JULIANO DOS SANTOS GONSCHOROWSKI

**PROCESSAMENTO DE SINAIS E RECONHECIMENTO DE PADRÕES
DE RESPOSTA DE SENSORES DE GASES ATRAVÉS DA
GEOMETRIA FRACTAL**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do Título de Mestre
em Engenharia Elétrica

São Paulo
2007

JULIANO DOS SANTOS GONSCHOROWSKI

**PROCESSAMENTO DE SINAIS E RECONHECIMENTO DE PADRÕES
DE RESPOSTA DE SENSORES DE GASES ATRAVÉS DA
GEOMETRIA FRACTAL**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do Título de Mestre em
Engenharia Elétrica

Área de Concentração:
Microeletrônica

Orientador:
Prof. Dr. Walter Jaimes Salcedo

São Paulo
2007

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 29 de abril de 2007.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Gonschorowski, Juliano dos Santos

Processamento de sinais e reconhecimento de padrões de resposta de sensores de gases através da geometria fractal/ J. dos S. Gonschorowski. -- ed. rev. -- São Paulo, 2007. 99 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos.

1.Reconhecimento de padrões 2.Sensores 3.Geometria fractal 4.Movimento browniano fracionário 5.Sistemas de funções iteradas parciais I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos II.t.

Dedico este trabalho aos meus pais Lourival
e Marlene e a minha noiva Graciele.

AGRADECIMENTOS

Agradeço...

... ao meu orientador e amigo Prof. Dr. Walter Jaimes Salcedo e sua família que me recebeu cordialmente em sua casa e me apoiou desde os tempos de graduação;

... aos meus pais Lourival e Marlene que sempre compartilharam momentos alegres e tristes de minha vida e me deram condições e me incentivaram a prosseguir estudando, mesmo estando longe;

...à minha noiva Graciele que sempre de maneira companheira e afetiva esteve presente ao meu lado, me apoiando em todos os momentos;

...aos meus amigos de laboratório Mauro e German por me cederem os dados utilizados para as validações das metodologias propostas neste trabalho;

... aos demais colegas Rodrigo, Gustavo, Daniel, Adriana, Danilo e Aldo pela amizade e por dividirem as alegrias e as tristezas do cotidiano;

...aos meus orientadores de iniciação científica Maria Cecília, Lorena e Marcos por participarem do começo da minha vida acadêmica;

... a todos aqueles que contribuíram, direta ou indiretamente para a realização deste trabalho;

Obrigado a todos.

RESUMO

O objetivo do presente trabalho foi propor métodos de processamento de sinais e reconhecimento de padrões dos sinais de respostas de sensores de gás, utilizando técnicas e modelos da geometria fractal.

Foram analisados e estudados os sinais de resposta de dois tipos de sensores. O primeiro sensor foi um dispositivo de óxido de estanho, cujo princípio de funcionamento baseia-se na mudança da resistividade do filme. Este forneceu sinais de respostas com características ruidosas como resposta à interação com as moléculas de gás. O segundo sensor foi um dispositivo Metal-Óxido-Semicondutor (MOS) com princípio de funcionamento baseado na geração de foto corrente, fornecendo respostas imagens bidimensionais.

Para as análises dos sinais ruidosos do sensor de óxido de estanho, foi proposto um método de processamento baseado no modelo do movimento Browniano fracionário. Com este método foi possível a discriminação de gases combustíveis com uma taxa de acerto igual a 100%.

Para as análises das respostas do tipo imagem do sensor MOS, foram propostos dois diferentes métodos. O primeiro foi embasado no princípio de compressão fractal de imagens e o segundo método proposto, foi baseado na análise e determinação da dimensão fractal multiescala. Ambos os métodos propostos mostram-se eficazes para a determinação da assinatura, como o reconhecimento, de todos os gases que foram utilizados nos experimentos.

Os resultados obtidos no presente trabalho abrem novas fronteiras e perspectivas nos paradigmas de processamento de sinais e reconhecimento de padrões, quando utilizada a teoria da geometria fractal.

ABSTRACT

The aim of the present work was to propose methods for signal processing and pattern recognition from the signals response of gas sensors using models and techniques from the fractal geometry. The data studied and analyzed were obtained from two kinds of sensors. The first sensor was the tin oxide device, which detection principle is based on the resistivity changes of the tin oxide film and it provides noisy signals as response to the gas interaction. The second sensor was a metal-oxide-semiconductor (MOS) device, which has as the working principle the photocurrent generation. This sensor provides two-dimensional images signals. A method using a fractional Brownian motion was proposed to analyze the noise signal from the tin oxide device. The fuel gases discrimination employing this model was 100% successful.

Two different methods were proposed to analyze the signal response from the MOS device. The first method was based on the fractal image compression technique and the second one was based on the analysis and determination of the multiscale fractal dimension. Both proposed methods have shown to be efficient tools for signature determination as the pattern recognition of all gases that were used in the experiment.

The results obtained in the present work open new frontiers and perspectives inside the paradigms of the signal processing and pattern recognition by using the fractal theory.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO

1. Introdução	02
1.1. Motivação	06
1.2. Objetivos.....	06
1.3. Organização do Texto	06

CAPÍTULO 2. DIMENSÃO TOPOLÓGICA

2. Dimensão Topológica	09
2.1. Dimensões Topológicas Indutivas	10
2.2. Dimensão de Cobrimento	12
2.3. Dimensão de Equação	13
2.4. Mapas em Esferas.....	15
2.5. Conclusões.....	16

CAPÍTULO 3. TEORIA DA MEDIDA

3. Teoria da Medida	18
3.1. Teoria da Medida: Definições e Teoremas.....	18
3.2. Gerando Medidas Exteriores	24
3.2.1. Método I	24
3.2.2. Método II.....	27
3.3. Conclusões.....	28

CAPÍTULO 4. FRACTAIS

4. Fractais	30
4.1. Medida de Hausdorff	30
4.2. Dimensão de Hausdorff	31
4.3. Dimensão de Hausdorff vs. Dimensão Topológica	31

4.4. Índices de Entropia	32
4.5. Métodos Computacionais para Estimar a Dimensão Fractal	34
4.5.1. Aproximação por mínimos quadrados	34
4.5.2. Método: “Walking Divider”	35
4.5.3. Método: “Box Counting”	36
4.5.4. Método: “Prism Counting”	37
4.5.5. Método: “Epsilon-Blanket”	37
4.5.6. Método: Relação Área-Perímetro	38
4.5.7. Dimensão Fractal Multiescala	38
4.6. Conclusões.....	39

CAPÍTULO 5. SISTEMAS DE FUNÇÕES ITERADAS

5. Sistemas de Funções Iteradas	41
5.1. Sistemas de Funções Iteradas com probabilidade.....	41
5.2. Compressão de Imagens	46
5.2.1. Sistemas de Funções Iteradas Recorrentes	46
5.2.2. Sistemas de Funções Iteradas Parciais	46
5.3. Conclusões.....	48

CAPÍTULO 6. FUNÇÕES FRACTAIS

6. Funções Fractais	50
6.1. O operador de Read-Bajcterovick	50
6.2. Funções de Interpolação Fractal.....	54
6.3. Função de Weierstrass	56
6.4. Conclusões.....	57

CAPÍTULO 7. FRACTAIS ALEATÓRIOS

7. Fractais Aleatórios.....	59
7.1. Movimento Browniano	59
7.2. Movimento Browniano Fracionário	62
7.3. Superfície Browniana Fracionária.....	63
7.4. Conclusões.....	65

CAPÍTULO 8. RESULTADOS

8. Resultados	67
8.1. Sensor de gás de óxido de estanho	67
8.1.1. Aquisição dos Dados.....	67
8.1.2. Extração de Características.....	69
8.2. Sensor tipo MOS.....	77
8.2.1. Aquisição dos Dados.....	77
8.2.2. Metodologia para Extração de Caract. a partir de imagens	79
8.2.2.1. Validação dos Algoritmos utilizados para o cálculo da Dimensão Fractal.....	79
8.2.2.2. Validação dos Algoritmos de sistemas de funções iteradas aplicadas na compressão de imagens	83
8.2.2.3. Validação do algoritmo de cálculo da dimensão fractal pelo método “box counting 3D” e sua aplicação na análise da resposta do sensor MOS	91
8.3. Conclusões Gerais.....	94
9. BIBLIOGRAFIA	96

LISTA DE FIGURAS

Capítulo 1

Figura 1.1	Exemplos de fractais	05
Figura 1.2	Aplicações da geometria fractal em computação gráfica	05

Capítulo 2

Figura 2.1	Curva de Hilbert.....	09
Figura 2.2	Diferentes formas de coberturas para uma mesma curva	12

Capítulo 4

Figura 4.1	Gráfico de H^s por s , onde s_0 é a dimensão fractal.	31
Figura 4.2	Retas homeomórfas que não possuem a mesma dimensão fractal	32
Figura 4.3	Exemplo de duas texturas com dimensões fractais iguais.	32
Figura 4.4	Método “Walking-Divider”	36
Figura 4.5	Algoritmo “Box Counting”	36
Figura 4.6	Algoritmo “Prism Counting”	37

Capítulo 5

Figura 5.1	Representação geométrica da métrica de Hausdorff.....	42
Figura 5.2.	Conjunto de Cantor	43
Figura 5.3.	Triângulo de Sierpinski 3D	43

Capítulo 6

Figura 6.1	Gráfico da função fractal do exemplo 6.1	53
Figura 6.2	Gráfico da função fractal do exemplo 6.2.....	54
Figura 6.3	Função fractal de interpolação	55

Capítulo 7

Figura 7.1	Superfícies Brownianas	65
------------	------------------------------	----

Capítulo 8

Figura 8.1	Diagrama elétrico do sistema de medida	67
Figura 8.2	Sinais de resposta do sensor de óxido de estanho após ser submetido a injeção de diferentes gases	68

Figura 8.3	Gráficos da equação (8.1) variando suas dimensões fractais.....	70
Figura 8.4	Superfície de erros para uma dada substância	71
Figura 8.5	Curvas de erros em função do parâmetro α para diferentes λ fixos da superfície 8.4	71
Figura 8.6	Variáveis aleatórias aproximadas pelo método dos mínimos quadrados	73
Figura 8.7	Espectros das variáveis aleatórias com frequência em escala linear	74
Figura 8.8	Espectros das variáveis aleatórias com frequência em escala logarítmica ...	75
Figura 8.9	Gráfico da amplitude em função da frequência correspondente aos espectros mostrados nas figuras 8.7 e 8.8 respectivamente.....	76
Figura 8.10	Aparato experimental para a aquisição de imagens olfativas	78
Figura 8.11.	Técnica de Escaneamento por luz pulsada (FILIPPINI; LUNDSTRÖM, 2003).....	78
Figura 8.12	Imagens olfativas obtidas pelo sensor MOS (Braga, 2006).....	79
Figura 8.13	Gráfico da equação (8.2) com diferentes dimensões	80
Figura 8.14	Dimensão fractal pelo método “Walking-Divider”	81
Figura 8.15	Dimensão fractal pelo método “Box-counting”	82
Figura 8.16	Figuras comumente utilizadas em processamento de imagens.....	84
Figura 8.17	Principais parâmetros do sistema de funções iteradas parciais.....	85
Figura 8.18	Aproximação por sistemas de funções iteradas parciais da Fig. 8.16 (a)	86
Figura 8.19	Principais parâmetros do sistema de funções iteradas parciais.....	87
Figura 8.20	Aproximação por sistemas de funções iteradas parciais da figura 8.16 (b)...	88
Figura 8.21	Matrizes vetoriais dos parâmetros da equação (8.3).....	89
Figura 8.22	Matrizes vetoriais dos parâmetros da equação (8.3).....	90
Figura 8.23	Superfícies Brownianas com dimensão fractal conhecida.....	91
Figura 8.24	(a) Gráfico do sinal de resposta do sensor MOS submetido a ambiente de gás de nitrogênio (b) Curva da dimensão multiescala fractal obtida da superfície do sinal de resposta do sensor.....	93
Figura 8.25	(a) Gráfico do sinal de resposta do sensor MOS submetido a ambiente de gás de hidrogênio. (b) Curva da dimensão multiescala fractal obtida da superfície do sinal de resposta do sensor.....	93
Figura 8.26	(a) Gráfico das curvas da dimensão fractal multiescala correspondente aos sinais de resposta do sensor para o gás de hidrogênio e nitrogênio respectivamente. (b) gráfico dos coeficientes dos polinômios de ajuste das curvas de (a)	94

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 8

Tabela 8.1	Tabela com os melhores valores de alfa e lambda.....	72
Tabela 8.2	Erro do algoritmo “Walking-Divider”.....	81
Tabela 8.3	Erro do algoritmo “Box-Couting”.	83
Tabela 8.4	Valores teóricos da dimensão fractal das superfícies das Figuras 8.23 (a) – (e) e valores computacionais utilizando-se o algoritmo “Box-Couting”.....	92

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{P}(X)$		espaço das medidas de probabilidade em X
$\mathfrak{L}(E, \overline{\mathbb{R}})$		conjunto das funções semicontínuas inferiormente $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
$\mathfrak{U}(E, \overline{\mathbb{R}})$		conjunto das funções semicontínuas superiormente $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
$eq(X)$		dimensão topológica de equação do espaço X
$ord(\mathfrak{Y})$		ordem da cobertura $\mathfrak{Y}$
$ind(X)$		dimensão topológica indutiva pequena do espaço X
$Ind(X)$		dimensão topológica indutiva grande do espaço X
$Cob(X)$		dimensão topológica de cobrimento do espaço X
IFS		sistema de funções iteradas (ou iterativas)
Y^X		conjunto das funções $f: X \rightarrow Y$
$\ f\ _p$		norma do espaço $L^p(\mathbb{R})$
$C_{\mathbb{F}}(X)$		espaço das funções contínuas $f: X \rightarrow \mathbb{F}$
$\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}(X)$		espaço das medidas $\mu: \mathfrak{N}_{\mathbb{F}}(X) \rightarrow \mathbb{F}$
$\mathfrak{N}_{\mathbb{F}}(X)$		subespaço de $C_{\mathbb{F}}(X)$ formado pelas funções de suporte compacto
X^*		dual de X
X^{**}		dual de X^*
$x_n \xrightarrow{w} x$		convergência fraca da sequência (x_n) para x
$x_n \xrightarrow{w^*} x$		convergência fraca [*] da sequência (x_n) para x
$\overline{\mu}$		medida exterior
$\underline{\mu}$		medida interior
$\overline{L}(A)$		medida exterior de Lebesgue
$\underline{L}(A)$		medida interior de Lebesgue
$d_X(x, y)$		métrica do espaço X
$\mathfrak{h}(A, B)$		métrica de Hausdorff
$\mathfrak{K}(X)$		subconjuntos compactos e não vazios de X
$diam(A)$		diâmetro do conjunto A
$\dim_{H^s}(F)$		dimensão de Hausdorff de F
$\dim_{box}(F)$		dimensão Box-Counting de F
$\dim_{walk}(F)$		dimensão Walking-divider de F
$\dim_{area}(F)$		dimensão Área-Perímetro de F
$\dim_{prism}(F)$		dimensão Prism-Counting de F
$\overline{H}^s(A)$		medida exterior ^s - dimensional de Hausdorff de A

$H^s(A)$ medida s -dimensional de Hausdorff de A
 $Lip^{(<1)}(X)$ funções $f: X \rightarrow X$ tal que são Lipschitz com constante de Lipschitz $c < 1$
 $B(X, Y)$ espaço completo das funções $f: X \rightarrow Y$ contínuas e limitadas munido com a norma do sup.
 $\mathcal{F}(X, Y)$ espaço das funções fractais munido com a norma do sup.
 $L^p(\mathbb{R})$ espaços de Lebesgue

CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO

1. Introdução

A solução de problemas complexos exige uma grande quantidade de conhecimento e também a manipulação desse conhecimento, a fim de criar soluções para os mesmos. Para definir um problema é necessário incluir especificações precisas sobre qual será a situação ou situações iniciais e sobre quais situações finais serão consideradas soluções aceitáveis. Existe também a necessidade de uma análise detalhada do problema, pois poucas características importantes podem ter enorme impacto sobre as possíveis técnicas para a solução do mesmo. O reconhecimento de padrões é a ciência que busca resolver o problema de identificar objetos físicos ou matemáticos através de estruturas extraídas destes.

Reconhecimento de padrões (KOHN, 1998) é, por natureza, inexata, e assim admite muitas abordagens para aproximar, indicar ou encontrar soluções de um dado problema. A primeira explicação de um fato ou entendimento de um acontecimento novo está sempre ligada aos padrões do mesmo. Em problemas complexos de reconhecimento de padrões, a abordagem comum utilizada é a de dividir o problema em dois módulos: a extração de características e a classificação. Tanto para o primeiro como para o segundo módulo já existem várias técnicas desenvolvidas que vão desde técnicas estatísticas e matemáticas até técnicas de Inteligência Artificial (PLAMONDON; LORETTE, 1989).

O objetivo principal na teoria de reconhecimento de padrões é obter uma boa classificação. Para isso é necessário um conjunto de características que melhor descreva o padrão a ser analisado. Um passo intermediário, que nem sempre é necessário, é a redução da dimensionalidade do espaço dos padrões. A redução de dimensionalidade pode ser efetuada com três objetivos distintos: reduzir ruídos, extrair informações redundantes, e/ou simplesmente reduzir a dimensão para tornar o reconhecimento viável computacionalmente (PLAMONDON; LORETTE, 1989).

Com uma extração de características inadequada ou ineficiente, os algoritmos de classificação necessariamente serão menos eficientes e os erros de classificação aumentarão. A grande questão para realizar a extração é decidir o quanto estas características são importantes no processo de reconhecimento.

Das possíveis aplicações dos sistemas de reconhecimento de padrões podemos citar:

Processamento de Documentos:

- Reconhecimento de caracteres e assinaturas;

- Leitores de códigos de barras;
- Introdução automática de texto em documentos de processamento de texto;
- Análise de documentos financeiros.

Automação industrial:

- Inspeção de circuitos impressos;
- Inspeção de partes de máquinas;
- Processamento de imagem;
- Visão por computador.

Detecção remota:

- Previsão da evolução de culturas;
- Planejamento de uso de terras;
- Monitorização ambiental;
- Meteorologia.

Medicina e Biologia:

- Detecção de tumores em imagens de Raios-X;
- Caracterização de tecidos usando ultra-sons;
- Análise de imagens de cromossomos;
- Interpretação de eletrocardiogramas/eletroencefalogramas.

Identificação de Pessoas:

- Reconhecimento de voz;
- Identificação de impressões digitais;
- Reconhecimento de assinaturas;
- Reconhecimento de faces.

Aplicações Científicas:

- Interpretação de ondas sísmicas para previsão de terremotos;
- Análise de composição molecular através de imagens de microscópio eletrônico.

Para o reconhecimento de respostas provenientes de sensores de gases, é possível trabalhar com sinais unidimensionais como curvas I por V (corrente por tensão), ou multidimensionais

como, por exemplo, imagens olfativas geradas por sensores de gases utilizando técnicas de escaneamento por luz pulsada (MIZSEI, 2003; BRAGA, 2006). Assim, deve-se escolher um procedimento que extraia as características que melhor representam os dados, as mais comuns são: transformadas wavelets (MORETIN, 1999; DAUBESCHIES, 1992), Fourier (CHENG; CHEN, 2006), princípios de máxima entropia (QUISPE, 2005; GRAY, 1990), análise de componentes principais (JOLLIFFE, 1986), medidas estatísticas (LECLERC, PLAMONDON, 1994), modelos markovianos (PLÖTZ; FINK, 2006; SÁNCHEZ, 2001), etc.

Além da escolha da metodologia que melhor se adapta aos dados, alguns sinais são filtrados para obter uma melhor taxa de reconhecimento (ADJEROH et. al., 2006). Porém nos últimos anos a comunidade científica tem dado maior atenção ao ruído, que pode fornecer uma boa extração de características com alta sensibilidade e seletividade, como reportado na literatura para sensores de pressão, gás e outros (DRAI; BENAMMAR; BENCHALA, 2004; VIDYBIDA, 2003; DAROWICKI; ZIELINSKI, 2001).

Dentre as possibilidades de metodologias para reconhecimento de padrões, a geometria fractal se destaca com bons resultados (BOHES; SENEVIRATHNE, 2001; TANG; TAO, 2002). Esta teoria apareceu primitivamente quando os matemáticos começaram a se deparar com conjuntos e funções cujos métodos do cálculo tradicional não poderiam ser aplicados. Esses conjuntos e funções que não eram suficientemente suaves ou regulares eram tidos como patológicos e assim, pouco estudados. Mesmo assim, em 1900 estas aberrações acabaram despertando a necessidade de uma formalização de conceitos, até então entendidos intuitivamente como a dimensão topológica. A partir de 1975, com os trabalhos de Manderbrot, esta geometria surgiu completamente como mais um ramo da matemática, e simultaneamente aconteceu um rápido crescimento do número de publicações com diversas aplicações. Isto se deu, em parte, a sua propriedade de modelar com maior fidelidade os fenômenos naturais (MANDELBROT, 1983).

Não é coincidência que o crescente aumento de interesse na geometria fractal tenha ocorrido em meados de 1980. Nesta época, ocorreram rápidos avanços em computação gráfica e visualização científica. A popularização desta geometria é um exemplo de como uma ferramenta (o computador) pode ajudar no desenvolvimento de uma teoria matemática. Nas Figuras 1.1 (a) - (c) são mostrados exemplos da complexidade geométrica dos conjuntos

fractais e nas Figuras 1.2 (a) e (b) é possível observar exemplos de fractais utilizados para aplicações em jogos e filmes através da computação gráfica.

Figura 1.1 - Exemplos de fractais

Figura 1.2 - Aplicações da geometria fractal em computação gráfica

1.1. Motivação

A preservação ambiental do planeta é uma necessidade cada vez maior em face da escala crescente de poluição e degradação dos recursos naturais com as quais o homem tem que conviver quando busca o desenvolvimento econômico e industrial da civilização. Os principais agentes responsáveis por essa destruição ambiental são os produtos químicos, que estão tendo sua elaboração, fabricação e aplicação crescendo de maneira desordenada, principalmente nas últimas décadas.

Desta maneira, vários órgãos de controle e proteção ambiental vêm cobrando mecanismos rápidos e eficientes para a redução de contaminações (MEIXNER et. al., 1993; GRABER et. al., 1990); e em vários países têm surgido novas legislações preocupadas em minimizar os danos ambientais praticados por pessoas e empresas que manipulam materiais químicos.

Os inspetores responsáveis pela fiscalização, assim como as próprias empresas, utilizam sensores como grandes aliados para a identificação e o monitoramento de gases e substâncias. Porém, nem sempre os sistemas de controle baseados em sensores são economicamente ou tecnicamente acessíveis a todos aqueles que pretendem supervisionar seus processos. Assim, a simplicidade, o baixo custo e a precisão dos sistemas são fundamentais para a difusão destas metodologias, assegurando um desenvolvimento sustentável.

Dentro deste quadro, o reconhecimento de padrões surge como uma peça determinante para a eficácia e a minimização do custo dos sistemas identificadores de substâncias químicas baseados em sensores.

1.2. Objetivo

O objetivo deste trabalho foi o processamento de sinais e reconhecimento de padrões que permitam extrações de características que possam diferenciar respostas provenientes de sensores de gases. Para isto, foram propostos métodos utilizando o modelo movimento Browniano fracionário, técnicas de compressão fractal de imagens por sistemas de funções iteradas parciais e dimensão fractal multiescala.

1.3. A Organização do Texto

No segundo e no terceiro capítulos são apresentados alguns resultados da teoria da dimensão e da teoria da medida para que, no quarto capítulo, sejam introduzidos os conceitos de

geometria fractal. No quinto e sexto capítulos foram estudados a geometria fractal do ponto de vista de auto-similaridade através de sistemas de funções iteradas, e funções fractais para poder gerar superfícies fractais aplicadas em compressão de imagens. No sétimo capítulo, a função fractal de Weierstrass, que é descrita no capítulo anterior, é utilizada para modelar o movimento Browniano fracionário que é uma generalização do movimento Browniano comum. Finalmente, no oitavo capítulo, são descritos os resultados obtidos a respeito da extração de características através de técnicas fractais para o reconhecimento de substâncias detectadas por sensores de gases.

CAPÍTULO 2. DIMENSÃO TOPOLÓGICA

2. Dimensão Topológica

No desenvolvimento da topologia, matemáticos procuraram por aspectos qualitativos que não mudassem quando objetos fossem adequadamente transformados (por um homeomorfismo). A dimensão topológica de um conjunto certamente deveria ser preservada.

Em 1878, Cantor (PEITGEN, JÜRGENS, DIETMAR, 1992) encontrou uma transformação $f:[0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$ que era bijetora, então supostamente seria necessário apenas de um parâmetro para descrever os pontos de um quadrado, mas a transformação de Cantor não era contínua, portanto não era um homeomorfismo.

Mas então apareceram as construções de Peano para preenchimento do quadrado e mais tarde, Hilbert (PEITGEN, JÜRGENS, DIETMAR, 1992) com uma transformação contínua $g:[0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$ (Figura 2.1), porém estas transformações não eram injetoras.

Figura 2.1 - Curva de Hilbert (PEITGEN, JÜRGENS, DIETMAR, 1992)

Isto levantou a questão – existe ou não existe uma transformação bijetora contínua com inversa contínua de $[0,1]$ em $[0,1] \times [0,1]$? Ou mais, existe um homeomorfismo entre o cubo unitário n -dimensional $I^n = [0,1]^n$ e o cubo unitário m -dimensional $I^m = [0,1]^m$ com $m \neq n$? Se existisse tal transformação os matemáticos estariam em apuros, pois a idéia de invariância topológica para dimensão estaria errada.

Entre 1890 e 1910 diversas provas apareceram mostrando que I^m e I^n não eram homeomórfos quando $m \neq n$, mas os argumentos não eram completos. Foi o matemático

alemão Brouwer que terminou esta crise em 1911 com uma prova muito elegante segundo (EDGAR, 1990).

Durante o século XX, matemáticos apareceram com diferentes definições de dimensão topológica para acabar com possíveis problemas, entre elas dimensão indutiva pequena, dimensão indutiva grande, dimensão de cobrimento, etc.

Neste capítulo são introduzidas algumas destas definições de dimensões para que, nos capítulos seguintes, seja possível fazer comparativos entre a dimensão topológica e a dimensão fractal. As provas dos teoremas apresentadas aqui, assim como a teoria da dimensão com maiores detalhes, podem ser encontradas em (KURATOWSKI, 1978).

2.1. Dimensões Topológicas Indutivas

Para introduzir as várias dimensões topológicas são necessários alguns conceitos topológicos, informações adicionais podem ser encontradas em (LIPSCHUTZ, 1971):

Definição 2.1: Um espaço topológico X é dito um espaço separável se ele possui um subconjunto denso contável.

Definição 2.2: Um espaço topológico X é um espaço- T_1 se, e só se, satisfaz o seguinte axioma: *Axioma T_1* : Dado um par de pontos distintos $a, b \in X$, $\exists G$ e H abertos tais que

$$a \in G, b \notin G \text{ e } b \in H, a \notin H.$$

Definição 2.3: Um espaço topológico X é um espaço- T_2 ou espaço de Hausdorff se, e só se, satisfaz o axioma seguinte: *Axioma T_2* : Dado um par de pontos distintos $a, b \in X$, $\exists G$ e H abertos tais que

$$a \in G, b \in H \text{ e } G \cap H = \emptyset.$$

Definição 2.4: Um espaço topológico T_1 X é chamado T_1 -regular se, e só se, satisfaz o seguinte axioma: *Axioma T_1 -R*: Se F é um subconjunto fechado de X , e se $p \in X$ e $p \notin F$ então existem abertos disjuntos G e H tais que $F \subset G$ e $p \in H$.

Definição 2.5: Um espaço topológico T_1 X é chamado T_1 -normal se, e só se, satisfaz o seguinte axioma: *Axioma T_1 -N*: Se F_1 e F_2 são fechados disjuntos de X , então existem abertos disjuntos G e H tais que $F_1 \subset G$ e $F_2 \subset H$.

Agora dado X um espaço T_1 -regular, a dimensão indutiva pequena de X denotada por $ind(X)$ é definida indutivamente por:

Definição 2.6:

- i) $ind(X) = -1 \Leftrightarrow X = \emptyset$;
- ii) $ind(X) \leq n$, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se e só se, $\forall x \in X$ e para cada vizinhança V_x de x existe um conjunto aberto G tal que:

$$x \in V_x \subseteq G, \text{ e } ind(\partial G) \leq n-1;$$
- iii) $ind(X) = n \Leftrightarrow$ a desigualdade $ind(X) < n$ não acontece;
- iv) $ind(X) = \infty \Leftrightarrow ind(X) \geq n \forall n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$.

Seja X um espaço T_1 -normal, a dimensão indutiva grande de X denotada por $Ind(X)$ é definida indutivamente por:

Definição 2.7:

- i) $Ind(X) = -1 \Leftrightarrow X = \emptyset$;
- ii) $Ind(X) \leq n$, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se e só se, $\forall A, B$ conjuntos disjuntos de X existe um conjunto $F \subseteq X$, tal que existem dois conjuntos abertos disjuntos $M, N \subseteq X$ com $A \subseteq M$, $B \subseteq N$ onde

$$F = X \setminus (M \cup N), \text{ e } Ind(F) \leq n-1;$$
- iii) $Ind(X) = n \Leftrightarrow$ a desigualdade $Ind(X) < n$ não acontece;
- iv) $Ind(X) = \infty \Leftrightarrow Ind(X) \geq n \forall n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$.

As dimensões indutiva pequena e grande são propriedades topológicas, isto é:

Teorema 2.1: Dados dois espaços X e Y T_1 -regulares respectivamente, T_1 -normais homeomórfos, então $ind(X) = ind(Y)$ e $Ind(X) = Ind(Y)$ respectivamente.

Teorema 2.2 (Produto Cartesiano): Suponha X_1 e X_2 são espaços topológicos metrizáveis e separáveis com pelo menos um deles diferente do vazio. Então:

- i) $ind(X_1 \times X_2) \leq ind(X_1) + ind(X_2)$;
- ii) $Ind(X_1 \times X_2) \leq Ind(X_1) + Ind(X_2)$.

O próximo teorema justifica a terminologia “indutiva grande” e “indutiva pequena”.

Teorema 2.3: Se $(X, \mathfrak{T})$ é um espaço topológico T_1 -normal, então $ind(X) \leq Ind(X)$.

Teorema 2.4: Se $(X, \mathfrak{T})$ é um espaço topológico metrizável e separável, então $ind(X) = Ind(X)$.

2.2. Dimensão de Cobrimento

A idéia por trás do conceito de invariante topológico é atribuída a Lebesgue (EDGAR, 1993) que fez a seguinte observação: considere uma curva no plano (Figura 2.2), e uma cobertura formada por discos de raios pequenos. As formas de cobrir a curva podem variar, mas qual a diferença?

Figura 2.2 - Diferentes formas de coberturas para um mesma curva

Na parte direita da Figura 2.2 podem-se encontrar apenas pares de discos que tenham intersecção não vazia, enquanto que no centro e na parte esquerda podem-se encontrar triplas e quádruplas de círculos que possuem intersecção não vazia. Esta é a observação crucial que leva a definição. Diz-se que a curva tem dimensão de cobrimento um, porque é possível conseguir uma cobertura com discos de raios pequenos, que possuem somente pares de discos

com intersecção não vazia, e não há possibilidade de conseguir outra cobertura com discos que possuam menos intersecção que isso. De maneira mais geral:

Definição 2.8: Suponha que $(X, \mathfrak{T})$ é um espaço topológico e que $\mathfrak{U}$ é uma classe de subconjuntos do conjunto de pontos X . Seja $x \in X$, a ordem de $\mathfrak{U}$ em x é o número $ord_x(\mathfrak{U})$, que representa o número de elementos de $\mathfrak{U}$ que contém x . A ordem de $\mathfrak{U}$ é então definida como:

$$ord(\mathfrak{U}) = \sup \{ ord_x(\mathfrak{U}) \mid x \in X \}.$$

Definição 2.9: Suponha que para toda cobertura finita $\mathfrak{U}$ de um espaço topológico T_1 -normal existe uma cobertura $\mathfrak{B}$ tal que:

$$\mathfrak{B} < \mathfrak{U}, \text{ e } ord(\mathfrak{B}) \leq n + 1.$$

Então X é dito ter dimensão de cobrimento $Cob(X) \leq n$.

O espaço $(X, \mathfrak{T})$ tem dimensão de cobrimento n , se não acontece $Cob(X) < n$, ou seja $\exists \mathfrak{U}$ cobertura finita de X , tal que não é possível encontrar uma cobertura $\mathfrak{B}$ tal que:

$$\mathfrak{B} < \mathfrak{U}, \text{ e } ord(\mathfrak{B}) \leq n.$$

Se a desigualdade $Cob(X) \leq n$ é falsa $\forall n \in \mathbb{N}$, então $Cob(X) = \infty$, e $Cob(\emptyset) = -1$.

Obs: A notação $\mathfrak{B} < \mathfrak{U}$ significa que a cobertura $\mathfrak{B}$ é um refinamento da cobertura $\mathfrak{U}$, isto é, $\mathfrak{B} < \mathfrak{U} \Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{U} \exists B \in \mathfrak{B} : B \subseteq U$.

Teorema 2.5: Seja $(X, \mathfrak{T})$ um espaço topológico metrizável e separável então

$$Cob(X) = ind(X) = Ind(X).$$

2.3. Dimensão de Equação

Um dos mais importantes tópicos da álgebra linear é a solução de sistema de equações lineares. É possível encontrar sistemas que têm solução única, sistemas que não têm solução, sistemas com infinitas soluções, sistemas com mais variáveis do que equações sem solução, e é possível sistemas com mais equações do que variáveis com solução:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 2 \\x_1 + 2x_2 &= 3. \\x_1 - x_2 &= 0\end{aligned}$$

Neste sistema em particular $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ é solução, mas esta solução não é uma solução essencial, isto é, pequenas mudanças nas equações podem produzir um sistema sem solução

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 2,0001 \\x_1 + 2x_2 &= 2,9999. \\x_1 - x_2 &= 0\end{aligned}$$

De maneira mais geral uma equação contínua em n variáveis é uma equação da forma

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

onde $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Também se pode escrever $f(x) = 0$, e uma solução é um ponto $x \in \mathbb{R}^n$. Um sistema de m equações é da forma

$$f_i(x) = 0 \text{ com } i = 1, \dots, m,$$

onde as $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas dadas. Tipicamente, tal sistema possui infinitas soluções se $m < n$, nenhuma solução se $m > n$, e um número finito de soluções se $m = n$.

Um resultado importante da teoria da dimensão é que se $m > n$, é possível que o sistema $f_i(x) = 0$ possua uma solução. Mas esta solução não será uma solução essencial, isto significa que, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um sistema

$$g_i(x) = 0 \text{ com } i = 1, 2, \dots, m,$$

sem solução, porém $d(f_i, g_i) \leq \varepsilon, \forall i$. Também, se $m \leq n$, existe um sistema $f_i(x) = 0$ com $i = 1, \dots, m$ que tem solução essencial.

Agora se $\mathbb{R}^n$ for substituído pelo espaço métrico (S, d) , dado um sistema de equações da forma $f_i(x) = 0$ com $i = 1, \dots, m$ onde $f_i: S \rightarrow \mathbb{R}$, são funções contínuas. Dependendo do número de equações no sistema ele tem solução essencial. Se S se comportar como $\mathbb{R}^n$, então é possível considerar a dimensão de S sendo n . Mais precisamente:

Definição 2.10: A dimensão de equação de S , $eq(S)$, é o maior inteiro n tal que existe n funções contínuas $f_i: S \rightarrow \mathbb{R}$ com $i = 1, \dots, n$, para qual o sistema

$$f_i(x) = 0 \text{ com } i = 1, \dots, n,$$

tenha solução essencial.

Teorema 2.6: Para espaços métricos separáveis a dimensão de equação também coincide com as demais dimensões descritas anteriormente.

2.4. Mapas em Esferas

Esta dimensão possibilita caracterizar a dimensão de um espaço, através de mapas definidos em fechados do espaço em esferas com dimensões conhecidas.

Definição 2.10: Suponha um mapa definido de X em um espaço Y . Um ponto y de $f(X)$ é chamado valor instável de f se para todo positivo δ existe um mapeamento $g: X \rightarrow Y$ satisfazendo:

- i) $d(f(x), g(x)) < \delta$ para todo $x \in X$;
- ii) $g(X) \subset Y - \{y\}$.

Os demais pontos de $f(X)$ são chamados pontos estáveis de f .

Teorema 2.7: Seja X um espaço de dimensão menor ou igual a n e um mapa $f: X \rightarrow I_n$ (I_n cubo unitário n -dimensional $[0,1]^n$). Então todos os valores de f são instáveis.

Teorema 2.8: Seja X um espaço de dimensão maior ou igual a n . Existe um mapa $f: X \rightarrow I_n$ com ao menos um valor de f estável.

Teorema 2.9 (Extensão de Tietze): Suponha C é um subconjunto fechado de um espaço X e $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada por uma constante k . Então existe uma extensão $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ de f , tal que

$$|F(x)| \leq k.$$

Através do teorema 2.9 é possível escrever os teoremas 2.7 e 2.8 em termos de mapas em esferas.

Teorema 2.10: Um espaço X possui dimensão menor ou igual a n se e somente se, para cada conjunto fechado C e mapa $f : C \rightarrow S_n$ (S_n esfera unitária n -dimensional), existe uma extensão de f sobre X .

Através deste último teorema é possível caracterizar a dimensão de um espaço, através de mapas definidos em fechados, do espaço em esferas com dimensões conhecidas.

Segundo Hurewicz (HUREWICZ; WALLMAN, 1941), o teorema 2.10 também serve de base para um tratamento de topologia algébrica e combinatória sobre teoria da dimensão.

2.5. Conclusões

O conhecimento das dimensões topológicas e suas propriedades são necessárias para compreender a definição de um conjunto fractal e de fazer comparativos com a dimensão fracionária, também chamada de dimensão de Hausdorff.

Foram abordadas diferentes definições de dimensão topológica pois, dado um espaço topológico metrizável e separável (onde todas as definições de dimensões coincidem), pode-se utilizar não apenas uma metodologia para encontrar a dimensão, mas sim aquela que melhor se adapte ao problema. Além disso, estas diferentes definições descritas neste capítulo são importantes pois, caso se deseje mudar a topologia de um dado espaço, sua dimensão topológica pode mudar.

CAPÍTULO 3. TEORIA DA MEDIDA

3. Teoria da Medida

O principal parâmetro que caracteriza os fractais é a dimensão fractal, para defini-la é preciso conhecimento sobre a medida de Hausdorff. Desta forma neste capítulo é dado um resumo sobre teoria da medida, abordando os principais conceitos e teoremas.

Primeiramente as medidas são introduzidas como elementos de um dual de um espaço de funções, e posteriormente como funções de valores numéricos, definidas em certas estruturas (σ -álgebras). Os principais motivos destas abordagens são estudar a convergência fraca entre medidas na primeira, e utilizar certos teoremas de geração de medidas exteriores, para construir a medida de Hausdorff através da segunda.

3.1. Teoria da Medida: Definições e Teoremas

Definição 3.1: Um espaço topológico $(X, \mathfrak{T})$ é chamado localmente compacto, se todo ponto de X possui uma vizinhança compacta.

Seja X um espaço topológico metrizável e compacto. O conjunto de todas as funções contínuas $f : X \rightarrow \mathbb{F}$, (onde $\mathbb{F}$ é um corpo) munido com $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ é um espaço de Banach denotado por $C_{\mathbb{F}}(X)$. Uma medida μ em X é um elemento do dual de $C_{\mathbb{F}}(X)$, isto é, um funcional linear contínuo $f \mapsto \mu(f)$ em $C_{\mathbb{F}}(X)$ satisfazendo:

$$|\mu(f)| \leq a \|f\|,$$

para algum $a \in \mathbb{R}$ e para todo $f \in C_{\mathbb{F}}(X)$.

Agora seja X um espaço topológico metrizável, separável e localmente compacto. Denote por $\mathfrak{N}_{\mathbb{F}}(X)$ o subespaço de $C_{\mathbb{F}}(X)$ gerado pelas funções de suporte compacto $K \subseteq X$.

Definição 3.2: Uma medida em um espaço topológico X metrizável, separável e localmente compacto é um funcional linear μ agindo em $\mathfrak{N}_{\mathbb{F}}(X)$ com a propriedade que para cada compacto $K \subseteq X$, existe uma constante a_K , dependendo de K , tal que

$$\forall f \in \mathfrak{N}_{\mathbb{F}}(X) : |\mu(f)| \leq a_K \|f\|.$$

Ainda se μ e ν são medidas em X , e se $a \in \mathbb{F}$, então $\mu + \nu$ e $a\mu$ também são medidas em X . Então, a coleção de todas as medidas de X é um subespaço linear de $\mathbb{F}^{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}(X)}$ (espaço de todas as aplicações $f: \mathfrak{M}_{\mathbb{F}}(X) \rightarrow \mathbb{F}$). Este subespaço será denotado por $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}(X)$.

Definição 3.3: Dado um espaço topológico E , uma função $f: E \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ é chamada semicontínua inferiormente e escreve-se $f \in \mathcal{L}(E, \bar{\mathbb{R}})$ se, dado $x_0 \in E$ e $a \in \bar{\mathbb{R}}$ com $a < f(x_0)$, existe uma vizinhança V de x_0 , tal que $f(x) > a$ para todo $x \in V$. Uma função $f: E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é chamada semicontínua superiormente, e escreve-se $f \in \mathcal{A}(E, \bar{\mathbb{R}})$ se $-f \in \mathcal{L}(E, \bar{\mathbb{R}})$.

Seja X um espaço topológico metrizável, separável e localmente compacto. Seja $f \in \mathcal{L}(X, \bar{\mathbb{R}})$ tal que existe $g \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(X)$, tal que $g(x) \leq f(x)$, para todo $x \in X$, defina

$$\mu^*(f) = \sup_{g \leq f, g \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(X)} \mu(g).$$

Analogamente defina

$$\mu_*(f) = \inf_{g \geq f, g \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(X)} \mu(g).$$

Definição 3.4: Uma função $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é dita μ -integrável em X se, e somente se, $\mu_*(f) = \mu^*(f) < \infty$. Seu valor é chamado integral de f com relação a medida μ , e é denotado por $\int_X f d\mu$.

Agora seja X um espaço normado sobre $\mathbb{F}$ e X^* seu dual, então dado $\varepsilon > 0$ e $x_1^*, \dots, x_n^*$ um conjunto finito de elementos de X^* , é possível definir uma topologia em X como segue:

Para cada $x_0 \in X$ seja

$$V(x_0, \varepsilon)_{x_1^*, \dots, x_n^*} = \left\{ x \in X : \|x_i^*(x) - x_i^*(x_0)\| < \varepsilon, i = 1, \dots, n \right\},$$

uma base de vizinhanças.

Desta maneira é definida uma base para os abertos da topologia em X chamada topologia fraca.

Definição 3.5: Uma seqüência (x_n) em um espaço normado X , é dito fracamente convergente para $x \in X$, se para todo $x^* \in X^*$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^*(x_n) = x^*(x).$$

Esta convergência é escrita $x_n \xrightarrow{w} x$.

Definição 3.6: Uma seqüência (x_n) de um espaço normado X , é dita fortemente convergente (ou convergente na norma) se existe um $x \in X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Lema 3.1 (Convergência fraca): Seja (x_n) uma seqüência fracamente convergente em um espaço normado X , $x_n \xrightarrow{w} x$, então:

- i) O limite fraco x de (x_n) é único;
- ii) Toda subsequência de (x_n) converge fracamente para x ;
- iii) A seqüência $(\|x_n\|)$ é limitada.

Teorema 3.1: Seja (x_n) uma seqüência em um espaço normado X . Então:

- i) Convergência forte implica convergência fraca com o mesmo limite;
- ii) A volta de i) nem sempre é verdadeira;
- iii) Se a dimensão for finita, então convergência fraca implica convergência forte.

Seja X um espaço linear normado sobre $\mathbb{F}$ e seja X^* seu dual. O dual de X^* , X^{**} , é definido como sendo a coleção de todos os funcionais lineares contínuos $\Phi: X^* \rightarrow \mathbb{F}$,

$$\Phi(\varphi) = \varphi(x), \quad \varphi \in X^*.$$

De maneira análoga à construção da topologia fraca em X , é possível construir uma topologia fraca* em X^* definindo a base dos abertos de X^* pela vizinhanças:

$$V(x_0^*, \varepsilon)_{x_1, \dots, x_n} = \{x^* \in X \mid \|x^*(x_i) - x_0^*(x_i)\| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$$

onde $\varepsilon > 0$ e $x_1, \dots, x_n$ é um conjunto finito de elementos de X .

Definição 3.7: Seja (x_n^*) uma seqüência de funcionais lineares definidos em um espaço normado X , então é dito que a convergência fraca* de (x_n^*) para $x^* \in X^*$ se, e só se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^*(x) = x^*(x), \quad \forall x \in M \subseteq X, \text{ onde } M = X^{**}$$

Esta convergência é denotada por $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

O espaço das medidas de X em $\mathbb{F}$, denotado por $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}(X)$, é subespaço linear de $\mathbb{F}^{\mathfrak{N}_{\mathbb{F}}(X)}$ que pode ser munido com uma topologia fraca. Então uma seqüência (μ_n) de medidas em $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}(X)$, converge fracamente* para uma medida μ , se $\mu_n(f) \rightarrow \mu(f)$ em $\mathbb{F}$ para toda $f \in \mathfrak{N}_{\mathbb{F}}(X)$.

Este tipo de convergência entre medidas é utilizado nos próximos capítulos que tratam de sistema de funções iteradas. Agora a teoria de medida é descrita do ponto de vista de funções conjuntos (definidas em classes de conjuntos):

Definição 3.8: Uma coleção T de subconjuntos de um conjunto X é chamado σ -álgebra em X , se:

- i) $\emptyset, X \in T$;
- ii) se $A \in T$, então $X \setminus A \in T$;
- iii) se $A_1, A_2, \dots \in T$ então $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in T$.

Ainda, se $A_1, A_2, \dots \in T$, então $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in T$; se $A, B \in T$, então $A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in T$.

Teorema 3.2: Seja X um subconjunto, e seja D qualquer coleção de subconjuntos de X . Então existe T coleção de subconjuntos de X tal que

- i) T é σ -álgebra em X ;
- ii) $T \supseteq D$;
- iii) Se G é qualquer σ -álgebra em X com $G \supseteq D$ então $G \supseteq T$.

Se T é a menor σ -álgebra contendo D , T é chamada σ -álgebra gerada por D . Seja S um espaço métrico, um subconjunto de S é chamado conjunto de Borel se ele pertence a σ -álgebra gerada pelos conjuntos abertos em S .

Definição 3.9: Seja X um conjunto, e seja T uma σ -álgebra de subconjuntos de X . Uma medida em T é uma função $\mu : T \rightarrow [0, \infty]$ tal que:

- i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- ii) Se $A_n \in T$ é uma sequência disjunta de conjuntos então $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (contável aditiva).

Definição 3.10: Seja X um conjunto. Uma medida exterior em X é uma função $\bar{\mu}$ definida em todos os subconjuntos de X , cujos valores assumidos em $[0, \infty]$ satisfazem:

- i) $\bar{\mu}(\emptyset) = 0$;
- ii) Se $A \subseteq B$ então $\bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(B)$;
- iii) $\bar{\mu}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n)$ (contável sub-aditiva).

Definição 3.11: Uma medida $\pi : T \rightarrow [0, \infty]$ definida em uma σ -álgebra T de X é chamada uma medida de probabilidade se:

- i) $\forall A \in T, \pi(A) \geq 0$;
- ii) $\pi(X) = 1$.

Dado um conjunto X , uma σ -álgebra T e uma medida μ definida nesta σ -álgebra, a tripla (X, T, μ) é chamada um espaço de medida.

Definição 3.12: Seja (X, T, μ) um espaço de medida, uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita μ -mensurável se, e só se, para todo aberto $G \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(G) \in T$.

Definição 3.13: Seja (X, T, μ) um espaço de medida e $\mu(A) \geq 0, \forall A \in T$. Seja $0 < p \leq \infty$.

O espaço de Lebesgue $L^p(X, T, \mathbb{F}, \mu)$ é a coleção de todas as funções mensuráveis

$f : X \rightarrow \mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ corpo), com a propriedade que $\int_X |f(w)|^p d\mu < \infty$.

Para $p = \infty$ a integral acima na definição 3.13 é substituída por $\text{ess sup} |f(w)| < \infty$. Se

considerar $\|f\|_p = \left(\int_X |f(w)|^p d\mu \right)^{1/p}$ para $0 < p < \infty$, e $\|f\|_\infty = \text{ess sup} |f(w)|$, para $p = \infty$,

então $(L^p(X, T, \mathbb{F}, \mu), \|\cdot\|_p)$ são espaços de Banach para $0 < p \leq \infty$.

Uma importante generalização da noção de comprimento de sub-conjuntos de $\mathbb{R}$, é a Medida de Lebesgue de um conjunto. Aqui utiliza-se intervalos semi-abertos da forma $[a, b)$ na definição. Poderiam ser utilizados intervalos de outras formas, porém foram escolhidos estes devido a seguinte propriedade:

Teorema 3.3: Seja $a < b$ números reais, e $\varepsilon > 0$. Então $[a, b)$ pode ser escrito como uma união disjunta finita

$$[a, b) = \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i),$$

com $b - a = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$ e $b_i - a_i \leq \varepsilon$ para todo i .

Prova: Escolha $n \in \mathbb{N}$ tão grande tal que $\frac{(b-a)}{n} \leq \varepsilon$. Seja $b_i = a + i \frac{(b-a)}{n}$ para $0 \leq i \leq n$, e

$$a_i = b_{i-1}.$$

□

Agora seja A qualquer conjunto de $\mathbb{R}$. A medida exterior de Lebesgue de A é obtida, cobrindo A com uma família contável de intervalos semi-abertos de comprimentos totais, tão pequenos quanto possíveis. Em símbolos

$$\bar{L}(A) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j),$$

onde o ínfimo está sendo tomado sobre todas as famílias contáveis $\{[a_j, b_j) : j \in \mathbb{N}\}$ de intervalos semi-abertos com $A \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} [a_j, b_j)$.

Definição 3.14: Seja A qualquer conjunto de $\mathbb{R}$. A medida interior de Lebesgue de A é definida como:

$$\underline{L}(A) = \sup \{ \overline{L}(K) : K \subseteq A, K \text{ é compacto} \}.$$

Em geral nem sempre $\overline{L}(A) = \underline{L}(A)$. Um conjunto A é chamado Lebesgue mensurável quando esta igualdade acontece. Se A é Lebesgue mensurável, escrevemos $L(A)$ e chamaremos apenas de Medida de Lebesgue de A .

3.2. Gerando Medidas Exteriores

3.2.1. Método I

A forma como foi construída a medida exterior de Lebesgue não foi acidental, agora apresenta-se um método geral para a construção de outras medidas exteriores, conhecido como “Método I”.

Teorema 3.4 (Método I): Seja X um conjunto e seja Γ uma família de subconjuntos de X que cobre X . Seja $C : \Gamma \rightarrow [0, \infty]$ uma função conjunto. Então existe uma única medida exterior $\bar{\mu}$ em X tal que

- i) $\bar{\mu}(A) \leq C(A) \forall A \in \Gamma$;
- ii) Se $\bar{\nu}$ é qualquer medida exterior em X com $\bar{\nu}(A) \leq C(A) \forall A \in \Gamma$, então $\bar{\nu}(A) \leq \bar{\mu}(A) \forall A \subseteq X$.

Esboço de Prova: A unicidade: se duas medidas exteriores satisfazem i) e ii) então cada uma delas é menor ou igual a outra, portanto elas serão iguais.

Para qualquer subconjunto B de X , defina

$$\bar{\mu}(B) = \inf \sum_{A \in D} C(A),$$

onde o ínfimo está sendo tomado sobre todas as coberturas contáveis D de B , por conjuntos de Γ . Definida desta maneira é possível mostrar que $\bar{\mu}$ satisfaz o teorema.

Para detalhes da prova completa ver (EDGAR, 1990).

Definição 3.15 (Carathéodory): Seja $\bar{\mu}$ uma medida exterior em um conjunto X . Um conjunto $A \subseteq X$ é $\bar{\mu}$ -mensurável se $\bar{\mu}(E) = \bar{\mu}(E \cap A) + \bar{\mu}(E \setminus A)$ para todo conjunto $E \subseteq X$.

Teorema 3.5: A coleção Ω de conjuntos $\bar{\mu}$ -mensuráveis é uma σ -álgebra, e $\bar{\mu}$ é contável aditiva em Ω .

Considere agora o seguinte exemplo da construção de uma medida exterior pelo Método I em $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.1: Seja a coleção $\Gamma = \{ [a, b) : a < b \}$ de intervalos semi-abertos e a função conjunto $C([a, b)) = \sqrt{b-a}$. Seja $\bar{\mu}$ a medida exterior gerada pelo método I, i.e.,

$$\bar{\mu}(B) = \inf \sum_{A \in D} C(A).$$

Afirmção: O intervalo fechado $[0, 1]$ não é mensurável.

Considere a medida de $[0, 1)$. Certamente o conjunto unitário $\{[0, 1)\}$ cobre $[0, 1)$, então $\bar{\mu}([0, 1)) \leq C([0, 1)) = 1$. Se $[0, 1) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [a_i, b_i)$, deve-se ter $1 \leq \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$, e também que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{b_i - a_i} \right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{b_i - a_i} \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{b_i - a_i} \right) \\ &= \left(\sqrt{b_1 - a_1} \right)^2 + \left(\sqrt{b_2 - a_2} \right)^2 + \left(\sum_{i=3}^{\infty} \sqrt{b_i - a_i} \right)^2 + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sqrt{b_i - a_i} \right)^2 + 2 \left(\sum_{i < j} \sqrt{b_i - a_i} \sqrt{b_j - a_j} \right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \geq 1, \end{aligned}$$

logo $1 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{b_i - a_i}$. Isto mostra que $1 \leq \bar{\mu}([0, 1))$, então tem-se que $\bar{\mu}([0, 1)) = 1$.

Similarmente $\bar{\mu}([-1, 0)) = 1$. O conjunto unitário $\{[-1, 0)\}$ cobre o intervalo $[-1, 0)$, então pelo mesmo procedimento feito para o intervalo $[0, 1)$, tem-se que

$\bar{\mu}([-1,1]) \leq C([-1,1]) = \sqrt{2}$. Assim tomando $A = [0,1]$ e $E = [-1,1]$, chega-se que $\bar{\mu}(E \cap A) + \bar{\mu}(E \setminus A) = 1 + 1 = 2 > \sqrt{2} \geq \bar{\mu}(E)$. Isto mostra que o intervalo fechado $[0,1]$ não é mensurável.

Este exemplo mostra uma deficiência das medidas exteriores geradas pelo método I, pois freqüentemente é desejável que os conjuntos sejam mensuráveis. Quando se trabalha com um espaço métrico, geralmente são usados conjuntos abertos, fechados ou são construídos conjuntos a partir de abertos e fechados. Em particular os conjuntos são geralmente os borelianos. Além disso, é necessário cuidado redobrado quando se trabalha com conjuntos não mensuráveis, pois é possível conseguir resultados absurdos, como por exemplo, o paradoxo de Banach-Tarski (WAGON, 1986).

Dois conjuntos A e B em um espaço métrico possuem separação positiva se $d(A, B) > 0$, isto é, existe um $r > 0$ com $d(x, y) \geq r \forall x \in A \wedge \forall y \in B$. Seja $\bar{M}$ uma medida exterior em um espaço métrico S . $\bar{M}$ é chamado uma medida exterior métrica se $\bar{M}(A \cup B) = \bar{M}(A) + \bar{M}(B)$ para todo par A, B de conjuntos com separação positiva. A medida M obtida pela restrição desta aos conjuntos mensuráveis, é chamada medida métrica.

A razão do interesse pelas medidas métricas é que todos os borelianos são mensuráveis.

Lema 3.2: Seja $\bar{\mu}$ uma medida exterior métrica no espaço métrico S . Seja $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, e $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Assumindo que $d(A_i, A \setminus A_{i+1}) > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, então $\bar{\mu}(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\mu}(A_i)$.

Teorema 3.6: Seja $\bar{\mu}$ uma medida exterior métrica em um espaço métrico S . Então todo subconjunto de Borel de S é $\bar{\mu}$ -mensurável.

3.2.2 Método II

O método I pode falhar em fornecer uma medida onde Borelianos são mensuráveis (exemplo 3.1). Existe uma outra construção relacionada à do método I chamada método II que irá cobrir esta dificuldade.

Teorema 3.7: Sejam Γ e Ω duas coberturas de X tal que $\Gamma \subseteq \Omega$, e seja $C : \Gamma \rightarrow [0, \infty]$ uma função conjunto. Se $\bar{\mu}$ é uma medida exterior definida pelo método I sobre Γ e, e se $\bar{\nu}$ é uma medida exterior definida pelo método I sobre Ω e $C : \Omega \rightarrow [0, \infty]$, então $\bar{\nu}(A) \leq \bar{\mu}(A)$ para todo $A \subseteq X$.

Seja Φ uma família de subconjuntos de um espaço métrico S , suponha que para todo $x \in S$ e $\varepsilon > 0$, exista $A \in \Phi$ com $x \in A$ e $\text{diam}(A) \leq \varepsilon$. Suponha que $C : \Phi \rightarrow [0, \infty]$ é uma função dada. Uma medida exterior será construída baseada nestes dados. Para cada $\varepsilon > 0$, seja

$$\Phi_\varepsilon = \{A \in \Phi : \text{diam}(A) \leq \varepsilon\}.$$

Seja $\bar{\mu}_\varepsilon$ a medida exterior definida pelo método I e gerada por C usando a família Φ_ε . Então pelo teorema 3.7, para um dado conjunto E , quando ε diminui, $\bar{\mu}_\varepsilon(E)$ aumenta.

Defina

$$\bar{\mu}(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\mu}_\varepsilon(E). \quad (3.1)$$

Primeiramente $\bar{\mu}$ é uma medida exterior. Esta construção de uma medida exterior $\bar{\mu}$ a partir de uma função conjunto C é chamada Método II. Este método gera uma medida onde os conjuntos borelianos são mensuráveis.

Teorema 3.8: A função conjunto $\bar{\mu}$, equação (3.1), definida pelo método II é uma medida exterior métrica.

3.3 Conclusões

Neste capítulo foram apresentadas as ferramentas básicas para a definição de medida de Hausdorff e do estudo de medidas associadas aos sistemas de funções iteradas com probabilidades.

Pelo fato de que as medidas construídas pelo método II são medidas métricas, é natural que a medida de Hausdorff seja construída a partir deste método, para abranger uma classe maior de conjuntos mensuráveis.

CAPÍTULO 4. FRACTAIS

4. Fractais

Curvas euclidianas têm dimensão topológica um, e superfícies euclidianas têm dimensão topológica dois. Felix Hausdorff (1869-1942) (HAUSDORFF, 1919) definiu que uma dimensão para conjuntos é um número fracionário maior que a correspondente dimensão topológica. Isto motivou a primeira definição de um conjunto fractal.

Definição 4.1: Um fractal é um conjunto tal que, sua dimensão de Hausdorff é estritamente maior que sua dimensão topológica indutiva pequena (MANDELBROT, 1983).

A definição 4.1 ficará clara quando for definida formalmente a dimensão de Hausdorff, além disso, em algumas partes do texto existem referências às dimensões topológicas estudadas somente como dimensão topológica, porque os espaços topológicos considerados são metrizáveis e separáveis.

4.1. Medida de Hausdorff

Para definir dimensão de Hausdorff é necessário introduzir a medida de Hausdorff.

Definição 4.2: A medida exterior s -dimensional de Hausdorff é a medida exterior definida pelo método II a partir da função conjunto $C(A) = (\text{diam}(A))^s$. Quando restrita aos conjuntos mensuráveis é chamada medida de Hausdorff. São denotadas respectivamente por $\bar{H}^s$ e H^s .

Como $\bar{H}^s$ é construída pelo método II, ela é uma medida exterior métrica, isto é, todos os Borelianos são mensuráveis.

Existe uma formulação mais explícita da definição 4.2. Seja $\varepsilon > 0$, uma cobertura Γ de F é uma ε -cobertura se, $\text{diam}(A) \leq \varepsilon, \forall A \subseteq \Gamma$, neste caso escreve-se Γ_ε . Defina

$$\bar{H}_\varepsilon^s(F) = \inf \sum_{A \in \Gamma_\varepsilon} (\text{diam}(A))^s,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as ε -coberturas Γ_ε do conjunto F .

Um cálculo mostra que quando ε se torna pequeno, $\bar{H}_\varepsilon^s(F)$ se torna grande e

$$\bar{H}^s(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{H}_\varepsilon^s(F) = \sup_{\varepsilon > 0} \bar{H}_\varepsilon^s(F).$$

4.2. Dimensão de Hausdorff

Se for considerada a medida s – dimensional de Hausdorff H^s para um dado conjunto F em função de s , é possível observar que quando s aumenta, H^s diminui, mas ainda:

Teorema 4.1: Seja F um conjunto de Borel e $0 < s < t$. Se $H^s(F) < \infty$, então $H^t(F) = 0$. Se $H^t(F) > 0$, então $H^s(F) = \infty$.

Isto significa que, para um dado conjunto F , existe um único “valor crítico” $s_0 \in [0, \infty]$, tal que:

$$H^s(F) = \infty \quad \text{para todo } s < s_0;$$

$$H^s(F) = 0 \quad \text{para todo } s > s_0.$$

Este valor s_0 é chamado dimensão de Hausdorff do conjunto F (Figura 4.1), e será denotado por $\dim_{H^s}(F)$. Claro que é possível que $H^s(F) = 0$ para todo $s > 0$, neste caso $\dim_{H^s}(F) = 0$. Analogamente quando $H^s(F) = \infty$ para todo $s > 0$, $\dim_{H^s}(F) = \infty$.

Figura 4.1 - Gráfico de H^s por s , onde s_0 é a dimensão fractal.

4.3. Dimensão de Hausdorff v.s. Dimensão Topológica

Uma prova completa do teorema que será enunciado a seguir pode ser encontrada em (HUREWICZ; WALLMAN, 1941). Este teorema garante que a dimensão de Hausdorff sempre será maior ou igual à dimensão indutiva pequena de um espaço topológico metrizável S .

Teorema 4.2: Seja $(S, \mathfrak{T})$ um espaço topológico metrizável. Então $\text{ind}(S) \leq \dim_{H^s}(S)$.

A dimensão fractal não é uma propriedade topológica, então curvas homeomorfas, por exemplo, na Figura 4.2, possuem a mesma dimensão topológica, mas dimensões fractais diferentes. Desta forma, pode-se usar a dimensão fractal como um parâmetro para distinguir entes matemáticos, que possuem mesma dimensão topológica.

Figura 4.2 - Retas homeomórfas que não possuem a mesma dimensão fractal

Em contra partida a dimensão fractal não caracteriza completamente um fractal, na Figura 4.3 tirada de (PURKAIT et. al., 2004), ambas as texturas possuem mesmas dimensões fractais. Portanto usar apenas a dimensão fractal como parâmetro em um sistema reconhecedor de padrões é arriscado.

Figura 4.3 - Exemplo de duas texturas com dimensões fractais iguais. Adaptado de (PURKAIT et. al., 2004).

4.4. Índices de Entropia

Existem técnicas que aproximam a dimensão fractal de um conjunto dado. Uma destas é conhecida como índice de entropia, que leva este nome pela semelhança de sua expressão matemática com a expressão de entropia (GRAY, 1990).

Por facilidade aqui é apresentado o caso em $\mathbb{R}^2$.

Se $r > 0$, então a rede quadrada de lado r consiste de todos os quadrados da forma

$$S_r = [(m-1)r, mr) \times [(n-1)r, nr),$$

onde $m, n \in \mathbb{Z}$.

Fixado um número $r > 0$, uma cobertura formada somente pelos conjuntos de S_r , Γ cobre um conjunto F , então $\sum_{A \in \Gamma} r^s = N_r(F) r^s$, onde $N_r(F)$ é o número de elementos de Γ que interceptam F . Defina

$$\begin{aligned}\tilde{K}_r^s(F) &= N_r(F) r^s, \\ \tilde{K}^s(F) &= \liminf_{r \rightarrow 0} \tilde{K}_r^s(F).\end{aligned}$$

Por um cálculo simples se encontra:

$$\begin{aligned}\log(\tilde{K}^s(F)) &= \log\left(\liminf_{r \rightarrow 0} \tilde{K}_r^s(F)\right) \\ &= \liminf_{r \rightarrow 0} (\log N_r(F) + s \log r) \\ &= \liminf_{r \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\log N_r(F)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} - s \right) \log\left(\frac{1}{r}\right) \right] \\ &= \liminf_{r \rightarrow 0} \log\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\log N_r(F)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} - s}\end{aligned}$$

portanto,

$$\tilde{K}^s(F) = \liminf_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\log N_r(F)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} - s}$$

Tomando-se $s_0 = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_r(F)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$, chega-se que

$$\begin{aligned}\tilde{K}^s(F) &= \infty \quad \text{para todo } s < s_0; \\ \tilde{K}^s(F) &= 0 \quad \text{para todo } s > s_0.\end{aligned}$$

O valor crítico s_0 é chamado de índice de entropia inferior de F . Também é conhecido como dimensão “box” ou dimensão “box counting” (esta dimensão será novamente abordada na próxima seção). O valor crítico de s , chamado de índice de entropia superior é dado por

$$s_0 = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_r(F)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}.$$

Narn e Jinghu (SHIEH; YU, 2004), descrevem um exemplo onde o índice de entropia superior não é igual à dimensão de Hausdorff, mas em espaços de Hausdorff (T_2) estas dimensões coincidem.

4.5. Métodos Computacionais para Estimar a Dimensão Fractal

Em geral não há uma única forma de estimar a dimensão fractal. Vários algoritmos foram desenvolvidos nos últimos vinte anos para esta finalidade. Estes podem ser categorizados em duas famílias:

- *Relações de Medida-Tamanho*

Recursivo, baseado em medidas de comprimento ou área de curvas ou superfícies usando diferentes escalas.

- *Relações de Aplicação*

Baseado em fazer a aproximação ou ajustamento de uma curva ou superfície a uma conhecida função fractal, ou uma propriedade estatística tal como a variância.

4.5.1. Aproximação por Mínimos Quadrados

Todos os algoritmos discutidos nesta secção usam a aproximação por mínimos quadrados para encontrar a dimensão fractal.

Seja f_i , com $i=1,2,...,N$, uma função real consistindo de N elementos e seja $\hat{f}_i$ uma aproximação desta. O erro de mínimos quadrados E é então definido como

$$E = \sum_{i=1}^N \left(f_i - \hat{f}_i \right)^2 .$$

Na maioria dos casos, os algoritmos para o cálculo da dimensão fractal usam gráficos logarítmicos ou semi-logarítmicos para ajustar os dados a uma linha. Nestes casos, o objetivo é encontrar a inclinação b e em alguns casos a constante c da linha

$$\hat{f}_i = bx_i + c .$$

Para encontrar o melhor ajuste, é necessário minimizar o erro E que está em função de b e c . Isto é conseguido através da solução das equações:

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 0 \text{ e } \frac{\partial E}{\partial c} = 0,$$

onde se segue que:

$$E(b, c) = \sum_{i=1}^N (f_i - (bx_i + c))^2 = \sum_{i=1}^N (f_i^2 - 2f_i(bx_i + c) + b^2x_i^2 + 2bcx_i + c^2),$$

$$\frac{\partial E(b, c)}{\partial(b)} = \sum_{i=1}^N (-2f_ix_i + 2bx_i^2 + 2cx_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N x_i(f_i - bx_i - c) = 0.$$

De maneira análoga encontra-se:

$$\frac{\partial E(b, c)}{\partial(c)} = \sum_{i=1}^N (f_i - bx_i - c) = 0.$$

Destas duas últimas equações tiram-se os valores de b e c :

$$b = \frac{N \sum_{i=1}^N (f_i x_i) - \left(\sum_{i=1}^N f_i \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}$$

$$c = \frac{\sum_{i=1}^N f_i - b \sum_{i=1}^N x_i}{N}.$$

Na próxima secção serão apresentados alguns algoritmos para o cálculo da dimensão fractal de um conjunto. Alguns destes algoritmos são baseados na seguinte relação:

$$\text{comprimento} = c \text{ passo}^b,$$

que pode ser linearizado

$$\ln(\text{comprimento}) = \ln(c) + b \ln(\text{passo}) \quad (4.1)$$

onde b representa a inclinação da reta obtida.

4.5.2. Método: “Walking-Divider”

Introduzido por Shelberg (SHELBERG, 1982), este método usa uma corda de comprimento δ e conta quantas destas cordas $N(\delta)$ são necessárias para cobrir uma curva fractal F . Esta técnica tem como princípio, escolher cordas com comprimento cada vez menores e contar os respectivos números necessários para cobrir F em cada caso. Esta aproximação é baseada diretamente na equação (4.1).

É um processo recursivo no qual o passo é diminuído e o comprimento é calculado. Um ajuste através de mínimos quadrados é feito no gráfico log-log para se encontrar a inclinação b , que resulta na dimensão “walking-divider”, $\dim_{\text{walk}}(F) = -b$.

Na Figura 4.4 é possível observar o procedimento realizado pelo algoritmo “walking divider” para curvas, em (a) com raio 6, em (b) raio 3, em (c) raio 2 e em (d) raio 1. Quando faz-se o raio tender a zero a curva em preto é aproximada pela curva em azul;

Figura 4.4 – Método “Walking-Divider”

4.5.3. Método: “Box Counting”

Um dos mais populares algoritmos para o cálculo ou estimação da dimensão fractal de sinais e imagens é o “box counting”, método originalmente desenvolvido por Voss (VOSS, 1985).

“Box counting” em geral se resume a cobrir um fractal com uma grade de caixas n – dimensionais ou hiper-cubos todos com lado r , e conta-se o número de caixas não vazias N . Recursivamente cubos de diferentes tamanhos são usados para cobrir o fractal (Figura 4.5.). A inclinação obtida no gráfico bilogaritmo do número de caixas v.s. seus tamanhos, será a dimensão fractal, também

Figura 4.5 - Algoritmo “Box Counting”

conhecida como dimensão “box” ou de Minkowski, denotada por $\dim_{box}(F)$. Uma maneira de definir formalmente a dimensão “box counting” é através do índice de entropia inferior apresentado na seção 4.4.

4.5.4. Método: “Prism Counting”

Definido por Clark (CLARK et. al., 1988) que se baseou na idéia do “box counting”, onde ao invés de contar o número de caixas em uma região para um dado tamanho, calcula-se a área baseada em prismas.

Figura 4.6 – Algoritmo “Prism Counting”

Na Figura 4.6 é possível observar a representação do algoritmo para superfícies fractais. As letras A, B, C, D, representam pixels com respectivas alturas (níveis de cinza) a, b, c, e d, e P o ponto médio dos quatro pixels com altura média p. A conexão entre as alturas irá formar quatro triângulos na superfície, estes quatro triângulos terão suas áreas calculadas e somadas, sendo que cada triângulo define um prisma. Um gráfico bilogaritmico entre a soma do número de áreas dos prismas v.s. diferentes escalas irá resultar (com a aproximação de mínimos quadrados) em uma reta de inclinação b . A dimensão “prism counting” da superfície será dada pela relação:

$$\dim_{prism}(F) = 2 - b.$$

4.5.5. Método: “Epsilon-Blanket”

Para curvas pode-se considerar o conjunto de pontos cuja distância não é maior que ε . Isto resultará uma faixa de comprimento 2ε em torno da curva fractal. O comprimento da curva $L(\varepsilon)$ pode ser calculado a partir da área $A(\varepsilon)$, faixa que cerca a curva pela relação

$$L(\varepsilon) = \frac{A(\varepsilon)}{2\varepsilon}$$

usando que $L(\varepsilon) \propto \varepsilon^{1-\dim_{\text{blanket}}(F)}$ onde 1 é a dimensão topológica da curva F e $\dim_{\text{blanket}}(F)$ sua dimensão fractal (TURNER, BLACKLEDGE, ANDREWS, 1998)

4.5.6. Método: Relação Área-Perímetro

É conhecido de curvas fechadas no plano, que o perímetro p é relacionado com a área A pela seguinte relação: $p = c\sqrt{A}$, onde c é uma constante para um dado tipo de forma, por exemplo, para círculos $c = 2\sqrt{\pi}$.

Mandelbrot (MANDELBROT, 1983) generalizou esta relação para curvas fractais fechadas e obteve

$$p = c\left(\sqrt{A}\right)^{\dim_{\text{area}}(F)}, \text{ onde } 1 < \dim_{\text{area}}(F) < 2.$$

Em (DeCOLA, 1989) foi usado um algoritmo baseado nesta relação área-perímetro de Mandelbrot, para classificar diferentes tipos de uso da terra a partir de fotos de satélite.

4.5.7. Dimensão Fractal Multiescala

Muitos métodos para cálculo da dimensão fractal, dependem do uso da chamada equação de Richardson, para alguma propriedade M que é função da escala δ ,

$$M(\delta) = c\delta^{D_\tau - D}$$

onde c é uma constante e D_τ é a dimensão topológica (como o espaço é o euclidiano todas as definições de dimensão topológica coincidem). É possível calcular um único valor de D pelo gráfico bilogarítmico e aproximação por mínimos quadrados.

Na dimensão fractal multiescala (TORRES; FALCÃO; COSTA, 2004), ao invés de se calcular o coeficiente angular da reta de ajuste aos pontos, faz-se uma regressão polinomial e através da derivada do polinômio encontrado, obtêm-se uma curva, chamada curva de fractalidade. Esta curva representa uma aproximação da dimensão fractal em diferentes escalas. Através desta metodologia tenta-se contornar as limitações impostas pelas imagens analisadas que não possui características fractais devidos a finitude de escalas.

4.6. Conclusões

Pelo fato de não ser possível caracterizar completamente um conjunto fractal somente pela sua dimensão de Hausdorff, é necessário utilizar outros parâmetros associados com esta para realizar a tarefa de reconhecimento de padrões.

As dimensões fractais calculadas computacionalmente em sua maioria coincidem, então o critério de sua utilização fica a cargo das características da aplicação. O maior problema com o uso da dimensão fractal para caracterizar imagens e formas da natureza, é que estas não são perfeitamente fractais (ou auto-similares). Assim a dimensão fractal multiescala tenta contornar essas limitações impostas pelas finitude de escalas.

CAPÍTULO 5. SISTEMAS DE FUNÇÕES ITERADAS

5. Sistemas de Funções Iteradas

5.1 Sistemas de Funções Iteradas com probabilidade

Uma maneira de criar fractais é utilizar os sistemas de funções iteradas (IFS) que são responsáveis pela maior parte dos fractais clássicos conhecidos, como por exemplo, o conjunto de Cantor, o triângulo de Sierpinski, a curva de Koch, etc. Além disso, através dos IFSs é possível construir funções cujos gráficos são fractais, que podem ser úteis para fins de aproximação.

Seja N um inteiro maior que um, e seja $w = \{\omega_i : X \rightarrow X \mid i = 1, \dots, N\}$ uma coleção de funções mensuráveis de X (espaço topológico metrizável e compacto), seja $p = \{p_i : i = 1, \dots, N\}$ um conjunto de probabilidades. Defina um operador $T : C_{\mathbb{R}}(X) \rightarrow \mathbb{R}^X$, no espaço de Banach das funções contínuas com valores reais, munido com a norma $\|f\|_{\infty} = \max\{|f(x)| : x \in X\}$ por:

$$(Tf)(x) = \sum_{i=1}^N p_i (f \circ \omega_i)(x) \quad . \quad (5.1)$$

Definição 5.1: A tripla (X, w, p) é chamada sistema de funções iteradas com probabilidades se, e só se, o conjunto de probabilidades é tal que o operador definido em (5.1) mapeia $C_{\mathbb{R}}(X)$ em si mesmo.

Se $\omega_i \in C(X, X)$, o espaço de todas as funções contínuas de X em $X \ \forall i = 1, \dots, N$, então (X, w, p) é um IFS com probabilidades para qualquer conjunto de probabilidades p .

Definição 5.2.: Um IFS com probabilidades é chamado hiperbólico se, e só se, existe uma constante $0 \leq s < 1$ tal que

$$d_X(\omega_i(x), \omega_i(y)) \leq sd(x, y) \ , \ \forall x, y \in X \text{ e } \forall i = 1, \dots, N, \quad (5.2)$$

onde d_X é a métrica em X .

Seja $\mathfrak{H}(X)$ denotado a coleção de todos os subconjuntos compactos não-vazios do conjunto X . A função $\mathfrak{h} : \mathfrak{H}(X) \times \mathfrak{H}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mathfrak{h}(A, B) := \max \left\{ \max_{a \in A} \min_{b \in B} d_X(a, b), \max_{b \in B} \min_{a \in A} d_X(a, b) \right\}, \quad (5.3)$$

é uma métrica em $\mathfrak{H}(X)$. Esta métrica é chamada métrica de Hausdorff, e $(\mathfrak{H}(X), h)$ é um espaço métrico completo (MASSOPUST, 1997), que pode ser representada geometricamente como o maior dos segmentos de reta na Figura 5.1.

Figura 5.1 - Representação geométrica da métrica de Hausdorff

Dado um IFS com probabilidades (X, w, p) , um mapa $W : \mathfrak{H}(X) \rightarrow \mathfrak{H}(X)$ pode ser associado a w por:

$$W(A) := \bigcup_{i=1}^N \omega_i(A). \quad (5.4)$$

Quando (X, w, p) é um IFS hiperbólico com probabilidade e contratividade s , W também é uma contração no espaço métrico completo $(\mathfrak{H}(X), h)$, com a mesma contratividade.

Definição 5.3: Seja (X, w, p) um IFS hiperbólico com probabilidades, seja W (equação 5.4) o mapa associado, e seja $E \in \mathfrak{H}(X)$. O conjunto atrator A que é único é chamado fractal gerado pelo IFS hiperbólico (X, w, p) com probabilidades e é definido por

$$A := \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(E),$$

onde o limite é tomado na métrica de Hausdorff.

Todo IFS hiperbólico (com probabilidades) tem um atrator, e este atrator é único e independente do conjunto E , devido à aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach na contração W , que é um operador no espaço métrico completo $(\mathfrak{H}(X), h)$.

Dois exemplos clássicos de fractais gerados por sistemas de funções iteradas é o conjunto de Cantor (Figura 5.2.) e o triângulo de Sierpinski (Figura 5.3.).

Figura 5.2 - Conjunto de Cantor

Figura 5.3 - Triângulo de Sierpinski 3D

O algoritmo para encontrar o ponto fixo toma uma imagem inicial e aplica todas as transformações ao mesmo tempo em toda esta, criando uma nova imagem. O processo é repetido até que se alcance a aproximação requerida do atrator do IFS.

Uma aproximação alternativa para construir o atrator é usar uma abordagem probabilística. Neste algoritmo aleatório, parte-se de um ponto inicial, este é transformado usando um dos w_i que foi aleatoriamente selecionado, levando em conta sua probabilidade associada p_i . Este processo aleatório é repetido até que se consiga a convergência para o atrator. Ambos os processos criam o mesmo atrator.

É possível definir um atrator para um IFS com probabilidades, sem que este seja hiperbólico, porém neste caso, o atrator em geral depende do conjunto inicial, e sua existência é garantida pelo teorema do ponto fixo de Shauder.

Agora é apresentado um resultado que diz que um IFS com probabilidade pode ser descrito por um processo de Markov.

Definição 5.4: Um processo de Markov é uma quádrupla (X, T, μ, P) , onde (X, T, μ) formam um espaço de medida e P é um operador positivo não-expansivo definido em $L^1(X, \mathbb{R}, \mu)$.

O termo não-expansivo quer dizer

$$\|P\| = \sup \{ \|Pf\| : \|f\|_1 \leq 1 \} \leq 1$$

e positivo significa

$$0 \leq f \in L^1(X, \mathbb{R}, \mu) \Rightarrow Pf \geq 0.$$

Seja (X, w, p) um IFS com probabilidades. Considere o seguinte processo de Markov em tempo discreto $(X, \mathcal{B}(X), \mu, P)$, onde $\mathcal{B}(X)$ denota a σ -álgebra dos Borelianos de X , e onde:

$$P(x, B) := \sum_{i=1}^N p_i \chi_{\omega_i(x)}(B).$$

O dual de $C_{\mathbb{R}}(X)$ é o conjunto de todas as medidas de Borel regulares (finitas) $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X)$. O operador T como definido em (5.1) projeta o espaço $C_{\mathbb{R}}(X)$ continuamente nele mesmo, e então o operador adjunto T^* (mais precisamente, $T^*(w, p)$) projeta o conjunto $\mathcal{P}(X)$ de medidas de probabilidades em X fracamente continuamente nele mesmo. Pelo Teorema do Ponto-Fixo de Schauder T^* tem um ponto fixo $\mu \in \mathcal{P}(X)$.

Além disso,

$$(T^*v)B = \sum_{i=1}^N p_i v(\omega_i^{-1}B) = \sum_{i=1}^N p_i \int \chi_{\omega_i(x)} dv(x).$$

Entretanto, o ponto fixo μ satisfaz

$$\mu B = \sum_{i=1}^N p_i \int_X \chi_{\omega_i(x)} d\mu(x) = \int_X P(x, B) d\mu(x), \quad (5.5)$$

isto é, μ é a medida de probabilidade estacionária para o processo de Markov definido acima.

Esta medida tem um nome especial.

Definição 5.3 A medida μ definida em (5.5) é dita a medida p-ponderada do IFS (X, w, p) com probabilidades.

A medida p -ponderada de um IFS hiperbólico com probabilidades é também atrativa para medidas de probabilidade $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(E)$, onde $E \subseteq X$. Mais precisamente

$$T^{*n}\nu \xrightarrow{\omega^*} \mu, \text{ com } n \rightarrow \infty$$

para toda medida de probabilidade ν com suporte em $E \subseteq X$.

Para mostrar isto, é necessário introduzir a métrica de Hutchinson $\mathfrak{v}$, no espaço $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X)$ de medidas de probabilidade em X .

Definição 5.4: Seja $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$ e denote por $Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)$ o conjunto de todas as funções Lipschitz $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$, com constante Lipschitz menor ou igual a um. Defina

$$\mathfrak{v}(\mu, \nu) := \sup \left\{ \mu(\phi) - \nu(\phi) \mid \phi \in Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X) \right\}.$$

Aqui a notação $\mu(\phi) = \int_X \phi(x) d\mu(x)$ foi usada.

Além disso, a convergência na topologia induzida pela métrica $\mathfrak{v}$, implica convergência na topologia de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X)$.

Proposição 5.4: O espaço linear $(\mathcal{P}(X), \mathfrak{v})$ é um espaço métrico completo.

A métrica de Hutchinson foi designada para obter o seguinte resultado:

Proposição 5.5: O operador $T^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, dado por:

$$(T^*\nu)B = \sum_{i=1}^N p_i \nu(\omega_i^{-1}B), \quad (5.6)$$

é uma contração com contratividade s .

Teorema 5.1: Seja (X, w, p) um IFS hiperbólico com probabilidades, e seja A seu atrator. Então existe uma única medida de probabilidade μ em $\mathcal{P}(A)$ tal que $T^*\mu = \mu$, onde T^* é dado em (5.6). Além disso, toda medida de probabilidade $\nu \in \mathcal{P}(X)$ é atraída por μ no

sentido que $T^{*n}v \rightarrow \mu$, onde a convergência está na métrica ν de Hutchinson, e μ é também a medida de probabilidade estacionária para os processos de Markov em tempo discreto.

Um resultado interessante diz que, o atrator do IFS hiperbólico com probabilidade é o suporte da medida p -ponderada associada ao mesmo.

5.2. Compressão de Imagens

Nesta secção é apresentada uma das possíveis aplicações dos IFS, a compressão de imagens. Como a maioria das imagens do mundo real não são auto-similares, foram criadas alguns variantes dos IFSs para aumentar a abrangência deste método.

5.2.1. Sistemas de Funções iteradas recorrentes

Os IFSs recorrentes são uma generalização dos IFSs com probabilidade. Dados um IFS hiperbólico $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$, e (p_{ij}) uma matriz linha-estocástica, i.e., satisfaz as seguintes condições:

- i) $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, N,$
- ii) $p_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j,$
- iii) $\forall i, j, \exists i_1, i_2, \dots, i_n, \text{ com } i_1 = i \text{ e } i_n = j \text{ tal que } p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3} \dots p_{i_{n-1} i_n} > 0,$

então define-se:

Definição 5.5: O $\{X; f_j; p_{ij}; i, j = 1, 2, \dots, N\}$ é chamado de IFS recorrente.

5.2.2. Sistemas de Funções iteradas Parciais

Na definição dos IFSs os mapas associados possuem todo o conjunto como domínio, agora esta condição é relaxada.

Definição 5.6: Seja X um espaço métrico completo, e seja $D_i \subset X$ para $i = 1, \dots, n$. Um sistema de funções iteradas parciais, PIFS, é uma coleção de mapas contrativos $w_i : D_i \rightarrow X$, para $i = 1, \dots, n$.

Definido desta maneira o PIFS, permite construir auto-similaridade por partes, que é muito mais abrangente que auto-similaridade global.

Para realizar compressão de imagens, primeiro divide-se a imagem original em uma partição uniforme $\{P_i\}$ formada por quadrados de tamanho m (existem outras maneiras de particionar uma imagem (FISHER, 1994) para diminuir o tempo computacional).

O segundo passo é encontrar para cada $i = 1, \dots, p$ um quadrado D de lado $2m$ na imagem original, de forma que minimize a distância rms

$$d_{rms}(P_i, D) = \sqrt{\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m (P_i(k, l) - D(k, l))^2}.$$

Note que para utilizar esta métrica é necessário que a matriz D tenha o mesmo tamanho das P_i , portanto tomam-se as médias dos pixels para cada submatriz 2×2 de D .

Depois de encontrar uma matriz D , para cada um dos P_i , é necessário calcular os parâmetros que formam o sistema

$$w_i \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i & 0 \\ c_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & s_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \\ k_i \end{bmatrix},$$

de maneira que $w_i : D_i \rightarrow P_i$, onde D_i é a matriz D encontrada para o respectivo P_i .

É possível calcular os valores a_i , b_i , c_i , d_i , e_i e f_i , que são responsáveis pelo comportamento do domínio, e através de mínimos quadrados, encontram-se os valores de s_i e k_i . Uma vez completamente conhecido os w_i , é possível aproximar de maneira arbitrária a imagem original I_{orig} , i.e., dada qualquer imagem inicial I tem-se que:

$$I_{orig} \simeq \underbrace{W \circ \dots \circ W}_n(I),$$

onde quanto maior o valor de n melhor a aproximação, e $W = \bigcup_{i=1}^p w_i$.

5.3 Conclusões

Através dos sistemas de funções iteradas é possível manipular uma das mais importantes propriedades dos conjuntos fractais, sua invariância a escalas. Isto acontece devido à auto-similaridade proporcionada pelos IFSs.

Para aplicações de reconhecimento de padrões, a medida p -ponderada e os processos de Markov associados, podem fornecer outros parâmetros importantes para a realização desta tarefa.

CAPÍTULO 6. FUNÇÕES FRACTAIS

6. Funções Fractais

Além da dimensão de Hausdorff, é possível utilizar outros parâmetros relacionados com a geometria fractal para fins de reconhecimento de padrões. Neste capítulo são introduzidas as funções fractais, que são funções cujos gráficos são conjuntos fractais, e usualmente são obtidas como pontos fixos de operadores contrativos em espaços de Banach. Por meio destas funções é possível aproximar e interpolar dados experimentais.

6.1. O operador de Read-Bajraktarevic

As funções fractais consideradas neste capítulo são pontos fixos de um operador contrativo. Este operador tem sua origem na teoria das equações funcionais, e foi investigado pela primeira vez por Read e mais tarde por Bajraktarevic. Posteriormente, estes operadores foram usados por Dubuc e Bedford (BEDFORD; DEKKING; KEANE, 1992) para construir funções fractais.

Definição 6.1: Seja X um conjunto e Y um espaço métrico completo. Suponha que $b: X \rightarrow X$ é uma função arbitrária em X . Além disso, assuma que são dados mapas $v(x, \cdot): Y \rightarrow Y$, $x \in X$. O operador de Read-Bajraktarevic associado com b e $\{v(x, \cdot) | x \in X\}$ é definido por

$$\begin{aligned} \Phi: L^\infty(X, Y) &\rightarrow L^\infty(X, Y) \\ f &\mapsto v(\cdot, f(b(\cdot))). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Para construir funções fractais, algumas condições adicionais têm de ser colocadas nos mapas $v(x, \cdot)$:

- (A) para todo $x \in X$ o mapa $v(x, \cdot) \in Lip^{(<1)}(Y)$.
- (B) existe uma família $\mathfrak{F}(X, Y)$ de funções contínuas de X em Y tal que para todo $f \in \mathfrak{F}(X, Y)$, a função $v(\cdot, f \circ b(\cdot))$ é um membro de $\mathfrak{F}(X, Y)$.

Então o seguinte resultado se mantém:

Teorema 6.1: Se a condição (A) se mantém, então Φ é um operador contrativo em $L^\infty(X, Y)$, e seu ponto fixo é uma única função limitada $f_\Phi : X \rightarrow Y$. Se a condição (B) também se mantém, então $f_\Phi \in C(X, Y)$.

Agora suponha X um espaço métrico completo e $u_i : X \rightarrow X$ uma dada coleção de N bijeções tais que $\{X_i := u_i(X) \mid i = 1, \dots, N\}$ é uma partição de X . Além disso, assuma que N contrações uniformes $v_i(x, \cdot) : Y \rightarrow Y, x \in X$, são dadas. Uma função $b : X \rightarrow X$ é definida por

$$b(x) := \sum_{i=1}^N u_i^{-1}(x) \chi_{X_i}(x), \quad (6.2)$$

onde χ representa a função característica, e um mapa $v(x, \cdot) : Y \rightarrow Y, i = 1, \dots, N$, por

$$v(x, \cdot) := \sum_{i=1}^N v_i(x, \cdot) \chi_{X_i}(x). \quad (6.3)$$

Claramente $v(x, \cdot)$ satisfaz a condição (A) e uma condição mais forte do que (B):

(C) existe uma família $\mathfrak{F}(X, Y)$ de funções contínuas de X em Y tal que para todas as $f \in \mathfrak{F}(X, Y)$, as funções $v_i(\cdot, f \circ b(\cdot))$ são membros de $\mathfrak{F}(X, Y)$ e

$$v_i(u_i^{-1}(x), f \circ u_i^{-1}(x)) = v_{i+1}(u_{i+1}^{-1}(x), f \circ u_{i+1}^{-1}(x)),$$

para $x \in X_i \cap X_{i+1}$.

Seja s_i a contratividade de $v_i(x, \cdot)$ e $s := \max\{s_i \mid i = 1, \dots, N\}$. Seja $B(X, Y)$ o espaço métrico completo de todas as funções limitadas $f : X \rightarrow Y$, munido com a métrica $d : B(X, Y) \times B(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} \{d_Y(f(x), g(x))\},$$

onde d_Y representa a métrica do espaço Y . Então:

Teorema 6.2: Sejam b e $v(x, \cdot)$ definidos em (6.2) e (6.3), respectivamente. Suponha que $v(x, \cdot)$ satisfaça a condição (C). Seja Φ o operador de Read-Bajraktarevic associado com b e

$v(x, \cdot)$. Então Φ é contrativo em $B(X, Y)$ e seu único ponto fixo é um elemento de $C(X, Y)$.

O operador Φ de forma explícita (MASSOPUST, 1997) é dado por:

$$\Phi(f)(x) = \sum_{i=1}^N \left[v_i(u_i^{-1}(x), f \circ u_i^{-1}(x)) \right] \chi_{X_i}(x),$$

onde $X_i = u_i(X)$.

O único ponto fixo $f_\Phi \in C(X, Y)$ do operador Read-Bajraktarevic é dito uma função fractal. O espaço métrico (munido com a norma do sup) de todas as funções fractais é denotado por $\mathcal{F}(X, Y)$.

Da maneira como foi construída, f_Φ é uma função fractal, pois seu gráfico $G = \{(x, f_\Phi(x)) : x \in X\}$ é ponto fixo do operador contrativo:

$$W(G) = \bigcup_{i=1}^N w_i \left\{ (x, f_\Phi(x)) : x \in X \right\},$$

associado ao sistema de funções iteradas $w_i(x, y) = (u_i(x), v_i(x, y))$.

Agora são exibidos alguns exemplos de funções fractais:

Exemplo 6.1.: Seja $X = [0, 1]$ e seja $Y \in \mathfrak{H}(\mathbb{R})$. Defina funções $u_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por

$$u_1(x) = \frac{x}{2} \text{ e } u_2(x) = 1 - \frac{x}{2},$$

então claramente $[0, 1] = \bigcup_{i=1}^2 u_i([0, 1])$. Agora defina $v_i : [0, 1] \times Y \rightarrow Y$ por

$$v_1(x, y) = \tau_1(x) + sy \text{ e } v_2(x, y) = \tau_2(x) + sy,$$

onde $\tau_1(x) = x$, $\tau_2(x) = x^2$ e $s = \frac{5}{7}$. É possível perceber que $v(x, \cdot)$ satisfaz a condição (C),

então o operador de Read-Bajraktarevic define uma função fractal contínua em $[0, 1]$, Figura 6.1.

Figura 6.1 - Gráfico da função fractal do exemplo 6.1

Exemplo 6.2.: Seja $X = [0, 1]$. Defina mapas $u_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, por

$$u_1(x) = \frac{x}{2} \text{ e } u_2(x) = \frac{x+1}{2},$$

e mapas $v_i : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$v_1(x, y) = \frac{x}{2} + sy \text{ e } v_2(x, y) = \frac{1-x}{2} + sy,$$

e escolha $s = \frac{1}{4}$, então o operador de Read-Bajraktarevic definido em

$\{f \in C([0, 1]) : f(0) = f(1) = 0\}$ é dado por

$$\Phi(f)(x) = \begin{cases} x + \frac{f(2x)}{4} & x \in [0, 1/2] \\ 1-x + \frac{f(2x-1)}{4} & x \in [1/2, 1] \end{cases},$$

e seu ponto fixo é a função polinomial $f_\Phi(x) = 2x(1-x)$, uma função suave em $[0, 1]$, Figura 6.2 (a) e (b).

Figura 6.2 - Gráfico da função fractal do exemplo 6.2

6.2. Funções Fractais de Interpolação

Agora é apresentado um conjunto de funções fractais que possuem uma propriedade de interpolação. Elas foram definidas pela primeira vez por (BARNESLEY; HARRINGTON, 1986) e são chamadas funções fractais de interpolação.

Dado um conjunto de $N + 1$ pontos distintos $\Delta = \{(x_i, y_i) \in X \times Y : i = 0, \dots, N\}$. Uma função $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ é dita ter a propriedade de interpolação se

$$\forall j = 0, 1, \dots, N : f(x_j) = y_j.$$

Agora defina homeomorfismos contrativos $u_i : X \rightarrow X$ tais que,

$$u_i(x_0) = x_{i-1} \text{ e } u_i(x_N) = x_i, \forall i = 1, \dots, N,$$

e mapas $v_i : X \times Y \rightarrow Y$ uniformemente Lipschitz na segunda variável, que satisfazem a condição:

$$v_i(x_0, y_0) = y_{i-1} \text{ e } v_i(x_N, y_N) = y_i, \forall i = 1, \dots, N.$$

Desta maneira o operador de Read-Bajraktarevic Φ associado as funções (6.1) e (6.2) terá um ponto fixo $f_\Phi \in \mathcal{F}(X, Y)$, tal que

$$f_\Phi(x_i) = y_i,$$

e mais, dado Δ , existe uma única $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ com esta propriedade. A implicação inversa não se mantém.

Um caso particular das funções de interpolação é gerado por funções afins. Dado $X = [0,1]$ e $Y = \mathbb{R}$, seja $N > 1$ e $\Delta = \{(x_i, y_i) \in [0,1] \times Y : 0 = x_0 < \dots < x_N = 1 \wedge i = 0, 1, \dots, N\}$. Defina:

$$u_i(x) = a_i x + d_i \quad \text{e} \quad v_i(x, y) = c_i x + s_i y + e_i$$

onde $|s_i| < 1$ são dados.

Estas devem satisfazer:

$$u_i(x_0) = x_{i-1} \text{ e } u_i(x_N) = x_i, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

$$v_i(x_0, y_0) = y_{i-1} \text{ e } v_i(x_N, y_N) = y_i, \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

assim é possível determinar os coeficientes a_i , c_i , d_i e e_i por:

$$a_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_N - x_0}$$

$$c_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_N - x_0} - \frac{s_i(y_N - y_0)}{x_N - x_0}$$

$$d_i = \frac{x_N x_{i-1} - x_0 x_i}{x_N - x_0}$$

$$e_i = \frac{x_N y_{i-1} - x_0 y_i}{x_N - x_0} - \frac{s_i(x_N y_0 - x_0 y_N)}{x_N - x_0}.$$

A Figura 6.3 é um exemplo de uma função fractal de interpolação, onde $s_1 = 0,4$, $s_2 = 0,6$ e

$$\Delta = \{(0,0), (1/2, 1), (1,0)\}.$$

Figura 6.3 - Função fractal de interpolação

Teorema 6.3: Seja $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função fractal afim, e G seu gráfico. Suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$\text{i)} \quad \sum_{i=1}^N |s_i| > 1$$

ii) Δ não é colinear

Então a dimensão “box counting” de G é a única solução positiva d^* da equação

$$\sum_{i=1}^N |s_i| a_i^{d-1} = 1,$$

caso contrário $\dim_{\text{box}}(G) = 1$.

6.3. Função de Weierstrass

Por volta de 1900 se acreditava que todas as funções contínuas precisavam ser diferenciáveis em pelo menos um local. Sabia-se que uma função contínua poderia não ser diferenciável em um ponto específico como, por exemplo, a função $f(x) = |x|$ no ponto $x = 0$.

Weierstrass foi o primeiro a descobrir uma função que é contínua e não diferenciável em todo ponto. Segundo (EDGAR, 1993) em 1895 Karl Weierstrass publicou o artigo (traduzido) “*On Continuous Function of a Real Argument that do not have a Well-Defined Differential Quotient*”, onde são demonstradas as propriedades de continuidade e não diferenciabilidade em nenhum ponto no domínio, de funções $f : R \rightarrow R$ dos tipos

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi t),$$

onde $0 < b < 1$ e a é um ímpar positivo, sendo que o produto ab excede um certo limite. Helge von Koch não satisfeito em definir estas funções por séries, publicou um artigo em 1904 (EDGAR, G. A., 1993) onde ele mostra uma construção puramente geométrica de uma função contínua, mas não diferenciável em todo ponto.

Devido às suas propriedades “patológicas” de não diferenciabilidade, estas curvas foram consideradas por vários matemáticos como sem utilidade, foi somente a partir de 1920 que este tipo de função foi usada para construir bons modelos de movimentos Brownianos.

A função de Weierstrass é representante de uma classe mais abrangente de funções. Se g é uma função periódica então é possível mostrar que

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} g(\lambda^k t)$$

$\dim_{\text{box}}(Gra(f)) = s$, onde $Gra(f) = \{(t, f(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in Dom(f)\}$ é o gráfico de f . Além disso seu aparecimento como repeladores em sistemas dinâmicos, deu a estas uma maior importância.

6.4. Conclusões

Neste capítulo foram apresentadas as funções fractais como sendo pontos fixos de certos operadores contrativos em espaços de Banach. O estudo deste tipo de funções leva a construção de bases ortonormais em $L^p(X)$, para alguns p (MASSOPUST, 1994). Além disso, estas funções podem auxiliar no entendimento de fenômenos modelados por sistemas de funções iteradas.

CAPÍTULO 7. FRACTAIS ALEATÓRIOS

7. Fractais Aleatórios

Aleatoriedade está presente em vários fenômenos naturais. Neste capítulo são descritos o movimento Browniano - um fenômeno natural aleatório que é modelado pela geometria fractal, e o movimento Browniano fracionário (generalização do movimento Browniano). No presente trabalho serão analisados sinais de sensores de características ruidosas atribuídas à interação das moléculas do gás com a superfície do sensor e que podem ser modeladas com fenomenologias semelhantes ao do movimento Browniano.

7.1. Movimento Browniano

Robert Brown, em 1828, foi o primeiro a perceber que o movimento aleatório de microscópicas partículas de pólen era físico e não biológico como se acreditava anteriormente. Moléculas, vírus, partículas e outros componentes do mundo natural estão sempre em movimento com colisões aleatórias entre si, devido à energia térmica.

Se uma partícula de massa m é inserida em um fluido, uma força de fricção irá atuar sobre ela. A expressão mais simples para esta força de fricção é dada pela lei de Stokes:

$$F_{fric} = -\delta v.$$

Assim a equação do movimento de uma partícula sem forças adicionais é dada por:

$$m\dot{v} + \delta v = 0, \quad (7.1)$$

ou seja,

$$\dot{v}(t) = -\frac{\delta}{m}v(t) \Rightarrow v(t) = v(0)\exp\left(-t\frac{\delta}{m}\right).$$

A velocidade $v(t)$ é completamente determinada por seu valor inicial e como seu movimento é transmitido para as demais moléculas, sua velocidade decai para zero. Porém, a equação (7.1) somente é válida para partículas com massa grande, pois as velocidades causadas por flutuações térmicas são desprezíveis.

Pela lei de equi-partição, a energia cinética média de uma partícula é $\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}kT$, onde T é a temperatura, $\langle v^2 \rangle$ é a média das velocidades ao quadrado e k é a constante de Boltzmann.

Para partículas de massa pequena é possível observar a velocidade térmica

$$v_{term} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{k\frac{T}{m}}.$$

Assim, neste caso, a equação (7.1) não pode descrever o movimento da partícula. Para isto, é necessário adicionar uma força flutuante $F_f(t)$, isto é, a força total das moléculas agindo sobre uma partícula será decomposta nas forças de fricção e na força flutuante:

$$F(t) = F_{fric}(t) + F_{term}(t) = -\delta v(t) + F_{term}(t). \quad (7.2)$$

Esta força flutuante é uma força aleatória ou estocástica e suas propriedades são dadas apenas dentro de uma média.

Da equação (7.2) tem-se:

$$\begin{aligned} m\dot{v} + \delta v - F_{term} &= 0 \\ \dot{v} + \gamma v &= \Gamma(t), \end{aligned} \quad (7.3)$$

onde $\gamma = \frac{\delta}{m}$ e $\Gamma(t) = \frac{F_{term}(t)}{m}$ é chamada força de Langevin, que é uma força flutuante por unidade de massa.

Integrando a equação diferencial estocástica de Langevin (7.3) e usando as suas propriedades estatísticas é possível calcular a constante de difusão, obtida pela primeira vez por Einstein (EINSTEIN, 1905, 1906). Ele publicou um estudo matemático deste movimento que eventualmente conduziu para a descoberta do número de Avogrado.

Como a força de Langevin é uma força estocástica, a velocidade também será. Então, para saber a velocidade no intervalo $(v, v+dv)$ deve-se estudar o que acontece com sua distribuição de probabilidade $W(v, t)$. A densidade de probabilidade vezes o tamanho do intervalo dv resulta na probabilidade de se encontrar a partícula no intervalo $(v, v+dv)$. A equação de movimento para a função de distribuição $W(v, t)$ é dada por:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \gamma \frac{\partial (vW)}{\partial v} + \gamma \frac{kT}{m} \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}.$$

Esta equação de movimento é uma forma mais simplificada da equação de Fokker-Planck para a distribuição de probabilidade $W(v, t)$ do movimento Browniano unidimensional.

Observação: A equação geral de Fokker-Planck para uma variável x tem a forma

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x) \right] W, \quad (7.4)$$

onde $D^{(2)}(x) > 0$ é chamado coeficiente de difusão e $D^{(1)}(x)$ coeficiente de deriva, ambos dependente do tempo. A equação (7.4) é também chamada de equação de Kolmogorov.

Agora é dada uma definição de movimento Browniano baseada nas propriedades da força de Langevin.

Definição 7.1: Um movimento Browniano é um processo aleatório $B: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definido em um espaço de probabilidade, tal que:

- i) $B(0) = 0$ e $B(t)$ é uma função contínua de t
- ii) para qualquer $t \geq 0$ e $h > 0$, o incremento $B(t+h) - B(t)$ é normalmente distribuído com média zero e variância h , i.e.,

$$P(B(t+h) - B(t) \leq x) = (2\pi h)^{-1/2} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2h}\right) du,$$

onde P é uma medida de probabilidade.

- iii) se $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, os incrementos $B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ são independentes.

Pode-se notar que o movimento Browniano possui incrementos estacionários, i.e., os incrementos independem de t . Além disso, ele foi um dos primeiros exemplos de fenômenos naturais modelado pela geometria fractal.

Teorema 7.1: O gráfico da função do movimento Browniano $B: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tem dimensão de Hausdorff e dimensão “box counting” igual a 1,5.

Uma maneira de aproximar o movimento Browniano é a seguinte:

Seja

$$B_x(t) = \sqrt{x} \left(Y_1 + \dots + Y_{\left\lfloor \frac{t}{x} \right\rfloor} \right),$$

onde Y_i são variáveis aleatórias independentes, cada uma com probabilidade $\frac{1}{2}$ de valer 1 e probabilidade $\frac{1}{2}$ de valer -1 . Aqui $\left\lfloor \frac{t}{x} \right\rfloor = \max \left\{ z \in \mathbb{Z} : z \leq \frac{t}{x} \right\}$, então para t fixado, se x é pequeno, então a distribuição da variável $B_x(t)$ é aproximadamente normal com média zero, variância t e $B(t) = \lim_{x \rightarrow 0} B_x(t)$.

7.2. Movimento Browniano Fracionário

Apesar da importância teórica central do movimento Browniano, ele é muito restritivo para alguns propósitos. A dimensão fractal de seu gráfico é 1,5 (FALCONER, 1990), no entanto funções aleatórias com gráficos possuindo outras dimensões são solicitadas em uma variedade de modelamentos.

Pode ser mostrado que o processo Browniano é o único que tem os incrementos independentes que são estacionários e variância finita. Para obter outros processos com diferentes características é necessário relaxar algumas condições.

Definição 7.2: Movimento Browniano Fracionário de índice α , $0 < \alpha < 1$ é definido como um processo aleatório $Bf_\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ em um espaço de probabilidade tal que:

- i) $Bf_\alpha(0) = 0$ e $Bf_\alpha(t)$ é uma função contínua em t
- ii) para qualquer $t \geq 0$ e $h > 0$ os incrementos $Bf_\alpha(t+h) - Bf_\alpha(t)$ são normalmente distribuídos com média zero e variância $h^{2\alpha}$, i. e.,

$$P(Bf_\alpha(t+h) - Bf_\alpha(t) \leq x) = (2\pi)^{-1/2} h^{-\alpha} \int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{-u^2}{2h^{2\alpha}}\right) du.$$

Já foi mostrado que para $0 < \alpha < 1$ sempre existe um processo satisfazendo as condições acima.

Teorema 7.2: O gráfico da função do movimento Browniano fracionário de índice α , $Bf_\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tem dimensão de Hausdorff e “box counting” igual a $2 - \alpha$.

Mandelbrot e Van Ness (1968) definiram uma função $Bf_\alpha(t)$ da seguinte maneira:

$$Bf_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \int_{-\infty}^t (t-x)^{\alpha-\frac{1}{2}} dG(x).$$

Onde $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \exp(-t) dt$ é a função gama. Esta definição declara que o valor da função aleatória no instante t , depende de todos os incrementos passados $dG(x)$ com $x < t$ de um processo aleatório Gaussiano $G(x)$ com média zero e variância um.

A notação $dG(x)$ para uma variável aleatória se torna transparente quando se aproxima a integral pela somatória. As unidades de tempo da integração são escritas como $x = \frac{i}{n}$, onde $i = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, nt$ e os incrementos do processo $G(x)$ podem ser escritos como $n^{-1/2}C_i$, onde C_i agora é uma variável Gaussiana discreta com média zero e variância um. Assim tem-se:

$$Bf_\alpha(t) \approx \frac{1}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \sum_{i=-\infty}^{nt} \left(t - \frac{i}{n}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} n^{-1/2} C_i.$$

Um método alternativo para construir funções com características similares ao do movimento Browniano é aleatorizar a função de Weierstrass.

Considere a função

$$f_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \lambda^{-\alpha k} \sin(\lambda^k t + A_k),$$

onde $\lambda > 1$ e onde C_k são variáveis aleatórias normalmente distribuídas com média zero e variância um, e as fases A_k são independentes com distribuição uniforme em $[0, 2\pi)$. Então

$$Bf_\alpha(t) \approx f_\alpha(t).$$

7.3. Superfícies Brownianas Fracionárias

Superfícies Brownianas fracionárias são definidas de modo análogo ao movimento Browniano fracionário.

Definição 7.3: Para $0 < \alpha < 1$, diz-se que uma função $Bf_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Browniana fracionária de índice α se:

- i) $Bf_\alpha(0,0) = 0$ e $Bf_\alpha(x,y)$ é uma função contínua em (x,y)
- ii) para qualquer $(x,y), (h,k) \in \mathbb{R}^2$ os incrementos $Bf_\alpha(x+h, y+k) - Bf_\alpha(x,y)$ são normalmente distribuídos com média zero e variância $(h^2 + k^2)^\alpha$, i. e.,

$$P(Bf_\alpha(x+h, y+k) - Bf_\alpha(x,y) \leq z) = (2\pi)^{-1/2} (h^2 + k^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \int_{-\infty}^z \exp\left(\frac{-u^2}{2(h^2 + k^2)^\alpha}\right) du.$$

Teorema 7.3: Uma superfície Browniana fracionária de índice α possui dimensão de Hausdorff e “box counting” igual a $3 - \alpha$.

De maneira análoga ao movimento Browniano fracionário pode-se aproximar a superfície pela função aleatorizada de Weierstrass:

$$Bf_\alpha(x,y) \approx \sum_{k=1}^{\infty} C_k \lambda^{-\alpha k} \sin(\lambda^k (x \cos B_k + y \sin B_k) + A_k), \quad (7.5)$$

onde $\lambda > 1$ e onde C_k são variáveis aleatórias normalmente distribuídas com média zero e variância um, A_k e B_k são ambas independentes com distribuições uniformes em $[0, 2\pi)$. Quando o índice α na função Bf_α é alterado, muda-se a dimensão fractal do gráfico e, conseqüentemente, sua rugosidade, como é possível observar nas Figuras 7.1 (a) - (d) abaixo.

Figura 7.1 - Superfícies Brownianas geradas através da expressão (7.5), onde foi assumido o índice k da somatória, variando de um até oitenta.

7.4. Conclusões

Através dos movimentos Brownianos ordinários e fracionários é possível realizar aproximações em dados experimentais para extrair informações de sua geometria fractal. Porém, como o movimento fracionário possui dimensão fractal conhecida analiticamente e esta é ajustável, é possível modelar uma variedade de fenômenos maior do que com o movimento ordinário o qual possui dimensão de Hausdorff fixa. Além disso, a aproximação do movimento fracionário pela função aleatorizada de Weierstrass permite realizar aproximações com um baixo custo computacional (da ordem de 0 a 1 segundo).

Com este capítulo encerra-se a fundamentação teórica do trabalho. Porém, a riqueza de informações e a abrangência da teoria Fractal vão além dos tópicos estudados até aqui. É possível citar os seguintes assuntos relacionados: sistemas dinâmicos e a teoria do caos, teoria multifractal, cálculo diferencial fracionário, sistemas de Lindermayer, entre outros.

CAPÍTULO 8 - RESULTADOS

8. Resultados

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados das propostas de procedimentos e metodologias de processamento de sinais, utilizando a teoria da geometria fractal descrita nos capítulos anteriores.

Na primeira parte deste capítulo, é analisada e discutida a proposta de processamento ruídos provenientes de um sensor de gás de óxido de estanho, como resposta à exposição de diferentes gases. O desafio principal desta proposta, é a utilização de apenas um sensor de gás como um sistema de nariz eletrônico que permita classificar a resposta de diferentes gases. Os dados provenientes deste sensor foram cedidos por German S. Quispe (QUISPE, 2005).

Na segunda parte deste capítulo será discutida a proposta de processamento de sinais bidimensionais (imagens), provenientes de um sensor de gás cujo princípio de funcionamento é de um dispositivo do tipo Metal – Óxido – Semicondutor (MOS). Os dados provenientes deste sensor foram cedidos por Mauro Braga (BRAGA, 2006).

8.1. Sensor de gás de óxido de estanho

8.1.1. Aquisição dos dados

A resposta do sinal elétrico do sensor de gás de óxido de estanho, foi obtida imediatamente após a injeção dos gases analisados, isto é, foi adquirido o sinal antes de começar a mudar sua resposta de estado estacionário. Os detalhes do procedimento experimental utilizado para aquisição dos dados podem ser encontrados em (QUISPE, 2005). Basicamente foi utilizado um sensor de óxido de estanho colocado numa câmara de aproximadamente 275ml sem vedação, e polarizado com 5V DC. A resposta do sensor foi obtida através da medida do potencial no resistor de polarização de 10 K Ω (Figura 8.1). Para tal fim foi utilizado um osciloscópio com placa de aquisição de 10 GHz.

Figura 8.1 - Diagrama elétrico do sistema de medida.

O sensor foi submetido por 2 minutos, a vapores de diferentes compostos (0.5 ml.) injetados na câmara utilizando uma seringa. Os sinais de respostas do sensor para as correspondentes substâncias foram comparados entre si e com relação ao ar do laboratório.

Foram realizadas vinte e três medidas para cada um dos cinco diferentes gases utilizados no ensaio experimental, os sinais de resposta gerados pelo sensor são mostrados nas Figuras 8.2 (a), (b), (c), (d) e (e).

Figura 8.2 - Sinais de resposta do sensor de óxido de estanho após ser submetido à injeção de cinco diferentes gases.

Na Figura 8.2 observa-se que os sinais apresentam características de resposta aleatória (ruído). O desafio do presente trabalho foi realizar a extração de informação a partir destes sinais. Para tal fim foi proposta uma metodologia de análise utilizando a teoria da geometria fractal. Nesse sentido, foi considerado como premissa inicial que o processo de injeção do gás na câmara, onde está situado o sensor, após poucos segundos atinge uma condição de interação entre as moléculas do gás e sua superfície, descrevendo um movimento Browniano. Esta premissa sustenta-se no fato de ter sido utilizada baixas concentrações de gás e que o movimento de átomos e moléculas em sistemas de baixa concentração obedece às leis do movimento Browniano (RISKEN, 1984). Assim, foram utilizados modelos do movimento

Browniano fracionário para a extração de informação dos sinais de resposta do sensor, a fundamentação teórica deste movimento foi descrita anteriormente no capítulo 7.

8.1.2. Extração de Características - Movimento Browniano Fracionário

O movimento Browniano e sua aplicação em sensores de gases é natural, pelo fato deste movimento descrever a trajetória de partículas em suspensão (RISKEN, 1984), portanto quando as partículas de um gás entram em contato com a superfície do sensor, é possível interpretá-lo como uma janela que nos permite visualizar uma parte do movimento das partículas.

Considere o movimento Browniano fracionário modelado pela função aleatória de Weierstrass,

$$f_{\alpha}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \lambda^{-\alpha k} \sin(\lambda^k t + A_k), \quad (8.1)$$

onde $\lambda > 1$, C_k são variáveis aleatórias normalmente distribuídas com média zero e variância um, e as fases A_k são independentes com distribuição uniforme em $[0, 2\pi)$.

Com a finalidade de interpretar a participação dos parâmetros C_k , λ , α na característica da função $f_{\alpha}(t)$, foram simuladas diferentes curvas que são apresentadas na Figura 8.3.

É possível perceber pelas Figuras 8.3 (a) - (f) que ao aumentar a dimensão fracionária, através do parâmetro α aumenta-se a rugosidade dos gráficos, assim quando a dimensão se aproxima ao valor de 2 ($\alpha = 0$) a função mostra-se mais ruidosa semelhante aos sinais de resposta do sensor, mostrando a consistência na proposta de utilização deste modelo para a extração de informação a partir de sinais de ruído. Importante remarcar que a dimensão fractal, das curvas, está definida pela relação $2-\alpha$.

Figura 8.3 Gráficos da equação (8.1) variando suas dimensões fractais

A extração de parâmetros dos sinais de resposta do sensor foi realizada através do ajuste com a função definida na equação (8.1). Para tal fim foi definida a função erro expressa por:

$$e(\alpha, \lambda) = \sum_{i=1}^N \left(f_{\alpha}(t_i) - data(i) \right)^2, \quad (8.2.)$$

onde $f_{\alpha}(t_i)$ é a função expressa pela equação (8.1) e $data(i)$ são os dados experimentais correspondente aos sinais de resposta do sensor (Figura 8.2). Os parâmetros C_k foram gerados aleatoriamente tendo sido ajustados os parâmetros α , λ respectivamente. A superfície da função erro é mostrada na Figura 8.4, onde pode ser observado que o mínimo desta função acumula-se em valores para α pequenos (menores que 0,5) e valores de λ no intervalo $1,5 \leq \lambda \leq 2,5$ que foram confirmadas pelas curvas apresentadas na Figura 8.5.

Figura 8.4 – Superfície de erros para uma dada substância

Figura 8.5 - Curvas de erros em função do parâmetro α para diferentes λ fixos da superfície 8.4

Na Tabela 8.1 são apresentados os valores dos parâmetros α e λ , correspondentes às diferentes substâncias utilizadas no ensaio experimental do sensor de gás de óxido de estanho.

	Acetona	Isopropílico	Álcool	Tricloretileno	Sem Subst.
α	0,014	0,0317	0,0317	0,0317	0,014
λ	2	1,95	2,25	2,25	2

Tabela 8.1 - Tabela com os melhores valores de alfa e lambda utilizando o índice k variando de 1 a 50 e o índice N variando de 1 a 100.

Na Tabela 8.1 pode ser observado que alguns valores de α e λ (parâmetros da característica fractal das curvas de resposta) são iguais mesmo quando as substâncias são diferentes, o que não permite uma classificação das substâncias. No entanto, fazendo uma análise do tipo espectral conseguiu-se classificar as diferentes substâncias como descrito no texto mais adiante.

Após a determinação dos parâmetros α e λ o seguinte passo foi o cálculo dos parâmetros C_k . Para tal fim a variável aleatória A_k foi escolhida arbitrariamente e fixada para todas as substâncias, isto foi possível, já que a análise espectral é realizada utilizando-se o módulo da amplitude. A seguir a obtenção dos C_k foi realizada através do método dos mínimos quadrados utilizando k variando de 1 a 50.

Nas Figuras 8.6 (a) - (e), são exibidas as variáveis aleatórias C_k aproximadas pelo método de mínimos quadrados para as vinte e três amostras de cada uma das cinco substâncias em função do parâmetro k , que corresponde ao índice representativo da frequência de oscilação da função $f_\alpha(t)$.

(a) acetona $\alpha = 0,014$ e $\lambda = 2$

(b) isopropílico $\alpha = 0,0317$ e $\lambda = 1,95$

(c) álcool 92. $\alpha = 0,0317$ e $\lambda = 2,25$

(d) ar laboratório $\alpha = 0,014$ e $\lambda = 2$

(e) tricloretileno $\alpha = 0,0317$ $\lambda = 2,25$

Figura 8.6 - Variáveis aleatórias aproximadas pelo método dos mínimos quadrados

A seguir foi calculado o espectro ($eixo\ x = \lambda^k$, $eixo\ y = |C_k \lambda^{-\alpha k}|$) dos 23 sinais de resposta para cada uma das 5 substâncias utilizadas no ensaio experimental. Os resultados destes espectros são mostrados nas Figuras 8.7 (a) – (e) em escala linear da frequência e nas Figuras 8.8 (a) – (e) em escala logarítmica da frequência.

Figura 8.7 - Espectros das variáveis aleatórias com frequência em escala linear

(a) acetona $\alpha = 0,014$ e $\lambda = 2$

(b) isopropílico $\alpha = 0,0317$ e $\lambda = 1,95$

(c) álcool 92. $\alpha = 0,0317$ e $\lambda = 2,25$

(d) ar laboratório $\alpha = 0,014$ e $\lambda = 2$

(e) tricloretileno $\alpha = 0,0317$ $\lambda = 2,25$

Figura 8.8 - Espectros das variáveis aleatórias com frequência em escala logarítmica

A partir dos resultados dos espectros (Figuras 8.7 e 8.8) foram extraídos os parâmetros de amplitude – frequência. Com este conjunto de dados foi gerado o gráfico da Figura 8.9. O gráfico foi construído considerando o seguinte critério, primeiro foram agrupadas as substâncias que apresentaram o mesmo valor de λ logo foi considerada a linha espectral com máxima amplitude, dentro de cada classe com mesmo λ , como referência de comparação. No presente trabalho o álcool-92 e o tricloroetileno apresentaram $\lambda=2,25$, outras substâncias com o mesmo valor de $\lambda=2$ correspondem à resposta para o gás de acetona e ar do ambiente, no caso do álcool isopropílico o valor de λ foi de 1,95 neste caso a classificação foi mais direta devido à diferença entre os valores de frequência.

Figura 8.9. Gráfico da amplitude em função da frequência correspondente aos espectros mostrados nas figuras 8.7 e 8.8 respectivamente.

Na Figura 8.9 observa-se que mesmo levando em conta a dispersão das amplitudes das linhas espectrais, a classificação utilizando este método foi de 100% para todos os gases analisados. Os resultados obtidos através do método proposto utilizando modelos da teoria de geometria fractal mostraram-se mais eficazes na tarefa de classificação mostrando uma elevada taxa de acerto se comparado com os obtidos por métodos convencionais de processamento de sinais reportado na literatura (QUISPE, 2002). A metodologia proposta aqui não foi encontrada na

literatura e adicionalmente, ela proporciona a possibilidade de utilizar apenas um único sensor como sistema de nariz eletrônico.

8.2. Sensor tipo MOS.

A resposta do sensor MOS está baseada na formação de uma imagem produzida pela foto corrente induzida por uma fonte de excitação laser focalizada num tamanho de feixe da ordem de 2 μm . A imagem é obtida após realizar uma varredura do feixe Laser na superfície do sensor que compreende regiões de eletrodo (metal) e regiões de SiO_2 (sem metal), formado-se desta forma um padrão característico para cada tipo de gás utilizado no ensaio experimental. No presente trabalho foram propostas duas metodologias para classificar a resposta do sensor submetido a diferentes substâncias, no primeiro caso foi proposto o método de compressão de imagem fractal cuja teoria foi apresentada e discutida anteriormente (cap. 5). No segundo caso foi proposto o método de dimensão fractal multiescala que em geral é utilizado na identificação de padrões de formas como reportado na literatura (TORRES; FALCÃO; COSTA, 2004). Ambos os métodos propostos mostraram-se eficientes na interpretação das imagens 2D correspondentes aos sinais de respostas do sensor MOS.

8.2.1. Aquisição dos Dados

O sensor MOS utilizado para a detecção de gases foi desenvolvido pelo mestrando Mauro Braga e cujos detalhes de seu trabalho podem ser encontrados em (BRAGA, 2006). Basicamente o sensor consiste de um capacitor MOS apresentando duas portas metálicas na forma de uma elipse bipartida tendo como filmes sensíveis, paládio e ouro, Figura 8.10. Para a caracterização de seu comportamento, foi utilizada a técnica de escaneamento por luz pulsada – TELP (Figura 8.11), obtendo-se uma superfície gerada pelas foto-correntes induzidas nas diferentes regiões do sensor (imagem olfativa) em função dos gases em análise.

Figura 8.10 - Aparato experimental para a aquisição de imagens olfativas

Figura 8.11 - Técnica de Escaneamento por luz pulsada (FILIPPINI; LUNDSTRÖM, 2003)

Na Figura 8.11 é apresentado um esquema ilustrativo de um sensor constituído de uma matriz de eletrodos, junto com as imagens geradas como resposta à exposição de diferentes substâncias (FILIPPINI; LUNDSTRÖM, 2003).

As imagens correspondentes às respostas obtidas para o sensor MOS do presente trabalho sob ação de dois diferentes gases (hidrogênio e nitrogênio) são mostradas nas Figuras 8.12 (a) e (b). Observa-se que as imagens são diferentes e que intuitivamente pode-se inferir que o sensor consegue distinguir uma substância da outra. O desafio do presente trabalho foi a de

propor metodologias que permitam a extração de parâmetros para uma identificação (classificação) quantitativa da resposta do sensor exposta a diferentes substâncias. Os métodos propostos se referem a processos de compressão fractal de imagens e cálculo de parâmetros de dimensão fractal multiescala que descreveremos a seguir.

Figura 8.12 - Imagens olfativas obtidas pelo sensor MOS (Braga, 2006)

8.2.2. Metodologias para a Extração de Características a partir de imagens

Nesta seção são descritas as metodologias e os resultados para a extração de informações das imagens provenientes do sensor MOS acima descrito. Antes da apresentação dos resultados são apresentados as validações dos algoritmos de dimensão fractal e sistema de funções iteradas parciais utilizadas no processo de compressão fractal de imagens.

8.2.2.1 Validação dos algoritmos utilizados para o cálculo da Dimensão Fractal.

A dimensão de Hausdorff apesar de não distinguir completamente um fractal é seu principal parâmetro, através dela conhecemos a “rugosidade” do conjunto, assim seu cálculo fornece informação que pode auxiliar a tarefa de reconhecimento. Foram utilizados os algoritmos de “box counting” e “walking divider” (TURNER, BLACKLEDGE, ANDREWS, 1998), para fornecer uma aproximação da dimensão de Hausdorff. Para validar esses algoritmos foram utilizadas funções fractais com dimensão fracionária conhecida. Em (FALCONER, 1990) encontra-se um exemplo destas funções:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \text{sen}(\lambda^k t), \quad (8.2)$$

onde $\lambda = 1,5$ e s é a dimensão fractal do gráfico desta função.

No capítulo 4 foram descritos os algoritmos de “Box counting” e “walking divider”, onde foi mencionado que o algoritmo de “Box counting” consiste no processo de cobrir a curva por caixas de diferentes tamanhos. O algoritmo “walking divider” de forma semelhante consiste em cobrir a curva com segmentos de retas de diferentes tamanhos.

Na Figura 8.13 são mostrados os gráficos de f para diferentes dimensões.

Figura 8.13 - Gráfico da equação (8.2) com diferentes dimensões

Nas Figuras 8.14 (a) - (d) é possível observar as curvas de $\log(\text{tamanho do segmento})$ versus $\log(\text{número de segmentos})$ a partir da qual foram determinadas as dimensões fractais obtidas pelo algoritmo “walking divider”. Os erros dos valores calculados em relação aos valores teóricos da dimensão fractal das curvas estão descritos na Tabela 8.2.

Figura 8.14 - Dimensão fractal pelo método “Walking-Divider”

Dimensão Analítica	Dimensão “Walking-Divider”	erro %
1.1	1.1052	0.47
1.3	1.2904	0.74
1.5	1.4523	3.18
1.7	1.6685	1.85
Erro médio		2.08

Tabela 8.2 - Erros do algoritmo “Walking-Divider”

De maneira análoga foram calculadas as dimensões utilizando o algoritmo “box-counting”,
Figuras 8.15 (a) - (d).

(a)

(b)

(c)

(d)

Figura 8.15 - Dimensão fractal pelo método “box-counting”

Os erros cometidos na aproximação da dimensão pelo método “box counting” estão descritos na tabela 8.3.

Dimensão Analítica	Dimensão “Box-Counting”	erro %
1.1	1.144	4
1.3	1.3039	0.3
1.5	1.4359	4.27
1.7	1.5802	7.05
	Erro médio	5.21

Tabela 8.3 - Erros do algoritmo “Box-Counting”

Pelos resultados apresentados nas Tabelas 8.2 e 8.3, é possível perceber que os algoritmos “walking-divider” e “box-counting” apresentaram um baixo erro quando submetidos a curvas fractais com dimensão fracionária já conhecida, o que mostra que ambos algoritmos são consistentes.

8.2.2.2 Validação do algoritmo de Sistema de Funções Iteradas aplicadas na compressão fractal de imagens.

A compressão fractal de imagens esta baseada na aplicação de funções iteradas (eq. 8.3) tendo como parâmetros os coeficientes a_i , b_i , c_i e d_i relacionados com transformações de rotação e reflexão. Os coeficientes e_i , f_i estão relacionados com transformações de translação, o coeficiente s_i corresponde ao fator de escala e o coeficiente k_i corresponde à transformação relacionada com o brilho. Os coeficientes s_i e k_i são considerados os parâmetros importantes nos processos de compressão de imagens, em particular o coeficiente s_i , que define a característica fractal da função iterada.

Como discutido no capítulo 5 a transformação definida pela equação (8.3) apresenta um ponto fixo que corresponde à imagem que foi submetida ao processo de compressão, isto é, os coeficientes da equação (8.3) definem completamente a imagem. A determinação dos coeficientes passa pela definição do espaço domínio e o espaço imagem, o espaço imagem é constituído de uma partição da imagem total, isto é, sub-regiões da imagem em estudo com

tamanhos definidos, o espaço domínio é constituído de pequenas regiões da imagem (subconjuntos) cujas dimensões são maiores que as contidas no espaço imagem.

A validação do algoritmo de PIFS foi realizada através de testes com imagens comumente utilizadas em processamento e imagens, Figuras 8.16 (a) e (b).

(a) Bird

(b) Lenna

Figura 8.16 - Figuras comumente utilizadas em processamento de imagens

Primeiramente foram obtidos para as Figuras 8.16 (a) e (b) seus respectivos parâmetros responsáveis pela composição do sistema de funções iteradas parciais, através do algoritmo descrito na secção 5.2.2. Depois de determinado o PIFS utilizou-se uma imagem inicial para realizar as iterações do sistema. Nas Figuras 8.17 (a) - (d) são mostrados os gráficos do comportamento dos principais parâmetros do PIFS dado pela equação (8.3):

$$w_i \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i & 0 \\ c_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & s_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \\ k_i \end{bmatrix} \quad (8.3).$$

(a) comportamento dos s_i (b) comportamento dos k_i (c) comportamento dos e_i (d) comportamento dos f_i

Figura 8.17 - Principais parâmetros do sistema de funções iteradas parciais encontrados para a Figura 8.16 (a).

Utilizando o PIFS foi possível obter a aproximação da imagem original através das iterações mostradas nas Figuras 8.18.

Figura 8.18 - Aproximação por sistemas de funções iteradas parciais da Figura 8.16 (a).

De maneira análoga foi repetido o procedimento para a Figura 8.16 (b). Primeiro se determinou os principais parâmetros do PIFS, apresentados nas Figuras 8.19 (a) - (d).

Figura 8.19 - Principais parâmetros do sistema de funções iteradas parciais encontrados para a Figura 8.16 (b).

Depois de determinado o PIFS, realizou-se o processo de aproximação da imagem original mostrado nas Figuras 8.20.

Figura 8.20 - Aproximação por sistemas de funções iteradas parciais da Figura 8.16 (b).

É possível perceber que a partir da décima iteração as Figuras aproximadas já possuem boa semelhança com as originais para ambas as imagens, mostrando que os coeficientes da transformação (8.3) caracterizam de maneira única às imagens analisadas. Por outro lado, é possível observar que os parâmetros e_i e f_i da equação (8.3) são semelhantes para ambas as imagens analisadas, isto era esperado já que estes coeficientes representam apenas transformações de translação da posição das diferentes regiões utilizadas no ajuste. Os

coeficientes s_i e k_i mostraram-se como vetores característicos para cada imagem, isto é, estes coeficientes identificam a imagem e podem ser utilizados como assinaturas próprias de cada imagem. No caso das imagens que são respostas do sensor MOS utilizaremos os coeficientes s_i e k_i como vetores de identificação da assinatura da resposta do sensor a cada tipo de gás.

Utilizando o algoritmo testado com as imagens acima, foram determinados os coeficientes s_i e k_i para as imagens correspondentes às respostas do sensor MOS para o gás de Hidrogênio e Nitrogênio respectivamente. Estes coeficientes são mostrados nas Figuras 8.21 (b) e (c) e nas Figuras 8.22 (b) e (c) respectivamente.

Figura 8.21 - Matrizes vetoriais dos parâmetros da equação (8.3)

Figura 8.22 - Matrizes vetoriais dos parâmetros da equação (8.3)

Os gráficos do comportamento dos coeficientes s_i e k_i (Fig. 8.21 e 8.22) mostram que estas matrizes vetoriais classificam plenamente a resposta do sensor para o gás de Hidrogênio e Nitrogênio respectivamente, apresentando-se como um método eficiente na análise e interpretação da resposta de sinais 2D.

A teoria da geometria fractal fornece a possibilidade de análise e processamento de sinais que podem ser abordados com diferentes estratégias, um desses métodos consiste em determinar a assinatura de um sinal 2D através do comportamento da sua curva de dimensão fractal multiescala que será discutido e apresentado a seguir.

8.2.2.3. Validação do algoritmo de cálculo da dimensão fractal pelo método “Box Counting 3D” e sua aplicação na análise da resposta do sensor MOS.

Como descrito na secção 4.5.5, o método de “Box Counting 3D” baseia-se na cobertura da superfície por cubos de tal forma que à medida que os lados dos cubos se aproximam de zero, esta cobertura se aproxima da forma da superfície em estudo. A dimensão fracionária é determinada a partir do gráfico do logaritmo do tamanho do lado, em função do logaritmo do número de cubos utilizados para cobrir a superfície. Para validar a precisão deste método no cálculo da dimensão fractal foram geradas várias superfícies fractais de dimensões conhecidas utilizando-se o método de superfícies Brownianas fracionárias, os gráficos destas superfícies são mostrados nas Figuras 8.23 (a) – (e). Foi realizado o cálculo computacional da dimensão fractal das superfícies pelo método acima descrito cujos resultados são consolidados na Tabela 8.4.

(a) Dimensão fractal analítica 2,1

(b) Dimensão fractal analítica 2,3

(c) Dimensão fractal analítica 2,5

(d) Dimensão fractal analítica 2,7

(e) Dimensão fractal analítica 2,9

Figura 8.23. Superfícies Brownianas com dimensão fractal conhecida.

Dimensão Analítica	Quatro pontos de observação	Erro %
2.1	2.41255777471394	14,8837036
2.3	2.46024669548782	6,96724763
2.5	2.55561897287102	2,22475891
2.7	2.62613620012120	2,73569629
2.9	2.81364150543309	2,97787912
	Erro Médio	5,9578571

Tabela 8.4 - Valores teóricos da dimensão fractal das superfícies das Figuras 8.23 (a) –(e) e valores computacionais utilizando-se o algoritmo de “Box Counting 3D” com quatro pontos para ajuste da reta.

Os resultados obtidos com o algoritmo de “box counting 3D” mostraram uma elevada precisão em relação aos valores analíticos como pode ser observado na Tabela 8.4, mostrando a consistência do algoritmo o que nos permitirá utiliza-lo no cálculo da dimensão fractal de qualquer superfície. Apesar da excelente aproximação de valores da dimensão fractal obtida, o algoritmo mostra uma forte dependência com o escalamento devido estas superfícies não serem fractais perfeitos, isto é, com resolução infinita, esta dependência da escala resulta na

não linearidade do gráfico log – log dificultando o cálculo da dimensão fractal da superfície. No entanto, este comportamento pode resultar sendo uma ferramenta interessante de reconhecimento se for considerado como uma assinatura que identifica a superfície como reportado em (TORRES; FALCÃO; COSTA, 2004). Esta assinatura é determinada após derivar a curva log – log obtendo-se assim uma curva com os valores da dimensão fractal em função da escala denominada curva de dimensão fractal multiescala.

Verificada a consistência do algoritmo de cálculo da dimensão fractal, foram analisadas as imagens de resposta do sensor MOS e determinadas suas curvas de dimensão fractal multiescala que são mostradas nas Figuras 8.24 (b) e 8.25 (b) respectivamente.

Figura 8.24. (a) Gráfico do sinal de resposta do sensor MOS submetido a ambiente de gás de nitrogênio (b) Curva da dimensão multiescala fractal obtida da superfície do sinal de resposta do sensor.

Figura 8.25. (a) Gráfico do sinal de resposta do sensor MOS submetido a ambiente de gás de hidrogênio. (b) Curva da dimensão multiescala fractal obtida da superfície do sinal de resposta do sensor.

Os resultados das curvas da dimensão fractal multiescala mostram-se bem diferentes se comparadas em relação à resposta do sensor para cada tipo de gás. No gráfico da Figura 8.26 (a) observa-se claramente que estas curvas são diferentes e que elas podem ser utilizadas como assinaturas para a resposta do sensor a cada tipo de gás. Nesse sentido com a finalidade de definir um vetor representativo destas assinaturas, as curvas foram ajustadas por funções polinomiais. Os coeficientes dos polinômios foram utilizados como elementos de reconhecimento das respostas do sensor e estão representados na Figura 8.26 (b). Nesta figura observa-se que os coeficientes dos polinômios para cada tipo de gás (nitrogênio e hidrogênio) são diferentes exceto para o coeficiente independente, este resultado mostra que o método da dimensão fractal multiescala resulta em uma excelente ferramenta para a classificação da resposta do sensor MOS de gases.

Figura 8.26. (a) Gráfico das curvas da dimensão fractal multiescala correspondente aos sinais de resposta do sensor para o gás de hidrogênio e nitrogênio respectivamente. (b) gráfico dos coeficientes dos polinômios de ajuste das curvas de (a).

8.3. Conclusões Gerais

A natureza em geral apresenta formas cujas características geométricas mostram-se complexas, em particular na engenharia a resposta de sensores apresentam este tipo de características. No presente trabalho foi mostrado que, utilizando a geometria fractal é possível modelar estes eventos e em particular a resposta de sensores de gases.

Neste trabalho foram investigados e aplicados vários métodos para reconhecimento de padrões e processamento de sinais, utilizando modelos da teoria de geometria fractal

ampliando as fronteiras de aplicação existentes na área de análise de dados e contribuindo no campo de processamento de sinais em narizes eletrônicos.

Através das técnicas aplicadas a diversos tipos de dados experimentais, observou-se diferença entre os espectros das substâncias analisadas, conseguindo desta forma fazer o reconhecimento de padrões. Neste sentido, também foram feitas contribuições no sentido de estabelecer metodologias e estratégias para a discriminação de substâncias como os gases combustíveis, a partir da resposta de sinais com características ruidosas de um sensor de óxido de estanho.

Os resultados descritos para o sensor de óxido de estanho foram satisfatórios, pois através das características apresentadas pelos espectros das variáveis aleatórias, utilizadas para gerar o movimento Browniano Fracionário, foi possível distinguir as cinco substâncias utilizadas no ensaio com uma alta repetibilidade para as vinte e três amostras de cada uma das cinco substâncias, mostrando uma taxa de acerto de 100% para discriminar entre as diferentes substâncias.

Para o sensor MOS cujo sinal de resposta foi do tipo imagem foi proposta duas metodologias para o processamento e reconhecimento destes sinais, a primeira consistiu na análise das imagens respostas através do modelo de compressão fractal onde foram identificados os coeficientes que representavam a assinatura da resposta do sensor a cada tipo de gás com o auxílio das funções iteradas parcialmente (PIFSs). O segundo método proposto foi baseado na determinação da dimensão fractal multiescala como assinatura de reconhecimento do sinais de resposta do sensor para cada tipo de gás. Os resultados obtidos com ambos os métodos se mostraram promissores, sendo possível perceber pelos gráficos apresentados que a dimensão fractal multiescala associada aos PIFSs, podem fornecer informações suficientes para o reconhecimento das imagens obtidas pelo sensor.

Os resultados para ambos os sensores confirmam a eficiência da geometria fractal em sistemas de reconhecimento de padrões. Além das metodologias desenvolvidas neste trabalho ainda é possível utilizar outros aspectos da geometria fractal, como por exemplo as medidas p-ponderadas associadas aos IFSs com probabilidades e os processos markovianos resultantes destes.

9. BIBLIOGRAFIA

AHAMMER, H.; DeVANEY, T. T. J. The influence of noise on the generalized dimensions. *Chaos, Solutions and Fractals*, 26, pp. 707-717, 2005.

BARNSLEY, M. F. Fractal functions and interpolation. *Const. Approx.*, 2, pp. 303-329, 1986.

BARNSLEY, M. F.; HARRINGTON, A. N. The calculus of fractal interpolation functions. *Journal of Approximation Theory*, 57, pp. 14-34, 1989.

BEDFORD, T.; DEKKING, M.; KEANE, M. Fractal image coding techniques and contraction operators. Delft University of Technology Report, pp. 92-93, 1992.

BOHES, J E. L.; SENEVIRATHNE, T. R. Speech Recognition using fractals. *Pattern Recognition*, 34, pp. 2227-2243, 2001.

BRAGA, M. S.; MATOS, K. R. M.; FERNANDES, F. J. Ramirez; SALCEDO, W. J. Photocurrent Chemical Image Gas Sensor. SBPmat 2006, Florianópolis-SC, Pôster, Florianópolis, 2006.

CHENG, Fang-Hsuan, CHEN, Yu-Liang, Real time multiple objects tracking and identification based on discrete wavelet transform, *Pattern Recognition*, 39, pp. 1126 – 1139, 2006.

CLARK, K., Scale based simulation of topographic relief, *The American Cartographer*, 12, pp. 85-98, 1988.

COSTA, L. da F.; CAMPOS, A. G.; MANOEL, E. T. An Integrated Approach to Shape Analysis: Results and Perspectives. *International Conference on Quality by Artificial Vision*, Le Cresout, France, 2001.

COSTA, Sílvia M. F. Classificação e Verificação de Impressões Digitais. Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2001.

CROOM, Fred H. Basic Concepts of Algebraic Topology. Springer-Verlag, New York, 1978.

DAROWICKI, K.; ZIELINSKI, A. Joint time-frequency analysis of electrochemical noise. *Journal of Electroanalytical Chemistry*, 504, pp. 201-207, 2001.

DAUBESCHIES, I. Tem Lectures on Wavelets. SIAM, 1992.

DeCOLA, L. Fractal analysis of a classified Landsat scene. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 55, pp. 601-610, 1989.

DRAI, R.; BENAMMAR, A.; BENCHAAALA, A.. Signal processing for the detection of multiple imperfection echoes drowned in the structural noise. *Ultrasonics*, 42, pp. 831-835, 2004.

EDGAR, G. A. Classics on Fractals. Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1993.

- EDGAR, G. A. Measure, Topology and Fractal Geometry. Springer-Verlag, New York, 1990.
- EINSTEIN, A. Ann. Physik ,17, pp. 549, 1905.
- EINSTEIN, A. Ann. Physik, 19, pp. 371, 1906.
- FALCONER, Kenneth. Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications. Ed. John Wiley & Sons, Canadá, 1990.
- FILIPPINI, D.; LUNDSTRÖM, I. Distinctive photocurrent chemical images on bare SiO₂ between continuous metal gates. Sensors and Actuators B, v. b95, p. 116-122, 2003.
- GRABER, N.; LÜDI, H.; WIDMER, H. M. The Use of Chemical Sensors in Industry. Sensors and Actuators B, v. b1, p.239-243, 1990.
- GRAY, Robert M. Entropy and information theory. Springer-Verlag, New York, 1990.
- HAUSDORFF, F. Dimension and exterior. Mass. Math. Ann., 79, pp 157-179, 1919.
- HUREWICZ, W.; WALLMAN, H. Dimension Theory. Princeton University Press, 1941.
- JOLLIFFE. Principal Component Analysis. NY: Springer-Verlag, 1986.
- KOHN, André F. Reconhecimento de Padrões – Uma abordagem Estatística. EPUSP, São Paulo – SP, Brasil, 1998.
- KURATOWSKI, C. Topologie II, Dimension Theory. North Holland, 1978.
- LECLERC, F.; PLAMONDON, R. Automatic signature verification: the state of the art 1989-1993. Int. J. Pattern Recognition Artific. Intell., 8, pp. 643-659, 1994.
- LIPSCHUTZ, Seymour, Topologia geral, Sao Paulo, McGRAW-HILL, 1971
- MANDELBROT, B. B. The Fractal Geometry of Nature. W. H. Freeman, Oxford, 1983.
- MASSOPUST, P. R. Fractal Functions and their Applications. Chaos, Solitons & Fractals, vol. 8, n. 2, pp. 171-190, 1997
- MASSOPUST, P. R. Fractal function, fractal surfaces and wavelets. Academic Press, USA, 1994.
- MEIXNER, H.; GERBLINGER, J.; FLEISCHER, M. Sensor for Monitoring Environmental Pollution. Sensors and Actuators B, v. b15, n.1-3, p.45-54, 1993.

MEYER, Helen. Abstracts of articles and Recent Literature. Computers and Security, vol. 18, pp. 149-154, 1999.

MIZSEI, J. Chemical imaging by direct methods. Thin Solid Films, v.436, pp.25-33, 2003.

MORETIN, Pedro A. Ondas e Ondaletas, da Análise de Fourier à Análise de Ondaletas. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

PAVEL, M. Fundamentals of Pattern Recognition” 2nd ed. Marcel Dekker, Paris, France, 1993.

PEITGEN, H. O.; JÜRGENS, H.; DIETMAR, S. Chaos and Fractals: New Frontiers of Science. Springer-Verlag, New York, 1992.

PELI, T.; TOM, V.; LEE, V. Multi-scale fractal and correlation signatures for image screening and natural clutter suppression. SPIE Visual Communication and Image Processing IV, 1199, pp. 402-415, 1989.

PLÖTZ, Thomas; FINK, Gernot A. Pattern recognition methods for advanced stochastic protein sequence analysis using HMMs. Pattern Recognition, 39, pp.2267 – 2280, 2006.

PURKAIT, P.; CHAKRAVORTI, S. Can Fractal Techniques be used for Impulse Fault Pattern Discrimination in Distribution Transformers?. Electric Power Systems Research, 68, pp. 258–267, 2004.

QUISPE, G. C. S. Reconhecimento de Padrões em Sensores Integrados. Tese Doutorado, Escola Politécnica da USP, 2005.

QUISPE, G. C. S. Reconhecimento de substâncias através de ruído, IBERSENSOR 2002 Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú, 2002.

RISKEN, H. The Fokker-Planck Equation. Spriger, Berlin, 1984.

RODRIGUES, R. J.; KUPAC, V. G. ;THOMÉ, A. C. G. Character Feature Extraction Using Polygonal Sweep (Contour Detection). IWANN2001, Granade-Spain, June 13-15, 2001.

SÁNCHEZ, José A.; TRAVIESO, Carlos M.; ALONSO, Itizar G.; FERRER, Miguel A. Handwritten signatures recognizer by its envelope and strokes layout using HMM's. IEEE, pp. 267-271, 2001.

SHELBERG, M. The development of a curve and surface algorithm to measure fractal dimensions. Master's thesis, Ohio State University, 1982.

SHIEH, Narn-Rueih; YU, Jinghu. Dimensions of supercritical branching processes in varying environments. Statistics & Probability Letters, 70, pp. 299–308, 2004.

TANG, Yuan Y., TAO, Yu, LAM, Ernest C. M., New method for feature extraction base on fractal behavior, Pattern Recognition 35, pp. 1071-1081, 2002.

TORRES, R. da S.; FALCÃO, A.X; COSTA, L. da F. A graph-based approach for multiscale shape analysis. *Pattern Recognition*, 37, pp. 1163-1174, 2004

TURNER, Martin J.; BLACKLEDGE, Jonathan M.; ANDREWS, Patrick R. *Fractal Geometry in Digital Imaging*. Academic Press, Cambridge, 1998.

ULLMANN, J. R. *Pattern Recognition Techniques*. Crane, Russak e Company, Inc. New York, 1973.

VIDYBIDA, A. K. Adsorption-desorption noise can be used for improving selectivity. *Sensors and Actuators A*, 107, pp. 233-237, 2003.

VOSS, R. *Random fractals: Characterisation and Measurement*. R. Pynn and A. Skjeltorps, *Scaling Phenomena in Disordered Systems*, Plenum, New York, 1985.

WAGON, S., *The Banach–Tarski Paradox*, Cambridge University Press, 1986