YEISON ANDRÉS ZABALA

**Uma formulação por média-variância multi-período
para o erro de rastreamento em carteiras de investimento**

São Paulo
2016

YEISON ANDRÉS ZABALA

**Uma formulação por média-variância multi-período
para o erro de rastreamento em carteiras de investimento**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do tí-
tulo de Mestre em Ciências.

Área de concentração:
Engenharia de Sistemas

Orientador: Prof. Titular
Oswaldo Luiz do Valle Costa

São Paulo
2016

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 04 de Março de 2016

Assinatura do autor:

Yeison A. Zabala

Assinatura do orientador:

Osvaldo José Velloso

Catálogo-na-publicação

Zabala, Yeison Andrés

Uma formulação por média-variância multi-período para o erro de rastreamento em carteiras de investimento / Y. A. Zabala -- versão corr. -- São Paulo, 2016.

67 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle.

1. Controle Ótimo Estocástico 2. Matemática Aplicada às Finanças
3. Estratégias de Investimento 4. Administração de Carteiras I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle II. t.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Oswaldo Luiz do Valle Costa, por me dar a oportunidade de ser seu orientado e me inspirar na área de pesquisa envolvida no presente trabalho. Estou muito grato também pela sua importante colaboração, total disponibilidade e paciência no desenvolvimento desta dissertação.

A minha namorada, Lina M. Osório, pelo seu constante apoio, seus cuidados e amor, já que tem sido a energia diária para minha alma e a fonte de ânimo nos momentos difíceis. Dou graças também as suas boas e acertadas sugestões no referente à escrita deste trabalho.

A minha família, que são meu motor para nunca desistir dos meus objetivos, mesmo que sempre esteja imerso na grande saudade consequente da distância que nos separa, ao mesmo tempo, uma maior felicidade me consola, produto das boas lembranças que preveem um emotivo encontro .

Aos meus amigos, colombianos e brasileiros, por me fazer sentir em casa nos momentos que curto da sua companhia.

Finalmente, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, pela financiamento para o desenvolvimento desta dissertação.

“La chispa nace de la obstinación”
Emil Michel Cioran.

Resumo

Neste trabalho, deriva-se uma política de escolha ótima baseada na análise de média-variância para o Erro de Rastreamento no cenário Multi-período –ERM–. Referindo-se ao ERM como a diferença entre o capital acumulado pela carteira escolhida e o acumulado pela carteira de um benchmark. Assim, foi aplicada a metodologia abordada por Li-Ng em [24] para a solução analítica, obtendo-se dessa maneira uma generalização do caso uniperíodo introduzido por Roll em [38]. Em seguida, selecionou-se um portfólio do mercado de ações brasileiro baseado no fator de correlação, e adotou-se como benchmark o índice da bolsa de valores do estado de São Paulo *IBOVESPA*, além da taxa básica de juros SELIC como ativo de renda fixa. Dois casos foram abordados: carteira composta somente de ativos de risco, caso I, e carteira com um ativo sem risco –indexado à SELIC– e ativos do caso I (caso II).

Palavras-chave: Controle Ótimo. Controle Estocástico. Estratégia de Investimento. Carteira. Multi-período. Benchmark. Erro de Rastreamento.

Abstract

In this work, an optimal policy for portfolio selection based on mean-variance analysis for the multi-period tracking error –ERM– was derived. ERM is understood as the difference between the capital raised by the selected portfolio and benchmark portfolio. Thus, the methodology discussed by Li-Ng in [24] for analytical solution was applied, generalizing the single period case introduced by Roll in [38]. Then, it was selected a portfolio from the Brazilian stock trading based on the correlation factor, and adopted as benchmark the index of the stock trading of São Paulo State *IBOVESPA*, and the basic interest rate SELIC as fixed income asset. Two cases were dealt: portfolio composed of risky assets only, case I, and portfolio with a risk-free asset –indexed to SELIC– and assets of the case I (case II).

Keywords: Optimal Control. Stochastic Control. Investment Policy. Portfolio. Multi-period. Benchmark. Tracking Error.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Revisão	3
2.1	Preliminares	3
2.2	Modelo de Markowitz: Cenário Uniperíodo	4
2.2.1	Todos Os Ativos De Risco	5
2.2.2	1 Ativo sem Risco e Ativos de Risco	7
2.3	Enfoque de Média-Variância com Erro de Rastreamento Uniperíodo	8
2.4	Modelo de Markowitz: Cenário Multi-período	11
2.4.1	Todos Os Ativos de Risco	13
2.4.2	1 Ativo Livre de Risco e Ativos de Risco	14
3	Resultados Teóricos	16
3.1	Formulação Do Problema	16
3.2	Formulação do ERM considerando t intermediários na função objetivo	19
3.3	Solução dos Problemas	19
3.3.1	Todos os Ativos de Risco	20
3.3.2	1 Ativo sem Risco e Ativos de Risco	21
4	Simulação dos Resultados	23
4.1	Preliminares	23
4.2	Caso I: Ativos de Risco	25
4.2.1	Comparação entre MM e ERM	26
4.2.2	Avaliação do ERM para o $PRV(\tilde{\mu})$ com diversos T	30
4.2.3	Avaliação do ERM para o $PRV(\tilde{\chi})$ com diversos μ_d e T	37
4.2.4	Avaliação do ERM para o $PREV(\tilde{\rho})$ com diversos $\tilde{\rho}$ e T	38
4.3	Caso II: 1 Ativo sem Risco e Ativos de Risco	39
4.3.1	Avaliação do ERM para o $PRE(\tilde{\sigma})$ com diversos T	39
4.3.2	Avaliação ERM para $PRE(\tilde{\sigma})$ com diversos benchmarks	45
4.3.3	Avaliação ERM para $PRE(\tilde{\sigma})$ com diversos σ_d	46
4.3.4	Avaliação ERM para $PREV(\tilde{\rho})$ com diversos $\tilde{\rho}$ e T	47
5	Conclusão	48
	Apêndice	49
	A Fator de Corr. e Retorno Esperado do IBOVESPA	49
	Referências Bibliográficas	54

Lista de Figuras

2.1	FEG e FER.	9
4.1	Comparativa do capital em função do tempo para MM e ERM para o caso I: $PRV(\tilde{\mu})$	28
4.2	Expectativa instantânea do capital para MM e ERM para o caso I: $PRV(\tilde{\mu})$	29
4.3	Risco instantâneo do capital para MM e ERM para o caso I: $PRV(\tilde{\mu})$	30
4.4	ERM em função do tempo para o caso I: $PRV(\tilde{\mu})$	30
4.5	Expectativa do ERM no final de T para o caso I: $PRV(\tilde{\mu})$	32
4.6	Risco do ERM no final do período para o caso I: $PRV(\tilde{\mu})$	34
4.7	Expectativa instantânea do ERM para o caso I: $PRV(\tilde{\mu})$	34
4.8	Risco instantâneo do ERM para o caso I: $PRV(\tilde{\mu})$	35
4.9	Estatísticas do ERM com short-sellings vs sem short-sellings para o caso I: $PRV(\tilde{\mu})$	36
4.10	Capital em função do tempo com diferentes μ_d para o caso I: $PRV(\tilde{\mu})$	37
4.11	Capital em função do tempo com diferentes fatores de aversão ao risco para o caso I: $PREV(\tilde{\rho})$	38
4.12	Modelos de portfólios	39
4.13	Capital em função do tempo para o caso II: $PRE(\tilde{\sigma})$	40
4.14	ERM em função do tempo para o caso II: $PRE(\tilde{\sigma})$	40
4.15	Expectativa do ERM no final de T para o caso II: $PRE(\tilde{\sigma})$	41
4.16	Risco do retorno relativo e do ERM no final do período para o caso II: $PRE(\tilde{\sigma})$	42
4.17	Expectativa instantânea do ERM para o caso II: $PRE(\tilde{\sigma})$	43
4.18	Risco instantâneo do ERM para o caso II: $PRE(\tilde{\sigma})$	43
4.19	Estatísticas instantâneas do capital para o caso II: $PRE(\tilde{\sigma})$	44
4.20	Estatísticas do ERM com short-sellings vs sem short-sellings para o caso II: $PRE(\tilde{\sigma})$	44
4.21	Capital em função do tempo para diferentes benchmarks para o caso II: $PRE(\tilde{\sigma})$	45
4.22	Capital em função do tempo com diferentes benchmarks para o caso II: $PRE(\tilde{\sigma})$	46
4.23	Capital em função do tempo com diferentes fatores de aversão ao risco para o caso II: $PREV(\tilde{\rho})$	47

Lista de Tabelas

4.1	Coeficiente de correlação das ações da carteira escolhida	23
4.2	Retorno esp. estimado e setor econômico das ações da carteira escolhida .	24
4.3	Diferenças entre retornos eficientes e os riscos associados para o caso I . . .	25
4.4	Média Amostral e desvio padrão do ERM para o caso I: $PRV(\tilde{\mu})$	31
4.5	Média amostral e desvio padrão do ERM para o caso II: $PRE(\tilde{\sigma})$	41
A.1	Coeficiente de correlação das ações do IBOVESPA	52
A.2	Retorno esperado estimado das ações do IBOVESPA	53

Capítulo 1

Introdução

Por mais de 50 anos, diversas teorias e técnicas de controle desenvolvidas por engenheiros de controle e matemáticos têm sido aplicadas em problemas de economia e finanças, onde se destacam os sistemas de controle com retroação [6, 7, 12, 25, 34, 42], o controle ótimo [16, 35, 36], o controle estocástico [1, 28, 33, 37], o controle adaptativo [20, 41, 48, 49], entre outras. Na análise financeira dos algoritmos da bolsa de valores, tem-se demonstrado que a aplicação do controle com retroação é potencialmente eficaz [4–8, 10, 11, 18, 19, 21, 22, 25, 29–31, 40].

No caso das finanças, particularmente na escolha de ativos numa carteira, os conceitos de otimização e diversificação têm sido pilares para o desenvolvimento e entendimento dos mercados financeiros e a tomada de decisões. A teoria de escolha de ativos numa carteira segue a premissa de que os investidores avaliariam suas carteiras apenas com base no valor esperado e na variância das taxas de retorno num espaço de tempo considerado, tornando-as as únicas variáveis de decisão para a escolha dos ativos. Portanto, o dilema do investidor tem a ver com o conflito entre alta rentabilidade e baixo risco, que foi tratado pela primeira vez por Markowitz [26, 27], fornecendo um método analítico baseado numa relação ótima entre a rentabilidade e o risco. Também cabe destacar o trabalho de Merton [32], onde se estabelece uma fronteira eficiente de investimento para o enfoque de Markowitz, i.e., se deriva uma relação explícita entre rentabilidade e risco, sendo possível observar a maior rentabilidade esperada para um risco assumido. Em conclusão, tais trabalhos possibilitam ao investidor alocar criteriosamente os seus recursos financeiros para um período de tempo específico (cenário uniperíodo).

Visando estender a formulação de Markowitz, Li-Ng em [24] generalizaram para o cenário multi-período, i.e, obtiveram uma política ótima para realocar os ativos numa carteira no decorrer de um número consecutivo de períodos de tempo, considerando um capital inicial fixo, tornando-se portanto, num problema de controle ótimo. No entanto, na prática o gestor financeiro escolherá a carteira que reduza o máximo possível a volatilidade de um erro de rastreamento para um retorno esperado estabelecido relativo a um benchmark (índice do mercado). Sendo geralmente essa carteira gerida e o benchmark adotado ineficientes desde o ponto de vista da análise de média-variância de Markowitz [38]. Diante desse quadro, o presente trabalho tem por objetivo generalizar analiticamente os resultados em [38], i.e., derivar uma política ótima de escolha de uma carteira baseada na análise de média-variância para o erro de rastreamento no cenário multi-período (ERM), aplicando a metodologia abordada por Li-Ng em [24]. Obtém-se assim, resultados teóricos que podem ser corroborados por simulação e aplicados ao mercado de ativos brasileiro.

Este trabalho é organizado como segue. No capítulo 2 se apresentam trabalhos preliminares relevantes da área de pesquisa e alguns outros relacionados, mostrando o grande potencial e aplicabilidade das teorias envolvidas na realidade financeira; introduz-se a análise de média-variância para escolha de ativos numa carteira feita por Markowitz [26] para o caso uniperíodo e a formulação de média-variância para o erro de rastreamento uniperíodo introduzida por [38]; além da generalização do modelo de Markowitz (cenário multi-período) desenvolvida por Li-Ng em [24]. A formulação dos problemas analisados, a comparação com a formulação de Araujo [3] e as soluções analíticas objetivos deste trabalho, são apresentadas no capítulo 3. No Capítulo 4 apresenta-se a implementação via simulação dos algoritmos derivados no Capítulo 3 aplicados ao mercado brasileiro. Finalmente, o capítulo 5 apresenta a conclusão desta dissertação e possíveis trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão

2.1 Preliminares

Como dito anteriormente, a aplicação de conceitos da teoria de controle tem sido relevante na análise financeira. Por exemplo, B. R. Barmish et al. [6, 7] apresentou um controlador que permite processar o histórico dos preços de valores (o qual varia no tempo), para determinar uma estratégia de investimento que regula o montante a ser investido. Malek-pour et al. [25] tendo em conta o fato de que a noção de “drawdown”¹ é muito importante para os operadores de valores e gerenciadores de fundos no mercado financeiro, faz uma análise do drawdown quando o controle é utilizado na bolsa de valores, num mercado idealizado com preços governados pelo movimento geométrico browniano. O controle ótimo também tem sido utilizado fortemente neste campo, e.g., Craven et al. [16] apresenta um estudo rigoroso sobre interfaces entre matemáticas, programação computacional, finanças e economia; incluindo aspectos como a escolha ótima do consumidor, políticas de planejamento, uso de modelos ótimos de previsão, simulação do mercado e planificação do desenvolvimento.

Com referência específica à área de pesquisa do presente trabalho, esforços importantes continuam sendo dedicados com o objetivo de obter estratégias de investimento tanto para o cenário uniperíodo quanto para o multi-período, adotando-se diversas abordagens. Entre as quais cabe destacar: o enfoque de rastreamento de erro (relativo a um benchmark) [38, 39]; com desigualdades lineares matriciais *LMI* para robustez no portfólio [15]; considerando saltos markovianos nos parâmetros do mercado [2, 14] no cenário multi-período; a generalização para o erro de rastreamento multi-período com saltos markovianos [3]; representando geometricamente a estrutura econômica envolvida, onde simplifica-se a análise matemática [23]; a abordagem por média-variância com controle para o risco de falência [50]; entre outras.

Para efeitos de contextualização e com o objetivo de proporcionar uma base conceitual para a posterior formulação dos problemas objetivo da presente pesquisa (estabelecidos no Capítulo 3), as seguintes seções do capítulo estão arrumadas da seguinte forma. Na seção 2.2 apresenta-se um detalhamento do Modelo de Markowitz (MM) com dois problemas derivados a tratar: carteira composta totalmente por ativos de risco e carteira com um ativo sem risco e ativos de risco; e as respectivas fronteiras eficientes derivadas por Merton. O enfoque do erro de rastreamento de Roll no cenário uniperíodo é mostrado na seção 2.3. A generalização do modelo de Markowitz proposta por Li e Ng é dada na seção 2.4.

¹Drawdown é definido como o grau de declinação de um pico alto a um baixo para o preço de um ativo num período de tempo específico, geralmente dado em porcentagem.

2.2 Modelo de Markowitz: Cenário Uniperíodo

Inicialmente, definem-se as variáveis que serão utilizadas no resto do capítulo. O valor de um ativo financeiro i no instante 0 é denotado por $S_i(0)$, e o valor desse mesmo ativo um (+1) período temporal depois será $S_i(1)$. Assume-se a taxa de retorno desse ativo, R_i , como uma variável aleatória. O vetor de retornos é definido da seguinte maneira²:

$$\mathbf{R} = [R_1 \dots R_n]', \quad (2.1)$$

sendo,

$$R_i = \frac{S_i(1) - S_i(0)}{S_i(0)}. \quad (2.2)$$

O retorno esperado é dado por,

$$\mathbf{r} = E(\mathbf{R}) = [r_1 \dots r_n]', \text{ onde } r_i = E(R_i),$$

e a matriz de covariância da taxa de retorno é expressa por,

$$\Sigma = \text{cov}(\mathbf{R}) = E((\mathbf{R} - \mathbf{r})(\mathbf{R} - \mathbf{r})'). \quad (2.3)$$

O risco do ativo i é definido pelo desvio-padrão σ_i de R_i , ou seja,

$$\sigma_i = \sqrt{\Sigma_{ii}} = \sqrt{E((R_i - r_i)^2)}. \quad (2.4)$$

Agora, supondo que haja uma carteira composta por n ativos com valores iniciais,

$$\mathbf{S}(0) = [S_1(0) \dots S_n(0)]',$$

e seja

$$\mathbf{H}(0) = [H_1(0) \dots H_n(0)]',$$

uma estratégia de investimento para cada ativo financeiro, onde a quantidade do ativo i que tem-se na carteira é dada por H_i ³. Supondo também que dispõe-se de um capital $V(0)$ para investimento nessa carteira. Isto pode ser escrito da seguinte maneira,

$$V(0) = H_1(0)S_1(0) + \dots + H_n(0)S_n(0) = \mathbf{H}(0)'\mathbf{S}(0). \quad (2.5)$$

Portanto, a proporção do total investido no ativo i , ω_i , fica,

$$\omega_i = \frac{H_i(0)S_i(0)}{V(0)}. \quad (2.6)$$

Consequentemente tem-se que,

$$\boldsymbol{\omega}'\mathbf{e} = \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \text{ sendo } \boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \dots \omega_n]', \mathbf{e} = [1 \dots 1]'. \quad (2.7)$$

Denota-se por P a taxa de retorno da carteira ao final de um período, ou seja,

$$P = \frac{V(1) - V(0)}{V(0)}. \quad (2.7)$$

²Por razões didáticas, vetores e matrizes são representados em bold.

³ $H_i < 0$ representa posição a descoberto.

Substituindo (2.5) para um período de tempo depois $V(1)$, (2.2)(2.6) e supondo que a estratégia é auto-financeável⁴, tem-se,

$$P = \omega_1 R_1 + \dots + \omega_n R_n = \boldsymbol{\omega}' \mathbf{R}. \quad (2.8)$$

A média de P é dada por,

$$\mu = E(P) = E(\boldsymbol{\omega}' \mathbf{R}) = \boldsymbol{\omega}' E(\mathbf{R}) = \boldsymbol{\omega}' \mathbf{r}, \quad (2.9)$$

e a sua variância,

$$\sigma^2 = Var(P) = Var(\boldsymbol{\omega}' \mathbf{R}) = \boldsymbol{\omega}' cov(\mathbf{R}) \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega}. \quad (2.10)$$

Tendo em conta as definições anteriores, dois problemas de otimização derivados da formulação de Markowitz serão apresentados com suas respectivas soluções. No primeiro caso, considera-se que todos os ativos da carteira são de risco (sub.2.2.1); e no segundo, assume-se que apenas há 1 ativo sem risco do total de ativos da carteira (sub.2.2.2). As demonstrações das proposições e teoremas envolvidos nesta seção são apresentadas em [26, 27].

2.2.1 Todos Os Ativos De Risco

Pode-se escrever o problema de otimização como segue,

Problema 2.1 : *$PV(\mu)$ Minimiza-se a volatilidade do retorno da carteira, $Var(P)$, fixando a sua expectativa, $E(P)$, num nível μ , ou seja,*

$$\min_{\boldsymbol{\omega}} J(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}' \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega} \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\omega}' \mathbf{r} = \mu \\ \boldsymbol{\omega}' \mathbf{e} = 1 \\ \boldsymbol{\omega} \in R^n. \end{cases}$$

No qual é assumido o seguinte:

Hipótese 2.1 $\boldsymbol{\Sigma}$ é uma matriz definida positiva, i.e., $\boldsymbol{\Sigma} > 0$ ⁵.

Hipótese 2.2 $\mathbf{r}$ não é múltiplo de $\mathbf{e}$ ($\mathbf{r} \neq a \mathbf{e}$)⁶.

Definem-se as seguintes constantes:

$$\alpha = \mathbf{e}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{e}, \quad (2.11)$$

$$\gamma = \mathbf{r}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{r}, \quad (2.12)$$

$$\psi = \mathbf{e}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{r}, \quad (2.13)$$

$$\delta = \alpha \gamma - \psi^2 = (\mathbf{e}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{e})(\mathbf{r}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{r}) - (\mathbf{e}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{r})^2. \quad (2.14)$$

As provas dos resultados dados nesta seção podem ser encontradas em [17].

⁴Estratégias auto-financeáveis são aquelas onde a mudança no valor da carteira é dada pelo ganho ou perda no investimento, o que implica que não se tem injeção nova de capital.

⁵A Hipótese 2.1 garante que todos os ativos realmente são de risco.

⁶A Hipótese 2.2 assegura uma situação não-degenerada, já que no caso contrário as restrições só seriam consistentes se $\mu = a$.

Proposição 2.1 *As constantes α , γ e δ , definidas em (2.11), (2.12) e (2.14), são positivas. De maneira mais precisa tem-se que,*

$$\begin{aligned}\alpha &\in \left[\frac{n}{\lambda_{\max}(\Sigma)}, \frac{n}{\lambda_{\min}(\Sigma)} \right], \\ \gamma &\in \left[\frac{\|\mathbf{r}\|^2}{\lambda_{\max}(\Sigma)}, \frac{\|\mathbf{r}\|^2}{\lambda_{\min}(\Sigma)} \right], \\ |\psi| &< \sqrt{n} \frac{\|\mathbf{r}\|}{\lambda_{\min}(\Sigma)},\end{aligned}$$

onde $\lambda_{\min}(\Sigma)$ e $\lambda_{\max}(\Sigma)$ representam os autovalores mínimo e máximo da matriz Σ .

Finalmente, a solução do problema em questão apresenta-se no seguinte teorema.

Teorema 2.1 *A solução do problema de otimização de média-variância 2.1 é dada por:*

$$\boldsymbol{\omega}^* = \mathbf{h} \mu + \mathbf{g}, \quad (2.15)$$

em que $\mathbf{h}$ e $\mathbf{g}$, não-dependentes de μ , são dados por,

$$\mathbf{h} = \frac{\alpha}{\delta} \Sigma^{-1} \mathbf{r} - \frac{\psi}{\delta} \Sigma^{-1} \mathbf{e}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{g} = \frac{\gamma}{\delta} \Sigma^{-1} \mathbf{e} - \frac{\psi}{\delta} \Sigma^{-1} \mathbf{r}. \quad (2.17)$$

Proposição 2.2 *A curva risco-retorno associada ao Problema 2.1 é dada por:*

$$\sigma^2 = \text{Var}(P) = \frac{\alpha}{\delta} \left(\mu - \frac{\psi}{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{\alpha}. \quad (2.18)$$

Proposição 2.3 *Seja (μ_g, σ_g^2) o ponto mínimo global obtido da curva risco-retorno dado por (2.18); ω_g a composição da carteira de mínima variância global dada pela substituição de μ_g e σ_g^2 em (2.15); tem-se que,*

$$\mu_g = \frac{\psi}{\alpha}, \quad (2.19)$$

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{\alpha}, \quad (2.20)$$

$$\omega_g = \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} \mathbf{e}. \quad (2.21)$$

Carteiras com $\mu \geq \mu_g = \frac{\psi}{\alpha}$ são chamadas de *carteiras eficientes*, pois para um determinado nível de risco, obtém-se o maior retorno possível.

2.2.2 1 Ativo sem Risco e Ativos de Risco

Apresenta-se o caso em que tem-se só um ativo sem risco na carteira, no qual as Hipóteses 2.1 e 2.2 ainda são mantidas. Neste caso, tem-se que o somatório dos elementos de ω não necessariamente é 1, pois será introduzido um ativo sem risco com retorno r_f . Portanto, o problema de otimização é dado como segue,

Problema 2.2

$$\min_{\omega} J(\omega) = \omega' \Sigma \omega \quad \text{sujeito a} \begin{cases} \omega' \mathbf{r} + (1 - \omega' \mathbf{e}) r_f = \mu \\ \omega \in R^n \end{cases}$$

cuja solução é apresentada no seguinte teorema (ver [17]).

Teorema 2.2 *A solução do problema de otimização de média-variância prob. 2.2 é dada por,*

$$\omega^* = \frac{(\mu - r_f)}{(\mathbf{r} - r_f \mathbf{e})' \Sigma^{-1} (\mathbf{r} - r_f \mathbf{e})} \Sigma^{-1} (\mathbf{r} - r_f \mathbf{e}). \quad (2.22)$$

O vetor ω^* em (2.22) representa a composição ótima dos ativos de risco enquanto a proporção a ser investida no ativo sem risco, ω_{r_f} , é dada por,

$$\omega_{r_f} = 1 - \omega^* \mathbf{e}. \quad (2.23)$$

Denota-se μ_T , σ_T^2 , e ω_T (retorno esperado, variância e composição, respectivamente) como os parâmetros de uma carteira P_T com 100% ativos de risco. O que implica que,

$$\omega_T' \mathbf{e} = 1.$$

Aplicando o Teorema 2.2 para P_T obtém-se o seguinte resultado.

Proposição 2.4 *A carteira com retorno P_T é eficiente para as carteiras com 100% de ativos de risco, e os seus parâmetros são expressos da seguinte maneira,*

$$\mu_T = \frac{\gamma - r_f \psi}{\psi - r_f \alpha}, \quad (2.24)$$

$$\sigma_T^2 = \frac{(\mathbf{r} - r_f \mathbf{e})' \Sigma^{-1} (\mathbf{r} - r_f \mathbf{e})}{(\psi - r_f \alpha)^2}, \quad (2.25)$$

$$\omega_T = \frac{1}{\psi - r_f \alpha} \Sigma^{-1} (\mathbf{r} - r_f \mathbf{e}). \quad (2.26)$$

Deseja-se obter a fronteira eficiente no plano risco-retorno para as carteiras com ativos de risco e 1 ativo sem risco. Para tal fim, a seguinte hipótese tem que ser formulada.

Hipótese 2.3 *Assume-se que $r_f < \frac{\psi}{\alpha}$.*⁷

Proposição 2.5 *Qualquer carteira com retorno P , formada com o ativo sem risco e ativos de risco, com retorno esperado μ , variância σ^2 e sob a hipótese 2.3, pode ser construída como uma combinação da carteira com retorno P_T e do ativo livre de risco, i.e.,*

$$P = (1 - \frac{\sigma}{\sigma_T}) r_f + \frac{\sigma}{\sigma_T} P_T. \quad (2.27)$$

⁷ A Hipótese 2.3 evita indeterminações nas equações (2.24)(2.26) e garante que o conjunto de soluções ótimas tangencie positivamente a curva risco-retorno associada aos ativos de risco.

Tem-se que,

$$\mu = r_f + \frac{\sigma}{\sigma_T}(\mu_T - r_f), \quad (2.28)$$

$$\omega = 1 - \frac{\sigma}{\sigma_T}. \quad (2.29)$$

Observação 2.1 A equação obtida em (2.28) corresponde á relação risco-retorno, onde tem-se uma dependência linear entre μ e σ , diferente ao caso onde todos os ativos da carteira eram considerados de risco (hipérbole descrita por μ e σ).

2.3 Enfoque de Média-Variância com Erro de Rastreamento: Cenário Uniperíodo

Apresenta-se o enfoque abordado por Roll [38], o qual fornece uma metodologia financeira para a escolha sub-ótima de uma carteira considerando fatores realísticos de grande impacto como o Benchmark. Considerando o mesmo universo de ativos do problema $\mathbf{PV}(\mu)$ (Problema 2.1), cujo vetor de retornos é dado por $\mathbf{R}$ em (2.1), vetor de retorno esperado $\mathbf{r}$ e matriz de covariância Σ . Definem-se analogamente os seguintes termos para a carteira do benchmark. O capital inicial do benchmark é denotado por $V^B(0)$ e a sua estratégia de investimento por $\mathbf{H}^B(0)$, então similar a (2.5) tem-se que,

$$V^B(0) = \mathbf{H}^B(0)' \mathbf{S}(0). \quad (2.30)$$

Define-se a proporção do total investido no ativo i do benchmark como,

$$\omega_i^B = \frac{H_i^B(0)S_i(0)}{V^B(0)}, \quad (2.31)$$

portanto, a composição da carteira teórica do benchmark segue que,

$$\mathbf{e}'\boldsymbol{\omega}^B = 1, \text{ sendo } \boldsymbol{\omega}^B = [\omega_1^B \dots \omega_n^B]'. \quad (2.32)$$

Seja P^B a taxa de retorno da carteira do benchmark ao final de um período. Mais precisamente,

$$P^B = \frac{V^B(1) - V^B(0)}{V^B(0)}, \quad (2.32)$$

supondo também a condição de auto-financeabilidade, obtém-se que a taxa de retorno da carteira do benchmark é expressa como,

$$P^B = \mathbf{R}'\boldsymbol{\omega}^B, \quad (2.33)$$

onde sua média é dada por,

$$\mu^B = E(P^B) = E(\mathbf{R}'\boldsymbol{\omega}^B) = \mathbf{r}'\boldsymbol{\omega}^B, \quad (2.34)$$

e variância,

$$\sigma^{2B} = \text{var}(P^B) = \boldsymbol{\omega}^{B'} \Sigma \boldsymbol{\omega}^B. \quad (2.35)$$

Define-se $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ como a diferença entre os vetores de composição, i.e.,

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^B, \quad (2.36)$$

então o retorno do erro entre as carteiras $\tilde{P}$ ou *Erro de Rastreamento* será dado por,

$$\tilde{P} = P - P^B = \mathbf{R}'\tilde{\omega},$$

onde sua expectativa $\tilde{\mu}$ será,

$$\tilde{\mu} = E(\tilde{P}) = \mathbf{r}'\tilde{\omega}, \quad (2.37)$$

e volatilidade,

$$\tilde{\sigma}_P^2 = Var(\tilde{P}) = \tilde{\omega}'\Sigma \tilde{\omega}. \quad (2.38)$$

Tendo as definições anteriores é possível formular o problema de otimização da seguinte maneira:

Problema 2.3 : *PRV*($\tilde{\mu}$) *Pré-estabelecendo a expectativa retorno relativo ao benchmark $\tilde{\mu}$, minimiza-se a volatilidade do ER. Mais precisamente,*

$$\min_{\tilde{\omega}} \{J(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}'\Sigma \tilde{\omega}\} \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} \mathbf{r}'\tilde{\omega} = \tilde{\mu} \\ \mathbf{e}'\tilde{\omega} = 0 \\ \tilde{\omega} \in R^n \end{cases}$$

Antes de apresentar a solução do problema *PRV*($\tilde{\mu}$), será preciso definir alguns termos envolvidos nesta. A Figura 2.1 mostra a Fronteira Eficiente de Média-Variância Global (**FEG**) ou também chamada de fronteira eficiente de Markowitz; e a Fronteira Eficiente do Erro de Rastreamento (**FER**).

Figura 2.1: FEG e FER.

Fonte: autor.

Na Figura 2.1, ω^B e ω^{B*} representam a composição da carteira do benchmark considerando a FER e a FEG, respectivamente. A composição da carteira usando a análise de média-variância do erro de rastreamento para o benchmark dado é denotada por ω_P . Considerando o enfoque de Markowitz denotam-se as respectivas composições por ω_P^* . ω_0^* representa a composição de mínima variância global, que como esperado, é o ponto crítico da FEG. Por último, tem-se a composição ω_1^{FEG} , que é a interseção da reta que atravessa a origem e ω_0^* , com a FEG.

Também será necessário definir as seguintes constantes,

$$\kappa = \mathbf{r}'\Sigma^{-1}\mathbf{r}, \quad \tau = \mathbf{r}'\Sigma^{-1}\mathbf{e}, \quad \zeta = \mathbf{e}'\Sigma^{-1}\mathbf{e}.$$

Para a prova dos resultados a seguir, ver [38].

Teorema 2.3 *A solução ótima do problema de rastreamento de erro PRV($\tilde{\mu}$), é dada por:*

$$\tilde{\omega}^* = \frac{\tilde{\mu}}{\mu_1^{FEG} - \mu_0^*} \tilde{\omega}, \quad (2.39)$$

e a variância do erro de rastreamento é dada por:

$$\tilde{\sigma}^{2*} = Var(\tilde{\omega}^*) = \left(\frac{\tilde{\mu}}{\mu_1^{FEG} - \mu_0^*}\right)^2 (\sigma_1^{2FEG} - \sigma_0^{2*}), \quad (2.40)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mu_0^* &= E(P^*) = E(\mathbf{R}'\omega^*) = \frac{\tau}{\zeta}, \\ \sigma_0^{2*} &= var(P^*) = \frac{1}{\zeta}, \\ \mu_1^{FEG} &= E(P_1^{FEG}) = E(\mathbf{R}'\omega_1^{FEG}) = \frac{\kappa}{\tau}, \\ \sigma_1^{2FEG} &= var(P_1^{FEG}) = \frac{\kappa}{\tau^2}. \end{aligned}$$

Tem-se também a seguinte proposição:

Proposição 2.6 *A variância da carteira ou variância total obtida por meio da análise do erro de rastreamento $\tilde{\sigma}_P^{2*}$, é dada por:*

$$\tilde{\sigma}_P^{2*} = \sigma^{B^2} + \tilde{\sigma}^{2*} + 2\sigma_0^{2*} \left(\frac{\tilde{\mu}}{\mu_1^{FEG} - \mu_0^*}\right) \left(\frac{\mu^B}{\mu_0^*} - 1\right). \quad (2.41)$$

Por último, a seguinte proposição é formulada baseada no fato do deslocamento na variância das fronteiras conforme a figura 2.1.

Proposição 2.7 *Para todo P , B que pertençam à FER, e todo P^* , B^* que pertençam à FEG, tem-se que:*

$$\sigma_P^2 - \sigma_{P^*}^2 = \sigma^{2B} - \sigma^{2B^*}, \quad (2.42)$$

onde σ_P e σ_{P^*} são as variâncias das carteiras gerenciadas com igual retorno esperado sobre a FER e a FEG, respectivamente. De maneira similar, σ^B e σ^{B^*} , mas sendo as variâncias das carteiras do benchmark.

Em conclusão, a FER corresponde a um deslocamento na variância da FEG.

2.4 Modelo de Markowitz: Cenário Multi-período

Nesta seção apresenta-se o problema de média-variância multi-período formulado por Li-Ng [24]. Inicialmente, será necessário redefinir algumas variáveis para o caso vetorial e outras de forma conveniente para a formulação dos problemas de otimização e suas soluções. Assim, considera-se uma carteira de $(n + 1)$ ativos de risco, i.e.,

$$\bar{\mathbf{S}}(t) = [S_0(t) \ \mathbf{S}(t)]', \ \mathbf{S}(t) = [S_1(t) \dots S_n(t)]'.$$

Denota-se a estratégia de investimento por $\bar{\mathbf{H}}(t)$, que será um vetor pertencente a $\mathbb{R}^{n+1}$, ou seja,

$$\bar{\mathbf{H}}(t) = [H_0(t) \ \mathbf{H}(t)]', \ \mathbf{H}(t) = [H_1(t) \dots H_n(t)]'.$$

Observação 2.2 *Note que $\bar{\mathbf{H}}(t)$ é escolhido no início do instante de tempo t , e portanto depende de $\bar{\mathbf{S}}(s)$ para $s = 0$ até o fechamento de preços no instante $s = t - 1$.*

O capital no instante t é dado analogamente como em (2.5), por

$$V(t) = \bar{\mathbf{H}}(t+1)' \bar{\mathbf{S}}(t). \quad (2.43)$$

Define-se a taxa de retorno como segue,

$$\bar{\mathbf{R}}(t) = [\mathcal{R}_0(t) \ \mathbf{R}(t)]', \ \mathbf{R}(t) = [\mathcal{R}_1(t) \dots \mathcal{R}_n(t)]'.$$

sendo,

$$\mathcal{R}_i(t+1) = \frac{S_i(t+1)}{S_i(t)}, \quad (2.44)$$

e $\bar{\mathbf{R}}(t)$ pode ser escrito como segue,

$$\bar{\mathbf{R}}(t) = \bar{\boldsymbol{\eta}}(t) + \bar{\mathbf{Z}}(t),$$

onde $\bar{\mathbf{Z}}(t)$ são vetores aleatórios de média nula,

$$E(\bar{\mathbf{Z}}(t)) = \mathbf{0}, \quad (2.45)$$

e $\bar{\boldsymbol{\eta}}(t)$ são vetores determinísticos que representam a média de $\bar{\mathbf{R}}(t)$. Pode-se escrever $\bar{\boldsymbol{\eta}}(t)$ como,

$$\bar{\boldsymbol{\eta}}(t) = [\eta_0(t) \ \boldsymbol{\eta}(t)]', \ \boldsymbol{\eta}(t) = [\eta_1(t) \dots \eta_n(t)]'.$$

As seguintes hipóteses são formuladas:

Hipótese 2.4 $\bar{\mathbf{Z}}(t)$ são vetores aleatórios independentes para $t = 0, 1, \dots, T - 1$.

Hipótese 2.5 $E(\bar{\mathbf{R}}(t)\bar{\mathbf{R}}(t)') > 0$ (definida positiva) para $t = 0, 1, \dots, T - 1$.

Define-se agora,

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = [u_0(t) \ \mathbf{u}(t)]', \ \mathbf{u}(t) = [u_1(t) \dots u_n(t)]',$$

onde tem-se que,

$$u_i(t) = H_i(t+1)S_i(t). \quad (2.46)$$

De (2.43) e (2.46), e sob a condição de auto-financiabilidade, obtém-se que,

$$V(t) = u_0(t) + \mathbf{e}'\mathbf{u}(t). \quad (2.47)$$

Definindo,

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{R}(t) - \mathcal{R}_0(t)\mathbf{e}, \quad (2.48)$$

e sob a hipótese 2.5, tem-se que:

$$\begin{pmatrix} E(R_0(t)^2) & E(R_0(t)\mathcal{P}(t)') \\ E(R_0(t)\mathcal{P}(t)) & E(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathbf{e} & \mathbf{I} \end{pmatrix} E(\bar{\mathcal{R}}(t)\bar{\mathcal{R}}(t)') \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{e}' \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} > 0, \quad (2.49)$$

do anterior pode-se formular a seguinte proposição (veja prova em [24]):

Proposição 2.8 *Sendo $\mathcal{P}(t)$ definido em (2.48) e sob a hipótese 2.5 segue que,*

$$E(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)') > 0. \quad (2.50)$$

Definem-se,

$$\begin{aligned} \phi(t) &= E(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)'), \\ \varphi_0^2(t) &= E(\mathcal{R}_0(t)^2), \\ \varphi(t) &= E(\mathcal{R}_0(t)\mathcal{P}(t)). \end{aligned}$$

e dada a Proposição 2.8 e sob Hipótese 2.5, tem-se do complemento de Shur aplicado a (2.49) que,

$$\varphi_0^2(t) - \varphi(t)'\phi(t)^{-1}\varphi(t) > 0.$$

Definem-se também,

$$\begin{aligned} A_2(t) &= \varphi_0^2(t) - \varphi(t)'\phi(t)^{-1}\varphi(t) > 0, \\ A_1(t) &= \eta_0(t) - (\boldsymbol{\eta}(t) - \eta_0(t)\mathbf{e})'\phi(t)^{-1}\varphi(t), \\ \mathcal{B}(t) &= (\boldsymbol{\eta}(t) - \eta_0(t)\mathbf{e})'\phi(t)^{-1}(\boldsymbol{\eta}(t) - \eta_0(t)\mathbf{e}). \end{aligned}$$

A partir de todas as definições anteriores é possível formular agora os problemas de um investidor na hora de encontrar a melhor estratégia de investimento para $t = 0, 1, \dots, T-1$. Os problemas são dados como segue:

Problema 2.4 : *$\mathbf{PE}(\sigma)$ Pré-estabelecendo ou fixando um nível de risco σ , maximiza-se a expectativa de retorno do capital final $E(V(T))$, com a sua variância $\text{Var}(V(T))$ limitada por σ^2 , ou seja,*

$$\max_{\mathbf{u}} \{ J_{PE}(\mathbf{u}) = E(V(T)) \} \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} \text{Var}(V(T)) \leq \sigma^2 \\ V(t+1) = \mathcal{R}_0(t)V(t) + \mathcal{P}(t)'\mathbf{u}(t) \\ V(0) = v_0 \\ t = 0, 1, \dots, T-1. \end{cases}$$

Problema 2.5 : *$\mathbf{PV}(\chi)$ Minimiza-se a variância do capital final, $\text{Var}(V(T))$, com a expectativa de retorno do capital final, $E(V(T))$, maior que um nível pré-determinado χ , i.e.,*

$$\min_{\mathbf{u}} \{ J_{PV}(\mathbf{u}) = \text{Var}(V(T)) \} \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} E(V(T)) \geq \chi \\ V(t+1) = \mathcal{R}_0(t)V(t) + \mathcal{P}(t)'\mathbf{u}(t) \\ V(0) = v_0 \\ t = 0, 1, \dots, T-1. \end{cases}$$

Problema 2.6 : $PEV(\rho)$ Pré-estabelecendo um nível de aversão ao risco⁸ ρ , maximiza-se a relação da expectativa de retorno do capital final $E(V(T))$ com a sua variância $Var(V(T))$. Mais precisamente,

$$\max_{\mathbf{u}} \{ J_{PEV}(\mathbf{u}) = E(V(T)) - \rho Var(V(T)) \} \text{ sujeito a } \begin{cases} V(t+1) = \mathcal{R}_0(t)V(t) + \mathcal{P}(t)'\mathbf{u}(t) \\ V(0) = v_0 \\ \rho > 0 \\ t = 0, 1, \dots, T-1. \end{cases}$$

As soluções dos problemas $PE(\sigma)$ e $PV(\chi)$ serão dadas em termos do problema $PEV(\rho)$ nas seguintes subseções. De forma similar à seção 2.2, as soluções serão apresentadas considerando 2 casos: carteira composta totalmente por ativos de risco, e incluindo um ativo sem risco nessa carteira. As provas das proposições e teoremas apresentados nesta seção, podem ser encontradas em [24].

2.4.1 Todos Os Ativos de Risco

Apresenta-se a solução dos problemas mencionados anteriormente, considerando uma carteira composta de ativos de risco. Inicialmente, definem-se algumas variáveis para $t = 0, 1, \dots, T-1$ da seguinte maneira,

$$\Gamma_2(t) = A_2(t)\Gamma_2(t+1) > 0, \quad \Gamma_2(T) = 1.$$

$$\Gamma_1(t) = A_1(t)\Gamma_1(t+1), \quad \Gamma_1(T) = 1.$$

$$\Gamma_0(t) = \Gamma_0(t+1) + \frac{\Gamma_1(t+1)^2}{\Gamma_2(t+1)}\mathcal{B}(t), \quad \Gamma_0(T) = 0.$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{\Gamma_1(t+1)^2}{\Gamma_2(t+1)} \right) \mathcal{B}(t).$$

Definem-se também,

$$a = \frac{\mathcal{C}}{2} - \mathcal{C}^2, \quad b = \frac{\Gamma_1(0)\mathcal{C}}{a}, \quad c = \Gamma_2(0) - ab^2 - \Gamma_1(0)^2.$$

Teorema 2.4 As soluções dos problemas de otimização $PMV(\rho)$, $PV(\chi)$ e $PE(\sigma)$ considerando todos os ativos de risco é dada por:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t)V(t) + \left(bv_0 + \frac{\mathcal{C}}{2\rho a} \right) \boldsymbol{\vartheta}(t),$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t) &= \boldsymbol{\phi}(t)^{-1} \boldsymbol{\varphi}(t), \\ \boldsymbol{\vartheta}(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma_1(t+1)}{\Gamma_2(t+1)} \right) \boldsymbol{\phi}(t)^{-1} (\boldsymbol{\eta}(t) - \eta_0(t)\mathbf{e}), \end{aligned}$$

⁸ ρ é dita de aversão ao risco por parte do investidor, ou seja, um valor maior de ρ se traduz na preferência de investir com maior segurança (estabelecendo riscos pequenos), assumindo assim, uma rentabilidade mais baixa se for o caso; e quanto menor for ρ , podendo chegar a zero, representa que o investidor pouco ou nada se afeta com o risco, querendo assim obter o máxima rentabilidade sem receio algum.

com,

$$\rho = \begin{cases} \frac{\mathcal{C}}{2} \sqrt{\frac{1}{a(\sigma^2 - cv_0^2)}} & \text{para o problema } PE(\sigma) \\ \frac{\mathcal{C}^2}{2a(\chi - (\Gamma_1(0) + \mathcal{C}b)v_0)} & \text{para o problema } PV(\chi), \end{cases}$$

e,

$$E(V(T)) = (\Gamma_1(0) + \mathcal{C}b)v_0 + \frac{\mathcal{C}^2}{2\rho a},$$

$$Var(V(T)) = cv_0^2 + \frac{\mathcal{C}^2}{4\rho^2 a} = cv_0^2 + \frac{(E(V(T)) - (\Gamma_1(0) + \mathcal{C}b)v_0)^2 a}{\mathcal{C}^2}.$$

Para encontrar a fronteira eficiente é necessário definir as seguintes variáveis,

$$P(T) = \frac{V(T) - v_0}{v_0}, \quad \mu(T) = E(P(T)), \quad \sigma^2(T) = Var(P(T)).$$

Tem-se que,

$$\mu(T) = \frac{E(V(T))}{v_0} - 1, \quad (2.51)$$

$$\sigma^2(T) = \frac{Var(V(T))}{v_0^2}. \quad (2.52)$$

Proposição 2.9 *A curva no plano risco-retorno para os problemas de otimização $PMV(\rho)$, $PV(\chi)$ e $PE(\sigma)$ é descrita pela equação:*

$$\frac{\sigma^2(T)}{c} - \frac{(\mu(T) - (\Gamma_1(0) + \mathcal{C}b - 1))^2}{(\mathcal{C}^2 c/a)} = 1. \quad (2.53)$$

cuja fronteira eficiente é dada pelos pontos que satisfazem:

$$\mu(T) \geq (\Gamma_1(0) + \mathcal{C}b - 1). \quad (2.54)$$

2.4.2 1 Ativo Livre de Risco e Ativos de Risco

Supõe-se agora que o ativo de referência seja livre de risco. Logo,

$$\mathcal{R}_0(t) = \eta_0(t). \quad (2.55)$$

Obtém-se que,

$$A_1(t) = \eta_0(t)(1 - \mathcal{B}(t)), \quad A_2(t) = \eta_0(t)^2(1 - \mathcal{B}(t)), \quad \frac{\Gamma_1(t+1)}{\Gamma_2(t+1)} = \prod_{k=t+1}^{T-1} \frac{1}{\eta_0(k)},$$

$$\Gamma_1(0) = \prod_{t=0}^{T-1} \eta_0(t)(1 - \mathcal{B}(t)), \quad \Gamma_2(0) = \prod_{t=0}^{T-1} \eta_0(t)^2(1 - \mathcal{B}(t)), \quad \mathcal{C} = \frac{1}{2} \left(1 - \prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t)) \right),$$

$$a = \frac{1}{4} \prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t)) \left(1 - \prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t)) \right), \quad b = 2 \prod_{t=0}^{T-1} \eta_0(t), \quad c = 0,$$

e,

$$(bv_0 + \frac{\mathcal{C}}{2\rho a}) = 2v_0 \prod_{t=0}^{T-1} \eta_0(t) + \frac{1}{\rho \prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t))}.$$

Baseado nos resultados anteriores, tem-se o seguinte teorema.

Teorema 2.5 *A solução ótima dos problemas $PV(\chi)$, $PE(\sigma)$ e $PMV(\rho)$ considerando 1 ativo livre de risco é dada por:*

$$\mathbf{u}^*(t) = -\eta_0(t)E(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')^{-1}E(\mathcal{P}(t))V(t) + \left(2v_0 \prod_{t=0}^{T-1} \eta_0(t) + \frac{1}{\rho \prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t))}\right) \boldsymbol{\vartheta}(t),$$

onde,

$$\boldsymbol{\vartheta}(t) = \frac{1}{2} \left(\prod_{k=t+1}^{T-1} \frac{1}{\eta_0(k)} \right) E(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')^{-1}E(\mathcal{P}(t)),$$

com ρ podendo assumir os seguintes valores:

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma} \sqrt{\frac{1 - \prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t))}{\prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t))}} & \text{para o problema } PE(\sigma), \\ \frac{1 - \prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t))}{2 \left(\left(\chi - v_0 \prod_{t=0}^{T-1} \eta_0(t) \right) \left(\prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t)) \right) \right)} & \text{para o problema } PV(\chi). \end{cases}$$

Sendo,

$$E(V(T)) = v_0 \prod_{t=0}^{T-1} \eta_0(t) + \frac{1 - \prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t))}{2\rho \prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t))}, \quad Var(V(T)) = \frac{1 - \prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t))}{4\rho^2 \prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t))},$$

tem-se a relação,

$$Var(V(T)) = \frac{\prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t))}{1 - \prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t))} \left(E(V(T)) - v_0 \prod_{t=0}^{T-1} \eta_0(t) \right)^2. \quad (2.56)$$

Arrumando em termos de $\mu(T)$ e $\sigma(T)$, i.e., substituindo as Equações (2.51) e (2.52), obtém-se a seguinte proposição.

Proposição 2.10 *A fronteira eficiente relacionada à solução ótima dos problemas $PV(\chi)$ e $PE(\sigma)$, considerando 1 ativo livre de risco é dada pelos pontos da reta no plano risco-retorno:*

$$\mu(T) = \frac{\sqrt{1 - \prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t))}}{\sqrt{\prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t))}} \sigma(T) + \left(\prod_{t=0}^{T-1} \eta_0(t) - 1 \right),$$

para,

$$\mu(T) \geq \prod_{t=0}^{T-1} \eta_0(t) - 1. \quad (2.57)$$

Observação 2.3 *Note que fazendo $E(V(T)) = v_0 \prod_{t=0}^{T-1} \eta_0(t)$ em (3.18) tem-se a situação de variância nula, e conseqüentemente, todo o investimento estaria no ativo livre de risco.*

Capítulo 3

Resultados Teóricos

Na seção 2.3 a análise de média-variância do erro de rastreamento para o cenário uniperíodo foi introduzida. Como apontado em [38], em diversas situações o gestor financeiro é avaliado pelo desempenho do retorno total relativo a um benchmark pré-especificado, geralmente um índice largamente diversificado de ativos. Isto foi abordado por Roll [38], fornecendo a escolha ótima de ativos numa carteira baseado na minimização da volatilidade de um erro de rastreamento, enquanto produz um retorno esperado positivo com relação ao índice de retorno do benchmark. Neste capítulo, estende-se essa análise para o cenário multi-período, formulando primeiro um problema mais geral, esboçado na seção 3.1. Em seguida, a seção 3.2 apresenta uma comparação entre a formulação de Araujo [3] e a formulação feita na seção 3.1. Na seção 3.3 se apresentam as soluções analíticas dos problemas objetivo deste trabalho (estabelecidos na seção 3.1), onde também obtém-se as soluções quando um ativo sem risco é considerado na carteira.

3.1 Formulação Do Problema

Antes de formular o problema a ser tratado, será necessário redefinir alguns termos e condições relevantes. Inicialmente, considera-se um universo financeiro de $(n+1)$ ativos de risco sobre um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. O valor dos ativos é descrito pelo vetor aleatório $\bar{\mathbf{S}}(t) = [S_0 \dots S_n]'$, tomando valores em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $t = 0, \dots, T$.

Considera-se uma carteira de $(n+1)$ ativos de risco, i.e.,

$$\bar{\mathbf{S}}(t) = [S_0(t) \ \mathbf{S}(t)]', \ \mathbf{S}(t) = [S_1(t) \dots S_n(t)]',$$

a estratégia de investimento será denotada por $\bar{\mathbf{H}}(t)$,

$$\bar{\mathbf{H}}(t) = [H_0(t) \ \mathbf{H}(t)]', \ \mathbf{H}(t) = [H_1(t) \dots H_n(t)]'.$$

O capital no instante t é dado por

$$V(t) = \bar{\mathbf{H}}(t+1)' \bar{\mathbf{S}}(t).$$

A taxa de retorno é definida da seguinte maneira,

$$\bar{\mathbf{R}}(t) = [\mathcal{R}_0(t) \ \mathbf{R}(t)]', \ \mathbf{R}(t) = [\mathcal{R}_1(t) \dots \mathcal{R}_n(t)]',$$

sendo,

$$\mathcal{R}_i(t+1) = \frac{S_i(t+1)}{S_i(t)},$$

similarmente como no capítulo anterior, $\bar{\mathbf{R}}(t)$ é expresso como:

$$\bar{\mathbf{R}}(t) = \bar{\boldsymbol{\eta}}(t) + \bar{\mathbf{Z}}(t),$$

onde $\bar{\mathbf{Z}}(t)$ são vetores aleatórios de média nula,

$$E(\bar{\mathbf{Z}}(t)) = \mathbf{0}.$$

e $\bar{\boldsymbol{\eta}}(t)$ são vetores determinísticos que representam a média de $\bar{\mathbf{R}}(t)$. Portanto pode-se escrever $\bar{\boldsymbol{\eta}}(t)$ assim:

$$\bar{\boldsymbol{\eta}}(t) = [\eta_0(t) \ \boldsymbol{\eta}(t)]', \ \boldsymbol{\eta}(t) = [\eta_1(t) \dots \eta_n(t)]'.$$

Formulam-se as seguintes hipóteses:

Hipótese 3.1 $\bar{\mathbf{Z}}(t)$ são vetores aleatórios independentes para $t = 0, 1, \dots, T - 1$.

Hipótese 3.2 $E(\bar{\mathbf{R}}(t)\bar{\mathbf{R}}(t)') > 0$ (definida positiva) para $t = 0, 1, \dots, T - 1$.

O vetor de controle (vetor de investimento) é definido por,

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = [u_0(t) \ \mathbf{u}(t)]', \ \mathbf{u}(t) = [u_1(t) \dots u_n(t)]',$$

tendo-se que,

$$u_i(t) = H_i(t+1)S_i(t).$$

Sob a condição de *auto-financeabilidade* e depois de algumas manipulações obtém-se que,

$$V(t) = u_0(t) + \mathbf{e}'\mathbf{u}(t).$$

Define-se similarmente $\mathcal{P}(t)$ como,

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{R}(t) - \mathcal{R}_0(t)\mathbf{e},$$

De maneira similar ao capítulo anterior, a proposição seguinte é obtida (ver prova em [24]).

Proposição 3.1 $E(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)') > 0$ (matriz definida positiva).

Análogo à seção 2.3, definem-se os seguintes termos do benchmark para o caso multi-período¹. Define-se $\bar{\boldsymbol{\omega}}^B(t)$ como o vetor correspondente à composição da carteira do benchmark no tempo t , onde,

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}^B(t) = [\omega_0^B(t) \ \boldsymbol{\omega}^B(t)]', \ \boldsymbol{\omega}^B(t) = [\omega_1^B(t) \dots \omega_n^B(t)]',$$

assume-se que a proporção do total investido no ativo i do benchmark, ω_i $\{i = 0, 1, \dots, n\}$ é *fixa*, e também que:

$$\omega_i^B \geq 0, \ \sum_{i=0}^n \omega_i^B = 1.$$

O montante de capital alocado entre os $n + 1$ ativos pelo benchmark será:

$$\bar{\mathbf{u}}^B(t) = [u_0^B(t) \ \mathbf{u}^B(t)]', \ \mathbf{u}^B(t) = [u_1^B(t) \dots u_n^B(t)]',$$

¹Variáveis sobrescritas com a letra B correspondem ao Benchmark

Pode-se escrever $u_i(t)$ como:

$$u_i^B(t) = \omega_i^B V^B(t), \quad (3.1)$$

onde $V^B(t)$ representa o valor da carteira do benchmark no tempo t . Agora, sob a condição de *auto-financiabilidade* e (2.44), (2.47), (2.48), obtém-se para o benchmark a seguinte relação,

$$V^B(t+1) = \mathcal{R}_0(t)V^B(t) + \mathcal{P}(t)' \mathbf{u}^B(t), \quad V^B(0) = v_0. \quad (3.2)$$

Define-se o erro de rastreamento multi-período ERM no tempo t (ganho em capital com respeito ao benchmark ou ganho relativo), $\tilde{V}(t)$ da seguinte maneira,

$$\tilde{V}(t) = V(t) - V^B(t). \quad (3.3)$$

De (2.47) e (3.2) tem-se que,

$$\tilde{V}(t+1) = \mathcal{R}_0(t)\tilde{V}(t) + \mathcal{P}(t)' \tilde{\mathbf{u}}(t), \quad \tilde{V}(0) = 0, \quad (3.4)$$

sendo,

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^B(t) = \mathbf{u}(t) - V^B(t)\boldsymbol{\omega}^B. \quad (3.5)$$

Definem-se também,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}(t) &= E(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)'), \\ \varphi_0^2(t) &= E(\mathcal{R}_0(t)^2), \\ \boldsymbol{\varphi}(t) &= E(\mathcal{R}_0(t)\mathcal{P}(t)), \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} A_2(t) &= \varphi_0^2(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)' \boldsymbol{\phi}(t)^{-1} \boldsymbol{\varphi}(t) > 0, \\ A_1(t) &= \eta_0(t) - (\boldsymbol{\eta}(t) - \eta_0(t)\mathbf{e})' \boldsymbol{\phi}(t)^{-1} \boldsymbol{\varphi}(t), \\ \mathcal{B}(t) &= (\boldsymbol{\eta}(t) - \eta_0(t)\mathbf{e})' \boldsymbol{\phi}(t)^{-1} (\boldsymbol{\eta}(t) - \eta_0(t)\mathbf{e}). \end{aligned}$$

Tendo as definições anteriores, é possível agora formular os problemas de otimização a ser resolvidos neste trabalho.

Problema 3.1 : ***PRE**($\tilde{\sigma}^2$) Pré-estabelecendo um nível máximo da volatilidade do ERM $\tilde{\sigma}^2$, maximiza-se a expectativa do ganho de capital final relativo ao benchmark $E(\tilde{V}(T))$, ou seja,*

$$\max_{\mathbf{u}} \{ J_{PRE}(\mathbf{u}) = E(\tilde{V}(T)) \} \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} \text{Var}(\tilde{V}(T)) \leq \tilde{\sigma}^2 \\ \tilde{V}(t+1) = \mathcal{R}_0(t)\tilde{V}(t) + \mathcal{P}(t)' \tilde{\mathbf{u}}(t) \\ \tilde{V}(0) = 0 \\ t = 0, 1, \dots, T-1. \end{cases}$$

Problema 3.2 : ***PRV**($\tilde{\chi}$) Minimiza-se a volatilidade do ERM final, $\text{Var}(\tilde{V}(T))$, com a expectativa do ganho de capital final relativo, $E(\tilde{V}(T))$ maior que um nível pré-determinado $\tilde{\chi}$, i.e.,*

$$\min_{\mathbf{u}} \{ J_{PRV}(\mathbf{u}) = \text{Var}(\tilde{V}(T)) \} \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} E(\tilde{V}(T)) \geq \tilde{\chi} \\ \tilde{V}(t+1) = \mathcal{R}_0(t)\tilde{V}(t) + \mathcal{P}(t)' \tilde{\mathbf{u}}(t) \\ \tilde{V}(0) = 0 \\ t = 0, 1, \dots, T-1. \end{cases}$$

Problema 3.3 : ***PREV**($\tilde{\rho}$)* Pré-estabelecendo um nível de aversão ao risco $\tilde{\rho}$, maximiza-se a relação da expectativa do ganho de capital final relativo $E(\tilde{V}(T))$, com a volatilidade do ERM final, $Var(\tilde{V}(T))$. Mais precisamente,

$$\max_{\mathbf{u}} \{ J_{PREV}(\mathbf{u}) = E(\tilde{V}(T)) - \tilde{\rho} Var(\tilde{V}(T)) \} \text{ sujeito a } \begin{cases} \tilde{V}(t+1) = \mathcal{R}_0(t)\tilde{V}(t) + \mathcal{P}(t)'\tilde{\mathbf{u}}(t) \\ \tilde{V}(0) = 0 \\ \tilde{\rho} > 0 \\ t = 0, 1, \dots, T-1. \end{cases}$$

As soluções dos problemas anteriores serão apresentadas na seção 3.3.

3.2 Formulação do ERM considerando t intermediários na função objetivo

Seguindo o enfoque de estratégias multi-período, e dado o fato que em diversas situações o gestor financeiro é avaliado por seu desempenho com respeito a um índice do mercado (benchmark) em tempos intermediários, i.e., $t \leq T-1$, sendo T o período de planejamento financeiro, onde estará sujeito a reportes (nesses t intermediários) de retorno a seus clientes, Araujo generalizou o método de Roll [38] ao cenário multi-período, mas maximizando a soma da combinação linear da rentabilidade esperada relativa para $t \leq T-1$, onde se assumem *saltos markovianos nos parâmetros do mercado*. A formulação do problema resolvido por Araujo et. al. em [3] é dado da seguinte maneira:

Problema 3.4 : ***PRME**($\tilde{\sigma}^2(t)$)* Maximiza-se a soma da combinação linear da expectativa do ERM para os tempos intermediários, assumindo uma volatilidade intermediária para o ERM, $Var(\tilde{V}(t))$, menor que um nível pré-determinado $\tilde{\sigma}^2(t)$. De maneira mais precisa,

$$\max_{\mathbf{u}} \{ J_{PRMEV}(\mathbf{u}) = \sum_{t=0}^{T-1} \alpha(t) E(\tilde{V}(t)) \} \text{ sujeito a } \begin{cases} Var(\tilde{V}(t)) \leq \tilde{\sigma}^2(t) \\ \tilde{V}(t+1) = \mathcal{R}_0(t)\tilde{V}(t) + \mathcal{P}(t)'\tilde{\mathbf{u}}(t) \\ \tilde{V}(0) = 0 \\ t = 0, 1, \dots, T-1. \end{cases}$$

Sendo $\alpha(t)$ um coeficiente de preferência estabelecido.

Observação 3.1 Observe que a formulação de Araujo, Problema 3.4, é um problema mais geral, onde o Problema 3.1 corresponde a um caso particular, i.e., é derivado quando $\alpha(T-1) = 1$ e $\alpha(t \neq T-1) = 0$.

3.3 Solução dos Problemas

Nesta seção apresentam-se as soluções dos problemas $PRE(\tilde{\sigma}^2)$, $PRV(\tilde{\chi})$ e $PREV(\tilde{\rho})$ baseadas nos resultados dados em [24]. Inicialmente, considera-se que todos os ativos são de risco (subseção 3.3.1). As soluções quando é considerado 1 ativo sem risco do total de ativos são apresentadas na subseção 3.3.2.

3.3.1 Todos os Ativos de Risco

As variáveis e termos definidos e usados para as soluções dos problemas tratados na seção 2.4 são mantidas e envolvidas também nas soluções respectivas desta subseção e da seguinte (Subseção 3.3.2). As soluções dos problemas em questão são dadas no Teorema 3.1.

Similarmente ao capítulo anterior, será necessário definir as seguintes variáveis para $t = 0, 1, \dots, T - 1$ presentes na solução dos problemas estabelecidos como segue,

$$\Gamma_2(t) = A_2(t)\Gamma_2(t+1) > 0, \quad \Gamma_2(T) = 1.$$

$$\Gamma_1(t) = A_1(t)\Gamma_1(t+1), \quad \Gamma_1(T) = 1.$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{\Gamma_1(t+1)^2}{\Gamma_2(t+1)} \right) \mathcal{B}(t),$$

$$a = \frac{\mathcal{C}}{2} - \mathcal{C}^2.$$

As provas dos resultados nesta capítulo são análogas às apresentadas em [24], com diferença na condição inicial –ver Equação (3.4)– e no vetor de controle –ver Equação (3.5)–.

Teorema 3.1 *A solução dos problemas de otimização $PRE(\tilde{\sigma})$, $PRV(\tilde{\chi})$ e $PREV(\tilde{\rho})$, considerando todos os ativos de risco é dada por:*

$$PRE(\tilde{\sigma}): \quad \mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}(t)(V(t) - V^B(t)) + \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{a}} \boldsymbol{\vartheta}(t) + V^B(t) \boldsymbol{\omega}^B. \quad (3.6)$$

$$PRV(\tilde{\chi}): \quad \mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}(t)(V(t) - V^B(t)) + \frac{\tilde{\chi}}{\mathcal{C}} \boldsymbol{\vartheta}(t) + V^B(t) \boldsymbol{\omega}^B. \quad (3.7)$$

$$PRMV(\tilde{\rho}): \quad \mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}(t)(V(t) - V^B(t)) + \frac{\mathcal{C}}{2\tilde{\rho}a} \boldsymbol{\vartheta}(t) + V^B(t) \boldsymbol{\omega}^B. \quad (3.8)$$

Onde,

$$\mathbf{K}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)^{-1} \boldsymbol{\varphi}(t),$$

$$\boldsymbol{\vartheta}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma_1(t+1)}{\Gamma_2(t+1)} \right) \boldsymbol{\phi}(t)^{-1} (\boldsymbol{\eta}(t) - \eta_0(t) \mathbf{e}),$$

e,

$$E(\tilde{V}(T)) = \frac{\mathcal{C}^2}{2\tilde{\rho}a}, \quad (3.9)$$

$$Var(\tilde{V}(T)) = \frac{\mathcal{C}^2}{4\tilde{\rho}^2a} = \frac{E^2(\tilde{V}(T))a}{\mathcal{C}^2}, \quad (3.10)$$

sendo,

$$\tilde{\rho} = \begin{cases} \frac{\mathcal{C}}{2\tilde{\sigma}\sqrt{a}} & \text{para o problema } PRE(\tilde{\sigma}) , \\ \frac{\mathcal{C}^2}{2a\tilde{\chi}} & \text{para o problema } PRV(\tilde{\chi}) . \end{cases} \quad (3.11)$$

Observação 3.2 Observe que fazendo: $\tilde{\sigma} = 0$ em (3.6), o que seria a situação de não assumir risco para o ERM; ou $\tilde{\chi} = 0$ em (3.7) –sem ganho esperado com respeito ao benchmark–; ou uma aversão ao risco infinita para o ERM (equivalente a assumir risco nulo), ou seja, $\tilde{\rho} \rightarrow \infty$ em (3.8); obtém-se que a estratégia ótima de investimento para os três problemas segue a estratégia de investimento do benchmark, i.e., $\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{u}^B(t) = V^B(t)\boldsymbol{\omega}^B$.

Fazendo,

$$P(T) = \frac{V(T) - v_0}{v_0}, \quad P^B(T) = \frac{V^B(T) - v_0^B}{v_0^B}, \quad \tilde{P}(T) = P(T) - P^B(T).$$

Obtém-se,

$$\tilde{\mu}(T) = E(\tilde{P}(T)) = \frac{E(\tilde{V}(T))}{v_0}, \quad (3.12)$$

$$\tilde{\sigma}_P^2(T) = \text{Var}(\tilde{P}(T)) = \frac{\text{Var}(\tilde{V}(T))}{v_0^2}. \quad (3.13)$$

E a seguinte proposição é obtida.

Proposição 3.2 A curva no plano risco-retorno para os problemas de otimização $PRE(\tilde{\sigma})$, $PRV(\tilde{\chi})$ e $PREV(\tilde{\rho})$ onde considera-se todos os ativos de risco, é descrita pela equação (ver [24] com portfólio com condição inicial em 0 e a substituição das Equações (3.12) e (3.13)):

$$\tilde{\mu}(T) = \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{a}} \tilde{\sigma}_P(T). \quad (3.14)$$

3.3.2 1 Ativo sem Risco e Ativos de Risco

Nesta seção apresentam-se as soluções dos problemas estabelecidos considerando 1 ativo sem risco e n ativos de risco, mostradas no Teorema 3.2. Supõe-se agora que o ativo de referência seja livre de risco. Logo,

$$\mathcal{R}_0(t) = \eta_0(t). \quad (3.15)$$

Obtém-se que,

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \eta_0(t)(1 - \mathcal{B}(t)), \quad A_2(t) = \eta_0(t)^2(1 - \mathcal{B}(t)), \quad \frac{\Gamma_1(t+1)}{\Gamma_2(t+1)} = \prod_{k=t+1}^{T-1} \frac{1}{\eta_0(k)}, \\ \Gamma_1(0) &= \prod_{t=0}^{T-1} \eta_0(t)(1 - \mathcal{B}(t)), \quad \Gamma_2(0) = \prod_{t=0}^{T-1} \eta_0(t)^2(1 - \mathcal{B}(t)), \quad \mathcal{C} = \frac{1}{2} \left(1 - \prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t)) \right), \\ a &= \frac{1}{4} \prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t)) \left(1 - \prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t)) \right), \quad b = 2 \prod_{t=0}^{T-1} \eta_0(t), \quad c = 0, \end{aligned}$$

e,

$$\frac{\mathcal{C}}{2\tilde{\rho}a} = \frac{1}{\tilde{\rho} \prod_{t=0}^{T-1} (1 - \mathcal{B}(t))}.$$

Teorema 3.2 *Considerando 1 ativo livre de risco (ativo de referência) e assumindo-o como em (3.15), tem-se que a solução ótima dos problemas em questão, é dada da seguinte maneira (ver [24] com portfólio com condição inicial em 0).*

Para o problema $PRE(\tilde{\sigma})$:

$$\mathbf{u}^*(t) = -\eta_0(t)\phi(t)^{-1}(\boldsymbol{\eta}(t) - \eta_0(t)\mathbf{e})(V(t) - V^B(t)) + 2\tilde{\sigma}\sqrt{\frac{\prod_{t=0}^{T-1}(1 - \mathcal{B}(t))}{1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1 - \mathcal{B}(t))}}\vartheta(t) + V^B(t)\boldsymbol{\omega}^B.$$

O controle ótimo do problema $PRV(\tilde{\chi})$ será:

$$\mathbf{u}^*(t) = -\eta_0(t)\phi(t)^{-1}(\boldsymbol{\eta}(t) - \eta_0(t)\mathbf{e})(V(t) - V^B(t)) + 2\tilde{\chi}\frac{1}{1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1 - \mathcal{B}(t))}\vartheta(t) + V^B(t)\boldsymbol{\omega}^B.$$

$PREV(\tilde{\rho})$ tem como solução ótima:

$$\mathbf{u}^*(t) = -\eta_0(t)\phi(t)^{-1}E(\mathcal{P}(t))(V(t) - V^B(t)) + \left(\frac{1}{\tilde{\rho}\prod_{t=0}^{T-1}(1 - \mathcal{B}(t))}\right)\vartheta(t) + V^B(t)\boldsymbol{\omega}^B.$$

Onde,

$$\vartheta(t) = \frac{1}{2} \left(\prod_{k=t+1}^{T-1} \frac{1}{\eta_0(k)} \right) E(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')^{-1}E(\mathcal{P}(t)),$$

e,

$$E(\tilde{V}(T)) = \frac{1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1 - \mathcal{B}(t))}{2\tilde{\rho}\prod_{t=0}^{T-1}(1 - \mathcal{B}(t))}, \quad (3.16)$$

$$Var(\tilde{V}(T)) = \frac{1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1 - \mathcal{B}(t))}{4\tilde{\rho}^2\prod_{t=0}^{T-1}(1 - \mathcal{B}(t))}, \quad (3.17)$$

sendo,

$$\tilde{\rho} = \begin{cases} \frac{1}{2\tilde{\sigma}}\sqrt{\frac{1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1 - \mathcal{B}(t))}{\prod_{t=0}^{T-1}(1 - \mathcal{B}(t))}} & \text{para o problema } PRE(\tilde{\sigma}), \\ \frac{1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1 - \mathcal{B}(t))}{2\tilde{\chi}\prod_{t=0}^{T-1}(1 - \mathcal{B}(t))} & \text{para o problema } PRV(\tilde{\chi}). \end{cases}$$

tem-se a relação,

$$Var(\tilde{V}(T)) = \frac{\prod_{t=0}^{T-1}(1 - \mathcal{B}(t))}{1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1 - \mathcal{B}(t))}E^2(\tilde{V}(T)). \quad (3.18)$$

Observação 3.3 *Note que a Observação 3.2 também aplica para as estratégias ótimas dadas pelas equações do Teorema 3.2.*

Obtém-se também a seguinte proposição.

Proposição 3.3 *A curva no plano risco-retorno para os problemas de otimização $PRE(\tilde{\sigma})$, $PRV(\tilde{\chi})$ e $PREV(\tilde{\rho})$ onde considera-se 1 ativo livre de risco do total de ativos, é descrita pela equação (ver [24] com portfólio com condição inicial em 0 e a substituição das Equações (3.12) e (3.13)):*

$$\tilde{\mu}(T) = \sqrt{\frac{1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1 - \mathcal{B}(t))}{\prod_{t=0}^{T-1}(1 - \mathcal{B}(t))}}\tilde{\sigma}_P(T).$$

Os resultados teóricos obtidos neste capítulo são aplicados e corroborados para o caso específico da bolsa de valores do estado de São Paulo BMF&BOVESPA (ver capítulo 4).

Capítulo 4

Simulação dos Resultados

4.1 Preliminares

Para efeitos de simulação, escolheu-se o índice da bolsa de valores do estado de São Paulo *IBOVESPA* como benchmark de renda variável, dado que é o principal índice do mercado acionário brasileiro, além de ter series históricas completas da composição das carteiras teóricas disponíveis. Em seguida, coletaram-se as ações que sempre tiveram participação no índice desde junho/2010 até o “presente real” (novembro/2015) [9].

Supõe-se um presente fictício em setembro/2011 e avaliam-se os algoritmos obtidos dos resultados teóricos num *futuro fictício* (até o presente real). Com base no anterior, se adota como dados históricos os preços compreendidos entre junho/2010 e setembro/2011 para a composição do portfólio (escolha de ações processando essa informação) que deseja-se otimizar. No apêndice A se mostra o coeficiente de correlação dos retornos e os retornos esperados estimados das ações que desde 2010 até o presente tiveram participação no IBOVESPA, obtidos a partir dos preços históricos disponibilizados em *Yahoo! Finance* e *Google Finance* [44,45]. Os preços são ajustados com respeito aos desdobramentos (splits) ou grupamentos (inplits) de ações, tendo assim uma uniformidade na evolução temporal, i.e., sem alteração da volatilidade e do retorno real –sem saltos abruptos–. Para a composição do portfólio leva-se em consideração o coeficiente de correlação dos retornos e o retorno esperado estimado entre as ações –argumento técnico– e o setor econômico ao qual pertenciam –argumento fundamentalista–, para assim obter uma carteira diversificada. Na tabela 4.1 apresenta-se a carteira selecionada com os seus correspondentes coeficientes de correlação. O setor econômico relacionado e retorno esperado estimado de cada ação é mostrado na tabela 4.2.

Ação	BRFS3	BRKM5	BVMF3	CCRO3	CIEL3	CMIG4	EMBR3	VALE3
BRFS3	1,00	-0,09	-0,27	0,44	0,11	-0,31	0,07	0,20
BRKM5	-0,09	1,00	0,59	0,33	-0,42	0,26	-0,16	0,20
BVMF3	-0,27	0,59	1,00	0,52	-0,28	0,35	0,02	-0,02
CCRO3	0,44	0,33	0,52	1,00	0,08	-0,02	0,35	0,41
CIEL3	0,11	-0,42	-0,28	0,08	1,00	-0,17	0,02	-0,07
CMIG4	-0,31	0,26	0,35	-0,02	-0,17	1,00	-0,18	-0,16
EMBR3	0,07	-0,16	0,02	0,35	0,02	-0,18	1,00	0,60
VALE3	0,20	0,20	-0,02	0,41	-0,07	-0,16	0,60	1,00

Tabela 4.1: Coeficiente de correlação das ações da carteira escolhida (jun/2010-set/2011).

Fonte: autor.

Ação	$\hat{r}_i\%$	Setor
BRFS3	2,23	Cons N Básico / Alimentos Processados
BRKM5	1,61	Mats Básicos / Químicos
BVMF3	-1,53	Financeiro e Outros/Serviços Financeiros Diversos
CCRO3	1,87	Const e Transp / Transporte
CIEL3	0,82	Financeiro e Outros/Serviços Financeiros Diversos
CMIG4	0,58	Energia Elétrica
EMBR3	2,02	Bens Indls / Mat Transporte
VALE3	0,0	Mats Básicos / Mineração

Tabela 4.2: Retorno esperado estimado e setor econômico das ações da carteira escolhida (jun/2010-set/2011).

Fonte: autor.

Uma vez obtida a carteira, pode-se continuar com a aplicação dos algoritmos derivados no capítulo anterior. Será suposto isenção dos custos de transações implicados, tais como as taxas de corretagem, emolumentos (operações de trading), custódia, administração (para renda fixa) e a alíquota de imposto de renda IR. Também supõe-se que as ações não geram dividendos.

Abordam-se dois casos para a composição da **carteira objetivo**:

- **Caso I:** Todos os ativos de risco –grupo de ações das tabelas 4.1 e 4.2–.
- **Caso II:** 1 ativo sem risco -ativo de renda fixa indexado- e ativos de risco do item anterior.

As series históricas dos preços das ações, assim como as taxas de retorno do ativo sem risco foram tomadas mensalmente, ou seja, estabelece-se a unidade de tempo como 1 mês. Dado também que a carteira teórica do **Ibovespa** é divulgada por quadrimestres, sendo esses janeiro-abril, maio-agosto, setembro-dezembro; avaliam-se os algoritmos para os eventos $T = 1, 2, 3, 4$ nos dois casos demarcados, onde a cada evento multi-período se repete o número de vezes necessário até chegar ao tempo final (nov/2015). Nos gráficos a seguir, o mês 0 –tempo inicial– corresponde a setembro/2011 e o mês 50 a novembro/2015. Nos dois casos, é feita uma comparativa do rendimento do método do Erro de Rastreamento Multi-período (**ERM**) para os diversos T ; também compara-se o rendimento do ERM com o resultante da aplicação do modelo de Markowitz Multi-período (**MM**) introduzido no capítulo anterior. Avaliam-se primeiro os algoritmos derivados da solução dos problemas $PV(\chi)$ e $PRV(\tilde{\chi})$ para o *caso I*; sendo comparados depois os algoritmos obtidos da solução dos problemas $PE(\sigma)$ e $PRE(\tilde{\sigma})$ para o *caso II*. Na implementação dos algoritmos, todas as variáveis e quantidades variam no tempo com exceção do capital inicial v_0 e os parâmetros de performance desejados (rentabilidade mensal esperada, risco mensal esperado).

Para evitar posições de vendas a descoberto (quantidades de capital negativas a ser investidas) ou *short-sellings*, implementou-se uma “correção” no vetor de proporções $\bar{\omega}(t)$ $\{\bar{\omega}(t) = [\omega_0(t) \dots \omega_n(t)]\}$, da seguinte maneira. Zerou-se a componente i onde $\omega_i(t)$ fosse negativo e normalizou-se o o vetor $\bar{\omega}(t)$ alterado, $\hat{\omega}(t)$. Dado que o somatório dos elementos do vetor de proporções tem que ser obrigatoriamente 1¹.Impondo dessa

¹Trabalha-se com o vetor $\bar{\omega}(t)$ alterado, mas se adota a mesma notação e não $\hat{\omega}(t)$, afim de não acrescentar mais variáveis.

maneira um capital ou rentabilidade que não pode ser ultrapassado –“saturação”–, já que está limitado ao caso em que todo o montante estivesse alocado no ativo de maior retorno (corroborado mais adiante neste capítulo).

4.2 Caso I: Ativos de Risco

Para a otimização da carteira do caso I estabelece-se uma *janela histórica móvel* de 1 ano (12 amostras) para a estimação do retorno esperado, dado pela seguinte expressão:

$$\hat{r}_i(t) = \frac{1}{12} \sum_{k=t-11}^t R_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, 8. \quad (4.1)$$

Sendo,

$$R_i(t) = \frac{S_i(t)}{S_i(t-1)} - 1 = \mathcal{R}_i(t) - 1,$$

onde no tempo t o preço do ativo i é conhecido, i.e., no fechamento do pregão; e portanto, $\mathcal{R}_i(t)$ é calculável.

Para estabelecer o parâmetro desejado de performance mensal μ_d , calcula-se o retorno crítico usando a análise de Markowitz uniperíodo em $t = 0$ (eq. 2.19) para garantir a escolha de um ponto da fronteira eficiente inicial, ou seja,

$$\begin{aligned} \mu_d &\geq \mu_g \approx 0.01, \\ \mu_d &\geq 0.01. \end{aligned}$$

Na tabela 4.3, mostram-se algumas diferenças entre retornos da fronteira eficiente com o seu risco associado, obtido da raiz quadrada da eq. (2.18).

μ_{ef}	$\sigma(\approx)$	$\mu_{ef} - \sigma$
0.01	0.0200	-0.0010
0.02	0.0242	-0.0042
0.03	0.0268	0.0032
0.04	0.0273	0.0127

Tabela 4.3: Diferenças entre retornos eficientes e os riscos associados.

Fonte: autor.

Baseando-se na tabela 4.3, observa-se que o valor mais conveniente para μ_d é 0.04, já que a diferença entre $\mu_{ef} - \sigma$ é positiva e muito maior do que a correspondente a $\mu_{ef} = 0.03$; com um pequeno aumento em risco. Não são considerados valores maiores para μ_{ef} já que poderia representar um *perfil de investimento arrojado* demais para um futuro que é imprevisível.

Considerando a taxa básica de juros *SELIC* (em set/2011) que é 11.90% [46], ou a taxa de depósito interbancário DI-Cetip (em set/2011) sendo 11.89% [43], que em termos mensais seriam:

$$\begin{aligned} \mu_{SELIC} &= \sqrt[12]{1 + 0.1190} - 1 \approx 0.0094, \\ \mu_{DI} &\approx 0.0094, \end{aligned}$$

conclui-se que a rentabilidade mensal escolhida parece ser um bom parâmetro de performance dado que está bem acima do que renderia um ativo de renda fixa indexado a alguma dessas taxas.

4.2.1 Comparação entre MM e ERM

Nesta subseção são comparados os métodos de MM e ERM, para o qual será preciso obter uma compatibilidade nos respectivos parâmetros de performance, χ e $\tilde{\chi}$, feito da seguinte maneira.

Uma vez obtido μ_d , que pode ser expresso da seguinte forma,

$$\mu_d = E(P),$$

onde P representa o retorno da carteira de um período de tempo com respeito ao imediatamente anterior, e denota-se μ_1, μ_2, μ_3 e μ_4 os retornos esperados desejados para cenário multi-período quando $T = 1, 2, 3$ e 4 , respectivamente. E ainda, sejam χ_1, χ_2, χ_3 e χ_4 as expectativas dos capitais finais desejados, lembrando que χ é o parâmetro de performance desejado para o problema $PV(\chi)$. Deseja-se obter uma expressão para o parâmetro $\tilde{\chi}$ baseada no parâmetro χ equivalente para os diversos períodos. Para tal, tem-se que,

$$\begin{aligned}\chi_1 &= E(V(1)) = E\left((1 + P(0))V(0)\right) \\ &= \left(1 + E(P(0))\right)v_0 \\ &= (1 + \mu_d)v_0.\end{aligned}$$

Para χ_2 tem-se que,

$$\begin{aligned}\chi_2 &= E(V(2)) = E\left((1 + P(2))V(1)\right) \\ &= E\left((1 + P(0))(1 + P(1))\right)v_0,\end{aligned}$$

supondo que $P(k-1)$ e $P(k)$ são independentes para todo k , $k = 1, 2, \dots, T$. Então,

$$\begin{aligned}\chi_2 &= \left(1 + E(P(0))\right)\left(1 + E(P(1))\right)v_0 \\ &= (1 + \mu_d)^2 v_0.\end{aligned}$$

Similarmente para χ_3 e χ_4 , obtém-se:

$$\begin{aligned}\chi_3 &= (1 + \mu_d)^3 v_0 \\ \chi_4 &= (1 + \mu_d)^4 v_0.\end{aligned}$$

Denota-se por $\tilde{\mu}_d$ a rentabilidade relativa mensal desejada. Mais precisamente,

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_d &= E(P - P^B) \\ &= E(P) - E(P^B) \\ &= E(P) - \mu^B.\end{aligned}$$

Para uma comparação homogênea com o algoritmo de Markowitz Multi-período, i.e., ter o mesmo parâmetro de performance,

$$\tilde{\mu}_d = \mu_d - \mu^B,$$

mas como P^B é variante no tempo, então μ^B também será, i.e.,

$$\tilde{\mu}_d(t) = \mu_d - \mu^B(t), \quad (4.2)$$

sendo,

$$\begin{aligned} \mu^B(t) &= E\left(\bar{\omega}^B(t)'(\bar{\mathcal{R}}(t) - [1 \quad e']')\right) \\ &= \bar{\omega}^B(t)' \bar{\eta}(t) - 1. \end{aligned}$$

Seja $\tilde{\chi}_k$ a expectativa do capital final desejado para $T = k$. Tem-se,

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_k &= E(\tilde{V}(T = k)) \\ &= E\left(v_0(1 + \tilde{P}(k))\right) - v_0^B \\ &= v_0 E\left(\prod_{k'=0}^{k'=k-1} (1 + \tilde{P}(k'))\right) - v_0^B, \end{aligned}$$

assumindo independência entre $\tilde{P}(k')$ e $\tilde{P}(k' + 1)$ para $\{k' = 0, 1, \dots, k - 1\}$, obtém-se,

$$\tilde{\chi}_k = v_0 \prod_{k'=0}^{k'=k-1} \left(1 + E(\tilde{P}(k'))\right) - v_0^B \quad (4.3)$$

$$= v_0 \prod_{k'=0}^{k'=k-1} (1 + \tilde{\mu}(k')) - v_0^B. \quad (4.4)$$

Por razões de simplicidade, supõe-se que:

$$\prod_{k'=0}^{k'=k-1} (1 + \tilde{\mu}(k')) \approx (1 + \tilde{\mu}(i))^k, \quad i = 0, 1, \dots, k - 1. \quad (4.5)$$

Substituindo (4.5) em (4.4), finalmente obtém-se $\tilde{\chi}_k(t)$ para os períodos estabelecidos. De maneira mais precisa,

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_1(t) &= (1 + \tilde{\mu}_d(t))v_0 - v_0^B, \\ \tilde{\chi}_2(t) &= (1 + \tilde{\mu}_d(t))^2 v_0 - v_0^B, \\ \tilde{\chi}_3(t) &= (1 + \tilde{\mu}_d(t))^3 v_0 - v_0^B, \\ \tilde{\chi}_4(t) &= (1 + \tilde{\mu}_d(t))^4 v_0 - v_0^B. \end{aligned}$$

Em todos os gráficos a seguir referidos aos problemas $PV(\chi)$ e $PRV(\tilde{\chi})$, adotam-se os parâmetros de performance desejados χ e $\tilde{\chi}$ para o T correspondente, respectivamente.

Na Figura 4.1 compara-se a evolução temporal do capital aplicando o método de MM e ERM. Tem-se que $V(t)_{SELIC}$ representa o capital no caso em que se aloca todo o montante num ativo de renda fixa indexado à taxa SELIC²; $V^B(t)$ é o capital do Benchmark, obtido da normalização da carteira objetivo sob a composição do *IBOVESPA*; e $V(t)_{IBOV}$ é a evolução do *IBOVESPA* normalizado para $t = 0$.

²Títulos do governo federal indexados à taxa SELIC são os títulos mais seguros do país, i.e., são os ativos de menor risco [47].

Figura 4.1: Comparativa do capital em função do tempo entre *MM* (a) e *ERM* (b).
Fonte: autor.

Observa-se na Figura 4.1(a) que a estratégia de investimento de *MM* $\{T = 1, 2, 3, 4\}$ consegue bater o investimento em renda fixa para o tempo final ($t = 50$), sendo a diferença em rentabilidade 11% a mais para $T = 4$. Na figura 4.1(b) mostra-se que a estratégia de *ERM* (estratégia proposta) consegue obter uma boa diferença em rentabilidade com respeito ao benchmark (45% a mais para $T = 2$). Percebe-se que $V(t)$ mantém certa correlação com $V^B(t)$ para todos os períodos $\{T = 1, 2, 3, 4\}$ como era de se esperar, mas não tem muita diferença no decorrer do tempo entre os respectivos $V(t)$. Também se observa que $V^B(t)$ tem uma boa correlação com *IBOVESPA*, pois o coeficiente de correlação ρ , é,

$$\rho(V^B(t), V(t)_{\text{IBOV}}) \approx 43\%.$$

Para os dois métodos, *MM* e *ERM*, $V(t)$ apresenta grande similaridade na forma para todos os períodos, mas *MM* tem um melhor desempenho em rentabilidade do que *ERM*. Uma das razões é o momento de crise da economia brasileira dos últimos anos que consequentemente é refletido no *IBOVESPA*, tendo dessa maneira um benchmark de baixo performance.

Na figura seguinte apresenta-se a expectativa instantânea do capital usando os métodos de *MM* e *ERM*, sendo calculada para cada capital respectivo da seguinte maneira ,

$$V(t+1) = V(t)\bar{\omega}(t)'\bar{\mathcal{R}}(t), \quad (4.6)$$

$$E(V(t+1)) = V(t)\bar{\omega}(t)'\bar{\eta}(t). \quad (4.7)$$

Pode-se ver na Figura 4.2 que as curvas de *ERM* são similares entre todos os períodos avaliados, e também similares às de *MM* para os períodos respectivos. Conclui-se que *ERM* em termos da expectativa instantânea do capital não exibe nenhuma vantagem ou desvantagem com respeito a *MM*.

Figura 4.2: Expectativa instantânea do capital para MM (a) e ERM (b).

Fonte: autor.

O risco instantâneo para o capital foi calculado aplicando o operador variância na Equação (4.6) e extraindo raiz quadrada, ou seja:

$$Var(V(t+1)) = V(t)^2 \bar{\omega}(t)' \bar{\Sigma}(t) \bar{\omega}(t), \quad (4.8)$$

$$\sigma(V(t+1)) = V(t) \sqrt{\bar{\omega}(t)' \bar{\Sigma}(t) \bar{\omega}(t)}, \quad (4.9)$$

onde,

$$\bar{\Sigma}(t) = cov(\bar{\mathcal{R}}(t), \bar{\mathcal{R}}(t)').$$

A implementação da Equação (4.9) para cada método é mostrada na Figura 4.3, onde se observa que o ERM exibe um maior risco do que o MM, corroborando de maneira intuitiva o resultado de deslocamento na variância dado em [38] para o cenário uniperíodo, o que leva a inferir que tem alguma equivalência no cenário multi-período.

Figura 4.3: Risco instantâneo do capital para: MM (a) e (c); e ERM (b) e (d).

Fonte: autor.

4.2.2 Avaliação do ERM para o $PRV(\tilde{\mu})$ com diversos T

Nesta subseção avalia-se isoladamente o ERM. A Figura 4.4 apresenta o ERM para os períodos estabelecidos³.

Figura 4.4: ERM em função do tempo para: $T = 1, 2$ (a); e $T = 3, 4$ (b).

Fonte: autor.

³As quantidades dadas em porcentagem são relativas aos seus valores para $t = 0$

Cabe destacar que o capital do benchmark ($V^B(t)$) usado para calcular o ERM não é o mostrado na figura 4.1(b), já que nesse caso não teria-se um ganho acumulativo senão “constante”, o que produziria um $V(t)$ “constantemente” distanciado de $V^B(t)$. Por tal motivo, inicializou-se cada v_0^B com o capital final do período anterior (similarmente para v_0), i.e.,

$$V^B(t = kT) = v_0^B = V(T - 1), \quad k = 1, 2, \dots, k_{mT},$$

onde,

$$\frac{50}{T} = k_{mT} + d, \quad k_{mT} \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{para } T = 1, 2, 3, 4.$$

Lembrando que,

$$V(t = 0) = V^B(t = 0) = 1.$$

Observa-se na Figura 4.4 que o ERM não é sempre positivo, o que quer dizer que não conseguiu-se obter ganho do benchmark para todo t . Mesmo assim, o ganho acumulativo foi positivo (ver figura 4.1), o que implica que a média do ERM foi positiva. Também observa-se que a volatilidade do ERM aumenta conforme T aumenta, a qual é uma causa da correção feita para as short-sellings e não do método (como se perceberá mais para frente). Para corroborar o dito anteriormente, apresenta-se a Tabela 4.4, a qual mostra a média amostral do ERM ($\bar{v}(t)$) e o seu desvio padrão $\hat{\sigma}(\tilde{V}(t))$ para os diversos períodos.

T	1	2	3	4
$\bar{v}(t)$	0.0086	0.0151	0.0124	0.0231
$\hat{\sigma}(\tilde{V}(t))$	0.0454	0.0553	0.0751	0.0776

Tabela 4.4: Média Amostral e desvio padrão do ERM.

Fonte: autor.

Na Figura 4.5(a) é apresentada a expectativa do ERM para o final de cada período, $E(\tilde{V}(t = k(T - 1)))$. Note que $E(\tilde{V}(t = k(T - 1)))$ deveria se manter constante para $(k - 1)(T - 1) \leq t \leq k(T - 1)$, mas essa quantidade foi re-calculada dado que as estatísticas dos retornos variam para cada t . Para fins de comparação entre os diferentes períodos (ver 4.5(b)), foi feita uma equivalência da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(T) &= P(T) - P^B(T) \\ &= \frac{V(T) - v_0}{v_0} - \frac{V^B(T) - v_0^B}{v_0^B}, \quad \text{sendo } v_0^B = v_0, \end{aligned}$$

então tem-se,

$$\begin{aligned} \tilde{P}(T) &= \frac{1}{v_0} (V(T) - V^B(T) - v_0 + v_0) \\ &= \frac{\tilde{V}(T)}{v_0}, \end{aligned}$$

e por consequência,

$$E(\tilde{P}(T)) = \frac{E(\tilde{V}(T))}{v_0}.$$

Por fim, para a equivalência com $T = 4$ se faz:

$$E(\tilde{V}(T))_{eq} = v_0 \left(1 + E(\tilde{P}(T)) \right)^{\frac{4}{T}} - v_0, \quad \text{para } T = 1, 2, 3, 4. \quad (4.10)$$

A Figura 4.5(b) mostra a expectativa do ERM ao final do período com a aplicação da Eq.(4.10) –note que $E(\tilde{V}(T))$ para $T = 4$ não teve alterações–. Portanto, conclui-se que $E(\tilde{V}(T))$ não apresenta grandes mudanças ou ganhos em relação ao período avaliado.

Figura 4.5: Expectativa do ERM no final de T (a); Expectativa do ERM equivalente em $T=4$ (b).

Fonte: autor.

O risco do ERM ao final de T é apresentado na Figura 4.6. Como feito anteriormente, também foi re-calculado em cada instante de tempo. É importante destacar que os riscos para cada T são acumulativos, e.g., para $T = 4$ corresponde o risco acumulado de 4 meses, sendo incomparável com $T = 1$ (um mês). Por tal razão, de maneira similar como feito em (4.10) para a equivalência da expectativa em $T = 4$, é feito para o risco (risco equivalente em $T = 4$). Para encontrar uma expressão para a equivalência em $T = 4$ encontra-se uma expressão para $\sigma(P(2))$ e logo se generaliza para $\sigma(P(k))$, ou seja,

$$1 + P(2) = (1 + P(0))(1 + P(1)),$$

sendo,

$$X_2 = 1 + P(2), \quad X_1 = 1 + P(1), \quad X_0 = 1 + P(0),$$

tem-se,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_2) &= \text{Var}(X_0 X_1) \\ &= E((X_0 X_1)^2) - E^2(X_0 X_1), \text{ com } X_k \perp X_{k-1}, k \geq 1 \\ &= E(X_0^2)E(X_1^2) - E^2(X_0)E^2(X_1) \\ &= (\text{Var}(X_0) + E^2(X_0))(\text{Var}(X_1) + E^2(X_1)) - E^2(X_0)E^2(X_1) \\ &= \text{Var}(X_0)\text{Var}(X_1) + E^2(X_0)\text{Var}(X_1) + E^2(X_1)\text{Var}(X_0), \end{aligned}$$

e dado que,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_0) &= \text{Var}(1 + P(0)) = \text{Var}(P(0)) \\ \text{Var}(X_1) &= \text{Var}(1 + P(1)) = \text{Var}(P(1)) \\ \text{Var}(X_2) &= \text{Var}(1 + P(2)) = \text{Var}(P(2)) \\ E^2(X_0) &= \left(E(1 + P(0))\right)^2 = \left(1 + E(P(0))\right)^2 \\ E^2(X_1) &= \left(1 + E(P(1))\right)^2, \end{aligned}$$

obtém-se,

$$Var(P(2)) = Var(P(0))Var(P(1)) + Var(P(1))\left(1 + E(P(0))\right)^2 + Var(P(0))\left(1 + E(P(1))\right)^2,$$

seja σ_d o risco associado a μ_d usando o método de Markowitz uniperíodo dado pela Equação (2.18), sendo σ_d o risco num período de tempo qualquer com respeito ao tempo anterior. Pode-se escrever $Var(P(2))$ como,

$$Var(P(2)) = (\sigma_d^2 + (1 + \mu_d)^2)Var(P(1)) + \sigma_d^2(1 + \mu_d)^2. \quad (4.11)$$

Mantendo a mesma notação usada anteriormente, generaliza-se para k da seguinte maneira,

$$X_k = X_{k-1}X_0, \quad (4.12)$$

onde,

$$X_{k-1} = (1 + P(0))(1 + P(1)) \dots (1 + P(k-2)) \text{ e } X_0 = 1 + P(k-1),$$

denotando o retorno acumulativo da carteira até o instante t como $P'(t)$, tem-se:

$$\begin{aligned} Var(X_0) &= Var(P(k-1)) = Var(P(1)) \\ Var(X_{k-1}) &= Var(P'(k-1)), \end{aligned}$$

similarmente ao feito anteriormente,

$$\begin{aligned} Var(P(k)) &= Var(P(1))Var(P'(k-1)) + Var(P'(k-1))\left(1 + E(P(1))\right)^2 \\ &\quad + Var(P(1))\left(1 + E(P'(k-1))\right)^2, \end{aligned}$$

e aplicando a aproximação em (4.5),

$$Var(P'(k)) = (\sigma_d^2 + (1 + \mu_d)^2)Var(P(k-1)) + \sigma_d^2(1 + \mu_d)^{2(k-1)}, \quad Var(P(0)) = 0.$$

Supondo também que as estatísticas dos retornos são variantes no tempo, e denotando $Var(P'(k))$ como $\sigma_k^{2'} \{k = 1, 2, 3, 4\}$, obtém-se,

$$\sigma_k^{2'}(t) = (\sigma_d^2 + (1 + \mu_d(t))^2)\sigma_{k-1}^{2'}(t-1) + \sigma_d^2(1 + \mu_d(t))^{2(k-1)}, \quad \sigma_0^{2'}(t) = 0. \quad (4.13)$$

De (??) tem-se:

$$\sigma(\tilde{V}(T)) = v_0\sigma(\tilde{P}(T)), \quad (4.14)$$

portanto, para a equivalência com $T = 4$ calcula-se⁴:

$$\sigma(\tilde{V}(T))_{eq}|_{T=1} = v_0\sigma'_4, \quad (4.15)$$

$$\sigma(\tilde{V}(T))_{eq}|_{T=2} = v_0\sigma'_2, \quad \sigma_1^{2'} = \sigma_d^2 = Var(\tilde{V}(T))|_{T=2}, \quad \mu_d = \mu_d|_{\sigma_d}, \quad (4.16)$$

$$\sigma(\tilde{V}(T))_{eq}|_{T=3} = v_0\sigma'_2, \quad \sigma_1^{2'} = Var(\tilde{V}(T))|_{T=3}, \quad (4.17)$$

$$\sigma(\tilde{V}(T))_{eq}|_{T=4} = v_0\sigma'_1, \quad \sigma_d = Var(\tilde{V}(T))|_{T=4}. \quad (4.18)$$

Note que para $T = 4$, Equação (4.18), o risco não tem alterações, i.e., $\sigma(\tilde{V}(T))_{eq}|_{T=4} = Var(\tilde{V}(T))|_{T=4}$.

⁴Nas equações (4.15) e (4.17), σ_d corresponde ao parâmetro de performance estabelecido anteriormente com o seu μ_d associado.

Na Figura 4.6(a) mostra-se o risco do ERM no tempo final, não podendo-se comparar os riscos associados para cada período. A implementação das equações anteriores, ou seja, a equivalência feita para fins de comparação é representada na figura 4.6(b), podendo-se observar o efeito multi-período, i.e., consegue-se diminuir o risco com o aumento de T (ampliação da janela temporal de planejamento), superando o caso uniperíodo de Roll.

Figura 4.6: Risco do ERM no final de T (a); risco do ERM equivalente em $T = 4$ (b).
Fonte: autor.

Na Figura 4.7 mostra-se a expectativa do ERM instantânea, com objetivo de comparar como as soluções em cada t refletem desde a visão de único período (equivalência em $T = 1$). Sendo o calculo efetuado da seguinte maneira:

$$\tilde{V}(t+1) = V(t+1) - V^B(t+1) \quad (4.19)$$

$$= V(t)\bar{\omega}(t)'\bar{\mathcal{R}}(t) - V^B(t)\bar{\omega}^B(t)'\bar{\mathcal{R}}(t), \quad (4.20)$$

o que implica que,

$$E(\tilde{V}(t+1)) = V(t)\bar{\omega}(t)'\bar{\eta}(t) - V^B(t)\bar{\omega}^B(t)'\bar{\eta}(t). \quad (4.21)$$

Figura 4.7: Expectativa instantânea do ERM para $T = 1, 2$ (a) e $T = 3, 4$ (b).
Fonte: autor.

Observa-se na Figura 4.7 que a expectativa instantânea do ERM para $T = 2, 3, 4$ segue as variações negativas do ERM (ver figura 4.4), e.g., em $t = 1, 12, 22, 36, 43$; mas

consegue-se recompor nos outros instantes de tempo, contrastando com o caso de $T = 1$, onde se mantém oscilando positivamente em todo t .

Para encontrar o risco instantâneo, o seguinte cálculo é feito. Da Eq.(4.19) tem-se que,

$$\tilde{V}(t+1) = (1 + P(t))V(t) - (1 + P^B(t))V^B(t), \quad (4.22)$$

sendo $P(t) = \bar{\omega}(t)' \bar{\mathcal{R}}(t) - 1$. Então,

$$Var(\tilde{V}(t+1)) = V(t)^2 Var(1 + P(t)) + V^B(t)^2 Var(1 + P^B(t)) - 2cov(V(t+1), V^B(t+1)), \quad (4.23)$$

efetua-se o termo da covariância entre $V(t+1)$ e $V^B(t+1)$,

$$cov(V(t+1), V^B(t+1)) = V(t)V^B(t)E\left((1 + P(t))(1 + P^B(t))\right) \quad (4.24)$$

$$- V(t)V^B(t)E(1 + P(t))E(1 + P^B(t)) \quad (4.25)$$

$$= V(t)V^B(t)cov(1 + P(t), 1 + P^B(t)) \quad (4.26)$$

$$= V(t)V^B(t)cov(P(t), P^B(t)) \quad (4.27)$$

$$= V(t)V^B(t)\bar{\omega}(t)'\bar{\Sigma}(t)\bar{\omega}^B(t). \quad (4.28)$$

Substituindo (4.28) em (4.23) e fazendo algumas manipulações obtém-se:

$$Var(\tilde{V}(t+1)) = (V(t)\bar{\omega}(t) - V^B(t)\bar{\omega}^B(t))'\bar{\Sigma}(t)(V(t)\bar{\omega}(t) - V^B(t)\bar{\omega}^B(t)), \quad (4.29)$$

e conseqüentemente,

$$\sigma(\tilde{V}(t+1)) = \sqrt{(V(t)\bar{\omega}(t) - V^B(t)\bar{\omega}^B(t))'\bar{\Sigma}(t)(V(t)\bar{\omega}(t) - V^B(t)\bar{\omega}^B(t))}. \quad (4.30)$$

A Figura 4.8 mostra o gráfico derivado da implementação de (4.30) para os diversos períodos.

Figura 4.8: Risco instantâneo do ERM para $T = 1, 2$ (a) e $T = 3, 4$ (b).

Fonte: autor.

As figuras mostradas até o momento têm considerado a correção para as *short-sellings*. No seguinte gráfico (Fig. 4.9) mostra-se a deformação introduzida nas estatísticas do ERM

quando a correção é aplicada. Por razões de simplicidade avalia-se para $T = 1$, já que neste caso não se tem que fazer nenhuma equivalência.

Figura 4.9: Expectativa do ERM com e sem short-sellings ($T = 1$) (a); risco do ERM com e sem short-sellings ($T = 1$) (b).

Fonte: autor.

Observa-se na Figura 4.9(a) que a correção feita para as short-sellings diminuem a expectativa do ERM em todo t , e como é de se esperar, o risco associado também diminui. Na faixa de tempo $16 \leq t \leq 22$ a correção feita causa uma operação fora da fronteira eficiente, obtendo assim uma expectativa menor com um risco associado maior.

4.2.3 Avaliação do ERM para o $PRV(\tilde{\chi})$ com diversos μ_d e T

Apresenta-se na Figura 4.10 a evolução do capital aplicando ERM para diferentes μ_d . Como era de se esperar no gráfico (a), o capital segue o capital do benchmark, i.e, obtém-se a mesma estratégia de investimento ($\tilde{\omega}(t) = \tilde{\omega}^B(t)$) em todos os períodos, dado que a expectativa do ERM desejado se fixa em zero ($\mu_d = 0$). No gráfico (b) as curvas estão apenas separadas da curva do benchmark, devido a que o parâmetro de performance μ_d é pequeno (0.5% mensal). Nos gráficos (c) e (d) o capital toma valores maiores chegando à “saturação”, mesmo que o parâmetro de performance do gráfico (d) ($\mu_d = 100\%$) é muito maior do que o estabelecido no gráfico (c) ($\mu_d = 6\%$), os capitais respectivos só apresentam pequenas diferenças. Em conclusão, a estratégia ERM não consegue ultrapassar uma rentabilidade de saturação limitada pela correção de short-sellings implementada, como apontado anteriormente, assim sejam estabelecidos parâmetros de performance μ_d cada vez maiores, independentemente do T adotado.

Figura 4.10: Capital em função do tempo para: $\mu_d = 0\%$ (a); $\mu_d = 0.5\%$ (b); $\mu_d = 6\%$ (c); e $\mu_d = 100\%$ (d).

Fonte: autor.

4.2.4 Avaliação do ERM para o $PREV(\tilde{\rho})$ com diversos $\tilde{\rho}$ e T

Na figura seguinte o problema $PREV(\tilde{\rho})$ é abordado variando seu parâmetro de performance, ou seja, alterando $\tilde{\rho}$ (fator de aversão ao risco). Na Figura 4.23(a) observa-se que o capital ou rentabilidade de saturação foi atingida, dado que o fator de aversão ao risco é “pequeno”⁵, em outras palavras, deseja-se obter todo o ganho possível com um baixo receio ao risco. Nos gráficos (b) e (c) é percebido como o capital fica mais próximo do capital acumulado pelo benchmark conforme $\tilde{\rho}$ aumenta, respectivamente. No gráfico (d), como esperado, o capital para os diversos períodos batem com o benchmark, em consequência de que $\tilde{\rho}$ tende a infinito, o que seria equivalente ao caso de assumir rentabilidade nula para o ERM (ver figura 4.10(a)). Com relação ao capital entre os diferentes T avaliados, não se pode concluir nada a respeito, já que o parâmetro $\tilde{\rho}$ não é equivalente para os diversos períodos.

Figura 4.11: Capital em função do tempo para: $\tilde{\rho} = 1$ (a); $\tilde{\rho} = 10^2$ (b); $\tilde{\rho} = 10^4$ (c); e $\tilde{\rho} \rightarrow \infty$ (d).

Fonte: autor.

⁵O nível assumido de aversão ao risco $\tilde{\rho}$, é dependente das estatísticas do portfólio.

4.3 Caso II: 1 Ativo sem Risco e Ativos de Risco

Neste cenário adota-se a carteira do *caso II*, onde considera-se o ativo sem risco como um título público indexado à taxa SELIC (ativo de menor risco no Brasil). Para compor a carteira teórica do benchmark leva-se em consideração a Figura 4.12, a qual classifica alguns *portfólios ou perfis de investimento* baseado nas proporções investidas em renda fixa e variável. Adotou-se um portfólio *moderadamente agressivo* –Figura 4.12(c)–, em consequência, o benchmark é composto como um fundo de investimento com 65% investido num ativo de renda fixa indexado; e o restante 35% proporcionado nos ativos de risco da carteira teórica do IBOVESPA do *caso I*. Ou seja,

$$\bar{\omega}^B(t)_{II} = [0.65 \quad 0.35\bar{\omega}^B(t)'_I]', \quad (4.31)$$

$$\bar{\mathcal{R}}(t)_{II} = [\mathcal{R}(t)_{SELIC} \quad \bar{\mathcal{R}}(t)'_I]'. \quad (4.32)$$

Figura 4.12: Modelos de portfólios: conservador (a); moderadamente conservador (b); moderadamente agressivo (c); agressivo ou arrojado (d).

Fonte: [13].

4.3.1 Avaliação do ERM para o $PRE(\tilde{\sigma})$ com diversos T

Para este cenário aborda-se o problema $PRE(\tilde{\sigma})$, denotando por $\tilde{\sigma}_{dT}$ o risco mensal desejado relativo ao Benchmark –parâmetro de performance para cada T –. Para a obtenção do parâmetro de performance equivalente se aplica a Eq.(4.13), assumindo um risco mensal,

$$\tilde{\sigma}_d = 1\%. \quad (4.33)$$

Na Figura 4.13 apresenta-se o capital em função do tempo para os diversos períodos. Observa-se uma diferença notória entre o capital para $T = 1$ com os capitais para $T = 2, 3, 4$, em contraste com o *caso I* (todos os ativos de risco, figura 4.1) em que tinha-se um comportamento similar para os diferentes T . Conclui-se que a estratégia ERM neste caso obtém um melhor performance para todo t em termos de $V(t)$ do que a

estratégia introduzida por Roll (ERM com $T = 1$) [38].

Nota-se também que o benchmark evolui de forma linear com pequenas oscilações, dada a alta proporção de renda fixa, e consequentemente, os diversos $V(t)$ também evoluem com certa linearidade.

Figura 4.13: Capital em função do tempo.

Fonte: autor.

Mostra-se na Figura 4.14 o ERM ao longo do tempo, onde a obtenção de $V^B(t)$ é similar à feita na geração da Figura 4.4. Observa-se que o ERM tem instantes onde é negativo, ou seja, não se consegue obter ganho com respeito ao benchmark, mas o ganho acumulativo (na média) é positivo (ver figura 4.13).

Figura 4.14: ERM em função do tempo para: $T = 1, 2$ (a); e $T = 3, 4$ (b).

Fonte: autor.

Se infere que conforme T aumenta o ERM é mais volátil (similar ao caso I), devido às correções para short-sellings (como se observará em próximos gráficos). Apresenta-se a Tabela 4.5 que corrobora o afirmado anteriormente.

T	1	2	3	4
$\tilde{V}(t)$	0.0009	0.0093	0.0117	0.0253
$\hat{\sigma}(\tilde{V}(t))$	0.0245	0.0499	0.0640	0.0753

Tabela 4.5: Média Amostral e desvio padrão do ERM.

Fonte: autor.

A expectativa do ERM ao final de T é apresentada na Figura 4.15(a); e a implementação de (4.10) –equivalência para $T=4$ – é dada pela Figura 4.15(b). Baseando-se nesta última figura, conclui-se que a expectativa do ERM ao final de T tem um melhor rendimento conforme o T avaliado aumenta, superando nesta quantidade (expectativa) o método de único período ($T = 1$) proposto por Roll [38].

Figura 4.15: Expectativa do ERM no final de T (a); expectativa do ERM equivalente em $T=4$ (b).

Fonte: autor.

Na Figura 4.16(a) mostra-se o o risco em termos do retorno para o ERM ao final de T , resultante da implementação da eq.(4.13), onde se observam pequenas oscilações para $T = 2, 3, 4$ produto da variação de μ_d no tempo, lembrando que σ_d é fixado. Na Figura 4.16(b) mostra-se a equivalência para $T = 4$, implementando as equações (4.15)(4.16)(4.17)(4.18) divididas em v_0 , respectivamente para cada T . Cabe destacar que obtém-se uma ótima equivalência, dado que as curvas estão próximas entre si (risco do retorno final) independente do período avaliado, concordando plenamente, já que é o parâmetro desejado estabelecido.

As Figuras 4.16(c)(d) são obtidas de maneira similar que as Figuras 4.16(a)(b) mas para o ERM (capital relativo), i.e., v_0 vezes o retorno relativo ao final de T . Percebe-se na Figura 4.16(d) uma maior diferença entre os diferentes T , consequência da evolução de v_0 (ver figura 4.13), lembrando que o método é aplicado repetidamente no decorrer do tempo.

Figura 4.16: Risko do retorno relativo no final de T (a); risco do retorno relativo equivalente em $T=4$ (b); risco do ERM no final de T (c); risco do ERM equivalente em $T=4$ (d).

Fonte: autor.

A expectativa do ERM instantânea em função do tempo –eq.(4.21)– é apresentada na Figura 4.17 . Onde similarmente ao caso I, as curvas da figura para $T = 2, 3, 4$ seguem as variações negativas do ERM (comparar com a figura 4.13), mas se recompõem nos seguintes instantes de tempo, produzindo uma expectativa acumulada positiva. Em contrapartida, a curva respectiva para $T = 1$ mantém-se positiva e com baixa oscilação em todo o tempo.

Figura 4.17: Expectativa instantânea do ERM para $T = 1, 2$ (a) e $T = 3, 4$ (b).

Fonte: autor.

Com fins puramente ilustrativos, a figura a seguir mostra o risco instantâneo do ERM –implementação da Eq.(4.30)–, onde observa-se como as soluções em cada t para os diferentes períodos avaliados refletem no risco (desde o cenário de $T = 1$). Como era de se esperar, a curva ótima é a curva correspondente a $T = 1$.

Figura 4.18: Risco instantâneo do ERM para $T = 1, 2$ (a) e $T = 3, 4$ (b).

Fonte: autor.

Na Figura 4.19(a) é apresentada a expectativa instantânea do capital, onde se nota uma diferença considerável entre a correspondente a $T = 1$ (menor) com as respectivas de $T = 2, 3, 4$ (desde a visão de único período), mas em consequência, o risco instantâneo (ver figura 4.19(b)) para $T = 2, 3, 4$ é também maior –e crescente com T – do que o risco instantâneo respectivo a $T = 1$.

Figura 4.19: Expectativa instantânea do capital (a) e risco instantâneo do capital (b).
Fonte: autor.

De forma similar ao feito para o caso I, apresenta-se na seguinte figura o efeito da correção aplicada para as short-sellings nas estatísticas do ERM considerando $T = 1$. Pode-se observar na Figura 4.20(a) como a correção deforma a expectativa do ERM, diminuindo-a. Agora, tendo em conta a Figura 4.20(b) (risco maior), conclui-se que sob as condições estabelecidas, a correção de short-sellings implementada faz com que se opere fora da fronteira eficiente na maioria do tempo.

Figura 4.20: Expectativa do ERM com e sem short-sellings ($T = 1$) (a); risco do ERM com e sem short-sellings ($T = 1$) (b).

Fonte: autor.

4.3.2 Avaliação ERM para $PRE(\tilde{\sigma})$ com diversos benchmarks

Na Figura 4.21 apresenta-se o capital ao longo do tempo com diferentes benchmarks. Onde é assumido para o benchmark os portfólios ou perfis de investimento mostrados na Figura 4.12. Nota-se que a medida que se altera (diminui) a proporção de renda fixa na carteira do benchmark, o capital para os diversos T diminui e apresenta maior volatilidade, tendo o melhor rendimento quando o benchmark é composto de 100% do ativo indexado à SELIC, e por conseguinte, uma maior proporção é investido nesse ativo. Destaca-se que independente do benchmark, o ERM para $T = 2, 3, 4$ supera em termos de capital o enfoque de único período de Roll [38] (capital).

Figura 4.21: Capital em função do tempo para: benchmark conservador com 100% em SELIC (a); benchmark moderadamente conservador com 65% em SELIC e 35% em ações (b); benchmark moderadamente agressivo com 35% em SELIC e 65% em ações (c); e benchmark agressivo com 100% em ações (d).

Fonte: autor.

4.3.3 Avaliação ERM para $PRE(\tilde{\sigma})$ com diversos σ_d

Na figura seguinte é mostrado o capital ao longo do tempo para diferentes parâmetros de performance, σ_d . Como esperado, na Figura 4.22(a) o capital para os diversos períodos bate com o capital acumulado pelo portfólio do benchmark, fato que é concordante, devido a que não se está assumindo risco para o ERM. Na Figura 4.22(b) assume-se um risco pequeno ($\sigma_d = 0.05\%$), e por tal razão, as curvas apenas se distanciam da curva do benchmark. Nos gráficos (c) e (d) o capital para os diversos períodos parecem ter atingido seu ponto de saturação, e em consequência, não se consegue ultrapassar essa rentabilidade limite (similar ao caso I) independente do T avaliado.

Figura 4.22: Capital em função do tempo para: $\sigma_d = 0\%$ (a); $\sigma_d = 0.05\%$ (b); $\sigma_d = 6\%$ (c); e $\sigma_d = 100\%$ (d).

Fonte: autor.

4.3.4 Avaliação ERM para $PREV(\tilde{\rho})$ com diversos $\tilde{\rho}$ e T

Agora será abordado o problema $PREV(\tilde{\rho})$ variando seu parâmetro de performance. Observa-se na Figura 4.23(a) que foi atingida a rentabilidade de saturação, devido a que o nível de aversão ao risco é baixo. Nos gráficos (b) e (c) observa-se como o capital se aproxima mais ao capital acumulado pelo benchmark conforme $\tilde{\rho}$ aumenta, respectivamente. No gráfico (d), o capital para os diversos T batem com o benchmark, dado que $\tilde{\rho}$ converge a infinito, o que seria equivalente ao caso de assumir risco nulo ou rentabilidade nula para o ER (ver Figuras 4.10(a) e 4.22(a)).

Figura 4.23: Capital em função do tempo para: $\tilde{\rho} = 1$ (a); $\tilde{\rho} = 10^2$ (b); $\tilde{\rho} = 10^4$ (c); e $\tilde{\rho} \rightarrow \infty$ (d).

Fonte: autor.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho foi generalizada a estratégia de investimento uniperíodo com erro de rastreamento proposta por Roll em [38], i.e., se derivou de forma analítica uma política ótima com erro de rastreamento no cenário multi-período (ERM) para carteiras de investimento e obteve-se uma relação explícita entre risco e retorno do ERM, adotando o enfoque de média-variância multi-período (MM) introduzida por Li e Ng em [24]. Uma comparação entre os métodos MM e ERM foi feita, considerando uma carteira composta de só ativos de risco para os problemas $PV(\mu)$ e $PRV(\tilde{\mu})$, onde via simulações é notado que MM obtém um capital acumulado maior do que ERM em todos os períodos avaliados ($T = 1, 2, 3, 4$), com similar expectativa instantânea e menor risco instantâneo. Avaliando o ERM isoladamente, percebe-se que o cenário multi-período tem um melhor desempenho do que o método de único período nos dois casos estabelecidos em termos de rendimento em capital, independentemente do parâmetro de performance, benchmark escolhido e período adotado $(\mu_d, \bar{\omega}^B(t), \sigma_d, T)$. Se obteve um menor risco do ER ao final de T (para o caso I) e uma maior expectativa do ER ao final de T (caso II) para o método proposto com respeito ao modelo uniperíodo de Roll. Com relação à correção feita para evitar as short-sellings, observou-se que sua aplicação acarreta deformações nas estatísticas do ERM, diminuindo a expectativa e aumentando o risco associado, em outras palavras, causando operações fora da fronteira eficiente de investimentos.

Uma evolução natural do presente trabalho seria a de derivar uma política ótima multi-período sob a hipótese de dependência temporal entre os retornos como um modelo ARMA (hipótese diferente que a Hipótese 3.1); abordar outros modelos para a estimação tanto do retorno esperado, quanto para o risco, e.g., o modelo *CAPM*, *CCAPM*, entre outros, com o fim de obter melhores previsões; derivar analiticamente um algoritmo de correção para as short-sellings baseado na otimização de algum critério que mantenha uma forte correlação entre as estatísticas do ERM ao final de T (solução sub-ótima), evitando assim, operações fora da fronteira eficiente de investimento ou grandes deformações nas estatísticas do ERM.

Apêndice A

Fator de Correlação e Retorno Esperado Estimado das Ações do IBOVESPA (jun/2010-set/2011)

Ação	BBAS3	BBDC4	BRAP4	BRFS3	BRKM5	BVMF3	CCRO3	CESP6
BBAS3	1,00	0,78	0,61	0,19	0,25	0,18	0,67	0,44
BBDC4	0,78	1,00	0,61	0,12	0,20	0,05	0,53	0,59
BRAP4	0,61	0,61	1,00	0,03	0,30	0,19	0,41	0,47
BRFS3	0,19	0,12	0,03	1,00	-0,09	-0,27	0,44	0,00
BRKM5	0,25	0,20	0,30	-0,09	1,00	0,59	0,33	0,15
BVMF3	0,18	0,05	0,19	-0,27	0,59	1,00	0,52	0,20
CCRO3	0,67	0,53	0,41	0,44	0,33	0,52	1,00	0,21
CESP6	0,44	0,59	0,47	0,00	0,15	0,20	0,21	1,00
CIEL3	0,08	0,12	-0,10	0,11	-0,42	-0,28	0,08	0,24
CMIG4	0,12	0,33	0,06	-0,31	0,26	0,35	-0,02	0,44
CPLE6	0,22	0,40	0,30	-0,34	0,33	0,41	0,07	0,64
CRUZ3	0,68	0,61	0,23	-0,03	0,46	0,28	0,53	0,26
CSAN3	0,77	0,71	0,60	0,19	0,03	-0,08	0,56	0,19
CSNA3	0,69	0,66	0,67	0,40	0,44	0,19	0,61	0,35
CYRE3	0,79	0,51	0,53	0,28	0,38	0,22	0,64	0,30
EMBR3	0,52	0,46	0,56	0,07	-0,16	0,02	0,35	0,29
FIBR3	0,42	0,70	0,73	0,17	0,47	0,28	0,56	0,46
GFSA3	0,75	0,59	0,59	0,36	0,38	0,18	0,62	0,38
GGBR4	0,36	0,28	0,22	0,21	0,23	-0,09	0,23	-0,20
ITSA4	0,81	0,85	0,51	0,02	0,21	0,08	0,50	0,39
ITUB4	0,80	0,86	0,52	0,05	0,19	0,03	0,50	0,33
JBSS3	0,57	0,44	0,33	0,07	0,44	-0,09	0,24	0,18
LAME4	0,57	0,47	0,25	-0,20	0,33	0,47	0,58	0,24
MRVE3	0,77	0,47	0,38	0,11	0,56	0,45	0,64	0,44
NATU3	0,75	0,69	0,39	0,30	0,53	0,30	0,67	0,45
PETR3	0,27	0,33	0,44	0,39	0,13	-0,53	-0,03	0,08
PETR4	0,32	0,39	0,53	0,38	0,18	-0,50	0,02	0,07
USIM5	0,42	0,52	0,22	0,25	0,41	0,04	0,29	0,30
VALE3	0,66	0,52	0,91	0,20	0,20	-0,02	0,41	0,27
VALE5	0,66	0,54	0,93	0,14	0,14	0,02	0,39	0,35

Ação	CIEL3	CMIG4	CPLE6	CRUZ3	CSAN3	CSNA3	CYRE3	EMBR3
BBAS3	0,08	0,12	0,22	0,68	0,77	0,69	0,79	0,52
BBDC4	0,12	0,33	0,40	0,61	0,71	0,66	0,51	0,46
BRAP4	-0,10	0,06	0,30	0,23	0,60	0,67	0,53	0,56
BRFS3	0,11	-0,31	-0,34	-0,03	0,19	0,40	0,28	0,07
BRKM5	-0,42	0,26	0,33	0,46	0,03	0,44	0,38	-0,16
BVMF3	-0,28	0,35	0,41	0,28	-0,08	0,19	0,22	0,02
CCRO3	0,08	-0,02	0,07	0,53	0,56	0,61	0,64	0,35
CESP6	0,24	0,44	0,64	0,26	0,19	0,35	0,30	0,29
CIEL3	1,00	-0,17	-0,24	0,17	-0,04	-0,36	0,21	0,02
CMIG4	-0,17	1,00	0,64	0,07	-0,12	0,10	-0,12	-0,18
CPLE6	-0,24	0,64	1,00	0,09	0,09	0,29	-0,14	0,24
CRUZ3	0,17	0,07	0,09	1,00	0,55	0,35	0,76	0,07
CSAN3	-0,04	-0,12	0,09	0,55	1,00	0,59	0,60	0,45
CSNA3	-0,36	0,10	0,29	0,35	0,59	1,00	0,48	0,63
CYRE3	0,21	-0,12	-0,14	0,76	0,60	0,48	1,00	0,15
EMBR3	0,02	-0,18	0,24	0,07	0,45	0,63	0,15	1,00
FIBR3	0,03	0,26	0,33	0,39	0,42	0,68	0,40	0,36
GFSA3	0,10	0,18	0,06	0,63	0,63	0,57	0,83	0,11
GGBR4	-0,44	-0,10	0,05	0,41	0,58	0,59	0,29	0,28
ITSA4	0,07	0,24	0,43	0,72	0,76	0,63	0,53	0,52
ITUB4	0,08	0,22	0,38	0,68	0,74	0,64	0,51	0,55
JBSS3	-0,01	-0,27	0,11	0,73	0,59	0,47	0,62	0,23
LAME4	0,17	0,25	0,08	0,79	0,50	0,21	0,62	0,01
MRVE3	0,09	0,10	0,12	0,77	0,44	0,44	0,86	0,07
NATU3	-0,10	0,33	0,28	0,76	0,63	0,64	0,71	0,05
PETR3	-0,10	-0,13	0,06	0,08	0,45	0,50	0,20	0,23
PETR4	-0,15	-0,15	0,03	0,10	0,50	0,57	0,26	0,27
USIM5	-0,44	0,24	0,25	0,39	0,40	0,70	0,20	0,22
VALE3	-0,07	-0,16	0,13	0,17	0,67	0,67	0,56	0,60
VALE5	-0,04	-0,12	0,18	0,13	0,62	0,65	0,52	0,66

Ação	FIBR3	GFSA3	GGBR4	ITSA4	ITUB4	JBSS3	LAME4	MRVE3
BBAS3	0,42	0,75	0,36	0,81	0,80	0,57	0,57	0,77
BBDC4	0,70	0,59	0,28	0,85	0,86	0,44	0,47	0,47
BRAP4	0,73	0,59	0,22	0,51	0,52	0,33	0,25	0,38
BRFS3	0,17	0,36	0,21	0,02	0,05	0,07	-0,20	0,11
BRKM5	0,47	0,38	0,23	0,21	0,19	0,44	0,33	0,56
BVMF3	0,28	0,18	-0,09	0,08	0,03	-0,09	0,47	0,45
CCRO3	0,56	0,62	0,23	0,50	0,50	0,24	0,58	0,64
CESP6	0,46	0,38	-0,20	0,39	0,33	0,18	0,24	0,44
CIEL3	0,03	0,10	-0,44	0,07	0,08	-0,01	0,17	0,09
CMIG4	0,26	0,18	-0,10	0,24	0,22	-0,27	0,25	0,10
CPLE6	0,33	0,06	0,05	0,43	0,38	0,11	0,08	0,12
CRUZ3	0,39	0,63	0,41	0,72	0,68	0,73	0,79	0,77
CSAN3	0,42	0,63	0,58	0,76	0,74	0,59	0,50	0,44
CSNA3	0,68	0,57	0,59	0,63	0,64	0,47	0,21	0,44
CYRE3	0,40	0,83	0,29	0,53	0,51	0,62	0,62	0,86
EMBR3	0,36	0,11	0,28	0,52	0,55	0,23	0,01	0,07
FIBR3	1,00	0,56	0,24	0,54	0,56	0,27	0,37	0,31
GFSA3	0,56	1,00	0,39	0,59	0,57	0,48	0,64	0,74
GGBR4	0,24	0,39	1,00	0,59	0,58	0,62	0,18	0,13
ITSA4	0,54	0,59	0,59	1,00	0,99	0,65	0,51	0,46
ITUB4	0,56	0,57	0,58	0,99	1,00	0,61	0,46	0,41
JBSS3	0,27	0,48	0,62	0,65	0,61	1,00	0,34	0,57
LAME4	0,37	0,64	0,18	0,51	0,46	0,34	1,00	0,73
MRVE3	0,31	0,74	0,13	0,46	0,41	0,57	0,73	1,00
NATU3	0,53	0,85	0,46	0,68	0,62	0,56	0,70	0,79
PETR3	0,37	0,44	0,60	0,42	0,44	0,55	-0,18	0,00
PETR4	0,45	0,46	0,59	0,43	0,47	0,56	-0,16	0,03
USIM5	0,40	0,42	0,51	0,44	0,41	0,42	0,31	0,39
VALE3	0,55	0,56	0,33	0,50	0,53	0,43	0,09	0,33
VALE5	0,54	0,50	0,22	0,48	0,51	0,35	0,07	0,32

Ação	NATU3	PETR3	PETR4	USIM5	VALE3	VALE5
BBAS3	0,75	0,27	0,32	0,42	0,66	0,66
BBDC4	0,69	0,33	0,39	0,52	0,52	0,54
BRAP4	0,39	0,44	0,53	0,22	0,91	0,93
BRFS3	0,30	0,39	0,38	0,25	0,20	0,14
BRKM5	0,53	0,13	0,18	0,41	0,20	0,14
BVMF3	0,30	-0,53	-0,50	0,04	-0,02	0,02
CCRO3	0,67	-0,03	0,02	0,29	0,41	0,39
CESP6	0,45	0,08	0,07	0,30	0,27	0,35
CIEL3	-0,10	-0,10	-0,15	-0,44	-0,07	-0,04
CMIG4	0,33	-0,13	-0,15	0,24	-0,16	-0,12
CPLE6	0,28	0,06	0,03	0,25	0,13	0,18
CRUZ3	0,76	0,08	0,10	0,39	0,17	0,13
CSAN3	0,63	0,45	0,50	0,40	0,67	0,62
CSNA3	0,64	0,50	0,57	0,70	0,67	0,65
CYRE3	0,71	0,20	0,26	0,20	0,56	0,52
EMBR3	0,05	0,23	0,27	0,22	0,60	0,66
FIBR3	0,53	0,37	0,45	0,40	0,55	0,54
GFSA3	0,85	0,44	0,46	0,42	0,56	0,50
GGBR4	0,46	0,60	0,59	0,51	0,33	0,22
ITSA4	0,68	0,42	0,43	0,44	0,50	0,48
ITUB4	0,62	0,44	0,47	0,41	0,53	0,51
JBSS3	0,56	0,55	0,56	0,42	0,43	0,35
LAME4	0,70	-0,18	-0,16	0,31	0,09	0,07
MRVE3	0,79	0,00	0,03	0,39	0,33	0,32
NATU3	1,00	0,30	0,31	0,69	0,31	0,26
PETR3	0,30	1,00	0,98	0,39	0,58	0,47
PETR4	0,31	0,98	1,00	0,40	0,66	0,57
USIM5	0,69	0,39	0,40	1,00	0,13	0,09
VALE3	0,31	0,58	0,66	0,13	1,00	0,98
VALE5	0,26	0,47	0,57	0,09	0,98	1,00

Tabela A.1: Coeficiente de correlação das ações do IBOVESPA (jun/2010-set/2011).

Fonte: autor.

Ação	$\hat{r}_i\%$
BBAS3	0,34
BBDC4	0,16
BRAP4	0,26
BRFS3	2,23
BRKM5	1,61
BVMF3	-1,53
CCRO3	1,87
CESP6	0,99
CIEL3	0,82
CMIG4	0,58
CPLE6	-0,50
CRUZ3	2,48
CSAN3	0,54
CSNA3	-3,52
CYRE3	-2,68
EMBR3	2,02
FIBR3	-3,74
GFSA3	-3,83
GGBR4	-3,45
ITSA4	-0,43
ITUB4	-0,42
JBSS3	-4,49
LAME4	1,12
MRVE3	-1,09
NATU3	-1,10
PETR3	-2,37
PETR4	-2,05
USIM5	-4,92
VALE3	0,00
VALE5	0,40

Tabela A.2: Retorno esperado estimado das ações do IBOVESPA (jun/2010-set/2011).
Fonte: autor.

Bibliografia

- [1] AOKI, M. Stochastic control in economic theory and economic systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 21, 2 (1976), 213–220.
- [2] ARAUJO, M. V., AND COSTA, O. L. D. V. Discrete-time mean-variance portfolio optimization with markov switching parameters. In *American Control Conference, 2006* (2006), IEEE, pp. 6–pp.
- [3] ARAUJO, M. V., AND COSTA, O. L. V. Generalized tracking error portfolio selection problem with markov switching parameters. In *X Encontro Brasileiro de Finanças* (2010).
- [4] BARMISH, B., AND PRIMBS, J. A. On arbitrage possibilities via linear feedback in an idealized brownian motion stock market. In *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on* (2011), IEEE, pp. 2889–2894.
- [5] BARMISH, B. R. On trading of equities: a robust control paradigm. In *Proceedings of the IFAC World Congress, Seoul, Korea* (2008), vol. 1, pp. 1621–1626.
- [6] BARMISH, B. R. On performance limits of feedback control-based stock trading strategies. In *American Control Conference (ACC), 2011* (2011), IEEE, pp. 3874–3879.
- [7] BARMISH, B. R., AND PRIMBS, J. A. On market-neutral stock trading arbitrage via linear feedback. In *American Control Conference (ACC), 2012* (2012), IEEE, pp. 3693–3698.
- [8] BEMPORAD, A., GABBRIELLINI, T., PUGLIA, L., AND BELLUCCI, L. Scenario-based stochastic model predictive control for dynamic option hedging. In *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on* (2010), IEEE, pp. 6089–6094.
- [9] BOLSA DE VALORES DO ESTADO DE SÃO PAULO (BMF&BOVESPA). Série retroativa do Ibovespa. Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/indices/download/serie-retroativa-do-ibov-metodologia-valida-a-partir-09-2013.pdf>>. Acesso em: 2015.
- [10] CALAFIORE, G. C. Multi-period portfolio optimization with linear control policies. *Automatica* 44, 10 (2008), 2463–2473.
- [11] CALAFIORE, G. C. An affine control method for optimal dynamic asset allocation with transaction costs. *SIAM Journal on Control and Optimization* 48, 4 (2009), 2254–2274.

- [12] CALAFIORE, G. C., AND MONASTERO, B. Experiments on stock trading via feedback control. In *Information and Financial Engineering (ICIFE), 2010 2nd IEEE International Conference on* (2010), IEEE, pp. 494–498.
- [13] CARTHER, S. Achieving optimal asset allocation. Disponível em: <http://www.investopedia.com/articles/pf/05/061505.asp>. Acessado em 2015.
- [14] COSTA, O. L., AND ARAUJO, M. V. A generalized multi-period mean–variance portfolio optimization with markov switching parameters. *Automatica* 44, 10 (2008), 2487–2497.
- [15] COSTA, O. L., AND DE BARROS NABHOLZ, R. A linear matrix inequalities approach to robust mean-semivariance portfolio optimization. In *Computational Methods in Decision-Making, Economics and Finance*. Springer, 2002, pp. 89–107.
- [16] CRAVEN, B. D., AND ISLAM, S. M. *Optimization in economics and finance: Some advances in non-linear, dynamic, multi-criteria and stochastic models*, vol. 7. Springer Science & Business Media, 2005.
- [17] DO VALLE COSTA, O. L., AND DE ASSUNÇÃO, H. G. V. *Análise de risco e retorno em investimentos financeiros*. Manole, 2005.
- [18] DOMBROVSKII, V. V., DOMBROVSKII, D. V., AND LYASHENKO, E. A. Predictive control of random-parameter systems with multiplicative noise. application to investment portfolio optimization. *Automation and remote control* 66, 4 (2005), 583–595.
- [19] DOMBROVSKY, V., DOMBROVSKY, D., AND LYASHENKO, E. Model predictive control of systems with random dependent parameters under constraints and its application to the investment portfolio optimization. *Automation and remote control* 67, 12 (2006), 1927–1939.
- [20] DUNCAN, T., AND PASIK-DUNCAN, B. Adaptive control of a continuous-time portfolio and consumption model. *Journal of optimization theory and applications* 61, 1 (1989), 47–52.
- [21] HERZOG, F., KEEL, S., DONDI, G., SCHUMANN, L. M., AND GEERING, H. Model predictive control for portfolio selection. In *American Control Conference, 2006* (2006), IEEE, pp. 8–pp.
- [22] IWARERE, S., AND BARMISH, B. R. A confidence interval triggering method for stock trading via feedback control. In *American Control Conference (ACC), 2010* (2010), IEEE, pp. 6910–6916.
- [23] LEIPPOLD, M., TROJANI, F., AND VANINI, P. A geometric approach to multiperiod mean variance optimization of assets and liabilities. *Journal of Economic Dynamics and Control* 28, 6 (2004), 1079–1113.
- [24] LI, D., AND NG, W.-L. Optimal dynamic portfolio selection: Multiperiod mean-variance formulation. *Mathematical Finance* 10, 3 (2000), 387–406.
- [25] MALEKPOUR, S., AND BARMISH, B. R. A drawdown formula for stock trading via linear feedback in a market governed by brownian motion. In *Control Conference (ECC), 2013 European* (2013), IEEE, pp. 87–92.

- [26] MARKOWITZ, H. Portfolio selection: Efficient diversification of investments. *New York* (1959).
- [27] MARKOWITZ, H. Mean-variance analysis in portfolio choice and capital markets, 1990.
- [28] MATULKA, J., AND NECK, R. Opticon: An algorithm for the optimal control of nonlinear stochastic models. *Annals of Operations Research* 37, 1 (1992), 375–401.
- [29] MEINDL, P., AND PRIMBS, J. Dynamic hedging with stochastic volatility using receding horizon control. *Proceedings of Financial Engineering Applications* (2004), 142–147.
- [30] MEINDL, P. J. *Portfolio optimization and dynamic hedging with receding horizon control, stochastic programming, and Monte Carlo simulation*. ProQuest, 2006.
- [31] MEINDL, P. J., AND PRIMBS, J. A. Dynamic hedging of single and multi-dimensional options with transaction costs: a generalized utility maximization approach. *Quantitative Finance* 8, 3 (2008), 299–312.
- [32] MERTON, R. C. An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. *Journal of financial and quantitative analysis* 7, 04 (1972), 1851–1872.
- [33] MUDCHANATONGSUK, S., PRIMBS, J. A., AND WONG, W. Optimal pairs trading: A stochastic control approach. In *American Control Conference, 2008* (2008), IEEE, pp. 1035–1039.
- [34] PHILLIPS, A. Stabilisation policy and the time-forms of lagged responses. *The Economic Journal* (1957), 265–277.
- [35] PRIMBS, J. A. Dynamic hedging of basket options under proportional transaction costs using receding horizon control. *International Journal of Control* 82, 10 (2009), 1841–1855.
- [36] PRIMBS, J. A. Lqr and receding horizon approaches to multi-dimensional option hedging under transaction costs. In *American Control Conference (ACC), 2010* (2010), IEEE, pp. 6891–6896.
- [37] PRIMBS, J. A., AND SUNG, C. H. A stochastic receding horizon control approach to constrained index tracking. *Asia-Pacific Financial Markets* 15, 1 (2008), 3–24.
- [38] ROLL, R. A mean/variance analysis of tracking error. *The Journal of Portfolio Management* 18, 4 (1992), 13–22.
- [39] RUDOLF, M., WOLTER, H.-J., AND ZIMMERMANN, H. A linear model for tracking error minimization. *Journal of Banking & Finance* 23, 1 (1999), 85–103.
- [40] RUDDY, M. B., AND ROHRS, C. E. A dynamic programming approach to two-stage mean-variance portfolio selection in cointegrated vector autoregressive systems. In *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on* (2008), IEEE, pp. 4280–4285.
- [41] RUNGALDIER, W., TRIVELLATO, B., AND VARGIOLU, T. A bayesian adaptive control approach to risk management in a binomial model. In *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications III* (2002), Springer, pp. 243–258.

- [42] TUSTIN, A. *The mechanism of economic systems: an approach to the problem of economic stabilization from the point of view of control-system engineering*. Heinemann, 1957.
- [43] VER WEBSITE DA CENTRAL DE CUSTÓDIA E DE LIQUIDAÇÃO FINANCEIRA DE TÍTULOS CETIP. Disponível em: http://estatisticas.cetip.com.br/astec/series_v05/paginas/web_v04_10_03_consulta.asp.
- [44] VER WEBSITE DE GOOGLE FINANCE. Disponível em: <https://www.google.com/finance?q=indexbvmf%3aibov&ei=eogsvainnjhkebhyyiigp>. Acessado em 2015.
- [45] VER WEBSITE DE YAHOO! FINANCE. Disponível em: <http://finance.yahoo.com/q/cp?s=%5ebvsp+components>. Acessado em 2015.
- [46] VER WEBSITE DO BANCO CENTRAL DO BRASIL BCB. Disponível em: <http://www.bcb.gov.br/?copomjuros>. Acessado em 2015.
- [47] VER WEBSITE DO TESOURO NACIONAL DO BRASIL. Disponível em: <http://www.tesouro.fazenda.gov.br/web/stn/tesouro-direto-regras-do-tesouro-direto>. Acessado em 2015.
- [48] YAMAMURA, E. A study on model reference adaptive processes of japan's regional development in the 1970's. *Proceedings of Japan society Civil Engineers IV-1*, 407 (1989), 117–128.
- [49] ZHAO, P., LIU, C., AND FENG, X. Model reference control for an economic growth cycle model. *Journal of Applied Mathematics 2012* (2012).
- [50] ZHU, S.-S., LI, D., AND WANG, S.-Y. Risk control over bankruptcy in dynamic portfolio selection: A generalized mean-variance formulation. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 49, 3 (2004), 447–457.