ZORAIDA VIOLETA LÓPEZ MURGUEYTIO

**ESTIMAÇÃO ALGÉBRICA APLICADA AOS
SISTEMAS DE CONTROLE - UM ESTUDO
DE CASOS**

São Paulo

2011

ZORAIDA VIOLETA LÓPEZ MURGUEYTIO

**ESTIMAÇÃO ALGÉBRICA APLICADA AOS
SISTEMAS DE CONTROLE - UM ESTUDO
DE CASOS**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração:
Engenharia de Sistemas.

Orientador:
Prof. Dr. Paulo Sérgio Pereira da
Silva.

São Paulo

2011

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo,.... de julho de 2011.

Assinatura do autor:.....

Assinatura do orientador:.....

FICHA CATALOGRÁFICA

López, Murgueytio, Zoraida Violeta

Estimação algébrica aplicada aos sistemas de controle: um estudo de casos / Z.V.López Murgueytio.- São Paulo, 2011. 98p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Departamento de Engenharia de telecomunicações e Controle.

1. Controle (Teoria de sistemas e controle). 2. Sistemas não lineares. 3. Sistemas dinâmicos. 4. Álgebra diferencial. I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle II. t.

AGRADECIMIENTOS

A Deus, pela graça de ter me permitido concluir este trabalho.

Ao meu orientador Dr. Paulo Sergio Pereira da Silva, que me acompanhou durante o processo de elaboração da dissertação.

Aos meus pais, Nadjy e Manuel pelo apoio incondicional que sempre tive deles.

À Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, pela oportunidade de realização do curso de mestrado.

RESUMO

Esta proposta de dissertação de mestrado trata da aplicação de Estimadores Algébricos em sistemas de controle como alternativa ao uso de observadores. Devido à dificuldade de obtenção de resultados teóricos, dificuldade essa oriunda da natureza complexa dos estimadores algébricos, o trabalho é desenvolvido através do estudo de casos. Considera-se que a topologia de controle é a união de uma técnica tradicional de controle (por exemplo, uma realimentação de estado ou o método do torque calculado) com a estimação algébrica. Os resultados obtidos defendem a idéia de que os Estimadores Algébricos, quando usados como estimadores de estado, permitem obter um desempenho e uma robustez que se aproxima muito do desempenho e a robustez da mesma lei de controle no caso em que o estado é perfeitamente conhecido.

ABSTRACT

The control topology that is considered in this work is the union of a traditional control technique (e.g. a state feedback or the computed torque method) with the Algebraic Estimator. The obtained results reinforce the common sense about this class of estimators, that the use of Algebraic Estimators may produce the performance, robustness and noise immunity that mimics the case where perfect information of the state is available.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos	3
1.2	Organização da Dissertação	4
2	DESCRIÇÃO GERAL DO MÉTODO ALGÉBRICO	5
2.1	Estimação de Derivadas via Método Algébrico Diferencial	7
2.2	Análise de precisão do Estimador Algébrico de ordem dois.	10
2.3	Estimação em paralelo	10
2.4	Características do Estimador Algébrico em Malha Aberta	11
3	MÉTODO ALGÉBRICO DE ESTIMAÇÃO APLICADO NA REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS	14
3.1	Introdução	14
3.2	Modelo do pêndulo invertido	15
3.2.1	Linearização do Sistema	17
3.3	Controle por Realimentação de Estado (RE)	19
3.4	Controle via Realimentação com Estimador Algébrico (REA)	22
3.5	Comparação entre RE e REA	23
3.5.1	Comparando RE e REA para vários valores de h	24
3.5.1.1	Comparação entre RE e REA na presença de ruído	24

3.5.2	Análise de robustez da estabilidade em malha fechada	32
3.5.2.1	Análise para $m=10.5$	33
3.5.2.2	Análise para $m=10.9$	36
3.5.3	Conclusões:	37
4	CONTROLE VIA MÉTODO DO TORQUE CALCULADO	40
4.1	Introdução	40
4.2	Controle por torque calculado (TC)	42
4.3	Torque Calculado e Estimador Algébrico TC-EA	49
4.4	Simulações do Controle TC e TC-EA.. . . .	50
4.4.1	Simulações de desempenho sem ruído.	51
4.4.1.1	Posições Generalizadas	51
4.4.2	Simulações de desempenho com ruído.	54
4.4.2.1	Posições generalizadas	54
4.4.3	Erro de rastreamento	59
4.4.4	Simulações de TC-EA focando o estimador.	61
4.4.5	Esforços de controle com o sem ruído	65
4.5	Conclusões	68
5	CONCLUSÕES	71
	Referências Bibliográficas	73
A	Propriedades das transformadas de Laplace utilizadas.	75
B	Descrição do sistema	77
B.1	Dinâmica do pêndulo invertido sem atrito	77
B.1.1	Equações de Lagrange	77

B.2	Representação em espaço de estados do pêndulo invertido com torque .	79
C	Simulações entre RE e REA	82
C.1	Comparação entre RE e REA para varios valores de h	82
C.2	Comparação entre RE e REA na presença de ruído	84
C.3	Simulações para o Análisis de Robustez	88
D	Simulações de controle TC e TC-EA	92
D.1	Simulações de desempenho sem ruído	92
D.2	Simulações de desempenho com ruído	92

Lista de Figuras

2.1	Estimadores em paralelo	12
3.1	Pêndulo invertido.	16
3.2	Controle por realimentação	22
3.3	Diagrama de estimação e controle com ruído	23
3.4	Comparação de posicionamento para $h=0.1$ sem ruído.	25
3.5	Diferença de posicionamento em relação a realimentação de estados para $h=0.1$ sem ruído.	25
3.6	Comparação de posicionamento para $h=0.01$ sem ruído.	26
3.7	Diferença de posicionamento em relação a realimentação de estados para $h=0.01$ sem ruído.	26
3.8	Comparação de posicionamento para $h=0.5$ sem ruído.	27
3.9	Diferença de posicionamento em relação a realimentação de estados para $h=0.5$ sem ruído.	27
3.10	Comparação de posicionamento para $h=0.000001$ sem ruído	28
3.11	Diferença de posicionamento em relação a realimentação de estados para $h=0.000001$ sem ruído.	28
3.12	Comparação de posicionamento angular para $h=0.000001$ sem ruído	29
3.13	Diferença de posicionamento em relação a realimentação de estados para $h=0.000001$ sem ruído.	29
3.14	Comparação do posicionamento com ruído e $h=0.1$	30

3.15	Diferença de posicionamento em relação a realimentação de estados com ruído e $h=0.1$	30
3.16	Comparação de posicionamento com ruído e $h=0.05$	31
3.17	Diferença de posicionamento em relação a realimentação de estados com ruído para $h=0.05$	31
3.18	Comparação de posicionamento com ruído e $h=0.5$	32
3.19	Diferença de posicionamento em relação a realimentação de estados com ruído para $h=0.5$	32
3.20	Comparação de posicionamento de RE e REA para $m=10.5$ e $h=0.01$	34
3.21	Diferença de posicionamento de RE e REA para $m=10.5$ e $h=0.01$.	34
3.22	Comparação de posicionamento de RE e REA para $m=10.5$ e $h=0.1$	35
3.23	Diferença de posicionamento de RE e REA para $m=10.5$ e $h=0.1$.	35
3.24	Comparação de posicionamento de RE e REA para $m=10.5$ e $h=5$.	36
3.25	Comparação de posicionamento angular de RE e REA para $m=10.9$ e $h=0.01$	37
3.26	Comparação de posicionamento angular de RE e REA para $m=10.9$ e $h=0.01$	38
4.1	Pêndulo invertido	41
4.2	Diagrama do sistema de controle em malha fechada TC com ruído .	48
4.3	Diagrama de estimação e controle em malha fechada TC-EA com ruído aditivo.	50
4.4	Posição utilizando o controlador TC. e TC-EA. (sem ruído). para $h=0.1$	51
4.5	Diferença entre TC. e TC-EA. da posição da base movel respectivamente (sem ruído) para $h=0.1$	52
4.6	Posição real utilizando o controlador TC. e TC-EA. (sem ruído) para $h=0.01$	53
4.7	Diferença entre TC. e TC-EA. da posição real da base movel respectivamente (sem ruído) para $h=0.01$	53

4.8	Posição real utilizando o controlador TC. e TC-EA. (sem ruído) para $h=0.4$	54
4.9	Diferença entre TC. e TC-EA. da posição real da base móvel respectivamente (sem ruído) para $h=0.4$	55
4.10	Posição real utilizando o controlador TC. e TC-EA. afetado por ruído para $h=0.1$	56
4.11	Diferença entre TC. e TC-EA. da posição real da base movel respectivamente afetado por ruído para $h=0.1$	56
4.12	Posição real utilizando o controlador TC. e TC-EA. afetado por ruído para $h=0.01$	57
4.13	Diferença entre TC. e TC-EA. da posição real da base movel respectivamente afetado por ruído para $h=0.01$	57
4.14	Posição real utilizando o controlador TC. e TC-EA. afetado por ruído para $h=0.4$	58
4.15	Diferença entre TC. e TC-EA. da posição real da base movel respectivamente afetado por ruído para $h=0.4$	58
4.16	Comparação do erro de rastreamento e_1 para TC e TC-EA afetado de ruído.	59
4.17	"Zoom" da comparação do erro de rastreamento e_1 para TC e TC-EA afetado de ruído.	60
4.18	Comparação do erro de rastreamento e_2 para TC e TC-EA afetado de ruído.	60
4.19	Estados reais e estados estimados com $h = 0.1$ sem ruído	62
4.20	Erro de estimação com $h = 0.1$ sem ruído	62
4.21	Erro de estimação com $h = 0.01$ sem ruído	63
4.22	Erro de estimação com $h = 0.4$ sem ruído	63
4.23	Erro de estimação com ruído considerando $h = 0.01$	64
4.24	Erro de estimação com ruído considerando $h = 0.1$	65
4.25	Erro de estimação com ruído e considerando $h = 0.4$	66
4.26	Comparação entre esforços de controle para $h = 0.1$ sem ruído . . .	66

4.27	Comparação entre esforços de controle para $h = 0.1$ sem ruído . . .	67
4.28	Comparação entre esforços de controle para $h = 0.1$ com ruído . . .	67
4.29	Comparação entre esforços de controle para $h = 0.1$ com ruído . . .	68
B.1	Pêndulo invertido	78
C.1	Comparação de posicionamento para $h=0.1$ sem ruído.	83
C.2	Comparação de posicionamento angular para $h=0.1$ sem ruído. . . .	83
C.3	Comparação de posicionamento angular para $h=0.01$ sem ruído. . .	84
C.4	Diferença de posicionamento em relação a realimentação de estados para $h=0.01$ sem ruído.	84
C.5	Comparação de posicionamento angular para $h=0.5$ sem ruído. . . .	85
C.6	Diferença de posicionamento em relação a realimentação de estados para $h=0.5$ sem ruído.	85
C.7	Posicionamento angular com ruído e $h=0.1$	86
C.8	Diferença de posicionamento angular em relação a realimentação de estados com ruído e $h=0.1$	86
C.9	Comparação de posicionamento angular com ruído para $h=0.05$. .	87
C.10	Diferença de posicionamento angular em relação a realimentação de estados com ruído para $h=0.05$	87
C.11	Comparação de posicionamento angular com ruído para $h=0.5$. . .	88
C.12	Diferença de posicionamento angular em relação a realimentação de estados com ruído para $h=0.5$	89
C.13	Comparação de posicionamento angular de RE e REA para $m=10.5$ e $h=0.01$	89
C.14	Diferença de posicionamento angular de RE e REA para $m=10.5$ e $h=0.01$	90
C.15	Comparação de posicionamento angular de RE e REA para $m=10.5$ e $h=0.1$	90

C.16	Diferença de posicionamento angular de RE e REA para $m=10.5$ e $h=0.1$	91
C.17	Comparação de posicionamento angular de RE e REA para $m=10.5$ e $h=5$	91
D.1	Posição angular utilizando o controlador TC. e TC-EA. (sem ruído) para $h=0.1$	93
D.2	Diferença entre TC. e TC-EA. da posição da haste do pêndulo (sem ruído) para $h=0.1$	93
D.3	Posição angular real utilizando o controlador TC. e TC-EA. (sem ruído) para $h=0.01$	94
D.4	Diferença entre TC. e TC-EA. da posição real da haste do pêndulo (sem ruído) para $h=0.01$	94
D.5	Posição angular real utilizando o controlador TC. e TC-EA. (sem ruído) para $h=0.4$	95
D.6	Diferença entre TC. e TC-EA. da posição real da haste do pêndulo (sem ruído) para $h=0.4$	95
D.7	Posição angular real utilizando o controlador TC. e TC-EA. afetado por ruído para $h=0.1$	96
D.8	Diferença entre TC. e TC-EA. da posição real da haste do pêndulo afetado por ruído para $h=0.1$	96
D.9	Posição angular real utilizando o controlador TC. e TC-EA. afetado por ruído para $h=0.01$	97
D.10	Diferença entre TC. e TC-EA. da posição real da haste do pêndulo afetado por ruído para $h=0.01$	97
D.11	Posição angular real utilizando o controlador TC. e TC-EA. afetado por ruído para $h=0.4$	98
D.12	Diferença entre TC. e TC-EA. da posição real da haste do pêndulo afetado por ruído para $h = 0.4$	98

Lista de Tabelas

3.1	Resultados das simulações da Realimentação de Estado	39
4.1	Resultados das simulações para o Torque Calculado.	69

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O controle por realimentação de estado tem sido objeto de estudo na teoria de controle até hoje, desde as contribuições pioneiras de Kalman e Luenberger. A teoria de estimação de estado e os resultados sobre observadores assintóticos, em particular o teorema de separação determinística [2], são hoje determinantes para o projeto de controle de sistemas lineares. Mesmo com algumas generalizações para sistemas não lineares, o teorema da separação determinística não é válido no contexto mais geral, para sistemas não lineares.

Esta dissertação tem como objeto de estudo uma linha alternativa para o projeto de estimadores de estado. Essa classe de estimadores, denominada de estimadores algébricos foi proposta em [1] como uma abordagem alternativa aos interessantes resultados de [4], [5] e [6] para estimação de derivadas.

Um resultado fundamental da teoria de controle não linear é que um sistema é observável se e somente se o estado puder ser determinado instantaneamente a partir do conhecimento da entrada, da saída e suas derivadas [14]. Em outras

palavras existe uma aplicação ψ tal que

$$x = \psi(y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(\alpha)}, u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(\beta)})$$

onde y é a saída e u é a entrada do sistema. Isso mostra que o problema de estimação de estado é diretamente relacionado ao problema de estimação de derivadas.

Nesta dissertação trabalharemos com uma classe de sistemas tal que o estado x é da forma $x = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ e por tanto a estimação de estado se reduz à estimação da primeira derivada da saída y .

Embora a teoria de [1] possa ser aplicada para estimação de ordem superior, por simplicidade nos restringiremos aos estimadores de primeira ordem. Nosso estimador algébrico, nesse caso, será apenas um estimador da primeira derivada da saída y .

Embora não apresentemos neste trabalho nenhum resultado teórico, mostraremos diversas propriedades do estimador algébrico em malha fechada, no estudo de dois casos (A) e (B) descritos abaixo:

- (A) Controle do Pêndulo Invertido via Realimentação de Estado linear.

Uma realimentação de estado linear será projetada a partir do modelo linearizado do pêndulo invertido. Compararemos os resultados encontrados com a realimentação do estado perfeito e a realimentação do estado estimado, via estimador algébrico, examinando o efeito do ruído na estimação e no desempenho. A robustez da estabilidade será também comparada.

- (B) Controle do Pêndulo Invertido via Método do Torque Calculado.

Compararemos o método do torque calculado (linearização exacta) [10] com a informação perfeita do estado com o mesmo método, utilizando o estado estimado.

1.1 Objetivos

Através do estudo desses casos queremos indicar que os seguintes fatos devem ser verdadeiros:

- Fato 1. À medida que o parâmetro h tende a zero¹ o desempenho e a robustez de um sistema de controle baseado no estimador algébrico tende ao desempenho e à robustez do mesmo sistema de controle baseado na informação perfeita do estado.
- Fato 2. A rejeição a ruído aditivo na saída y de um sistema de controle baseado no estimador algébrico aumenta com o aumento de h .
- Fato 3. Como a robustez e o desempenho do controle baseado no estimador algébrico é arbitrariamente próxima de um sistema de controle baseado na informação perfeita de estado, um resultado análogo ao teorema da separação para esse tipo de estimador algébrico torna-se desnecessário.

Será objeto de trabalhos futuros a formalização dos Fatos 1, 2 e 3 na forma de teoremas com suas devidas demonstrações.

O objetivo da presente dissertação será portanto a comprovação dos Fatos 1, 2 e 3 no estudo dos casos (A) e (B)

¹O parâmetro h é o tempo entre cada re-inicialização do estimador algébrico (Veja o capítulo 2 dessa dissertação).

1.2 Organização da Dissertação

O Capítulo 2 apresenta uma introdução sucinta do método algébrico, na seção 2.1 se realiza a estimação das derivadas chegando-se a uma expressão que é composta por integrais e termos que envolvem apenas os sinais de saída. Devido à necessidade de reinicialização do método algébrico é preciso implementar dois estimadores em paralelo, tal técnica é mostrada na seção 2.2. As características principais do estimador algébrico são descritas na seção 2.3.

Capítulo 3 apresenta as comparações do desempenho e robustez do controle por realimentação de estado (doravante denominado de RE) e o estimador algébrico substituído no lugar do observador (doravante denominado de REA)

O Capítulo 4 trata da aplicação do método do torque calculado no controle de um pêndulo invertido. Duas situações são examinadas no contexto do controle via torque calculado:

1. Caso em que é suposto que o estado do sistema é perfeitamente conhecido (doravante denominado de TC).
2. Caso em que apenas as posições generalizadas são conhecidas, e as velocidades generalizadas são obtidas pelos estimadores algébricos de derivada (Doravante denominada de TC-EA).

O Capítulo 5 apresenta as conclusões do trabalho.

Capítulo 2

DESCRIÇÃO GERAL DO MÉTODO ALGÉBRICO

Considere-se um sinal C^∞ arbitrário $y(t)$, definido sobre o eixo real não negativo. Para qualquer $t_i > 0$ arbitrário, o valor do sinal no tempo $t > t_i$ é aproximado pela clássica expansão em série de Taylor truncada.

$$\tilde{y}(t) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{(j-1)!} y^{(j-1)}(t_i) (t - t_i)^{(j-1)} \quad (2.1)$$

onde $y^{(k)}(t_i)$ representa a k-esima derivada de tempo de $y(t)$ avaliada no tempo t_i e k é um inteiro estritamente positivo cuja magnitude é diretamente relacionada às propriedades de aproximação de $\tilde{y}(t)$. Obviamente quanto mais alto o valor de k , menor é a diferença $y(t) - \tilde{y}(t)$, e isto pode ser deduzido da fórmula do erro de truncamento da fórmula de Taylor, por exemplo, a fórmula do Resto da Integral:

$$R_k(t) = \int_t^{t_i} \frac{y^{(k+1)}(\tau)}{k!} (\tau - t_i)^k dt. \quad (2.2)$$

Se $y(t)$ é analítico a expressão $\frac{y^k}{k!}$ tende para zero a medida que k tende para infinito. Note-se que a série de Taylor truncada (2.1) pode ser identificada com a resposta de um sistema linear homogêneo com um conjunto de condições iniciais representado pelo valor inicial do sinal no tempo t_i e as primeiras $k - 1$ derivadas do sinal $y(t)$ no instante t_i . Neste caso podemos escrever

$$\tilde{y}^{(k)}(t) = 0. \quad (2.3)$$

$$\tilde{y}^{(j)}(t_i) = y^{(j)}(t_i), j = 0, \dots, k - 1. \quad (2.4)$$

Na notação de cálculo operacional¹ [11], a aproximação $\tilde{y}(s)$ do sinal $y(t)$ é representada por

$$s^k \tilde{y}(s) - \sum_{j=1}^k s^{k-j} y^{(j-1)}(t_i) = 0. \quad (2.5)$$

A equação (2.5) foi obtida aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação (2.3), utilizando o teorema da diferenciação real para o caso geral (ver apêndice A).

A k -ésima derivação em ambos os lados da equação (2.5) com respeito ao operador

¹Do ponto de vista computacional, o cálculo operacional é equivalente as técnicas oriundas da transformadas de Laplace.

s produz a seguinte expressão:

$$\frac{d^k}{ds^k}(s^k \tilde{y}(s)) = 0 \quad (2.6)$$

que é independente de todas as condições iniciais desconhecidas.

Multiplicando a esquerda por s^{-j} , $j = k - 1, k - 2, \dots, 1$ a equação (2.6) obtemos

$$s^{-j} \frac{d^k}{ds^k}(s^k \tilde{y}(s)) = 0 \quad (2.7)$$

Esta é uma expressão importante, que fornece um sistema triangular de equações lineares a partir do qual as derivadas no tempo do sinal aproximado $\tilde{y}$ podem ser calculadas [3]. A idéia então é adotar esses sinais obtidos como as aproximações das derivadas de tempo do sinal original $y(t)$, voltando ao domínio de tempo os cálculos feitos no domínio da frequência, obtendo assim fórmulas explícitas para aproximar as diferentes derivadas de tempo de $y(t)$. Na seção seguinte estudaremos o caso particular em que $k = 2$, mostrando como (2.7) pode ser resolvida.

2.1 Estimação de Derivadas via Método Algébrico Diferencial

Considere-se a aproximação de primeira ordem, no tempo $t = 0$, isto é, o truncamento da série de Taylor para $k = 2$. Substituindo $k = 2$ na equação (2.1) temos:

$$\tilde{y}(t) = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{(j-1)!} y^{j-1}(0) t^{j-1}$$

Esta aproximação satisfaz a equação diferencial linear homogênea e invariante no tempo $\tilde{y}^{(2)}(t) = 0$. Pode-se expressar esta equação na notação de cálculo operacional como visto na equação (2.6), obtendo-se

$$\frac{d^2}{ds^2}(s^2 \tilde{y}(s)) = 0.$$

Substituindo logo os valores $k = 2$ e $j = 1$, na equação (2.7), obtemos:

$$s^{-1} \frac{d^2}{ds^2} [s^2 \tilde{y}(s)] = 0. \quad (2.8)$$

De (2.8) teremos

$$\begin{aligned} s^{-1} \frac{d}{ds} \left[\frac{d}{ds} (s^2 \tilde{y}(s)) \right] &= 0 \\ s^{-1} \frac{d}{ds} [2s \tilde{y}(s) + s^2 \frac{d}{ds} \tilde{y}(s)] &= 0 \\ s^{-1} \frac{d}{ds} [2s \tilde{y}(s)] + s^{-1} \frac{d}{ds} [s^2 \frac{d}{ds} \tilde{y}(s)] &= 0 \\ 2s^{-1} \tilde{y}(s) + 4 \frac{d\tilde{y}(s)}{ds} + s \frac{d^2 \tilde{y}(s)}{ds^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

A equação (2.9) no domínio do tempo é expressa da seguinte forma:

$$2 \left(\int_0^{(t)} \tilde{y}(\sigma) d\sigma \right) - 4t \tilde{y}(t) + \frac{d}{dt} [t^2 \tilde{y}(t)] = 0. \quad (2.10)$$

Vide no apêndice A as propriedades de Laplace utilizadas.

Considere-se o termo $s \frac{d^2 \tilde{y}(s)}{ds^2}$ que no domínio do tempo é dado por:

$$\frac{d}{dt}[t^2\tilde{y}(t)] = 2t\tilde{y}(t) + t^2\dot{\tilde{y}}(t)$$

Voltando para a equação (2.10) e substituindo a expressão anterior, obtemos:

$$2\left(\int_0^{(t)} \tilde{y}(\sigma)d\sigma\right) - 4t\tilde{y}(t) + 2t\tilde{y}(t) + t^2\dot{\tilde{y}}(t) = 0$$

$$2\left(\int_0^{(t)} \tilde{y}(\sigma)d\sigma\right) - 2t\tilde{y}(t) + t^2\dot{\tilde{y}}(t) = 0$$

$$\dot{\tilde{y}}(t) = \frac{1}{t^2}[-2\int_0^t \tilde{y}(\sigma)d\sigma + 2t\tilde{y}(t)]$$

para qualquer $t \geq \epsilon > 0$ a expressão da derivada no tempo de primeira ordem de $y(t)$ fornece uma aproximação adequada. No entanto, durante o intervalo inicial $[0, \epsilon]$ podemos ter uma indeterminação no valor da derivada calculada $\dot{\tilde{y}}(t)$. O valor de ϵ é escolhido por razões de precisão computacional da divisão por um número t^2 muito pequeno. Por esta razão pode-se substituir o valor de $\dot{y}$ por um valor constante arbitrário c que em geral é escolhido como o valor da última estimativa, se este valor estiver disponível.

Para que a formula de $\dot{y}$ dada em (2.10) mantenha sua precisão na aproximação é necessário reinicializar os cálculos em algum tempo finito $t_r > 0$, isto é, escolher um intervalo de tempo cujo comprimento h pode ser fixado arbitrariamente pequeno. Assim assumimos a validade da formula (2.10) em cada intervalo $[t_r + \epsilon, t_r + h]$, onde $h \gg \epsilon$, como é apreciado na equação (2.11)

$$\hat{\dot{y}}(t) = \begin{cases} c & , \text{ se } t_r \leq t < t_r + \epsilon \\ \frac{1}{(t-t_r)^2}[-2\int_0^t y(t-t_r) + 2(t-t_r)y(t-t_r)] & , \text{ se } t \geq t_r + \epsilon \end{cases} \quad (2.11)$$

onde:

c = constante arbitrária, e $\hat{\dot{y}}(t)$ é o valor da estimativa de $\dot{y}(t)$.

2.2 Análise de precisão do Estimador Algébrico de ordem dois.

Limite superior para o erro da estimativa dentro do intervalo $[0, h]$ será:

$$\sup_{t \in [0, h]} e(t) \leq \frac{7}{3} |h| \sup_{t \in [0, h]} |y^{(2)}(t)| \quad (2.12)$$

Vemos que o máximo erro cometido é proporcional à máxima derivada segunda do sinal e ao intervalo h do Estimador Algébrico [15].

2.3 Estimação em paralelo

Dado que nosso estimador possui precisão somente em um pequeno intervalo, é necessário reiniciar os cálculos a cada período de tempo. Defina-se então um intervalo de reset de comprimento h , significando que a estimação é reinicializada nos instantes $t_r = rh$, $r \in N$. A formula (2.11) é aplicada para t em cada intervalo $[t_r, t_r + h]$, $r \in N$.

Com a finalidade de ampliar a validade dos intervalos da abordagem de estimação algébrica, foi introduzido em [12] uma técnica denominada estimação em paralelo, que propõe implementar dois estimadores simultaneamente. Assim podem ser obtidos resultados validos em todo tempo, com a exceção do primeiro intervalo

$[0, \epsilon)$.

Considerando $h > \epsilon$ o tempo no qual os resultados das simulações são válidas. Se tomarmos as leituras alternadas das estimações dos dois algoritmos, reiniciados a cada $2h$ segundos e deslocados a metade do tempo de reset, sendo neste caso h segundos. Pode-se então obter estimações com precisão razoável em qualquer instante de tempo.

Como exemplo pode-se apreciar na figura 2.1 dois estimadores trabalhando em paralelo, como um intervalo de reset $h = 0.1$, sendo que a reinicialização do segundo estimador é atrasada $\frac{h}{2}$. Isto é, o segundo é obtido da fórmula (2.11) para $t_r = \frac{h}{2} + rh$.

Note que enquanto um dos estimadores está sendo reinicializado o outro estará fornecendo uma estimativa fidedigna da derivada.

2.4 Características do Estimador Algébrico em Malha Aberta

Em [13] é mostrado que o Estimador Algébrico em malha fechada possui as seguintes características gerais:

1. A precisão da estimação na ausência de ruído é maior para valores pequenos de h e diminui para valores grandes de h (Vide formula (2.12)).
2. A banda passante do Estimador Algébrico diminui com o tempo. Isso faz com que a rejeição à ruído aumente com o aumento de h .

Figura 2.1: Estimadores em paralelo

Isso faz com que haja um compromisso entre a precisão do estimador e sua rejeição à ruído, já que a primeira propriedade piora com o aumento de h e a segunda melhora com o aumento de h .

É importante frisar que até o momento não existe uma teoria que permita determinar a seleção de um valor ótimo de h .

Uma propriedade fundamental do Estimador Algébrico (2.11) é que ele produz uma estimativa arbitrariamente próxima da derivada num tempo arbitrariamente

curto. Isto é claro da fórmula (2.12) assumindo que $y(t)$ é pelo menos de classe C^2 e $y^2(t)$ seja limitado. Por outro lado, (2.11) fornece um valor da estimativa da derivada $\dot{y}(t)$ que é virtualmente perfeita para $t \rightarrow 0$.

Sendo assim, o estimador algébrico é virtualmente perfeito para pequenos valores de t , daí dizermos que ele não é de natureza assintótica. Isso justifica o fato de não esperarmos ser necessário um resultado análogo ao teorema da separação para esse tipo de estimador (Vide Fato 3 do Capítulo 1).

As propriedades descritas anteriormente parecem justificar também porque esperamos que os Fatos 1 e 2 do Capítulo 1.

Capítulo 3

MÉTODO ALGÉBRICO DE ESTIMAÇÃO APLICADO NA REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

3.1 Introdução

Neste capítulo vamos comparar o desempenho e a robustez da realimentação de estado com relação ao caso em que realimentamos o estado estimado através do método algébrico do capítulo 2. Decidimos fazer a comparação somente entre a realimentação de estado pura e a realimentação do estado estimado via método algébrico, evitando a comparação com observadores assintóticos tradicionais. De fato, nenhum observador supera a informação perfeita de estado, e sendo assim estamos comparando o estimador algébrico com o "observador perfeito" ou com o

”estimador perfeito”, se o leitor assim preferir. As comparações são divididas em três casos:

- Comparações de desempenho para vários valores de h (Seção 3.5.1)
- Comparações de imunidade a ruído para vários valores de h (Seção 3.5.2)
- Comparações de robustez para vários valores de h (Seção 3.5.3)

Resultados esperados:

Ao realizar as diferentes comparações acima mencionadas de desempenho, robustez e imunidade a ruído, esperamos obter resultados em que o desempenho e robustez do método algébrico se aproxime da realimentação de estado.

3.2 Modelo do pêndulo invertido

A equação (3.1) modela o pêndulo invertido apreciado na figura 3.1, tal modelo é obtido no apêndice B.

onde:

M = massa do carrinho.

m = massa da haste do pêndulo.

l = comprimento da haste do pêndulo.

g = constante de aceleração gravitacional.

u = força de controle aplicada ao suporte móvel($f(t)$).

Figura 3.1: Pêndulo invertido.

r = posição do carrinho.

θ = ângulo da haste com a vertical.

θ e r = coordenadas generalizadas.

$\dot{\theta}$ e $\dot{r}$ = velocidades generalizadas.

Vamos considerar que a entrada $u(t)$ do sistema é a força $f(t)$ aplicada no carrinho, e que não há atuação do torque na haste rígida de comprimento l .

Definindo:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \\ \dot{r}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$$

No Apêndice B mostramos que o modelo do sistema é dado por

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \\ \frac{u}{M+m-m\cos^2(x_2)} + \frac{mlx_4^2\sin(x_2)}{M+m-m\cos^2(x_2)} - \frac{mg\sin(x_2)\cos(x_2)}{M+m-m\cos^2(x_2)} \\ \frac{(M+m)mg\sin(x_2)}{(M+m)ml^2-m^2l^2\cos^2(x_2)} - \frac{uml\cos(x_2)}{(M+m)ml^2-m^2l^2\cos^2(x_2)} - \frac{m^2l^2x_4^2\sin(\theta)\cos(x_2)}{(M+m)ml^2-m^2l^2\cos^2(x_2)} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

A equação (3.1) é a representação em espaço de estados do sistema não linear do pêndulo invertido e u é a entrada de controle do sistema. Note que (3.1) é da forma:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t))$$

3.2.1 Linearização do Sistema

O procedimento clássico de linearização que se utiliza é baseado na expansão da função não linear em série de Taylor. Só serão considerados os termos lineares, enquanto os outros termos de ordem superior serão desprezados. A linearização terá maior precisão em uma pequena vizinhança do ponto de operação.

Considere um sistema de controle

$$\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t))$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada e f é de classe C^1 . Aproximando $f(x(t), u(t))$ pela expansão em série de Taylor referente ao ponto de operação

(x_0, u_0) , obtém-se:

$$f(x(t), u(t)) = f(x_0, u_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0=0, u_0=0} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x_0=0, u_0=0} (u - u_0) + O(x, u).$$

Desprezando-se o resto de Taylor $O(x, u)$, obtemos:

$$f(x(t), u(t)) = f(x_0, u_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0=0, u_0=0} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x_0=0, u_0=0} (u - u_0)$$

Para o caso estudado temos $x_0 = 0$ e $u_0 = 0$, onde $x_0 \in R^4$ e $u_0 \in R$, teremos $f(x_0, u_0)$. Logo (x_0, u_0) é ponto de equilíbrio. Definindo:

$$A = \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} \Big|_{x_0=0, u_0=0}, \quad B = \frac{\partial f(\cdot)}{\partial u} \Big|_{x_0=0, u_0=0}, \quad x_\delta = x(t) - x_0, \quad u_\delta = u(t) - u_0$$

Teremos:

$$\frac{dx_\delta(t)}{dt} = Ax_\delta(t) + Bu_\delta(t)$$

Aplicando esta metodologia em (3.1), obtemos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{M}mg & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(M+m)}{lM}g & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ \frac{-1}{lM} \end{pmatrix}$$

3.3 Controle por Realimentação de Estado (RE)

Considere-se o sistema mostrado na figura 3.1, deseja-se manter o pêndulo invertido na posição vertical. O pêndulo inclinado pode ser trazido de volta à posição vertical quando se aplica na base móvel uma entrada de controle apropriada. Concomitantemente, deseja-se trazer a base para a posição de referência $x_1 = 0$. Considere θ e r como sinais de saída do sistema, ou seja,

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Lembrando que θ é o ângulo formado pela haste do pêndulo respeito da linha vertical, e r é a posição da base móvel.

Expressando agora o sistema em espaço de estado:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{M}mg & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(M+m)}{lM}g & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ \frac{-1}{lM} \end{pmatrix} u \quad (3.2)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

O primeiro passo é projetar um sistema de controle para o modelo linearizado do pêndulo invertido entorno do ponto de equilíbrio, utilizando o enfoque de alocação de pólos por realimentação de estados [7], [2], da forma:

$$u = -Fx$$

onde $x \in R^4$, é o vetor de estados e F é a matriz de ganho da realimentação.

Lembremos que $x = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ conforme hipótese feita introdução deste trabalho.

Cosidere-se os seguintes valores para M , m , l e g :

$$M = 2Kg.$$

$$m = 1Kg.$$

$$l = 0.5m.$$

$$g = 9.81m/s^2.$$

Para obter a lei de controle $u = -Fx$, uma condição necessária e suficiente para alocar os pólos é que o sistema seja controlável. Como a matriz de controlabilidade $\mathcal{C}$ é uma matriz de posto 4 conclui-se que o sistema é controlável. Note-se que a matriz de controlabilidade é dada por

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.4905 \\ 0 & -1 & 0 & -20.6010 \\ 0.5 & 0 & 0.4905 & 0 \\ -1 & 0 & -20.6010 & 0 \end{pmatrix}$$

Os pólos de malha fechada são impostos de tal forma que os pólos dominantes se localizam em $s_{1,2} = -2 \pm j2\sqrt{3}$, correspondendo a um fator de amortecimento $\xi = 0.5$. Os dois pólos restantes são suficientemente afastados para que o efeito deles seja desprezível. Foram escolhidos os pólos $s_{3,4} = -10$. Calculando-se a realimentação resultante segundo [14] obtemos:

$$F = [163.0989 \quad 298.1504 \quad 73.3945 \quad 60.6972] \quad (3.4)$$

Uma vez que a matriz de realimentação de estado F foí determinada, vamos sim-

ular em computador o desempenho do sistema não linear em malha fechada (Vide figura 3.2).

Figura 3.2: Controle por realimentação

O sistema em malha fechada da figura 3.2 será denominado de RE. Simularemos o sistema com e sem ruído.

3.4 Controle via Realimentação com Estimador Algébrico (REA)

Note que o estado x do sistema é da forma $x = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$. Utilizando o estimador de derivadas de primeira ordem dado na equação (2.11) onde é implementado a política de chaveamento no capítulo 2, implementamos o estimador algébrico. O diagrama representando tal lei de controle pode ser visto na figura 3.3. O sistema

em malha fechada da figura 3.3 será denominado de REA. Note adição de ruído na saída, onde o ruído é gerado pelo computador com distribuição uniforme, média igual a $1/2$ e variância igual a $1/12$.

Figura 3.3: Diagrama de estimação e controle com ruído

3.5 Comparação entre RE e REA

Nesta seção se farão as comparações respectivas entre a realimentação de estado (RE) e a realimentação com estimador algébrico (REA). Em todas as simulações utilizamos a realimentação F dada por (3.4) e as seguintes condições iniciais:

$$x_1(0) = 0.1, \quad x_2(0) = 0.1, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 0.$$

As simulações feitas para a análise do posicionamento angular da haste do pêndulo utilizando diferentes valores de h excepto $h = 10^{-6}$, podem ser vistas no apêndice C.

3.5.1 Comparando RE e REA para vários valores de h

Para realizar os respectivos testes de comparação entre RE e REA utilizaremos diferentes valores para o intervalo de reset¹: $h = 0.1$, $h = 0.01$, $h = 0.5$ e $h = 10^{-6}$. A figura 3.4 mostra o comportamento do posicionamento da base móvel (carrinho) do pêndulo quando $h=0.1$

Já na figura 3.5 se apresenta as diferenças dos posicionamentos em relação a realimentação de estados quando $h=0.1$. Pode-se observar que o estimador algébrico neste caso aproxima-se da realimentação de estado pura, apresentando um bom desempenho.

Para o caso de $h=0.01$, o desempenho do sistema melhora consideravelmente como pode-se apreciar na figura 3.6, da mesma forma a figuras 3.7 que mostram as diferenças dos posicionamentos muito pequenas.

Para o caso de $h=0.5$ o desempenho do sistema piora em relação com o valor anterior utilizado, a figuras 3.8 mostra um afastamento entre os estados para RE e REA, também as diferenças dos posicionamentos se incrementam como é visto na figuras 3.9.

Tomando um h muito pequeno neste caso $h = 10^{-6}$, o desempenho do sistema é prejudicado devido à indeterminação que apresenta o estimador algébrico na equação (2.11) do capítulo 2, isto pode-se apreciar nas figuras 3.10, 3.11, 3.12 e 3.13. De fato, a computação de (2.11) fica sempre próxima de uma divisão por zero.

3.5.1.1 Comparação entre RE e REA na presença de ruído

Agora repetimos as simulações anteriores aplicando um ruído aditivo na saída do sistema, figura 3.2 e 3.3. O ruído aplicado foi gerado pelo MATLAB.

¹Vide seção 2.2 do capítulo 2.

Figura 3.4: Comparação de posicionamento para $h=0.1$ sem ruído.

Figura 3.5: Diferença de posicionamento em relação a realimentação de estados para $h=0.1$ sem ruído.

A figura 3.14 mostra o comportamento do posicionamento da base móvel (carrinho) do pêndulo, sob a influência de ruído para $h=0.1$. A figura 3.15 apresenta as diferenças dos posicionamentos em relação à realimentação de estados. Pode-se

Figura 3.6: Comparação de posicionamento para $h=0.01$ sem ruído.

Figura 3.7: Diferença de posicionamento em relação a realimentação de estados para $h=0.01$ sem ruído.

dizer que mesmo na presença de ruído os estados reais x_1 e x_2 da REA tentam acompanhar os estados x_1 e x_2 da RE, apresentando um erro aceitável.

Figura 3.8: Comparação de posicionamento para $h=0.5$ sem ruído.

Figura 3.9: Diferença de posicionamento em relação a realimentação de estados para $h=0.5$ sem ruído.

Para $h=0.05$ o desempenho do sistema é afetado pelo ruído mas ainda assim os estados de REA tentam acompanhar os estados de RE como é visto na figura 3.16, mas a diferença entre os estados de REA e RE é maior do que para $h=0.1$ e $h=0.5$,

Figura 3.10: Comparação de posicionamento para $h=0.000001$ sem ruído

Figura 3.11: Diferença de posicionamento em relação a realimentação de estados para $h=0.000001$ sem ruído.

isto é mostrado na figura 3.17. Para $h=0.5$ num ambiente ruidoso o desempenho tende a melhorar como pode-se ver na figura 3.18. Em outras palavras, os que

Figura 3.12: Comparação de posicionamento angular para $h=0.000001$ sem ruído

Figura 3.13: Diferença de posicionamento em relação a realimentação de estados para $h=0.000001$ sem ruído.

estados reais da REA se aproximam dos estados da RE. A figura 3.19 também mostram uma redução na diferença das posições em relação à realimentação de estados

Figura 3.14: Comparação do posicionamento com ruído e $h=0.1$

Figura 3.15: Diferença de posicionamento em relação a realimentação de estados com ruído e $h=0.1$

Figura 3.16: Comparação de posicionamento com ruído e $h=0.05$

Figura 3.17: Diferença de posicionamento em relação a realimentação de estados com ruído para $h=0.05$

Figura 3.18: Comparação de posicionamento com ruído e $h=0.5$

Figura 3.19: Diferença de posicionamento em relação a realimentação de estados com ruído para $h=0.5$

3.5.2 Análise de robustez da estabilidade em malha fechada

Toda lei de controle está sujeita à degradação de desempenho e estabilidade pela variação de parâmetros do sistema. Nesta seção compararemos a robustez da

estabilidade do sistema em malha fechada para as duas leis de controle RE e REA. O parâmetro escolhido para ser modificado é m (massa da haste do pêndulo ver figura 3.1). No sistema do pêndulo invertido variamos somente o valor de m antes fixo, utilizando a mesma lei de controle. Obtemos uma faixa de valores onde o comportamento do sistema mantenha-se adequado (ou o sistema em malha fechada continue sendo estável). Também obtemos uma aproximação do valor que m pode tomar para continuar mantendo a estabilidade do sistema linearizado, através do cálculo direto dos autovalores da matriz de estado em malha fechada, e um método de busca binária.

Este valor é dado por $m^* = 11.584$. As simulações das figuras 3.33 até 3.44 mostram o comportamento do sistema perto do valor limiar de estabilidade $m^* = 11.584$

3.5.2.1 Análise para $m=10.5$

- Tomando $h=0.01$: As diferenças entre os resultados do RE e REA são muito pequenas (Ver figuras 3.20 e 3.21). A máxima diferença de x_1 foi $2 * 10^{-3}$.
- Tomando $h=0.1$: As diferenças entre os resultados do RE e do REA para $h=0.1$ já são maiores do que para $h=0.01$, mas ainda são pouco notadas nas figuras 3.22 e 3.23. A máxima diferença de x_1 foi 0.013.
- Tomando $h=5$: O desempenho do REA já é muito pior do que o do RE como pode ser visto na figura 3.24. A diferença entre RE e REA é bem visível nestas figuras. A oscilação não é amortecida em malha fechada para o REA mostrando que a robustez de RE é muito maior que a do REA para este valor.

Figura 3.20: Comparação de posicionamento de RE e REA para $m=10.5$ e $h=0.01$

Figura 3.21: Diferença de posicionamento de RE e REA para $m=10.5$ e $h=0.01$

Figura 3.22: Comparação de posicionamento de RE e REA para $m=10.5$ e $h=0.1$

Figura 3.23: Diferença de posicionamento de RE e REA para $m=10.5$ e $h=0.1$

Figura 3.24: Comparação de posicionamento de RE e REA para $m=10.5$ e $h=5$

3.5.2.2 Análise para $m=10.9$

As figuras 3.25 e 3.26 mostram o comportamento dos estados reais dadas pelas duas leis de controle estudadas RE e REA no caso em que $m = 10.9$. Neste caso as duas leis de controle instabilizam para $m = 10.9$. Foram feitos vários testes para diferentes valores de m , que não serão apresentados já que para os valores maiores de 10.9 as duas abordagens não estabilizam. Para os valores entre 10.5 e 10.8 eles apresentam um comportamento bem parecido ao apresentado para $m = 10.5$.

Figura 3.25: Comparação de posicionamento angular de RE e REA para $m=10.9$ e $h=0.01$

3.5.3 Conclusões:

As simulações deste capítulo permite a confirmação dos Fatos 1,2 e 3 levantados na Introdução da presente dissertação. Resumimos os resultados qualitativamente através da seguinte tabela 3.1

- A) Desempenho do controlador em malha fechada: Na ausência de ruído, o aumento de h para valores muito grandes degrada o desempenho do controlador chegando à instabilidade em malha fechada. No entanto a degradação da estimação é muito mais sentida com o aumento de h do que a degradação do desempenho. Há uma larga faixa de h onde o desempenho ainda é aceitável, mas a estimação fica degradada em termos de precisão.
- B) Imunidade a ruído(do Estado real): Na presença do ruído, vê se uma

Figura 3.26: Comparação de posicionamento angular de RE e REA para $m=10.9$ e $h=0.01$

degradação do comportamento do Estado real com o aumento de h , já que a estimação em malha aberta possui esta mesma tendência e provoca a degradação do sistema em malha fechada como um todo. Observa-se que, como o sistema mecânico se comporta como um filtro passa baixas, a degradação do Estado real é muito menor do que a degradação do Estado estimado.

- C) Robustez da Estabilidade: Para valores pequenos de h verifique-se que a robustez da estabilidade do sistema é muito próxima da robustez da realimentação do estado perfeito. O aumento de h degrada robustez do sistema, e a realimentação do estado perfeito torna-se mais robusta que a realimentação do estado estimado para grandes valores de h .

	Aumento de h	Diminuição de h
A)Desempenho do controlador em malha fechada	Diminui para valores grandes	Aumenta
B)Imunidade a ruído(do Estado real)	A imunidade diminui com aumento de h	Aumenta, mas é muito menos sensível que a estimação
C)Robustez da Estabilidade	O aumento de h degrada a robustez	Diminui. A diminuição de h aumenta a robustez.

Tabela 3.1: Resultados das simulações da Realimentação de Estado

Capítulo 4

CONTROLE VIA MÉTODO DO TORQUE CALCULADO

4.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo implementar um controlador com o método de torque calculado, técnica largamente utilizada no controle de manipuladores robóticos. Em nosso caso o pêndulo invertido pode ser considerado um robô de dois graus de liberdade. A técnica de controle por torque calculado consiste em modificar o sistema não linear, incluindo elementos que são provenientes do conhecimento do modelo dinâmico. O objetivo do controle proposto para o pêndulo é o seguimento de uma trajetória definida no espaço das coordenadas generalizadas (r, θ) .

A figura 4.1 apresenta o pêndulo invertido onde as coordenadas generalizadas são (r, θ) , respectivamente a posição do carrinho e a posição angular da barra, e a entrada é $u = (u_1, u_2) = (f, \tau)$, respectivamente a força aplicada no carrinho e o torque aplicado na barra. O modelo dinâmico de tal sistema é dado pela equação

Figura 4.1: Pêndulo invertido

(4.1). Consulte apêndice B para a obtenção desta equação.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \\ \frac{u_1}{M+m-m\cos^2(x_2)} + \frac{mlx_4^2\sin(x_2)}{M+m-m\cos^2(x_2)} - \frac{mg\sin(x_2)\cos(x_2)}{M+m-m\cos^2(x_2)} - \frac{u_2\cos(x_2)}{l(M+m-m\cos^2(x_2))} \\ \frac{u_2(M+m)}{l^2m(M+m-m\cos^2(x_2))} + \frac{(M+m)g\sin(x_2)}{l(M+m-m\cos^2(x_2))} - \frac{mx_4^2\sin(x_2)\cos(x_2)}{(M+m)m\cos^2(x_2)} - \frac{u_1\cos(x_2)}{l(M+m-m\cos^2(x_2))} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

4.2 Controle por torque calculado (TC)

Considere-se o modelo dinâmico [10] de um robô manipulador com n graus de liberdade, estruturas rígidas, modelado por:

$$\mathcal{M}(q)\ddot{q} + \mathcal{H}(q, \dot{q}) = u \quad (4.2)$$

Onde:

- $\mathcal{M}(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de inércia.
- $\mathcal{H}(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de funções que inclui a aceleração de coriolis, o efeito da gravidade etc..
- $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ são os vetores que denotam a posição, velocidade e aceleração nas juntas respectivamente.

O problema de controle de rastreamento (seguimento) pode ser formulado da seguinte forma. Dadas as funções vetoriais $\bar{q}(t)$, $\dot{\bar{q}}(t)$ e $\ddot{\bar{q}}(t)$ que se referem às posições, velocidades e acelerações desejadas nas juntas, queremos encontrar uma função vetorial u tal que o vetor de coordenadas generalizadas $q(t)$ siga assintoticamente o vetor de coordenadas generalizadas desejadas $\bar{q}(t)$. Seja $e(t)$ o erro de posição, também denominado de erro de rastreamento (ou de seguimento) definido por:

$$e(t) = \bar{q}(t) - q(t)$$

Note que $e(t)$ é a diferença entre a trajetória desejada e a real. O objetivo da lei de controle que desenvolveremos é obter:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

Considerando a definição prévia, o vetor $\dot{e}(t) = \ddot{\bar{q}}(t) - \ddot{q}(t)$ representa o erro de velocidade. O objetivo do controle é alcançado se as variáveis das juntas do manipulador seguem assintoticamente a trajetória desejada.

O modelo dinâmico (4.2) que caracteriza o comportamento de um robô manipulador é em geral, composto de funções não lineares das variáveis de estado (posição e velocidade). Esta característica do modelo dinâmico pode levar-nos a crer que, dado qualquer controlador a equação diferencial que modela o sistema de controle em malha fechada deve ser composto de funções não lineares das variáveis de estado correspondentes, como acontece em algumas leis de controle estudadas [10]. No entanto existe um controlador que também é não linear nas variáveis de estado, mas que leva a um sistema de controle em malha fechada que é descrito por uma equação linear. Este controlador é capaz de cumprir o objetivo do controle de movimento e recebe o nome de controle por torque calculado.

O controle por torque calculado foi uma das primeiras abordagens de controle do movimento baseada no modelo, criada para manipuladores, consistindo em modificar o sistema não linear, incluindo elementos provenientes do conhecimento do modelo dinâmico. Em outras palavras, utiliza-se o conhecimento das matrizes $\mathcal{M}(q)$ e $\mathcal{H}(q, \dot{q})$. Além disso, observamos que a trajetória desejada do movimento $\bar{q}(t)$ e suas derivadas $\dot{\bar{q}}(t)$ e $\ddot{\bar{q}}(t)$, assim como medidas de posição e velocidades generalizadas $q(t)$ e $\dot{q}(t)$, são utilizadas para calcular a ação de controle.

- ***Determinação da realimentação linearizante (lei de controle linearizante).***

Relacionando o erro de rastreamento com o vetor de forças generalizadas que se aplica no pêndulo, considere-se a primeira e a segunda derivada em relação ao tempo:

$$\dot{e} = \dot{q} - \dot{\tilde{q}} \quad (4.3)$$

$$\ddot{e} = \ddot{q} - \ddot{\tilde{q}} \quad (4.4)$$

Depois multiplicando à esquerda na equação (4.2) pela inversa da matriz $\mathcal{M}$, que sempre existe [10]

$$\mathcal{M}^{-1}\mathcal{M}\ddot{q} + \mathcal{M}^{-1}\mathcal{H} = \mathcal{M}^{-1}u$$

obtemos:

$$\ddot{q} = -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{H} + \mathcal{M}^{-1}u \quad (4.5)$$

Substituindo a equação (4.5) na equação (4.4), se terá:

$$\ddot{e} = -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{H} + \mathcal{M}^{-1}u - \ddot{\tilde{q}} \quad (4.6)$$

Definindo uma nova entrada ν , de modo que:

$$\nu = -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{H} + \mathcal{M}^{-1}u - \ddot{\tilde{q}} \quad (4.7)$$

isto é:

$$\ddot{e} = \nu \quad (4.8)$$

Obtendo u da equação (4.7), temos a equação que representa a lei de controle linearizante:

$$u = \mathcal{H} + \mathcal{M}(\ddot{q} + \nu). \quad (4.9)$$

Note que o sistema em malha fechada com a lei de controle (4.9) é dado por (4.8). No entanto (4.8) é um sistema linear cuja equação característica para cada grau de liberdade é $s^2 = 0$. Portanto tal sistema não é assintoticamente estável (para entrada nula).

• ***Determinação da realimentação estabilizante(lei de controle estabilizante).***

Com a finalidade de obter o modelo que representa a dinâmica do erro de rastreamento, se define o vetor de estados do sistema como:

$$z = [e^T \dot{e}^T] \quad (4.10)$$

Dada a definição das variáveis de estado de (4.10) e utilizando (4.8) se obtém a derivada do vetor de estados para o modelo do erro de rastreamento.

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} O & I_n \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \dot{e} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O \\ I_n \end{pmatrix} \nu \quad (4.11)$$

A equação (4.11) é uma equação diferencial de estado linear, onde I_n é a matriz identidade $n \times n$ e O é a matriz nula. Devido à controlabilidade do modelo linear (4.11), pode-se impor pólos livremente através de uma lei de controle estabilizante.

$$\nu = \bar{F}z \quad (4.12)$$

• **Aplicação do controle por torque-calculado no pendulo invertido**
.

Aplicando o método do torque-calculado no modelo do pendulo invertido dado nas equações (Vide apêndice B):

$$\begin{pmatrix} M + m & ml\cos(\theta) \\ ml\cos(\theta) & ml^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) \\ -mg\sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}$$

onde :

$$q = \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}; \quad \dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}; \quad \ddot{q} = \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}; \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}(q) = \begin{pmatrix} M + m & ml\cos(\theta) \\ ml\cos(\theta) & ml^2 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{H}(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) \\ -mg\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Encontramos a lei de controle por torque calculado, dada por (4.9). Logo:

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

onde:

$$\mathbf{e}_1 = r - \bar{r},$$

$$\mathbf{e}_2 = \theta - \bar{\theta}$$

Definindo:

$$z = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \dot{\mathbf{e}}_1 \\ \dot{\mathbf{e}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

teremos:

$$\dot{z}_1 = z_3$$

$$\dot{z}_2 = z_4$$

$$\dot{z}_3 = \nu_1$$

$$\dot{z}_4 = \nu_2$$

E a sua expressão em espaço de estado é a seguinte:

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 \nu \tag{4.13}$$

onde:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como A_1 , B_1 é controlável, pode-se escolher uma realimentação de estado que imponha pólos arbitrariamente escolhidos.

$$\nu = \bar{F}z \quad (4.14)$$

Figura 4.2: Diagrama do sistema de controle em malha fechada TC com ruído

Esta lei de controle pode ser visualizada no diagrama da figura 4.2. Nas simulações aplicaremos um ruído aditivo gerado por computador, como

mostrado na figura

Lembremos que a realimentação estabilizante é dada por (4.14) e a linearizante é dada por (4.9).

4.3 Torque Calculado e Estimador Algébrico TC-EA

O método do torque calculado no caso em que somente as coordenadas $q(t)$ estão disponíveis e $\dot{q}(t)$ é obtido por estimação algébrica, será denominado de TC-EA. A figura 4.3 mostra o diagrama do TC-EA. Note que nas simulações aplicaremos um ruído aditivo em $q(t)$ conforme mostrado na figura 4.3. Lembremos que o estimador algébrico é construído através da equação (2.8) juntamente com a política de chaveamento do capítulo 2.

A diferença para a figura 4.2 é o fato de estimarmos $\dot{q}$ a partir do estimador algébrico. Lembramos que o esquema de controle da figura 4.2 será denominado de TC e o esquema de controle da figura 4.3 será denominado de TC-EA e tal nomenclatura será utilizada a partir deste momento.

Vamos definir também o erro de estimação:

$$\varepsilon = \dot{y} - \hat{\dot{y}} \quad (4.15)$$

onde $\dot{y}$ é a velocidade real e $\hat{\dot{y}}$ é a velocidade estimada dada por (2.11)

Figura 4.3: Diagrama de estimação e controle em malha fechada TC-EA com ruído aditivo.

4.4 Simulações do Controle TC e TC-EA..

A seguir serão apresentados os resultados das simulações obtidas utilizando as estratégias de estimação e controle descritas nas seções anteriores. Considerando as condições iniciais seguintes: $x_1(0) = 0.1$, $x_2(0) = 0.1$, $x_3(0) = 0$, $x_4(0) = 0$. Aplicamos a lei de controle dada na equação (4.12): $\nu = \bar{F}z$, já que o modelo do sistema dado na equação (4.11) é controlável e podem-se impor livremente os pólos $-2 + j2\sqrt{3}$, $-2 - j2\sqrt{3}$, -10 , -10 . Consideremos valores diferentes de h como intervalo de reset, onde estes intervalos serão: $h=0.1$, $h=0.01$ e $h=0.4$. Nesta seção estamos preocupados com o desempenho do controlador. Os gráficos mostram as posições generalizadas verdadeiras do sistema, e nunca as estimadas.

4.4.1 Simulações de desempenho sem ruído.

4.4.1.1 Posições Generalizadas

- Para $h=0.1$

Na figura 4.4 é mostrado o comportamento da posição do carrinho ou base móvel do pêndulo por controle TC e TC-EA, junto com a diferença existente entre eles, dada na figura 4.5.

Figura 4.4: Posição utilizando o controlador TC. e TC-EA. (sem ruído). para $h=0.1$

Tendo como resultado que o comportamento do estimador-controlador TC-EA é bem próximo do controlador TC. Nos primeiros segundos observa-se um pequeno afastamento entre as curvas que logo tendem a convergir para zero, como é apreciado nas figuras 4.4 e 4.6 onde é considerado o valor de $h=0.1$. A máxima diferença de x_1 foi $8 * 10^{-3}$

Figura 4.5: Diferença entre TC. e TC-EA. da posição da base movel respectivamente (sem ruído) para $h=0.1$.

- Para $h=0.01$

Considerando $h=0.01$, obtemos as figuras 4.6 e 4.7 onde mostra-se o comportamento da posição do carrinho utilizando controle TC e TC-EA, e a diferença entre as duas abordagens respectivamente. A máxima diferença de x_1 foi $8 * 10^{-4}$

Nos testes feitos para $h=0.01$, o desempenho é melhor já que as curvas encontram-se bem mais próximas uma da outra tanto para a posição do carrinho como para a posição da haste do pendulo, apresentando uma diferença quase imperceptível.

- Para $h=0.4$

A figura 4.8 mostram o comportamento da posição do carrinho, neste caso

Figura 4.6: Posição real utilizando o controlador TC. e TC-EA. (sem ruído) para $h=0.01$

Figura 4.7: Diferença entre TC. e TC-EA. da posição real da base movel respectivamente (sem ruído) para $h=0.01$.

onde é considerado $h=0.4$ as curvas aparecem afastadas uma da outra, oscilando em volta de zero a curva onde foi utilizado o controle TC-EA, que

no tempo tende a convergir para zero. Percebe-se que para $h=0.4$ o desempenho é muito pior, mostrando oscilações em TC-EA que inexistem no TC. A máxima diferença de x_1 foi 0.042

A diferença entre os controles TC e TC-EA é dada pela figura 4.9

Figura 4.8: Posição real utilizando o controlador TC. e TC-EA. (sem ruído) para $h=0.4$

4.4.2 Simulações de desempenho com ruído.

4.4.2.1 Posições generalizadas

A mesma análise também será feita no caso de adição de ruído na saída (vide esquemas das figuras 4.2 e 4.3) para o posicionamento da base móvel denotada por x_1 que é mostradas nas figuras seguintes utilizando diferentes valores para h :

Figura 4.9: Diferença entre TC. e TC-EA. da posição real da base móvel respectivamente (sem ruído) para $h=0.4$.

- Para $h=0.1$

Na figura 4.10 o desempenho do sistema com controle TC-EA se mostra mais sensível à presença de ruído do que o controle TC. A diferença entre ambos sistemas de controle pode ser visto na figura 4.11. Observe que o ruído não afeta $\dot{q}$ no esquema da figura 4.2 enquanto a estimação de $\dot{q}$ é afetada pelo ruído na figura 4.3. Assim esta maior sensibilidade a ruído é esperada no processo de estimação. A máxima diferença de x_1 foi 0.019.

- Para $h=0.01$

Pode-se apreciar que para $h=0.01$, a sensibilidade à ruído aumenta ainda mais em comparação a situação encontrada para $h=0.1$. Tal situação é encontrada nas figuras 4.12 e 4.13. A máxima diferença de x_1 foi 0.039.

Figura 4.10: Posição real utilizando o controlador TC. e TC-EA. afetado por ruído para $h=0.1$.

Figura 4.11: Diferença entre TC. e TC-EA. da posição real da base movel respectivamente afetado por ruído para $h=0.1$.

- Para $h=0.4$

Figura 4.12: Posição real utilizando o controlador TC. e TC-EA. afetado por ruído para $h=0.01$.

Figura 4.13: Diferença entre TC. e TC-EA. da posição real da base movel respectivamente afetado por ruído para $h=0.01$.

Para $h=0.4$ há uma considerável diminuição da sensibilidade ao ruído conforme visto nas figuras 4.14 e 4.15. A máxima diferença de x_1 foi 0.043.

Figura 4.14: Posição real utilizando o controlador TC. e TC-EA. afetado por ruído para $h=0.4$.

Figura 4.15: Diferença entre TC. e TC-EA. da posição real da base movel respectivamente afetado por ruído para $h=0.4$.

Observação: Os resultados são sensíveis à intensidade do ruído de uma forma não trivial embora do ponto de vista qualitativo; outras simulações adotando outros ruídos forneçam resultados análogos.

4.4.3 Erro de rastreamento

Figura 4.16: Comparação do erro de rastreamento e_1 para TC e TC-EA afetado de ruído.

Pode-se observar que o erro de rastreamento para as duas abordagens tanto TC como TC-EA tende assintoticamente para zero. Como é apreciado nas figuras 4.16 e 4.19 o ruído termina afetando nas duas abordagens o erro de rastreamento, a figura 4.17 mostra uma ampliação da figura 4.16, onde os dois sinais terminam oscilando indefinidamente em volta de zero.

O erro de rastreamento para e_1 e e_2 mediante TC-EA difere daquele obtido para TC, isto é, a oscilação do erro obtido mediante TC-EA apresenta uma amplitude maior que aquele obtido mediante TC. Isto é bem razoável visto que o ruído em

Figura 4.17: "Zoom" da comparação do erro de rastreamento e_1 para TC e TC-EA afetado de ruído.

Figura 4.18: Comparação do erro de rastreamento e_2 para TC e TC-EA afetado de ruído.

$q(t)$ é amplificado pelo mesmo estimador algébrico enquanto no controlador TC não há ruído em $\dot{q}(t)$.

4.4.4 Simulações de TC-EA focando o estimador.

As simulações seguintes mostram alguns resultados obtidos para o sistema de controle TC-EA, com condições iniciais também iguais a: $x_1(0) = 0.1$, $x_2(0) = 0.1$, $x_3(0) = 0$, $x_4(0) = 0$. Nesta seção estamos preocupados com o desempenho do estimador. Tomaremos vários valores de h e compararemos as posições generalizadas verdadeiras com as estimadas. Note que h é o único parâmetro de ajuste do estimador.

A figura 4.21 apresenta os estados reais e os estados estimados com um intervalo de reinicialização de $h = 0.1$ segundos. As estimações acompanham bem os estados reais.

Na figura 4.22 são mostrados os erros de estimação respectivos.

As figuras 4.23 e 4.24 mostram o erro da estimação tomando $h = 0.01$ e $h = 0.4$ respectivamente. Observa-se que se h cresce ou decresce o erro de estimação também incrementa-se ou diminui respectivamente.

Perturbando a saída do sistema com ruído como visto no diagrama da figura 4.3, repetimos as simulações variando o tempo de reset h .

Nas figuras 4.25, 4.26 e 4.27 são mostrados os erros de estimação num ambiente ruidoso considerando os seguintes intervalos de reset: $h = 0.01$, $h = 0.1$ e $h = 0.4$ respectivamente.

Figura 4.19: Estados reais e estados estimados com $h = 0.1$ sem ruído

Figura 4.20: Erro de estimação com $h = 0.1$ sem ruído

Figura 4.21: Erro de estimação com $h = 0.01$ sem ruído

Figura 4.22: Erro de estimação com $h = 0.4$ sem ruído

Figura 4.23: Erro de estimação com ruído considerando $h = 0.01$

Fazendo variar h para diversos valores além dos mostrados anteriormente, pode-se escolher uma faixa de valores adequados para h onde o sistema apresente um erro de estimação aceitável.

O método algébrico diferencial proposto em [1] e [3], não proporciona um procedimento exato para a escolha do intervalo de reset, por tal motivo analisamos a influência da escolha do h no erro de estimação e no desempenho do sistema. Mostrando o seguinte:

- O erro de estimação sem ruído piora com o aumento de h , e melhora com a diminuição de h .
- O erro de estimação com ruído melhora com o aumento de h , e piora com a diminuição de h .

Figura 4.24: Erro de estimação com ruído considerando $h = 0.1$

4.4.5 Esforços de controle com o sem ruído

Nas simulações desta seção consideraremos $h = 0.1$ na presença e na ausência de ruído.

Na ausência de ruído a estimação é de boa qualidade e os esforços de controle de TC e o TC-EA são muito próximos como mostram as figuras 4.28 e 4.29.

Conforme visto na seção 4.4.3, a escolha de h influencia fortemente na qualidade da estimação e portanto nos esforços de controle na presença de ruído, o qual é pode ser visto nas figuras 4.30 e 4.31

Figura 4.25: Erro de estimação com ruído e considerando $h = 0.4$

Figura 4.26: Comparação entre esforços de controle para $h = 0.1$ sem ruído

Figura 4.27: Comparação entre esforços de controle para $h = 0.1$ sem ruído

Figura 4.28: Comparação entre esforços de controle para $h = 0.1$ com ruído

Figura 4.29: Comparação entre esforços de controle para $h = 0.1$ com ruído

4.5 Conclusões

O conjunto de simulações deste capítulo permitiu a conformação dos Fatos 1, 2 e 3 levantados na Introdução da presente dissertação, desta vez para o controle baseado no método do torque calculado. Resumimos as conclusões na tabela a seguir.

Os itens A) e B) foram descritos nas conclusões do capítulo 3.

- C) Precisão da estimação em malha fechada: As simulações da seção 4.4 confirmaram que o comportamento do Estimador Algébrico em malha fechada não difere do comportamento em malha aberta, A precisão do estimador se degrada bastante com o aumento de h . No entanto a má qualidade da estimação não se reflete necessariamente na degradação do desempenho.

	Aumento de h	Diminuição de h
A) Desempenho do controlador em malha fechada	Diminui	Aumenta
B) Imunidade a ruído(do Estado real)	A imunidade diminui com aumento de h	Aumenta mas é muito menos sensível que a estimação
C) Precisão da estimação em malha fechada	Diminui	Aumenta
D) Imunidade a ruído(da estimação)	Aumenta	Diminui. É sensível à diminuição de h .
E) Esforço de controle (sem ruído)	É pouco sensível ao valor de h	É pouco sensível ao valor de h .
F) Imunidade a ruído do esforço de controle	Aumenta a imunidade a ruído, diminuindo o esforço de controle	Diminui a imunidade a ruído, aumentando o esforço de controle.

Tabela 4.1: Resultados das simulações para o Torque Calculado.

- D) Imunidade a ruído(da estimação): Possui o comportamento esperado, igual ao comportamento em malha aberta descrito na seção 2.3. A estimação na presença de ruído degrada-se rapidamente com a diminuição de h .
- E) Esforço de controle (sem ruído): O esforço de controle é pouco sensível ao valor de h . Para valores grandes de h a performance se degrada até a instabilidade, como dito anteriormente. Isso obviamente aumenta o esforço de controle.
- F) Imunidade a ruído do esforço de controle: Como o esforço de controle é dado pela lei

$$u = \begin{pmatrix} y \\ \dot{Y} \end{pmatrix}$$

onde $\dot{Y}$ é a velocidade estimada, a degradação da estimação $\dot{Y}$ provoca o

aumento do esforço de controle.

Capítulo 5

CONCLUSÕES

Neste trabalho optamos por uma abordagem mais heurística para levantar uma série de conjecturas sobre as propriedades dos estimadores algébricos.

As simulações dos Capítulos 3 e 4 permitiram concluir que as observações qualitativas dos Fatos 1, 2 e 3 do Capítulo 1 foram satisfeitas para os casos estudados.

A propriedade mais notável dos estimadores algébricos é que as derivadas são estimadas com precisão arbitrariamente grande num tempo arbitrariamente pequeno, caracterizando a denominação de "estimador não assintótico". Como consequência deste fato observa-se que, para h pequeno e na ausência de ruído, o sistema de controle em malha fechada se comporta como se a informação de estado estivesse disponível, absolvendo o estimador algébrico da necessidade de demonstrar um teorema de separação para esta classe de estimadores.

Observa-se que o aumento de h provoca a degradação da estimação e conseqüentemente a degradação do desempenho e a robustez do sistema de controle. Em contrapartida as imunidades a ruído são melhoradas com o aumento

de h . O fato interessante é que a faixa de h que ainda fornece um desempenho e robustez aceitável permite ajustar um valor de h que consiga atender o compromisso entre desempenho e robustez, de um lado, e imunidade a ruído, do outro.

Embora ainda não exista uma teoria que permita encontrar um valor ótimo de h a priori, nem uma apresentação mais formal e precisa dos Fatos 1, 2, e 3 do Capítulo 1 (com as devidas demonstrações). Os resultados encontrados são promissores para motivar uma investigação futura num contexto mais preciso e formal.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, "Reconstructeurs d'états". *C.R. Acad. Sci. Paris*, Série I, 338,91-96, 2004.
- [2] C. T. Chen, "Linear system theory and design", 3rd ed. *New York : Oxford University Press*, 1999.
- [3] J. Reger, H. Sira-Ramírez, M. Fliess , "On non-asymptotic observation of nonlinear systems". *Proc. of 44th IEEE Conference on Decision and Control, Sevilla, Spain*, 2005.
- [4] S. Diop, J. W. Grizzle, F. Chaplais, "On numerical differentiation algorithms for nonlinear estimation". *in Proceedings of the 2000 IEEE*, 2000.
- [5] F. Plestan, J. W. Grizzle, "Synthesis of nonlinear observers via structural analysis and numerical differentiation". *in Proceedings of the 1999 European control Conference*, septembre 1999.
- [6] S. Diop, J. W. Grizzle, P. E. Moraal, A. Stefanopoulou, "Interpolação and Numerical Differentiation for Observer Design". *in 1994 American Control Conference, Baltimore*, June 1994, pp 1329-1333.
- [7] Ogata Katsuhiko, "Engenharia de Controle Moderno". *Prentice-Hall do brasil, Rio de Janeiro*, 1982.

- [8] Khalil, Hassan K., "Nonlinear Systems", Second Edition. *Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey*, 1996.
- [9] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, "Control Via State Estimations of Some Nonlinear Systems". *IFAC Nolcos Conference, Stuttgart, Germany*, 2004.
- [10] John J. Craig, "Introduction to Robotics". *Prentice-Hall do brasil, Rio de Janeiro*, 1982.
- [11] J. Mikusinski, "Operational Calculus". *[S.l.]: Elsevier*, 1960.
- [12] J. Reger, P. Mai, H. Sira-Ramírez, "Robust algebraic state estimation of chaotic systems". *IEEE 2006 CCA/CACSD/ISIC, Munich, Germany*, 2006, p. 326-331.
- [13] C. E. d. B. Novaes, P. S. P. Silva, "On non-asymptotic state observers and their implementation in discrete time". *DINCON'09 , Bauru (8.: 2009)*, 2009, p. 45-3.
- [14] S. Diop, "On nonlinear observability". *in Proceedings ECC'91*, 1991, p. 152-157.
- [15] ,C. E. d. B. Novaes, Z. V. L. Murgueytio, P. S. P. Silva "Sobre o comportamento dos estimadores algébricos em malha fechada". *artigo submetido*.

Apêndice A

Propriedades das transformadas de Laplace utilizadas.

- **Teorema da diferenciação real.**

A transformada de Laplace da derivada de uma função $f(t)$ é obtida da através de:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$$

onde $f(0)$ é o valor inicial de $f(t)$ em $t = 0$.

Em geral:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

onde $f(0), f^{(1)}(0), \dots, f^{(n-1)}(0)$ representam os valores de $f(t), \frac{d}{dt}f(t), \dots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(t)$, respectivamente avaliadas em $t=0$.

- **Teorema da integração.**

A transformada de Laplace da integral de $f(t)$ é dada por

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

- **Teorema da diferenciação complexa.**

Se $f(t)$ pode-se transformar pelo método de Laplace, então exceto nos pólos

de $F(s)$

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

Da mesma forma:

$$\mathcal{L}\{t^2f(t)\} = \frac{d^2}{ds^2}F(s)$$

Em geral:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = \frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

para $n = 1, 2, \dots$

• **Exemplo.**

Calcular:

$$\mathcal{L}\{t^2y(t)\}$$

fazendo $g(t) = t^2y(t)$

então

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}g(t)\right\} = s\mathcal{L}\{g(t)\}$$

por teorema de diferenciação complexa

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{t^2y(t)\} = \frac{d^2}{ds^2}y(s)$$

Portanto

$$\mathcal{L}\{t^2y(t)\} = s\frac{d^2}{ds^2}y(s)$$

Apêndice B

Descrição do sistema

B.1 Dinâmica do pêndulo invertido sem atrito

Neste item se analisará o sistema não linear do pêndulo invertido [2], obtendo-se as equações diferenciais do modelo dinâmico, que descrevem o comportamento do sistema, utilizando para isso as equações de Lagrange.

Na figura B.1 mostra-se o diagrama que representa um pêndulo invertido montado sobre um suporte móvel acionado a motor, será considerado o problema de dois graus de liberdade, no qual o pêndulo se move apenas sobre o plano vertical.

Onde:

M = massa do suporte móvel.

m = massa da haste do pêndulo.

l = comprimento da haste do pêndulo.

g = constante de aceleração gravitacional.

u = força de controle aplicada ao suporte móvel($f(t)$).

B.1.1 Equações de Lagrange

Para obter o modelo dinâmico não linear do pêndulo invertido utilizaremos o procedimento de Euler-Lagrange, o procedimento é baseado na análise da cinemática e a energia potencial de cada componente. Esta abordagem é interessante do ponto de vista da engenharia, pois permite descrever sistemas físicos independentemente

Figura B.1: Pêndulo invertido

da complexidade de sua estrutura, especialmente sistemas eletromecânicos.

As equações de Lagrange possuem a seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_i \quad (\text{B.1})$$

onde:

$i = 1, \dots, n$

n = número de graus de liberdade do sistema

q_i = i-ésima coordenada generalizada

$\dot{q}_i$ = i-ésima velocidade generalizada

F_i = i-ésima força externa generalizada

T = energia cinética total

V = energia potencial total

D = função de dissipação. Definida como a metade da taxa com que a energia é dissipada.

Para o pêndulo as coordenadas generalizadas são: θ e r

As velocidades generalizadas são por tanto dadas por: $\dot{\theta}$ e $\dot{r}$

A energia potencial gravitacional é dada por:

$$V = mgl\cos\theta$$

Note que o torque de atrito é $\tau = B\dot{\theta}$ e assim a potencia dissipada será dada pelo produto (torque de atrito)x(velocidade angular)= $B\dot{\theta}^2$, assim teremos:

$$D = \frac{1}{2}B\dot{\theta}^2$$

A energia cinética total será dada por $T = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mv^2$

Pela lei dos cosenos aplicada à figura 1, teremos:

$$v^2 = \dot{r}^2 + 2l\dot{r}\dot{\theta}\cos(\theta) + l^2\dot{\theta}^2$$

Assim:

$$T = \frac{1}{2}(M + m)\dot{r}^2 + ml\dot{r}\dot{\theta}\cos(\theta) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

Aplicando (B.1) teremos o seguinte modelo:

$$(M + m)\ddot{r} + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) = f(t) \quad (\text{B.2})$$

$$ml\ddot{r}\cos(\theta) + ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin(\theta + B)\dot{\theta} = g(t) \quad (\text{B.3})$$

são as equações que descrevem o sistema não linear do pêndulo invertido.

B.2 Representação em espaço de estados do pêndulo invertido com torque

Introduzindo o torque como uma entrada a ser aplicada na junta barra-carrinho denotado por τ nas equações anteriores (B.2) e (B.3), temos as seguintes expressões

que descrevem o sistema:

$$(M + m)\ddot{r} + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) = u_1 \quad (\text{B.4})$$

$$ml\ddot{r}\cos(\theta) + ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin(\theta) = u_2 \quad (\text{B.5})$$

onde: $u_1 = f(t)$ e $u_2 = \tau$

Obtendo $\ddot{\theta}$ da equação (B.5):

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{l} \left(\frac{u_2}{ml} + \frac{g\sin(\theta)}{m} - \ddot{r}\cos(\theta) \right)$$

Substituímos $\ddot{\theta}$ em (B.4):

$$(M + m)\ddot{r} + \frac{u_2\cos(\theta)}{l} + g\sin(\theta)\cos(\theta) - m\ddot{r}\cos^2(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) = u_1$$

Obtemos $\ddot{r}$ da equação anterior:

$$\ddot{r} = \frac{1}{M + m - m\cos^2(\theta)} \left[u_1 + ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) - g\sin(\theta)\cos(\theta) - \frac{u_2\cos(\theta)}{l} \right] \quad (\text{B.6})$$

De modo análogo obtemos $\ddot{r}$ de (B.4):

$$\ddot{r} = \frac{1}{M + m} [u_1 - ml\ddot{\theta}\cos(\theta) + ml\dot{\theta}^2\sin(\theta)]$$

Substituindo $\ddot{r}$ na equação (B.5), temos:

$$mlu_1\cos(\theta) - m^2l^2\ddot{\theta}\cos^2(\theta) + m^2l^2\dot{\theta}\sin(\theta)\cos(\theta) + (M + m)ml^2\ddot{\theta} - (M + m)mgl\sin(\theta) = (M + m)u_2$$

Logo pode-se obter $\ddot{\theta}$ da equação anterior:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & \frac{u_2(M + m)}{l^2m(M + m - m\cos^2(\theta))} + \frac{(M + m)g\sin(\theta)}{l(M + m - m\cos^2(\theta))} \\ & - \frac{m\dot{\theta}^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{(M + m - m\cos^2(\theta))} - \frac{u_1\cos(\theta)}{(M + m)mgl\sin(\theta)} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Definindo as variáveis de estado como:

$$x = \begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \\ \dot{r}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ e suas derivadas: } \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \ddot{r}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{pmatrix}$$

Obtemos:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \\ \frac{u1}{M+m-m\cos^2(x_2)} + \frac{mx_4^2\text{sen}(x_2)}{M+m-m\cos^2(x_2)} - \frac{mg\text{sen}(x_2)\cos(x_2)}{M+m-m\cos^2(x_2)} - \frac{u2\cos(x_2)}{l(M+m-m\cos^2(x_2))} \\ \frac{u2(M+m)}{l^2m(M+m-m\cos^2(x_2))} + \frac{(M+m)g\text{sen}(x_2)}{l(M+m-m\cos^2(x_2))} - \frac{mx_4^2\text{sen}(x_2)\cos(x_2)}{(M+m)m\cos^2(x_2)} - \frac{u1\cos(x_2)}{l(M+m-m\cos^2(x_2))} \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

A equação (B.8) é a representação em espaço de estados do sistema não linear do pêndulo invertido e u é a entrada de controle de sistema.

Apêndice C

Simulações entre RE e REA

C.1 Comparação entre RE e REA para varios valores de h

Utilizando $h = 0.1$, $h = 0.01$, $h = 0.5$ e $h = 10^{-6}$.

A figura C.1 mostra o comportamento do posicionamento angular da haste do pêndulo quando $h = 0.1$.

Já na figura C.2 se apresenta a diferença dos posicionamentos em relação a realimentação de estados quando $h = 0.1$. A máxima diferença de x_2 foi 0.0125.

Para $h = 0.01$ o desempenho do sistema melhora como pode-se ver na figura C.3. A figura C.4 mostra a diferença dos posicionamentos, a qual é muito pequena onde a máxima diferença de x_2 é $1.7 * 10^{-3}$.

Para $h = 0.5$ o desempenho piora em relação com o valor anterior de h utilizado, a figura C.5 mostra um afastamento entre os estados RE e REA, onde as diferenças dos posicionamentos se incrementam como é visto na figura C.6. Tendo também que a máxima diferença de x_2 foi 0.057

Figura C.1: Comparação de posicionamento para $h=0.1$ sem ruído.

Figura C.2: Comparação de posicionamento angular para $h=0.1$ sem ruído.

Figura C.3: Comparação de posicionamento angular para $h=0.01$ sem ruído.

Figura C.4: Diferença de posicionamento em relação a realimentação de estados para $h=0.01$ sem ruído.

C.2 Comparação entre RE e REA na presença de ruído

Utilizando $h = 0.1$, $h = 0.05$ e $h = 0.5$.

Repetimos as simulações anteriores aplicando um ruído aditivo na saída do sistema.

Figura C.5: Comparação de posicionamento angular para $h=0.5$ sem ruído.

Figura C.6: Diferença de posicionamento em relação a realimentação de estados para $h=0.5$ sem ruído.

A figura C.7 mostra o comportamento do posicionamento angular da haste do pêndulo, sob a influência do ruído para $h = 0.1$. Na figura C.8 se apresenta a diferença dos posicionamentos em relação à realimentação de estado, onde a máxima diferença de x_2 é 0.047

Figura C.7: Posicionamento angular com ruído e $h=0.1$

Figura C.8: Diferença de posicionamento angular em relação a realimentação de estados com ruído e $h=0.1$

Para $h = 0.05$ os estados de REA tentam acompanhar os estados de RE como visto na figura C.9, e a figura C.10 mostra a diferença entre os estados x_2 de RE

e REA. A máxima diferença de x_2 neste caso é 0.13, diferença visivelmente maior do que para o caso de $h = 0.1$.

Figura C.9: Comparação de posicionamento angular com ruído para $h=0.05$

Figura C.10: Diferença de posicionamento angular em relação a realimentação de estados com ruído para $h=0.05$

Para $h = 0.5$ o desempenho melhora mesmo num ambiente ruidoso como se ve na figura C.11. A figura C.12 mostra uma redução das posições em relação à realmimentação de estado, sendo a máxima diferença de x_2 igual a 0.063

Figura C.11: Comparação de posicionamento angular com ruído para $h=0.5$

C.3 Simulações para o Análisis de Robustez

Nesta seção são apresentadas de forma análoga que na seção 3.5.2 só que agora para o análise de robustez do estado x_2 , simulações utilizando vários valores de h .

- Tomando $h=0.01$: As diferenças entre os resultados do RE e REA são vistas nas figuras C.13 e C.14. A máxima diferença de x_2 foi 2.4×10^{-3}
- Tomando $h=0.1$: Os resultados do RE e do REA podem ser vistas nas figuras C.15 e C.16. A máxima diferença de x_2 foi 0.0175
- Tomando $h=5$: A diferença entre RE e REA é bem visível nesta figura C.17.

Figura C.12: Diferença de posicionamento angular em relação a realimentação de estados com ruído para $h=0.5$

Figura C.13: Comparação de posicionamento angular de RE e REA para $m=10.5$ e $h=0.01$

Figura C.14: Diferença de posicionamento angular de RE e REA para $m=10.5$ e $h=0.01$

Figura C.15: Comparação de posicionamento angular de RE e REA para $m=10.5$ e $h=0.1$

Figura C.16: Diferença de posicionamento angular de RE e REA para $m=10.5$ e $h=0.1$

Figura C.17: Comparação de posicionamento angular de RE e REA para $m=10.5$ e $h=5$

Apêndice D

Simulações de controle TC e TC-EA

D.1 Simulações de desempenho sem ruído

- Para $h = 0.1$.
Nas figuras D.1 e D.2 é mostrado o posicionamento da haste do pêndulo e a diferença entre elas. A máxima diferença de x_2 foi $7 * 10^{-3}$.
- Para $h = 0.01$.
Nas figuras D.3 e D.4 observa-se o posicionamento da haste do pêndulo utilizando TC e TC-EA, junto à diferença existente entre as duas abordagens. A máxima diferença de x_2 foi $7 * 10^{-4}$.
- Para $h = 0.4$
A figura D.5 mostra o comportamento da posição da haste do pêndulo. A diferença entre os controles TC e TC-EA é dada pela figura D.6. A máxima diferença de x_2 foi 0.031.

D.2 Simulações de desempenho com ruído

1. Para $h = 0.1$.
Na figura D.7 o controle TC-EA mostra-se mais sensível à presença de ruído do que o controle TC. A diferença entre ambos controles é visto na figura D.8. A máxima diferença de x_2 foi 0.026.

Figura D.1: Posição angular utilizando o controlador TC. e TC-EA. (sem ruído) para $h=0.1$

Figura D.2: Diferença entre TC. e TC-EA. da posição da haste do pêndulo (sem ruído) para $h=0.1$.

2. Para $h = 0.01$.

Diminuindo o valor de h a sensibilidade a ruído aumenta, como se ve nas

Figura D.3: Posição angular real utilizando o controlador TC. e TC-EA. (sem ruído) para $h=0.01$

Figura D.4: Diferença entre TC. e TC-EA. da posição real da haste do pêndulo (sem ruído) para $h=0.01$.

figuras D.9 e D.10. A máxima diferença de x_2 foi 0.077.

3. Para $h = 0.4$.

Figura D.5: Posição angular real utilizando o controlador TC. e TC-EA. (sem ruído) para $h=0.4$

Figura D.6: Diferença entre TC. e TC-EA. da posição real da haste do pêndulo (sem ruído) para $h=0.4$.

Quando aumentamos o valor de h , neste caso para 0.4, há uma considerável diminuição da sensibilidade ao ruído conforme visto nas figuras D.11 e D.12. A máxima diferença de x_2 foi 0.041.

Figura D.7: Posição angular real utilizando o controlador TC. e TC-EA. afetado por ruído para $h=0.1$.

Figura D.8: Diferença entre TC. e TC-EA. da posição real da haste do pêndulo afetado por ruído para $h=0.1$.

Figura D.9: Posição angular real utilizando o controlador TC. e TC-EA. afetado por ruído para $h=0.01$.

Figura D.10: Diferença entre TC. e TC-EA. da posição real da haste do pêndulo afetado por ruído para $h=0.01$.

Figura D.11: Posição angular real utilizando o controlador TC. e TC-EA. afetado por ruído para $h=0.4$.

Figura D.12: Diferença entre TC. e TC-EA. da posição real da haste do pêndulo afetado por ruído para $h = 0.4$.