo de ρ , sendo E_z e H_z representados pelas funções $K_{m_2}(\tau_2\rho)$, $\cos(m_2\phi)$, $\sin(m_2\phi)$, $\cos(\beta_2z)$ e $\sin(\beta_2z)$, onde τ_2 , m_2 e β_2 são os números de onda radial, angular e axial, respectivamente;
- c) meio 3a: compreende a região em que $0 < \rho < a$ e $z < -h$ e possui permissividade elétrica ε_0 e permeabilidade magnética μ_0 , representando o vácuo. No meio 3a, o campo eletromagnético é ressonante ao longo de ρ e de ϕ e evanescente ao longo de z , e, portanto, E_z e H_z é representado pelas funções $J_{m_{3a}}(\tau_{3a}\rho)$, $\cos(m_{3a}\phi)$, $\sin(m_{3a}\phi)$, $e^{\beta_{3a}z}$, onde τ_{3a} , m_{3a} e β_{3a} são os números de onda radial, angular e axial, respectivamente;
- d) meio 3b: abrange a região em que $0 < \rho < a$ e $z > h$ e tem permissividade elétrica ε_0 e permeabilidade magnética μ_0 , representando o vácuo. O campo eletromagnético nessa região é ressonante ao longo de ρ e de ϕ e evanescente ao longo de z , sendo E_z e H_z representados pelas funções $J_{m_{3b}}(\tau_{3b}\rho)$, $\cos(m_{3b}\phi)$, $\sin(m_{3b}\phi)$, $e^{-\beta_{3b}z}$, onde τ_{3b} , m_{3b} e β_{3b} são os números de onda radial, angular e axial, respectivamente;
- e) meio 4a: consiste na região em que $\rho > a$ e $z < -h$ e possui permissividade elétrica ε_0 e permeabilidade magnética μ_0 , representando o vácuo. O campo eletromagnético no meio 4a é assumido nulo como uma primeira aproximação;

- f) meio 4b: envolve a região em que $\rho > a$ e $z > h$ e tem permissividade elétrica ε_0 e permeabilidade magnética μ_0 , representando o vácuo. Nessa região, o campo eletromagnético é assumido nulo como uma primeira aproximação.

Na Figura 67, k_0 e k_d referem-se ao número de onda no vácuo e no ressonador dielétrico, respectivamente. Tanto eles quanto os números de onda radial, angular e axial citados devem ser números reais para que as funções matemáticas que os têm como argumento representem os comportamentos físicos estabelecidos para cada região.

As propriedades materiais do meio 1 (ε_{rd} e μ_{rd}) são definidas como

$$\varepsilon_{rd} = \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} \quad (77)$$

$$\mu_{rd} = \frac{\mu_d}{\mu_0} \quad (78)$$

onde ε_d e μ_d denotam, respectivamente, a permissividade elétrica do material que compõe o ressonador dielétrico e sua permeabilidade magnética.

Observa-se que as funções matemáticas que descrevem E_z e H_z em cada uma das regiões mencionadas não são escolhidas de forma arbitrária. Primeiramente, a hipótese de que o ressonador dielétrico possui um comportamento ressonante conduz às funções $J_{m_1}(\tau_1\rho)$, $\cos(m_1\phi)$, $\sin(m_1\phi)$, $\cos(\beta_{1z})$ e $\sin(\beta_{1z})$ para o meio 1. Então, dado que as interfaces entre as seis regiões do problema são consideradas interfaces entre materiais dielétricos perfeitos, as relações dadas pelas eq. (15)–(18) são válidas. Isso implica que E_z e H_z apresentam um caráter ressonante ao longo de ϕ , ao longo de ρ para $0 < \rho < a$ e ao longo de z para $-h < z < h$. Ao longo de ρ para $\rho > a$ e ao longo de z para $z < -h$ e para $z > h$, impõe-se que E_z e H_z apresentam um caráter evanescente. Nos meios 4a e 4b, o campo eletromagnético é, por ora, assumido nulo, uma vez que não é possível expressar E_z e H_z na forma descrita pela eq. (72), com o auxílio das eq. (73)–(75), de maneira que as eq. (15)–(18) sejam satisfeitas em todas as interfaces entre os referidos meios e as regiões adjacentes (meios 2, 3a e 3b), exceto se ε_{rd} e μ_{rd} forem iguais à unidade, o que não é um caso de interesse.

Verifica-se, portanto, que existe uma limitação na representação do campo eletromagnético nos meios 4a e 4b. Entretanto, como pode ser visto mais adiante, isso não afeta o cálculo da primeira aproximação para a frequência de ressonância dos

modos ressonantes do ressoador (solução analítica sem a aplicação da técnica variacional).

Assumindo-se que E_z e H_z são linearmente independentes, os mesmos são escritos na forma

$$E_z = C_{LE1} J_{m_1}(\tau_1 \rho) \left(C_{\phi 1}^{(1)} \cos(m_1 \phi) + C_{\phi 1}^{(2)} \sin(m_1 \phi) \right) \left(C_{z1}^{(1)} \cos(\beta_1 z) + C_{z1}^{(2)} \sin(\beta_1 z) \right) \quad (79)$$

$$H_z = C_{LH1} J_{m_1}(\tau_1 \rho) \left(C_{\phi 1}^{(1)} \sin(m_1 \phi) + C_{\phi 1}^{(2)} \cos(m_1 \phi) \right) \left(C_{z1}^{(1)} \sin(\beta_1 z) + C_{z1}^{(2)} \cos(\beta_1 z) \right) \quad (80)$$

no meio 1,

$$E_z = C_{LE2} K_{m_2}(\tau_2 \rho) \left(C_{\phi 2}^{(1)} \cos(m_2 \phi) + C_{\phi 2}^{(2)} \sin(m_2 \phi) \right) \left(C_{z2}^{(1)} \cos(\beta_2 z) + C_{z2}^{(2)} \sin(\beta_2 z) \right) \quad (81)$$

$$H_z = C_{LH2} K_{m_2}(\tau_2 \rho) \left(C_{\phi 2}^{(1)} \sin(m_2 \phi) + C_{\phi 2}^{(2)} \cos(m_2 \phi) \right) \left(C_{z2}^{(1)} \sin(\beta_2 z) + C_{z2}^{(2)} \cos(\beta_2 z) \right) \quad (82)$$

no meio 2,

$$E_z = C_{LE3a} J_{m_{3a}}(\tau_{3a} \rho) \left(C_{\phi 3a}^{(1)} \cos(m_{3a} \phi) + C_{\phi 3a}^{(2)} \sin(m_{3a} \phi) \right) e^{\beta_{3a} z} \quad (83)$$

$$H_z = C_{LH3a} J_{m_{3a}}(\tau_{3a} \rho) \left(C_{\phi 3a}^{(1)} \sin(m_{3a} \phi) + C_{\phi 3a}^{(2)} \cos(m_{3a} \phi) \right) e^{\beta_{3a} z} \quad (84)$$

no meio 3a, e

$$E_z = C_{LE3b} J_{m_{3b}}(\tau_{3b} \rho) \left(C_{\phi 3b}^{(1)} \cos(m_{3b} \phi) + C_{\phi 3b}^{(2)} \sin(m_{3b} \phi) \right) e^{-\beta_{3b} z} \quad (85)$$

$$H_z = C_{LH3b} J_{m_{3b}}(\tau_{3b} \rho) \left(C_{\phi 3b}^{(1)} \sin(m_{3b} \phi) + C_{\phi 3b}^{(2)} \cos(m_{3b} \phi) \right) e^{-\beta_{3b} z} \quad (86)$$

no meio 3b, onde C_{LE1} , C_{LH1} , C_{LE2} , C_{LH2} , C_{LE3a} , C_{LH3a} , C_{LE3b} , C_{LH3b} , $C_{\phi 1}^{(1)}$, $C_{\phi 1}^{(2)}$, $C_{\phi 2}^{(1)}$, $C_{\phi 2}^{(2)}$, $C_{\phi 3a}^{(1)}$, $C_{\phi 3a}^{(2)}$, $C_{\phi 3b}^{(1)}$, $C_{\phi 3b}^{(2)}$, $C_{z1}^{(1)}$, $C_{z1}^{(2)}$, $C_{z2}^{(1)}$ e $C_{z2}^{(2)}$ são constantes complexas.

As equações de separação de variáveis são dadas por

$$\tau_1^2 = k_d^2 - \beta_1^2 \quad (87)$$

no meio 1,

$$\tau_2^2 = \beta_2^2 - k_0^2 \quad (88)$$

no meio 2,

$$\tau_{3a}^2 = k_0^2 + \beta_{3a}^2 \quad (89)$$

no meio 3a, e

$$\tau_{3b}^2 = k_0^2 + \beta_{3b}^2 \quad (90)$$

no meio 3b.

A eq. (12) conduz às seguintes expressões para k_0 e para k_d :

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 2\pi f \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad (91)$$

$$k_d = \omega \sqrt{\mu_d \epsilon_d} = 2\pi f \sqrt{\mu_d \epsilon_d} = k_0 \sqrt{\mu_{rd} \epsilon_{rd}} \quad (92)$$

Como mencionado anteriormente, tem-se nos meios 4a e 4b

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (93)$$

As eq. (15)–(18) implicam inicialmente que

$$\tau_1 = \tau_{3a} = \tau_{3b} = \tau_A \quad (94)$$

$$\tau_2 = \tau_B \quad (95)$$

$$m_1 = m_2 = m_{3a} = m_{3b} = m \quad (96)$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_A \quad (97)$$

$$\beta_{3a} = \beta_B \quad (98)$$

$$\beta_{3b} = \beta_C \quad (99)$$

onde τ_A e τ_B correspondem ao número de onda radial em $0 < \rho < a$ e em $\rho > a$, respectivamente, e β_A , β_B e β_C representam o número de onda axial em $-h < z < h$, em $z < -h$ e em $z > h$, respectivamente.

Constata-se que m deve ser um número inteiro, já que o campo eletromagnético é contínuo em ϕ . Por representar o número de ciclos senoidais que o campo eletromagnético completa ao longo de ϕ , m corresponde ao índice angular do modo ressonante considerado (o primeiro dos índices m , n e l).

A princípio, são possíveis infinitas soluções para $C_{\phi 1}^{(1)}$ e para $C_{\phi 1}^{(2)}$. No entanto, exceto para o caso em que $C_{\phi 1}^{(1)} = C_{\phi 1}^{(2)} = 0$ (campo eletromagnético nulo, que não é um caso de interesse), essas soluções levam à mesma distribuição de campo eletromagnético, porém com diferentes rotações em relação a ϕ , com diversas amplitudes e com variadas fases. Assim, as seguintes expressões podem ser escritas:

$$C_{\phi 1}^{(1)} \cos(m\phi) + C_{\phi 1}^{(2)} \sin(m\phi) = C_{\phi 1} \cos(m\phi + \Phi_1) \quad (100)$$

$$C_{\phi 1}^{(1)} \sin(m\phi) + C_{\phi 1}^{(2)} \cos(m\phi) = C_{\phi 1} \sin(m\phi + \Phi_1) \quad (101)$$

onde $C_{\phi 1}$ é uma constante complexa, representativa da amplitude da distribuição de campo eletromagnético e de sua fase, e Φ_1 é uma constante real, representativa da rotação dessa distribuição em relação a ϕ .

O mesmo raciocínio aplicado aos meios 2, 3a e 3b leva a

$$C_{\phi 2}^{(1)} \cos(m\phi) + C_{\phi 2}^{(2)} \sin(m\phi) = C_{\phi 2} \cos(m\phi + \Phi_2) \quad (102)$$

$$C_{\phi 2}^{(1)} \sin(m\phi) + C_{\phi 2}^{(2)} \cos(m\phi) = C_{\phi 2} \sin(m\phi + \Phi_2) \quad (103)$$

$$C_{\phi 3a}^{(1)} \cos(m\phi) + C_{\phi 3a}^{(2)} \sin(m\phi) = C_{\phi 3a} \cos(m\phi + \Phi_{3a}) \quad (104)$$

$$C_{\phi 3a}^{(1)} \sin(m\phi) + C_{\phi 3a}^{(2)} \cos(m\phi) = C_{\phi 3a} \sin(m\phi + \Phi_{3a}) \quad (105)$$

$$C_{\phi 3b}^{(1)} \cos(m\phi) + C_{\phi 3b}^{(2)} \sin(m\phi) = C_{\phi 3b} \cos(m\phi + \Phi_{3b}) \quad (106)$$

$$C_{\phi 3b}^{(1)} \sin(m\phi) + C_{\phi 3b}^{(2)} \cos(m\phi) = C_{\phi 3b} \sin(m\phi + \Phi_{3b}) \quad (107)$$

onde $C_{\phi 2}$, $C_{\phi 3a}$ e $C_{\phi 3b}$ são constantes complexas, e Φ_2 , Φ_{3a} e Φ_{3b} são constantes reais.

As condições de contorno expressas pelas eq. (15)–(18) impõem

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_{3a} = \Phi_{3b} = \Phi \quad (108)$$

onde Φ é uma constante real.

Considerando-se ainda as eq. (15)–(18) e o fato de que a geometria do problema é simétrica em relação ao plano $z = 0$, verifica-se que existem somente dois conjuntos de valores válidos para $C_{z1}^{(1)}$, $C_{z1}^{(2)}$, $C_{z2}^{(1)}$ e $C_{z2}^{(2)}$:

$$C_{z1}^{(1)} = C_{z2}^{(1)} = 0 \text{ com } C_{z1}^{(2)} \neq 0 \text{ e } C_{z2}^{(2)} \neq 0 \quad (109)$$

$$C_{z1}^{(2)} = C_{z2}^{(2)} = 0 \text{ com } C_{z1}^{(1)} \neq 0 \text{ e } C_{z2}^{(1)} \neq 0 \quad (110)$$

Sendo assim, as eq. (79)–(86) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$E_z = C_{E1} J_m(\tau_A \rho) \cos(m\phi + \Phi) \begin{Bmatrix} \cos(\beta_A z) \\ \sin(\beta_A z) \end{Bmatrix} \quad (111)$$

$$H_z = C_{H1} J_m(\tau_A \rho) \sin(m\phi + \Phi) \begin{Bmatrix} \sin(\beta_A z) \\ \cos(\beta_A z) \end{Bmatrix} \quad (112)$$

no meio 1,

$$E_z = C_{E2} K_m(\tau_B \rho) \cos(m\phi + \Phi) \begin{Bmatrix} \cos(\beta_A z) \\ \sin(\beta_A z) \end{Bmatrix} \quad (113)$$

$$H_z = C_{H2} K_m(\tau_B \rho) \sin(m\phi + \Phi) \begin{Bmatrix} \sin(\beta_A z) \\ \cos(\beta_A z) \end{Bmatrix} \quad (114)$$

no meio 2,

$$E_z = C_{E3a} J_m(\tau_A \rho) \cos(m\phi + \Phi) e^{\beta_B z} \quad (115)$$

$$H_z = C_{H3a} J_m(\tau_A \rho) \sin(m\phi + \Phi) e^{\beta_B z} \quad (116)$$

no meio 3a, e

$$E_z = C_{E3b} J_m(\tau_A \rho) \cos(m\phi + \Phi) e^{-\beta_C z} \quad (117)$$

$$H_z = C_{H3b} J_m(\tau_A \rho) \sin(m\phi + \Phi) e^{-\beta_C z} \quad (118)$$

no meio 3b, onde C_{E1} , C_{H1} , C_{E2} , C_{H2} , C_{E3a} , C_{H3a} , C_{E3b} e C_{H3b} são constantes complexas.

Nas eq. (111)–(114), as chaves significam que um dos dois termos dentro das mesmas deve ser escolhido. Adicionalmente, quando o primeiro termo dentro de um par de chaves é escolhido, deve-se selecionar sempre o primeiro termo entre chaves das eq. (111)–(114) e das equações seguintes desta seção. Analogamente, quando se escolhe o segundo termo dentro de um par de chaves, o segundo termo entre chaves das eq. (111)–(114) e das equações seguintes da presente seção deve ser selecionado.

O próximo passo é derivar as componentes de campo eletromagnético nas outras direções (ρ e ϕ) a partir de E_z e de H_z . Isso é feito resolvendo-se as seguintes equações diferenciais¹⁶:

$$\frac{\partial^2 E_\rho}{\partial z^2} + k^2 E_\rho = -j\omega\mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial \rho} \quad (119)$$

$$\frac{\partial^2 H_\rho}{\partial z^2} + k^2 H_\rho = j\omega\epsilon \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z \partial \rho} \quad (120)$$

$$\frac{\partial^2 E_\phi}{\partial z^2} + k^2 E_\phi = j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial \phi} \quad (121)$$

$$\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} + k^2 H_\phi = -j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 H_z}{\partial z \partial \phi} \quad (122)$$

onde E_ρ e H_ρ são as componentes na direção ρ dos vetores campo elétrico e campo magnético complexos, respectivamente, e E_ϕ e H_ϕ representam as componentes na direção ϕ dos vetores campo elétrico e campo magnético complexos, respectivamente. Observa-se que as eq. (119)–(122) são decorrentes das eq. (6) e (7) — leis de Faraday e de Ampère — quando são consideradas coordenadas cilíndricas.

Substituindo-se as eq. (111)–(118) nas eq. (119)–(122) e resolvendo-se estas, obtêm-se E_ρ , H_ρ , E_ϕ e H_ϕ nos meios 1, 2, 3a e 3b:

$$E_\rho = \frac{1}{\tau_A^2} \left(\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tau_A \beta_A C_{E1} J'_m(\tau_A \rho) - \frac{j\omega\mu_d m C_{H1}}{\rho} J_m(\tau_A \rho) \right) \cos(m\phi + \Phi) \begin{Bmatrix} \sin(\beta_A z) \\ \cos(\beta_A z) \end{Bmatrix} \quad (123)$$

$$H_\rho = \frac{1}{\tau_A^2} \left(-\frac{j\omega\epsilon_d m C_{E1}}{\rho} J_m(\tau_A \rho) + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \tau_A \beta_A C_{H1} J'_m(\tau_A \rho) \right) \sin(m\phi + \Phi) \begin{Bmatrix} \cos(\beta_A z) \\ \sin(\beta_A z) \end{Bmatrix} \quad (124)$$

$$E_\phi = \frac{1}{\tau_A^2} \left(\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{\beta_A m C_{E1}}{\rho} J_m(\tau_A \rho) + j\omega\mu_d \tau_A C_{H1} J'_m(\tau_A \rho) \right) \sin(m\phi + \Phi) \begin{Bmatrix} \sin(\beta_A z) \\ \cos(\beta_A z) \end{Bmatrix} \quad (125)$$

$$H_\phi = \frac{1}{\tau_A^2} \left(-j\omega\epsilon_d \tau_A C_{E1} J'_m(\tau_A \rho) + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{\beta_A m C_{H1}}{\rho} J_m(\tau_A \rho) \right) \cos(m\phi + \Phi) \begin{Bmatrix} \cos(\beta_A z) \\ \sin(\beta_A z) \end{Bmatrix} \quad (126)$$

no meio 1,

$$E_\rho = \frac{1}{-\tau_B^2} \left(\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tau_B \beta_A C_{E2} K'_m(\tau_B \rho) - \frac{j\omega\mu_0 m C_{H2}}{\rho} K_m(\tau_B \rho) \right) \cos(m\phi + \Phi) \begin{Bmatrix} \sin(\beta_A z) \\ \cos(\beta_A z) \end{Bmatrix} \quad (127)$$

$$H_\rho = \frac{1}{-\tau_B^2} \left(-\frac{j\omega\epsilon_0 m C_{E2}}{\rho} K_m(\tau_B \rho) + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \tau_B \beta_A C_{H2} K'_m(\tau_B \rho) \right) \sin(m\phi + \Phi) \begin{Bmatrix} \cos(\beta_A z) \\ \sin(\beta_A z) \end{Bmatrix} \quad (128)$$

$$E_\phi = \frac{1}{-\tau_B^2} \left(\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{\beta_A m C_{E2}}{\rho} K_m(\tau_B \rho) + j\omega\mu_0 \tau_B C_{H2} K_m'(\tau_B \rho) \right) \sin(m\phi + \Phi) \begin{Bmatrix} \sin(\beta_A z) \\ \cos(\beta_A z) \end{Bmatrix} \quad (129)$$

$$H_\phi = \frac{1}{-\tau_B^2} \left(-j\omega\epsilon_0 \tau_B C_{E2} K_m'(\tau_B \rho) + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{\beta_A m C_{H2}}{\rho} K_m(\tau_B \rho) \right) \cos(m\phi + \Phi) \begin{Bmatrix} \cos(\beta_A z) \\ \sin(\beta_A z) \end{Bmatrix} \quad (130)$$

no meio 2,

$$E_\rho = \frac{1}{\tau_A^2} \left(\tau_A \beta_B C_{E3a} J_m'(\tau_A \rho) - \frac{j\omega\mu_0 m C_{H3a}}{\rho} J_m(\tau_A \rho) \right) \cos(m\phi + \Phi) e^{\beta_B z} \quad (131)$$

$$H_\rho = \frac{1}{\tau_A^2} \left(-\frac{j\omega\epsilon_0 m C_{E3a}}{\rho} J_m(\tau_A \rho) + \tau_A \beta_B C_{H3a} J_m'(\tau_A \rho) \right) \sin(m\phi + \Phi) e^{\beta_B z} \quad (132)$$

$$E_\phi = \frac{1}{\tau_A^2} \left(-\frac{\beta_B m C_{E3a}}{\rho} J_m(\tau_A \rho) + j\omega\mu_0 \tau_A C_{H3a} J_m'(\tau_A \rho) \right) \sin(m\phi + \Phi) e^{\beta_B z} \quad (133)$$

$$H_\phi = \frac{1}{\tau_A^2} \left(-j\omega\epsilon_0 \tau_A C_{E3a} J_m'(\tau_A \rho) + \frac{\beta_B m C_{H3a}}{\rho} J_m(\tau_A \rho) \right) \cos(m\phi + \Phi) e^{\beta_B z} \quad (134)$$

no meio 3a, e

$$E_\rho = \frac{1}{\tau_A^2} \left(-\tau_A \beta_C C_{E3b} J_m'(\tau_A \rho) - \frac{j\omega\mu_0 m C_{H3b}}{\rho} J_m(\tau_A \rho) \right) \cos(m\phi + \Phi) e^{-\beta_C z} \quad (135)$$

$$H_\rho = \frac{1}{\tau_A^2} \left(-\frac{j\omega\epsilon_0 m C_{E3b}}{\rho} J_m(\tau_A \rho) - \tau_A \beta_C C_{H3b} J_m'(\tau_A \rho) \right) \sin(m\phi + \Phi) e^{-\beta_C z} \quad (136)$$

$$E_\phi = \frac{1}{\tau_A^2} \left(\frac{\beta_C m C_{E3b}}{\rho} J_m(\tau_A \rho) + j\omega\mu_0 \tau_A C_{H3b} J_m'(\tau_A \rho) \right) \sin(m\phi + \Phi) e^{-\beta_C z} \quad (137)$$

$$H_\phi = \frac{1}{\tau_A^2} \left(-j\omega\epsilon_0 \tau_A C_{E3b} J_m'(\tau_A \rho) - \frac{\beta_C m C_{H3b}}{\rho} J_m(\tau_A \rho) \right) \cos(m\phi + \Phi) e^{-\beta_C z} \quad (138)$$

no meio 3b, onde J_m' e K_m' referem-se à derivada primeira da função de Bessel de primeira espécie de ordem m e à derivada primeira da função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem m , respectivamente.

Estando as expressões de campo eletromagnético já definidas nas seis regiões do problema, a próxima etapa consiste na aplicação direta das eq. (15)–(18) na interface entre os meios 1 e 2, 1 e 3a, 1 e 3b para a determinação dos coeficientes C_{E1} , C_{H1} , C_{E2} , C_{H2} , C_{E3a} , C_{H3a} , C_{E3b} e C_{H3b} . Esse procedimento leva à determinação das condições

sob as quais o campo eletromagnético pode existir no ressonador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre, o que estabelece a existência dos modos ressonantes característicos do mesmo.

Na interface entre os meios 1 e 2 ($\rho = a$, $-h < z < h$), a aplicação das eq. (15)–(18) conduz a

$$C_{E1}J_m(\zeta) - C_{E2}K_m(\psi) = 0 \quad (139)$$

$$C_{H1}J_m(\zeta) - C_{H2}K_m(\psi) = 0 \quad (140)$$

$$\begin{aligned} & C_{E1} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right\} \frac{\beta_A m a}{\zeta^2} J_m(\zeta) + C_{H1} \frac{j\omega\mu_d a}{\zeta} J_m'(\zeta) \\ & + C_{E2} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right\} \frac{\beta_A m a}{\psi^2} K_m(\psi) + C_{H2} \frac{j\omega\mu_0 a}{\psi} K_m'(\psi) = 0 \end{aligned} \quad (141)$$

$$\begin{aligned} & C_{E1} \frac{j\omega\epsilon_d a}{\zeta} J_m'(\zeta) + C_{H1} \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right\} \frac{\beta_A m a}{\zeta^2} J_m(\zeta) \\ & + C_{E2} \frac{j\omega\epsilon_0 a}{\psi} K_m'(\psi) + C_{H2} \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right\} \frac{\beta_A m a}{\psi^2} K_m(\psi) = 0 \end{aligned} \quad (142)$$

$$\begin{aligned} & C_{E1} \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right\} \frac{\epsilon_d \beta_A a}{\zeta} J_m'(\zeta) - C_{H1} \frac{j\omega\mu_d \epsilon_d m a}{\zeta^2} J_m(\zeta) \\ & + C_{E2} \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right\} \frac{\epsilon_0 \beta_A a}{\psi} K_m'(\psi) - C_{H2} \frac{j\omega\mu_0 \epsilon_0 m a}{\psi^2} K_m(\psi) = 0 \end{aligned} \quad (143)$$

$$\begin{aligned} & C_{E1} \frac{j\omega\mu_d \epsilon_d m a}{\zeta^2} J_m(\zeta) + C_{H1} \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right\} \frac{\mu_d \beta_A a}{\zeta} J_m'(\zeta) \\ & + C_{E2} \frac{j\omega\mu_0 \epsilon_0 m a}{\psi^2} K_m(\psi) + C_{H2} \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right\} \frac{\mu_0 \beta_A a}{\psi} K_m'(\psi) = 0 \end{aligned} \quad (144)$$

onde os autovalores radiais em $0 < \rho < a$ e em $\rho > a$, dados por ζ e por ψ , respectivamente, são definidos como

$$\zeta = \tau_A a \quad (145)$$

$$\psi = \tau_B a \quad (146)$$

A partir das eq. (139) e (140), obtém-se

$$C_{E2} = \frac{J_m(\zeta)}{K_m(\psi)} C_{E1} \quad (147)$$

$$C_{H2} = \frac{J_m(\zeta)}{K_m(\psi)} C_{H1} \quad (148)$$

assumindo-se

$$J_m(\zeta) \neq 0 \quad (149)$$

$$K_m(\psi) \neq 0 \quad (150)$$

Na interface entre os meios 1 e 3a ($0 < \rho < a$, $z = -h$), a aplicação das eq. (15)–(18) leva a

$$C_{E1} \varepsilon_d \begin{Bmatrix} \cos(-\nu) \\ \sin(-\nu) \end{Bmatrix} - C_{E3a} \varepsilon_0 e^{-\nu} = 0 \quad (151)$$

$$C_{H1} \mu_d \begin{Bmatrix} \sin(-\nu) \\ \cos(-\nu) \end{Bmatrix} - C_{H3a} \mu_0 e^{-\nu} = 0 \quad (152)$$

$$\begin{aligned} C_{E1} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{\nu m}{h \rho} J_m(\tau_A \rho) \begin{Bmatrix} \sin(-\nu) \\ \cos(-\nu) \end{Bmatrix} + C_{H1} j \omega \mu_d \tau_A J_m'(\tau_A \rho) \begin{Bmatrix} \sin(-\nu) \\ \cos(-\nu) \end{Bmatrix} \\ + C_{E3a} \frac{\nu m}{h \rho} J_m(\tau_A \rho) e^{-\nu} - C_{H3a} j \omega \mu_0 \tau_A J_m'(\tau_A \rho) e^{-\nu} = 0 \end{aligned} \quad (153)$$

$$\begin{aligned} C_{E1} j \omega \varepsilon_d \tau_A J_m'(\tau_A \rho) \begin{Bmatrix} \cos(-\nu) \\ \sin(-\nu) \end{Bmatrix} + C_{H1} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\nu m}{h \rho} J_m(\tau_A \rho) \begin{Bmatrix} \cos(-\nu) \\ \sin(-\nu) \end{Bmatrix} \\ - C_{E3a} j \omega \varepsilon_0 \tau_A J_m'(\tau_A \rho) e^{-\nu} + C_{H3a} \frac{\nu m}{h \rho} J_m(\tau_A \rho) e^{-\nu} = 0 \end{aligned} \quad (154)$$

$$\begin{aligned} C_{E1} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\tau_A \nu}{h} J_m'(\tau_A \rho) \begin{Bmatrix} \sin(-\nu) \\ \cos(-\nu) \end{Bmatrix} - C_{H1} \frac{j \omega \mu_d m}{\rho} J_m(\tau_A \rho) \begin{Bmatrix} \sin(-\nu) \\ \cos(-\nu) \end{Bmatrix} \\ - C_{E3a} \frac{\tau_A \nu}{h} J_m'(\tau_A \rho) e^{-\nu} + C_{H3a} \frac{j \omega \mu_0 m}{\rho} J_m(\tau_A \rho) e^{-\nu} = 0 \end{aligned} \quad (155)$$

$$\begin{aligned} C_{E1} \frac{j \omega \varepsilon_d m}{\rho} J_m(\tau_A \rho) \begin{Bmatrix} \cos(-\nu) \\ \sin(-\nu) \end{Bmatrix} + C_{H1} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\tau_A \nu}{h} J_m'(\tau_A \rho) \begin{Bmatrix} \cos(-\nu) \\ \sin(-\nu) \end{Bmatrix} \\ - C_{E3a} \frac{j \omega \varepsilon_0 m}{\rho} J_m(\tau_A \rho) e^{-\nu} + C_{H3a} \frac{\tau_A \nu}{h} J_m'(\tau_A \rho) e^{-\nu} = 0 \end{aligned} \quad (156)$$

onde os autovalores axiais em $-h < z < h$ e em $z < -h$, representados por v e por ν , respectivamente, são definidos da seguinte forma:

$$v = \beta_A h \quad (157)$$

$$\nu = \beta_B h \quad (158)$$

As eq. (151) e (152) conduzem a

$$C_{E3a} = \epsilon_{rd} \begin{Bmatrix} \cos(v) \\ -\sin(v) \end{Bmatrix} e^v C_{E1} \quad (159)$$

$$C_{H3a} = \mu_{rd} \begin{Bmatrix} -\sin(v) \\ \cos(v) \end{Bmatrix} e^v C_{H1} \quad (160)$$

assumindo-se também

$$\cos(v) \neq 0 \quad (161)$$

$$\sin(v) \neq 0 \quad (162)$$

Devido à simetria da geometria do problema em relação ao plano $z = 0$, a aplicação das eq. (15)–(18) na interface entre os meios 1 e 3b ($0 < \rho < a, z = h$) conduz a equações semelhantes às eq. (151)–(162). Essas expressões não são apresentadas nesta tese com o intuito de evitar uma repetição tediosa de equações e de deduções matemáticas. No entanto, convém exibir neste texto as seguintes expressões, as quais podem ser demonstradas com o auxílio das equações omitidas:

$$\beta_C = \beta_B \quad (163)$$

$$C_{E3b} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} C_{E3a} \quad (164)$$

$$C_{H3b} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} C_{H3a} \quad (165)$$

Antes de prosseguir com a análise dos três tipos de modo ressonante do ressonador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre (TE, TM e HEM), expressões adicionais que relacionam τ_A , τ_B , β_A e β_B , necessárias para a solução do problema, são derivadas a partir das equações de separação de variáveis dadas pelas eq. (87)–(89).

Considerando-se as eq. (94), (95), (97) e (98), as eq. (87)–(89) podem ser escritas como

$$\tau_A^2 = k_d^2 - \beta_A^2 \quad (166)$$

$$\tau_B^2 = \beta_A^2 - k_0^2 \quad (167)$$

$$\tau_A^2 = k_0^2 + \beta_B^2 \quad (168)$$

Com o auxílio das eq. (92), (145) e (146), pode-se obter a partir das eq. (166) e (167)

$$\zeta = \pm \sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \epsilon_{rd} - 1) - \psi^2} \quad (169)$$

Levando-se em conta as eq. (146) e (157), a eq. (167) conduz a

$$v = \pm \frac{h}{a} \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \quad (170)$$

A eq. (168), com o auxílio das eq. (145) e (158), leva a

$$v = \pm \frac{h}{a} \sqrt{\zeta^2 - (k_0 a)^2} \quad (171)$$

Substituindo-se a eq. (169) na eq. (171), tem-se

$$v = \pm \frac{h}{a} \sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \epsilon_{rd} - 2) - \psi^2} \quad (172)$$

As soluções de interesse, as quais conduzem ao comportamento físico desejado para o ressonador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre, requerem

$$\zeta, \psi, v, \nu, k_0 \in \mathbb{R} \quad (173)$$

$$\psi, \nu > 0 \quad (174)$$

As eq. (173) e (174) implicam que o ressonador dielétrico não apresenta perdas (condutiva, dielétrica ou por radiação), e o campo eletromagnético possui um comportamento ressonante dentro do ressonador e evanescente fora do mesmo. Observa-se que isso contraria o princípio de que os ressoadores dielétricos são estruturas inerentemente radiantes. No entanto, deve-se considerar que o que se analisa é um modelo matemático aproximado, o qual é sujeito a apresentar diferenças de desempenho em relação ao comportamento físico real do ressonador.

Visto que a eq. (174) deve ser obedecida, deve-se escolher o sinal positivo na eq. (172).

Observa-se, a partir das eq. (169), (170) e (172), que a seguinte condição deve ocorrer para que a eq. (173) seja satisfeita:

$$0 < \psi < \sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \epsilon_{rd} - 2)} \quad (175)$$

Ademais, pode ser demonstrado que as opções de sinal positivo e de sinal negativo nas eq. (169) e (170) conduzem a soluções equivalentes para o problema. Sendo assim, pode-se optar por utilizar, por exemplo, o sinal positivo nessas equações.

A seguir, as soluções do problema são deduzidas separadamente para os modos ressonantes dos tipos TE, TM e HEM.

6.1.1 Modos TE

Para os modos TE, tem-se

$$E_z = 0 \quad (176)$$

$$H_z \neq 0 \quad (177)$$

Isso implica que

$$C_{E1} = C_{E2} = C_{E3a} = C_{E3b} = 0 \quad (178)$$

$$C_{H1}, C_{H2}, C_{H3a}, C_{H3b} \neq 0 \quad (179)$$

Substituindo-se a eq. (148) na eq. (141), obtém-se

$$C_{H1} \left(\frac{\mu_{rd}}{\zeta} J'_m(\zeta) K_m(\psi) + \frac{1}{\psi} J_m(\zeta) K'_m(\psi) \right) j\omega\mu_0 a = 0 \quad (180)$$

Dado que ω , μ_0 , a e C_{H1} não são nulos, a eq. (180) pode ser reescrita na forma

$$\frac{\mu_{rd}}{\zeta} J'_m(\zeta) K_m(\psi) + \frac{1}{\psi} J_m(\zeta) K'_m(\psi) = 0 \quad (181)$$

que é idêntica à equação de autovalores do guia de ondas dielétrico cilíndrico para os modos TE^{15, 16}.

A eq. (148) substituída na eq. (142) conduz a

$$C_{H1} \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\psi^2} \right) \beta_A m a J_m(\zeta) = 0 \quad (182)$$

Como C_{H1} , $\left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\psi^2} \right)$, β_A , a e $J_m(\zeta)$ não são nulos, a seguinte condição deve ocorrer:

$$m = 0 \quad (183)$$

Isso explica matematicamente o fato de o índice angular m dos modos TE ser nulo.

A substituição da eq. (148) nas eq. (143) e (144) conduz às mesmas condições dadas pelas eq. (181) e (183).

Substituindo-se a eq. (160) na eq. (156), obtém-se

$$C_{H1} \tau_A J_m'(\tau_A \rho) \begin{Bmatrix} -\beta_A \cos(v) - \mu_{rd} \beta_B \sin(v) \\ -\beta_A \sin(v) + \mu_{rd} \beta_B \cos(v) \end{Bmatrix} = 0 \quad (184)$$

Dado que C_{H1} e $\tau_A J_m'(\tau_A \rho)$ não são nulos para todo $0 \leq \rho \leq a$, a eq. (184) pode ser reescrita, com o auxílio das eq. (157) e (158), como

$$\begin{Bmatrix} v \cos(v) + \mu_{rd} v \sin(v) \\ v \sin(v) - \mu_{rd} v \cos(v) \end{Bmatrix} = 0 \quad (185)$$

Pode-se verificar que as eq. (153)–(155) já são satisfeitas quando as eq. (160), (178) e (183) são consideradas.

Então, as seguintes expressões finais para os modos TE são obtidas:

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_{rd}}{\sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \epsilon_{rd} - 1) - \psi^2}} J_0' \left(\sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \epsilon_{rd} - 1) - \psi^2} \right) K_0(\psi) \\ & + \frac{1}{\psi} J_0 \left(\sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \epsilon_{rd} - 1) - \psi^2} \right) K_0'(\psi) = 0 \end{aligned} \quad (186)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \cos \left(\frac{h}{a} \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \right) \\ & \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \sin \left(\frac{h}{a} \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \right) \end{aligned} \right. \\ & + \mu_{rd} \sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \epsilon_{rd} - 2) - \psi^2} \sin \left(\frac{h}{a} \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \right) \\ & - \mu_{rd} \sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \epsilon_{rd} - 2) - \psi^2} \cos \left(\frac{h}{a} \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \right) \left. \right\} = 0 \end{aligned} \quad (187)$$

$$C_{H1} = A \quad (188)$$

$$C_{H2} = \frac{J_0(\zeta)}{K_0(\psi)} A \quad (189)$$

$$C_{H3a} = \mu_{rd} \left\{ \begin{matrix} -\text{sen}(\nu) \\ \cos(\nu) \end{matrix} \right\} e^\nu A \quad (190)$$

$$C_{H3b} = \mu_{rd} \left\{ \begin{matrix} \text{sen}(\nu) \\ \cos(\nu) \end{matrix} \right\} e^\nu A \quad (191)$$

onde A é uma constante complexa.

Adicionam-se às expressões anteriores as eq. (169), (170), (172), (178) e (183).

As eq. (186) e (187) são obtidas a partir das eq. (181) e (185) com o auxílio das eq. (169), (170) e (172). Elas constituem um sistema de duas equações transcendentais que deve ser resolvido numericamente para as incógnitas k_0 e ψ , considerando-se a eq. (175). A frequência de ressonância de um modo $\text{TE}_{0np+\delta}$ é obtida a partir da eq. (91), uma vez encontrada a solução para k_0 .

Isoladamente, a eq. (186) pode admitir múltiplas soluções de ψ para um k_0 determinado, e o número da solução considerada, em ordem crescente de ψ , corresponde a n (índice radial do modo ressonante). Da mesma forma, a eq. (187), separadamente, pode também dispor de soluções múltiplas de ψ para um dado k_0 , e o número da solução tomada (com início em zero), em ordem crescente de ψ , refere-se a p (parte inteira do índice axial do modo ressonante).

As eq. (189), (190) e (191) são obtidas por meio das eq. (148), (160) e (165), respectivamente, considerando-se a eq. (188). Os números de onda radiais e axiais são calculados a partir das eq. (145), (146), (157), (158) e (163). A distribuição de campo eletromagnético é computada por meio das eq. (93), (111)–(118), (123)–(138).

6.1.2 Modos TM

Tem-se, para os modos TM,

$$E_z \neq 0 \quad (192)$$

$$H_z = 0 \quad (193)$$

o que resulta em

$$C_{E1}, C_{E2}, C_{E3a}, C_{E3b} \neq 0 \quad (194)$$

$$C_{H1} = C_{H2} = C_{H3a} = C_{H3b} = 0 \quad (195)$$

A eq. (147) substituída na eq. (142) leva a

$$C_{E1} \left(\frac{\varepsilon_{rd}}{\zeta} J_m'(\zeta) K_m(\psi) + \frac{1}{\psi} J_m(\zeta) K_m'(\psi) \right) j\omega\varepsilon_0 a = 0 \quad (196)$$

Como ω , ε_0 , a e C_{E1} não são nulos, a eq. (196) pode ser reescrita como

$$\frac{\varepsilon_{rd}}{\zeta} J_m'(\zeta) K_m(\psi) + \frac{1}{\psi} J_m(\zeta) K_m'(\psi) = 0 \quad (197)$$

que é idêntica à equação de autovalores do guia de ondas dielétrico cilíndrico para os modos TM^{15, 16}.

Substituindo-se a eq. (147) na eq. (141), obtém-se

$$C_{E1} \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\psi^2} \right) \beta_A m a J_m(\zeta) = 0 \quad (198)$$

Dado que C_{E1} , $\left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\psi^2} \right)$, β_A , a e $J_m(\zeta)$ não são nulos, a condição dada pela eq. (183)

também deve ser satisfeita, o que justifica a nulidade do índice angular m dos modos TM.

A substituição da eq. (147) nas eq. (143) e (144) conduz às mesmas condições dadas pelas eq. (197) e (183).

A eq. (159) substituída na eq. (155) conduz a

$$C_{E1} \tau_A J_m'(\tau_A \rho) \left\{ \begin{matrix} \beta_A \sin(\nu) - \varepsilon_{rd} \beta_B \cos(\nu) \\ \beta_A \cos(\nu) + \varepsilon_{rd} \beta_B \sin(\nu) \end{matrix} \right\} = 0 \quad (199)$$

Como C_{E1} e $\tau_A J_m'(\tau_A \rho)$ não são nulos para todo $0 \leq \rho \leq a$, a eq. (199) pode ser reescrita, com o auxílio das eq. (157) e (158), na forma

$$\left\{ \begin{matrix} \nu \sin(\nu) - \varepsilon_{rd} \nu \cos(\nu) \\ \nu \cos(\nu) + \varepsilon_{rd} \nu \sin(\nu) \end{matrix} \right\} = 0 \quad (200)$$

É possível verificar que as eq. (153), (154) e (156) já são satisfeitas quando as eq. (159), (183) e (195) são consideradas.

Assim, são obtidas as seguintes expressões finais para os modos TM:

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_{rd}}{\sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \varepsilon_{rd} - 1) - \psi^2}} J_0' \left(\sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \varepsilon_{rd} - 1) - \psi^2} \right) K_0(\psi) \\ & + \frac{1}{\psi} J_0 \left(\sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \varepsilon_{rd} - 1) - \psi^2} \right) K_0'(\psi) = 0 \end{aligned} \quad (201)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \sin \left(\frac{h}{a} \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \right) \\ & \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \cos \left(\frac{h}{a} \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \right) \end{aligned} \right\} \\ & \left\{ \begin{aligned} & -\varepsilon_{rd} \sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \varepsilon_{rd} - 2) - \psi^2} \cos \left(\frac{h}{a} \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \right) \\ & +\varepsilon_{rd} \sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \varepsilon_{rd} - 2) - \psi^2} \sin \left(\frac{h}{a} \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \right) \end{aligned} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (202)$$

$$C_{E1} = A \quad (203)$$

$$C_{E2} = \frac{J_0(\zeta)}{K_0(\psi)} A \quad (204)$$

$$C_{E3a} = \varepsilon_{rd} \begin{Bmatrix} \cos(\nu) \\ -\sin(\nu) \end{Bmatrix} e^\nu A \quad (205)$$

$$C_{E3b} = \varepsilon_{rd} \begin{Bmatrix} \cos(\nu) \\ \sin(\nu) \end{Bmatrix} e^\nu A \quad (206)$$

Acrescem-se às expressões anteriores as eq. (169), (170), (172), (183) e (195).

As eq. (201) e (202) são escritas com base nas eq. (197) e (200) considerando-se as eq. (169), (170) e (172). Elas formam um sistema de duas equações transcendentais a ser resolvido numericamente para as incógnitas k_0 e ψ , levando-se em conta a eq. (175). Tendo sido obtida a solução para k_0 , a frequência de ressonância de um modo $TM_{0np+\delta}$ é calculada a partir da eq. (91).

Separadamente, a eq. (201) pode dispor de soluções múltiplas de ψ para um dado k_0 , e o número da solução tomada, em ordem crescente de ψ , refere-se a n .

Analogamente, a eq. (202), isoladamente, pode também admitir múltiplas soluções de ψ para um k_0 determinado, e o número da solução considerada (com início em zero), em ordem crescente de ψ , corresponde a p .

Considerando-se a eq. (203), as eq. (204), (205) e (206) são obtidas a partir das eq. (147), (159) e (164), respectivamente. Os números de onda radiais e axiais são computados por meio das eq. (145), (146), (157), (158) e (163). A distribuição de campo eletromagnético é calculada a partir das eq. (93), (111)–(118), (123)–(138).

6.1.3 Modos HEM

Para os modos HEM, tem-se

$$E_z \neq 0 \quad (207)$$

$$H_z \neq 0 \quad (208)$$

o que resulta em

$$C_{E1}, C_{E2}, C_{E3a}, C_{E3b} \neq 0 \quad (209)$$

$$C_{H1}, C_{H2}, C_{H3a}, C_{H3b} \neq 0 \quad (210)$$

Substituindo-se as eq. (147) e (148) na eq. (141), obtém-se

$$C_{H1} = \frac{\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} j\beta_A m \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\psi^2} \right) J_m(\zeta) K_m(\psi)}{\omega\mu_0 \left(\frac{\mu_{rd}}{\zeta} J_m'(\zeta) K_m(\psi) + \frac{1}{\psi} J_m(\zeta) K_m'(\psi) \right)} C_{E1} \quad (211)$$

As eq. (147) e (148) substituídas na eq. (142) levam a

$$C_{E1} = \frac{\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} j\beta_A m \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\psi^2} \right) J_m(\zeta) K_m(\psi)}{\omega\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_{rd}}{\zeta} J_m'(\zeta) K_m(\psi) + \frac{1}{\psi} J_m(\zeta) K_m'(\psi) \right)} C_{H1} \quad (212)$$

As eq. (211) e (212), com o auxílio da eq. (91), conduzem a

$$\left[\beta_A m \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\psi^2} \right) J_m(\zeta) K_m(\psi) \right]^2 - k_0^2 \left(\frac{\mu_{rd}}{\zeta} J_m'(\zeta) K_m(\psi) + \frac{1}{\psi} J_m(\zeta) K_m'(\psi) \right) \times \left(\frac{\varepsilon_{rd}}{\zeta} J_m'(\zeta) K_m(\psi) + \frac{1}{\psi} J_m(\zeta) K_m'(\psi) \right) = 0 \quad (213)$$

que é idêntica à equação de autovalores do guia de ondas dielétrico cilíndrico para os modos HEM^{15, 16}.

Considerando-se as eq. (209) e (210), as eq. (211) e (212) levam à seguinte condição:

$$m \neq 0 \quad (214)$$

Isso esclarece o fato de o índice angular m dos modos HEM ser diferente de zero.

A substituição das eq. (147) e (148) nas eq. (143) e (144) conduz às mesmas condições dadas pelas eq. (211) e (212).

Substituindo-se as eq. (159) e (160) na eq. (153), obtém-se

$$C_{E1} \frac{m}{\rho} J_m(\tau_A \rho) \left\{ \begin{array}{l} -\beta_A \sin(\nu) + \varepsilon_{rd} \beta_B \cos(\nu) \\ -\beta_A \cos(\nu) - \varepsilon_{rd} \beta_B \sin(\nu) \end{array} \right\} = 0 \quad (215)$$

Como C_{E1} , m e $\frac{J_m(\tau_A \rho)}{\rho}$ não são nulos para todo $0 \leq \rho \leq a$, a eq. (215) pode ser reescrita, com o auxílio das eq. (157) e (158), na mesma forma da eq. (200).

As eq. (159) e (160) substituídas na eq. (154) conduzem a

$$C_{H1} \frac{m}{\rho} J_m(\tau_A \rho) \left\{ \begin{array}{l} -\beta_A \cos(\nu) - \mu_{rd} \beta_B \sin(\nu) \\ -\beta_A \sin(\nu) + \mu_{rd} \beta_B \cos(\nu) \end{array} \right\} = 0 \quad (216)$$

Dado que C_{H1} , m e $\frac{J_m(\tau_A \rho)}{\rho}$ não são nulos para todo $0 \leq \rho \leq a$, pode-se reescrever a

eq. (216) na mesma forma dada pela eq. (185), com o auxílio das eq. (157) e (158).

Substituindo-se as eq. (159) e (160) nas eq. (155) e (156), obtêm-se expressões idênticas às eq. (185) e (200).

Conclui-se, portanto, que os modos HEM requerem que ambas as eq. (185) e (200) sejam satisfeitas. No entanto, é possível verificar que essa premissa leva à seguinte condição:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg}^2(v) \\ \cot^2(v) \end{array} \right\} = -\frac{\varepsilon_{rd}}{\mu_{rd}} \quad (217)$$

Como ε_{rd} e μ_{rd} são números reais positivos, não existe v real que satisfaça a eq. (217), o que contraria a condição expressa pela eq. (173). Embora esse fato seja uma indicação de que os modos HEM não são tratáveis de maneira matematicamente rigorosa dentro do modelo matemático apresentado nesta seção, uma aproximação é proposta neste trabalho com o intuito de possibilitar a análise desse tipo de modo ressonante pelo referido modelo, ainda que de forma estimada.

Em um guia de ondas dielétrico cilíndrico, cada modo HEM_{mn} pode ser classificado¹⁶ como um modo quase TE ou como um modo quase TM. Os modos quase TE são aqueles cuja componente TE transmite a maior parte da energia eletromagnética. Nesse tipo de modo, n é um número par. Os modos quase TM têm a maior parte da energia eletromagnética transmitida pela componente TM. Nos modos quase TM, n é ímpar.

Sendo assim, a aproximação mencionada adotada nessa pesquisa para os modos HEM consiste em considerar apenas a eq. (185) ou a eq. (200), em vez de ambas, de acordo com a natureza do modo HEM considerado (quase TE ou quase TM). Então, a seguinte equação é admitida:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} v \sin(v) - \varepsilon_{rd} v \cos(v) \\ v \cos(v) + \varepsilon_{rd} v \sin(v) \end{array} \right\} = 0, \text{ para modos } \text{HEM}_{mnp+\delta} \text{ com } n \text{ ímpar (modos quase TM)} \\ \left\{ \begin{array}{l} v \cos(v) + \mu_{rd} v \sin(v) \\ v \sin(v) - \mu_{rd} v \cos(v) \end{array} \right\} = 0, \text{ para modos } \text{HEM}_{mnp+\delta} \text{ com } n \text{ par (modos quase TE)} \end{array} \right. \quad (218)$$

Dessa maneira, as seguintes expressões finais para os modos HEM podem ser escritas:

$$\begin{aligned}
& \left[(k_0 a)^2 + \psi^2 \right] \left[\frac{m}{a} \left(\frac{1}{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \varepsilon_{rd} - 1) - \psi^2} + \frac{1}{\psi^2} \right) J_m \left(\sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \varepsilon_{rd} - 1) - \psi^2} \right) K_m(\psi) \right]^2 \\
& - k_0^2 \left(\frac{\mu_{rd}}{\sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \varepsilon_{rd} - 1) - \psi^2}} J_m' \left(\sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \varepsilon_{rd} - 1) - \psi^2} \right) K_m(\psi) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\psi} J_m \left(\sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \varepsilon_{rd} - 1) - \psi^2} \right) K_m'(\psi) \right) \\
& \times \left(\frac{\varepsilon_{rd}}{\sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \varepsilon_{rd} - 1) - \psi^2}} J_m' \left(\sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \varepsilon_{rd} - 1) - \psi^2} \right) K_m(\psi) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\psi} J_m \left(\sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \varepsilon_{rd} - 1) - \psi^2} \right) K_m'(\psi) \right) = 0 \tag{219}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \sin \left(\frac{h}{a} \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \right) \\ & \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \cos \left(\frac{h}{a} \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \right) \end{aligned} \right\} \\
& \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \cos \left(\frac{h}{a} \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \right) \\ & \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \sin \left(\frac{h}{a} \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \right) \end{aligned} \right\} \\
& \left. \begin{aligned} & -\varepsilon_{rd} \sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \varepsilon_{rd} - 2) - \psi^2} \cos \left(\frac{h}{a} \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \right) \\ & +\varepsilon_{rd} \sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \varepsilon_{rd} - 2) - \psi^2} \sin \left(\frac{h}{a} \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \right) \end{aligned} \right\} = 0, \text{ para } n \text{ ímpar} \\
& \left. \begin{aligned} & +\mu_{rd} \sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \varepsilon_{rd} - 2) - \psi^2} \sin \left(\frac{h}{a} \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \right) \\ & -\mu_{rd} \sqrt{(k_0 a)^2 (\mu_{rd} \varepsilon_{rd} - 2) - \psi^2} \cos \left(\frac{h}{a} \sqrt{(k_0 a)^2 + \psi^2} \right) \end{aligned} \right\} = 0, \text{ para } n \text{ par} \tag{220}
\end{aligned}$$

$$C_{E2} = \frac{J_m(\zeta)}{K_m(\psi)} A \tag{221}$$

$$C_{H1} = \frac{\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} jvm \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\psi^2} \right) J_m(\zeta) K_m(\psi)}{\omega \mu_0 h \left(\frac{\mu_{rd}}{\zeta} J_m'(\zeta) K_m(\psi) + \frac{1}{\psi} J_m(\zeta) K_m'(\psi) \right)} A \quad (222)$$

$$C_{H2} = \frac{\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} jvm \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\psi^2} \right) (J_m(\zeta))^2}{\omega \mu_0 h \left(\frac{\mu_{rd}}{\zeta} J_m'(\zeta) K_m(\psi) + \frac{1}{\psi} J_m(\zeta) K_m'(\psi) \right)} A \quad (223)$$

$$C_{H3a} = \frac{-j\mu_{rd}vm \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\psi^2} \right) J_m(\zeta) K_m(\psi) \begin{Bmatrix} \sin(v) \\ \cos(v) \end{Bmatrix} e^v}{\omega \mu_0 h \left(\frac{\mu_{rd}}{\zeta} J_m'(\zeta) K_m(\psi) + \frac{1}{\psi} J_m(\zeta) K_m'(\psi) \right)} A \quad (224)$$

$$C_{H3b} = \frac{j\mu_{rd}vm \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\psi^2} \right) J_m(\zeta) K_m(\psi) \begin{Bmatrix} \sin(v) \\ -\cos(v) \end{Bmatrix} e^v}{\omega \mu_0 h \left(\frac{\mu_{rd}}{\zeta} J_m'(\zeta) K_m(\psi) + \frac{1}{\psi} J_m(\zeta) K_m'(\psi) \right)} A \quad (225)$$

Adicionam-se às expressões anteriores as eq. (169), (170), (172), (203), (205), (206) e (214).

As eq. (219) e (220) são obtidas a partir das eq. (213) e (218) com o auxílio das eq. (157), (169), (170) e (172). Elas formam um sistema de duas equações transcendentais a ser resolvido numericamente para as incógnitas k_0 e ψ , levando-se em conta a eq. (175). A frequência de ressonância de um modo $\text{HEM}_{mnp+\delta}$ é obtida a partir da eq. (91), uma vez encontrada a solução para k_0 .

Isoladamente, a eq. (219) pode admitir múltiplas soluções de ψ para um k_0 determinado, e o número da solução considerada, em ordem crescente de ψ , corresponde a n . Da mesma forma, a eq. (220), separadamente, pode também dispor de soluções múltiplas de ψ para um dado k_0 , e o número da solução tomada (com início em zero), em ordem crescente de ψ , refere-se a p .

Levando-se em consideração as eq. (157) e (203), as eq. (221), (222), (223), (224) e (225) são obtidas a partir das eq. (147), (211), (148), (160) e (165), respectivamente. Os números de onda radiais e axiais são calculados por meio das eq. (145), (146), (157), (158) e (163). A distribuição de campo eletromagnético é computada a partir das eq. (93), (111)–(118), (123)–(138).

Observa-se que a existência de modos do tipo transversal eletromagnético (TEM) não é possível, uma vez que a imposição de E_z e de H_z nulos leva à solução de campo eletromagnético nulo em todas as regiões do problema, o que não é um caso de interesse.

Finalmente, constata-se que o modelo matemático para o ressonador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre proposto neste trabalho corresponde a um caso particular do modelo de Itoh e Rudokas²¹ no qual o substrato dielétrico tem espessura infinita e é composto de vácuo (a configuração geométrica do modelo de Itoh e Rudokas é mostrada na Figura 4). Em relação ao que foi proposto na literatura técnica por esses autores²¹, o modelo apresentado nesta seção é expandido para a análise de todos os modos ressonantes do ressonador, não se limitando apenas ao modo $TE_{01\delta}$. Além disso, o referido modelo matemático é submetido à aplicação da técnica variacional com o objetivo de melhorar a precisão do cálculo de frequências de ressonância, como mostrado a seguir.

6.2 APLICAÇÃO DA TÉCNICA VARIACIONAL

Conforme visto anteriormente, o modelo matemático proposto para o ressonador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre fornece uma solução aproximada que é obtida resolvendo-se um sistema de duas equações analíticas transcendentais reais de duas incógnitas reais — o que pode ser realizado por meio de um algoritmo de solução numérica de sistemas de equações não lineares — e posteriormente se calculando o valor de expressões matemáticas compostas de funções bem conhecidas. O referido modelo dispõe de expressões simples para E_z e para H_z , o que proporciona uma rápida visualização preliminar do comportamento da distribuição de campo eletromagnético no ressonador.

No entanto, verifica-se, por exemplo, que a diferença entre a frequência de ressonância do modo $TE_{01\delta}$ calculada por meio do modelo matemático proposto (sem a aplicação da técnica variacional) e a computada com o auxílio de um método rigoroso de solução numérica pode chegar a aproximadamente 5%¹⁶, dependendo-se das propriedades materiais e geométricas do ressonador dielétrico analisado. Embora esse desvio seja significativamente menor do que o obtido com o modelo de primeira ordem de Cohn — ilustrado na Figura 3(a) —, que pode chegar a cerca de 30%¹⁶,

uma precisão maior na determinação de frequências de ressonância é desejável para fins de projeto de antenas de ressoador dielétrico.

Sendo assim, a técnica variacional, na forma como descrita por Harrington²⁰, é aplicada sobre o modelo matemático discutido nesta seção. Isso é realizado de forma semelhante ao procedimento apresentado por Kajfez e Guillon¹⁶, no qual a técnica variacional é aplicada sobre o modelo de Itoh e Rudokas²¹ para obter uma melhor precisão no cômputo da frequência de ressonância do modo TE_{01δ}.

Primeiramente, uma distribuição de campo eletromagnético específica é imposta nos meios 4a e 4b. Em seguida, densidades de corrente elétrica e magnética superficiais são assumidas sobre as interfaces entre algumas regiões do problema como forma de justificar matematicamente as descontinuidades do campo eletromagnético existentes nas mesmas. Por último, a expressão variacional final é derivada a partir da seguinte equação, decorrente do teorema da reciprocidade²⁰:

$$\iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{M} dv = 0 \quad (226)$$

onde $\mathbf{J}$ e $\mathbf{M}$ são os vetores densidade de corrente elétrica e magnética complexos, respectivamente, e V refere-se ao volume total da geometria do problema.

Para o uso da eq. (226), devem ser consideradas as densidades de corrente elétrica e magnética superficiais mencionadas, a distribuição de campo eletromagnético assumida para os meios 4a e 4b e a deduzida anteriormente para as outras quatro regiões do problema.

Sendo assim, a técnica variacional permite o aprimoramento do cálculo de frequência de ressonância por intermédio da determinação de uma distribuição de campo eletromagnético mais realística nos meios 4a e 4b e da aplicação de uma correção matemática sobre a distribuição de campo eletromagnético admitida em todo o espaço do problema.

6.2.1 Modos TE

Para os modos TE, impõe-se a premissa de que o vetor campo elétrico obedece à condição de contorno de interface entre materiais dielétricos perfeitos — expressa pelas eq. (15)–(18) — na interface entre o meio 4a e os meios 2 e 3a e na interface

entre o meio 4b e os meios 2 e 3b. Portanto, levando-se em conta as expressões obtidas anteriormente para as componentes vetoriais do campo eletromagnético nos meios 2, 3a e 3b, o vetor campo elétrico é dado por

$$\mathbf{E} = C_{E4a} K_0' (\tau_B \rho) \sin(\Phi) e^{\beta_B z} \boldsymbol{\varphi} \quad (227)$$

no meio 4a, e

$$\mathbf{E} = C_{E4b} K_0' (\tau_B \rho) \sin(\Phi) e^{-\beta_B z} \boldsymbol{\varphi} \quad (228)$$

no meio 4b, onde $\boldsymbol{\varphi}$ corresponde ao versor na direção ϕ , e C_{E4a} e C_{E4b} são constantes complexas dadas por

$$C_{E4a} = C_{H2} \frac{j\omega\mu_0 a}{\psi} \left\{ \begin{array}{l} \sin(v) \\ -\cos(v) \end{array} \right\} e^\nu \quad (229)$$

$$C_{E4b} = -C_{H2} \frac{j\omega\mu_0 a}{\psi} \left\{ \begin{array}{l} \sin(v) \\ \cos(v) \end{array} \right\} e^\nu \quad (230)$$

Observa-se que expressões para o vetor campo magnético nos meios 4a e 4b que obedecem às eq. (15)–(18) na interface entre os mesmos e as regiões adjacentes (meios 2, 3a e 3b) não podem ser obtidas para μ_{rd} diferente da unidade. Adicionalmente, não é possível escrever expressões de forma a satisfazer as eq. (6), (7), (10) e (11) simultaneamente (leis de Faraday e de Ampère e as duas equações de Helmholtz, respectivamente). Por esse motivo, o campo magnético é assumido nulo nas regiões 4a e 4b, ou seja,

$$\mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (231)$$

nos meios 4a e 4b.

Como forma de justificar matematicamente a descontinuidade da componente tangencial do vetor campo magnético na interface entre o meio 4a e os meios 2 e 3a e na interface entre o meio 4b e os meios 2 e 3b, situação essa que não respeita a eq. (16), uma densidade de corrente elétrica superficial $\mathbf{J}_s$ é assumida sobre cada uma dessas interfaces, tal que²⁰:

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n}_{ab} \times (\mathbf{H}_b - \mathbf{H}_a) \quad (232)$$

onde $\mathbf{n}_{ab}$ é o versor normal às interfaces mencionadas, que aponta dos meios 2, 3a e 3b para os meios 4a e 4b; $\mathbf{H}_a$ refere-se ao vetor campo magnético complexo nos meios 2, 3a e 3b; $\mathbf{H}_b$ corresponde ao vetor campo magnético complexo nos meios 4a e 4b (que é nulo no caso dos modos TE).

Considera-se que o campo elétrico em todo o domínio geométrico do problema é suportado por uma densidade de corrente elétrica virtual dada por²⁰

$$\mathbf{J} = -j\omega\epsilon\mathbf{E} - \frac{1}{j\omega} \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) \quad (233)$$

A eq. (233) é obtida a partir das leis de Faraday e de Ampère considerando-se a presença de uma densidade de corrente elétrica, ou seja, a eq. (6) e a equação

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (234)$$

Utilizando-se a eq. (6), a eq. (232) pode ser reescrita na forma

$$\mathbf{J}_s = -\frac{1}{j\omega\mu} (\nabla \times \mathbf{E}_a) \times \mathbf{n}_{ab} \quad (235)$$

onde $\mathbf{E}_a$ é o vetor campo elétrico complexo nos meios 2, 3a e 3b.

Substituindo-se as eq. (233) e (235) na eq. (226), obtém-se

$$\omega_c^2 = \frac{\iiint_V \mathbf{E} \cdot \left[\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) \right] dv + \iint_{S_{ab}} \mathbf{E}_a \cdot \left[\left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E}_a \right) \times \mathbf{n}_{ab} \right] ds}{\iiint_V \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv} \quad (236)$$

onde ω_c é a frequência angular de ressonância corrigida pela técnica variacional, e S_{ab} refere-se à superfície correspondente à interface entre o meio 4a e os meios 2 e 3a e à interface entre o meio 4b e os meios 2 e 3b. Pode-se verificar que o termo ω que aparece nas eq. (233) e (235) é substituído por ω_c na eq. (236) com o intuito de evitar uma confusão com as instâncias de ω que ocorrem nas expressões de campo eletromagnético deduzidas anteriormente nesta seção.

A obtenção da eq. (236) a partir da eq. (226) desconsidera $\mathbf{H}$ e $\mathbf{M}$ pois o que se analisa por ora é somente a reação do campo elétrico sobre sua fonte geradora virtual²⁰.

As integrais da eq. (236) podem ser calculadas separadamente para cada região e para cada superfície relevante, de forma que se tem

$$\omega_c^2 = \frac{n_{E1} + n_{E2} + n_{E3a} + n_{E3b} + n_{E4a} + n_{E4b} + n_{EV} + n_{EH}}{d_{E1} + d_{E2} + d_{E3a} + d_{E3b} + d_{E4a} + d_{E4b}} \quad (237)$$

onde n_{E1} , n_{E2} , n_{E3a} , n_{E3b} , n_{E4a} , n_{E4b} , n_{EV} e n_{EH} representam o termo do numerador referente ao campo elétrico nos meios 1, 2, 3a, 3b, 4a e 4b e nas interfaces verticais (entre os meios 4a e 3a e entre os meios 4b e 3b) e horizontais (entre o meio 2 e os meios 4a e 4b) onde há descontinuidade de campo eletromagnético, respectivamente; d_{E1} , d_{E2} , d_{E3a} , d_{E3b} , d_{E4a} e d_{E4b} correspondem ao termo do denominador referente ao campo elétrico nos meios 1, 2, 3a, 3b, 4a e 4b, respectivamente. As expressões para todos esses termos são apresentadas a seguir:

$$d_{E1} = \varepsilon_d \iiint_{V_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv = \varepsilon_d \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \rho d\rho d\phi dz \quad (238)$$

$$d_{E2} = \varepsilon_0 \iiint_{V_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv = \varepsilon_0 \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \rho d\rho d\phi dz \quad (239)$$

$$d_{E3a} = \varepsilon_0 \iiint_{V_{3a}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{-h} \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \rho d\rho d\phi dz \quad (240)$$

$$d_{E3b} = \varepsilon_0 \iiint_{V_{3b}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv = \varepsilon_0 \int_h^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \rho d\rho d\phi dz \quad (241)$$

$$d_{E4a} = \varepsilon_0 \iiint_{V_{4a}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{-h} \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \rho d\rho d\phi dz \quad (242)$$

$$d_{E4b} = \varepsilon_0 \iiint_{V_{4b}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv = \varepsilon_0 \int_h^\infty \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \rho d\rho d\phi dz \quad (243)$$

$$n_{E1} = \frac{1}{\mu_d} \iiint_{V_1} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}) dv = \frac{k_d^2}{\mu_d} \iiint_{V_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv = \omega^2 d_{E1} \quad (244)$$

$$n_{E2} = \frac{1}{\mu_0} \iiint_{V_2} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}) dv = \frac{k_0^2}{\mu_0} \iiint_{V_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv = \omega^2 d_{E2} \quad (245)$$

$$n_{E3a} = \frac{1}{\mu_0} \iiint_{V_{3a}} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}) dv = \frac{k_0^2}{\mu_0} \iiint_{V_{3a}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv = \omega^2 d_{E3a} \quad (246)$$

$$n_{E3b} = \frac{1}{\mu_0} \iiint_{V_{3b}} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}) dv = \frac{k_0^2}{\mu_0} \iiint_{V_{3b}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv = \omega^2 d_{E3b} \quad (247)$$

$$n_{E4a} = \frac{1}{\mu_0} \iiint_{V_{4a}} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}) dv = \frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{-h} \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}) \rho d\rho d\phi dz \quad (248)$$

$$n_{E4b} = \frac{1}{\mu_0} \iiint_{V_{4b}} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}) dv = \frac{1}{\mu_0} \int_h^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}) \rho d\rho d\phi dz \quad (249)$$

$$\begin{aligned} n_{EV} &= \frac{1}{\mu_0} \iint_{S_{3a4a}} \mathbf{E}_a \cdot [(\nabla \times \mathbf{E}_a) \times \mathbf{p}] ds + \frac{1}{\mu_0} \iint_{S_{3b4b}} \mathbf{E}_a \cdot [(\nabla \times \mathbf{E}_a) \times \mathbf{p}] ds \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left\{ \int_{-\infty}^{-h} \int_0^{2\pi} \mathbf{E}_a \cdot [(\nabla \times \mathbf{E}_a) \times \mathbf{p}] a d\phi dz \right|_{\rho=a} + \int_h^{\infty} \int_0^{2\pi} \mathbf{E}_a \cdot [(\nabla \times \mathbf{E}_a) \times \mathbf{p}] a d\phi dz \right|_{\rho=a} \left. \right\} \quad (250) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_{EH} &= \frac{1}{\mu_0} \iint_{S_{24a}} \mathbf{E}_a \cdot [(\nabla \times \mathbf{E}_a) \times (-\mathbf{z})] ds + \frac{1}{\mu_0} \iint_{S_{24b}} \mathbf{E}_a \cdot [(\nabla \times \mathbf{E}_a) \times \mathbf{z}] ds \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \mathbf{E}_a \cdot [(\nabla \times \mathbf{E}_a) \times (-\mathbf{z})] \rho d\rho d\phi \right|_{z=-h} + \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \mathbf{E}_a \cdot [(\nabla \times \mathbf{E}_a) \times \mathbf{z}] \rho d\rho d\phi \right|_{z=h} \left. \right\} \quad (251) \end{aligned}$$

onde V_1 , V_2 , V_{3a} , V_{3b} , V_{4a} e V_{4b} se referem ao volume dos meios 1, 2, 3a, 3b, 4a e 4b, respectivamente; S_{24a} , S_{24b} , S_{3a4a} , S_{3b4b} correspondem à superfície da interface entre os meios 2 e 4a, 2 e 4b, 3a e 4a, 3b e 4b, respectivamente; $\mathbf{p}$ e $\mathbf{z}$ são os versores nas direções ρ e z , respectivamente.

Observa-se que as eq. (244)–(247) podem ser escritas de forma simplificada em função de d_{E1} , d_{E2} , d_{E3a} e d_{E3b} porque o campo eletromagnético nos meios 1, 2, 3a e 3b satisfaz a eq. (10) — equação de Helmholtz —, ou seja,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = k^2 \mathbf{E} \quad (252)$$

As eq. (238)–(251) são calculadas por meio das expressões derivadas anteriormente para as componentes vetoriais do campo eletromagnético nos meios 1, 2, 3a e 3b e das eq. (227) e (228), com o auxílio das eq. (229) e (230). Dado que a geometria do problema é simétrica em relação ao plano $z = 0$, pode-se mostrar que

$$d_{E3b} = d_{E3a} \quad (253)$$

$$d_{E4b} = d_{E4a} \quad (254)$$

$$n_{E4b} = n_{E4a} \quad (255)$$

Considerando-se coordenadas cilíndricas, o desenvolvimento das eq. (238)–(251) resulta em

$$d_{E1} = -\frac{2\pi\omega^2\mu_d^2\varepsilon_d a^2 h}{\zeta^2} C_{H1}^2 (\sin(\Phi))^2 \left\{ \frac{1 - \frac{\sin(2\nu)}{2\nu}}{1 + \frac{\sin(2\nu)}{2\nu}} \right\} I_1 \quad (256)$$

$$d_{E2} = -\frac{2\pi\omega^2\mu_0^2\varepsilon_0 a^2 h}{\psi^2} C_{H2}^2 (\sin(\Phi))^2 \left\{ \frac{1 - \frac{\sin(2\nu)}{2\nu}}{1 + \frac{\sin(2\nu)}{2\nu}} \right\} I_2 \quad (257)$$

$$d_{E3a} = -\frac{\pi\omega^2\mu_0^2\varepsilon_0 a^2 h}{\zeta^2\nu} C_{H3a}^2 (\sin(\Phi))^2 e^{-2\nu} I_1 \quad (258)$$

$$d_{E4a} = \frac{\pi\varepsilon_0 h}{\nu} C_{E4a}^2 (\sin(\Phi))^2 e^{-2\nu} I_2 \quad (259)$$

$$n_{E4a} = \frac{\pi h}{\mu_0 \nu} C_{E4a}^2 (\sin(\Phi))^2 e^{-2\nu} \left[I_3 - \frac{\psi}{a} I_4 - \left(\frac{\psi}{a} \right)^2 I_5 - \left(\frac{\nu}{h} \right)^2 I_2 \right] \quad (260)$$

$$n_{EV} = -\frac{2\pi\omega^2\mu_0 a^2 h}{\zeta\nu} J_0'(\zeta) \left(\frac{J_0'(\zeta)}{\zeta} + J_0''(\zeta) \right) C_{H3a}^2 (\sin(\Phi))^2 e^{-2\nu} \quad (261)$$

$$n_{EH} = \left\{ \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{2\pi\omega^2\mu_0 \nu a^2}{\psi^2 h} C_{H2}^2 (\sin(\Phi))^2 \sin(2\nu) I_2 \quad (262)$$

onde J_m'' denota a derivada segunda da função de Bessel de primeira espécie de ordem m , e I_1 , I_2 , I_3 , I_4 e I_5 são integrais, dadas por

$$I_1 = \int_0^a \rho \left(J_0'(\tau_A \rho) \right)^2 d\rho \quad (263)$$

$$I_2 = \int_a^\infty \rho \left(K_0'(\tau_B \rho) \right)^2 d\rho \quad (264)$$

$$I_3 = \int_a^\infty \frac{\left(K_0'(\tau_B \rho) \right)^2}{\rho} d\rho \quad (265)$$

$$I_4 = \int_a^{\infty} K_0'(\tau_B \rho) K_0''(\tau_B \rho) d\rho \quad (266)$$

$$I_5 = \int_a^{\infty} \rho K_0'(\tau_B \rho) K_0'''(\tau_B \rho) d\rho \quad (267)$$

onde K_m'' e K_m''' representam as derivadas segunda e terceira da função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem m , respectivamente.

As eq. (263)–(267) são calculáveis por meio de integração numérica.

A frequência linear de ressonância f_c corrigida pela técnica variacional é então computada por meio de

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega^2 d_{E1} + \omega^2 d_{E2} + 2\omega^2 d_{E3a} + 2n_{E4a} + n_{EV} + n_{EH}}{d_{E1} + d_{E2} + 2d_{E3a} + 2d_{E4a}}} \quad (268)$$

Observa-se que o termo trigonométrico quadrático $(\sin(\Phi))^2$ ocorre como fator multiplicativo em todas as eq. (256)–(262). Dessa forma, ele aparece em todos os termos somados da eq. (268) e é, portanto, cancelado.

6.2.2 Modos TM

Assume-se para os modos TM que o vetor campo magnético obedece à condição de contorno de interface entre materiais dielétricos perfeitos na interface entre o meio 4a e os meios 2 e 3a e na interface entre o meio 4b e os meios 2 e 3b. Sendo assim, considerando-se as expressões obtidas anteriormente para as componentes vetoriais do campo eletromagnético nos meios 2, 3a e 3b, o vetor campo magnético assume a forma

$$\mathbf{H} = C_{H4a} K_0'(\tau_B \rho) \cos(\Phi) e^{\beta_B z} \boldsymbol{\varphi} \quad (269)$$

no meio 4a, e

$$\mathbf{H} = C_{H4b} K_0'(\tau_B \rho) \cos(\Phi) e^{-\beta_B z} \boldsymbol{\varphi} \quad (270)$$

no meio 4b, onde C_{H4a} e C_{H4b} são constantes complexas dadas por

$$C_{H4a} = C_{E2} \frac{j\omega\epsilon_0 a}{\psi} \begin{Bmatrix} \cos(v) \\ -\sin(v) \end{Bmatrix} e^v \quad (271)$$

$$C_{H4b} = C_{E2} \frac{j\omega\epsilon_0 a}{\psi} \begin{Bmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{Bmatrix} e^v \quad (272)$$

Verifica-se que não é possível escrever expressões para o vetor campo elétrico nos meios 4a e 4b que satisfaçam as eq. (15)–(18) na interface entre os mesmos e as regiões adjacentes (meios 2, 3a e 3b) para ϵ_{rd} diferente da unidade. Ademais, expressões que obedeçam simultaneamente às eq. (6), (7), (10) e (11) não podem ser escritas. Por esse motivo, o campo elétrico é assumido nulo nas regiões 4a e 4b, isto é,

$$\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (273)$$

nos meios 4a e 4b.

A descontinuidade da componente tangencial do vetor campo elétrico na interface entre o meio 4a e os meios 2 e 3a e na interface entre o meio 4b e os meios 2 e 3b, fato que contraria a eq. (15), é matematicamente justificada por uma densidade de corrente magnética superficial $\mathbf{M}_s$ admitida em cada uma dessas interfaces, tal que²⁰:

$$\mathbf{M}_s = (\mathbf{E}_b - \mathbf{E}_a) \times \mathbf{n}_{ab} \quad (274)$$

onde $\mathbf{n}_{ab}$ e $\mathbf{E}_a$ são definidos como anteriormente para os modos TE, e $\mathbf{E}_b$ representa o vetor campo elétrico complexo nos meios 4a e 4b (que no caso dos modos TM é nulo).

Supõe-se que o campo magnético em todo o domínio geométrico do problema é suportado por uma densidade de corrente magnética virtual dada por²⁰

$$\mathbf{M} = -j\omega\mu\mathbf{H} - \frac{1}{j\omega} \nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} \right) \quad (275)$$

A eq. (275) decorre das leis de Faraday e de Ampère levando-se em conta a presença de uma densidade de corrente magnética, ou seja, a eq. (7) e a equação

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{M} - j\omega\mu\mathbf{H} \quad (276)$$

Com o auxílio da eq. (7), pode-se reescrever a eq. (274) como

$$\mathbf{M}_s = \frac{1}{j\omega\epsilon} \mathbf{n}_{ab} \times (\nabla \times \mathbf{H}_a) \quad (277)$$

onde $\mathbf{H}_a$ tem a mesma definição já estabelecida para os modos TE.

As eq. (275) e (277) substituídas na eq. (226) resultam em

$$\omega_c^2 = \frac{\iiint_V \mathbf{H} \cdot \left[\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} \right) \right] dv + \iint_{S_{ab}} \mathbf{H}_a \cdot \left[\left(\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{H}_a \right) \times \mathbf{n}_{ab} \right] ds}{\iiint_V \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv} \quad (278)$$

onde se define S_{ab} da mesma forma como definida para o modo TE.

Uma vez que somente a reação do campo magnético sobre sua fonte geradora virtual é analisada, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{J}$ não são levados em conta na dedução da eq. (278) a partir da eq. (226)²⁰.

As integrais da eq. (278) podem ser calculadas separadamente para cada região e para cada superfície relevante, tal que

$$\omega_c^2 = \frac{n_{H1} + n_{H2} + n_{H3a} + n_{H3b} + n_{H4a} + n_{H4b} + n_{HV} + n_{HH}}{d_{H1} + d_{H2} + d_{H3a} + d_{H3b} + d_{H4a} + d_{H4b}} \quad (279)$$

onde n_{H1} , n_{H2} , n_{H3a} , n_{H3b} , n_{H4a} , n_{H4b} , n_{HV} e n_{HH} correspondem ao termo do numerador referente ao campo magnético nos meios 1, 2, 3a, 3b, 4a e 4b e nas interfaces verticais (entre os meios 4a e 3a e entre os meios 4b e 3b) e horizontais (entre o meio 2 e os meios 4a e 4b) onde há descontinuidade de campo eletromagnético, respectivamente; d_{H1} , d_{H2} , d_{H3a} , d_{H3b} , d_{H4a} e d_{H4b} representam o termo do denominador referente ao campo magnético nos meios 1, 2, 3a, 3b, 4a e 4b, respectivamente. A seguir, são exibidas as expressões para todos os termos mencionados:

$$d_{H1} = \mu_d \iiint_{V_1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv = \mu_d \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \rho d\rho d\phi dz \quad (280)$$

$$d_{H2} = \mu_0 \iiint_{V_2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv = \mu_0 \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \rho d\rho d\phi dz \quad (281)$$

$$d_{H3a} = \mu_0 \iiint_{V_{3a}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv = \mu_0 \int_{-\infty}^{-h} \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \rho d\rho d\phi dz \quad (282)$$

$$d_{H3b} = \mu_0 \iiint_{V_{3b}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv = \mu_0 \int_h^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \rho d\rho d\phi dz \quad (283)$$

$$d_{H4a} = \mu_0 \iiint_{V_{4a}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv = \mu_0 \int_{-\infty}^{-h} \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \rho d\rho d\phi dz \quad (284)$$

$$d_{H4b} = \mu_0 \iiint_{V_{4b}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv = \mu_0 \int_h^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \rho d\rho d\phi dz \quad (285)$$

$$n_{H1} = \frac{1}{\mathcal{E}_d} \iiint_{V_1} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}) dv = \frac{k_d^2}{\mathcal{E}_d} \iiint_{V_1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv = \omega^2 d_{H1} \quad (286)$$

$$n_{H2} = \frac{1}{\mathcal{E}_0} \iiint_{V_2} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}) dv = \frac{k_0^2}{\mathcal{E}_0} \iiint_{V_2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv = \omega^2 d_{H2} \quad (287)$$

$$n_{H3a} = \frac{1}{\mathcal{E}_0} \iiint_{V_{3a}} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}) dv = \frac{k_0^2}{\mathcal{E}_0} \iiint_{V_{3a}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv = \omega^2 d_{H3a} \quad (288)$$

$$n_{H3b} = \frac{1}{\mathcal{E}_0} \iiint_{V_{3b}} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}) dv = \frac{k_0^2}{\mathcal{E}_0} \iiint_{V_{3b}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv = \omega^2 d_{H3b} \quad (289)$$

$$n_{H4a} = \frac{1}{\mathcal{E}_0} \iiint_{V_{4a}} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}) dv = \frac{1}{\mathcal{E}_0} \int_{-\infty}^{-h} \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}) \rho d\rho d\phi dz \quad (290)$$

$$n_{H4b} = \frac{1}{\mathcal{E}_0} \iiint_{V_{4b}} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}) dv = \frac{1}{\mathcal{E}_0} \int_h^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}) \rho d\rho d\phi dz \quad (291)$$

$$\begin{aligned} n_{HV} &= \frac{1}{\mathcal{E}_0} \iint_{S_{3a4a}} \mathbf{H}_a \cdot [(\nabla \times \mathbf{H}_a) \times \boldsymbol{\rho}] ds + \frac{1}{\mathcal{E}_0} \iint_{S_{3b4b}} \mathbf{H}_a \cdot [(\nabla \times \mathbf{H}_a) \times \boldsymbol{\rho}] ds \\ &= \frac{1}{\mathcal{E}_0} \left\{ \int_{-\infty}^{-h} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_a \cdot [(\nabla \times \mathbf{H}_a) \times \boldsymbol{\rho}] a d\phi dz \Big|_{\rho=a} + \int_h^{\infty} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_a \cdot [(\nabla \times \mathbf{H}_a) \times \boldsymbol{\rho}] a d\phi dz \Big|_{\rho=a} \right\} \quad (292) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_{HH} &= \frac{1}{\mathcal{E}_0} \iint_{S_{24a}} \mathbf{H}_a \cdot [(\nabla \times \mathbf{H}_a) \times (-\mathbf{z})] ds + \frac{1}{\mathcal{E}_0} \iint_{S_{24b}} \mathbf{H}_a \cdot [(\nabla \times \mathbf{H}_a) \times \mathbf{z}] ds \\ &= \frac{1}{\mathcal{E}_0} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \mathbf{H}_a \cdot [(\nabla \times \mathbf{H}_a) \times (-\mathbf{z})] \rho d\rho d\phi \Big|_{z=-h} + \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \mathbf{H}_a \cdot [(\nabla \times \mathbf{H}_a) \times \mathbf{z}] \rho d\rho d\phi \Big|_{z=h} \right\} \quad (293) \end{aligned}$$

Verifica-se que é possível escrever as eq. (286)–(289) de maneira simplificada em função de d_{H1} , d_{H2} , d_{H3a} e d_{H3b} dado que o campo eletromagnético nos meios 1, 2, 3a e 3b obedece à eq. (11) — equação de Helmholtz —, isto é,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = k^2 \mathbf{H} \quad (294)$$

Calculam-se as eq. (280)–(293) por meio das expressões derivadas anteriormente para as componentes vetoriais do campo eletromagnético nos meios 1, 2, 3a e 3b e das eq. (269) e (270), com o auxílio das eq. (271) e (272). Visto que a geometria do problema é simétrica em relação ao plano $z = 0$, é possível demonstrar que

$$d_{H3b} = d_{H3a} \quad (295)$$

$$d_{H4b} = d_{H4a} \quad (296)$$

$$n_{H4b} = n_{H4a} \quad (297)$$

Admitindo-se coordenadas cilíndricas, o desenvolvimento das eq. (280)–(293) leva a

$$d_{H1} = -\frac{2\pi\omega^2\mu_d\epsilon_d^2a^2h}{\zeta^2}C_{E1}^2(\cos(\Phi))^2 \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{\sin(2\nu)}{2\nu} \\ 1 - \frac{\sin(2\nu)}{2\nu} \end{array} \right\} I_1 \quad (298)$$

$$d_{H2} = -\frac{2\pi\omega^2\mu_0\epsilon_0^2a^2h}{\psi^2}C_{E2}^2(\cos(\Phi))^2 \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{\sin(2\nu)}{2\nu} \\ 1 - \frac{\sin(2\nu)}{2\nu} \end{array} \right\} I_2 \quad (299)$$

$$d_{H3a} = -\frac{\pi\omega^2\mu_0\epsilon_0^2a^2h}{\zeta^2\nu}C_{E3a}^2(\cos(\Phi))^2 e^{-2\nu} I_1 \quad (300)$$

$$d_{H4a} = \frac{\pi\mu_0h}{\nu}C_{H4a}^2(\cos(\Phi))^2 e^{-2\nu} I_2 \quad (301)$$

$$n_{H4a} = \frac{\pi h}{\epsilon_0\nu}C_{H4a}^2(\cos(\Phi))^2 e^{-2\nu} \left[I_3 - \frac{\psi}{a} I_4 - \left(\frac{\psi}{a}\right)^2 I_5 - \left(\frac{\nu}{h}\right)^2 I_2 \right] \quad (302)$$

$$n_{HV} = -\frac{2\pi\omega^2\epsilon_0a^2h}{\zeta\nu}J_0'(\zeta) \left(\frac{J_0'(\zeta)}{\zeta} + J_0''(\zeta) \right) C_{E3a}^2(\cos(\Phi))^2 e^{-2\nu} \quad (303)$$

$$n_{HH} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \right\} \frac{2\pi\omega^2\epsilon_0\nu a^2}{\psi^2 h} C_{E2}^2(\cos(\Phi))^2 \sin(2\nu) I_2 \quad (304)$$

onde as integrais I_1 , I_2 , I_3 , I_4 e I_5 são calculadas de forma idêntica às correspondentes do modo TE, dadas pelas eq. (263)–(267).

Assim, a frequência linear de ressonância corrigida pela técnica variacional é obtida utilizando-se

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega^2 d_{H1} + \omega^2 d_{H2} + 2\omega^2 d_{H3a} + 2n_{H4a} + n_{HV} + n_{HH}}{d_{H1} + d_{H2} + 2d_{H3a} + 2d_{H4a}}} \quad (305)$$

Verifica-se que o termo trigonométrico quadrático $(\cos(\Phi))^2$ aparece como fator multiplicativo em todas as eq. (298)–(304). Portanto, ele ocorre em todos os termos somados da eq. (305) e é cancelado.

6.2.3 Modos HEM

A aplicação da técnica variacional para os modos TE e TM admite uma distribuição de campo elétrico (modos TE) ou de campo magnético (modos TM) dentro dos meios 4a e 4b com direção vetorial paralela a ϕ , como consequência da imposição da condição de contorno de interface entre materiais dielétricos perfeitos na interface entre o meio 4a e os meios 2 e 3a e na interface entre o meio 4b e os meios 2 e 3b.

Como já mencionado, os modos HEM podem ser conceituados matematicamente como uma combinação de modos TE e TM. Assim, são assumidas nos meios 4a e 4b distribuições de campo elétrico e de campo magnético com direção vetorial paralela a ϕ de modo a considerar ambas as parcelas TE e TM dos modos HEM. Dessa maneira, levando-se em conta a continuidade da componente na direção ϕ dos vetores campo elétrico e campo magnético, obtém-se

$$\mathbf{E} = \left(C_{E4a} \frac{{}'K_m(\tau_B \rho)}{\rho} + C_{H4a} {}'K_m'(\tau_B \rho) \right) \sin(m\phi + \Phi) e^{\beta_B z} \boldsymbol{\phi} \quad (306)$$

$$\mathbf{H} = \left(C_{E4a} {}''K_m'(\tau_B \rho) + C_{H4a} \frac{{}''K_m(\tau_B \rho)}{\rho} \right) \cos(m\phi + \Phi) e^{\beta_B z} \boldsymbol{\phi} \quad (307)$$

no meio 4a, e

$$\mathbf{E} = \left(C_{E4b} \frac{{}'K_m(\tau_B \rho)}{\rho} + C_{H4b} {}'K_m'(\tau_B \rho) \right) \sin(m\phi + \Phi) e^{-\beta_B z} \boldsymbol{\phi} \quad (308)$$

$$\mathbf{H} = \left(C_{E4b} {}''K_m'(\tau_B \rho) + C_{H4b} \frac{{}''K_m(\tau_B \rho)}{\rho} \right) \cos(m\phi + \Phi) e^{-\beta_B z} \boldsymbol{\phi} \quad (309)$$

no meio 4b, onde C_{E4a}' , C_{H4a}' , C_{E4b}' , C_{H4b}' , C_{E4a}'' , C_{H4a}'' , C_{E4b}'' e C_{H4b}'' são constantes complexas, dadas por

$$C_{E4a}' = C_{E2} \frac{vma^2}{\psi^2 h} \left\{ \begin{matrix} \sin(v) \\ \cos(v) \end{matrix} \right\} e^v \quad (310)$$

$$C_{E4b}' = C_{E2} \frac{vma^2}{\psi^2 h} \left\{ \begin{matrix} -\sin(v) \\ \cos(v) \end{matrix} \right\} e^v \quad (311)$$

$$C_{H4a}' = C_{H2} \frac{j\omega\mu_0 a}{\psi} \left\{ \begin{matrix} \sin(v) \\ -\cos(v) \end{matrix} \right\} e^v \quad (312)$$

$$C_{H4b}' = -C_{H2} \frac{j\omega\mu_0 a}{\psi} \left\{ \begin{matrix} \sin(v) \\ \cos(v) \end{matrix} \right\} e^v \quad (313)$$

$$C_{E4a}'' = C_{E2} \frac{j\omega\epsilon_0 a}{\psi} \left\{ \begin{matrix} \cos(v) \\ -\sin(v) \end{matrix} \right\} e^v \quad (314)$$

$$C_{E4b}'' = C_{E2} \frac{j\omega\epsilon_0 a}{\psi} \left\{ \begin{matrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{matrix} \right\} e^v \quad (315)$$

$$C_{H4a}'' = -C_{H2} \frac{vma^2}{\psi^2 h} \left\{ \begin{matrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{matrix} \right\} e^v \quad (316)$$

$$C_{H4b}'' = C_{H2} \frac{vma^2}{\psi^2 h} \left\{ \begin{matrix} -\cos(v) \\ \sin(v) \end{matrix} \right\} e^v \quad (317)$$

Verifica-se que, se ϵ_{rd} e μ_{rd} não são ambos unitários, não podem ser obtidas para os meios 4a e 4b componentes vetoriais de campos elétrico e magnético nas direções ρ e z que obedecem às eq. (15)–(18) nas interfaces entre as referidas regiões e as adjacentes (meios 2, 3a e 3b). Adicionalmente, não é possível escrever expressões de forma a satisfazer simultaneamente as eq. (6), (7), (10) e (11).

Com o intuito de justificar matematicamente a descontinuidade da componente tangencial dos vetores campo elétrico e campo magnético presente na interface entre o meio 4a e os meios 2 e 3a e na interface entre o meio 4b e os meios 2 e 3b, o que desrespeita as eq. (15) e (16), são assumidas densidades de corrente elétrica e magnética superficiais em cada uma dessas interfaces conforme as eq. (232) e (274), respectivamente.

Adicionalmente, o modelo matemático para o ressonador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre proposto neste trabalho utiliza uma aproximação para os modos HEM, como visto anteriormente: uma das eq. (185) ou (200) é desconsiderada, dependendo-se do modo HEM analisado. Pode ser demonstrado que isso implica a existência de uma descontinuidade nos vetores campo elétrico e campo magnético sobre a superfície de interface entre o meio 1 e os meios 3a e 3b. Sendo assim, densidades de corrente elétrica e magnética superficiais também são adicionadas nessas interfaces:

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n}_{cd} \times (\mathbf{H}_d - \mathbf{H}_c) \quad (318)$$

$$\mathbf{M}_s = (\mathbf{E}_d - \mathbf{E}_c) \times \mathbf{n}_{cd} \quad (319)$$

onde $\mathbf{n}_{cd}$ se refere ao versor normal às interfaces mencionadas, que aponta do meio 1 para os meios 3a e 3b; $\mathbf{E}_c$ e $\mathbf{H}_c$ representam os vetores campo elétrico e campo magnético complexos no meio 1, respectivamente; $\mathbf{E}_d$ e $\mathbf{H}_d$ correspondem aos vetores campo elétrico e campo magnético complexos, respectivamente, nos meios 3a e 3b.

Considera-se que o campo eletromagnético em todo o domínio geométrico do problema é suportado por densidades de corrente elétrica e magnética virtuais dadas por

$$\mathbf{J} = -j\omega\epsilon\mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{H} \quad (320)$$

$$\mathbf{M} = -j\omega\mu\mathbf{H} - \nabla \times \mathbf{E} \quad (321)$$

As eq. (320) e (321) são obtidas diretamente a partir das eq. (234) e (276) — leis de Faraday e de Ampère na presença de densidades de corrente elétrica e magnética —.

A substituição das eq. (232), (274), (318)–(321) na eq. (226) leva a

$$\omega_c = j \left\{ \frac{\iiint_V \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dv + \iint_{S_{ab}} \mathbf{E}_a \cdot [(\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_b) \times \mathbf{n}_{ab}] ds + \iint_{S_{cd}} \mathbf{E}_c \cdot [(\mathbf{H}_c - \mathbf{H}_d) \times \mathbf{n}_{cd}] ds}{\iiint_V \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv - \iiint_V \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv} + \frac{\iiint_V \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) dv + \iint_{S_{ab}} \mathbf{H}_a \cdot [(\mathbf{E}_a - \mathbf{E}_b) \times \mathbf{n}_{ab}] ds + \iint_{S_{cd}} \mathbf{H}_c \cdot [(\mathbf{E}_c - \mathbf{E}_d) \times \mathbf{n}_{cd}] ds}{\iiint_V \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv - \iiint_V \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv} \right\} \quad (322)$$

onde S_{ab} tem a mesma definição estabelecida anteriormente para os modos TE e TM, e S_{cd} é a superfície correspondente à interface entre o meio 1 e os meios 3a e 3b.

As integrais da eq. (322) podem ser calculadas separadamente para cada região e para cada superfície relevante:

$$\omega_c = j \left(\frac{n_{E1} + n_{E2} + n_{E3a} + n_{E3b} + n_{E4a} + n_{E4b} + n_{EV} + n_{EH} + n_{EM}}{d_{H1} + d_{H2} + d_{H3a} + d_{H3b} + d_{H4a} + d_{H4b} - d_{E1} - d_{E2} - d_{E3a} - d_{E3b} - d_{E4a} - d_{E4b}} + \frac{n_{H1} + n_{H2} + n_{H3a} + n_{H3b} + n_{H4a} + n_{H4b} + n_{HV} + n_{HH} + n_{HM}}{d_{H1} + d_{H2} + d_{H3a} + d_{H3b} + d_{H4a} + d_{H4b} - d_{E1} - d_{E2} - d_{E3a} - d_{E3b} - d_{E4a} - d_{E4b}} \right) \quad (323)$$

onde os termos do denominador referentes ao campo elétrico, d_{E1} , d_{E2} , d_{E3a} , d_{E3b} , d_{E4a} e d_{E4b} , e ao campo magnético, d_{H1} , d_{H2} , d_{H3a} , d_{H3b} , d_{H4a} e d_{H4b} , possuem a mesma definição dos termos de mesmo nome utilizados para os modos TE e TM e são calculados por meio das eq. (238)–(243), (280)–(285); os termos do numerador referentes ao campo elétrico n_{E1} , n_{E2} , n_{E3a} , n_{E3b} , n_{E4a} , n_{E4b} , n_{EV} e n_{EH} e ao campo magnético n_{H1} , n_{H2} , n_{H3a} , n_{H3b} , n_{H4a} , n_{H4b} , n_{HV} e n_{HH} têm o mesmo significado de seus respectivos termos nos modos TE e TM e são adicionados a n_{EM} e n_{HM} , que correspondem ao termo do numerador referente aos campos elétrico e magnético, respectivamente, na interface entre o meio 1 e os meios 3a e 3b. São exibidas a seguir as expressões para todos os termos do numerador para os modos HEM:

$$n_{E1} = \iiint_{V_1} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dv = j\omega\epsilon_d \iiint_{V_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv = j\omega d_{E1} \quad (324)$$

$$n_{E2} = \iiint_{V_2} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dv = j\omega\epsilon_0 \iiint_{V_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv = j\omega d_{E2} \quad (325)$$

$$n_{E3a} = \iiint_{V_{3a}} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dv = j\omega\epsilon_0 \iiint_{V_{3a}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv = j\omega d_{E3a} \quad (326)$$

$$n_{E3b} = \iiint_{V_{3b}} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dv = j\omega\epsilon_0 \iiint_{V_{3b}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv = j\omega d_{E3b} \quad (327)$$

$$n_{E4a} = \iiint_{V_{4a}} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dv = \int_{-\infty}^{-h} \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \rho d\rho d\phi dz \quad (328)$$

$$n_{E4b} = \iiint_{V_{4b}} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dv = \int_h^\infty \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \rho d\rho d\phi dz \quad (329)$$

$$\begin{aligned}
n_{EV} &= \iint_{S_{3a4a}} \mathbf{E}_a \cdot [(\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_b) \times \boldsymbol{\rho}] ds + \iint_{S_{3b4b}} \mathbf{E}_a \cdot [(\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_b) \times \boldsymbol{\rho}] ds \\
&= \int_{-\infty}^{-h} \int_0^{2\pi} \mathbf{E}_a \cdot [(\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_b) \times \boldsymbol{\rho}] ad\phi dz \Big|_{\rho=a} + \int_h^{\infty} \int_0^{2\pi} \mathbf{E}_a \cdot [(\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_b) \times \boldsymbol{\rho}] ad\phi dz \Big|_{\rho=a} \quad (330)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_{EH} &= \iint_{S_{24a}} \mathbf{E}_a \cdot [(\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_b) \times (-\mathbf{z})] ds + \iint_{S_{24b}} \mathbf{E}_a \cdot [(\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_b) \times \mathbf{z}] ds \\
&= \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \mathbf{E}_a \cdot [(\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_b) \times (-\mathbf{z})] \rho d\rho d\phi \Big|_{z=-h} + \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \mathbf{E}_a \cdot [(\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_b) \times \mathbf{z}] \rho d\rho d\phi \Big|_{z=h} \quad (331)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_{EM} &= \iint_{S_{13a}} \mathbf{E}_c \cdot [(\mathbf{H}_c - \mathbf{H}_d) \times (-\mathbf{z})] ds + \iint_{S_{13b}} \mathbf{E}_c \cdot [(\mathbf{H}_c - \mathbf{H}_d) \times \mathbf{z}] ds \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{E}_c \cdot [(\mathbf{H}_c - \mathbf{H}_d) \times (-\mathbf{z})] \rho d\rho d\phi \Big|_{z=-h} + \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{E}_c \cdot [(\mathbf{H}_c - \mathbf{H}_d) \times \mathbf{z}] \rho d\rho d\phi \Big|_{z=h} \quad (332)
\end{aligned}$$

$$n_{H1} = \iiint_{V_1} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) dv = -j\omega\mu_d \iiint_{V_1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv = -j\omega d_{H1} \quad (333)$$

$$n_{H2} = \iiint_{V_2} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) dv = -j\omega\mu_0 \iiint_{V_2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv = -j\omega d_{H2} \quad (334)$$

$$n_{H3a} = \iiint_{V_{3a}} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) dv = -j\omega\mu_0 \iiint_{V_{3a}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv = -j\omega d_{H3a} \quad (335)$$

$$n_{H3b} = \iiint_{V_{3b}} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) dv = -j\omega\mu_0 \iiint_{V_{3b}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv = -j\omega d_{H3b} \quad (336)$$

$$n_{H4a} = \iiint_{V_{4a}} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) dv = \int_{-\infty}^{-h} \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \rho d\rho d\phi dz \quad (337)$$

$$n_{H4b} = \iiint_{V_{4b}} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) dv = \int_h^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \rho d\rho d\phi dz \quad (338)$$

$$\begin{aligned}
n_{HV} &= \iint_{S_{3a4a}} \mathbf{H}_a \cdot [(\mathbf{E}_a - \mathbf{E}_b) \times \boldsymbol{\rho}] ds + \iint_{S_{3b4b}} \mathbf{H}_a \cdot [(\mathbf{E}_a - \mathbf{E}_b) \times \boldsymbol{\rho}] ds \\
&= \int_{-\infty}^{-h} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_a \cdot [(\mathbf{E}_a - \mathbf{E}_b) \times \boldsymbol{\rho}] ad\phi dz \Big|_{\rho=a} + \int_h^{\infty} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_a \cdot [(\mathbf{E}_a - \mathbf{E}_b) \times \boldsymbol{\rho}] ad\phi dz \Big|_{\rho=a} \quad (339)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_{HH} &= \iint_{S_{24a}} \mathbf{H}_a \cdot [(\mathbf{E}_a - \mathbf{E}_b) \times (-\mathbf{z})] ds + \iint_{S_{24b}} \mathbf{H}_a \cdot [(\mathbf{E}_a - \mathbf{E}_b) \times \mathbf{z}] ds \\
&= \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \mathbf{H}_a \cdot [(\mathbf{E}_a - \mathbf{E}_b) \times (-\mathbf{z})] \rho d\rho d\phi \Big|_{z=-h} + \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \mathbf{H}_a \cdot [(\mathbf{E}_a - \mathbf{E}_b) \times \mathbf{z}] \rho d\rho d\phi \Big|_{z=h} \quad (340)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_{HM} &= \iint_{S_{13a}} \mathbf{H}_c \cdot [(\mathbf{E}_c - \mathbf{E}_d) \times (-\mathbf{z})] ds + \iint_{S_{13b}} \mathbf{H}_c \cdot [(\mathbf{E}_c - \mathbf{E}_d) \times \mathbf{z}] ds \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{H}_c \cdot [(\mathbf{E}_c - \mathbf{E}_d) \times (-\mathbf{z})] \rho d\rho d\phi \Big|_{z=-h} + \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{H}_c \cdot [(\mathbf{E}_c - \mathbf{E}_d) \times \mathbf{z}] \rho d\rho d\phi \Big|_{z=h} \quad (341)
\end{aligned}$$

onde S_{13a} e S_{13b} referem-se à superfície da interface entre o meio 1 e os meios 3a e 3b, respectivamente.

As eq. (324)–(327), (333)–(336) podem ser escritas de maneira simplificada em função de d_{E1} , d_{E2} , d_{E3a} , d_{E3b} , d_{H1} , d_{H2} , d_{H3a} e d_{H3b} porque o campo eletromagnético nos meios 1, 2, 3a e 3b obedece às eq. (6) e (7) — leis de Faraday e de Ampère —.

Computam-se as eq. (238)–(243), (280)–(285), (324)–(341) por meio das expressões deduzidas anteriormente para as componentes vetoriais do campo eletromagnético nos meios 1, 2, 3a e 3b e das eq. (306)–(309), com o auxílio das eq. (310)–(317). Dado que a geometria do problema é simétrica em relação ao plano $z = 0$, pode-se demonstrar que as relações dadas pelas eq. (253)–(255), (295)–(297) são válidas.

O desenvolvimento das eq. (238)–(243), (280)–(285), (324)–(341), considerando-se coordenadas cilíndricas, conduz a

$$\begin{aligned}
d_{E1} &= \pi \epsilon_d h \left\{ C_{E1}^2 I_6 \left\{ \frac{1 + \frac{\sin(2v)}{2v}}{1 - \frac{\sin(2v)}{2v}} \right\} + \frac{a^2}{\zeta^2} \left[\left(\frac{v^2 C_{E1}^2}{h^2} - \omega^2 \mu_d^2 C_{H1}^2 \right) \left(I_7 + \frac{m^2 a^2}{\zeta^2} I_9 \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right\} \frac{j4\omega \mu_d v m a}{\zeta h} C_{E1} C_{H1} I_8 \right] \left\{ \frac{1 - \frac{\sin(2v)}{2v}}{1 + \frac{\sin(2v)}{2v}} \right\} \right\} \quad (342)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{E2} = \pi \varepsilon_0 h \left\{ C_{E2}^2 I_{10} \left\{ \frac{1 + \frac{\sin(2v)}{2v}}{1 - \frac{\sin(2v)}{2v}} \right\} + \frac{a^2}{\psi^2} \left[\left(\frac{v^2 C_{E2}^2}{h^2} - \omega^2 \mu_0^2 C_{H2}^2 \right) \left(I_{11} + \frac{m^2 a^2}{\psi^2} I_{13} \right) \right. \right. \\
\left. \left. + \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right\} \frac{j4\omega\mu_0 vma}{\psi h} C_{E2} C_{H2} I_{12} \right] \left\{ \frac{1 - \frac{\sin(2v)}{2v}}{1 + \frac{\sin(2v)}{2v}} \right\} \right\} \quad (343)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{E3a} = \frac{\pi \varepsilon_0 h}{2\nu} \left\{ C_{E3a}^2 I_6 + \frac{a^2}{\zeta^2} \left[\left(\frac{v^2 C_{E3a}^2}{h^2} - \omega^2 \mu_0^2 C_{H3a}^2 \right) \left(I_7 + \frac{m^2 a^2}{\zeta^2} I_9 \right) \right. \right. \\
\left. \left. - \frac{j4\omega\mu_0 vma}{\zeta h} C_{E3a} C_{H3a} I_8 \right] \right\} e^{-2\nu} \quad (344)
\end{aligned}$$

$$d_{E4a} = \frac{\pi \varepsilon_0 h}{2\nu} \left(C_{E4a}^{'2} I_{13} + 2C_{E4a}^{'2} C_{H4a}^{'2} I_{12} + C_{H4a}^{'2} I_{11} \right) e^{-2\nu} \quad (345)$$

$$n_{E4a} = 0 \quad (346)$$

$$\begin{aligned}
n_{EV} = \frac{\pi a h}{\nu} J_m(\zeta) e^{-2\nu} \left[C_{E3a} \left(C_{E3a} \frac{j\omega \varepsilon_0 a}{\zeta} J_m'(\zeta) + C_{E4a}'' K_m'(\psi) \right. \right. \\
\left. \left. - C_{H3a} \frac{vma}{\zeta^2 h} J_m(\zeta) + C_{H4a}'' \frac{K_m(\psi)}{a} \right) + C_{H3a} \left(-C_{E3a} \frac{vma}{\zeta^2 h} J_m(\zeta) + C_{H3a} \frac{j\omega \mu_0 a}{\zeta} J_m'(\zeta) \right) \right] \quad (347)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_{EH} = \pi \left\{ \left[C_{E2} \frac{2va}{\psi h} \left\{ \frac{\sin(v)}{\cos(v)} \right\} \left(C_{E2} \frac{j\omega \varepsilon_0 a}{\psi} \left\{ \frac{\cos(v)}{-\sin(v)} \right\} - C_{E4a}'' e^{-\nu} \right) \right. \right. \\
\left. \left. + \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right\} C_{H2}^2 \frac{j\omega \mu_0 v a^2}{\psi^2 h} \sin(2u) \right] I_{11} + \left[C_{E2} \frac{2va}{\psi h} \left\{ \frac{\sin(v)}{\cos(v)} \right\} \left(-C_{H2} \frac{vma^2}{\psi^2 h} \left\{ \frac{\cos(v)}{\sin(v)} \right\} - C_{E4a}'' e^{-\nu} \right) \right. \right. \\
\left. \left. + C_{H2} \frac{j2\omega \mu_0 m a^2}{\psi^2} \left\{ \frac{\sin(v)}{\cos(v)} \right\} \left(C_{E2} \frac{j\omega \varepsilon_0 a}{\psi} \left\{ \frac{\cos(v)}{\sin(v)} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right\} C_{E4a}'' e^{-\nu} \right) \right. \right. \\
\left. \left. - C_{E2} C_{H2} \frac{ma^3}{\psi^3} \sin(2v) \left(\frac{v^2}{h^2} + k_0^2 \right) \right] I_{12} + \left[C_{H2} \frac{j2\omega \mu_0 m a^2}{\psi^2} \left\{ \frac{\sin(v)}{\cos(v)} \right\} \left(C_{H2} \frac{vma^2}{\psi^2 h} \left\{ \frac{-\cos(v)}{\sin(v)} \right\} \right. \right. \\
\left. \left. + \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right\} C_{H4a}'' e^{-\nu} \right) + \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right\} C_{E2}^2 \frac{j\omega \varepsilon_0 v m^2 a^4}{\psi^4 h} \sin(2v) \right] I_{13} \right\} \quad (348)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_{EM} = & \frac{2\pi a^2}{\zeta^2} \left\{ \frac{\text{sen}(v)}{\cos(v)} \right\} \left\{ j\omega \left[C_{E1} \frac{v}{h} \left(C_{E1} \varepsilon_d \left\{ \frac{\cos(v)}{-\text{sen}(v)} \right\} - C_{E3a} \varepsilon_0 e^{-v} \right) \right. \right. \\
& + C_{H1} \mu_d \left(C_{H1} \frac{v}{h} \left\{ \frac{-\cos(v)}{\text{sen}(v)} \right\} + \left\{ \frac{1}{-1} \right\} C_{H3a} \frac{v}{h} e^{-v} \right) \left. \right] \left(I_7 + \frac{m^2 a^2}{\zeta^2} I_9 \right) \\
& + \frac{2ma}{\zeta} \left[C_{E1} \frac{v}{h} \left(-C_{H1} \frac{v}{h} \left\{ \frac{\cos(v)}{\text{sen}(v)} \right\} + C_{H3a} \frac{v}{h} e^{-v} \right) \right. \\
& \left. \left. + C_{H1} \omega^2 \mu_d \left(-C_{E1} \varepsilon_d \left\{ \frac{\cos(v)}{\text{sen}(v)} \right\} + \left\{ \frac{1}{-1} \right\} C_{E3a} \varepsilon_0 e^{-v} \right) \right] I_8 \right\} \quad (349)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{H1} = & \pi \mu_d h \left\{ C_{H1}^2 I_6 \left\{ \frac{1 - \frac{\text{sen}(2v)}{2v}}{1 + \frac{\text{sen}(2v)}{2v}} \right\} + \frac{a^2}{\zeta^2} \left[\left(\frac{v^2 C_{H1}^2}{h^2} - \omega^2 \varepsilon_d^2 C_{E1}^2 \right) \left(I_7 + \frac{m^2 a^2}{\zeta^2} I_9 \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left\{ \frac{-1}{1} \right\} \frac{j4\omega \varepsilon_d v m a}{\zeta h} C_{E1} C_{H1} I_8 \right] \left\{ \frac{1 + \frac{\text{sen}(2v)}{2v}}{1 - \frac{\text{sen}(2v)}{2v}} \right\} \right\} \quad (350)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{H2} = & \pi \mu_0 h \left\{ C_{H2}^2 I_{10} \left\{ \frac{1 - \frac{\text{sen}(2v)}{2v}}{1 + \frac{\text{sen}(2v)}{2v}} \right\} + \frac{a^2}{\psi^2} \left[\left(\frac{v^2 C_{H2}^2}{h^2} - \omega^2 \varepsilon_0^2 C_{E2}^2 \right) \left(I_{11} + \frac{m^2 a^2}{\psi^2} I_{13} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left\{ \frac{-1}{1} \right\} \frac{j4\omega \varepsilon_0 v m a}{\psi h} C_{E2} C_{H2} I_{12} \right] \left\{ \frac{1 + \frac{\text{sen}(2v)}{2v}}{1 - \frac{\text{sen}(2v)}{2v}} \right\} \right\} \quad (351)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{H3a} = & \frac{\pi \mu_0 h}{2v} \left\{ C_{H3a}^2 I_6 + \frac{a^2}{\zeta^2} \left[\left(\frac{v^2 C_{H3a}^2}{h^2} - \omega^2 \varepsilon_0^2 C_{E3a}^2 \right) \left(I_7 + \frac{m^2 a^2}{\zeta^2} I_9 \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{j4\omega \varepsilon_0 v m a}{\zeta h} C_{E3a} C_{H3a} I_8 \right] \right\} e^{-2v} \quad (352)
\end{aligned}$$

$$d_{H4a} = \frac{\pi \mu_0 h}{2v} \left(C_{E4a}^2 I_{11} + 2 C_{E4a} C_{H4a} I_{12} + C_{H4a}^2 I_{13} \right) e^{-2v} \quad (353)$$

$$n_{H4a} = 0 \quad (354)$$

$$n_{HV} = \frac{\pi a h}{\nu} J_m(\zeta) e^{-2\nu} \left[C_{H3a} \left(-C_{H3a} \frac{j\omega\mu_0 a}{\zeta} J_m'(\zeta) + C_{H4a} K_m'(\psi) \right. \right. \\ \left. \left. + C_{E3a} \frac{\nu m a}{\zeta^2 h} J_m(\zeta) + C_{E4a} \frac{K_m(\psi)}{a} \right) + C_{E3a} \left(C_{H3a} \frac{\nu m a}{\zeta^2 h} J_m(\zeta) - C_{E3a} \frac{j\omega\epsilon_0 a}{\zeta} J_m'(\zeta) \right) \right] \quad (355)$$

$$n_{HH} = \pi \left\{ \left[C_{H2} \frac{2\nu a}{\psi h} \left\{ \frac{\cos(\nu)}{\sin(\nu)} \right\} \left(C_{H2} \frac{j\omega\mu_0 a}{\psi} \left\{ \frac{\sin(\nu)}{-\cos(\nu)} \right\} - C_{H4a} e^{-\nu} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left\{ \frac{-1}{1} \right\} C_{E2}^2 \frac{j\omega\epsilon_0 \nu a^2}{\psi^2 h} \sin(2\nu) \right] I_{11} + \left[C_{H2} \frac{2\nu a}{\psi h} \left\{ \frac{\cos(\nu)}{\sin(\nu)} \right\} \left(C_{E2} \frac{\nu m a^2}{\psi^2 h} \left\{ \frac{\sin(\nu)}{\cos(\nu)} \right\} - C_{E4a} e^{-\nu} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + C_{E2} \frac{j2\omega\epsilon_0 m a^2}{\psi^2} \left\{ \frac{\cos(\nu)}{\sin(\nu)} \right\} \left(-C_{H2} \frac{j\omega\mu_0 a}{\psi} \left\{ \frac{\sin(\nu)}{\cos(\nu)} \right\} + \left\{ \frac{1}{-1} \right\} C_{H4a} e^{-\nu} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + C_{E2} C_{H2} \frac{m a^3}{\psi^3} \sin(2\nu) \left(\frac{\nu^2}{h^2} + k_0^2 \right) \right] I_{12} + \left[C_{E2} \frac{j2\omega\epsilon_0 m a^2}{\psi^2} \left\{ \frac{\cos(\nu)}{\sin(\nu)} \right\} \left(C_{E2} \frac{\nu m a^2}{\psi^2 h} \left\{ \frac{-\sin(\nu)}{\cos(\nu)} \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + \left\{ \frac{1}{-1} \right\} C_{E4a} e^{-\nu} \right) + \left\{ \frac{1}{-1} \right\} C_{H2}^2 \frac{j\omega\mu_0 \nu m^2 a^4}{\psi^4 h} \sin(2\nu) \right] I_{13} \right\} \quad (356)$$

$$n_{HM} = \frac{2\pi a^2}{\zeta^2} \left\{ \frac{\cos(\nu)}{\sin(\nu)} \right\} \left\{ j\omega \left[C_{H1} \frac{\nu}{h} \left(C_{H1} \mu_d \left\{ \frac{\sin(\nu)}{-\cos(\nu)} \right\} + C_{H3a} \mu_0 e^{-\nu} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + C_{E1} \epsilon_d \left(C_{E1} \frac{\nu}{h} \left\{ \frac{-\sin(\nu)}{\cos(\nu)} \right\} + \left\{ \frac{1}{-1} \right\} C_{E3a} \frac{\nu}{h} e^{-\nu} \right) \right] \left(I_7 + \frac{m^2 a^2}{\zeta^2} I_9 \right) \right. \\ \left. + \frac{2ma}{\zeta} \left[C_{H1} \frac{\nu}{h} \left(C_{E1} \frac{\nu}{h} \left\{ \frac{\sin(\nu)}{\cos(\nu)} \right\} - C_{E3a} \frac{\nu}{h} e^{-\nu} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + C_{E1} \omega^2 \epsilon_d \left(C_{H1} \mu_d \left\{ \frac{\sin(\nu)}{\cos(\nu)} \right\} + \left\{ \frac{1}{-1} \right\} C_{H3a} \mu_0 e^{-\nu} \right) \right] I_8 \right\} \quad (357)$$

onde as integrais $I_6, I_7, I_8, I_9, I_{10}, I_{11}, I_{12}$ e I_{13} são dadas por

$$I_6 = \int_0^a \rho \left(J_m(\tau_A \rho) \right)^2 d\rho \quad (358)$$

$$I_7 = \int_0^a \rho \left(J_m'(\tau_A \rho) \right)^2 d\rho \quad (359)$$

$$I_8 = \int_0^a J_m(\tau_A \rho) J_m'(\tau_A \rho) d\rho \quad (360)$$

$$I_9 = \int_0^a \frac{\left(J_m(\tau_A \rho) \right)^2}{\rho} d\rho \quad (361)$$

$$I_{10} = \int_a^\infty \rho \left(K_m(\tau_B \rho) \right)^2 d\rho \quad (362)$$

$$I_{11} = \int_a^\infty \rho \left(K_m'(\tau_B \rho) \right)^2 d\rho \quad (363)$$

$$I_{12} = \int_a^\infty K_m(\tau_B \rho) K_m'(\tau_B \rho) d\rho \quad (364)$$

$$I_{13} = \int_a^\infty \frac{\left(K_m(\tau_B \rho) \right)^2}{\rho} d\rho \quad (365)$$

e são calculáveis por meio de integração numérica.

Então, obtém-se a frequência linear de ressonância corrigida pela técnica variacional empregando-se

$$f_c = \frac{j}{2\pi} \left[\frac{j\omega(d_{E1} + d_{E2} + 2d_{E3a}) + n_{EV} + n_{EH} + n_{EM}}{d_{H1} + d_{H2} + 2d_{H3a} + 2d_{H4a} - d_{E1} - d_{E2} - 2d_{E3a} - 2d_{E4a}} + \frac{-j\omega(d_{H1} + d_{H2} + 2d_{H3a}) + n_{HV} + n_{HH} + n_{HM}}{d_{H1} + d_{H2} + 2d_{H3a} + 2d_{H4a} - d_{E1} - d_{E2} - 2d_{E3a} - 2d_{E4a}} \right] \quad (366)$$

6.3 COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

A princípio, o modelo matemático proposto nesta pesquisa para o ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre prevê a solução do problema para qualquer modo ressonante de um ressoador que possui raio a , altura $2h$, constante dielétrica ϵ_{rd} e

permeabilidade magnética relativa μ_{rd} arbitrários. Isso requer a solução numérica do sistema de duas equações transcendentais — eq. (186) e (187), eq. (201) e (202) ou eq. (219) e (220) —, seguida do cálculo dos parâmetros de distribuição de campo eletromagnético em todas as regiões do problema (autovalores e constantes complexas) e do cômputo da frequência de ressonância corrigida pela técnica variacional. Para a realização dessas tarefas, um programa em MATLAB foi desenvolvido.

Com o intuito de validar o modelo matemático concebido, o algoritmo criado foi utilizado para calcular a frequência de ressonância dos quatro modos ressonantes de ordem mais baixa do ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre ($TE_{01\delta}$, $TM_{01\delta}$, $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$), considerando-se valores variados de a , de $2h$ e de ε_{rd} para os quais resultados teóricos ou experimentais se encontram disponíveis na literatura técnica. Esses resultados publicados^{11, 25, 31, 98, 99} e os calculados por meio do referido modelo (antes e depois da aplicação da técnica variacional, mostrados para fins de comparação) são relacionados na Tabela 13, onde também são apresentados os resultados previstos por expressões aproximadas reportadas na bibliografia especializada^{8, 10}, dentre as quais se encontram as eq. (24)–(27)¹⁰.

Tabela 13 — Frequência de ressonância dos modos $TE_{01\delta}$, $TM_{01\delta}$, $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$ do ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre para valores variados de a , de $2h$ e de ε_{rd}
(continua)

Dados do ressoador			Método de obtenção da frequência de ressonância	Frequência de ressonância			
a (mm)	$2h$ (mm)	ε_{rd}		$f_0^{(TE_{01\delta})}$ (GHz)	$f_0^{(TM_{01\delta})}$ (GHz)	$f_0^{(HEM_{11\delta})}$ (GHz)	$f_0^{(HEM_{12\delta})}$ (GHz)
6,415	5,62	38,1	Medição experimental ¹¹	3,97	6,13	5,18	—
			Expressão aproximada ⁸	3,985	6,171	5,259	—
			Expressão aproximada ¹⁰	3,923	6,214	5,317	5,548
			Modelo aproximado (este trabalho)	4,001	6,255	5,326	7,221
			Modelo aproximado antes da aplicação da técnica variacional (este trabalho)	4,320	6,256	4,983	5,828
5,145	4,51	79	Medição experimental ¹¹	3,48	5,41	4,56	—
			Expressão aproximada ⁸	3,469	5,405	4,606	—
			Expressão aproximada ¹⁰	3,455	5,572	4,873	4,797
			Modelo aproximado (este trabalho)	3,483	5,443	4,652	7,049
			Modelo aproximado antes da aplicação da técnica variacional (este trabalho)	3,750	5,443	4,358	5,056

Tabela 13 — Frequência de ressonância dos modos $TE_{01\delta}$, $TM_{01\delta}$, $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$ do ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre para valores variados de a , de $2h$ e de ϵ_{rd}

(continuação)

Dados do ressoador			Método de obtenção da frequência de ressonância	Frequência de ressonância			
a (mm)	$2h$ (mm)	ϵ_{rd}		$f_0^{(TE_{01\delta})}$ (GHz)	$f_0^{(TM_{01\delta})}$ (GHz)	$f_0^{(HEM_{11\delta})}$ (GHz)	$f_0^{(HEM_{12\delta})}$ (GHz)
5	7	38	Medição experimental ²⁵	4,660	—	—	—
			Modelos aproximados ²⁵	4,705	—	—	—
			Expressão aproximada ⁸	4,570	6,699	5,128	—
			Expressão aproximada ¹⁰	4,553	6,749	5,157	6,375
			Modelo aproximado (este trabalho)	4,591	6,779	5,070	8,152
			Modelo aproximado antes da aplicação da técnica variacional (este trabalho)	4,871	6,780	4,807	6,815
7,5	8,4	38	Medição experimental ²⁵	3,315	—	—	—
			Modelos aproximados ²⁵	3,293	—	—	—
			Expressão aproximada ⁸	3,202	4,776	3,864	—
			Expressão aproximada ¹⁰	3,182	4,810	3,886	4,465
			Modelo aproximado (este trabalho)	3,216	4,842	3,856	5,765
			Modelo aproximado antes da aplicação da técnica variacional (este trabalho)	3,441	4,843	3,628	4,732
7,5	7	38	Medição experimental ²⁵	3,450	—	—	—
			Modelos aproximados ²⁵	3,420	—	—	—
			Expressão aproximada ⁸	3,352	5,130	4,318	—
			Expressão aproximada ¹⁰	3,311	5,166	4,358	4,663
			Modelo aproximado (este trabalho)	3,365	5,201	4,356	6,065
			Modelo aproximado antes da aplicação da técnica variacional (este trabalho)	3,625	5,202	4,080	4,915
5	4	38	Medição experimental ²⁵	5,372	—	—	—
			Modelos aproximados ²⁵	5,326	—	—	—
			Expressão aproximada ⁸	5,244	8,278	7,169	—
			Expressão aproximada ¹⁰	5,123	8,331	7,266	7,321
			Modelo aproximado (este trabalho)	5,265	8,384	7,302	9,514
			Modelo aproximado antes da aplicação da técnica variacional (este trabalho)	5,701	8,385	6,824	7,639
7,5	5	66	Medição experimental ²⁵	2,850	—	—	—
			Modelos aproximados ²⁵	2,860	—	—	—
			Expressão aproximada ⁸	2,815	4,685	4,172	—
			Expressão aproximada ¹⁰	2,697	4,786	4,387	3,969
			Modelo aproximado (este trabalho)	2,828	4,715	4,297	5,585
			Modelo aproximado antes da aplicação da técnica variacional (este trabalho)	3,071	4,715	4,018	4,058

Tabela 13 — Frequência de ressonância dos modos $TE_{01\delta}$, $TM_{01\delta}$, $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$ do ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre para valores variados de a , de $2h$ e de ϵ_{rd}
(continuação)

Dados do ressoador			Método de obtenção da frequência de ressonância	Frequência de ressonância			
a (mm)	$2h$ (mm)	ϵ_{rd}		$f_0^{(TE_{01\delta})}$ (GHz)	$f_0^{(TM_{01\delta})}$ (GHz)	$f_0^{(HEM_{11\delta})}$ (GHz)	$f_0^{(HEM_{12\delta})}$ (GHz)
5	7	66	Medição experimental ²⁵	3,506	—	—	—
			Modelos aproximados ²⁵	3,540	—	—	—
			Expressão aproximada ⁸	3,486	5,137	3,933	—
			Expressão aproximada ¹⁰	3,503	5,264	4,090	4,837
			Modelo aproximado (este trabalho)	3,504	5,175	3,869	6,704
			Modelo aproximado antes da aplicação da técnica variacional (este trabalho)	3,709	5,176	3,671	5,189
5,25	4,6	38	Medição experimental ³¹	4,85	7,60	—	6,64
			Solução numérica rigorosa (MoM) ³¹	4,829	7,524	6,333	6,638
			Expressão aproximada ⁸	4,870	7,540	6,425	—
			Expressão aproximada ¹⁰	4,793	7,592	6,496	6,779
			Modelo aproximado (este trabalho)	4,889	7,642	6,507	8,823
			Modelo aproximado antes da aplicação da técnica variacional (este trabalho)	5,278	7,644	6,088	7,122
4,505	8,53	19,5	Medição experimental ⁹⁸	—	—	—	9,04
			Expansão em série ⁹⁸	—	9,44	—	9,04
			Expressão aproximada ⁸	6,610	9,535	6,728	—
			Expressão aproximada ¹⁰	6,564	9,530	6,636	9,019
			Modelo aproximado (este trabalho)	6,621	9,593	6,716	11,024
			Modelo aproximado antes da aplicação da técnica variacional (este trabalho)	6,978	9,603	6,444	9,990
2,86	2,4	38	Medição experimental ⁹⁸	9,10	—	—	—
			Expansão em série ⁹⁸	9,10	—	—	—
			Expressão aproximada ⁸	9,046	14,129	12,136	—
			Expressão aproximada ¹⁰	8,876	14,225	12,284	12,605
			Modelo aproximado (este trabalho)	9,082	14,317	12,324	16,401
			Modelo aproximado antes da aplicação da técnica variacional (este trabalho)	9,818	14,319	11,524	13,204
5	3	100	Medição experimental ⁹⁹	3,654	—	—	—
			Modelos aproximados ⁹⁹	3,675	—	—	—
			Expressão aproximada ⁸	3,553	6,130	5,531	—
			Expressão aproximada ¹⁰	3,336	6,348	5,985	5,082
			Modelo aproximado (este trabalho)	3,575	6,152	5,735	7,563
			Modelo aproximado antes da aplicação da técnica variacional (este trabalho)	3,886	6,152	5,371	5,095

Tabela 13 — Frequência de ressonância dos modos $TE_{01\delta}$, $TM_{01\delta}$, $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$ do ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre para valores variados de a , de $2h$ e de ϵ_{rd} (conclusão)

Dados do ressoador			Método de obtenção da frequência de ressonância	Frequência de ressonância			
a (mm)	$2h$ (mm)	ϵ_{rd}		$f_0^{(TE_{01\delta})}$ (GHz)	$f_0^{(TM_{01\delta})}$ (GHz)	$f_0^{(HEM_{11\delta})}$ (GHz)	$f_0^{(HEM_{12\delta})}$ (GHz)
5	5	100	Medição experimental ⁹⁹	3,110	—	—	—
			Modelos aproximados ⁹⁹	3,130	—	—	—
			Expressão aproximada ⁸	3,069	4,681	3,885	—
			Expressão aproximada ¹⁰	3,090	4,871	4,163	4,237
			Modelo aproximado (este trabalho)	3,081	4,708	3,883	6,451
			Modelo aproximado antes da aplicação da técnica variacional (este trabalho)	3,301	4,708	3,646	4,496
5	10	100	Medição experimental ⁹⁹	2,720	—	—	—
			Modelos aproximados ⁹⁹	2,470	—	—	—
			Expressão aproximada ⁸	2,659	3,912	2,719	—
			Expressão aproximada ¹⁰	2,697	4,083	2,950	3,511
			Modelo aproximado (este trabalho)	2,676	3,922	2,675	5,252
			Modelo aproximado antes da aplicação da técnica variacional (este trabalho)	2,789	3,922	2,578	4,012

Fonte: Petosa¹¹, Guillon e Garault²⁵, Glisson, Kajfez e James³¹, Tsuji, Shigesawa e Takiyama⁹⁸, Garault e Guillon⁹⁹ e realização do próprio autor para esta tese

Os dados exibidos na Tabela 13 mostram, para os modos $TE_{01\delta}$, $TM_{01\delta}$ e $HEM_{11\delta}$, uma boa concordância entre a frequência de ressonância obtida por meio de métodos reportados na literatura técnica e a calculada com o modelo matemático proposto neste trabalho para o ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre.

Considerando-se o cálculo da frequência de ressonância dos modos $TE_{01\delta}$ e $HEM_{11\delta}$, verifica-se que a técnica variacional impõe, em geral, uma correção expressiva sobre a frequência de ressonância calculada diretamente a partir da solução do sistema de duas equações transcendentais (sem a aplicação da técnica variacional), aproximando-a do valor obtido com os métodos reportados na literatura técnica mostrados.

Para o modo $TM_{01\delta}$, a frequência de ressonância computada por meio da solução do sistema de duas equações transcendentais já se mostra próxima da encontrada pelos métodos reportados na literatura técnica. Nesse caso, observa-se que a técnica variacional promove uma correção em geral reduzida, porém, que na maior parte dos

casos desloca a frequência de ressonância calculada sem a aplicação da técnica variacional em direção ao valor fornecido pelos métodos reportados na bibliografia especializada.

Por outro lado, constata-se que a diferença entre a frequência de ressonância do modo $HEM_{12\delta}$ obtida a partir dos métodos reportados na literatura técnica e a calculada por meio do modelo matemático apresentado nesta seção é significativamente superior à observada para os modos $TE_{01\delta}$, $TM_{01\delta}$ e $HEM_{11\delta}$. Verifica-se também que a correção promovida pela técnica variacional sobre a frequência de ressonância do modo $HEM_{12\delta}$ desloca o valor calculado por meio da solução do sistema de duas equações transcendentais afastando-o do previsto pelos métodos reportados na bibliografia especializada.

No entanto, o motivo desse fato não é evidente, uma vez que é possível obter para o modo $HEM_{11\delta}$ resultados condizentes com os dados publicados na literatura técnica utilizando-se o modelo mencionado, apesar de ambos os modos $HEM_{11\delta}$ e $HEM_{12\delta}$ serem submetidos ao mesmo tratamento matemático, o qual considera os campos elétrico e magnético de forma igualitária, não privilegiando assim somente modos ressonantes do tipo quase TE, como o modo $HEM_{12\delta}$, ou do tipo quase TM, como o modo $HEM_{11\delta}$.

Assim, os resultados mostrados na Tabela 13 indicam que o modelo matemático proposto nesta pesquisa para o ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre fornece uma boa precisão para o cálculo da frequência de ressonância dos modos $TE_{01\delta}$, $TM_{01\delta}$ e $HEM_{11\delta}$. Todavia, verifica-se que a frequência de ressonância do modo $HEM_{12\delta}$ prevista pelo referido modelo diverge dos valores obtidos por outros métodos reportados na literatura técnica, fato esse que requer uma investigação mais detalhada a fim de aperfeiçoar o modelo matemático desenvolvido.

6.4 PROCEDIMENTOS PARA O CÁLCULO DE OUTROS PARÂMETROS

O modelo matemático proposto nesta pesquisa para o ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre permite obter diretamente a frequência de ressonância dos diversos modos ressonantes desse tipo de estrutura bem como a distribuição de campo eletromagnético dos mesmos.

A partir desses resultados, é possível computar ainda outros parâmetros do ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre que são relevantes para o projeto de antenas de ressoador dielétrico sobre plano de terra com radiador cilíndrico ou semicilíndrico.

Por razões de limitação de tempo, o cálculo desses parâmetros não foi realizado neste trabalho em sua completude. Entretanto, esta tese fornece indicações de como proceder com o cômputo dos referidos parâmetros a fim de que essa tarefa possa ser executada e validada em uma oportunidade futura.

Primeiramente, o diagrama de radiação pode ser obtido por meio de fontes de campo eletromagnético equivalentes, de forma semelhante ao procedimento empregado por Long, McAllister e Shen²⁶.

De acordo com o princípio de equivalência^{15, 18, 20, 33}, o campo eletromagnético na região externa do ressoador é equivalente ao gerado por densidades de corrente elétrica e magnética superficiais (fontes equivalentes) distribuídas sobre a superfície do ressoador dielétrico tais que

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n}_s \times \mathbf{H} \quad (367)$$

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{E} \times \mathbf{n}_s \quad (368)$$

onde $\mathbf{n}_s$ representa o versor na direção normal à superfície do ressoador, que aponta para fora do mesmo. Nas eq. (367) e (368), devem ser utilizadas as expressões para $\mathbf{E}$ e para $\mathbf{H}$ deduzidas anteriormente.

Os potenciais vetoriais magnético e elétrico complexos, respectivamente $\mathbf{A}$ e $\mathbf{F}$, podem ser derivados a partir de $\mathbf{J}_s$ e de $\mathbf{M}_s$. Considerando-se um sistema de coordenadas esféricas $\rho\theta\phi$, as seguintes relações podem ser escritas para um ponto de observação localizado na região de campo distante^{15, 18, 20, 33}:

$$\mathbf{A} \approx \frac{\mu_0 e^{-jk_0 \rho}}{4\pi\rho} \iint_{S_r} \mathbf{J}_s e^{jk_0 r_s \cos(\xi_{os})} ds \quad (369)$$

$$\mathbf{F} \approx \frac{\epsilon_0 e^{-jk_0 \rho}}{4\pi\rho} \iint_{S_r} \mathbf{M}_s e^{jk_0 r_s \cos(\xi_{os})} ds \quad (370)$$

onde S_r representa a superfície do ressoador dielétrico; r_s corresponde à distância entre a origem do sistema de coordenadas e o ponto considerado na superfície do

ressoador; ξ_{os} é o ângulo definido pelo ponto de observação, pela origem do sistema de coordenadas e pelo ponto considerado na superfície do ressoador, com vértice na origem do sistema de coordenadas.

Ainda para um ponto de observação situado na região de campo distante, as componentes vetoriais de campo elétrico são calculadas por^{15, 20, 33}:

$$E_{\theta} \approx -j\omega(A_{\theta} + \eta_0 F_{\phi}) \quad (371)$$

$$E_{\phi} \approx -j\omega(A_{\phi} - \eta_0 F_{\theta}) \quad (372)$$

$$E_{\rho} \approx 0 \quad (373)$$

onde A_{θ} e F_{θ} representam as componentes na direção θ dos potenciais vetoriais magnético e elétrico complexos, respectivamente; A_{ϕ} e F_{ϕ} correspondem às componentes na direção ϕ dos potenciais vetoriais magnético e elétrico complexos, respectivamente.

As componentes E_{θ} e E_{ϕ} computadas a partir das eq. (371) e (372) podem ser utilizadas diretamente no cálculo da intensidade de radiação nas direções θ e ϕ , respectivamente U_{θ} e U_{ϕ} ³³:

$$U_{\theta} = \frac{1}{2\eta_0}(\rho|E_{\theta}|)^2 \quad (374)$$

$$U_{\phi} = \frac{1}{2\eta_0}(\rho|E_{\phi}|)^2 \quad (375)$$

Admitindo-se ausentes as perdas condutiva e dielétrica, o ganho nas direções θ e ϕ é dado por³³

$$G_{\theta} = \frac{4\pi U_{\theta}}{P_r} = \frac{2\pi}{\eta_0 P_r}(\rho|E_{\theta}|)^2 \quad (376)$$

$$G_{\phi} = \frac{4\pi U_{\phi}}{P_r} = \frac{2\pi}{\eta_0 P_r}(\rho|E_{\phi}|)^2 \quad (377)$$

em que a potência radiada P_r (perda por radiação) é calculada por meio da eq. (31).

O diagrama de radiação das antenas de ressoador dielétrico sobre plano de terra com radiador cilíndrico ou semicilíndrico é obtido considerando-se apenas a metade apropriada do diagrama de radiação do ressoador dielétrico cilíndrico isolado no

espaço livre: toma-se o diagrama em um dos semiespaços limitados pelo plano $z = 0$ (antena cilíndrica) ou o diagrama em um dos semiespaços separados por um plano que contém o eixo z (antena semicilíndrica).

O índice de mérito pode ser aproximado pela eq. (28), na qual P_r é obtido por meio da eq. (31), da mesma forma como se procede para o diagrama de radiação, e a energia eletromagnética total armazenada W_s , que é rigorosamente dada pela eq. (29), pode ser aproximada pela seguinte expressão²⁰:

$$W_s \approx \frac{d_{H1} + d_{H2} + 2d_{H3a} + 2d_{H4a} - (d_{E1} + d_{E2} + 2d_{E3a} + 2d_{E4a})}{4} \quad (378)$$

onde d_{E1} , d_{E2} , d_{E3a} , d_{E4a} , d_{H1} , d_{H2} , d_{H3a} e d_{H4a} possuem a mesma definição dos termos homônimos empregados no equacionamento dos modos TE e TM e são calculados utilizando-se as eq. (238)–(240), (242), (280)–(282) e (284).

Por fim, o índice de mérito calculado pode ser utilizado para computar a banda de impedância das antenas de ressoador dielétrico sobre plano de terra com radiador cilíndrico ou semicilíndrico por meio da eq. (33), com o auxílio das eq. (34) e (35), se necessário.

6.5 CONCLUSÕES

Um modelo matemático analítico aproximado foi desenvolvido para o ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre.

Esse modelo é de grande interesse prático para o projeto de antenas de ressoador dielétrico por possibilitar a análise matemática das antenas sobre plano de terra que empregam radiador cilíndrico ou semicilíndrico.

O modelo matemático proposto é teoricamente capaz de prever todos os modos ressonantes do ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre fornecendo expressões simples para E_z e para H_z , o que permite uma rápida noção prévia do comportamento da distribuição de campo eletromagnético no ressoador. Além disso, as várias expressões matemáticas decorrentes do modelo contribuem para o entendimento conceitual físico do funcionamento do ressoador dielétrico cilíndrico.

Ademais, o modelo matemático concebido conduz a equações analíticas transcendentais reais que podem ser resolvidas numericamente de forma rápida com

o auxílio de um computador. Essas equações podem ser utilizadas no projeto de antenas de banda dupla, seguindo-se a metodologia de projeto proposta neste trabalho para esse tipo de antena.

Os resultados calculados com o referido modelo e os obtidos por meio de métodos reportados na literatura técnica apresentam boa concordância entre si para os modos $TE_{01\delta}$, $TM_{01\delta}$ e $HEM_{11\delta}$, o que representa uma melhoria em relação ao modelo de Itoh e Rudokas²¹, no qual se baseia o modelo matemático discutido detalhadamente nesta seção. No entanto, uma investigação mais aprofundada para o modo $HEM_{12\delta}$ é necessária, uma vez que não se constata a mesma proximidade entre resultados vista para os outros modos ressonantes citados.

Finalmente, verifica-se que o modelo matemático proposto permite ainda o cálculo de parâmetros adicionais importantes de antena, como diagrama de radiação, índice de mérito e banda de impedância.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 CONCLUSÃO

O objetivo desta pesquisa foi cumprido, tendo sido desenvolvidas antenas de ressoador dielétrico de banda dupla em frequências de micro-ondas com configurações originais por meio de uma metodologia de projeto concebida neste trabalho.

A teoria de antenas de ressoador dielétrico prevê que antenas desse tipo exibem naturalmente uma ampla versatilidade sob o ponto de vista da viabilidade de obter bandas múltiplas, diversos tipos de polarização e de diagrama de radiação, por intermédio de um radiador único e com formato simples. Essa flexibilidade é inerente aos diferentes modos ressonantes que esse radiador pode apresentar.

A metodologia de projeto para antenas de ressoador dielétrico de banda dupla proposta neste trabalho busca precisamente explorar essa característica singular ao estabelecer um procedimento passo a passo por meio do qual um conjunto variado de antenas com diferentes características pode ser obtido.

Duas antenas foram desenvolvidas neste trabalho utilizando-se a metodologia de projeto mencionada, como forma de exemplificar sua aplicação e de demonstrar sua efetividade:

- a) uma antena de ressoador dielétrico cilíndrica sobre plano de terra especificada para operar em duas bandas de operação cuja frequência central é 3,94 GHz e 5,42 GHz, que apresenta um diagrama de radiação direcional e polarização circular na primeira banda e um diagrama de radiação omnidirecional e polarização linear na segunda;
- b) uma antena de ressoador dielétrico cilíndrica sobre substrato dielétrico aterrado destinada a atuar em duas bandas de operação cuja frequência central vale 3,99 GHz e 6,20 GHz, a qual exibe um diagrama de radiação direcional e polarização circular em ambas as bandas.

Particularmente, essas duas antenas representam os exemplos mais complexos de antenas que podem ser projetadas seguindo-se a metodologia de projeto proposta.

A execução do projeto das antenas também serviu para apontar soluções que podem ser adotadas para resolver problemas comumente encontrados em cada uma de suas etapas. Em especial, algumas dificuldades reveladas durante o desenvolvimento das antenas foram contornadas com soluções próprias propostas neste trabalho, o que levou às seguintes contribuições originais adicionais:

- a) estrutura de excitação para o modo $TM_{01\delta}$ no ressonador dielétrico cilíndrico (sonda de campo magnético);
- b) estrutura de excitação para o modo $HEM_{12\delta}$ no ressonador dielétrico cilíndrico (plaqueta não ressonante modificada);
- c) circuito de alimentação para antenas de banda dupla com polarização circular na primeira banda e com polarização linear na segunda (circuito de alimentação da antena sobre plano de terra);
- d) circuito de alimentação para antenas de banda dupla com polarização circular nas duas bandas (circuito de alimentação da antena sobre substrato dielétrico aterrado);
- e) equacionamento completo dos acopladores híbridos de 90° de banda dupla dos tipos Π e T realizados com tocos duplos em circuito aberto e em curto-circuito;
- f) modelo matemático para o ressonador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre.

Os resultados fornecidos pela simulação eletromagnética das antenas e os obtidos após a caracterização experimental dos protótipos das mesmas mostram uma boa correspondência entre si. Todos esses resultados condizem ainda com as especificações de projeto definidas para as antenas e demonstram também o desempenho teoricamente previsto para estas.

Tem-se, portanto, uma confirmação das hipóteses teóricas adotadas neste trabalho, bem como a validação da metodologia de projeto proposta e das configurações de antena criadas.

Em relação a antenas reportadas recentemente na literatura técnica, verifica-se que as antenas desenvolvidas neste trabalho, apesar de utilizarem um circuito de alimentação que exige o projeto de diversos componentes, possuem os seguintes benefícios:

- a) apresentam uma metodologia de projeto bem definida;

- b) não requerem técnicas de fabricação de complexidade elevada;
- c) empregam, para cada modo ressonante excitado no ressoador dielétrico, uma estrutura de excitação dedicada, o que aumenta sua flexibilidade de projeto.

Sendo assim, considera-se finalmente que este trabalho alcançou seu propósito com contribuições de utilidade na área de antenas de ressoador dielétrico e em tópicos correlatos.

7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Embora os objetivos deste trabalho já tenham sido atingidos, diversas atividades podem ser ainda sugeridas para uma realização futura, com o intuito de complementar a presente pesquisa ou de efetuar melhorias sobre os desenvolvimentos produzidos neste trabalho. Algumas dessas atividades, identificadas pelo autor desta pesquisa, são relacionadas a seguir:

- a) desenvolvimento de uma estrutura de excitação para o modo $HEM_{12\delta}$ no ressoador dielétrico cilíndrico que exerça pouca influência sobre a frequência de ressonância natural desse e de outros modos ressonantes, bem como sobre a distribuição de campo eletromagnético dos mesmos;
- b) identificação e implementação de melhorias e correções para o modelo matemático proposto neste trabalho para o ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre, com o intuito de obter resultados mais precisos, sobretudo para o modo $HEM_{12\delta}$;
- c) derivação de equações, a partir do referido modelo, para o índice de mérito de diferentes modos ressonantes do ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre e validação dessas expressões por meio de simulação eletromagnética ou de caracterização experimental;
- d) cálculo do diagrama de radiação de diferentes modos ressonantes do ressoador dielétrico cilíndrico isolado no espaço livre, também a partir do modelo mencionado, e comprovação dos resultados com o auxílio de simulação eletromagnética ou mediante caracterização experimental;
- e) desenvolvimento de um modelo matemático para o ressoador dielétrico cilíndrico sobre substrato dielétrico aterrado.

REFERÊNCIAS*

- 1 BOGUNOVIC, D. P. **Heavenly wisdom**: talent, imagination, creativity and wisdom. Bloomington: AuthorHouse, 2013. p. 238.
- 2 MADDIO, S. et al. Multipath robust azimuthal direction of arrival estimation in dual-band 2.45–5.2 GHz networks. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, Piscataway, v. 65, n. 11, p. 4438–4449, Nov. 2017.
- 3 HONG, Y.; TAK, J.; CHOI, J. Dual-band dual-mode patch antenna for on-on-off WBAN applications. **Electronics Letters**, London, v. 50, n. 25, p. 1895–1896, Dec. 2014.
- 4 SUN, Y.-X.; LEUNG, K. W. Substrate-integrated two-port dual-frequency antenna. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, Piscataway, v. 64, n. 8, p. 3692–3697, Aug. 2016.
- 5 PSYCHOUDAKIS, D. et al. Mobile station radio frequency unit for 5G communications at 28GHz. In: IEEE MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES SOCIETY INTERNATIONAL MICROWAVE SYMPOSIUM, 60., 2016, San Francisco. **Digest...** Piscataway: Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 2016. p. 1–3.
- 6 BOSCO, B. et al. Emerging commercial applications using the 60 GHz unlicensed band: Opportunities and challenges. In: IEEE ANNUAL WIRELESS AND MICROWAVE TECHNOLOGY CONFERENCE, 8., 2006, Clearwater Beach. **Proceedings...** Piscataway: Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 2006. p. 1–4.
- 7 LONG, S. A.; O'CONNOR E. M. The history of the development of the dielectric resonator antenna. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ELECTROMAGNETICS IN ADVANCED APPLICATIONS, 10., 2007, Torino. **Proceedings...** Piscataway: Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 2007. p. 872–875.
- 8 MONGIA, R. K.; BHARTIA, P. Dielectric resonator antennas—A review and general design relations for resonant frequency and bandwidth. **International Journal of Microwave and Millimeter-Wave Computer-Aided Engineering**, Hoboken, v. 4, n. 3, p. 230–247, July 1994.
- 9 PETOSA, A.; ITTIPIBOON, A. Dielectric resonator antennas: A historical review and the current state of the art. **IEEE Antennas and Propagation Magazine**, Piscataway, v. 52, n. 5, p. 91–116, Oct. 2010.
- 10 LUK, K. M.; LEUNG, K. W. **Dielectric resonator antennas**. Baldock: Research Studies Press, Ltd., 2003.

* De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT NBR 6023).

- 11 PETOSA, A. **Dielectric resonator antenna handbook**. Norwood: Artech House, Inc., 2007.
- 12 PETOSA, A.; THIRAKOUNE, S. Design of a 60 GHz dielectric resonator antenna with enhanced gain. In: IEEE ANTENNAS AND PROPAGATION SOCIETY INTERNATIONAL SYMPOSIUM, 48., 2010, Toronto. **Digest...** Piscataway: Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 2010. p. 1–4.
- 13 RICHTMYER, R. D. Dielectric resonators. **Journal of Applied Physics**, [S.l.], v. 10, n. 6, p. 391–398, June 1939.
- 14 COHN, S. B. Microwave bandpass filters containing high-Q dielectric resonators. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, Piscataway, v. 16, n. 4, p. 218–227, Apr. 1968.
- 15 BALANIS, C. A. **Advanced engineering electromagnetics**. 2nd. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2012.
- 16 KAJFEZ, D.; GUILLON, P. **Dielectric resonators**. Norwood: Artech House, Inc., 1986.
- 17 POZAR, D. M. **Microwave engineering**. 4th. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2012.
- 18 RAMO, S.; WHINNERY, J. R.; VAN DUZER, T. **Fields and waves in communication electronics**. 3rd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 1993.
- 19 MURATA MANUFACTURING COMPANY, LTD. **Dielectric resonators (RESOMICS®)**. Kyoto: Murata Manufacturing Company, Ltd., 2003. Disponível em: <http://www1.isti.cnr.it/~salerno/Microonde/MuRataResonators.pdf>. Acesso: 13 jan. 2018.
- 20 HARRINGTON, R. F. **Time-harmonic electromagnetic fields**. New York: McGraw Hill, 1961.
- 21 ITOH, T.; RUDOKAS, R. S. New method for computing the resonant frequencies of dielectric resonators. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, Piscataway, v. 25, n. 1, p. 52–54, Jan. 1977.
- 22 COLLIN, R. E. **Foundations for microwave engineering**. 2nd. ed. New York: McGraw Hill, 1992.
- 23 INSTITUTE OF RADIO ENGINEERS. IRE standards on antennas and waveguides: definition of terms. **Proceedings of the IRE**, New York, v. 41, n. 12, p. 1721–1728, Dec. 1953.
- 24 YEE, H. Y. Natural resonant frequencies of microwave dielectric resonators. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, Piscataway, v. 13, n. 2 p. 256–256, Mar. 1965.

- 25 GUILLON, P.; GARAUULT, Y. Accurate resonant frequencies of dielectric resonators. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, Piscataway, v. 25, n. 11, p. 916–922, Nov. 1977.
- 26 LONG, S. A.; MCALLISTER, M. W.; SHEN, L. C. The resonant cylindrical dielectric cavity antenna. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, Piscataway, v. 31, n. 3, p. 406–412, May 1983.
- 27 KONISHI, Y.; HOSHINO, N.; UTSUMI, Y. Resonant frequency of a $TE_{01\delta}$ dielectric resonator. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, Piscataway, v. 24, n. 2, p. 112–114, Feb. 1976.
- 28 POSPIESZALSKI, M. W. Cylindrical dielectric resonators and their applications in TEM line microwave circuits. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, Piscataway, v. 27, n. 3, p. 233–238, Mar. 1979.
- 29 JAWORSKI, M.; POSPIESZALSKI, M. W. An accurate solution of the cylindrical dielectric resonator problem. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, Piscataway, v. 27, n. 7, p. 639–643, July 1979.
- 30 TSUJI, M.; SHIGESAWA, H.; TAKIYAMA, K. On the complex resonant frequency of open dielectric resonators. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, Piscataway, v. 31, n. 5, p. 392–396, May 1983.
- 31 GLISSON, A. W.; KAJFEZ, D.; JAMES, J. Evaluation of modes in dielectric resonators using a surface integral equation formulation. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, Piscataway, v. 31, n. 12, p. 1023–1029, Dec. 1983.
- 32 KISHK, A. A.; GLISSON, A. W.; JUNKER, G. P. Bandwidth enhancement for split cylindrical dielectric resonator antennas. **Progress In Electromagnetics Research**, Cambridge, v. 33, p. 97–118, 2001.
- 33 BALANIS, C. A. **Antenna theory: analysis and design**. 3rd. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2005.
- 34 VAN BLADEL, J. On the resonances of a dielectric resonator of very high permittivity. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, Piscataway, v. 23, n. 2, p. 199–208, Feb. 1975.
- 35 GOPAKUMAR, C. **Development and analysis of a novel isosceles trapezoidal dielectric resonator antenna for wireless communication**. Cochin: Cochin University of Science and Technology, 2011.
- 36 OLIVEIRA, E. E. C. et al. Caracterização experimental de uma antena DRA cilíndrica dual-band com alta constante dielétrica. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE MICRO ONDAS E OPTOELETRÔNICA, 16., 2014, Curitiba. **Anais...** São Caetano do Sul: Sociedade Brasileira de Micro-ondas e Optoeletrônica, 2014. p. 95–99.

- 37 RASHIDIAN, A. et al. Photoresist-based polymer resonator antennas: lithography fabrication, strip-fed excitation, and multimode operation. **IEEE Antennas and Propagation Magazine**, Piscataway, v. 53, n. 4, p. 17–27, Aug. 2011.
- 38 JUNKER, G. P. et al. Effect of air gap on cylindrical dielectric resonator antenna operating in TM_{01} mode. **Electronics Letters**, London, v. 30, n. 2, p. 97–98, Jan. 1994.
- 39 JUNKER, G. P. et al. Effect of an air gap around the coaxial probe exciting a cylindrical dielectric resonator antenna. **Electronics Letters**, London, v. 30, n. 3, p. 177–178, Feb. 1994.
- 40 MCALLISTER, M. W.; LONG, S. A. Resonant hemispherical dielectric antenna. **Electronics Letters**, London, v. 20, n. 16, p. 657–659, Aug. 1984.
- 41 MCALLISTER, M. W.; LONG, S. A.; CONWAY, G. L. Rectangular dielectric resonator antenna. **Electronics Letters**, London, v. 19, n. 6, p. 218–219, Mar. 1983.
- 42 JUNKER, G. P.; KISHK, A. A.; GLISSON, A. W. Input impedance of dielectric resonator antennas excited by a coaxial probe. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, Piscataway, v. 42, n. 7, p. 960–966, July 1994.
- 43 HUYNH, A. P. et al. A study of the impedance and pattern bandwidths of probe-fed cylindrical dielectric resonator antennas. **IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters**, Piscataway, v. 10, p. 1313–1316, Nov. 2011.
- 44 KRANENBURG, R. A.; LONG, S. A. Microstrip transmission line excitation of dielectric resonator antennas. **Electronics Letters**, London, v. 24, n. 18, p. 1156–1157, Sept. 1988.
- 45 JUNKER, G. P.; KISHK, A. A.; GLISSON, A. W. Input impedance of aperture-coupled dielectric resonator antennas. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, Piscataway, v. 44, n. 5, p. 600–607, May 1996.
- 46 JUNKER, G. P.; KISHK, A. A.; GLISSON, A. W. Effect of aperture filling on slot-coupled dielectric resonator antennas operating in HEM_{11} mode. **Electronics Letters**, London, v. 31, n. 10, p. 774–775, May 1995.
- 47 ST. MARTIN, J. T. H. et al. Dielectric resonator antenna using aperture coupling. **Electronics Letters**, London, v. 26, n. 24, p. 2015–2016, Nov. 1990.
- 48 MONGIA, R. K. Half-split dielectric resonator placed on metallic plane for antenna applications. **Electronics Letters**, London, v. 25, n. 7, p. 462–464, Mar. 1989.
- 49 ALMPANIS, G.; FUMEUX, C.; VAHLDIECK, R. Comparison of various non-canonical rectangular dielectric resonator antennas for enhanced bandwidth. In: **IEEE ANTENNAS AND PROPAGATION SOCIETY INTERNATIONAL SYMPOSIUM**, 46., 2008, San Diego. **Digest...** Piscataway: Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 2008. p. 1–4.

- 50 PETOSA, A. et al. Recent advances in dielectric-resonator antenna technology. **IEEE Antennas and Propagation Magazine**, Piscataway, v. 40, n. 3, p. 35–48, June 1998.
- 51 MONGIA, R. K.; ITTIPIBOON, A. Theoretical and experimental investigations on rectangular dielectric resonator antennas. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, Piscataway, v. 45, n. 9, p. 1348–1356, Sept. 1997.
- 52 SEKO, M. H. **Antenas planares de micro-ondas multibandas para terminais móveis de sistemas de comunicação sem fio**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2013.
- 53 KISHK, A. A.; AHN, B.; KAJFEZ, D. Broadband stacked dielectric resonator antennas. **Electronics Letters**, London, v. 25, n. 18, p. 1232–1233, Aug. 1989.
- 54 WALSH, A. G.; DEYOUNG, C. S.; LONG, S. A. An investigation of stacked and embedded cylindrical dielectric resonator antennas. **IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters**, Piscataway, v. 5, p. 130–133, Apr. 2006.
- 55 DEYOUNG, C. S.; LONG, S. A. Wideband cylindrical and rectangular dielectric resonator antennas. **IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters**, Piscataway, v. 5, p. 426–429, Oct. 2006.
- 56 RASHIDIAN, A.; SHAFI, L.; KLYMYSHYN, D. M. Compact wideband multimode dielectric resonator antennas fed with parallel standing strips. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, Piscataway, v. 60, n. 11, p. 5021–5031, Nov. 2012.
- 57 HADY, L. K.; KAJFEZ, D.; KISHK, A. A. Triple mode use of a single dielectric resonator. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, Piscataway, v. 57, n. 5, p. 1328–1335, May 2009.
- 58 PETOSA, A.; THIRAKOUNE, S. Rectangular dielectric resonator antennas with enhanced gain. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, Piscataway, v. 59, n. 4, p. 1385–1389, Apr. 2011.
- 59 GUHA, D. et al. Higher order mode excitation for high-gain broadside radiation from cylindrical dielectric resonator antennas. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, Piscataway, v. 60, n. 1, p. 71–77, Jan. 2012.
- 60 LEUNG, K. W. et al. Two-dimensional cylindrical dielectric resonator antenna array. **Electronics Letters**, London, v. 34, n. 13, p. 1283–1285, June 1998.
- 61 DROSSOS, G.; WU, Z.; DAVIS, L. E. Two-element broadside arrays using cylindrical dielectric resonator antennas. **Microwave and Optical Technology Letters**, Hoboken, v. 11, n. 6, p. 342–345, Apr. 1996.

- 62 HANEISHI, M.; TAKAZAWA, H. Broadband circularly polarised planar array composed of a pair of dielectric resonator antennas. **Electronics Letters**, London, v. 21, n. 10, p. 437–438, May 1985.
- 63 KHALILY, M. et al. Omnidirectional circularly polarized dielectric resonator antenna for 5.2-GHz WLAN applications. **IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters**, Piscataway, v. 13, p. 443–446, Mar. 2014.
- 64 HUANG, C.-Y.; WU, J.-Y.; WONG, K.-L. Cross-slot-coupled microstrip antenna and dielectric resonator antenna for circular polarization. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, Piscataway, v. 47, n. 4, p. 605–609, Apr. 1999.
- 65 WONG, W. C. et al. Circular-polarized dielectric resonator antenna excited by dual conformal strips. In: IEEE ANTENNAS AND PROPAGATION SOCIETY INTERNATIONAL SYMPOSIUM, 38., 2000, Salt Lake City. **Digest...** Piscataway: Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 2000. p. 1021–1024.
- 66 LONG, R. T. et al. Use of parasitic strip to produce circular polarisation and increased bandwidth for cylindrical dielectric resonator antenna. **Electronics Letters**, London, v. 37, n. 7, p. 406–408, Mar. 2001.
- 67 HSIAO, F.-R.; CHIOU, T.-W.; WONG, K.-L. Circularly polarized low-profile square dielectric resonator antenna with a loading patch. **Microwave and Optical Technology Letters**, Hoboken, v. 31, n. 3, p. 157–159, Nov. 2001.
- 68 HUANG, C.-Y.; LING, C.-W. Frequency-adjustable circularly polarised dielectric resonator antenna with slotted ground plane. **Electronics Letters**, London, v. 39, n. 14, p. 1030–1031, July 2003.
- 69 FAN, Z. et al. Parasitic coplanar three-element dielectric resonator antenna subarray. **Electronics Letters**, London, v. 32, n. 9, p. 789–790, Apr. 1996.
- 70 KISHK, A. A.; HUANG, W. Size-reduction method for dielectric-resonator antennas. **IEEE Antennas and Propagation Magazine**, Piscataway, v. 53, n. 2, p. 26–38, Apr. 2011.
- 71 RYU, K. S.; KISHK, A. A. UWB dielectric resonator antenna having consistent omnidirectional pattern and low cross-polarization characteristics. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, Piscataway, v. 59, n. 4, p. 1403–1408, Apr. 2011.
- 72 MATLAB. Versão 2010a. [S.l.]: MathWorks, Inc, 2010. Pacote baixado da Internet em <<https://www.mathworks.com>>.
- 73 NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical optimization**. New York: Springer-Verlag New York, Inc., 1999.
- 74 ADVANCED DESIGN SYSTEM. Versão 2015. [S.l.]: Keysight Technologies, 2015. Pacote baixado da Internet em <<https://www.keysight.com>>.

- 75 CST STUDIO SUITE. Versão 2016. [S.l.]: Computer Simulation Technology AG, 2015. Pacote baixado da Internet em <<https://www.cst.com>>.
- 76 VOLAKIS, J. L.; CHATTERJEE, A.; KEMPEL, L. C. **Finite element method for electromagnetics: antennas, microwave circuits, and scattering applications**. New York: Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 1998.
- 77 HARRINGTON, R. F. **Field computation by moment methods**. New York: Macmillan Co., 1968.
- 78 HADY, L. K.; KISHK, A. A.; KAJFEZ, D. Dual-band compact DRA with circular and monopole-like linear polarizations as a concept for GPS and WLAN applications. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, Piscataway, v. 57, n. 9, p. 2591–2598, Sept. 2009.
- 79 PAN, Y. M.; ZHENG, S. Y.; HU, B. J. Design of dual-band omnidirectional cylindrical dielectric resonator antenna. **IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters**, Piscataway, v. 13, p. 710–713, Apr. 2014.
- 80 GUHA, D.; GUPTA, P.; KUMAR, C. Dualband cylindrical dielectric resonator antenna employing $HEM_{11\delta}$ and $HEM_{12\delta}$ modes excited by new composite aperture. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, Piscataway, v. 63, n. 1, p. 433–438, Jan. 2015.
- 81 FANG, X. S.; LEUNG, K. W. Linear-/circular-polarization designs of dual-/wide-band cylindrical dielectric resonator antennas. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, Piscataway, v. 60, n. 6, p. 2662–2671, June 2012.
- 82 FANG, X. S.; LEUNG, K. W. Designs of single-, dual-, wide-band rectangular dielectric resonator antennas. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, Piscataway, v. 59, n. 6, p. 2409–2414, June 2011.
- 83 FANG, X. S. et al. New single-/dual-mode design formulas of the rectangular dielectric resonator antenna using covariance matrix adaptation evolutionary strategy. **IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters**, Piscataway, v. 10, p. 734–737, July 2011.
- 84 CHANG, T.-H.; KIANG, J.-F. Dualband split dielectric resonator antenna. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, Piscataway, v. 55, n. 11, p. 3155–3162, Nov. 2007.
- 85 FANG, X.; LEUNG, K. W.; LIM, E. H. Singly-fed dual-band circularly polarized dielectric resonator antenna. **IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters**, Piscataway, v. 13, p. 995–998, May 2014.
- 86 ZHOU, Y.-D. et al. A novel single-fed wide dual-band circularly polarized dielectric resonator antenna. **IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters**, Piscataway, v. 15, p. 930–933, Sept. 2015.

- 87 ZHANG, M.; LI, B.; LV, X. Cross-slot-coupled wide dual-band circularly polarized rectangular dielectric resonator antenna. **IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters**, Piscataway, v. 13, p. 532–535, Mar. 2014.
- 88 ZOU, M.; PAN, J. Wide dual-band circularly polarized stacked rectangular dielectric resonator antenna. **IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters**, Piscataway, v. 15, p. 1140–1143, Oct. 2015.
- 89 LEUNG, K. W. Conformal strip excitation of dielectric resonator antenna. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, Piscataway, v. 48, n. 6, p. 961–967, June 2000.
- 90 BANERJEE, A. et al. Microstrip line(s) as new feed for exciting a cylindrical DRA with higher order $HEM_{12\delta}$ mode. In: IEEE ANTENNAS AND PROPAGATION SOCIETY INTERNATIONAL SYMPOSIUM, 52., 2014, Memphis. **Digest...** Piscataway: Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 2014. p. 1990–1991.
- 91 GUHA, D. et al. New technique to excite higher-order radiating mode in a cylindrical dielectric resonator antenna. **IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters**, Piscataway, v. 13, p. 15–18, Dec. 2013.
- 92 GUPTA, P.; GUHA, D.; KUMAR, C. A new feed conceived for exciting $HEM_{12\delta}$ mode in a cylindrical DRA. In: IEEE APPLIED ELECTROMAGNETICS CONFERENCE, 5., 2015, Guwahati. **Proceedings...** Piscataway: Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 2015. p. 1–2.
- 93 SEKO, M. H. et al. Microstrip feeding for the excitation of a higher-order resonant mode in cylindrical dielectric resonator antennas. In: SBMO/IEEE MTT-S INTERNATIONAL MICROWAVE AND OPTOELECTRONICS CONFERENCE, 17., 2017, Águas de Lindoia. **Proceedings...** Piscataway: Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 2017. p. 1–5.
- 94 CHENG, K.-K. M.; WONG, F.-L. A novel approach to the design and implementation of dual-band compact planar 90° branch-line coupler. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, Piscataway, v. 52, n. 11, p. 2458–2463, Nov. 2004.
- 95 ZHENG, N.; ZHOU, L.; YIN, W.-Y. A novel dual-band Π -shaped branch-line coupler with stepped-impedance stubs. **Progress In Electromagnetics Research Letters**, Cambridge, v. 25, p. 11–20, 2011.
- 96 ZHANG, H.; CHEN, K. J. A stub tapped branch-line coupler for dual-band operations. **IEEE Microwave and Wireless Components Letters**, Piscataway, v. 17, n. 2, p. 106–108, Feb. 2007.
- 97 CHIN, K.-S. et al. Compact dual-band branch-line and rat-race couplers with stepped-impedance-stub lines. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, Piscataway, v. 58, n. 5, p. 1213–1221, May 2010.

- 98 TSUJI, M.; SHIGESAWA, H.; TAKIYAMA, K. Analytical and experimental investigations on several resonant modes in open dielectric resonators. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, Piscataway, v. 32, n. 6, p. 628–633, June 1984.
- 99 GARAULT, Y.; GUILLON, P. Higher accuracy for the resonance frequencies of dielectric resonators. **Electronics Letters**, London, v. 12, n. 18, p. 475–476, Sept. 1976.
- 100 BRONSTEIN, I.; SEMENDIAEV, K. **Manual de matemática para engenheiros e estudantes**. Tradução Felix Valois Guará Bezerra. Moscou: Mir, 1979.

APÊNDICE — ACOPLADOR HÍBRIDO DE 90° DE BANDA DUPLA

O presente apêndice apresenta a dedução matemática das expressões referentes ao circuito acoplador híbrido de 90° de banda dupla tipos Π e T, sumarizadas nas Tabelas 5–10. A derivação algébrica das equações dos referidos acopladores é realizada com base na teoria de linhas de transmissão^{17, 18, 22}, considerando-se linhas de transmissão ideais.

ACOPLADOR HÍBRIDO DE 90° TRADICIONAL

Conforme já exposto anteriormente, o acoplador híbrido de 90° tradicional^{17, 18, 22} consiste em quatro trechos de linha de transmissão interconectados de forma a produzir uma topologia na forma de um anel, como ilustra a Figura 27.

Normalmente, o acoplador híbrido de 90° é composto de trechos de linha de transmissão com um comprimento elétrico de 90° (equivalente a um quarto de comprimento de onda guiada) na frequência de operação f desejada.

Por outro lado, esse circuito pode assumir uma forma generalizada na qual os trechos de linha de transmissão possuem um comprimento elétrico θ_c tal que

$$\theta_c = (2r+1)\frac{\pi}{2}, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (379)$$

onde r é um número inteiro não negativo.

Nesse caso do circuito generalizado, pode-se demonstrar que a diferença de fase $\Delta\phi$ entre os sinais das portas de saída do acoplador (P_3 e P_2) é calculada por

$$\Delta\phi = -(2r+1)\frac{\pi}{2} \quad (380)$$

e a matriz ABCD $\mathbf{C}$ de cada trecho de linha de transmissão do acoplador é dada por

$$\mathbf{C} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & +jZ_c \\ +\frac{j}{Z_c} & 0 \end{bmatrix}, & \text{para } r \text{ par} \\ \begin{bmatrix} 0 & -jZ_c \\ -\frac{j}{Z_c} & 0 \end{bmatrix}, & \text{para } r \text{ ímpar} \end{cases} \quad (381)$$

tal que a impedância característica Z_C de cada trecho de linha de transmissão do acoplador é expressa por

$$Z_C = \begin{cases} \frac{Z_0}{\sqrt{2}}, & \text{para os trechos de linha de transmissão entre } P_2 \text{ e } P_1 \text{ e entre } P_4 \text{ e } P_3 \\ Z_0, & \text{para os trechos de linha de transmissão entre } P_4 \text{ e } P_1 \text{ e entre } P_3 \text{ e } P_2 \end{cases} \quad (382)$$

ACOPLADOR TIPO Π

O acoplador tipo Π ^{94, 95} é projetado para operar da mesma forma como um acoplador híbrido de 90° tradicional, porém em duas frequências distintas arbitrárias f_1 e f_2 . Para obter esse desempenho, cada trecho de linha de transmissão do acoplador híbrido de 90° tradicional é trocado por um circuito tipo Π , como o ilustrado na Figura 52(a). O circuito tipo Π deve exibir em f_1 e em f_2 o mesmo comportamento apresentado em f pelo trecho de linha de transmissão que ele substitui.

A matriz ABCD Π do circuito tipo Π é dada por

$$\begin{aligned} \Pi &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_{\Pi}' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_{\Pi}) & jZ_{\Pi} \sin(\theta_{\Pi}) \\ \frac{j \sin(\theta_{\Pi})}{Z_{\Pi}} & \cos(\theta_{\Pi}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_{\Pi}' & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_{\Pi}) + jZ_{\Pi} Y_{\Pi}' \sin(\theta_{\Pi}) & jZ_{\Pi} \sin(\theta_{\Pi}) \\ \frac{j \sin(\theta_{\Pi})}{Z_{\Pi}} (1 + Z_{\Pi}^2 Y_{\Pi}'^2 - j2Z_{\Pi} Y_{\Pi}' \cot(\theta_{\Pi})) & \cos(\theta_{\Pi}) + jZ_{\Pi} Y_{\Pi}' \sin(\theta_{\Pi}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (383)$$

onde a admitância em paralelo Y_{Π}' inserida ao longo do anel do acoplador tipo Π é definida como

$$Y_{\Pi}' = \frac{1}{Z_{\Pi}'} \quad (384)$$

Em f_1 e em f_2 , Π assume as formas Π_1 e Π_2 , respectivamente, escritas por

$$\mathbf{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{\Pi}^{(1)}) + jZ_{\Pi}Y_{\Pi}^{(1)'} \sin(\theta_{\Pi}^{(1)}) & jZ_{\Pi} \sin(\theta_{\Pi}^{(1)}) \\ \frac{j \sin(\theta_{\Pi}^{(1)})}{Z_{\Pi}} (1 + Z_{\Pi}^2 Y_{\Pi}^{(1)'^2} - j2Z_{\Pi}Y_{\Pi}^{(1)'} \cot(\theta_{\Pi}^{(1)})) & \cos(\theta_{\Pi}^{(1)}) + jZ_{\Pi}Y_{\Pi}^{(1)'} \sin(\theta_{\Pi}^{(1)}) \end{bmatrix} \quad (385)$$

$$\mathbf{\Pi}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{\Pi}^{(2)}) + jZ_{\Pi}Y_{\Pi}^{(2)'} \sin(\theta_{\Pi}^{(2)}) & jZ_{\Pi} \sin(\theta_{\Pi}^{(2)}) \\ \frac{j \sin(\theta_{\Pi}^{(2)})}{Z_{\Pi}} (1 + Z_{\Pi}^2 Y_{\Pi}^{(2)'^2} - j2Z_{\Pi}Y_{\Pi}^{(2)'} \cot(\theta_{\Pi}^{(2)})) & \cos(\theta_{\Pi}^{(2)}) + jZ_{\Pi}Y_{\Pi}^{(2)'} \sin(\theta_{\Pi}^{(2)}) \end{bmatrix} \quad (386)$$

onde $\theta_{\Pi}^{(1)}$ e $\theta_{\Pi}^{(2)}$ correspondem, respectivamente, ao comprimento elétrico dos trechos de linha de transmissão que formam o anel do acoplador tipo Π em f_1 e em f_2 , e $Y_{\Pi}^{(1)'}$ e $Y_{\Pi}^{(2)'}$ representam a admitância em paralelo inserida ao longo do anel do acoplador tipo Π em f_1 e em f_2 , respectivamente.

Os parâmetros do circuito tipo Π são calculados igualando-se sua matriz ABCD $\mathbf{\Pi}$ à matriz $\mathbf{C}$, dada pela eq. (381):

$$\mathbf{\Pi}_1 = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & +jZ_C \\ +\frac{j}{Z_C} & 0 \end{bmatrix}, & \text{se for escolhido } \Delta\phi_1 = -\frac{\pi}{2} - 2s\pi, s = 0, 1, 2, \dots \text{ (caso 1A)} \\ \begin{bmatrix} 0 & -jZ_C \\ -\frac{j}{Z_C} & 0 \end{bmatrix}, & \text{se for escolhido } \Delta\phi_1 = -\frac{3\pi}{2} - 2s\pi, s = 0, 1, 2, \dots \text{ (caso 1B)} \end{cases} \quad (387)$$

$$\mathbf{\Pi}_2 = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & +jZ_C \\ +\frac{j}{Z_C} & 0 \end{bmatrix}, & \text{se for escolhido } \Delta\phi_2 = -\frac{\pi}{2} - 2t\pi, t = 0, 1, 2, \dots \text{ (caso 2A)} \\ \begin{bmatrix} 0 & -jZ_C \\ -\frac{j}{Z_C} & 0 \end{bmatrix}, & \text{se for escolhido } \Delta\phi_2 = -\frac{3\pi}{2} - 2t\pi, t = 0, 1, 2, \dots \text{ (caso 2B)} \end{cases} \quad (388)$$

onde s e t são números inteiros não negativos.

As eq. (385)–(388) resultam em um sistema de equações que conduz a

$$Y_{\Pi}^{(1)'} = \frac{j}{Z_{\Pi}} \cot(\theta_{\Pi}^{(1)}) \quad (389)$$

$$Y_{\Pi}^{(2)'} = \frac{j}{Z_{\Pi}} \cot(\theta_{\Pi}^{(2)}) \quad (390)$$

$$Z_{\Pi} \operatorname{sen}(\theta_{\Pi}^{(1)}) = \begin{cases} +Z_C, & \text{caso 1A} \\ -Z_C, & \text{caso 1B} \end{cases} \quad (391)$$

$$Z_{\Pi} \operatorname{sen}(\theta_{\Pi}^{(2)}) = \begin{cases} +Z_C, & \text{caso 2A} \\ -Z_C, & \text{caso 2B} \end{cases} \quad (392)$$

Sem perda de generalidade, considera-se $f_2 > f_1$, e a solução das eq. (391) e (392) leva a

$$\theta_{\Pi}^{(2)} = \begin{cases} \begin{cases} -\theta_{\Pi}^{(1)} + o\pi, & o = 1, 3, 5, \dots \\ +\theta_{\Pi}^{(1)} + o\pi, & o = 2, 4, 6, \dots \end{cases}, & \text{caso 1A com 2A ou caso 1B com 2B (situação 1)} \\ \begin{cases} +\theta_{\Pi}^{(1)} + o\pi, & o = 1, 3, 5, \dots \\ -\theta_{\Pi}^{(1)} + o\pi, & o = 2, 4, 6, \dots \end{cases}, & \text{caso 1A com 2B ou caso 1B com 2A (situação 2)} \end{cases} \quad (393)$$

Para um trecho qualquer de linha de transmissão, vale a relação^{17, 18, 22}

$$\frac{f_A}{f_B} = \frac{\theta_L^{(A)}}{\theta_L^{(B)}} \quad (394)$$

onde f_A e f_B denotam uma frequência arbitrária cada, e $\theta_L^{(1)}$ e $\theta_L^{(2)}$ referem-se ao comprimento elétrico do trecho de linha de transmissão em f_A e em f_B , respectivamente.

Sendo assim, utilizando-se a eq. (394), pode-se obter a partir da eq. (393)

$$\theta_{\Pi}^{(2)} + \theta_{\Pi}^{(1)} = \frac{f_2 + f_1}{f_1} \theta_{\Pi}^{(1)} = o\pi, \quad o = 1, 3, 5, \dots, \text{ situação 1} \quad (395)$$

$$\theta_{\Pi}^{(2)} - \theta_{\Pi}^{(1)} = \frac{f_2 - f_1}{f_1} \theta_{\Pi}^{(1)} = o\pi, \quad o = 2, 4, 6, \dots, \text{ situação 1} \quad (396)$$

$$\theta_{\Pi}^{(2)} - \theta_{\Pi}^{(1)} = \frac{f_2 - f_1}{f_1} \theta_{\Pi}^{(1)} = o\pi, \quad o = 1, 3, 5, \dots, \text{ situação 2} \quad (397)$$

$$\theta_{\Pi}^{(2)} + \theta_{\Pi}^{(1)} = \frac{f_2 + f_1}{f_1} \theta_{\Pi}^{(1)} = o\pi, \quad o = 2, 4, 6, \dots, \text{ situação 2} \quad (398)$$

Utilizando-se a definição dada pela eq. (53), o comprimento elétrico $\theta_{\Pi}^{(M)}$ dos trechos de linha de transmissão que formam o anel do acoplador tipo Π em f_M pode ser escrito, com o auxílio da eq. (394), na forma

$$\theta_{\Pi}^{(M)} = \frac{\theta_{\Pi}^{(2)} + \theta_{\Pi}^{(1)}}{2} \quad (399)$$

Resolvendo-se as eq. (395)–(398) e aplicando-se a eq. (399), com o auxílio da eq. (394), tem-se

$$\theta_{\Pi}^{(M)} = \begin{cases} \begin{cases} \frac{o\pi}{2}, & o = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{f_2 + f_1}{f_2 - f_1} \frac{o\pi}{2}, & o = 2, 4, 6, \dots \end{cases}, & \text{situação 1} \\ \begin{cases} \frac{f_2 + f_1}{f_2 - f_1} \frac{o\pi}{2}, & o = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{o\pi}{2}, & o = 2, 4, 6, \dots \end{cases}, & \text{situação 2} \end{cases} \quad (400)$$

O parâmetro Z_{Π} é calculado a partir da eq. (391) com as eq. (395)–(398):

$$Z_{\Pi} = \begin{cases} \begin{cases} \frac{+Z_c}{\text{sen}\left(\frac{f_1}{f_2 + f_1} o\pi\right)}, & o = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{+Z_c}{\text{sen}\left(\frac{f_1}{f_2 - f_1} o\pi\right)}, & o = 2, 4, 6, \dots \end{cases}, & \text{caso 1A com 2A} \\ \begin{cases} \frac{-Z_c}{\text{sen}\left(\frac{f_1}{f_2 + f_1} o\pi\right)}, & o = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{-Z_c}{\text{sen}\left(\frac{f_1}{f_2 - f_1} o\pi\right)}, & o = 2, 4, 6, \dots \end{cases}, & \text{caso 1B com 2B} \\ \begin{cases} \frac{+Z_c}{\text{sen}\left(\frac{f_1}{f_2 - f_1} o\pi\right)}, & o = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{+Z_c}{\text{sen}\left(\frac{f_1}{f_2 + f_1} o\pi\right)}, & o = 2, 4, 6, \dots \end{cases}, & \text{caso 1A com 2B} \\ \begin{cases} \frac{-Z_c}{\text{sen}\left(\frac{f_1}{f_2 - f_1} o\pi\right)}, & o = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{-Z_c}{\text{sen}\left(\frac{f_1}{f_2 + f_1} o\pi\right)}, & o = 2, 4, 6, \dots \end{cases}, & \text{caso 1B com 2A} \end{cases} \quad (401)$$

As eq. (400) e (401) encontram-se na Tabela 5 organizadas de acordo com o tipo de resposta do acoplador.

O próximo passo é escolher os elementos de circuito que irão realizar a admitância Y_{Π}' , que deve obedecer às eq. (389) e (390).

Realização de Y_{Π}' por toco duplo em circuito aberto

Considera-se o uso do toco duplo em circuito aberto, exibido na Figura 54(c), para a realização de Y_{Π}' .

A impedância de entrada desse toco é dada por^{17, 18, 22}

$$Z_{\Pi}' = jZ_{op1} \frac{Z_{op1} \operatorname{tg}(\theta_{op1}) - Z_{op2} \cot(\theta_{op2})}{Z_{op1} + Z_{op2} \operatorname{tg}(\theta_{op1}) \cot(\theta_{op2})} \quad (402)$$

Utilizando-se a eq. (384), tem-se

$$Y_{\Pi}' = \frac{1}{jZ_{op1}} \frac{Z_{op1} + Z_{op2} \operatorname{tg}(\theta_{op1}) \cot(\theta_{op2})}{Z_{op1} \operatorname{tg}(\theta_{op1}) - Z_{op2} \cot(\theta_{op2})} \quad (403)$$

A partir da eq. (403), pode-se obter

$$Y_{\Pi}^{(1)'} = \frac{1}{jZ_{op1}} \frac{Z_{op1} + Z_{op2} \operatorname{tg}(\theta_{op1}^{(1)}) \cot(\theta_{op2}^{(1)})}{Z_{op1} \operatorname{tg}(\theta_{op1}^{(1)}) - Z_{op2} \cot(\theta_{op2}^{(1)})} \quad (404)$$

$$Y_{\Pi}^{(2)'} = \frac{1}{jZ_{op1}} \frac{Z_{op1} + Z_{op2} \operatorname{tg}(\theta_{op1}^{(2)}) \cot(\theta_{op2}^{(2)})}{Z_{op1} \operatorname{tg}(\theta_{op1}^{(2)}) - Z_{op2} \cot(\theta_{op2}^{(2)})} \quad (405)$$

onde $\theta_{op1}^{(1)}$ e $\theta_{op1}^{(2)}$ correspondem ao comprimento elétrico do primeiro segmento do toco duplo em circuito aberto em f_1 e em f_2 , respectivamente, e $\theta_{op2}^{(1)}$ e $\theta_{op2}^{(2)}$ referem-se ao comprimento elétrico do segundo segmento do toco duplo em circuito aberto em f_1 e em f_2 , respectivamente.

Usando-se as eq. (389) e (390) com as eq. (404) e (405), obtém-se o sistema de equações a ser resolvido para a determinação dos parâmetros do toco:

$$\begin{cases} \frac{Z_{op1}}{Z_{\Pi}} = \operatorname{tg}\left(\theta_{\Pi}^{(1)}\right) \frac{Z_{op1} + Z_{op2} \operatorname{tg}\left(\theta_{op1}^{(1)}\right) \cot\left(\theta_{op2}^{(1)}\right)}{Z_{op2} \cot\left(\theta_{op2}^{(1)}\right) - Z_{op1} \operatorname{tg}\left(\theta_{op1}^{(1)}\right)} \\ \frac{Z_{op1}}{Z_{\Pi}} = \operatorname{tg}\left(\theta_{\Pi}^{(2)}\right) \frac{Z_{op1} + Z_{op2} \operatorname{tg}\left(\theta_{op1}^{(2)}\right) \cot\left(\theta_{op2}^{(2)}\right)}{Z_{op2} \cot\left(\theta_{op2}^{(2)}\right) - Z_{op1} \operatorname{tg}\left(\theta_{op1}^{(2)}\right)} \end{cases} \quad (406)$$

Dadas as condições expressas pelas eq. (395)–(398), pode-se verificar que

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\theta_{\Pi}^{(2)}\right)}{\operatorname{tg}\left(\theta_{\Pi}^{(1)}\right)} = \begin{cases} -1, & \text{caso 1A com 2A ou caso 1B com 2B para } o = 1, 3, 5, \dots, \text{ ou} \\ & \text{caso 1A com 2B ou caso 1B com 2A para } o = 2, 4, 6, \dots \text{ (situação 3)} \\ +1, & \text{caso 1A com 2A ou caso 1B com 2B para } o = 1, 3, 5, \dots, \text{ ou} \\ & \text{caso 1A com 2B ou caso 1B com 2A para } o = 2, 4, 6, \dots \text{ (situação 4)} \end{cases} \quad (407)$$

Sendo assim, considerando-se a eq. (407), a eq. (406) leva a

$$\frac{Z_{op1} + Z_{op2} \operatorname{tg}\left(\theta_{op1}^{(1)}\right) \cot\left(\theta_{op2}^{(1)}\right)}{Z_{op2} \cot\left(\theta_{op2}^{(1)}\right) - Z_{op1} \operatorname{tg}\left(\theta_{op1}^{(1)}\right)} = \frac{Z_{op1} + Z_{op2} \operatorname{tg}\left(\theta_{op1}^{(2)}\right) \cot\left(\theta_{op2}^{(2)}\right)}{Z_{op2} \cot\left(\theta_{op2}^{(2)}\right) - Z_{op1} \operatorname{tg}\left(\theta_{op1}^{(2)}\right)} \quad (408)$$

Na eq. (408), utiliza-se o sinal negativo para a situação 3, e o positivo para a situação 4.

Com o auxílio das eq. (53), (66) e (394), $\theta_{op1}^{(1)}$, $\theta_{op1}^{(2)}$, $\theta_{op2}^{(1)}$ e $\theta_{op2}^{(2)}$ podem ser expressos na forma

$$\theta_{op1}^{(1)} = (1 - \sigma) \theta_{op1}^{(M)} \quad (409)$$

$$\theta_{op1}^{(2)} = (1 + \sigma) \theta_{op1}^{(M)} \quad (410)$$

$$\theta_{op2}^{(1)} = (1 - \sigma) \theta_{op2}^{(M)} \quad (411)$$

$$\theta_{op2}^{(2)} = (1 + \sigma) \theta_{op2}^{(M)} \quad (412)$$

onde $\theta_{op1}^{(M)}$ e $\theta_{op2}^{(M)}$ são, respectivamente, o comprimento do primeiro e do segundo segmentos do toco duplo em circuito aberto em f_M , que são escritos como

$$\theta_{op1}^{(M)} = \frac{\theta_{op1}^{(2)} + \theta_{op1}^{(1)}}{2} \quad (413)$$

$$\theta_{op2}^{(M)} = \frac{\theta_{op2}^{(2)} + \theta_{op2}^{(1)}}{2} \quad (414)$$

Levando-se em conta a eq. (394), verifica-se a partir da eq. (68) que

$$\frac{\theta_{op2}^{(1)}}{\theta_{op1}^{(1)}} = \frac{\theta_{op2}^{(2)}}{\theta_{op1}^{(2)}} = \frac{\theta_{op2}}{\theta_{op1}} = \beta_{op} \quad (415)$$

Dessa forma, com o auxílio das eq. (67), (409)–(412) e (415), a eq. (408) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \alpha_{op} \operatorname{tg}\left((1 - \sigma)\theta_{op1}^{(M)}\right) \cot\left(\beta_{op}(1 - \sigma)\theta_{op1}^{(M)}\right)}{\alpha_{op} \cot\left(\beta_{op}(1 - \sigma)\theta_{op1}^{(M)}\right) - \operatorname{tg}\left((1 - \sigma)\theta_{op1}^{(M)}\right)} \\ &= \frac{1 + \alpha_{op} \operatorname{tg}\left((1 + \sigma)\theta_{op1}^{(M)}\right) \cot\left(\beta_{op}(1 + \sigma)\theta_{op1}^{(M)}\right)}{\alpha_{op} \cot\left(\beta_{op}(1 + \sigma)\theta_{op1}^{(M)}\right) - \operatorname{tg}\left((1 + \sigma)\theta_{op1}^{(M)}\right)} \end{aligned} \quad (416)$$

O desenvolvimento algébrico extensivo da eq. (416), auxiliado pelas fórmulas de prostaférese¹⁰⁰, a saber

$$\sin(2x) + \sin(2y) = 2 \sin(x + y) \cos(x - y) \quad (417)$$

$$\sin(2x) - \sin(2y) = 2 \cos(x + y) \sin(x - y) \quad (418)$$

$$\cos(2x) + \cos(2y) = 2 \cos(x + y) \cos(x - y) \quad (419)$$

$$\cos(2x) - \cos(2y) = -2 \sin(x + y) \sin(x - y) \quad (420)$$

conduz a

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(2\theta_{op1}^{(M)}\right) = \frac{2\alpha_{op} \sin\left(2\beta_{op}\theta_{op1}^{(M)}\right)}{\left(1 - \alpha_{op}^2\right) \cos\left(2\beta_{op}\sigma\theta_{op1}^{(M)}\right) - \left(1 + \alpha_{op}^2\right) \cos\left(2\beta_{op}\theta_{op1}^{(M)}\right)}, \text{ situação 3} \\ \operatorname{tg}\left(2\sigma\theta_{op1}^{(M)}\right) = \frac{2\alpha_{op} \sin\left(2\beta_{op}\sigma\theta_{op1}^{(M)}\right)}{\left(1 - \alpha_{op}^2\right) \cos\left(2\beta_{op}\theta_{op1}^{(M)}\right) - \left(1 + \alpha_{op}^2\right) \cos\left(2\beta_{op}\sigma\theta_{op1}^{(M)}\right)}, \text{ situação 4} \end{cases} \quad (421)$$

A partir da eq. (406) com o auxílio das eq. (53), (66), (67), (394), (409), (411) e (415), pode-se obter a expressão para calcular Z_{op1} :

$$Z_{op1} = Z_{\Pi} \operatorname{tg}\left((1 - \sigma)\theta_{\Pi}^{(M)}\right) \frac{1 + \alpha_{op} \operatorname{tg}\left((1 - \sigma)\theta_{op1}^{(M)}\right) \cot\left(\beta_{op}(1 - \sigma)\theta_{op1}^{(M)}\right)}{\alpha_{op} \cot\left(\beta_{op}(1 - \sigma)\theta_{op1}^{(M)}\right) - \operatorname{tg}\left((1 - \sigma)\theta_{op1}^{(M)}\right)} \quad (422)$$

As eq. (421) e (422) são arranjadas na Tabela 7 de forma separada para cada tipo de resposta do acoplador.

Realização de Y_{Π}' por toco duplo em curto-circuito

Para a realização de Y_{Π}' , considera-se o uso do toco duplo em curto-circuito, exibido na Figura 54(d).

A impedância de entrada desse toco é expressa por^{17, 18, 22}

$$Z_{\Pi}' = jZ_{sh1} \frac{Z_{sh1} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}) + Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh2})}{Z_{sh1} - Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}) \operatorname{tg}(\theta_{sh2})} \quad (423)$$

Usando-se a eq. (384), obtém-se

$$Y_{\Pi}' = \frac{1}{jZ_{sh1}} \frac{Z_{sh1} - Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}) \operatorname{tg}(\theta_{sh2})}{Z_{sh1} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}) + Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh2})} \quad (424)$$

Tem-se, a partir da eq. (424),

$$Y_{\Pi}^{(1)'} = \frac{1}{jZ_{sh1}} \frac{Z_{sh1} - Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(1)}) \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(1)})}{Z_{sh1} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(1)}) + Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(1)})} \quad (425)$$

$$Y_{\Pi}^{(2)'} = \frac{1}{jZ_{sh1}} \frac{Z_{sh1} - Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(2)}) \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(2)})}{Z_{sh1} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(2)}) + Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(2)})} \quad (426)$$

onde $\theta_{sh1}^{(1)}$ e $\theta_{sh1}^{(2)}$ referem-se ao comprimento elétrico do primeiro segmento do toco duplo em curto-circuito em f_1 e em f_2 , respectivamente, e $\theta_{sh2}^{(1)}$ e $\theta_{sh2}^{(2)}$ correspondem ao comprimento elétrico do segundo segmento do toco duplo em curto-circuito em f_1 e em f_2 , respectivamente.

O sistema de equações a ser resolvido para o cálculo dos parâmetros do toco é obtido usando-se as eq. (389) e (390) com as eq. (425) e (426):

$$\begin{cases} \frac{Z_{sh1}}{Z_{\Pi}} = \operatorname{tg}(\theta_{\Pi}^{(1)}) \frac{Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(1)}) \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(1)}) - Z_{sh1}}{Z_{sh1} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(1)}) + Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(1)})} \\ \frac{Z_{sh1}}{Z_{\Pi}} = \operatorname{tg}(\theta_{\Pi}^{(2)}) \frac{Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(2)}) \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(2)}) - Z_{sh1}}{Z_{sh1} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(2)}) + Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(2)})} \end{cases} \quad (427)$$

Levando-se em conta a condição expressa pela eq. (407), a eq. (427) conduz a

$$\frac{Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(1)}) \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(1)}) - Z_{sh1}}{Z_{sh1} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(1)}) + Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(1)})} = \frac{Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(2)}) \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(2)}) - Z_{sh1}}{Z_{sh1} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(2)}) + Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(2)})} \quad (428)$$

Na eq. (428), adota-se o sinal negativo para a situação 3, e o positivo para a situação 4.

Com o auxílio das eq. (53), (66) e (394), é possível escrever $\theta_{sh1}^{(1)}$, $\theta_{sh1}^{(2)}$, $\theta_{sh2}^{(1)}$ e $\theta_{sh2}^{(2)}$ como

$$\theta_{sh1}^{(1)} = (1 - \sigma) \theta_{sh1}^{(M)} \quad (429)$$

$$\theta_{sh1}^{(2)} = (1 + \sigma) \theta_{sh1}^{(M)} \quad (430)$$

$$\theta_{sh2}^{(1)} = (1 - \sigma) \theta_{sh2}^{(M)} \quad (431)$$

$$\theta_{sh2}^{(2)} = (1 + \sigma) \theta_{sh2}^{(M)} \quad (432)$$

onde $\theta_{sh1}^{(M)}$ e $\theta_{sh2}^{(M)}$ são, respectivamente, o comprimento do primeiro e do segundo segmentos do toco duplo em curto-circuito em f_M , que são expressos na forma

$$\theta_{sh1}^{(M)} = \frac{\theta_{sh1}^{(2)} + \theta_{sh1}^{(1)}}{2} \quad (433)$$

$$\theta_{sh2}^{(M)} = \frac{\theta_{sh2}^{(2)} + \theta_{sh2}^{(1)}}{2} \quad (434)$$

Considerando-se a eq. (394), pode-se concluir a partir da eq. (70) que

$$\frac{\theta_{sh2}^{(1)}}{\theta_{sh1}^{(1)}} = \frac{\theta_{sh2}^{(2)}}{\theta_{sh1}^{(2)}} = \frac{\theta_{sh2}}{\theta_{sh1}} = \beta_{sh} \quad (435)$$

Portanto, a eq. (428) pode ser reescrita, com o auxílio das eq. (69), (429)–(432) e (435), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_{sh} \operatorname{tg}((1 - \sigma) \theta_{sh1}^{(M)}) \operatorname{tg}(\beta_{sh} (1 - \sigma) \theta_{sh1}^{(M)}) - 1}{\operatorname{tg}((1 - \sigma) \theta_{sh1}^{(M)}) + \alpha_{sh} \operatorname{tg}(\beta_{sh} (1 - \sigma) \theta_{sh1}^{(M)})} \\ &= \frac{\alpha_{sh} \operatorname{tg}((1 + \sigma) \theta_{sh1}^{(M)}) \operatorname{tg}(\beta_{sh} (1 + \sigma) \theta_{sh1}^{(M)}) - 1}{\operatorname{tg}((1 + \sigma) \theta_{sh1}^{(M)}) + \alpha_{sh} \operatorname{tg}(\beta_{sh} (1 + \sigma) \theta_{sh1}^{(M)})} \end{aligned} \quad (436)$$

O desenvolvimento algébrico extensivo da eq. (436), auxiliado pelas fórmulas de prostaférese, leva a

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(2\theta_{sh1}^{(M)}\right)=\frac{-2\alpha_{sh}\operatorname{sen}\left(2\beta_{sh}\theta_{sh1}^{(M)}\right)}{\left(1-\alpha_{sh}^2\right)\cos\left(2\beta_{sh}\sigma\theta_{sh1}^{(M)}\right)+\left(1+\alpha_{sh}^2\right)\cos\left(2\beta_{sh}\theta_{sh1}^{(M)}\right)}, \text{ situação 3} \\ \operatorname{tg}\left(2\sigma\theta_{sh1}^{(M)}\right)=\frac{-2\alpha_{sh}\operatorname{sen}\left(2\beta_{sh}\sigma\theta_{sh1}^{(M)}\right)}{\left(1-\alpha_{sh}^2\right)\cos\left(2\beta_{sh}\theta_{sh1}^{(M)}\right)+\left(1+\alpha_{sh}^2\right)\cos\left(2\beta_{sh}\sigma\theta_{sh1}^{(M)}\right)}, \text{ situação 4} \end{cases} \quad (437)$$

Com o auxílio das eq. (53), (66), (69), (394), (429), (431) e (435), pode-se obter a partir da eq. (427) a expressão para calcular Z_{sh1} :

$$Z_{sh1} = Z_{II} \operatorname{tg}\left((1-\sigma)\theta_{II}^{(M)}\right) \frac{\alpha_{sh} \operatorname{tg}\left((1-\sigma)\theta_{sh1}^{(M)}\right) \operatorname{tg}\left(\beta_{sh}(1-\sigma)\theta_{sh1}^{(M)}\right) - 1}{\operatorname{tg}\left((1-\sigma)\theta_{sh1}^{(M)}\right) + \alpha_{sh} \operatorname{tg}\left(\beta_{sh}(1-\sigma)\theta_{sh1}^{(M)}\right)} \quad (438)$$

As eq. (437) e (438) são dispostas na Tabela 8 de forma separada para cada tipo de resposta do acoplador.

ACOPLADOR TIPO T

O acoplador tipo T^{96, 97} é concebido para operar da mesma maneira como um acoplador híbrido de 90° tradicional, porém também em duas frequências distintas arbitrárias f_1 e f_2 . Para alcançar esse desempenho, cada trecho de linha de transmissão do acoplador híbrido de 90° tradicional é substituído por um circuito tipo T, como o ilustrado na Figura 52(b). O circuito tipo T deve apresentar em f_1 e em f_2 o mesmo comportamento exibido em f pelo trecho de linha de transmissão que ele substitui.

A matriz ABCD **T** do circuito tipo T é escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_T) & jZ_T \operatorname{sen}(\theta_T) \\ \frac{j \operatorname{sen}(\theta_T)}{Z_T} & \cos(\theta_T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_T' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_T) & jZ_T \operatorname{sen}(\theta_T) \\ \frac{j \operatorname{sen}(\theta_T)}{Z_T} & \cos(\theta_T) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(2\theta_T) + \frac{jZ_T Y_T'}{2} \operatorname{sen}(2\theta_T) & jZ_T \operatorname{sen}(2\theta_T) - Z_T^2 Y_T' \frac{1 - \cos(2\theta_T)}{2} \\ \frac{j}{Z_T} \operatorname{sen}(2\theta_T) + Y_T' \frac{1 + \cos(2\theta_T)}{2} & \cos(2\theta_T) + \frac{jZ_T Y_T'}{2} \operatorname{sen}(2\theta_T) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (439)$$

onde a admitância em paralelo Y_T' inserida ao longo do anel do acoplador tipo T é definida como

$$Y_T' = \frac{1}{Z_T'} \quad (440)$$

Em f_1 e em f_2 , $\mathbf{T}$ adquire as formas $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$, respectivamente, dadas por

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos(2\theta_T^{(1)}) + \frac{jZ_T Y_T^{(1)'}}{2} \sin(2\theta_T^{(1)}) & jZ_T \sin(2\theta_T^{(1)}) - Z_T^2 Y_T^{(1)'} \frac{1 - \cos(2\theta_T^{(1)})}{2} \\ \frac{j}{Z_T} \sin(2\theta_T^{(1)}) + Y_T^{(1)'} \frac{1 + \cos(2\theta_T^{(1)})}{2} & \cos(2\theta_T^{(1)}) + \frac{jZ_T Y_T^{(1)'}}{2} \sin(2\theta_T^{(1)}) \end{bmatrix} \quad (441)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos(2\theta_T^{(2)}) + \frac{jZ_T Y_T^{(2)'}}{2} \sin(2\theta_T^{(2)}) & jZ_T \sin(2\theta_T^{(2)}) - Z_T^2 Y_T^{(2)'} \frac{1 - \cos(2\theta_T^{(2)})}{2} \\ \frac{j}{Z_T} \sin(2\theta_T^{(2)}) + Y_T^{(2)'} \frac{1 + \cos(2\theta_T^{(2)})}{2} & \cos(2\theta_T^{(2)}) + \frac{jZ_T Y_T^{(2)'}}{2} \sin(2\theta_T^{(2)}) \end{bmatrix} \quad (442)$$

onde $\theta_T^{(1)}$ e $\theta_T^{(2)}$ representam, respectivamente, o comprimento elétrico dos trechos de linha de transmissão que formam o anel do acoplador tipo T em f_1 e em f_2 , e $Y_T^{(1)'}$ e $Y_T^{(2)'}$ correspondem à admitância em paralelo inserida ao longo do anel do acoplador tipo T em f_1 e em f_2 , respectivamente.

Os parâmetros do circuito tipo T são determinados igualando-se sua matriz ABCD $\mathbf{T}$ à matriz $\mathbf{C}$, expressa pela eq. (381):

$$\mathbf{T}_1 = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & +jZ_C \\ +\frac{j}{Z_C} & 0 \end{bmatrix}, \text{ caso 1A} \\ \begin{bmatrix} 0 & -jZ_C \\ -\frac{j}{Z_C} & 0 \end{bmatrix}, \text{ caso 1B} \end{cases} \quad (443)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & +jZ_C \\ +\frac{j}{Z_C} & 0 \end{bmatrix}, \text{ caso 2A} \\ \begin{bmatrix} 0 & -jZ_C \\ -\frac{j}{Z_C} & 0 \end{bmatrix}, \text{ caso 2B} \end{cases} \quad (444)$$

As eq. (441)–(444) conduzem a um sistema de equações que leva a

$$Y_T^{(1)'} = \frac{j2}{Z_T} \cot(2\theta_T^{(1)}) \quad (445)$$

$$Y_T^{(2)'} = \frac{j2}{Z_T} \cot(2\theta_T^{(2)}) \quad (446)$$

$$Z_T \frac{1 - \cos(2\theta_T^{(1)})}{\sin(2\theta_T^{(1)})} = \begin{cases} +Z_C, \text{ caso 1A} \\ -Z_C, \text{ caso 1B} \end{cases} \quad (447)$$

$$Z_T \frac{1 - \cos(2\theta_T^{(2)})}{\sin(2\theta_T^{(2)})} = \begin{cases} +Z_C, \text{ caso 2A} \\ -Z_C, \text{ caso 2B} \end{cases} \quad (448)$$

Sem perda de generalidade, assume-se $f_2 > f_1$, e as eq. (447) e (448) podem ser resolvidas após manipulação algébrica adequada com o auxílio das fórmulas de prostaférese, o que resulta em

$$\theta_T^{(2)} = \begin{cases} +\theta_T^{(1)} + o\pi, & o = 1, 2, 3, \dots, \text{ situação 1} \\ -\theta_T^{(1)} + o\pi, & o = 1, 2, 3, \dots, \text{ situação 2} \end{cases} \quad (449)$$

Usando-se a eq. (394), é possível obter a partir da eq. (449)

$$\theta_T^{(2)} - \theta_T^{(1)} = \frac{f_2 - f_1}{f_1} \theta_T^{(1)} = o\pi, \quad o = 1, 2, 3, \dots, \text{ situação 1} \quad (450)$$

$$\theta_T^{(2)} + \theta_T^{(1)} = \frac{f_2 + f_1}{f_1} \theta_T^{(1)} = o\pi, \quad o = 1, 3, 5, \dots, \text{ situação 2} \quad (451)$$

Usando-se a definição expressa pela eq. (53), o comprimento elétrico $\theta_T^{(M)}$ dos trechos de linha de transmissão que formam o anel do acoplador tipo T em f_M pode ser expresso, com o auxílio da eq. (394), na forma

$$\theta_T^{(M)} = \frac{\theta_T^{(2)} + \theta_T^{(1)}}{2} \quad (452)$$

Solucionando-se as eq. (450) e (451) e utilizando-se a eq. (452), com o auxílio da eq. (394), obtém-se

$$\theta_T^{(M)} = \begin{cases} \frac{f_2 + f_1}{f_2 - f_1} \frac{o\pi}{2}, & o = 1, 2, 3, \dots, \text{ situação 1} \\ \frac{o\pi}{2}, & o = 1, 2, 3, \dots, \text{ situação 2} \end{cases} \quad (453)$$

O parâmetro Z_T é determinado a partir da eq. (447) com as eq. (450) e (451):

$$Z_T = \begin{cases} \frac{+Z_L \operatorname{sen}\left(\frac{2f_1}{f_2 - f_1} o\pi\right)}{1 - \cos\left(\frac{2f_1}{f_2 - f_1} o\pi\right)}, & o = 1, 2, 3, \dots, \text{ caso 1A com 2A} \\ \frac{-Z_L \operatorname{sen}\left(\frac{2f_1}{f_2 - f_1} o\pi\right)}{1 - \cos\left(\frac{2f_1}{f_2 - f_1} o\pi\right)}, & o = 1, 2, 3, \dots, \text{ caso 1B com 2B} \\ \frac{+Z_L \operatorname{sen}\left(\frac{2f_1}{f_2 + f_1} o\pi\right)}{1 - \cos\left(\frac{2f_1}{f_2 + f_1} o\pi\right)}, & o = 1, 2, 3, \dots, \text{ caso 1A com 2B} \\ \frac{-Z_L \operatorname{sen}\left(\frac{2f_1}{f_2 + f_1} o\pi\right)}{1 - \cos\left(\frac{2f_1}{f_2 + f_1} o\pi\right)}, & o = 1, 2, 3, \dots, \text{ caso 1B com 2A} \end{cases} \quad (454)$$

As eq. (453) e (454) constam na Tabela 6 ordenadas de acordo com o tipo de resposta do acoplador.

O próximo passo é seleccionar os elementos de circuito que irão desempenhar a admitância Y_T' , que deve obedecer às eq. (445) e (446).

Realização de Y_T' por toco duplo em circuito aberto

Para a realização de Y_T' , considera-se o uso do toco duplo em circuito aberto, exibido na Figura 54(c).

A impedância de entrada desse toco é expressa por^{17, 18, 22}

$$Z_T' = jZ_{op1} \frac{Z_{op1} \operatorname{tg}(\theta_{op1}) - Z_{op2} \cot(\theta_{op2})}{Z_{op1} + Z_{op2} \operatorname{tg}(\theta_{op1}) \cot(\theta_{op2})} \quad (455)$$

Usando-se a eq. (440), obtém-se

$$Y_T' = \frac{1}{jZ_{op1}} \frac{Z_{op1} + Z_{op2} \operatorname{tg}(\theta_{op1}) \cot(\theta_{op2})}{Z_{op1} \operatorname{tg}(\theta_{op1}) - Z_{op2} \cot(\theta_{op2})} \quad (456)$$

Tem-se, a partir da eq. (456),

$$Y_T^{(1)'} = \frac{1}{jZ_{op1}} \frac{Z_{op1} + Z_{op2} \operatorname{tg}(\theta_{op1}^{(1)}) \cot(\theta_{op2}^{(1)})}{Z_{op1} \operatorname{tg}(\theta_{op1}^{(1)}) - Z_{op2} \cot(\theta_{op2}^{(1)})} \quad (457)$$

$$Y_T^{(2)'} = \frac{1}{jZ_{op1}} \frac{Z_{op1} + Z_{op2} \operatorname{tg}(\theta_{op1}^{(2)}) \cot(\theta_{op2}^{(2)})}{Z_{op1} \operatorname{tg}(\theta_{op1}^{(2)}) - Z_{op2} \cot(\theta_{op2}^{(2)})} \quad (458)$$

O sistema de equações a ser resolvido para o cálculo dos parâmetros do toco é obtido usando-se as eq. (445) e (446) com as eq. (457) e (458):

$$\begin{cases} \frac{Z_{op1}}{Z_T} = \frac{\operatorname{tg}(2\theta_T^{(1)})}{2} \frac{Z_{op1} + Z_{op2} \operatorname{tg}(\theta_{op1}^{(1)}) \cot(\theta_{op2}^{(1)})}{Z_{op2} \cot(\theta_{op2}^{(1)}) - Z_{op1} \operatorname{tg}(\theta_{op1}^{(1)})} \\ \frac{Z_{op1}}{Z_T} = \frac{\operatorname{tg}(2\theta_T^{(2)})}{2} \frac{Z_{op1} + Z_{op2} \operatorname{tg}(\theta_{op1}^{(2)}) \cot(\theta_{op2}^{(2)})}{Z_{op2} \cot(\theta_{op2}^{(2)}) - Z_{op1} \operatorname{tg}(\theta_{op1}^{(2)})} \end{cases} \quad (459)$$

Levando-se em conta as condições expressas pelas eq. (450) e (451), pode-se ver que

$$\frac{\operatorname{tg}(2\theta_T^{(2)})}{\operatorname{tg}(2\theta_T^{(1)})} = \begin{cases} +1, \text{ situação 1} \\ -1, \text{ situação 2} \end{cases} \quad (460)$$

Portanto, considerando-se a eq. (460), a eq. (459) conduz a

$$\frac{Z_{op1} + Z_{op2} \operatorname{tg}(\theta_{op1}^{(1)}) \cot(\theta_{op2}^{(1)})}{Z_{op2} \cot(\theta_{op2}^{(1)}) - Z_{op1} \operatorname{tg}(\theta_{op1}^{(1)})} = \pm \frac{Z_{op1} + Z_{op2} \operatorname{tg}(\theta_{op1}^{(2)}) \cot(\theta_{op2}^{(2)})}{Z_{op2} \cot(\theta_{op2}^{(2)}) - Z_{op1} \operatorname{tg}(\theta_{op1}^{(2)})} \quad (461)$$

Na eq. (461), adota-se o sinal positivo para a situação 1, e o negativo para a situação 2.

A eq. (461) pode ser reescrita, com o auxílio das eq. (67), (409)–(412) e (415), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \alpha_{op} \operatorname{tg}((1 - \sigma)\theta_{op1}^{(M)}) \cot(\beta_{op} (1 - \sigma)\theta_{op1}^{(M)})}{\alpha_{op} \cot(\beta_{op} (1 - \sigma)\theta_{op1}^{(M)}) - \operatorname{tg}((1 - \sigma)\theta_{op1}^{(M)})} \\ &= \pm \frac{1 + \alpha_{op} \operatorname{tg}((1 + \sigma)\theta_{op1}^{(M)}) \cot(\beta_{op} (1 + \sigma)\theta_{op1}^{(M)})}{\alpha_{op} \cot(\beta_{op} (1 + \sigma)\theta_{op1}^{(M)}) - \operatorname{tg}((1 + \sigma)\theta_{op1}^{(M)})} \end{aligned} \quad (462)$$

O desenvolvimento algébrico extensivo da eq. (462), auxiliado pelas fórmulas de prostaférese, leva a

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(2\sigma\theta_{op1}^{(M)}\right)=\frac{2\alpha_{op}\operatorname{sen}\left(2\beta_{op}\sigma\theta_{op1}^{(M)}\right)}{\left(1-\alpha_{op}^2\right)\cos\left(2\beta_{op}\theta_{op1}^{(M)}\right)-\left(1+\alpha_{op}^2\right)\cos\left(2\beta_{op}\sigma\theta_{op1}^{(M)}\right)}, \text{ situação 1} \\ \operatorname{tg}\left(2\theta_{op1}^{(M)}\right)=\frac{2\alpha_{op}\operatorname{sen}\left(2\beta_{op}\theta_{op1}^{(M)}\right)}{\left(1-\alpha_{op}^2\right)\cos\left(2\beta_{op}\sigma\theta_{op1}^{(M)}\right)-\left(1+\alpha_{op}^2\right)\cos\left(2\beta_{op}\theta_{op1}^{(M)}\right)}, \text{ situação 2} \end{cases} \quad (463)$$

Com o auxílio das eq. (53), (66), (67), (394), (409), (411) e (415), pode-se obter a partir da eq. (459) a expressão para calcular Z_{op1} :

$$Z_{op1} = Z_T \frac{\operatorname{tg}\left(2(1-\sigma)\theta_T^{(M)}\right)}{2} \frac{1+\alpha_{op}\operatorname{tg}\left((1-\sigma)\theta_{op1}^{(M)}\right)\cot\left(\beta_{op}(1-\sigma)\theta_{op1}^{(M)}\right)}{\alpha_{op}\cot\left(\beta_{op}(1-\sigma)\theta_{op1}^{(M)}\right)-\operatorname{tg}\left((1-\sigma)\theta_{op1}^{(M)}\right)} \quad (464)$$

As eq. (463) e (464) são dispostas na Tabela 9 de forma separada para cada tipo de resposta do acoplador.

Realização de Y_T' por toco duplo em curto-circuito

Considera-se o uso do toco duplo em curto-circuito, exibido na Figura 54(d), para a realização de Y_T' .

A impedância de entrada desse toco é dada por^{17, 18, 22}

$$Z_T' = jZ_{sh1} \frac{Z_{sh1}\operatorname{tg}(\theta_{sh1}) + Z_{sh2}\operatorname{tg}(\theta_{sh2})}{Z_{sh1} - Z_{sh2}\operatorname{tg}(\theta_{sh1})\operatorname{tg}(\theta_{sh2})} \quad (465)$$

Utilizando-se a eq. (440), tem-se

$$Y_T' = \frac{1}{jZ_{sh1}} \frac{Z_{sh1} - Z_{sh2}\operatorname{tg}(\theta_{sh1})\operatorname{tg}(\theta_{sh2})}{Z_{sh1}\operatorname{tg}(\theta_{sh1}) + Z_{sh2}\operatorname{tg}(\theta_{sh2})} \quad (466)$$

A partir da eq. (466), pode-se obter

$$Y_T^{(1)'} = \frac{1}{jZ_{sh1}} \frac{Z_{sh1} - Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(1)}) \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(1)})}{Z_{sh1} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(1)}) + Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(1)})} \quad (467)$$

$$Y_T^{(2)'} = \frac{1}{jZ_{sh1}} \frac{Z_{sh1} - Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(2)}) \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(2)})}{Z_{sh1} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(2)}) + Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(2)})} \quad (468)$$

Usando-se as eq. (445) e (446) com as eq. (467) e (468), obtém-se o sistema de equações a ser resolvido para a determinação dos parâmetros do toco:

$$\begin{cases} \frac{Z_{sh1}}{Z_T} = \frac{\operatorname{tg}(2\theta_T^{(1)})}{2} \frac{Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(1)}) \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(1)}) - Z_{sh1}}{Z_{sh1} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(1)}) + Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(1)})} \\ \frac{Z_{sh1}}{Z_T} = \frac{\operatorname{tg}(2\theta_T^{(2)})}{2} \frac{Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(2)}) \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(2)}) - Z_{sh1}}{Z_{sh1} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(2)}) + Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(2)})} \end{cases} \quad (469)$$

Levando-se em conta a condição expressa pela eq. (460), a eq. (469) leva a

$$\frac{Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(1)}) \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(1)}) - Z_{sh1}}{Z_{sh1} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(1)}) + Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(1)})} = \pm \frac{Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(2)}) \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(2)}) - Z_{sh1}}{Z_{sh1} \operatorname{tg}(\theta_{sh1}^{(2)}) + Z_{sh2} \operatorname{tg}(\theta_{sh2}^{(2)})} \quad (470)$$

Na eq. (470), utiliza-se o sinal positivo para a situação 1, e o negativo para a situação 2.

Com o auxílio das eq. (69), (429)–(432) e (435), a eq. (470) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_{sh} \operatorname{tg}((1-\sigma)\theta_{sh1}^{(M)}) \operatorname{tg}(\beta_{sh}(1-\sigma)\theta_{sh1}^{(M)}) - 1}{\operatorname{tg}((1-\sigma)\theta_{sh1}^{(M)}) + \alpha_{sh} \operatorname{tg}(\beta_{sh}(1-\sigma)\theta_{sh1}^{(M)})} \\ &= \pm \frac{\alpha_{sh} \operatorname{tg}((1+\sigma)\theta_{sh1}^{(M)}) \operatorname{tg}(\beta_{sh}(1+\sigma)\theta_{sh1}^{(M)}) - 1}{\operatorname{tg}((1+\sigma)\theta_{sh1}^{(M)}) + \alpha_{sh} \operatorname{tg}(\beta_{sh}(1+\sigma)\theta_{sh1}^{(M)})} \end{aligned} \quad (471)$$

O desenvolvimento algébrico extensivo da eq. (471), auxiliado pelas fórmulas de prostaférese, conduz a

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(2\sigma\theta_{sh1}^{(M)}) = \frac{-2\alpha_{sh} \operatorname{sen}(2\beta_{sh}\sigma\theta_{sh1}^{(M)})}{(1-\alpha_{sh}^2) \cos(2\beta_{sh}\theta_{sh1}^{(M)}) + (1+\alpha_{sh}^2) \cos(2\beta_{sh}\sigma\theta_{sh1}^{(M)})}, \text{ situação 1} \\ \operatorname{tg}(2\theta_{sh1}^{(M)}) = \frac{-2\alpha_{sh} \operatorname{sen}(2\beta_{sh}\theta_{sh1}^{(M)})}{(1-\alpha_{sh}^2) \cos(2\beta_{sh}\sigma\theta_{sh1}^{(M)}) + (1+\alpha_{sh}^2) \cos(2\beta_{sh}\theta_{sh1}^{(M)})}, \text{ situação 2} \end{cases} \quad (472)$$

A partir da eq. (469) com o auxílio das eq. (53), (66), (69), (394), (429), (431) e (435), pode-se obter a expressão para calcular Z_{sh1} :

$$Z_{sh1} = Z_T \frac{\operatorname{tg}\left(2(1-\sigma)\theta_T^{(M)}\right)}{2} \frac{\alpha_{sh} \operatorname{tg}\left((1-\sigma)\theta_{sh1}^{(M)}\right) \operatorname{tg}\left(\beta_{sh}(1-\sigma)\theta_{sh1}^{(M)}\right) - 1}{\operatorname{tg}\left((1-\sigma)\theta_{sh1}^{(M)}\right) + \alpha_{sh} \operatorname{tg}\left(\beta_{sh}(1-\sigma)\theta_{sh1}^{(M)}\right)} \quad (473)$$

As eq. (472) e (473) são arranjadas na Tabela 10 de forma separada para cada tipo de resposta do acoplador.