PAULO HENRIQUE DA ROCHA

CONTROLE H_∞ NÃO-LINEAR APLICADO EM SISTEMA DE
LEVITAÇÃO MAGNÉTICA: PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO EM
DSP DE PONTO-FIXO

São Paulo

2009

PAULO HENRIQUE DA ROCHA

CONTROLE H_∞ NÃO-LINEAR APLICADO EM SISTEMA DE
LEVITAÇÃO MAGNÉTICA: PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO EM
DSP DE PONTO-FIXO

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Doutor em Engenharia Elétrica

Área de Concentração:
Engenharia de Sistemas

Orientador:
Prof. Dr. Roberto Moura Sales

São Paulo

2009

DEDICATÓRIA

A DEUS todo poderoso.

Aos meus filhos, Fábio Hideki e Rafael Takeshi.

À minha querida esposa, Nancy Akemi.

À minha querida mãe, Maria Célia (in-memoriam).

”BRASIL: TECNOLOGIA PRÓPRIA É INDEPENDÊNCIA”

Lema do Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo

Agradecimentos

Ao Professor Roberto Moura Sales, por ter me aceitado como orientando, dando-me o privilégio de ter sido um de seus alunos de pós-graduação, o que me garantiu uma orientação segura e um constante apoio técnico durante todo o desenvolvimento deste projeto de pesquisa.

A todos os amigos do Laboratório de Automação e Controle - LAC, em especial, Henrique César Ferreira e Átila Madureira Bueno, pelas inúmeras discussões técnicas que influenciaram diretamente o desenvolvimento deste projeto.

A todos os meus familiares que sempre me apoiaram, em especial aos meus pais, João Gaspar e Maria Célia (*in-memoriam*), aos meus irmãos, João Gaspar Jr. e Ana Lúcia, a minha avó, Maria Luiza, aos meus tios, Celso e Carmem Sílvia.

A minha querida esposa, Nancy Akemi, e aos meus filhos, Fábio Hideki e Rafael Takeshi, que sempre estiveram ao meu alcance, dando-me todos os fluidos de amor e carinho necessários.

A todos os colegas do Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo, que contribuíram, direta ou indiretamente, no desenvolvimento desta tese.

À Marinha do Brasil, pela oportunidade de aprimoramento profissional e por acreditar em meu trabalho. Em especial, gostaria de agradecer ao CMG(RRm-EN) Luiz Antônio, CMG(RRm-EN) Fernando Magalhães, CF(EN) Ferreira Marques, CF(EN) Ana Maria, Eng. Percy Normanton Jr., Eng. Michael C. Porsch e Eng. Ronaldo R. Ferreira.

A DEUS...

Resumo

Sistemas de levitação magnética são inerentemente não-lineares e, quando controlados digitalmente, normalmente, esbarram em limitações do *hardware* empregado. O objetivo desta tese é apresentar aspectos teóricos e práticos durante a aplicação da teoria de controle H_∞ não-linear em sistemas de levitação magnética. A primeira contribuição desta tese é apresentar um procedimento de projeto de um controlador H_∞ não-linear que utiliza funções de ponderação com dinâmica, obtidas a partir do projeto de um controlador H_∞ linear. Assim como no caso linear, essas funções de ponderação possibilitam a rejeição de perturbações, ruídos de sensor, aumento da robustez, dentre outras especificações. A segunda contribuição é apresentar um procedimento de conversão de uma rotina implementada em ponto-flutuante para ponto-fixo, utilizando minimização de norma l_∞ , que foi implementada em um DSP de 32 bits em ponto-fixo. Resultados experimentais também são apresentados, nos quais a performance do controlador não-linear é especificamente avaliada na fase inicial de levitação.

Palavras-chave: Controle H_∞ não-linear, controle H_∞ linear, levitação magnética, DSP, ponto-fixo, controle digital, controle embarcado, mancal magnético, *wordlength*.

Abstract

Electromagnetic suspension systems are inherently nonlinear and often face hardware limitation when digitally controlled. The goal of this thesis is to present theoretical and practical aspects during the nonlinear H_∞ control applied on an electromagnetic suspension system. The first contribution is the design of a nonlinear H_∞ controller, including dynamic weighting functions, obtained from a linear H_∞ controller. Just as in the linear case, this dynamic weighting functions provide the disturbance and noise sensor rejection, robustness improvement, among other specifications. The second contribution is to present a procedure able to translate a floating-point algorithm into a fixed-point algorithm by using l_∞ norm minimization due to conversion error, which was then implemented into a 32-bit fixed-point DSP. Experimental results are also presented, in which the performance of the nonlinear controller is evaluated specifically in the initial suspension phase.

Keywords: Non-linear H_∞ control, linear H_∞ control, magnetic levitation, DSP, fixed-point, digital control, embedded control, magnetic bearing, wordlength.

Lista de Figuras

2.1	Diagrama em blocos de um sistema SISO em malha fechada	9
2.2	Barreiras de robustez de estabilidade e desempenho	11
2.3	Planta Aumentada $G_{ap}(s)$	12
2.4	Diagrama de blocos de um sistema de controle	15
2.5	Diagrama de blocos de um sistema de controle com funções de ponderação com dinâmica	22
3.1	Diagrama em blocos do sistema de levitação magnética	31
3.2	Funções de ponderação escolhidas	36
3.3	Diagrama de blocos do sistema de controle com inserção de $W_1(s)$, W_2 e $W_3(s)$	37
4.1	Representação de um número com a Norma <i>IEEE-754</i>	43
4.2	Representação da mantissa normalizada - Norma <i>IEEE-754</i>	44
4.3	Exemplo: Transformação da base 10 para a Norma <i>IEEE-754</i>	44
4.4	Representação binária de um número em ponto-fixa	45
4.5	Representação binária de um número no formato Q_9	45
4.6	Representação de W_1 na forma direta II ($a=0,002$, $b=0,002$ e $c=0,999$)	50
4.7	Fluxograma do Algoritmo Genético	54

4.8	Fluxograma do algoritmo proposto através da minimização da norma l_∞ do erro de conversão	55
5.1	Diagrama em blocos do Controlador por realimentação de saída	62
5.2	Chaveador Eletrônico em Ponte meio H	63
5.3	Princípio de funcionamento do chaveador eletrônico	64
5.4	Carga indutiva	64
5.5	Diagrama em blocos de um estágio de potência genérico	66
5.6	Estágio de potência com comparador por histerese	66
5.7	Formas de onda de um controlador que utiliza comparador por histerese	68
5.8	Foto do sistema completo de levitação magnética desenvolvido	69
5.9	Aparato mecânico desenvolvido	70
5.10	Detalhe do aparato mecânico para ajuste da altura inicial do rotor . . .	71
5.11	Detalhe do aparato mecânico com sensor óptico no interior do atuador magnético	72
5.12	Sensor <i>hall</i> alojado junto ao atuador magnético	73
5.13	Detalhe do aparato mecânico com sensor <i>hall</i> no interior do atuador magnético	73
5.14	Identificação do sistema	73
6.1	Resposta do sistema à perturbação degrau	75
6.2	Resposta do sistema à perturbação degrau na referência	76
6.3	Resposta do sistema à perturbação senoidal	77
6.4	Resposta do sistema à referência senoidal	78
6.5	Resultados de Simulação para diferentes <i>gaps</i>	79
6.6	Resultado experimental para 8 mm de <i>gap</i> inicial	80

6.7	Resultado experimental para 7 mm de <i>gap</i> inicial	80
6.8	Resultados de Simulação de performance e robustez	81

Lista de Tabelas

3.1	Características do Protótipo	34
4.1	Número binário representado no formato Q_{15}	46
4.2	Número binário representado no formato Q_i	59
4.3	Formato Q_i dos Coeficientes definidos pelo projetista do <i>firmware</i> . .	60
4.4	Comparação do método proposto com outros métodos	60
4.5	Conversão de MATLAB para código C-ANSI	60

Lista de símbolos

$\sigma(\cdot)$	Raio espectral	12
$\tilde{x}$	Estados Estimados	40
$F(t)$	Força Magnética	31
G	Injeção da saída	40
g	Aceleração da gravidade	31
$G(s)$	Função de Transferência para o modelo linearizado da planta	12
$G_{ap}(s)$	Função de Transferência para o modelo linearizado da planta aumentada	12
H	Função Hamiltoniana	14
H_*	Hamiltoniana para w_* e u_*	14
i_0	Corrente no ponto de equilíbrio	33
k	Constante do mancal magnético	32
$K(s)$	Função de Transferência do controlador linear	12
k_{pot}	Ganho do estágio de potência	33
l_1	Norma 1	42
l_∞	Norma ∞	42
m	Massa do Rotor	31

O_j	Operando matemático	53
Q_i	Formato Q_i para representação em ponto-fixo	45
$R(s)$	Função Sensibilidade Complementar	12
$s(\cdot)$	Taxa de Suprimento	14
$S(s)$	Função Sensibilidade	12
$T(s)$	Função Sensibilidade Complementar	12
u_*	Controle que minimiza a Hamiltoniana	14
$V(x)$	Função Armazenamento	14
$W_i(s)$	Funções de ponderação	12
w_*	Perturbação que maximiza a Hamiltoniana	14
x_0	Posição no ponto de equilíbrio	33
P	Solução da EAR do estado	14
Q	Solução da EAR da saída	14
w	Variáveis exógenas	14
x	Variável de estado	14
y	Variável de saída	14
z	Variável penalização	14

Siglas e abreviações

DSP	<i>Digital Signal Processing</i>	58
EHJI	Equação de Hamilton-Jacobi-Isaacs	16
FPGA	<i>Field Programmable Gate Array</i>	58
FWL	<i>Fractional Word Length</i>	58
IHJI	Inequação de Hamilton-Jacobi-Isaacs	16
IWL	<i>Integer WordLength</i>	58
RK-4	<i>Runge-Kutta</i> de quarta ordem	62
SISO	<i>SingleInput – SingleOutput</i>	58
SPI	<i>Serial Peripheral Interface</i>	63
WL	<i>WordLength</i>	58

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivo	1
1.2	Motivação e Estado da arte	1
1.3	Contribuições do trabalho	5
1.4	Estrutura do texto	6
2	Teoria do controle H_∞ não-linear	8
2.1	Introdução	8
2.2	Breve introdução sobre controle H_∞ linear	9
2.3	Fundamentos do controle H_∞ não-linear	12
2.3.1	Sistemas dissipativos	12
2.3.2	Controle H_∞ não-linear via realimentação da saída	14
2.3.3	Observador de estados	17
2.4	Inclusão de funções ponderação com dinâmica no projeto de controle H_∞ não-linear	18
2.5	EHJI expandida em série de <i>Taylor</i>	23
2.5.1	Realimentação da saída	26
2.5.2	Roteiro para calcular o controlador H_∞ não-linear	28

3	Projeto de controle aplicado ao sistema de levitação magnética	30
3.1	Introdução	30
3.2	Modelo do sistema de levitação magnética	31
3.3	O projeto de controle H_∞ linear para o sistema de levitação magnética	34
3.4	O projeto de controle H_∞ não-linear para o sistema de levitação magnética	36
4	Implementação de controladores em DSPs de ponto-fixa	42
4.1	Introdução	42
4.2	Representação numérica em ponto-flutuante	43
4.3	Representação numérica em ponto-fixa	44
4.4	Transformação de algoritmo em ponto-flutuante para algoritmo em ponto- fixa	48
4.4.1	Determinação do comprimento da palavra em um DSP de ponto- fixa, através de um método conhecido na literatura	48
4.4.2	Determinação do comprimento da palavra em DSP de ponto-fixa através de minimização da norma l_∞	51
4.5	Implementação do algoritmo em ponto-fixa	57
5	Implementação do sistema de controle	61
5.1	Introdução	61
5.2	O controlador	61
5.3	O estágio de potência	63
5.4	Descrição do protótipo desenvolvido	67
5.5	O Sensor de posição	70
6	Resultados de simulação e experimentais	74

6.1	Introdução	74
6.2	PARTE I - Controlador H_∞ linear	75
6.2.1	Resposta a sinais do tipo degrau	75
6.2.2	Resposta a sinais senoidais	76
6.3	PARTE II - Controlador H_∞ não-Linear	77
7	Conclusão	82

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objetivo

O objetivo desta tese é o estudo dos aspectos teóricos e práticos relativos à aplicação da teoria de controle H_∞ não-linear a um sistema de levitação magnética, que utiliza um processador de ponto-fixo para a implementação do *firmware* do controlador embarcado.

1.2 Motivação e Estado da arte

Para melhor situar o leitor no que se refere aos fatores motivadores desta tese, bem como ao estado da arte de sistemas de levitação magnética, esta seção foi dividida em três tópicos, separadamente comentados. Os tópicos são: Sistemas de Levitação Magnética, Controle H_∞ não-linear e Implementação de algoritmo de controle em processadores de ponto-fixo.

Sistemas de Levitação magnética: Sistemas de levitação magnética são largamente usados e estudados, principalmente porque os atuadores magnéticos apresentam algumas vantagens sobre outros tipos de atuadores, tal como ausência de contato na atuação, evitando assim desgastes mecânicos. Desta forma, a levitação magnética é

uma tecnologia atrativa para diversas áreas, tais como trens de alta velocidade [1, 2], rotores [3], mancais magnéticos [4, 5] e sistemas de isolamento de vibração [6], dentre outras aplicações. Esses sistemas são inerentemente não-lineares e instáveis em malha aberta e têm motivado o desenvolvimento de controladores de posição de alto desempenho ao longo das últimas décadas.

Normalmente, o projeto de controle baseia-se em modelo linearizado em torno de um *gap* nominal [2, 7, 8]. Técnicas baseadas em modo-deslizantes [9, 10], controle adaptativo [8] e controle robusto [11, 2] são algumas das mais utilizadas em sistemas de levitação magnética. Ao longo desta década, técnicas de controle robusto não-linear também têm sido investigadas, conforme descrito nos trabalhos [12, 13]. O sobressinal durante a fase inicial de suspensão é considerado um problema crítico para sistemas magneticamente levitados e, por esta razão, recentemente, alguns trabalhos abordaram o assunto e procuraram resolver este problema crítico por meio do chaveamento de controladores ou de alguma técnica linear de otimização do controlador ao longo da excursão do *gap* inicial para o *gap* nominal, conforme descrito nos trabalhos [7, 14, 15]. No entanto, de fato, alguns dos trabalhos apresentados na literatura estão focados em modelos de plantas obtidas por meio de linearização do sistema em torno de um *gap* nominal de trabalho e não consideram o problema da instabilidade durante a fase inicial de suspensão, especialmente na presença de *gaps* iniciais grandes. De qualquer modo, sob o ponto de vista prático, operar com *gaps* iniciais grandes é necessário e pode causar instabilidade no sistema durante a fase de levitação para o *gap* nominal. Nesta tese, abordar-se-á o problema de *gaps* iniciais grandes e apresentar-se-ão resultados experimentais significativos.

Controle H_∞ não-linear: O desenvolvimento de uma análise sistemática do equivalente não-linear do problema de controle H_∞ foi iniciado por [16, 17, 18]. Apesar de a norma H_∞ ser definida como uma norma para matrizes de transferência, quando transformada para o domínio do tempo torna-se a norma L_2 induzida. Conforme mostrado em [19], o problema de controle H_∞ não-linear, para o caso de realimentação dos estados, pode ser resolvido por meio da solução da Equação de Hamilton-Jacobi-Isaacs

(EHJI), que nada mais é que uma versão não-linear da Equação Algébrica de Ricatti (EAR) para o caso do H_∞ linear. Os trabalhos de [20, 21, 22] apresentam a solução para o problema de controle H_∞ não-linear com realimentação de saída.

A realimentação de saída de controladores H_∞ tem estrutura separada e condições necessárias e suficientes para que o problema de controle H_∞ não-linear tenha solução por meio de duas EHJI's, uma associada ao projeto de realimentação de estados e a outra relacionada à matriz de injeção de saída. Embora a formulação da teoria de controle H_∞ não-linear esteja bem estabelecida, a solução da EHJI ainda permanece um gargalo para aplicações dessa técnica de controle em sistemas práticos, conforme abordado nos trabalhos de [23, 24, 25, 26], uma vez que a solução analítica para o caso geral é muito difícil de ser obtida para sistemas não-lineares. Desta forma, durante os últimos anos, vários métodos numéricos têm sido propostos para resolvê-la, conforme pode ser encontrado nos trabalhos [27, 24, 28].

O primeiro e um dos métodos mais utilizados para obtenção de uma aproximação da EHJI é por meio da expansão em série de *Taylor*. O trabalho [19] foi o primeiro a propor a expansão em série de *Taylor* para a solução da EHJI. Com isso, diversos outros trabalhos puderam ser realizados com aplicações práticas da Teoria de Controle H_∞ não-linear, como descrito em [29] para sistemas usados em aviões de combate, [30] em manipuladores robóticos e [12] em um sistema de levitação magnética, dentre outros. Nesta tese, assim como realizado por [12], a solução da EHJI foi obtida por expansão em série de *Taylor* para um sistema de levitação magnética para *gaps* grandes. Uma das contribuições desta tese é o projeto de um controlador H_∞ não-linear por realimentação de saída, que inclua, em sua formulação matemática, funções de ponderação com dinâmica. O uso de funções de ponderação com dinâmica em projeto de controle H_∞ não-linear não é explorado em trabalhos similares, os quais exploram apenas funções de ponderação estáticas [12]. Desta forma, contribuições no que se refere à melhoria da robustez deste sistema foram obtidas por meio da inserção de funções dinâmicas de ponderação, conforme será descrito no transcurso desta tese.

Implementação de algoritmo de controle em processadores de ponto-fixos: Proces-

samento digital de sinais em ponto-fixo é usado em várias aplicações devido ao baixo custo, alta velocidade e baixo consumo. Entretanto, muitos algoritmos de controle são inicialmente implementados em ferramentas computacionais usando ponto-flutuante (*Matlab/Simulink*, *Maple*, etc...). Por outro lado, quando um processador de ponto-fixo é usado, o projetista do *firmware* esbarra em alguns problemas de implementação devido ao fato de o processador não manter automaticamente a posição física da vírgula. Assim, durante a implementação do *firmware* em ponto-fixo, o projetista deverá desenvolver um modo de gerenciar todas as operações matemáticas que usam vírgula de forma a evitar erros nos cálculos. Como uma consequência direta, durante a fase de implementação do controlador em processadores de ponto-fixo, o projetista do *firmware* tem um duro caminho de adaptação de um controlador que inicialmente foi concebido em ponto-flutuante para um controlador de ponto-fixo e de menor resolução.

Nos últimos anos, várias técnicas de otimização foram propostas para transformar algoritmos de controle em ponto-flutuante para algoritmos de controle em ponto-fixo, sem, com isso, degradar a performance do controlador [31, 32, 33, 34, 35]. Dependendo da aplicação, cada uma dessas técnicas apresenta vantagens e desvantagens.

Alguns trabalhos utilizam a técnica de escalonamento dinâmico, que é capaz de prover uma forma de transformação de algoritmo de ponto-flutuante para ponto-fixo. No trabalho [36], mostra-se que a entrada para o processo de interpolação é definida pelo *range* dinâmico de um conjunto limitado de sinais e de seus valores máximos. Uma metodologia de otimização híbrida é apresentada em [34] para a determinação de coeficientes em ponto-fixo para filtros lineares. O método proposto por [32] combina as propriedades das normas l_1 e l_∞ aplicadas em sistemas de controle, de modo a customizar os formatos dos registradores em ponto-fixo a serem implementados em FPGA. Para aplicar este método, é necessário considerar um sistema linear e invariante no tempo.

No que tange à implementação do *firmware* do controlador, o ponto central defendido nesta tese é a proposta de uma técnica para transformar um algoritmo de controle de ponto-flutuante para ponto-fixo, por meio da minimização da norma l_∞

devido ao erro de conversão de ponto-flutuante para ponto-fixo. Assim, a definição do melhor formato Q_i para cada sinal é avaliado para um DSP de ponto-fixo, permitindo que um controlador em tempo real possa ser rapidamente implementado.

1.3 Contribuições do trabalho

A primeira contribuição desta tese foi a inclusão de funções de ponderação com dinâmica no projeto do controlador H_∞ não-linear. Essas funções de ponderação com dinâmica são definidas utilizando-se a teoria clássica de projeto para controladores H_∞ lineares. No decorrer desta tese mostrar-se que, se o problema de controle H_∞ linear, que inclui funções de ponderação durante o projeto, é solúvel, o problema de controle H_∞ não-linear, que também incluirá as mesmas funções de ponderação, também é solúvel.

A segunda contribuição desta tese é a apresentação de um procedimento prático para transformação de um algoritmo em ponto-flutuante para ponto-fixo, utilizando-se a minimização de norma l_∞ , por meio de otimização, que utiliza algoritmo genético. Como será observado no transcurso dos resultados aqui apresentados, a principal vantagem na utilização deste procedimento de minimização da norma l_∞ , em relação a outros métodos, é o fato de poder ser aplicado para o caso de controladores não-lineares.

Também serão apresentados os resultados experimentais, obtidos por meio de um protótipo desenvolvido especificamente durante a tese, que mostram que a técnica aqui desenvolvida para o controlador H_∞ não-linear foi mais eficiente se comparada com o controlador H_∞ linear, principalmente quando o *gap* inicial (ou de partida) está muito longe do *gap* nominal de operação.

Os principais resultados sobre os estudos desenvolvidos neste trabalho já foram publicados e divulgados à comunidade científica nacional e internacional, [28, 37, 38, 39, 40]. O trabalho [41] está em fase final de revisão.

1.4 Estrutura do texto

Esta tese foi organizada da seguinte forma:

No capítulo 2, apresentam-se os conceitos teóricos oriundos da Teoria de Controle H_∞ não-linear. Nesse capítulo, demonstra-se que as funções de ponderação com dinâmica definidas no projeto de controle H_∞ linear podem ser usadas no projeto de controle H_∞ não-linear, sendo esta uma das contribuições desta tese.

No capítulo 3, mostra-se, inicialmente, o modelo matemático do sistema de levitação magnética e as suas principais características de projeto; posteriormente, os projetos de controle, utilizando a teoria H_∞ linear e a teoria de H_∞ não-linear, já com a inserção das funções de ponderação com dinâmica, são apresentados para o caso do sistema de levitação magnética.

No capítulo 4, apresentam-se algumas formas de representação numérica em registradores de ponto-fixe e ponto-flutuante, bem como os conceitos envolvendo os problemas numéricos de operações matemáticas para processadores de resolução finita; o procedimento prático para transformação de um algoritmo em ponto-flutuante para ponto-fixe, utilizando-se a minimização de norma l_∞ , que é considerada outra contribuição desta tese; e os exemplos de transformação de algoritmos de ponto-flutuante para ponto-fixe, envolvendo técnicas já apresentadas na literatura, que foram comparadas com a técnica aqui proposta de modo a realizar a sua validação.

O capítulo 5 apresenta alguns aspectos práticos para implementação do *hardware* desenvolvido nesta tese, principalmente no que se refere à implementação do *firmware* embarcado em um DSP de ponto-fixe e o estágio de potência que foi projetado de modo a simplificar o modelo matemático da planta, pois tende a manter uma relação linear entre a tensão de saída do controlador e a corrente que atravessa a bobina do atuador magnético.

No capítulo 6, são apresentados os principais resultados experimentais obtidos nesta tese e também os resultados de simulação.

Finalmente, no capítulo 7, apresentam-se as conclusões desta tese e as sugestões de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Teoria do controle H_∞ não-linear

2.1 Introdução

Neste capítulo, apresentam-se os conceitos teóricos oriundos da Teoria de Controle H_∞ não-linear, que foi inicialmente proposta por [18, 19] para o caso de realimentação de estados e por [20] e [22] para realimentação da saída.

Como já comentado no capítulo anterior, uma das contribuições desta tese é inserir funções de ponderação com dinâmica no projeto de controle H_∞ não-linear. Deste modo, neste capítulo, serão apresentadas as formulações matemáticas que demonstram que, se o problema de controle H_∞ linear, que inclui funções de ponderação durante o projeto, é solúvel, o problema de controle H_∞ não-linear, que também incluirá as mesmas funções de ponderação do mesmo modo, é solúvel.

A teoria de controle H_∞ não-linear está baseada na teoria da dissipatividade [42] para sistemas não-lineares e na teoria de minimização da norma H_∞ para sistemas lineares. Nas décadas de 1980 e 1990, diversos artigos e trabalhos científicos foram desenvolvidos e implementados em sistemas não-lineares, os quais antes eram abordados apenas com técnicas lineares [43, 44]. Desta forma, na tentativa de elucidar o leitor, antes de iniciar a teoria de controle H_∞ não-linear, será feita uma breve explanação sobre a teoria de controle H_∞ linear.

Figura 2.1: Diagrama em blocos de um sistema SISO em malha fechada

2.2 Breve introdução sobre controle H_∞ linear

Em trabalhos anteriores de projeto de controle, o efeito das perturbações na entrada de um sistema em malha fechada não era especificamente usado durante a síntese do controlador. A teoria de controle H_∞ superou essas limitações pelo uso de uma planta aumentada, conforme será mostrado nesta seção.

Considerando inicialmente o diagrama em blocos, figura 2.1, que ilustra um sistema SISO (*Single Input Single Output*) com realimentação negativa, no qual foram introduzidos os sinais: distúrbios na saída - representado por $d(s)$ e ruídos nos sensores - representados por $n(s)$. A planta linearizada em torno de um ponto de operação e o controlador linear são representados, respectivamente, por $G(s)$ e $K(s)$. Neste diagrama, $r \in \mathbb{R}$ é o sinal de referência, $e \in \mathbb{R}$ é o sinal de erro, $u \in \mathbb{R}$ é o sinal do controlador e $y \in \mathbb{R}$ representa a saída da planta.

A partir desse diagrama de blocos, figura 2.1, podem ser obtidas as seguintes funções de transferência para os sinais de erro ($e(s)$), de controle ($u(s)$) e de saída ($y(s)$).

$$S(s) = \frac{e(s)}{r(s)} = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} \quad (2.1)$$

$$R(s) = \frac{u(s)}{r(s)} = \frac{K(s)}{1 + G(s)K(s)}, \quad (2.2)$$

$$T(s) = \frac{-y(s)}{n(s)} = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} \quad (2.3)$$

As funções de transferência $S(s)$ e $T(s)$ são conhecidas como funções sensibilidade e sensibilidade complementar, respectivamente. Essas funções serão utilizadas para a especificação de desempenho e robustez de estabilidade e rejeição de ruídos para o sistema em malha fechada, que possibilitarão a construção das correspondentes barreiras. A função $R(s)$ está associada aos limites nos esforços de controle.

Das equações (2.1) e (2.3), tem-se que:

$$S(s) + T(s) = 1 \quad (2.4)$$

Além disso, baseando-se na figura 2.1 e nas equações (2.1), (2.2) e (2.3) a saída $y(s)$ pode ser expressa como:

$$y(s) = S(s).d(s) + T(s).r(s) - T(s).n(s) \quad (2.5)$$

Considerando apenas a relação $r(s)$ para $y(s)$, a equação (2.5) pode ser expressa com sendo $y(s) = T(s).r(s) \Rightarrow y(s) = \frac{G(s).K(s)}{1+G(s).k(s)}r(s)$. Deste modo, para que a saída $y(s)$ siga a referência $r(s)$, é necessário que $|G(s)K(s)| \gg 1$, o que garante que $y(s) \approx r(s)$, ou seja, $T(s) \approx 1$.

Analogamente, porém, agora considerando apenas a relação $d(s)$ para $y(s)$, a equação (2.5) pode ser expressa como sendo $y(s) = S(s).d(s)$. Sendo assim, para que a saída $y(s)$ rejeite a perturbação $d(s)$, é necessário que $|G(s)K(s)| \gg 1$, o que garante que $y(s) \approx 0$. Uma vez que $S(s) \approx 0$, da equação (2.4) é possível constatar que $T(s) \approx 1$.

Agora, considerando a relação $n(s)$ para $y(s)$, a equação (2.5) pode ser expressa como sendo $y(s) = -T(s).n(s) \Rightarrow y(s) = -\frac{G(s).K(s)}{1+G(s).k(s)}n(s)$. Para que a saída $y(s)$ rejeite os sinais de ruídos nos sensores $n(s)$, é necessário que $|G(s)K(s)| \ll 1$, ou seja, $T(s) \approx 0$.

Figura 2.2: Barreiras de robustez de estabilidade e desempenho

Portanto, claramente, existe um conflito entre os requisitos de acompanhamento do sinal de referência e rejeição de perturbação com a rejeição do ruído de sensores. Entretanto, de um modo geral, em sistemas físicos reais, os sinais de referência e os distúrbios ocorrem em frequências mais baixas, enquanto que os ruídos dos sensores ocorrem em frequências mais altas. Desta maneira, para contornar esse problema de conflito de requisitos de projeto, a função sensibilidade complementar deve ter valores baixos em altas frequências, enquanto que a função sensibilidade deve ter valores baixos em baixas frequências. Sendo assim, é possível construir as barreiras denominadas de barreira de desempenho e robustez de estabilidade que moldarão, respectivamente, as funções $S^{-1}(s)$ e $T(s)$, conforme ilustrado na figura 2.2, sendo que as mesmas servirão de parâmetros de projeto, conforme descrito em [43].

A metodologia de projeto H_∞ linear utilizada foi descrita por [43]. Dada a planta aumentada $G_{ap}(s)$, como na Fig. 2.3, o objetivo do projeto é encontrar um controlador estabilizante $K(s)$ tal que a norma da matriz de transferência de malha fechada seja menor do que 1, isto é,

Figura 2.3: Planta Aumentada $G_{ap}(s)$

$$\|T_{y_1 u_1}(s)\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} W_1(s)S(s) \\ W_2(s)R(s) \\ W_3(s)T(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1, \quad (2.6)$$

sendo as funções $S(s)$ (sensibilidade), $R(s)$ e $T(s)$ (sensibilidade complementar) definidas nas equações (2.1), (2.2), (2.3) e sendo W_i funções de ponderação. As especificações dessas funções de ponderação W_i variam de acordo com a necessidade de projeto e, portanto, não existe uma regra geral para isso. No caso específico do projeto para o sistema de levitação magnética, as especificações necessárias para a determinação das W_i podem ser encontradas na seção 3.3.

2.3 Fundamentos do controle H_∞ não-linear

2.3.1 Sistemas dissipativos

De um modo geral, os teoremas que balizam a teoria de controle H_∞ não-linear são baseados no efeito de balanceamento de energias de entradas exógenas, $w(t)$, com penalizações nas quais as mesmas são atenuadas por γ e de forma a garantir que essa energia seja menor que a energia de um vetor de penalização $z(t)$, conforme descrito

abaixo:

$$\gamma \leq \frac{\|z(t)\|^2}{\|w(t)\|^2}. \quad (2.7)$$

Ou seja, a idéia é mostrar que a energia do vetor de penalização, $z(t)$, é limitada e menor do que a energia dos distúrbios de entrada $w(t)$. Devido a essa noção de energia limitada, o conceito de dissipatividade e função armazenamento (*storage function*) são empregados [42].

Nestes termos, considerando-se que $w(t)$ e $z(t)$ fisicamente representam energia, é possível dizer que a idéia que norteia o conceito de dissipatividade para um sistema é:

$$energia_{final} - energia_{inicial} + energia_{dissipada} = energia_{entrada}$$

Portanto, a idéia por trás do conceito de dissipatividade é manter a energia de do sinal de saída não superior a um limite finito.

Considerando um sistema não-linear descrito como sendo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) = f(x) + g_1(x).w + g_2(x).u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle, $w \in \mathbb{R}^r$ são entradas exógenas e $y \in \mathbb{R}^p$ é a variável medida, o sistema (2.8) é dito ser *localmente dissipativo* se existe uma função suave $V(x)$, denominada *função armazenamento*, semidefinida positiva, tal que garanta a inequação:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) + s(u, h(x)) \leq 0, \quad (2.9)$$

para todo (x, u) em uma vizinhança definida em $(0, 0)$. O termo $s(\cdot)$ é denominado como *taxa de suprimento* e é definido como sendo [45]:

$$s(w, y) = \gamma^2 \|w\|^2 - \|y\|^2, \quad (2.10)$$

De acordo com [19], a inequação definida em (2.9) pode ser redefinida como sendo:

$$0 \leq V(x(t_1)) - V(x(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} (s(w(t), y(t)) dt, \quad (2.11)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^q$ e $z \in \mathbb{R}^l$.

Substituindo a (2.10) em (2.11), tem-se:

$$0 \leq V(x(t_1)) - V(x(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} (\gamma^2 \|w\|^2 - \|y\|^2) dt, \quad (2.12)$$

com $t_1 > t_0$.

A equação (2.11) pode ser escrita na forma infinitesimal como sendo:

$$\frac{\partial V^T}{\partial x} (f + g_1 w + g_2 u) + h^T h - \gamma^2 \|w\|^2 \leq 0$$

Sendo assim, é possível definir uma função Hamiltoniana como sendo:

$$H(x, p^T, w, u) = p^T (f + g_1 w + g_2 u) + h^T h - \gamma^2 \|w\|^2, \quad (2.13)$$

que pode ser minimizada pela escolha de γ .

De uma forma geral, o problema de minimização dessa Hamiltoniana, para uma determinada planta, representa a essência de um projeto de um controlador H_∞ não-linear.

2.3.2 Controle H_∞ não-linear via realimentação da saída

Considere o seguinte sistema não-linear na sua forma afim [46]:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u, \\
z &= h_1(x) + k_{11}(x)w + k_{12}(x)u, \\
y &= h_2(x) + k_{21}(x)w,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle, $w \in \mathbb{R}^r$ é a entrada exógena a qual inclui perturbações e/ou referências, $z \in \mathbb{R}^s$ é a variável penalizada e $y \in \mathbb{R}^p$ é a variável medida, cuja representação em diagrama de blocos está apresentada na figura 2.4.

Figura 2.4: Diagrama de blocos de um sistema de controle

Os mapeamentos $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$, $k_{11}(x)$, $k_{12}(x)$ e $k_{21}(x)$ são mapeamentos suaves (isto é, mapeamentos de classe $\mathbb{C}^k$ para algum k suficientemente grande) definidos em uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^n$. Também será assumido que $f(0) = 0$, $h_1(0) = 0$ e $h_2(0) = 0$.

A ação de controle do sistema (2.14) é oriunda do controlador, K , que processará a variável medida y e gerará uma entrada de controle u , através de:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= \eta(\xi, y), \\
u &= \theta(\xi),
\end{aligned}$$

sendo ξ definido e uma vizinhança Ξ com centro na origem em $\mathbb{R}^v$ e $\eta : \Xi \times \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^v$, $\theta : \Xi \mapsto \mathbb{R}^m$ são funções $\mathbb{C}^k$ ($\forall k \geq 1$), satisfazendo $\eta(0, 0) = 0$ e $\theta(0) = 0$.

O objetivo de projeto para um controlador H_∞ não-linear é achar uma classe de

controladores admissíveis com atenuação local das entradas exógenas que satisfaçam a inequação de ganho- L_2 , [19],

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt, \quad \gamma \geq 1. \quad (2.15)$$

O ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico é estável se para $x(t) = 0|_{t=0}$ há uma função armazenamento suave e não-negativa $V(x(t))$ que satisfaça a inequação abaixo representada. Essa inequação é conhecida com Inequação de Hamilton-Jacobi-Isaacs (IHJI) [19].

$$\begin{aligned} V_x^T(f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u) + L(x, w, u) &\leq 0 \\ L(x, w, u) &= h_1^T h_1 + \|u\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde, $V_x = \partial V(x(t))/\partial x(t)$. O lado esquerdo da IHJI é a função Hamiltoniana $H(x, V(x), w, u)$, definida na equação (2.13). O procedimento de projeto objetiva definir $u(x)$ que satisfaça a IHJI. Para isso, as derivações analíticas são focadas na determinação de um ponto de sela na função Hamiltoniana de modo a satisfazer

$$H(x, V_x, w, u_*) \leq H(x, V_x, w_*, u_*) \leq H(x, V_x, w_*, u), \quad (2.17)$$

onde w_* é o pior distúrbio de entrada que maximiza a Hamiltoniana e u_* é a entrada de controle que minimiza a Hamiltoniana. Com $k = k_{12}^T k_{12} = I$ e $h_1^T k_{12} = 0$, w_* e u_* podem ser definidos como [19, 20]

$$w_* = \frac{1}{2\gamma^2} g_1^T V_x^T, \quad u_* = -\frac{1}{2} g_2^T V_x^T. \quad (2.18)$$

Para determinar a função armazenamento $V(x(t))$ que satisfaz a condição de ponto de sela, as equações (2.18) são inseridas na equação (2.16). Assim a seguinte Equação de Hamilton-Jacob-Isaac (EHJI) pode ser redefinida como sendo

$$\begin{aligned}
H_*(x, V_x) = & V_x^T f + h_1^T h_1 + \frac{1}{4\gamma^2} V_x g_1 g_1^T V_x^T \\
& - \frac{1}{4} V_x g_2 g_2^T V_x^T.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Devido à dificuldade em se definir uma solução analítica para a equação (2.19), esta é normalmente convertida em uma soma infinita por expansão em série de *Taylor*.

2.3.3 Observador de estados

Para o sistema definido em (2.14), o seguinte teorema apresenta a solução do problema de realimentação da saída para um sistema afim.

Teorema 2.1 ([20]). Para o sistema dado por (2.14), suponha que

H1) O par (f, h_1) seja localmente detectável

H2) Exista uma função suave positiva definida $V(x)$ localmente definida em uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^n$ que satisfaz a seguinte EHJI

$$V_x f(x) + h_1^T(x) h_1(x) + \gamma^2 \alpha_1^T(x) \alpha_1 - \alpha_2^T(x) \alpha_2 = 0 \tag{2.20}$$

onde

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{2\gamma^2} g_1^T(x) V_x^T(x)$$

$$\alpha_2(x) = -\frac{1}{2} g_2^T(x) V_x^T(x)$$

H3) Exista uma matriz G , $n \times p$, tal que o ponto de equilíbrio $\xi = 0$ do sistema

$$\dot{\xi} = f(\xi) + g_1(\xi) \alpha_1(\xi) - G h_2(\xi)$$

é localmente assintoticamente estável

H4) Exista uma função suave semidefinida positiva $W(x, \xi)$, localmente definida em uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e tal que $W(0, \xi) > 0$ para todo $\xi \neq 0$ que resolve a EHJI

$$\begin{pmatrix} W_x & W_\xi \end{pmatrix} f_e(x, \xi) + h_e^T(x, \xi) h_e(x, \xi) + \gamma^2 \Phi^T(x, \xi) \Phi(x, \xi) = 0 \quad (2.21)$$

onde

$$\begin{aligned} f_e(x, \xi) &= \begin{pmatrix} f(x) + g_1(x)\alpha_1(x) + g_2(x)\alpha_2(x) \\ f(\xi) + g_1(\xi)\alpha_1(\xi) + g_2(\xi)\alpha_2(\xi) + G(h_2(x) - h_2(\xi)) \end{pmatrix} \\ h_e(x, \xi) &= \alpha_2(\xi) - \alpha_2(x) \\ \Phi(x, \xi) &= \frac{1}{2\gamma^2} (W_x g_1(x) + W_\xi G k_{21}(x))^T \end{aligned}$$

então, o problema de atenuação de perturbação com estabilidade interna é resolvido pela realimentação da saída

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= f(\xi) + g_1(\xi)\alpha_1(\xi) + g_2(\xi)\alpha_2(\xi) + G(y - h_2(\xi)) \\ u &= \alpha_2(\xi). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Usualmente, a matriz de injeção G gera um observador de estados com estrutura não-linear. Uma solução aproximada pode ser obtida através da expansão em série de *Taylor*. Deste modo, a solução de primeira-ordem é dada por [22],

$$(Q - P)G = (K_{21}K_{21}^T)^{-1}(K_{21}G_1^T Q + \gamma^2 H_2^T), \quad (2.23)$$

onde P define a aproximação de primeira-ordem da função armazenamento, $V(x) = x^T P x$, para realimentação de estados; Q define a função $W(\bar{x}) = \bar{x}^T Q \bar{x}$ correspondente ao problema de realimentação da saída, onde $\bar{x}$ corresponde aos estados estimados. As matrizes G_1 , H_2 e K_{21} são associados ao sistema (2.14) linearizado.

2.4 Inclusão de funções ponderação com dinâmica no projeto de controle H_∞ não-linear

Conforme já mostrado na seção 2.3.2, as variáveis de penalização em $z(t)$ incluem todas as saídas físicas do sistema. Na teoria de controle H_∞ linear, essas variáveis de

penalização são definidas pelas funções de ponderação W_i , conforme já observado na seção 2.2. Desta forma, para que seja possível especificar as barreiras de robustez de estabilidade e de desempenho adequadamente, figura 2.2, as funções de ponderação W_i normalmente possuem dinâmica, ou seja, são funções cujo ganho varia com a frequência. No caso de projetos de controladores H_∞ não-lineares, apenas as funções de ponderação estáticas (sem dinâmica) têm sido estudadas [12, 20]. Essa inclusão das funções de ponderação com dinâmica em projetos de controladores H_∞ não-lineares é uma das contribuições dessa tese.

Para demonstrar que a inserção dessas funções de ponderação com dinâmica na teoria de controle H_∞ não-linear é possível, será necessário enunciar dois teoremas, como segue.

Teorema 2.2 ([19]). Considere o sistema (2.14) linearizado

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B_1\bar{w} + B_2\bar{u} \\ \bar{z} &= \begin{bmatrix} C_1\bar{x} \\ \bar{u} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

onde $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{z} \in \mathbb{R}^s$, $A = \partial f(x)/\partial x|_{x=0}$, $B_1 = g_1(0)$, $B_2 = g_2(0)$ e $C_1 = \partial h_1(x)/\partial x|_{x=0}$.

As seguintes afirmações são equivalentes:

- i) Existe uma realimentação linear de estados

$$\bar{u} = L\bar{x}$$

tal que o sistema em malha fechada é assintoticamente estável e tem ganho $L_2 < \gamma$ (isto é, o problema de controle H_∞ linear via realimentação de estados tem solução).

- ii) Existe uma solução simétrica $X = X^T \geq 0$ para a Equação Algébrica de Riccati (EAR)

$$A^T X + X A + X \left(\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right) X + C_1^T C_1 = 0$$

satisfazendo a condição

$$\sigma \left(A - B_2 B_2^T X + \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T X \right) X \subset \mathbb{C}^-$$

sendo que $\sigma(\cdot)$ representa o raio espectral e $\mathbb{C}^-$ é o semiplano esquerdo do plano complexo.

iii) Existe uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^m$ e uma realimentação não-linear de estados

$$u = \alpha(x), \quad \alpha(0) = 0$$

definida em W , tal que $A + B_2 L$, com $L = \partial \alpha(x) / \partial x|_{x=0}$ é assintoticamente estável e o sistema (2.14) em malha fechada tem, localmente em W , ganho $L_2 < \gamma$ (isto é, o problema de controle H_∞ não-linear via realimentação de estados é solúvel em W).

Teorema 2.3 ([20]). Suponha que o sistema (2.14) seja linearizado e, sendo assim, será dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \tag{2.24}$$

e assumamos as seguintes hipóteses

L1) O par (A, B_1) é estabilizável.

L2) O par A, C_1 é detectável.

L3) Existe uma solução simétrica definida positiva X da EAR

$$A^T X + X A + C_1^T C_1 - X B_2 B_2^T X + \frac{1}{\gamma^2} X B_1 B_1^T X = 0. \tag{2.25}$$

L4) Existe uma solução simétrica definida positiva Y da EAR

$$YA^T + AY + B_1B_1^T - YC_2^TC_2Y + \frac{1}{\gamma^2}YC_1^TC_1Y = 0. \quad (2.26)$$

L5) $\sigma(XY) < \gamma^2$.

(isto é, o problema de controle H_∞ linear via realimentação da saída tem solução). Então as hipóteses H1)–H4) do teorema 2.1 são válidas (isto é, o problema de controle H_∞ não-linear via realimentação da saída é solúvel), com

$$\begin{aligned} G &= ZC_2^T \\ V(x) &= x^TXx \\ W(x, \xi) &= \gamma^2(x - \xi)^TZ^{-1}(x - \xi) \end{aligned}$$

onde

$$Z = Y \left(I - \frac{1}{\gamma^2}XY \right)^{-1}.$$

Depois de enunciar esses dois teoremas, considere um sistema não-linear modelado na sua forma afim, de acordo com:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= f_p(x_p) + g_{p1}(x_p)w + g_{p2}(x_p)u \\ y &= h_{p2}(x_p) + k_{p21}(x_p)w. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Considere também as funções de ponderação com dinâmica $W_1(s)$ e $W_3(s)$, conforme diagrama em blocos da figura 2.5, cuja representação no espaço de estados é definida como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{w1} &= A_{w1}x_{w1} + B_{w1}(h_{p2}(x_p) + k_{p21}(x_p)w), \\ z_1 &= C_{w1}x_{w1}, \\ \dot{x}_{w3} &= A_{w3}x_{w3} + B_{w3}h_{p2}(x_p), \\ z_3 &= C_{w3}x_{w3} + D_{w3}h_{p2}(x_p), \end{aligned} \quad (2.28)$$

Figura 2.5: Diagrama de blocos de um sistema de controle com funções de ponderação com dinâmica

Para simplificação, a função de ponderação W_2 será considerada constante.

Sendo assim,

$$z_2 = W_2 u \quad (2.29)$$

Combinando as equações (2.27), (2.28) e (2.29), o sistema pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u, \\ z &= h_1(x) + k_{11}(x)w + k_{12}(x)u, \\ y &= h_2(x) + k_{21}(x)w, \end{aligned} \quad (2.30)$$

que é idêntico ao sistema (2.14) previamente definido. As variáveis do novo sistema (2.30) são definidas como sendo,

$$x = \begin{bmatrix} x_p \\ x_{w1} \\ x_{w3} \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_p(x_p) \\ A_{w1}x_{w1} + B_{w1}h_{p21}(x_p) \\ A_{w3}x_{w3} + D_{w3}h_{p2}(x_p) \end{bmatrix}, \quad g_1(x) = \begin{bmatrix} g_{p1}(x_p) \\ B_{w1}k_{p21}(x_p) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$g_2(x) = \begin{bmatrix} g_{p2}(x_p) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_1(x) = \begin{bmatrix} C_{w1}x_{w1} \\ 0 \\ C_{w3}x_{w3} + D_{w3}h_{p2}(x_p) \end{bmatrix}, \quad k_{11}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$k_{12}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ W_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_2(x) = h_{p2}(x_p), \quad k_{21}(x) = k_{p21}(x_p).$$

Sendo assim, supondo que, para o sistema (2.27) linearizado, exista um controlador H_∞ linear e então, de acordo com os teoremas 2.2 e 2.3, existe um controlador H_∞ não-linear para o sistema (2.30), ou seja, se as EARs (2.25) e (2.26) têm solução para o sistema linearizado, então a EHJI (2.19) também têm solução em uma vizinhança de $x \in \mathbb{R}^n$.

2.5 EHJI expandida em série de *Taylor*

Conforme já comentado na seção 2.3.2, devido à dificuldade em se definir uma solução analítica para a equação de EHJI, definida em (2.19), esta equação pode ser convertida em uma equação de soma infinita por expansão em série de *Taylor*. Este método foi originalmente proposto por [47] e foi utilizado por diversos autores durante as últimas décadas [29, 48], e, recentemente, utilizado em um sistema de levitação magnética, embarcado em um DSP de ponto-flutuante [12].

Sendo assim, seguindo as linhas do artigo [12], uma expansão em série de *Taylor* em torno da origem da função armazenamento $V(x)$, de sua derivada $V_x(x)$, da lei de controle $u_*(x)$ que minimiza a Hamiltoniana e da entrada exógena $w_*(x)$ que maximiza a Hamiltoniana, podem ser definidas nas equações (2.31), (2.32), (2.33), (2.34), respectivamente, nas quais o índice superior em cada variável indica a ordem da expansão da série de *Taylor*.

$$V(x) = V^{(2)}(x) + V^{(3)}(x) + \dots + V^{(k+1)}(x) \quad (2.31)$$

$$V_x(x) = V_x^{(2)}(x) + V_x^{(3)}(x) + \dots + V_x^{(k+1)}(x) \quad (2.32)$$

$$u_*(x) = u_*^{(1)}(x) + u_*^{(2)}(x) + \dots + u_*^{(k)}(x) \quad (2.33)$$

$$w_*(x) = w_*^{(1)}(x) + w_*^{(2)}(x) + \dots + w_*^{(k)}(x) \quad (2.34)$$

Desta forma, um controlador de primeira-ordem será definido por $u_*(x) = u_*^{(1)}$, sendo obtido através da função armazenamento $V^{(2)}(x)$; um controlador de segunda-ordem será definido por $u_*(x) = u_*^{(1)} + u_*^{(2)}$ e será obtido através das funções de armazenamento $V^{(2)}(x)$ e $V^{(3)}(x)$. De maneira análoga, controladores de ordem superior podem ser obtidos usando essa mesma metodologia.

Os parâmetros do sistema não-linear definido em (2.14) também podem ser expandidos em série de *Taylor* em torno de um valor de estados iniciais x_0 , conforme definidos nas seguinte equações:

$$\begin{aligned} f(x) &= f^{(1)}(x_0) + f^{(2)}(x_0) + \dots \\ g_1(x) &= g_1^{(1)}(x_0) + g_1^{(2)}(x_0) + \dots \\ g_2(x) &= g_2^{(1)}(x_0) + g_2^{(2)}(x_0) + \dots \end{aligned} \quad (2.35)$$

Realizando as devidas expansões em série de *Taylor*, as equações (2.18) podem ser redefinidas como:

$$w_*^{(k)}(x) = \frac{1}{2\gamma^2} [g_1^{(1)T} \cdot V_x^{(k+1)T}(x) + g_1^{(2)T} \cdot V_x^{(k)T}(x) + \dots + g_1^{(1)T} \cdot V_x^{(2)T}(x)] \quad (2.36)$$

$$u_*^{(k)}(x) = -\frac{1}{2} [g_2^{(1)T} \cdot V_x^{(k+1)T}(x) + g_2^{(2)T} \cdot V_x^{(k)T}(x) + \dots + g_2^{(1)T} \cdot V_x^{(2)T}(x)] \quad (2.37)$$

Aproximação de primeira-ordem: O problema de controle H_∞ linear

Para o sistema linearizado, dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w\end{aligned}$$

a solução do problema de controle H_∞ é bem conhecida [43]. A função armazenamento é dada por

$$V^{(2)}(x) = x^T P x$$

Com esta função armazenamento, as aproximações de primeira ordem para w_* e u_* ficam

$$\begin{aligned}w_*^{(1)} &= \frac{1}{\gamma^2} B_1^T P x \\ u_*^{(1)}(x) &= -B_2^T P x\end{aligned}\tag{2.38}$$

A EHJI (2.20) se reduz à seguinte EAR

$$A^T P + P A + P \left(\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right) P + C_1^T C_1 = 0\tag{2.39}$$

Esta EAR e a lei de controle correspondem à solução do problema de controle H_∞ linear.

Aproximações de ordem superior

Com a planta linearizada, a dinâmica da planta pode ser reescrita como

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u + f(x, w, u)$$

com taxa de suprimento $s(w, z)$

$$z^T z - \gamma^2 w^T w = C_1^T C_1 + u^T u - \gamma^2 w^T w + g(x, w, u).$$

O termo de ordem k , $V^{(k)}(x)$, de $V(x)$ e termos de ordem superior de w_* e u_* podem ser determinados recursivamente por

$$V_x^{(k+1)} \left(A + \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T P - B_2 G_2^T P \right) = [-V_x(B_1 w_* + B_2 u_* - V_x f(x, w_*, u_*)) - g(x, w_*, u_*) - \gamma^2 w_*^T w_*]^{(k)}, \quad m = 3, 4, \dots$$

$$\begin{aligned} w_*^{(k)} &= \frac{1}{2\gamma^2} \left(B_1^T V_x^T + \frac{\partial f^T}{\partial w}(x, w_*, u_*) V_x^T + \frac{\partial g^T}{\partial w}(x, w_*, u_*) \right)^{(k)}, \quad k = 2, 3, \dots \\ u_*^{(k)} &= -\frac{1}{2} \left(B_2^T V_x^T + \frac{\partial f^T}{\partial u}(x, w_*, u_*) V_x^T + \frac{\partial g^T}{\partial u}(x, w_*, u_*) \right)^{(k)}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

2.5.1 Realimentação da saída

Para resolver a EHJI (2.21) referente ao problema de realimentação da saída, a função armazenamento $W(x)$ pode ser expandida em série de Taylor como

$$W(x) = \sum_{k=1}^{\infty} W^{(k)}(x) \quad (2.41)$$

Aproximação de primeira-ordem

A função armazenamento é dada por

$$W(x) = x^T Q x. \quad (2.42)$$

O problema é reduzido a resolver a EHJI (2.21) para a matriz Q desconhecida ($Q = Q^T$, $Q > 0$). O máximo da Hamiltoniana (2.13) fica

$$\hat{w}(x, W_x^T) = \frac{1}{2\gamma^2} (2B_1^T Q x - D_{21} Y(x, W_x^T)) \quad (2.43)$$

e o mínimo fica

$$y_*(x, W_x) = 2(D_{21}B_1^T Qx + \gamma^2 C_2 x). \quad (2.44)$$

Substituindo (2.42), (2.43) e (2.44) em (2.21), a EHJI pode ser reescrita como uma EAR da forma

$$A_Q Q + Q A_Q + Q B_Q Q + C_Q = 0 \quad (2.45)$$

sendo

$$\begin{aligned} A_Q &= A - B_1 D_{21}^T C_2 \\ B_Q &= \frac{1}{\gamma^2} (B_1 B_1^T - B_1 B_1^T) \\ C_Q &= C_1^T C_1 - H_* \end{aligned}$$

A injeção da saída G é dada por

$$(Q - P)G = D_{21}B_1^T Q + \gamma^2 C_2 \quad (2.46)$$

onde P é solução de (2.39) e Q é a solução de (2.45).

Aproximações de ordem superior

Substituindo a aproximação em série de *Taylor* da função armazenamento (2.41) na EHJI (2.21), podem ser obtidas as seguintes expressões que permitem o cálculo recursivo de $W(x)$ e w_{**}

$$\begin{aligned} W_x^{(m)}(Ax + G_1 w_{**}^{(1)} - GC_2 x) &= [-W_x B_1 w_{**} - W_x f(x, w_{**}, 0) + y_*^T(x, W_x^T) Y(x, w_{**}) + \\ &\quad \gamma^2 w_{**}^T w_{**} - g(x, w_{**}, 0) + H(x, V_x^T, w_*, u_*)]^{(m)}, \end{aligned}$$

$$m = 3, 4, \dots$$

$$w_{**}(x, W_x^T) = \frac{1}{2\gamma^2} = \left(\frac{\partial g}{\partial w}(x, w, 0) - y^T \frac{\partial Y}{\partial w}(x, w) + W_x \frac{\partial F}{\partial w}(x, w, 0) \right)^T \bigg|_{w=w_{**}(x, W_x^T)}^{(k)}$$

$$k = 2, 3, \dots$$

2.5.2 Roteiro para calcular o controlador H_∞ não-linear

Visando auxiliar no projeto de um controlador H_∞ não-linear com inclusão das funções de ponderação, nesta seção será apresentado um roteiro de projeto, resumindo de uma forma geral o que foi abordado neste capítulo. Os passos do roteiro são:

- Passo 1) Definição das funções de ponderação: Considerando o sistema não-linear definido em (2.14), o mesmo deverá ser linearizado em torno de um ponto de operação. Deste modo, é possível aplicar a técnica de projeto de controle H_∞ linear descrita na seção 2.2 para a obtenção das funções de ponderação W_1 , W_2 e W_3 .
- Passo 2) Inclusão das funções de ponderação no projeto H_∞ não-linear : Uma vez obtidas as funções de ponderação no passo anterior, descrevê-las na sua forma de representação no espaço de estados possibilitando assim a descrição matemática do sistema completo, conforme mostrado na figura 2.5 e nas equações (2.27), (2.28), (2.29) e (2.30).
- Passo 3) Determinação da matriz P : Uma vez definido o sistema completo na sua forma afim, equação (2.30), o mesmo deverá ser linearizado em torno do ponto de operação de modo a determinar as matrizes A , B_1 , B_2 e C_1 da EAR (2.39). Resolver a EAR, definida em (2.39), para o menor valor possível de γ . Deste modo, determina-se a matriz P .
- Passo 4) Obtenção do controlador de primeira-ordem: Uma vez obtida a matriz P , é possível calcular $w_*^{(1)}$ e $u_*^{(1)}$, definidos na equação (2.38) e também calcular a função $V^{(2)}(x)$, definida por $V^{(2)}(x) = x^T P x$.

- Passo 5) Obtenção de controladores de ordens superiores: Como no passo anterior já foram determinados os valores de $w_*^{(1)}$, $u_*^{(1)}$ e $V^{(2)}(x)$, utilizando-se a equação (2.40) é possível determinar controladores de ordens superiores de modo recursivo.
- Passo 6) Observador de estados - Determinação da Matriz Q : Através do sistema (2.30) linearizado, determinam-se as matrizes A_Q , B_Q e C_Q , da equação (2.45). O valor de H_* é obtido da equação (2.19). Desta forma, da EAR definida em (2.45), determina-se o valor da matriz Q . As matrizes D_{21} e C_2 são oriundas do sistema linearizado definido no passo 3.
- Passo 7) Observador de estados - Determinação da Matriz de injeção G : A partir das matrizes P e Q já definidas nos passos anteriores, determina-se a matriz de injeção G , através da equação (2.46).
- Passo 8) Determinação do observador de estados de primeira-ordem: Através da matriz de injeção G , calcula-se o observador de estados utilizando-se a equação (2.22).

Capítulo 3

Projeto de controle aplicado ao sistema de levitação magnética

3.1 Introdução

Neste capítulo, apresentar-se-ão os projetos de controle utilizando a teoria H_∞ linear e a teoria H_∞ não-linear, já com a inserção das funções de ponderação, para o caso do sistema de levitação magnética. Para isso, inicialmente o modelo matemático do sistema de levitação magnética será apresentado.

Conforme já mencionado anteriormente, a proposta de controle aqui defendida é a utilização da teoria de controle H_∞ não-linear, com inclusão de funções de ponderação com dinâmica. Essas funções de ponderação com dinâmica são previamente definidas através da teoria de controle H_∞ linear.

Portanto, este capítulo será basicamente dividido em duas seções: O projeto de controle H_∞ linear que definirá as funções de ponderação com dinâmica e o projeto do controlador H_∞ não-linear efetivamente, ambos aplicados para o sistema de levitação magnética.

Figura 3.1: Diagrama em blocos do sistema de levitação magnética

3.2 Modelo do sistema de levitação magnética

Considere o sistema de levitação magnética apresentado na figura 3.1, no qual a corrente elétrica $i(t)$ atravessa a bobina do atuador magnético gerando assim uma força de atração, $F(t)$, sobre o rotor de massa m ; $x(t)$ representa o *gap*; g a aceleração da gravidade local e $w_1(t)$ uma perturbação mecânica no rotor. O modelo matemático da dinâmica do sistema no sentido vertical é descrito por (3.1) :

$$m\ddot{x}(t) = mg - F(t) + w_1(t), \quad (3.1)$$

e a força de atração é dada por [49, 2]:

$$F(t) = k \frac{i(t)^2}{x(t)^2}, \quad (3.2)$$

onde k é um parâmetro do atuador magnético que depende da geometria mecânica do mancal, bem como de suas características eletromagnéticas: *gap*, corrente da bobina do atuador, fator de dispersão do fluxo magnético, dentre outras. Apesar do valor de k alterar para diferentes *gaps*, nesta tese foi considerado o valor médio do k para a faixa de *gaps* entre 4mm e 8mm.

Como será mostrado na seção 5.3, o circuito eletrônico de potência é projetado de tal modo que a relação entre a tensão de controle (oriunda do controlador) e a corrente da bobina do atuador magnético é linear, conforme expressado matematicamente na equação (3.3)

$$v(t) = -k_{pot}i(t), \quad (3.3)$$

onde k_{pot} é uma constante definida através das especificações do *hardware* do estágio de potência.

Substituindo-se (3.2) e (3.3) em (3.1), obtém-se:

$$\ddot{x}(t) = g + \frac{1}{m}w_1(t) - \frac{k}{mk_{pot}^2} \frac{v^2(t)}{x^2(t)}. \quad (3.4)$$

O sinal de saída do sistema é dado por:

$$y(t) = x(t) + w_2(t), \quad (3.5)$$

onde $w_2(t)$ representa o sinal do ruído do sensor de posição.

Definindo a entrada de controle como $u(t) = v^2(t)$, as equações (3.4) e (3.5) podem ser representadas na sua forma afim, conforme descrito no sistema definido na equação (3.6).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k}{mk_{pot}^2} \frac{1}{x_1^2(t)} \end{bmatrix} u(t), \\ \dot{x}_p(t) &= f_p(x_p(t)) + g_{p1}(x_p(t))w + g_{p2}(x_p(t))u(t), \\ y(t) &= x_1 + [0 \quad 1] \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}, \\ y(t) &= h_{p2}(x_p(t)) + k_{p21}(x_p(t))w(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Linearização da Planta: Na condição de equilíbrio, $\ddot{x} = 0$,

$$k \frac{i_0^2}{x_0^2} = mg, \quad (3.7)$$

onde x_0 e i_0 são posição e corrente no ponto de equilíbrio, respectivamente. Considerando-se pequenas perturbações $x_\delta(t)$ e $i_\delta(t)$ em torno do ponto de equilíbrio (x_0, i_0) , a linearização do sistema (3.1) é dada por:

$$m\ddot{x}_\delta(t) = \frac{2ki_0^2}{x_0^3}x_\delta(t) - \frac{2ki_0}{x_0^2}i_\delta(t). \quad (3.8)$$

Combinando (3.7) e (3.8), obtém-se:

$$\ddot{x}_\delta(t) = \frac{2g}{x_0}x_\delta(t) - \frac{2g}{i_0}i_\delta(t). \quad (3.9)$$

Ainda na condição de pequenas perturbações em torno do ponto de equilíbrio, a equação (3.3) pode ser expressa como

$$v_\delta(t) = -k_{pot}i_\delta(t), \quad (3.10)$$

Substituindo-se (3.10) em (3.9), obtém-se:

$$\ddot{x}_\delta^{(v)}(t) = \frac{2g}{x_0}x_\delta^{(v)}(t) + \frac{2g}{k_{pot}i_0}v_\delta(t). \quad (3.11)$$

A seguinte função de transferência em malha aberta é obtida de (3.11):

$$G(s) = \frac{X_\delta^{(v)}(s)}{V_\delta(s)} = \frac{\frac{2g}{k_{pot}i_0}}{\left(s + \sqrt{\frac{2g}{x_0}}\right)\left(s - \sqrt{\frac{2g}{x_0}}\right)}. \quad (3.12)$$

A tabela 3.1 apresenta algumas características do protótipo desenvolvido nesta tese.

Tabela 3.1: Características do Protótipo

ponto de operação	$x_0 = 5\text{mm}$
corrente de operação	$i_0 = 380\text{mA}$
constante do mancal	$k = 1,6 \cdot 10^{-4}\text{Nm}^2/\text{A}^2$
estágio de potência	$k_{pot} = 0,25\text{V/A}$
massa do rotor	$m = 0,240\text{kg}$

3.3 O projeto de controle H_∞ linear para o sistema de levitação magnética

Nesta seção, as funções de ponderação, que definirão as barreiras de desempenho e robustez de estabilidade, definidas na seção 2.2, serão especificadas e, a partir daí, a técnica de projeto H_∞ linear, definida na equação (2.6), poderá ser aplicada para projetar o controlador linear.

As especificações do projeto para um sistema de levitação magnética são [50, 51]:

- erro estacionário de posição nulo;
- alto ganho de malha em baixas frequências, para maior rigidez;
- queda monotônica de magnitude com a frequência;
- rejeição de ruídos do sensor;
- robustez frente a incertezas e variações da malha aberta.

No projeto do controlador H_∞ linear para o caso do sistema de levitação aqui apresentado, conforme mostrado no sistema *SISO* da figura 2.1 e sendo $G(s)$ definida em (3.12), a função $G(s)K(s)$ é moldada por duas funções de ponderação, $W_1(s) \approx S^{-1}(s)$ em baixas frequências e $W_3^{-1}(s) \approx T(s)$ em altas frequências.

Em baixas frequências, a função de transferência $G(s)$ é praticamente constante e a função de malha fechada é moldada por $K^{-1}(s)$. A função de ponderação $W_1(s)$ deve

possuir um pólo que force sua queda a partir de uma determinada frequência. Além disso, a função de malha fechada deve ter um módulo muito baixo para minimizar o efeito de perturbações na saída e $|G(0)K(0)| \rightarrow \infty$ para erro estacionário nulo. Isso é obtido acrescentando-se um pólo de frequência muito baixa em $W_1(s)$ (efeito de integrador).

Em altas frequências, os erros de medida aumentam, podendo ser modelados como uma perturbação multiplicativa. Dessa forma, $W_3(s)$ pode ser colocada como um filtro passa-alta, composto de um pólo em alta frequência e um zero em baixa frequência.

Uma terceira função de ponderação, $W_2(s)$, é utilizada para moldar a função $R(s)$. Normalmente, o pico de ganho do controlador $K(s)$ ocorre em frequências mais altas, região na qual pode ser feita a aproximação $|1 + G(s)K(s)| \approx 1$. Portanto, $W_2(s)$ pode ser utilizada para limitar o ganho máximo do controlador, o que tem importância quando se faz implementações práticas de sistemas de controle. Visando a simplificar, a função de ponderação $W_2(s)$ foi considerada como sendo igual à unidade.

A partir do que foi colocado, as funções de ponderação para o sistema de levitação magnética foram definidas como sendo

$$W_1(s) = \frac{20}{s + 0,4} \quad (3.13)$$

relacionada à robustez de performance, e

$$W_3(s) = 20 \frac{s + 0,045}{s + 3000} \quad (3.14)$$

relacionada à atenuação a ruído e robustez de incertezas no modelamento da planta.

Na Fig. 3.2, é possível verificar as respostas em frequência das funções de ponderação $W_1(s)$ e $W_3(s)$ escolhidas. A função $S^{-1}(s)$ é moldada por $W_1(s)$ e a função $T(s)$ é moldada por $W_3^{-1}(s)$.

A partir das funções de ponderação escolhidas, o controlador H_∞ linear obtido

Figura 3.2: Funções de ponderação escolhidas

tem função de transferência

$$K(s) = \frac{-6,9 \cdot 10^5 (s + 13,04)(s + 62,6)(s + 3000)}{(s + 0,4)(s + 1400 \pm j429)(s + 2790)}. \quad (3.15)$$

Na seção 3.4, as funções de ponderação definidas nas equações (3.13) e (3.14) serão incluídas no projeto do controlador H_∞ não-linear, conforme já enunciado na seção 2.4.

3.4 O projeto de controle H_∞ não-linear para o sistema de levitação magnética

Nesta seção, o projeto do controlador H_∞ não-linear será realizado. Para isso, as fundamentações teóricas vistas no capítulo 2 serão necessárias. Como o projeto do controlador H_∞ não-linear incluirá as funções de ponderação definidas nas equações (3.13) e (3.14), o procedimento de projeto seguirá o que foi proposto na seção 2.4. Na tentativa de melhor elucidar o leitor, o roteiro de projeto apresentado na seção 2.5.2 será seguido passo-a-passo.

Passo 1 e Passo 2: As funções de ponderação já foram obtidas na seção 3.3. Desta forma, conforme descrito no Passo 2 da seção 2.5.2, as funções de ponderação podem ser expressas, na sua forma de estados, como:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{w1} &= A_{w1}x_{w1} + B_{w1}(h_{p2}(x_p) + k_{p21}(x_p)w), \\
 z_1 &= C_{w1}x_{w1}, \\
 \dot{x}_{w3} &= A_{w3}x_{w3} + B_{w3}h_{p2}(x_p), \\
 z_3 &= C_{w3}x_{w3} + D_{w3}h_{p2}(x_p), \\
 z_2 &= W_2u,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

e o diagrama de blocos do sistema de controle da figura 2.5 pode ser reestruturado como na figura 3.3, na qual são explicitados os estados x_1 , x_2 , x_3 e x_4 como entradas do controlador e os sinais w_1 , w_2 e w_3 representando as entradas exógenas.

Figura 3.3: Diagrama de blocos do sistema de controle com inserção de $W_1(s)$, W_2 e $W_3(s)$.

Combinando o sistema de levitação magnética definido em (3.6) com as equações definidas em (3.16), obtém-se o seguinte sistema não-linear na sua forma afim,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ g \\ A_{w1}x_{w1} + B_{w1}x_1 \\ A_{w3}x_{w3} + D_{w3}x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & B_{w1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k}{mk_p^2} \frac{1}{x_1^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\
\dot{x} &= f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{w1}x_{w1} \\ 0 \\ C_{w3}x_{w3} + D_{w3}x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ W_2 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\
z &= h_1(x) + k_{12}(x)u,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= x_1 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \\
y &= h_2(x) + k_{21}(x)w,
\end{aligned}$$

onde $x_3 \triangleq x_{w1}$ e $x_4 \triangleq x_{w3}$.

Usando os valores de características de protótipo para o sistema de levitação magnética desenvolvido (ver tabela 3.1) e os valores de A_{w1} , B_{w1} , C_{w1} , A_{w3} , B_{w3} , C_{w3} , D_{w3} e W_2 obtidos através das funções de ponderação $W_1(s)$ e $W_3(s)$ (ver equações (3.13) e (3.14)), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_{w1} \\ \dot{x}_{w3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ 9,8 \\ -0,4.x_{w1} + x_1 \\ -3000.x_{w3} + 20.x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4,16 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0,011 \frac{1}{x_1^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25.x_{w1} \\ 0 \\ 6.10^4.x_{w3} + 20.x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = x_1 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}.$$

Passo 3: Uma vez definido o sistema não-linear no Passo 2, determina-se as matrizes A , B_1 , B_2 e C_2 através da linearização deste sistema. Desta forma, resolvendo-se a EAR para $\gamma = 200$, equação (2.39), obtém-se a seguinte matriz P :

$$P = \begin{pmatrix} 30,64 & 0,28 & 21,52 & -199,91 \\ 0,28 & 0,007 & 0,10 & -0,062 \\ 21,52 & 0,10 & 426,43 & 0,059 \\ -199,91 & -0,062 & 0,059 & 600000 \end{pmatrix}.$$

Passo 4: A partir da matriz P , foi possível determinar $u_*^{(1)}$, $w_*^{(1)}$ e $V^{(2)}(x)$. Sendo assim, o controlador de primeira-ordem, $u_*^{(1)}$, definido na equação (2.38), foi obtido como sendo:

$$u_*^{(1)} = 4706x_1 + 75x_2 + 0,346x_3 - 0,106x_4. \quad (3.19)$$

Passo 5: Com os valores de $w_*^{(1)}$, $V^{(2)}(x)$ e $u_*^{(1)}$ já calculados, utilizando a equação (2.40), foi possível determinar o controlador de segunda-ordem como sendo:

$$\begin{aligned} u_*^{(2)} = & 471062x_1^2 + 240x_2^2 + 0,005x_3^2 + 0,9659 \cdot 10^{-6}x_4^2 \\ & + 30067x_1x_2 + 42,6x_1x_4 + 35,15x_1x_3 - 0,28x_2x_3 \\ & + 0,026x_2x_4 - 0,00002x_3x_4, \end{aligned} \quad (3.20)$$

o que conduz ao controlador, $u_* = u_*^{(1)} + u_*^{(2)}$, como sendo:

$$\begin{aligned}
u_* = & 4706x_1 + 75x_2 + 0,346x_3 - 0,106x_4 + 471062x_1^2 + 240x_2^2 + 0,005x_3^2 \\
& + 0,9659 \cdot 10^{-6}x_4^2 + 30067x_1x_2 + 42,6x_1x_4 + 35,15x_1x_3 - 0,28x_2x_3 \\
& + 0,026x_2x_4 - 0,00002x_3x_4.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Passo 6: Uma vez que a variável de estado $x_2(t)$ não está disponível no controlador por realimentação da saída, foi necessário projetar o observador de estados definido na seção 2.5.1. Sendo assim, continuando os passos definidos no roteiro de projeto definido na seção 2.5.2, a seguinte matriz Q foi obtida:

$$Q = \begin{pmatrix} 1,13 \times 10^9 & -1,81 \times 10^7 \\ -1,81 \times 10^7 & 2,88 \times 10^5 \end{pmatrix}.$$

Passo 7: Através das matrizes P e Q , foi possível obter a matriz de injeção definida por:

$$G = \begin{pmatrix} 206,39 \\ 12922,31 \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

Passo 8: A matriz de injeção, G , conduz a um observador de estados definido como:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 - 206,39\tilde{x}_1 + 206,39y, \\
\dot{\tilde{x}}_2 &= 9,8 + \frac{1}{(0,005+\tilde{x}_1)^2}(-0,000245 - 0,196\tilde{x}_1 \\
& - 0,0052\tilde{x}_2) - 12922,3\tilde{x}_1 + 3,26 \cdot 10^{-6}\tilde{x}_2 \\
& + 12922,3y.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

A solução dessas equações não-lineares fornece os estados estimados $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$, enquanto x_3 e x_4 são obtidos diretamente de W_1 e W_3 . A lei de controle (3.21) faz uso destes estados para implementar o controlador por realimentação da saída, conforme será descrito na seção 5.2.

A forma de como esta lei de controle, o observador de estados e as funções de ponderação foram implementadas no *hardware* é assunto que será abordado no capítulo 5.

Capítulo 4

Implementação de controladores em DSPs de ponto-fixo

4.1 Introdução

Neste capítulo, será apresentado o procedimento prático para transformação de um algoritmo em ponto-flutuante para ponto-fixo, utilizando-se a minimização de norma l_∞ , que é considerado como uma das contribuições desta tese. Uma comparação com o método proposto por [32], que utilizou de propriedade de normas l_1 e l_∞ para sistemas lineares e invariantes no tempo será realizada. A principal vantagem na utilização da norma l_∞ , proposta nesta tese em relação ao proposto por [32], é o fato desse procedimento ser também aplicado para o caso de controladores não-lineares.

Também serão apresentados os principais conceitos envolvendo a representação binária de um número em ponto-flutuante e em ponto-fixo, com resolução finita, os problemas numéricos envolvendo operações matemáticas em ponto-fixo e alguns aspectos práticos para, a partir de um código de programa em *Matlab* (usando ponto-flutuante), transformá-lo em um código de programa que utiliza o *ToolBox* de ponto-fixo do *Matlab*, para, posteriormente, transformá-lo em um código *C-ANSI*, que utiliza a biblioteca *IQMath* disponibilizada pela Texas Instruments.

4.2 Representação numérica em ponto-flutuante

Conforme descrito por [52], nem sempre é fácil decidir entre um DSP de ponto-fixa ou em ponto-flutuante.

De acordo com [53], um sistema de ponto-flutuante pode ser representado por $F(b, t, \varsigma, M)$, que representa um subconjunto dos números reais, onde $b \geq 2$ é a base de representação, $t \geq 1$ é a precisão, e ς e M são, respectivamente, o menor e o maior expoentes. Desta forma, esse subconjunto ($F \subset \mathbb{R}$) contém números reais da forma $x = (-1)^s \cdot b^e \cdot (0 \cdot d_1 d_2 d_3 \dots d_t)$, sendo s o sinal (0 se for positivo e 1 se for negativo), e o expoente ($\varsigma \leq e \leq M$, com $\varsigma < 0$, $M > 0$ e $|\varsigma| \cong M$) e d_i são dígitos da mantissa na base- b ($0 \leq d_i \leq b - 1$, $\forall i$, $1 \leq i \leq t$).

A representação que será mostrada nesta seção será baseada na norma *IEEE-754*. Nesta forma de representação, o ponto decimal está implicitamente entre os dígitos d_1 e d_2 (forma normalizada), o que permite o armazenamento de mais um dígito da mantissa. Esse *bit* armazenado na mantissa também é conhecido como *bit* escondido.

Na norma *IEEE-754*, na precisão simples (*single*), há 8 *bits* para o expoente e 23 *bits* para a mantissa, não contando com o *bit* escondido. Os expoentes são representados sem sinal. A faixa de expoentes varia de -127 a $+128$. O fator de escala dos expoentes é -127 , isto é, o campo de *bits* na palavra $E = e + 127$, onde e é o valor efetivo do expoente, pois a representação usada na norma *IEEE-754*, é a *representação de excesso* [54].

Na figura 4.1, representa-se um número de acordo com a norma *IEEE-754* na precisão simples.

Figura 4.1: Representação de um número com a Norma *IEEE-754*

Como exemplo, um número em precisão simples tem a forma:

$$(-1)^s \cdot m \cdot 2^e. \quad (4.1)$$

Sendo que a mantissa normalizada tem a forma representada na figura 4.2

Figura 4.2: Representação da mantissa normalizada - Norma *IEEE-754*

A título de exemplificação, a figura 4.3 mostra os passos para transformar o número $23,625_{10}$ para o padrão *IEEE-754*.

Figura 4.3: Exemplo: Transformação da base 10 para a Norma *IEEE-754*

4.3 Representação numérica em ponto-fixa

Quando se utiliza um processador em ponto-fixa, o grande problema que o projetista do *firmware* enfrentará advém do fato de que o processador não mantém um registro da posição da vírgula virtual. De uma maneira mais simplificada e direta, o processador nem sabe e nem toma conhecimento de onde o projetista definiu a posição

da vírgula virtual. Desta forma, fica claro que, durante a implementação do *firmware* em ponto-fixado, o projetista deverá criar uma forma de gerenciar todas as operações matemáticas que envolvem as vírgulas virtuais para evitar erros durante os cálculos.

Uma forma bastante utilizada para representar números mistos, ou seja, que possuem partes inteiras e fracionárias, é por meio de uma notação denominada formato Q_i , onde o subindex i representa a posição da vírgula virtual em relação ao *bit* menos significativo. Normalmente, o comprimento da palavra corresponde ao comprimento da palavra de dados que o processador pode tratar, salvar ou recuperar, em uma única operação, conforme sugerido por [55].

Figura 4.4: Representação binária de um número em ponto-fixado

Um registro de ponto-fixado no formato Q_i é um número binário em complemento de dois de N *bits* com três partes: Sinal - Parte Inteira - Parte Fracionária, conforme ilustrado na figura 4.4.

Por exemplo: Considerando-se um processador de 16 *bits*, utilizando-se o formato Q_9 para sua notação, sua representação binária será dada conforme mostrada na figura 4.5.

Figura 4.5: Representação binária de um número no formato Q_9

Neste exemplo, o valor mínimo negativo será dado por $100.0000.0000.0000_2$, que é igual a -64, e o valor máximo positivo será dado por: $0111.1111.1111.1111_2=63,99804688_{10}$. A resolução entre os números binários no formato Q_9 é de $2^{-9} = 0,001953125$.

Sendo assim, baseado neste exemplo, é possível criar uma tabela que mostra a faixa dinâmica e a resolução para um processador de 16 *bits*, nos diferentes tipos de formato Q_i , conforme mostrado na tabela 4.1.

Tabela 4.1: Número binário representado no formato Q_{15}

<i>Formato Q_i</i>	Valor Máximo	Resolução
Q_{15}	0,999969482	0,000030517
Q_{14}	1,999938965	0,000061035
Q_{13}	3,99987793	0,000122070
Q_{12}	7,999755859	0,000244140
Q_{11}	15,99951172	0,000488281
Q_{10}	31,99902344	0,000976562
Q_9	63,99804687	0,001953125
Q_8	127,9960937	0,00390625
Q_7	255,9921875	0,0078125
Q_6	511,984375	0,015625
Q_5	1023,96875	0,03125
Q_4	2047,9375	0,0625
Q_3	4095,875	0,12
Q_2	8191,75	0,25
Q_1	16383,5	0,5
Q_0	32768	1

Dependendo da faixa dinâmica de um determinado operando, O_j , o projetista do *firmware* do controlador define qual é o formato Q_i que irá utilizar, de modo a minimizar os erros de truncamento durante a transformação de um algoritmo em ponto-flutuante para um algoritmo em ponto-fixado. Com isso, para implementação de um controlador embarcado em um DSP de ponto-fixado, a transformação da formulação em ponto-fixado consiste na verificação da faixa dinâmica utilizando a menor resolução possível, determinando assim o comprimento da palavra inteira (*IWL - Integer Word Length*) e da palavra fracionária (*FWL - Fractional Word Length*) de cada operando O_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$, onde N é o número de operandos para serem transformados. O comprimento total da palavra (*WL - Word Length*) para cada operando é obtido como

segue: [31]

$$O_j \rightarrow WL_j = IWL_j + FWL_j + s_j, \quad (4.2)$$

onde o *bit* $s_j = 1$, se o operando é negativo ou positivo, quando se utiliza o formato complemento de dois. Caso contrário, $s_j = 0$.

O comprimento da palavra WL_j deve ser maior do que 0. Dado IWL_j e FWL_j , o número em ponto-fixa representa um valor compreendido numa faixa R_j com passo de quantização Δ_j , como segue:

$$\begin{aligned} -2^{IWL_j} \leq R_j < 2^{IWL_j}, \text{ utilizando-se sinal} \\ 0 \leq R_j < 2^{IWL_j}, \text{ sem sinal.} \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde,

$$\Delta_j = 2^{-FWL_j} \quad (4.4)$$

Deste modo, IWL_j e FWL_j são definidos para evitar saturação do operando O_j .

Normalmente, a atribuição do comprimento da palavra WL_j é feita através da definição de IWL_j , mediante a definição da faixa dinâmica do operando O_j , como segue:

$$IWL_j \geq \lceil \log_2 (|R_j|^{max}) \rceil, \quad (4.5)$$

onde $\lceil x \rceil$ é o menor inteiro que é maior ou igual a x .

O valor de $|R_j|^{max}$ pode ser estimado pela verificação do máximo e do mínimo valor do operando, ou a média e desvio padrão do sinal [56, 57]. Considerando-se que um processador possui o número de *bits* fixos, uma vez definido IWL_j , o FWL_j é definido automaticamente. Tal afirmação não é válida caso o controle embarcado esteja num FPGA, no qual o tamanho dos registradores pode variar.

Como nesta tese é utilizado um DSP cujos registradores são fixos, ou seja, $WL_j = \text{constante}$, basta obter IWL_j por meio da equação (4.5) para se definir o comprimento de FWL_j .

4.4 Transformação de algoritmo em ponto-flutuante para algoritmo em ponto-fixe

Nesta seção, apresenta-se o procedimento, proposto nesta tese, para transformação de um algoritmo em ponto-flutuante para ponto-fixe, utilizando-se a minimização de norma l_∞ .

4.4.1 Determinação do comprimento da palavra em um DSP de ponto-fixe, através de um método conhecido na literatura

Conforme visto na seção anterior, a representação em ponto-fixe deve incluir *bits* inteiros suficientes para evitar a ocorrência de *overflow*. Para assegurar essa condição, normalmente é necessário definir a faixa de variação das variáveis ou limite superior para sua magnitude.

Conforme descrito por [32], há duas principais fontes de erro na saída, u , de um filtro devido à quantização de um sistema de controle:

- O erro Δu_{e_0} introduzido pela resolução limitada do conversor A/D, e
- O erro Δu_{e_i} introduzido pelo truncamento em cada soma de uma variável calculada do sistema.

Esses erros podem ser representados como entradas exógenas de perturbação para sistemas lineares. Desta forma, considerando-se um sistema linear de primeira ordem, conforme mostrado na figura 4.6, e_0 e e_1 representam os erros introduzidos no

sistema. A perturbação e_0 representa o erro de quantização do A/D, e a perturbação e_1 representa o erro de truncamento no somatório.

Outras realizações podem ter mais do que um somatório. Desta forma, para um sistema linear estável de ordem superior, com m somatórios, sendo e_i , $i = 1, 2, \dots, m$, com $i, m \in \mathbb{N}^+$, as perturbações devido aos erro de truncamento, tem-se [58]:

$$\|\Delta u_{e_i}\|_\infty \leq \|g_{ue_i}\|_1 \cdot \|e_i\|_\infty \quad (4.6)$$

sendo, $g_{ue_i}(k)$ a resposta impulsiva do sistema de e_i para u , enquanto que $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$ representam respectivamente as normas l_∞ e l_1 , definidas como sendo $\|x\|_\infty \triangleq \sup_k |x(k)|$ e $\|x\|_1 \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|$. A resposta impulsiva do sistema, $g_{ue_i}(k)$, pode ser obtida através do uso da função *dimpulse* do *Matlab*.

Uma vez que essa proposta feita por [32] é para sistemas lineares e invariantes no tempo, o erro devido à quantização do A/D pode ser superposto para determinar o efeito total sobre a saída u . Deste modo, tem-se

$$\|\Delta u\|_\infty = \|\Delta u_{e_0} + \Delta u_{e_i}\|_\infty \leq \sum_{i=0}^m \|g_{ue_i}\|_1 \cdot \|e_i\|_\infty \quad (4.7)$$

Exemplo 4.1. Para exemplificar o que foi proposto por [32], será considerada a equação (3.13), que possui a equação de diferença definida em (4.8), obtida a partir da transformação bilinear *Tustin* a uma taxa de amostragem $f_s=5\text{kHz}$:

$$u(k) = 0,002x(k) + 0,002x(k-1) + 0,999u(k-1), \quad (4.8)$$

com a representação na Forma Direta II apresentada na Fig. 4.6, sendo que e_0 é o erro introduzido pela resolução do A/D e e_1 é o erro introduzido pelo truncamento no somatório.

Figura 4.6: Representação de W_1 na forma direta II ($a=0,002$, $b=0,002$ e $c=0,999$)

Será considerada a utilização de um A/D de 12 bits (usando complemento de 2), com uma faixa de tensão de entrada unipolar de 0-3V. Desta forma, 3 bits serão usados para a parte inteira (incluindo o bit de sinal) e os 9 bits restantes deverão ser usados como fracionários, significando que o pior caso de erro devido à resolução do A/D é $\|e_0\|_\infty = 2^{-10}$ volts. A norma l_1 da resposta impulsiva pode ser aproximada usando uma soma finita da seqüência gerada através do comando do *Matlab* “*dimpulse*”. Deste modo, $\|g_{ue_0}\|_1 = \text{sum}(\text{dimpulse}([0.002 \ 0.002], [1 - 0.999]))$, o que resulta que $\|g_{ue_0}\|_1 \cong 79,5$. Utilizando-se a equação (4.6), é possível determinar $\Delta u_{e_0} = 79,5 \cdot 2^{-10} = 0,077$ volts. Para se definir o erro e_1 , provocado devido ao truncamento na soma, baseado na Fig. 4.6, é possível determinar que a saída u em função do erro e_1 é definida com a seguinte função de transferência de tempo discreto:

$$G_{ue_1} = \frac{z}{z - 0,999} \quad (4.9)$$

Deste modo, $\|g_{ue_1}\|_1 = \text{sum}(\text{dimpulse}([10], [1-0.999]))$, o que resulta que $\|g_{ue_1}\|_1 \cong 9933$. Assumindo que o resultado do somador é truncado depois de f bits fracionários, o erro máximo que pode ser atingido será de $\|e_1\|_\infty = 2^{-f}$ volts. Portanto, utilizando-se novamente a equação (4.6), porém agora para o erro e_1 , tem-se $\Delta u_{e_1} = 9933 \cdot 2^{-f}$ volts. Como o sistema é linear e invariante no tempo, é possível utilizar-se da equação (4.7), o que resulta em:

$$\Delta u_{error} = \Delta u_{e_0} + \Delta u_{e_1} \quad (4.10)$$

$$\Delta u_{error} = 0,077 + 9933 \cdot 2^{-f} \quad (4.11)$$

Conforme sugerido por [32], escolhe-se a condição de que o segundo termo da equação (4.10) não deve ser superior a 10% do primeiro, ou seja, $9933 \cdot 2^{-f} \leq (10\%) \cdot 0,077$. Esta condição implica que: $f = 21$ bits fracionários são requeridos, ou seja, formato Q_{21}^u .

Desta forma, considerando a utilização de um DSP de 32 *bits* de ponto-fixe e como serão necessários 3 *bits* para o IWL_l^x , devido ao conversor A/D utilizado e a faixa de tensão do sinal de entrada, o método proposto por [32] resultará no formato (Q_{21}^u, Q_{28}^x) para as variáveis envolvidas. Esse resultado será comparado na seção 4.4.2, exemplo 4.2 com o método proposto nesta tese.

4.4.2 Determinação do comprimento da palavra em DSP de ponto-fixe através de minimização da norma l_∞

Nesta seção, será apresentado um método para determinação do comprimento de FWL_j , através da minimização da norma l_∞ do erro de conversão de ponto-flutuante para ponto-fixe. Conforme já comentado anteriormente, esta é uma das contribuições desta tese. A norma l_∞ irá definir uma *Função Custo* (J), que deverá ser otimizada. A forma aqui escolhida para otimização de J foi através da utilização de um algoritmo genético.

Considere a seguinte lei de controle:

$$u^{\text{fixed-point}} = u^{\text{fixed-point}}(a_1, a_2, \dots, a_m, x_1^{Q_1^1}, x_2^{Q_2^2}, \dots, x_n^{Q_n^n}, Q_i^u) \quad (4.12)$$

onde $a_k, x_l^{Q_l^i} \in \mathbb{R}$, representam, respectivamente, os coeficientes e os sinais de entrada

para o algoritmo de controle dinâmico, em formato Q_i , e $k = 1, 2, \dots, m$ e $l = 1, 2, \dots, n$, sendo $k, l, m, n \in \mathbb{N}^+$.

Aqui, será suposto que os formatos Q_i dos coeficientes a_k foram previamente definidos pelo projetista do *firmware*, considerando a melhor resolução, conforme tabela 4.2. Também, será assumido o uso de um DSP de 32 *bits* em ponto-fixo, de modo que a faixa dos valores da variável i será de 0 a 31 e o comprimento da palavra do sinal de saída é constante.

Desta forma, para cada variável $x_l^{Q_i}$, $l = 1, 2, \dots, n$ basta determinar seu FWL_l que o seu IWL_l fica predefinido ($IWL_l = WL_l - FWL_l - s_l$). O mesmo ocorre para o comprimento da palavra de $u^{\text{ponto-fixo}}$, FWL_u , que estão associados com o formato Q_i do sinal de saída $u^{\text{ponto-fixo}}$, Q_i^u .

Considerando-se a equação (4.12), o processo de otimização do FWL_l consiste em determinar o formato Q_i mais adequado para o conjunto de variáveis do sistema, uma vez que o formato Q_i dos coeficientes são previamente definidos pelo projetista do *firmware*.

Conforme já mencionado, a técnica para a definição do comprimento do FWL_l e FWL_u é baseada na minimização de uma *Função Custo* J , definida através da norma l_∞ do erro de conversão. Assim, a *Função Custo* é baseada na comparação entre o sinal em ponto-flutuante ($u^{\text{ponto-flutuante}}$) e o sinal em ponto-fixo ($u^{\text{ponto-fixo}}$) para um determinado conjunto de formato Q_i , conforme definido na equação (4.13). É importante mencionar que $u^{\text{ponto-flutuante}}$ e $x_l^{\text{ponto-flutuante}}$, $l = 1, 2, \dots, n$ são sinais conhecidos através de simulações em ponto-flutuante (podendo inclusive conter sinais de perturbações), uma vez que eles são usados como entrada para a implementação do algoritmo em ponto-fixo, que gerará o sinal $u^{\text{ponto-fixo}}$. O fato desses sinais serem considerados conhecidos é de particular interesse para algumas aplicações, tal qual para o caso de sistemas de levitação magnética, principalmente durante a fase inicial de levitação.

$$J = \min_{Q_i^1, Q_i^2, \dots, Q_i^n, Q_i^u} \|u^{\text{ponto-fixe}} - u^{\text{ponto-flutuante}}\|_{\infty}. \quad (4.13)$$

Para a minimização de J , utilizou-se um algoritmo genético. Sob o ponto de vista da teoria de algoritmos genéticos, é possível definir o seguinte cromossomo:

$$\text{cromossomo} = (Q_i^1, Q_i^2, \dots, Q_i^n, Q_i^u) \quad (4.14)$$

com $i = (1, 2, \dots, 30)$, pois o DSP utilizado possui 32 bits em complemento de dois. Cada gene é representado por um Q_i^l . A aplicação da técnica de algoritmo genético começa com um conjunto de soluções (representadas pelos cromossomos) que é chamado de população inicial. Cada indivíduo da população inicial é avaliado através de uma *Função Custo*, definida na equação (4.13). Aqueles que resultam em maior mérito têm mais chances de continuar no conjunto de soluções (população) na iteração seguinte. Assim, sucessivamente, um conjunto de possíveis soluções é refinado de forma a melhor atender o critério de otimização. A figura 4.7 ilustra o mecanismo de evolução artificial e as operações às quais os indivíduos são submetidos. Para implementação dessa técnica de otimização por algoritmo genético, foi elaborado um programa no *Matlab* (ver [59]), sem fazer uso de qualquer *ToolBox* pronto.

Geração da população Inicial: A partir da definição da faixa de variação das variáveis

Q_i^l , os cromossomos serão gerados randomicamente, criando-se assim a população inicial. Cada gene expressa um tipo de formato Q_i de uma determinada variável.

A Função Custo (J): Nesta etapa, cada indivíduo da população é avaliado para que seja dado o seu grau de adaptação.

Seleção $\mapsto$ Cruzamento $\mapsto$ Mutação: Neste trabalho, a reprodução e a seleção são realizadas entre os indivíduos mais adaptados [59]. A quantificação dessa adaptação de cada indivíduo é feita através da *Função Custo*.

Critério de Parada: Quando o número de geração atinge M , o processo de iteração é finalizado.

Figura 4.7: Fluxograma do Algoritmo Genético

Desta forma, esta metodologia pode ser resumida através do diagrama mostrado na figura 4.8.

Uma vez descrita a técnica proposta nesta tese para transformação de um algoritmo de controle em ponto-flutuante para ponto-fixo, dois exemplos serão apresentados como forma de validação desta metodologia. No exemplo 4.2, será utilizada a mesma equação de diferenças utilizada no exemplo 4.1, na qual o comprimento de FWL_l para as variáveis u e x foram obtidas baseadas no método proposto por [32]. No exemplo 4.3, os comprimentos FWL_l das variáveis de estado $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ e FWL_u foram definidas utilizando o método proposto nesta tese. Neste caso em particular, o método proposto por [32] não poderá ser utilizado porque a equação (3.21) é não-linear.

Exemplo 4.2. A equação de diferenças (4.8) utilizada no exemplo 4.1 pode ser considerada como um caso particular da equação (4.12). Assim, como suposto no método

Figura 4.8: Fluxograma do algoritmo proposto através da minimização da norma l_∞ do erro de conversão

proposto, os coeficientes $a_1 = 0,002$, $a_2 = 0,002$ e $a_3 = 0,999$ são definidos pelo projetista do *firmware*, baseado na tabela 4.2, como sendo Q_{30} (melhor resolução). Para a formalização do problema de otimização definido na equação (4.13), o sinal $u^{\text{ponto-flutuante}}$ foi obtido da simulação em ponto-flutuante para uma condição de *gap* inicial grande do sistema de levitação magnética. Definindo o vetor $[x, u]$, tem-se (Q_i^1, Q_i^u) , conforme definido em (4.14). De (4.13), a *Função Custo* será definida como:

$$J = \min_{Q_i^1, Q_i^u} \|u^{\text{ponto-fixo}} - u^{\text{ponto-flutuante}}\|_\infty. \quad (4.15)$$

A partir da geração da população inicial gerada randomicamente (30 cromossomos) e aplicando-se a técnica de algoritmo genético, todos os indivíduos da população inicial convergiram para o par de gene (Q_{28}^1, Q_{28}^u) .

Exemplo 4.3. Considerando a lei de controle definida em (3.21) que, para facilitar a leitura e o entendimento deste exemplo, será transcrita abaixo:

$$\begin{aligned}
u_* = & 4706x_1 + 75x_2 + 0,346x_3 - 0,106x_4 + 471062x_1^2 + 240x_2^2 + 0,005x_3^2 \\
& + 0,9659 \cdot 10^{-6}x_4^2 + 30067x_1x_2 + 42,6x_1x_4 + 35,15x_1x_3 - 0,28x_2x_3 \\
& + 0,026x_2x_4 - 0,00002x_3x_4.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Portanto, a equação (4.16) é considerada como um caso particular da equação (4.12). Os formatos Q_i dos coeficientes foram definidos pelo projetista do *firmware* como sendo a melhor resolução para cada um deles, conforme tabela 4.2, e estão definidos na tabela 4.3. Para formulação do problema de otimização definido na equação (4.13), os sinais de entrada $x_1^{\text{ponto-flutuante}}, \dots, x_4^{\text{ponto-flutuante}}, u^{\text{ponto-flutuante}}$ foram obtidos da simulação em ponto-flutuante para a mesma condição do exemplo 4.2, ou seja, *gap* inicial grande para o sistema de levitação magnética. Agora, é necessário definir o melhor formato Q_i para o vetor de variáveis de estado, $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, e a lei de controle u . Sendo assim, considerando o vetor $[x_1, x_2, x_3, x_4, u]$, tem-se $(Q_i^1, Q_i^2, Q_i^3, Q_i^4, Q_i^u)$ o formato Q_i de cada gene que gera o cromossomo definido em (4.14). A população inicial com 200 cromossomos foi gerada randomicamente e então o algoritmo genético foi aplicado. Da equação (4.13), a *Função Custo* para esse exemplo será definida como:

$$J = \min_{Q_i^1, Q_i^2, Q_i^3, Q_i^4, Q_i^u} \|u^{\text{ponto-fixa}} - u^{\text{ponto-flutuante}}\|_{\infty}. \tag{4.17}$$

Ao final da evolução do algoritmo genético, com 30 gerações, todos os indivíduos da população inicial convergiram para o cromossomo $(Q_{30}^1, Q_{28}^2, Q_{27}^3, Q_{30}^4, Q_{25}^u)$ com $2,567 \cdot 10^{-6}$ de valor de *Função Custo*.

Desta forma, fazendo uma comparação direta entre os exemplos 4.1 e 4.2 é possível constatar que a determinação de FWL_j pelo método proposto por [32] e o apresentado nesta tese deram resultados semelhantes.

De qualquer forma, no exemplo 4.3 não pôde ser aplicado o método de [32], uma vez que é um controlador não-linear. Ou seja, a grande vantagem do método aqui

apresentado, que utiliza minimização de norma l_∞ , é que ele pode ser usado tanto para controladores lineares como para controladores não-lineares e também para diferentes sinais de entrada.

Por outro lado, conforme já comentado no capítulo 1, um método bastante utilizado para a determinação dos comprimentos FWL_l é através da determinação das faixas dinâmicas de cada variável, obtidas através de simulação do algoritmo em ponto-flutuante e, a partir dessas informações, definir o FWL_l mais adequado para cada variável. Portanto, visando, novamente, a realizar uma comparação com o método aqui proposto, usando os mesmos dados do exemplo 4.3, foi definido o formato Q_i de cada variável do vetor $[x_1, x_2, x_3, x_4, u]$ por meio da determinação de suas faixas dinâmicas, sendo que o resultado obtido foi $(Q_{30}^1, Q_{30}^2, Q_{30}^3, Q_{30}^4, Q_{28}^u)$ com $2,654.10^{-6}$ de valor de *Função Custo*, que representa um resultado pior em comparação ao obtido no exemplo 4.3.

Para fins de comparação, na tabela 4.4 é apresentado um resumo do método proposto nesta tese, para transformação de um algoritmo de controle em ponto-flutuante para ponto-fixo, com o proposto por [32] e o método comumente utilizado baseado na faixa dinâmica das variáveis [36].

4.5 Implementação do algoritmo em ponto-fixo

Nesta seção, será apresentado um procedimento prático para realizar a implementação de um programa em ponto-fixo, usando o ToolBox de ponto-fixo do Matlab e a biblioteca IQMath disponibilizada pela *Texas Instruments*.

Usando o comando *fi* do Toolbox de ponto-fixo (Matlab), é possível verificar, por simulação, se os valores de FWL_n e IWL_n de cada operando foram adequadamente determinados antes da implementação do *firmware* do DSP (em C-ANSI). O comando *fi* aceita valores, com ou sem sinal, definição do comprimento total da palavra e da parte fracionária (nesta ordem). Por exemplo: *fi*(2.9998, 1, 32, 16) transforma o

número 2,9998 em um número em ponto-fixa com 32 *bits* de comprimento, 16 *bits* de parte fracionária, 15 *bits* de parte inteira e 1 *bit* de sinal. A biblioteca IQMath (da *Texas Instruments*) inclui uma coleção de funções matemáticas otimizadas para serem usadas no programa em C-ANSI, a qual pode ser diretamente usada (*IQNmpy*, *IQNmpyIQX*, etc.) no algoritmo de controle [60]. Essas ferramentas computacionais podem encurtar significativamente o tempo de desenvolvimento do *firmware*. A tabela 4.5 mostra uma pequena parte de um código de programa que ilustra a conversão de um código de programa feito no Matlab para o código C-ANSI do DSP.

Tabela 4.2: Número binário representado no formato Q_i

<i>Formato Q_i</i>	Valor Máximo	Resolução
Q_{31}	0,999 999 999 5	0,000 000 000 5
Q_{30}	1,999 999 999	0,000 000 001
Q_{29}	3,999 999 998	0,000 000 002
Q_{28}	7,999 999 996	0,000 000 004
Q_{27}	15,999 999 993	0,000 000 007
Q_{26}	31,999 999 985	0,000 000 015
Q_{25}	63,999 999 970	0,000 000 030
Q_{24}	127,999 999 960	0,000 000 060
Q_{23}	255,999 999 981	0,000 000 119
Q_{22}	511,999 999 762	0,000 000 238
Q_{21}	1023,999 999 523	0,000 000 477
Q_{20}	2047,999 999 046	0,000 000 954
Q_{19}	4095,999 998 093	0,000 001 907
Q_{18}	8191,999 996 185	0,000 003 815
Q_{17}	16383,999 992 371	0,000 007 629
Q_{16}	32767,999 984 741	0,000 015 259
Q_{15}	65535,999 969 482	0,000 030 518
Q_{14}	131071,999 938 965	0,000 061 035
Q_{13}	262143,999 877 930	0,000 122 070
Q_{12}	524287,999 755 859	0,000 244 141
Q_{11}	1048575,999 511 719	0,000 488 281
Q_{10}	2097151,999 023 437	0,000 976 563
Q_9	4194303,998 046 875	0,001 953 125
Q_8	8388607,996 093 750	0,003 906 250
Q_7	16777215,992 187 500	0,007 812 500
Q_6	33554431,984 375 000	0,015 625 000
Q_5	67108863,968 750 000	0,031 250 000
Q_4	134217727,937 500 000	0,062 500 000
Q_3	268435455,875 000 000	0,125 000 000
Q_2	536870911,750 000 000	0,250 000 000
Q_1	1 073741823,500 000 000	0,500 000 000
Q_0	4 294967296,000 000 000	1,000 000 000

Tabela 4.3: Formato Q_i dos Coeficientes definidos pelo projetista do *firmware*

Coeficientes	formato Q_i	Coeficientes	formato Q_i
4706	Q_{18}	0,0000009659	Q_{30}
75	Q_{24}	30067	Q_{16}
0,346	Q_{30}	42,6	Q_{25}
-0,106	Q_{30}	35,15	Q_{25}
471062	Q_{12}	-0,28	Q_{30}
240	Q_{23}	0,026	Q_{30}
0,005	Q_{30}	-0,00002	Q_{30}

Tabela 4.4: Comparação do método proposto com outros métodos

	Método Proposto por [32]	Método pela faixa dinâmica
Exemplo 4.2	Similar (caso linear)	Não foi realizado
Exemplo 4.3	Não pode ser aplicado (caso não-linear)	Pior resultado

Tabela 4.5: Conversão de MATLAB para código C-ANSI

Código em MATLAB usando ponto-flutuante	Código em MATLAB usando Toolbox de ponto-fixado	Código do DSP C-ANSI usando biblioteca IQMath
<pre> aW1=0.002 bW1=0.002; cW1=0.9998; x3_k=aW1*u1_k+ bW1*u1_k_1+ cW1*x3_k; x3_k_1=x3_k; u1_k_1=u1_k; x=x3_k; </pre>	<pre> IQ=30; aW1=fi(0.002,1,32,IQ) bW1=fi(0.002,1,32,IQ); bW1=fi(0.9998,1,32,IQ); x3_k=fi(fi(aW1*u1_k,1,32,IQ)+ fi(bW1*u1_k_1,1,32,IQ)+ fi(cW1*x3_k_1,1,32,IQ))1,32,IQ); x3_k_1=x3_k; u1_k_1=u1_k; x=x3_k.double; </pre>	<pre> #define GLOBAL_Q 30 #include <IQmathLib.h> _iq30 aW1,bW1,cW1; aW1=_IQ30(0.002); bW1=_IQ30(0.002); bW1=_IQ30(0.9998); x3_k=_IQ30mpyIQX(aW1,30,u1_k,30)+ _IQ30mpyIQX(bW1,30,u1_k_1,30)+ _IQ30mpyIQX(cW1,30,x3_k_1,30); x3_k_1=x3_k; u1_k_1=u1_k; x=x3_k; </pre>

Capítulo 5

Implementação do sistema de controle

5.1 Introdução

Neste capítulo, serão apresentados alguns aspectos práticos do *hardware* desenvolvido (controlador, estágio de potência, sensor de posição e circuitos adicionais) e do *firmware* implementado em um DSP de 32 *bits* em ponto-fixa da *Texas Instruments*.

5.2 O controlador

De um modo geral, um sistema de controle de mancais magnéticos é constituído por: controlador, estágio de potência (já incluindo o mancal magnético) e sensor de posição [38].

O controlador é responsável pela implementação da lei de controle definida no projeto. Neste trabalho, o controlador foi implementado no DSP *TMS320F2812*, da *Texas Instruments*, com 32 *bits* em ponto-fixa. A taxa de amostragem utilizada foi de 5 *kHz*, de modo a garantir compatibilidade com o estágio de potência. Conforme já comentado na seção 2.4, uma vez que foram inseridas as funções de ponderação

com dinâmica, as implementações de W_1 e W_3 foram realizadas através de equações de diferenças obtidas através da transformação bilinear *Tustin* ($s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$) utilizadas para converter as funções de tempo contínuo para o tempo discreto. Devido à natureza não-linear do observador, conforme descrito na equação (3.23), não foi possível usar uma transformação linear clássica do domínio de tempo contínuo para o domínio de tempo discreto. Portanto, assim como foi feito por [12], o método de *Runge-Kutta* de 4ª ordem (RK-4) foi utilizado para resolver parte do *loop* de controle. Desta forma, a cada amostra do sinal, o sistema de controle adquire os dados do sensor de posição, resolve as equações do observador de estados - equação (3.23), através do RK-4, para estimar os estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$ -, resolve a equação de diferenças para $W_1(z)$ e $W_3(z)$ para determinar os estados $x_3(t)$ e $x_4(t)$, calcula a lei de controle definida na equação (3.21), gerando assim o sinal de controle para o estágio de potência que energiza o atuador magnético. A configuração do controlador por realimentação da saída implementada no DSP está mostrada na figura 5.1.

Figura 5.1: Diagrama em blocos do Controlador por realimentação de saída

O conversor analógico-digital (A/D) utilizado foi o interno ao DSP, o qual possui uma resolução de 12 *bits* e é unipolar. Devido à característica de unipolaridade do mesmo e, devido ao fato do sinal do sensor de posição ser bipolar, houve a necessidade de se utilizar um circuito analógico, entre o sensor de posição e o A/D, de modo a conformar o sinal analógico na faixa de entrada do conversor, ou seja, entre os valores

0 – 3V. O conversor digital-analógico utilizado foi o *TLV 5636*, de fabricação da *Burr-Brown*, que também possui uma resolução de 12 *bits* e comunicação com o DSP via SPI (*Serial Peripheral Interface*).

5.3 O estágio de potência

O circuito usado no estágio de potência está baseado em um chaveador eletrônico de ponte meio *H*, que utiliza dois transistores *MOSFET* e dois diodos de recuperação ultra-rápidos, que energizam a bobina magnética do atuador, conforme descrito por [61]. Este circuito está representado na figura 5.2.

Figura 5.2: Chaveador Eletrônico em Ponte meio H

Para explicar o seu funcionamento, considere uma tensão de *gate* aplicada no ponto *k*. Com isso, uma corrente elétrica fluirá pela bobina magnética do atuador no sentido de *Q*₁ para *Q*₂. Quando a tensão no ponto *k* vai a zero, *Q*₁ e *Q*₂ ficam no estado de corte, fazendo com que a corrente da bobina do atuador seja descarregada através de *D*₁ e *D*₂. Esse funcionamento pode ser observado na figura 5.3.

Desta forma, pode-se perceber que o estágio de potência trabalha em dois estados (energizado-desenergizado). Considerando-se apenas a ação da tensão sobre a bobina do atuador magnético, o mesmo pode ser modelado como apresentado na figura 5.4.

Figura 5.3: Princípio de funcionamento do chaveador eletrônico

Figura 5.4: Carga indutiva

A indutância L é determinada pelas características eletromecânicas do atuador e a resistência do fio de cobre está representada por R . As capacitâncias parasitas entre os enrolamentos não serão levadas em consideração nesta análise. Sendo assim, a impedância característica no domínio da frequência é especificada por $Z(s) = s \cdot L + R$. Conforme mostrado por [62], considerando uma entrada degrau, a corrente $I(s)$ no domínio da frequência será dada por:

$$I(s) = \frac{V_{DC}}{s} \cdot \frac{1}{s \cdot L + R}, \quad (5.1)$$

enquanto que no domínio do tempo será definida por:

$$i(t) = \frac{V_{DC}}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (5.2)$$

Para uma excitação no estágio de potência pulsada, a taxa de variação da corrente do atuador magnético pelo tempo será dada por:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{V_{DC}}{L}(e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (5.3)$$

Pela equação (5.3), quanto maior for a frequência de chaveamento do estágio de potência, menor será o efeito da exponencial na taxa de variação da corrente do atuador, pois $t \ll \frac{R}{L}$. Com isso, considerando-se uma frequência de chaveamento alta, a equação (5.3) pode ser aproximada por:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{V_{DC}}{L} \quad (5.4)$$

Na figura 5.5, apresenta-se um diagrama do estágio de potência no qual, se comparado à figura 5.2, foi inserido um bloco da lógica de controle. A idéia básica dessa lógica de controle é fazer com que o estágio de ponte meio H seja chaveado a uma frequência elevada e também garantir que a corrente elétrica, que passa pela bobina do atuador, acompanhe o sinal de referência definido em V_{ref} , sem dinâmica. Esse sinal V_{ref} é oriundo do conversor D/A do sistema de controle definido na figura 5.1.

Existem diversas maneiras de se implementar eletronicamente o bloco denominado por *Lógica de Controle*. A maneira realizada neste trabalho foi através de um comparador por histerese.

Para explicar o seu funcionamento, considere o diagrama apresentado na figura 5.6.

O sinal V_{erro} é gerado a partir da comparação com o sinal de referência, V_{ref} , oriundo da saída do conversor D/A e do sinal de tensão V_{sensor} , que é oriundo do sensor de corrente do atuador magnético. Desta forma, o sinal V_{erro} é inserido num comparador por histerese, cuja saída V_{saida} energizará ou não o estágio de ponte meio

Figura 5.5: Diagrama em blocos de um estágio de potência genérico

Figura 5.6: Estágio de potência com comparador por histerese

H.

Nos gráficos apresentados na figura 5.7, é possível observar o princípio de funcionamento de um controlador por histerese [63]. Baseando-se nestes gráficos, suponha que o ponto de operação de origem é o ponto *a*; como a tensão V_{sensor} é menor do que $V_{ref} - \Delta V$, V_{saida} é *ON*. Caso uma tensão positiva seja aplicada no circuito, a corrente no atuador magnético aumenta rapidamente e o ponto de operação se moverá dos pontos $a \mapsto b \mapsto c$. No ponto de operação *c*, V_{saida} torna-se *OFF*. Uma vez que existe um atraso inerente ao circuito de potência, por ele estar atuando numa carga indutiva (atuador magnético), o ponto de operação se moverá de $c \mapsto d$ e, conseqüentemente, uma tensão negativa é aplicada nos terminais do atuador magnético de modo que a corrente do atuador diminua, fazendo com que o ponto de operação se mova para

$d \mapsto e \mapsto f$. A partir daí, o ciclo se repete.

Desta forma, é importante ressaltar que utilizando uma frequência de chaveamento alta, a corrente no atuador magnético irá apresentar-se como uma forma de onda triangular que acompanhará o sinal de referência, V_{ref} .

Com este circuito como estágio de potência, a corrente no atuador magnético acompanhará linearmente a tensão V_{ref} oriunda da saída do controlador. Desta forma, sob o ponto de vista prático, conforme descrito na equação (3.10), o modelo matemático do levitador magnético pode ser simplificado, pois não haverá a necessidade de se inserir uma variável de estado a mais, devido à dinâmica da bobina, conforme alguns trabalhos relacionados fazem [12, 49]. Sendo assim, a aproximação da relação linear entre a tensão do controlador com a corrente magnética da bobina do atuador, descrita na equação (3.10), é justificada.

5.4 Descrição do protótipo desenvolvido

Conforme já mencionado anteriormente, uma das contribuições da tese é mostrar experimentalmente que os resultados obtidos em simulação durante a etapa de levitação, para *gaps* iniciais grandes, são condizentes e muito próximos aos esperados teoricamente. Desta forma, um protótipo de um sistema de levitação magnético foi criteriosamente desenvolvido, conforme pode ser observado na figura 5.8.

Visando a ajustar diferentes *gaps*, um aparato mecânico também foi cuidadosamente desenvolvido para fixação do atuador magnético e do sensor óptico. A figura 5.9 representa um desenho em perspectiva no qual é possível observar esse aparato mecânico.

Com o objetivo de ajustar a altura do *gap* inicial, uma base com ajuste de rosca foi implementada sob uma plataforma cilíndrica. Nesta plataforma cilíndrica, será apoiado o rotor que será levitado por meio da ação do atuador magnético. Na figura 5.10, apresentam-se maiores detalhes deste ajuste de altura do *gap* inicial.

Figura 5.7: Formas de onda de um controlador que utiliza comparador por histerese

Figura 5.8: Foto do sistema completo de levitação magnética desenvolvido

Um ponto que vale a pena ser observado é que, para que houvesse reflexão da luz para o receptor do sensor óptico, houve a necessidade de se utilizar um material reflexivo na cabeça do rotor. Para isso, utilizou-se um anel de alumínio que foi alojado na cabeça do rotor por meio do método de interferência mecânica. Após isso, a superfície do anel de alumínio passou por um polimento de modo a deixá-lo o mais reflexível possível. A figura 5.11 apresenta um desenho mais detalhado da cabeça do rotor com o anel de alumínio.

Como a curva característica da resposta do sensor óptico em função da posição varia de acordo com o tipo de material reflexível utilizado, o sensor óptico foi caracterizado utilizando-se o próprio rotor já com o anel de alumínio.

Figura 5.9: Aparato mecânico desenvolvido

5.5 O Sensor de posição

O modelo do sistema de levitação magnética, representado pela equação (3.6), despreza diversos fenômenos não-lineares inerentes ao sistema, tais como acoplamentos magnéticos entre o mancal, o sensor e o circuito de potência.

Em diversos trabalhos relacionados à levitação magnética, o sensor *hall* é bastante utilizado. De um modo geral, nesses trabalhos, o sensor hall é normalmente alojado muito próximo ao atuador magnético, conforme ilustrado na figura 5.12.

Tal característica mecânica pode, em princípio, apresentar uma facilidade de montagem do conjunto atuador-sensor, mas também pode acentuar o fenômeno de acoplamento magnético entre o atuador e o sensor, também denominado por *crosstalk*.

Durante a fase inicial desta tese, seguindo a linha tradicional de sensores de posição, também foi utilizado um sensor *hall* alojado muito próximo ao atuador magnético, conforme pode ser observado na figura 5.13.

Figura 5.10: Detalhe do aparato mecânico para ajuste da altura inicial do rotor

No entanto, de acordo com medidas experimentais realizadas durante a fase de implementação do *hardware*, constatou-se, por meio da identificação do sistema com o analisador dinâmico de sinais *HP-35670A*, a presença de dois zeros e de uma pequena alteração nos pólos da planta real, de acordo com a equação (5.5) [38],

$$G(s) = \frac{0,11(s + 307,88)(s - 314,16)}{(s + 130,69)(s - 131,95)}. \quad (5.5)$$

Para a realização da identificação do sistema experimentalmente, a resposta em frequência em malha fechada foi obtida aplicando-se um sinal $d(t)$ e medindo-se a saída $y(t) = x(t)$, conforme ilustrado na figura 5.14.

Visando a sanar esse problema, o sensor *hall* foi substituído por um sensor óptico, que é imune à interferência do campo magnético gerado pelo atuador magnético. Novamente, agora utilizando o sensor óptico *QRB-1113*, o sistema foi identificado com o

Figura 5.11: Detalhe do aparato mecânico com sensor óptico no interior do atuador magnético

analisador dinâmico *HP-3570A*, no qual os zeros na planta identificada foram eliminados. Desta forma, comprovou-se experimentalmente, que a presença dos zeros na planta, realmente, indicava o acoplamento magnético entre o sensor *hall* e o atuador magnético.

De qualquer forma, é interessante deixar registrado que, dependendo do tipo e da posição do sensor, de fato existirá um efeito de *crosstalk* indesejado. Como o estudo desse tipo de fenômeno não faz parte do escopo principal dessa tese, optou-se em mudar o sensor para óptico, em vez de realizar um estudo do modelamento matemático da planta que levasse em consideração o efeito de *crosstalk*.

Figura 5.12: Sensor *hall* alojado junto ao atuador magnético

Figura 5.13: Detalhe do aparato mecânico com sensor *hall* no interior do atuador magnético

Figura 5.14: Identificação do sistema

Capítulo 6

Resultados de simulação e experimentais

6.1 Introdução

Neste capítulo, serão apresentados os resultados de simulação e experimentais obtidos nesta tese. Os resultados apresentados serão divididos em duas partes.

Na primeira parte, serão apresentados os resultados obtidos por meio do projeto de um controlador H_∞ linear clássico, cujas funções de ponderação foram definidas na seção 2.2, equações (3.13) e (3.14). Esse controlador H_∞ linear foi implementado em bancada [38].

Na segunda parte, serão apresentados os resultados com o projeto do controlador H_∞ não-linear que se utilizou das funções de ponderação definidas durante o projeto do controlador H_∞ linear. Assim como no caso anterior, esse controlador não-linear também foi implementado em bancada [64].

6.2 PARTE I - Controlador H_∞ linear

Nesta seção, serão apresentados os testes realizados no *hardware* de modo a possibilitar a verificação experimental do projeto eletrônico. Para isso, inicialmente, o controlador H_∞ linear, obtido na seção 3.3 e descrito na equação 3.15, foi embarcado no sistema eletrônico desenvolvido.

6.2.1 Resposta a sinais do tipo degrau

Com o sistema levitando em malha fechada, aplicou-se um degrau de amplitude 90 mV, correspondente a 2 mm, como perturbação ($d(t)$ na Fig. 2.1). A resposta do sistema na figura 6.1, mostra a rejeição desejada da perturbação. O erro de regime é nulo, o que mostra que o controlador tem efeito integrador, como especificado durante o projeto.

Figura 6.1: Resposta do sistema à perturbação degrau

Aplicando um degrau correspondente a 0,5 mm na referência, $r(t)$, o *gap* que era de cerca de 5,3 mm passou a 5,8 mm como pode ser visto na Fig. 6.2. Durante o transitório, um pouco superior a 0,1 s, o *gap* chegou a 6,5 mm, mas foi rapidamente amortecido.

Figura 6.2: Resposta do sistema à perturbação degrau na referência

Os sobressinais causados pelos degraus de tensão aplicados, tanto como perturbação, como na referência, foram considerados aceitáveis uma vez que não desestabilizaram o sistema, ou seja, o corpo não colou no mancal e também não caiu.

6.2.2 Resposta a sinais senoidais

Um sinal senoidal de 10 Hz e 60 mV (correspondente a aproximadamente 0,5mm) foi aplicado, primeiramente, como perturbação e depois aplicado como sinal de referência. O *gap* variou entre 4,8 e 6,8 mm, amplitude de 2 mm, para o sinal aplicado como perturbação, como pode ser visto na Fig. 6.3 e variou entre 4,2 e 7,1 mm, amplitude de 2,9 mm, para o sinal aplicado como referência, como pode ser visto na Fig. 6.4.

A partir dos resultados experimentais obtidos, o *hardware* e as funções de ponderação foram considerados adequados para a implementação do controlador H_∞ não-linear.

Figura 6.3: Resposta do sistema à perturbação senoidal

6.3 PARTE II - Controlador H_∞ não-Linear

Os resultados apresentados nesta seção são oriundos do projeto de controle H_∞ não-linear apresentado na seção 3.4, ou seja, com as funções de ponderação W_1 e W_3 já incluídas no projeto e obtidas por meio do projeto H_∞ linear.

Conforme já descrito na seção 5.4, o aparato mecânico apresentado na figura 5.9 permite selecionar diferentes *gaps* iniciais. Desta forma, foi possível realizar experimentos em bancada com diferentes *gaps* iniciais, que serão aqui apresentados.

A figura 6.5 mostra alguns resultados de simulação nos quais existe uma comparação entre os controladores linear e não-linear para diferentes *gaps* iniciais. Pode ser observada claramente a melhor performance do controlador H_∞ não-linear em relação ao controlador H_∞ linear.

Nas figuras 6.6 e 6.7, é possível observar que os resultados experimentais obtidos para *gaps* iniciais de 8mm e 7mm, respectivamente. Nessas mesmas figuras, estão incluídas, de modo a facilitar uma comparação direta, os mesmos resultados obtidos em simulação para os controladores H_∞ linear e não-linear.

O sobressinal que aparece durante a fase inicial de levitação foi considerado

Figura 6.4: Resposta do sistema à referência senoidal

aceitável no experimento, uma vez que o rotor não colidiu com a bobina do atuador magnético e também não se instabilizou e caiu.

Um outro ponto importante a ser observado foi o fato de ser utilizado o sensor óptico como sensor de posição, o que evitou o efeito *crosstalk* entre o atuador magnético e o sensor. Conforme já descrito na seção 5.5, experiências anteriores deste trabalho mostraram que o sensor *hall* pode apresentar o efeito de *crosstalk* entre o atuador e sensor, o que demanda maior robustez para o sistema de controle, caso este efeito não tenha sido levado em consideração no modelamento matemático da planta.

Visando a realizar uma comparação de performance de um controlador H_∞ não-linear que usa funções de ponderação sem dinâmica, com o controlador H_∞ não-linear que usa as funções de ponderação com dinâmica especificadas nas seções 2.2 e 2.4, realizaram-se simulações no *Matlab*. Estas simulações são apresentadas nas figuras 6.8(a) e 6.8(b). A figura 6.8(a) mostra o efeito de atenuação de ruído produzido por W_3 ; para um ruído branco com desvio padrão de 0,1 *newtons*, aplicado em w_1 da figura 3.3, a variância de saída é de 4,67 mm quando $W_3 = 1$, ou seja, quando W_3 não possui dinâmica, e de 4,10 mm quando W_3 é especificado conforme equação (3.14), ou seja, quando W_3 possui dinâmica há uma redução de aproximadamente 12% na variação na saída. A figura 6.8(b) mostra o efeito integrativo produzido por W_1 : uma

Figura 6.5: Resultados de Simulação para diferentes *gaps*

perturbação em degrau aplicada em $t = 0,1s$, produz um erro estacionário quando $W_1 = 1$, ou seja, quando W_1 não possui dinâmica; por outro lado, o erro estacionário tende a zero quando W_1 é especificado conforme equação (3.13), ou seja, quando W_1 possui dinâmica. Desta forma, é possível concluir que o uso das funções de ponderação com dinâmica em um projeto de controle H_∞ não-linear, conforme proposto nesta tese, pode apresentar um melhor resultado se comparado com um projeto que usa apenas funções de ponderação estáticas.

Figura 6.6: Resultado experimental para 8 mm de *gap* inicial

Figura 6.7: Resultado experimental para 7 mm de *gap* inicial

(a) Atenuação de Ruído

(b) Rejeição ao distúrbio

Figura 6.8: Resultados de Simulação de performance e robustez

Capítulo 7

Conclusão

Esta tese teve como objetivo estudar aspectos teóricos e práticos do projeto de um controlador H_∞ não-linear aplicado a um sistema de levitação magnética.

Devido ao fato de a tese também apresentar resultados experimentais muito coincidentes com os esperados em simulação, esta torna-se bastante interessante para o campo da pesquisa aplicada em sistema de controle não-lineares, uma vez que diversos foram os aspectos de implementação abordados, de modo que podem facilitar bastante o uso prático da teoria de controle H_∞ não-linear embarcado em um processador de ponto-fixa.

Apesar de diversos trabalhos já terem sido produzidos na área de levitação magnética, na literatura pesquisada pouco se fala em sistemas levitados magneticamente cuja fase inicial de levitação possui *gaps* grandes. Também, não se abordam as formas de se implementarem controladores de alto desempenho embarcados em processadores de resolução finita, a partir de projetos de controle obtidos de simuladores como o *Matlab*. Desta forma, esta tese visa a preencher este espaço, contemplando as áreas de levitação magnética a partir de *gaps* grandes e da implementação de controladores embarcados em processadores de ponto-fixa.

Desta forma, dentre as contribuições deste trabalho é possível destacar:

- Inclusão de funções de ponderação com dinâmica no projeto do controlador H_∞

não-linear. O uso dessas funções de ponderação com dinâmica possibilita uma melhor performance e maior robustez do sistema de levitação magnética, conforme pode ser visto no decorrer desta tese.

- Apresentação de um procedimento para transformação de um algoritmo em ponto-flutuante para ponto-fixado, utilizando-se a minimização da norma l_∞ , através de otimização que utiliza algoritmo genético. Este procedimento se mostrou muito útil durante a fase de implementação do *firmware* no DSP de ponto-fixado.
- Apresentação de resultados de simulação e experimentais que mostraram que o controlador H_∞ não-linear, com a inclusão das funções de ponderação com dinâmica, foram mais eficientes do que a já bem estabelecida técnica H_∞ linear para a solução da instabilidade de sistemas levitados magneticamente, principalmente quando o *gap* inicial (ou de partida) está muito longe do *gap* nominal de operação.
- Resumo prático para implementação do *hardware* e *firmware* usando o *Matlab*, através do seu *ToolBox* de ponto-fixado, e a biblioteca *IQMath*, disponibilizada pela *Texas Instruments*. Tal abordagem mostrou-se muito prática e eficiente durante a fase de implementação e depuração do DSP de ponto-fixado.

Os resultados obtidos nesta tese foram bem aceitos na comunidade científica nacional e internacional, conforme atestam os artigos [28],[37],[38],[39],[40],[41].

Proposta para trabalhos futuros

Devido à grande diversidade de áreas de engenharia envolvidas nesta tese e à existência de um sistema de levitação magnética já prototipado, várias são as propostas para trabalhos futuros. Algumas delas são

- realização de um estudo mais detalhado do modelamento de uma planta que considere o efeito de *crosstalk* entre o atuador magnético e o sensor *hall*;
- estudo comparativo de outras técnicas de controle aplicadas para minimizar o

efeito de instabilidade de sistemas magneticamente levitados a partir de *gaps* iniciais grandes;

- automatização do método proposto nesta tese para transformação de um algoritmo de controle em ponto-flutuante para ponto-fixo;
- reformular a teoria do controlador H_∞ não-linear aqui apresentada considerando as funções de ponderação não lineares, desde que a linearização dessas funções tivessem a resposta em frequência desejada. Isso possibilitaria o estudo de vários efeitos não lineares do sistema de levitação magnética, como por exemplo a variação do entreferro durante a fase inicial de levitação a partir de *gaps* iniciais grandes, dentre outros.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Nadashima. The superconducting magnet for the maglev transport system. *IEEE Trans. Magn.*, 30(6):1572–1578, 1994.
- [2] A. Bittar and R. M. Sales. H_2 and H_∞ control for maglev vehicles. *IEEE Control System Magazine*, 18:18–25, 1998.
- [3] H. Bleuler. A survey of magnetic levitation and magnetic bearing types. *JSME Int. J.*, 35:335–342, 1992.
- [4] B. Lu, H. Choi, G. D. Buckner, and Tammi K. Linear parameter-varying techniques for control of a magnetic bearing system. *Control Engineering Practice*, 16:1161–1172, 2008.
- [5] N. C. Tsai, B. Y. Wu, and S. L. Hsu. Stability constraints of active magnetic bearing control systems. *International Journal of Control*, 80(12):1893–1902, 2007.
- [6] N. Kosuke and I. Masashi. A noncontact permanent magnet levitation table with electromagnetic control and its vibration isolation methods using direct disturbance cancellation combining optimal regulator. *IEEE Trans. Magn.*, 31(1):885–896, 1995.
- [7] N. F. Al-Muthairi and M. Zribi. Sliding mode control of a magnetic levitation system. *Mathematical Problems in Engineering*, 2:93–107, 2004.
- [8] P. K. Sinha and A. N. Pechev. Model reference adaptive control of a maglev system with stable maximum descent criterion. *Automatica*, 35:1457–1465, 1999.

- [9] D. Cho, Y Kato, and D. Spilman. Sliding mode and classical controllers in magnetic levitation systems. *IEEE Control System Magazine*, pages 42–48, 1993.
- [10] A. Charara, J. D. Miras, and B. Caron. Nonlinear control of a magnetic levitation system without premagnetization. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(5):513–523, 1996.
- [11] M. Fujita, T. Namerikawa, F. Matsumura, and K. Uchida. μ -synthesis of an electromagnetic suspension system. *IEEE Transaction Automatic Control*, 40:530–536, August 1995.
- [12] P. K. Sinha and A. N. Pechev. Nonlinear H_∞ controllers for electromagnetic suspension systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(4):563–568, April 2004.
- [13] J. Kaloust, C. Ham, and Z. Qu. Nonlinear robust control design for levitation and propulsion of a maglev system. *IEE Proc. Control Theory Appl.*, 151(4):460–464, July 2004.
- [14] S. Banerjee, D. Prasadb, and J. Pal. Large gap control in electromagnetic levitation. *ISA Transaction*, 45(2):215–224, 2006.
- [15] S. Banerjee, T. K. S. Kumar, J. Pal, and D. Prasad. Design for large-gap control of electromagnetically levitated system by using an optimization technique. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 16(3):408–415, 2008.
- [16] J. A. Ball and J. W. Helton. H_∞ control for nonlinear plants: connections with differential games. In *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 956–962, 1989.
- [17] T. Başar and P. Bernhard. *H_∞ optimal control and related minimax design problems*. Birkhäuser, Boston, 1990.
- [18] A. J. van der Schaft. On a state space approach to nonlinear H_∞ control. *Systems & Control Letters*, 16(1):1–8, Jan. 1991.

- [19] A. J. van der Schaft. L_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_∞ control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6):770–784, June 1992.
- [20] A. Isidori and A. Astolfi. Disturbance attenuation and H_∞ -control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(9):1283–1293, Sept. 1992.
- [21] J. A. Ball, J. W. Helton, and M. L. Walker. H_∞ control for nonlinear systems with output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(4):546–559, April 1993.
- [22] A. Isidori and W. Kang. H_∞ control via measurement feedback for general nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3):466–472, March 1995.
- [23] W.-M Lu and J. C. Doyle. H_∞ control of nonlinear systems: a convex characterization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(9):1668–1675, Sept. 1995.
- [24] R. W. Beard and T. W. McLain. Successive Galerkin approximation algorithms for nonlinear optimal and robust control. *International Journal of Control*, 71(5):717–743, 1998.
- [25] M. D. S. Aliyu. An approach for solving the Hamilton-Jacobi-Isaacs equation (HJIE) in nonlinear H_∞ control. *Automatica*, 39(5):877–884, 2003.
- [26] M. Abu-Khalaf, F. L. Lewis, and J. Huang. Hamilton-Jacobi-Isaacs formulation for constrained input nonlinear systems. In *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 5, pages 5034–5040, 2004.
- [27] J. Huang and C.-F. Lin. Numerical approach to computing nonlinear H_∞ control laws. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 18(5):989–994, Sept.-Oct. 1995.
- [28] H. C. Ferreira, P. H. Rocha, and R. M. Sales. Nonlinear H_∞ control and the Hamilton-Jacobi-Isaacs equation. In *17th IFAC World Congress*, Seoul, 2008.

- [29] W. Kang, P. K. De, and A. Isidori. Flight control in a windshear via nonlinear H_∞ methods. In *31st IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 1135–1142, 1992.
- [30] M. J. Yazdanpanah, K. Khorasani, and R. V. Patel. Uncertainty compensation for a flexible-link manipulator using nonlinear H_∞ control. *International Journal of Control*, 69(6):753–771, 1998.
- [31] M. A. Cantim, Y. Savaria, D. Prodamos, and P. Lavoie. A metric for automatic word-length determination of hardware datapaths. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and System*, 25(10):2228–2231, 2006.
- [32] Z. Fang, J. E. Carletta, and R. J. Veillette. A methodology for FPGA-based control implementation. *IEEE Transactions on Control System Technology*, 13(6):977–987, 2005.
- [33] G. A. Constantinides, P. Y. K. Cheung, and W. Luk. Wordlength optimization for linear digital signal processing. *IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and System*, 22(10):1432–1442, 2003.
- [34] G. Vanuytsel, P. Boets, L. van Biesen, and S. Temmerman. Efficient hybrid optimization of fixed-point cascaded IIR filter coefficients. In *Proceedings of the 19th IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*, pages 793–797, 2002.
- [35] K. Kum and W. Sung. Combined word-length optimization and high-level synthesis of digital signal processing systems. *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, 20(8):921–930, 2001.
- [36] M. Willems, V. Bursgens, T. Grotker, and H. Meyr. FRIDEGE: An interactive code generation environment for HW/SW codesign. In *Proceedings of the ICASSP*, pages 793–797, 1997.

- [37] P. H. Rocha, H. C. Ferreira, M. C. Porsh, and R. M. Sales. Fixed-point DSP implementation of nonlinear H_∞ controller for large gap electromagnetic suspension system. In *17th IFAC World Congress*, pages 14223–14228, Seoul, 2008.
- [38] P. H. Rocha, H. C. Ferreira, M. C. Porsh, R. M. Sales, and R. R. Ferreira. Controle H_∞ de sistema magneticamente levitado. In *Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automática*, pages 839–844, 2006.
- [39] P. H. Rocha, M. C. Porsh, and R. M. Sales. Redutor de vibração, através de atuadores magnéticos, para um rotor de Jeffcot/Laval durante a passagem pela velocidade crítica. *Revista Pesquisa Naval*, (19), 2006.
- [40] P. H. Rocha, H. C. Porsh, M. C. Ferreira, and R. M. Sales. Implementação de controladores em DSP de ponto-fixos. *Revista Pesquisa Naval*, (21):9–17, 2008.
- [41] P. H. Rocha, H. C. Ferreira, M. C. Porsh, and R. M. Sales. Fixed-point DSP implementation of nonlinear H_∞ controller for large gap electromagnetic suspension system. *Control Engineering Practice*, page (em revisão), 2009.
- [42] J. C. Willems. Dissipative dynamical systems part I: general theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 45(1):321–351, 1972.
- [43] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8):831–847, Aug. 1989.
- [44] G. Zames. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26:301–320, 1981.
- [45] D. Hill and P. Moylan. The stability of non-linear dissipative systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(9):708–711, 1976.
- [46] A. Astolfi. Singular H_∞ control for nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 7:727–740, 1997.

- [47] E. G. Al'brekht. On the optimal stabilization of nonlinear systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 25:1254–1266, 1962.
- [48] P. Tsiotras, M. Corless, and M. Rotea. An L_2 disturbance attenuation solution to the nonlinear benchmark problem. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8:311–330, 1998.
- [49] P. K. Sinha. *Electromagnetic Suspension: Dynamics & Control*. Peter Peregrinus, London, U.K., 1987.
- [50] M. C. Porsch. *Projeto de um sistema de controle para um motor apoiado por mancais magnéticos*. Tese de Mestrado, Escola Politécnica da USP, 1996.
- [51] A. Bittar. *Controle da suspensão eletromagnética do protótipo de um veículo*. Tese de Doutorado, Escola Politécnica da USP, 1998.
- [52] C. Inacio and D. Ombres. The DSP decision: fixed-point or floating ? *IEEE Spectrum*, pages 72–74, September 1996.
- [53] G.V.R. Viana. Padrão IEEE 754 para aritmética binária de ponto flutuante. *Revista CT*, 1(1):29–33, 1999.
- [54] M. J. Murdocca and V. P. Heuring. *Introdução à arquitetura de computadores*. Editora Campus, Rio de Janeiro - RJ, 2001.
- [55] F. M. Portelinha. *Programação Avançada para Processadores de Ponto-Fixo utilizando o Code Composer Studio*. DSP Telecomunicações Ltda, Santa Rita do Sapucaí - MG, 2007.
- [56] S. Kim and W. Sung. A floating-point to fixed-point assembly program translator for TMS320c25. *IEEE Transction on Circuits and Systems*, 41(11):730–739, 1994.
- [57] S. Kim, K. Kum, and W. Sung. Fixed-point optimization utility for C and C++ based digital signal processing programs. *IEEE Transction on Circuits and Systems*, 45(11):1455–1464, 1998.

- [58] J. C. Doyle, B. A. Francis, and A. R. Tannenbaum. *Feedback Control Theory*. Macmillan, New York, US, 1992.
- [59] D. E. Goldberg. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.
- [60] TI Texas Instruments. *IQMath Library - A Virtual Floating Point Engine*. TI - SPRC87, Dallas, US, 2002.
- [61] N. A. Shirazee and A. Basak. Electropermanent suspension system for acquiring large air-gaps to suspend loads. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31(6):4193–4195, 1995.
- [62] M. C. Porsch. *Projeto de um sistema de controle para um rotor apoiado por mancais magnéticos*. Tese de Mestrado Poli(USP), São Paulo SP, 1996.
- [63] A. Chiba, T. Fukao, O. Ichikawa, M. Oshima, M. Takemoto, and D. G. Dorrel. *Magnetic Bearing and Bearingless Drives*. Elsevier - Newnes, Burlington (MA), 2005.
- [64] P. H. Rocha, H. C. Ferreira, M. C. Porsh, and R. M. Sales. Fixed-point DSP implementation of nonlinear H_∞ controller for large gap electromagnetic suspension system. *Control Engineering Practice*, 2008 - a ser publicado.