Carlos Eduardo de Brito Novaes

***Métodos de estimação de derivadas via cálculo
operacional e aplicações a problemas de controle***

São Paulo

<2010>

Carlos Eduardo de Brito Novaes

Métodos de estimação de derivadas via cálculo operacional e aplicações a problemas de controle

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do grau de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração: Engenharia de Sistemas.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Sérgio Pereira da Silva.

São Paulo

<2010>

Dedicatória

Dedico este trabalho aos amigos que me incentivaram, à minha família que se resignou com alguns momentos de ausência, ao meu pai que por muitas vezes exclamou: - De novo nestes gráficos! Quando isto termina? - E que em tantas outras vezes me apoiou, acompanhou em viagens e apresentações e deu seus palpites na construção do mecanismo.

Agradeço também a minha namorada, em especial por sua compreensão, por me criticar e querer me fazer melhorar. Ela teve paciência para acompanhar meus ensaios e mesmo não sendo da área de exatas, acabou por entender e discutir comigo as idéias gerais de derivadas, integrais, controle, minimização e etc..

Aos professores e escolas aonde estudei e aprendi, aos caros colegas da USP e ao magnifico corpo docente desta instituição. Penso ter encontrado pessoas sábias e motivadoras, pessoas que me instigaram a conhecer mais. Em especial ao orientador, Prof. Dr. Paulo Sérgio, que me ensinou como apresentar uma idéia e me indicou quando algumas tarefas estavam bem encaminhadas, acabou por se tornar um amigo.

Agradecimentos

A realização deste trabalho não seria possível sem a ajuda e conselhos de algumas pessoas, gostaria de agradecer a todos:

Ao Professor Walter Kaiser do Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétrica da Escola Politécnica da USP, pelas dicas e conselhos na usinagem e construção do pêndulo.

Aos professores e equipe do LAC, pelo custeio das peças, instruções de uso da placa de aquisição e laboratórios.

Aos amigos e colegas da FEI e da USP. Pessoas que deram sugestões e fizeram perguntas inusitadas, me fazendo assim olhar os problemas de uma ótica diferente.

Resumo

Este trabalho versa sobre técnicas de estimação de derivadas de forma não assintótica conforme abordagem algébrica de Michel Fliess, e sua aplicação na determinação quase instantânea do estado interno de um sistema dinâmico, cria-se assim estimadores de estado que não se baseiam no observador de Luenberger.

No desenvolvimento do trabalho demonstramos algumas características destes estimadores e apresentamos uma contribuição teórica para viabilizar a implementação destes estimadores em sistemas de controle de tempo real. Posteriormente, um sistema mecânico de dinâmica não linear foi construído e permitiu ensaios em laboratório que atestam, através dos resultados experimentais encontrados, a funcionalidade deste tipo de estimador de estados.

PALAVRAS CHAVE: Controle (Teoria e sistemas de controle). Cálculo Operacional. Sistemas dinâmicos. Sistemas não Lineares.

Abstract

This work is about derivative estimation technique based on an algebraic and non-asymptotically approach, as devised by Michel Fliess, applied on quasi-instantaneous determination of the internal state of a dynamical system, using state estimators that aren't based on the Luenberger observer.

Over this work we present some particularities of these estimators and a theoretical contribution that will be able to implement these algebraic estimators in a real time control system. After that, a non-linear mechanical system was built to verify the functionality of these state estimators.

KEYWORDS: Control Theory. Operational Calculus. Dynamic Systems. Non-linear Systems.

Lista de Figuras

2.1	Esquema de chaveamento entre dois estimadores.	p. 33
2.2	Estimando a primeira derivada de $y(t) = \sin(t)$	p. 34
2.3	Estimando a primeira derivada de $y(t) = \sin(t)$	p. 35
2.4	Estimando a primeira derivada de $y(t) = \sin(t) + \frac{\sin(100t)}{1000} + \frac{\sin(10000t)}{1000000}$	p. 36
2.5	Detalhe da estimativa da primeira derivada de $y(t) = \sin(t) + \frac{\sin(100t)}{1000} + \frac{\sin(10000t)}{1000000}$	p. 36
2.6	Detalhe da estimativa da primeira derivada de $y(t) = \sin(t) + \frac{\sin(100t)}{1000} + \frac{\sin(10000t)}{1000000}$	p. 37
2.7	Estimando a primeira derivada de $y(t) = \sin(t)$ quando comprometido por ruído.	p. 38
3.1	Resultado da integração numérica para diferentes passos de integração (de $1e-2$ a $1e-5$).	p. 40
3.2	Detalhamento da convergência da integração numérica	p. 41
3.3	Erro absoluto da integração numérica em função do passo de integração.	p. 41
3.4	Estimador Algébrico sem ruído.	p. 44
3.5	Detalhe do Estimador Algébrico sem ruído.	p. 45
3.6	Erro no Estimador Algébrico sem ruído.	p. 45
3.7	Detalhe do erro no Estimador Algébrico sem ruído.	p. 46
3.8	Estimador Algébrico com ruído.	p. 46
3.9	Detalhe do Estimador Algébrico com ruído.	p. 47
3.10	Erro no Estimador Algébrico com ruído.	p. 47
3.11	Detalhe do erro no Estimador Algébrico com ruído.	p. 48

3.12	Comportamento da saída.	p. 50
3.13	Comportamento dos estados internos	p. 50
3.14	Comportamento do estimador.	p. 51
3.15	Comportamento do estimador na presença de ruído.	p. 51
3.16	Comportamento da saída.	p. 52
3.17	Comportamento do estimador.	p. 52
3.18	Comportamento da saída quando o estimador é perturbado por ruído.	p. 53
3.19	Comportamento do estimador quando perturbado por ruído.	p. 53
4.1	Visão geral do pêndulo.	p. 56
4.2	Ilustração das Coordenadas Utilizadas.	p. 58
4.3	Gráfico de comportamento do modelo de atrito.	p. 63
4.4	Ensaio do modelo de atrito, força de 1N aplicada ao bloco	p. 64
4.5	Ensaio do modelo de atrito, força de 2N aplicada ao bloco	p. 65
4.6	Ensaio do modelo de atrito, bloco com velocidade inicial.	p. 65
4.7	Gráfico de comportamento do modelo de atrito.	p. 70
4.8	Gráfico de comportamento do modelo de atrito.	p. 70
4.9	Resultado de ensaio, após filtragem.	p. 71
4.10	Atrito cinético + viscoso.	p. 72
4.11	Atrito cinético + viscoso.	p. 72
4.12	Detalhe do Atrito cinético + viscoso.	p. 73
4.13	Modelo e Ensaio	p. 74
5.1	Simulação de Controle Linear	p. 76
5.2	Simulação de Controle Linear por observadores assintóticos de estado.	p. 77
5.3	Simulação de Controle Linear por observadores assintóticos de estado em presença de ruído aditivo.	p. 78
5.4	Simulação de Controle Linear por observador algébrico	p. 78

5.5	Simulação de Controle Linear por observador algébrico na presença de ruído	p. 79
5.6	Comparativo de posicionamento.	p. 80
5.7	Diferença de posicionamento do braço em relação à realimentação de estados reais.	p. 80
5.8	Comparativo de posicionamento em ambiente ruidoso.	p. 81
5.9	Diferença de posicionamento em relação à realimentação de estados reais, ambiente ruidoso.	p. 81
5.10	Valores Estimados de ϕ	p. 82
5.11	Diferença entre os valores estimados e o real valor de ϕ .	p. 82
5.12	Valores Estimados de ϕ	p. 83
5.13	Diferença entre os valores estimados e o real valor de ϕ , ambiente ruidoso.	p. 83
5.14	Valores Estimados de $\dot{\phi}$	p. 84
5.15	Diferença entre os valores estimados e o valor real de $\dot{\phi}$.	p. 84
5.16	Valores Estimados de $\dot{\phi}$, ambiente ruidoso.	p. 85
5.17	Diferença entre os valores estimados e o valor real de $\dot{\phi}$, ambiente ruidoso.	p. 85
5.18	Posicionamento do braço no ensaio em bancada.	p. 86
5.19	Comparativo entre os observadores de estado.	p. 87
5.20	Comparativo entre os observadores de estado.	p. 87
5.21	Comparativo entre os observadores de estado.	p. 88
5.22	Comparativo entre os observadores de estado.	p. 88
5.23	Comparativo entre os esforços de controle.	p. 89
B.1	Esquema fundamental do estimador.	p. 99
B.2	Esquema detalhado do estimador de derivadas	p. 100
B.3	Fluxograma do algoritmo.	p. 105
C.1	Modelo Global	p. 119
C.2	Modelo Completo do Pêndulo.	p. 120
C.3	Modelo Idealizado do Pêndulo.	p. 120

C.4	Modelo do Motor.	p. 121
C.5	Modelo do Observador Linear.	p. 121
C.6	Modelo do Observador Algébrico.	p. 122
C.7	Modelo de Atrito.	p. 122
C.8	Circuito elétrico do leitor do encoder	p. 126
C.9	Circuito elétrico do display de leds	p. 127
C.10	Circuito elétrico do estágio de potência	p. 128
C.11	Desenho da Barra	p. 129
C.12	Chapa de Fixação do Encoder.	p. 130
C.13	Contra Peso.	p. 131
C.14	Eixo.	p. 132
C.15	Flange do Disco.	p. 133
C.16	Lateral 1.	p. 134
C.17	Lateral 2.	p. 135
C.18	Tampas.	p. 136
C.19	Pilar.	p. 137

Lista de Tabelas

2.1	Constantes relativas ao estimador algébrico	p. 29
2.2	Constantes para estimador de ordem 3.	p. 30
4.1	Coordenadas Utilizadas.	p. 57
4.2	Simbologia das grandezas físicas.	p. 58
4.3	Simbologia dos componentes do sistema.	p. 59
4.4	Propriedades físicas do sistema mecânico	p. 68
B.1	Parâmetros do Estimador em tempo discreto.	p. 101
B.2	Coeficientes do estimador.	p. 102

Sumário

Tabela de Símbolos.	p. 15
1 Introdução	p. 17
1.1 Objetivo deste trabalho	p. 18
1.2 Estrutura do trabalho	p. 18
2 Sobre a teoria de observadores rápidos	p. 20
2.1 Introdução sobre a teoria de observadores convencional	p. 21
2.2 Introdução sobre a teoria de observadores rápidos	p. 22
2.3 Representação via filtros variantes no tempo	p. 22
2.3.1 Exemplo algébrico de ordem baixa	p. 30
2.4 Particularidades da teoria de estimadores rápidos	p. 32
2.5 Uso de dois estimadores em paralelo	p. 33
2.6 Uso de filtragem adicional	p. 33
2.7 Simulações	p. 34
3 Implementação em tempo discreto	p. 39
3.1 Dificuldades relativas à implementação	p. 40
3.2 Abordagem via aproximação do sinal amostrado por segmentos de polinômios	p. 42
3.2.1 Comparando a técnica descrita com a integração numérica de um sis- tema caótico	p. 43
3.3 Breve aplicação em controle	p. 48
3.4 Possibilidades não exploradas	p. 53

4	Sistema Mecânico	p. 55
4.1	Descrição do sistema	p. 56
4.2	Modelagem do sistema	p. 57
4.2.1	Definição da simbologia adotada	p. 57
4.2.2	Modelagem do sistema através do formalismo Lagrangiano	p. 59
4.2.3	Modelagem do atrito	p. 63
4.2.4	Motor como transdutor de torque	p. 65
4.2.5	Modelo linearizado	p. 66
4.2.6	Parâmetros numéricos do modelo	p. 66
5	Controle do Pêndulo por transmissão de torque	p. 75
5.1	Realimentação linear de estados	p. 76
5.2	Observador assintótico para o sistema linearizado	p. 77
5.3	Controle com estimador algébrico	p. 78
5.4	Comparações entre os observadores	p. 79
5.4.1	Posicionamento do braço do pêndulo.	p. 79
5.4.2	Estimador de estados ϕ	p. 81
5.4.3	Estimador de estados $\dot{\phi}$	p. 83
5.5	Ensaio de Bancada com o pêndulo por transferência de torque	p. 86
5.5.1	Comparativo do resultado de controle	p. 86
5.5.2	Comparativo entre os observadores	p. 86
5.5.3	Comparativo entre os esforços de controle	p. 89
5.5.4	Considerações finais sobre o ensaio realizado	p. 89
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	p. 91
	Referências Bibliográficas	p. 93

Anexo A – Demonstrações	p. 94
A.1 Demonstração do resultado sobre integrais de polinômios	p. 94
Lema:	p. 94
Prova:	p. 94
A.2 Equação do filtro Z em tempo discreto	p. 95
Anexo B – Resumo de Implementação	p. 99
B.1 Definição dos parâmetros do sistema	p. 100
B.2 Pré cálculo dos coeficientes	p. 102
B.2.1 Cálculo da matriz de aproximação polinomial para cada instante pos- sível de amostragem	p. 102
B.2.2 Cálculo das constantes do estimador	p. 102
B.3 Construção do estimador	p. 103
B.4 Algoritmo	p. 103
B.4.1 Ambos os contadores de tempo (t_a e t_b) serão incrementados de Δ_t	p. 103
B.4.2 Deslocar amostras em y_{buffer} e inserir amostra atual na primeira posição	p. 103
B.4.3 Determinar os coeficientes α para o filtro Z_a	p. 104
B.4.4 Determinar a evolução dos estágios do filtro Z_a	p. 104
B.4.5 Determinar os coeficientes α para o filtro Z_b	p. 104
B.4.6 Determinar a evolução dos estágios do filtro Z_b	p. 104
B.4.7 Escolher os estágios do filtro cujo tempo relativo (t_a ou t_b) seja maior e usar estes valores no cálculo das estimativas das derivadas	p. 104
B.4.8 Se o contador de tempo t_a tiver valor igual a metade do valor t_{reset} , reinicializar o vetor Z_b e o contador t_b . Se isto não ocorrer, então ver- ificar se o contador t_b tem valor igual ou superior a metade do valor t_{reset} e neste caso reinicializar o vetor Z_a e o contador t_a . Esta política implementa o procedimento de reinicialização alternada ilustrado em 2.1	p. 105
B.4.9 Prosseguir com a próxima amostra	p. 105

Anexo C – Ferramentas utilizadas	p. 106
C.1 Introdução	p. 106
C.2 Programas para ambiente MATLAB	p. 106
C.2.1 Programa Makkar_Solve.m	p. 106
C.2.2 Programa NAO_disc_sfunc.m	p. 108
C.2.3 Programa SGDerivation.m	p. 115
C.2.4 Programa Parametros.m	p. 116
C.2.5 Programa IdentificaAtritoBarra.m	p. 117
C.3 Modelos para SIMULINK.	p. 119
C.3.1 Modelo Global	p. 119
C.3.2 Modelo completo do Pêndulo	p. 120
C.3.3 Modelo idealizado do Pêndulo	p. 120
C.3.4 Modelo do Motor	p. 121
C.3.5 Modelo do Observador linear	p. 121
C.3.6 Modelo do Observador algébrico	p. 122
C.3.7 Modelo gerador de atrito	p. 122
C.4 Programa para microcontrolador PIC	p. 122
C.5 Diagrama elétrico dos dispositivos de interface	p. 126
C.5.1 Circuito de leitura do encoder	p. 126
C.5.2 Circuito de saída de potência	p. 128
C.6 Desenho das peças usinadas na construção do pêndulo	p. 129
C.7 Programas em linguagem C/C++	p. 138
C.7.1 Interface para o subsistema Xenomai	p. 138
C.7.2 Implementação discreta do observador algébrico	p. 146
C.7.3 Rotinas para criar arquivos .mat	p. 164
C.7.4 Driver para acesso à placa de aquisição LYNX12/36	p. 169

Tabela de Símbolos.

Símbolo	Descrição
$y(t)$	Sinal cujas derivadas serão estimadas.
k	Ordem da expansão em serie de Taylor usada no estimador algébrico.
$a(k, \delta, l)$	Coeficiente utilizado no desenvolvimento das equações do estimador algébrico.
$b(k, \delta, m)$	Coeficiente utilizado no desenvolvimento e resultado final das equações do estimador algébrico. Ver tabela 2.1
$D(k, i, j)$	Coeficiente utilizado no desenvolvimento e resultado final das equações do estimador algébrico. Ver tabela 2.1
$E(k, i)$	Coeficiente utilizado no desenvolvimento e resultado final das equações do estimador algébrico. Ver tabela 2.1
$z_i(k, t)$	Estágio i da construção como filtro variante no tempo.
p	Grau do polinômio que aproxima as amostras do sinal de entrada na implementação em tempo discreto.
t_0	Valor numérico do tempo em que ocorre a amostra atual do sinal discretizado. Este tempo não é absoluto, é relativo à última reinicialização do estimador.
t_i	Da mesma maneira que t_0 , se referindo ao tempo em i amostras antes da atual e relativo à última reinicialização do estimador.
Δ_t	Intervalo de amostragem.
α_i	Coeficientes i do polinômio de grau p que aproxima as últimas $p + 1$ amostras do sinal na implementação em tempo discreto.
$\mathbb{A}(t_0)$	Matriz variante no tempo que define os coeficientes α_i como uma combinação linear das últimas $p + 1$ amostras do sinal de entrada.
ϕ	Ângulo formado entre a barra e o plano vertical, nulo quando em equilíbrio não trivial, para $0 < \eta < 2\pi$.
θ	Ângulo formado entre um ponto de referência no disco e a barra.
η	Ângulo formado entre o plano da barra e o plano horizontal. Constante durante os ensaios.
h	Altura. Ver tabelas 4.2 e 4.3.
M	Massa. Ver tabelas 4.2 e 4.3.

Símbolo	Descrição
L	Comprimento. Ver tabelas 4.2 e 4.3.
τ	Torque. Ver tabelas 4.2 e 4.3.
J	Momento de Inercia. Ver tabelas 4.2 e 4.3.
$\tau_{at,}$	Torque de Atrito. Ver tabelas 4.2 e 4.3.
MOT	Motor. Ver tabelas 4.2 e 4.3.
DIS	Disco. Ver tabelas 4.2 e 4.3.
CIL	Cilindro de Contra Peso. Ver tabelas 4.2 e 4.3.
BAR	Barra em sua totalidade. Ver tabelas 4.2 e 4.3.
$BAR1$	Trecho da barra que sustenta o motor e disco. Ver tabelas 4.2 e 4.3.
$BAR2$	Trecho da barra que sustenta o contra peso. Ver tabelas 4.2 e 4.3.
$\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2,$ $\mathbb{C}_3$	Constantes mecânicas do pêndulo.
γ_i	Coefficientes do modelo de atrito utilizado nas simulações.
$K_{\tau, MOT}$	Constante de proporcionalidade entre torque e tensão de armadura no modelo simplificado do motor operando em baixas velocidades.
K_{MOT}	Constante de torque e de força contra eletromotriz do motor.
Va_{MOT}	Tensão de armadura do motor.

1 Introdução

"Na natureza nada se cria, nada se perde, tudo se transforma."

Lavoisier

Neste capítulo são apresentados o objetivo desta dissertação e sua organização básica.

A teoria desenvolvida em recentes trabalhos dos autores de [1, 2] abre a possibilidade de se construir estimadores de estado rápidos e ao mesmo tempo capazes de rejeitar ruídos. Tais estimadores se valem de métodos algébricos para estimar as derivadas de um sinal a partir de combinações de suas integrais no tempo. Destaca-se em [1] a visualização destes estimadores algébricos como filtros analógicos variantes no tempo, e em [2] propõe-se o uso de dois estimadores rodando em paralelo de maneira a aumentar a precisão e robustez das derivadas estimadas. O trabalho desenvolvido em [3] demonstra como implementar tais filtros em computadores digitais com taxas de amostragem relativamente baixas e sem a necessidade de elevado poder computacional, viabilizando o uso desta teoria em sistemas de controle em tempo real.

1.1 Objetivo deste trabalho

O principal objetivo desta pesquisa é utilizar estes métodos de estimação para efetuar a observação e controle de alguns sistemas dinâmicos, e estabelecer comparações com observadores tradicionais. Um sistema mecânico, pêndulo invertido por transmissão de torque, foi construído e os resultados dos ensaios de laboratório serão discutidos e utilizados para complementar estas comparações com dados práticos.

1.2 Estrutura do trabalho

Este trabalho está dividido em seis capítulos, iniciando por esta introdução e finalizando, no capítulo 6, com uma discussão das conclusões e aprendizados obtidos e sugestões para pesquisas futuras.

O capítulo 2 introduz a teoria de observadores rápidos, transcrevendo alguns resultados de [1], discute suas características e apresenta algumas simulações. Este capítulo constitui uma pequena introdução à teoria criada por Fliess e co-autores, limitando-se a demonstrar os resultados mais fundamentais para continuar esta dissertação.

No capítulo 3 tratamos da implementação desta teoria em ambiente computacional e sobre sua aplicação em sistemas de controle de tempo real, introduzindo uma técnica que encontramos para viabilizar a implementação destes estimadores. Finalizando o capítulo 3 apresentamos uma pequena aplicação de controle utilizando o estimador algébrico implementado em tempo discreto.

O capítulo 4 versa sobre o sistema mecânico construído, descrevendo e deduzindo suas equações de movimento e introduzindo um modelo de atrito. Após ensaios preliminares, alguns

valores numéricos são estimados.

O controle do sistema é discutido no capítulo 5, onde apresentamos os resultados experimentais encontrados.

A seção de apêndices apresenta algumas demonstrações e detalha as ferramentas, programas e diagramas de simulação.

2 *Sobre a teoria de observadores rápidos*

“... considerando que quaisquer pensamentos que nos ocorrem quando estamos acordados nos podem também ocorrer enquanto dormimos, sem que exista nenhum, nesse caso, que seja correto, decidi fazer de conta que todas as coisas que até então haviam entrado no meu espírito não eram mais corretas do que as ilusões de meus sonhos.

Porém, logo em seguida, percebi que, ao mesmo tempo que eu queria pensar que tudo era falso, fazia-se necessário que eu, que pensava, fosse alguma coisa.

E, ao notar que esta verdade: eu penso, logo existo, era tão sólida e tão correta que as mais extravagantes suposições dos cétricos não seriam capazes de lhe causar abalo, julguei que podia considerá-la, sem escrúpulo algum, o primeiro princípio da filosofia que eu procurava.”

(René Descartes – O Discurso do Método)

Neste capítulo são apresentados os conceitos nos quais se baseia o presente trabalho. Uma breve apresentação da teoria de observadores assintóticos é apresentada, transcrição e tradução livre de alguns trechos de [1].

As características especiais destes estimadores são discutidas e embasadas em simulações e exemplos.

2.1 Introdução sobre a teoria de observadores convencional

A teoria de controle moderno se baseia na realimentação de estados para alocar os pólos controláveis de um sistema dinâmico linear. Porém estes estados muitas vezes não se encontram acessíveis ao projetista de controle e é necessário que sejam estimados. O observador de Luenberger, devidamente projetado para um dado sistema dinâmico, permite a estimação assintótica dos estados internos tomando informações das entradas e saídas deste sistema. Este observador é construído a partir de um modelo do sistema dinâmico onde se injetam as entradas do sistema real.

Obviamente devido às características assintóticas deste observador de estados, ou seja, o estado é estimado com um erro que tende assintoticamente a zero, a realimentação dos estados observados não produz um efeito idêntico à realimentação dos estados reais. Isto não é um grande problema em sistemas lineares, pois devido ao teorema da separação, se o observador e a lei de realimentação de estados forem estáveis, a realimentação dos estados observados será estável e terá os pólos do observador e da lei de controle. Já quando tratamos de sistemas não lineares, o teorema da separação não é normalmente válido e, em geral, não se pode atestar a estabilidade de uma realimentação de estados [4].

A teoria nos mostra que um sistema dinâmico linear que atenda as características de controlabilidade pode ter seus pólos livremente alocados no plano complexo pela aplicação em sua entrada de uma adequada combinação linear dos seus estados internos. Desta maneira, basta se determinar os pesos para a adequada realimentação de cada estado interno e poderemos modificar com bastante liberdade o comportamento de um sistema dinâmico [5].

Tirar proveito desta característica (controlabilidade) é muito interessante, mas normalmente não se tem, em um sistema real, acesso a todos os estados internos. Neste momento, é necessário que o sistema seja também observável, o que implica que o estado interno pode ser deduzido quando se conhece a entrada aplicada e a saída obtida [5].

A teoria nos mostra também, que se um sistema linear, autônomo e invariante no tempo é observável, então seu estado interno pode ser instantaneamente deduzido pela adequada combinação linear da saída e um número finito de suas derivadas no tempo. Obter derivadas a partir de um sinal real e sujeito a ruídos e imprecisões de leitura não é tarefa simples, e por este motivo, a teoria moderna de controle utiliza observadores assintóticos, ou seja, sistemas dinâmicos em que se injetam as entradas e saídas do sistema observado e que geram estimativas dos estados internos. Estas estimativas tendem assintoticamente ao estado real, por este motivo são chamados de observadores assintóticos.

2.2 Introdução sobre a teoria de observadores rápidos

Utilizando-se de métodos algébricos e cálculo operacional, é possível construir um estimador rápido de derivadas que seja ao mesmo tempo causal e robusto com relação a ruídos. Esta teoria é desenvolvida nos trabalhos de Fliess e co-autores,[6, 7, 1, 2, 8], para uma aproximação polinomial em série de Taylor, truncada em uma ordem finita k . Demonstra-se que as derivadas de ordem 0 até $k - 1$ desta aproximação polinomial podem ser obtidas pela combinação de um número finito de suas integrais. Posteriormente, a aproximação polinomial é substituída pelo sinal real e obtém-se um estimador que é, em teoria, instantâneo e capaz de rejeitar ruídos.

2.3 Representação via filtros variantes no tempo

Em [1] a técnica descrita é desenvolvida de maneira a chegar em uma composição de fácil interpretação para se estimar as derivadas de um sinal analógico. Devido à grande relevância para o presente trabalho, uma pequena parte deste material será brevemente transcrita, com modificações mínimas, nas linhas a seguir:

Seja um sinal analógico $y(t)$, aproximado em torno de $t = t_i$ por uma expansão em série de Taylor truncada em uma ordem k suficiente.

$$\tilde{y}(t) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{(j-1)!} y^{(j-1)}(t_i) (t - t_i)^{j-1}. \quad (2.1)$$

Esta série pode ser vista como um encadeamento de integradores onde $\tilde{y}^{(k)}(t) \equiv 0$ e as condições iniciais são $\tilde{y}^{(j-1)}(t_i) = y^{(j-1)}(t_i)$. Fazendo $\tau = t - t_i$:

$$\tilde{y}^{(k)}(\tau) = 0, \tilde{y}^{(j-1)}(\tau) = \tilde{y}^{(j-1)}(t_i), j = 1, 2, \dots, k. \quad (2.2)$$

No campo do cálculo operacional¹, pode-se escrever [9]:

$$s^k \tilde{y}(s) - \sum_{j=1}^k s^{k-j} y^{(j-1)}(t_i) = 0. \quad (2.3)$$

Derivando k vezes em relação ao operador s

¹ Aqui cálculo operacional designa essencialmente as propriedades da transformada de Laplace.

$$\frac{d^k}{ds^k} \left(s^k \tilde{y}(s) \right) = 0 \quad (2.4)$$

equação que é livre de qualquer condição inicial do sinal.

Multiplicando por s^{-j} $j = k-1, k-2, \dots, k-d$ resultam d equações

$$0 = s^{-j} \frac{d^k}{ds^k} \left(s^k \tilde{y}(s) \right), \quad j = k-1, k-2, \dots, k-d \quad (2.5)$$

o que constitui um sistema triangular de equações lineares para calcular a estimativa das derivadas no tempo de $y(t)$ até a ordem $d \leq k-1$. Isto pode ser observado através da fórmula de Leibniz:

$$\frac{d^k}{ds^k} (x(s)y(s)) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{d^{k-i}}{ds^{k-i}} x(s) \frac{d^i}{ds^i} y(s) \quad (2.6)$$

fazendo:

$$\frac{d^{k-i}}{ds^{k-i}} x(s) = \frac{d^{k-i}}{ds^{k-i}} s^k = \frac{k!}{i!} s^i. \quad (2.7)$$

Aplicando este resultado na equação (2.5) vem:

$$s^{-j} \frac{d^k}{ds^k} \left(s^k \tilde{y}(s) \right) = \sum_{i=0}^k \frac{(k!)^2}{(k-i)! (i!)^2} s^{i-j} \frac{d^i}{ds^i} \tilde{y}(s) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}^2 (k-i)! s^{i-j} \frac{d^i}{ds^i} \tilde{y}(s) \quad (2.8)$$

para $j = k-1, k-2, \dots, k-d$. Reescrevendo (2.8) em dois somatórios (aqui cabe chamar a atenção para os grupos de somatórios, o primeiro diz respeito às derivadas de $\tilde{y}(t)$ enquanto que o segundo opera em suas integrais)

$$0 = \sum_{i=j}^k \binom{k}{i}^2 (k-i)! s^{i-j} \frac{d^i}{ds^i} \tilde{y}(s) + \sum_{i=0}^{j-1} \binom{k}{i}^2 (k-i)! s^{i-j} \frac{d^i}{ds^i} \tilde{y}(s). \quad (2.9)$$

Através da transformação usual para retornar ao domínio do tempo, obtém-se d equações:

$$0 = \sum_{i=j}^k \binom{k}{i}^2 (k-i)! \frac{d^{i-j}}{dt^{i-j}} \left((-t)^i \tilde{y}(t) \right) + \sum_{i=0}^{j-1} \binom{k}{i}^2 (k-i)! \int^{(j-i)} (-t)^i \tilde{y}(t) \quad (2.10)$$

aqui, para simplificar a escrita, adotou-se para as integrais a seguinte notação:

$$\int^{(j-i)} (-t)^i \tilde{y}(t) \triangleq \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_{m-1}} (\sigma_m)^i \tilde{y}(\sigma_m) d\sigma_m d\sigma_{m-1} \cdots d\sigma_1. \quad (2.11)$$

Aplicando a fórmula de Leibniz na equação (2.10), isola-se $\tilde{y}(t)$ e suas derivadas no tempo $\tilde{y}^{(1)}(t), \dots, \tilde{y}^{(k-d)}(t)$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=j}^k \binom{k}{i}^2 (k-i)! (-1)^i \sum_{l=0}^{i-j} \binom{i-j}{l} \frac{i!}{(j+l)!} t^{j+l} \tilde{y}^{(l)}(t) + \sum_{i=0}^{j-1} \binom{k}{i}^2 (k-i)! (-1)^i \int t^i \tilde{y}(t) \\ &= \sum_{i=j}^k \sum_{l=0}^{i-j} \binom{k}{i} \binom{i-j}{l} \frac{k! (-1)^i}{(j+l)!} t^{j+l} \tilde{y}^{(l)}(t) + \sum_{i=0}^{j-1} \binom{k}{i}^2 (k-i)! (-1)^i \int t^i \tilde{y}(t). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Definindo-se o índice da maior derivada presente na equação (2.12), $\delta = k - j$, fazendo $n = i + \delta - k$ e introduzindo um contador de integração $m = k - \delta - i$, escreve-se:

$$0 = \underbrace{\sum_{n=0}^{\delta} \sum_{l=0}^n \binom{k}{\delta-n} \binom{n}{l} \frac{k! (-1)^{n+k-\delta}}{(k+l-\delta)!} t^{k+l-\delta} \tilde{y}^{(l)}(t)}_{\alpha(k, \delta, t)} + \underbrace{\sum_{m=1}^{k-\delta} \binom{k}{m+\delta}^2 (m+\delta)! (-1)^{k-\delta-m} \int t^{k-m-\delta} \tilde{y}(t)}_{\beta(k, \delta, t)}. \quad (2.13)$$

Note-se que a estrutura triangular de soma implica em:

$$\sum_{n=0}^{\delta} \sum_{l=0}^n \cdots = \sum_{l=0}^{\delta} \sum_{n=l}^{\delta} \cdots \quad (2.14)$$

e podemos então escrever:

$$\begin{aligned} \alpha(k, \delta, t) &= \sum_{l=0}^{\delta} \frac{k! (-1)^{k-\delta}}{(k+l-\delta)!} \left(\sum_{n=l}^{\delta} \binom{k}{\delta-n} \binom{n}{l} (-1)^n \right) t^{k+l-\delta} \tilde{y}^{(l)}(t) \\ &= \sum_{l=0}^{\delta} \frac{k! (-1)^{k-\delta}}{(k+l-\delta)!} \left(\frac{(k-l-1)! (-1)^l}{(k-\delta-1)! (\delta-l)!} \right) t^{k+l-\delta} \tilde{y}^{(l)}(t) \\ &= \sum_{l=0}^{\delta-1} \binom{k}{\delta-l} \frac{(k-l-1)!}{(k-\delta-1)!} (-1)^{l-\delta+1} t^{k+l-\delta} \tilde{y}^{(l)}(t) + (-1)^k t^k \tilde{y}^{(\delta)}(t). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Combinando este resultado com (2.13) obtém-se a seguinte fórmula recursiva nas derivadas.

$$\begin{aligned}
\tilde{y}^{(\delta)}(t) = & \sum_{l=0}^{\delta-1} \underbrace{\binom{k}{\delta-l} \frac{(k-l-1)!}{(k-\delta-1)!} (-1)^{l-\delta+1}}_{a(k,\delta,l)} \frac{1}{t^{\delta-l}} \tilde{y}^{(l)}(t) \\
& + \sum_{m=1}^{k-\delta} \underbrace{\binom{k}{m+\delta}^2 (-1)^{1-m-\delta} (m+\delta)!}_{b(k,\delta,m)} \frac{1}{t^k} \int t^{k-m-\delta} \tilde{y}^{(m)}(t) dt. \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Para simplificar a visualização, isolamos dois blocos da equação (2.16) e definimos dois parâmetros, chamados de $a(k, \delta, l)$ e $b(k, \delta, m)$ como:

$$\begin{aligned}
a(k, \delta, l) &= \binom{k}{\delta-l} \frac{(k-l-1)!}{(k-\delta-1)!} (-1)^{l-\delta+1} \\
b(k, \delta, m) &= \binom{k}{m+\delta}^2 (-1)^{1-m-\delta} (m+\delta)! . \quad (2.17)
\end{aligned}$$

A equação (2.16) permite determinar as derivadas de ordem $\delta = 1, \dots, d \leq k-1$ do sinal $\tilde{y}(t)$. Como as derivadas $\tilde{y}^{(\delta)}$ dependem de todas as derivadas de ordem inferior - $\tilde{y}^{(\delta-1)}$, $\tilde{y}^{(\delta-2)}$, e assim por diante - esta equação resulta em um sistema triangular de equações. Como consequência, as estimativas das derivadas reais se obtêm apenas através de integrais de $\tilde{y}(t)$ ou, como este sinal pode ser medido, substituindo $\tilde{y}(t)$ pelo valor medido de $y(t)$.

O sistema de equações lineares descrito em (2.16) pode ser entendido como um filtro variante no tempo. Para ilustrar esta perspectiva, vamos definir:

$$\begin{aligned}
\bar{y}^{(d)}(t) &= \begin{pmatrix} \bar{y}^{(1)}(t) \\ \bar{y}^{(2)}(t) \\ \vdots \\ \bar{y}^{(d)}(t) \end{pmatrix} \\
A(k, t) &= \begin{pmatrix} t^k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a(k, 2, 1)t^{k-1} & t^k & 0 & 0 & 0 \\ -a(k, 3, 1)t^{k-2} & -a(k, 3, 2)t^{k-1} & t^k & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -a(k, d, 1)t^{k-d+1} & -a(k, d, 2)t^{k-d+2} & -a(k, d, 3)t^{k-d+3} & \dots & t^k \end{pmatrix} \\
x(k, t) &= \begin{pmatrix} a(k, 1, 0)t^{k-1} \\ a(k, 2, 0)t^{k-2} \\ a(k, 3, 0)t^{k-3} \\ \vdots \\ a(k, d, 0)t^{k-d} \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{k-1} b(k, 1, m) \int t^{k-m-1} y(t) \\ \sum_{m=1}^{k-2} b(k, 2, m) \int t^{k-m-2} y(t) \\ \sum_{m=1}^{k-3} b(k, 3, m) \int t^{k-m-3} y(t) \\ \vdots \\ \sum_{m=1}^{k-d} b(k, d, m) \int t^{k-m-d} y(t) \end{pmatrix} \quad (2.18)
\end{aligned}$$

e assim, pode-se escrever (2.16) como:

$$A(k, t) \bar{y}^{(d)}(t) = x(k, t) . \quad (2.19)$$

Ainda, se definirmos:

$$z_i(k, t) = \sum_{m=1}^{k-i} b(k, i, m) \int t^{k-m-i} y(t) \quad (2.20)$$

de forma a escrever, para cada elemento de $x(k, t)$:

$$x_i(k, t) = a(k, d, 0) t^{k-d} y(t) + z_i(t, k) , \quad (2.21)$$

observaremos que as variáveis $z_i(t, k)$ obedecem a uma relação diferencial, já que

$$\begin{aligned}
\dot{z}_i(k, t) &= \sum_{m=1}^{k-i} b(k, i, m) \int t^{k-m-i} y(t) \\
&= \sum_{\mu=0}^{k-i-1} b(k, i, \mu+1) \int t^{k-\mu-i-1} y(t) \\
&= b(k, i, 1) t^{k-i-1} y(t) + \sum_{\mu=1}^{k-(i+1)} b(k, i+1, \mu) \int t^{k-\mu-(i+1)} y(t) \\
&= b(k, i, 1) t^{k-i-1} y(t) + z_{i+1}(k, t) .
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Trata-se de um sistema dinâmico cuja entrada é $y(t)$ e que pode ser entendido uniformemente a uma ordem $k-1$. Os primeiros $i = 1, \dots, d$ estágios, $z_i(k, t)$, deste sistema dinâmico são entradas de (2.19), ou seja:

$$x(k, t) = \begin{pmatrix} a(k, 1, 0) t^{k-1} \\ a(k, 2, 0) t^{k-2} \\ a(k, 3, 0) t^{k-3} \\ \vdots \\ a(k, d, 0) t^{k-d} \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} z_1(k, t) \\ z_2(k, t) \\ z_3(k, t) \\ \vdots \\ z_d(k, t) \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

pela aplicação desta equação, podemos extrair uma fórmula explícita para as derivadas estimadas $\bar{y}^{(d)}(t)$:

$$\bar{y}^{(d)}(t) = A^{-1}(k, t) x(k, t) . \tag{2.24}$$

Como os elementos de $A(k, t)$ são:

$$[A(k, t)]_{i,j} = \begin{cases} a(k, i, j) t^{k+j-i} & , i \geq j \\ 0 & , i < j \end{cases} \tag{2.25}$$

pode-se demonstrar que os elementos correspondentes da matriz inversa, A^{-1} são:

$$[A^{-1}(k, t)]_{i,j} = \begin{cases} \binom{k+i-j-1}{i-j} \frac{(k-j-1)!}{(k-i-1)!} t^{j-i-k} & , i \geq j \\ 0 & , i < j \end{cases} \tag{2.26}$$

a equação (2.24) se torna:

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}^{(i)}(t) &= \sum_{j=1}^d [A^{-1}(k, t)]_{i,j} x_j(k, t) \\
 &= \sum_{j=1}^i [A^{-1}(k, t)]_{i,j} a(k, j, 0) t^{k-j} \\
 &\quad + \sum_{j=1}^i \sum_{m=1}^{k-j} [A^{-1}(k, t)]_{i,j} b(k, j, m) \int t^{k-m-j} y^{(m)}(t) .
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

O primeiro somatório resulta em uma expressão fechada. Para o segundo, o número de integrações pode ser explicitado:

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}^{(i)}(t) &= \frac{1}{i!} y(t) \frac{(k-1)!}{(k-i-1)!} \sum_{j=1}^i \binom{k}{j} \binom{k+i-j-1}{i-j} (-1)^{1-j} \\
 &\quad + \sum_{m=1}^{k-i} \sum_{j=1}^i [A^{-1}]_{ij} b(k, j, m) \int t^{k-m-j} y^{(m)}(t) \\
 &\quad + \sum_{m=k-i+1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-m} [A^{-1}]_{ij} b(k, j, m) \int t^{k-m-j} y^{(m)}(t)
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

definindo:

$$c(k, i, j, m) \triangleq \binom{k+i-j-1}{i-j} \binom{k}{m+j}^2 \frac{(k-j-1)!}{(k-i-1)!} (-1)^{1-m-j} (m+j)! \tag{2.29}$$

resulta uma expressão explícita para a estimação das $i = 1, \dots, d$ derivadas de $y(t)$

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}^{(i)}(t) &= \frac{(k+i-1)!}{i! (k-i-1)!} \frac{1}{t^i} y(t) \\
 &\quad + \sum_{m=1}^{k-i} \sum_{j=1}^i c(k, i, j, m) \frac{1}{t^{k+i-j}} \int t^{k-m-j} y^{(m)}(t) \\
 &\quad + \sum_{m=k-i+1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-m} c(k, i, j, m) \frac{1}{t^{k+i-j}} \int t^{k-m-j} y^{(m)}(t) .
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Pela introdução dos estágios do filtro variante no tempo definidos por (2.20) leva ao resul-

tado principal, uma fórmula explícita para estimar as derivadas de ordens $i = 1, \dots, d$, utilizando filtros variantes no tempo

$$\tilde{y}^{(i)}(t) = \frac{(k+i-1)!}{i!(k-i-1)!} \frac{1}{t^i} y(t) + \sum_{j=1}^i \binom{k+i-j-1}{i-j} \frac{(k-j-1)!}{(k-i-1)!} \frac{1}{t^{k+i-j}} z_j(k, t) \quad (2.31)$$

A equação (2.31) é o resultado fundamental desenvolvido no artigo [1], de maneira a explicitar a estrutura de um filtro variante no tempo. Para facilitar o estudo destes estimadores quando variamos a ordem do estimador, no presente trabalho usaremos algumas constantes definidas em [1] e definiremos outras, conforme tabela 2.1:

Tabela 2.1: Constantes relativas ao estimador algébrico

Constante	Definição	Propriedades
$B(k, i, j)$	$\binom{k}{i+j}^2 (-1)^{1-j-i} (i+j)!$	Número Inteiro
$D(k, i, j)$	$\binom{k+i-j-1}{i-j} \frac{(k-j-1)!}{(k-i-1)!}$	Número Inteiro positivo ou zero
$E(k, i)$	$\frac{(k+i-1)!}{i!(k-i-1)!}$	Número Inteiro positivo

E assim podemos escrever:

$$\dot{z}_i(k, t) = B(k, i, 1) t^{k-i-1} y(t) + z_{i+1}(k, t) \quad (2.32)$$

$$\tilde{y}^{(i)}(t) = E(k, i) \frac{1}{t^i} y(t) + \sum_{j=1}^i D(k, i, j) \frac{1}{t^{k+i-j}} z_j(k, t) \quad (2.33)$$

ou, como $D(k, i, j) = 0 \forall j > i$, podemos escrever em notação matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(k, t) \\ \dot{z}_2(k, t) \\ \vdots \\ \dot{z}_{k-2}(k, t) \\ \dot{z}_{k-1}(k, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(k, 1, 1)t^{k-2} \\ B(k, 2, 1)t^{k-3} \\ \vdots \\ B(k, k-2, 1)t^1 \\ B(k, k-1, 1)t^0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} z_2(k, t) \\ z_3(k, t) \\ \vdots \\ z_{k-1}(k, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}^{(1)}(t) \\ \tilde{y}^{(2)}(t) \\ \vdots \\ \tilde{y}^{(k-2)}(t) \\ \tilde{y}^{(k-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E(k, 1)}{t} \\ \frac{E(k, 2)}{t^2} \\ \vdots \\ \frac{E(k, k-2)}{t^{k-2}} \\ \frac{E(k, k-1)}{t^{k-1}} \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} \frac{D(k, 1, 1)}{t^k} & \frac{D(k, 1, 2)}{t^{k-1}} & \dots & \frac{D(k, 1, k-2)}{t^3} & \frac{D(k, 1, k-1)}{t^2} \\ \frac{D(k, 2, 1)}{t^{k+1}} & \frac{D(k, 2, 2)}{t^k} & \dots & \frac{D(k, 2, k-2)}{t^4} & \frac{D(k, 2, k-1)}{t^3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{D(k, k-2, 1)}{t^{2k-3}} & \frac{D(k, k-2, 2)}{t^{2k-4}} & \dots & \frac{D(k, k-2, k-2)}{t^k} & \frac{D(k, k-2, k-1)}{t^{k-1}} \\ \frac{D(k, k-2, 1)}{t^{2k-2}} & \frac{D(k, k-2, 2)}{t^{2k-3}} & \dots & \frac{D(k, k-2, k-2)}{t^{k+1}} & \frac{D(k, k-2, k-1)}{t^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(k, t) \\ z_2(k, t) \\ \vdots \\ z_{k-2}(k, t) \\ z_{k-1}(k, t) \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

2.3.1 Exemplo algébrico de ordem baixa

Para ilustrar a aplicabilidade desta teoria, vamos desenvolver as equações do estimador para uma série de Taylor de ordem 3, possibilitando estimar a primeira e a segunda derivadas de um sinal definido por um polinômio de grau 3

As constantes serão:

Constante	Valor
B_1	-18
B_2	6
$D_{1,1}$	1
$D_{1,2}$	0
$D_{2,1}$	3
$D_{2,2}$	1
E_1	6
E_2	12

Tabela 2.2: Constantes para estimador de ordem 3.

O filtro variante no tempo fica então definido por:

$$\begin{aligned}\dot{Z}_1(t) &= -18y(t)t^1 + Z_2(t) \\ \dot{Z}_2(t) &= 6y(t)\end{aligned}$$

E as derivadas serão estimadas por:

$$\begin{aligned}y^{(1)}(t) &= \frac{6}{t}y(t) + \frac{1}{t^3}Z_1(t) \\ y^{(2)}(t) &= \frac{12}{t^2}y(t) + \frac{3}{t^4}Z_1(t) + \frac{1}{t^3}Z_2(t)\end{aligned}$$

Para testar a funcionalidade deste filtro, vamos supor um sinal $y(t) = \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$ para o qual desejamos estimar a primeira e segunda derivadas, $y^{(1)}(t) = 2\alpha_2 t + \alpha_1$ e $y^{(2)}(t) = 2\alpha_2$.

Resolvendo a equação do estágio Z_2 do filtro variante no tempo, com $Z_2(0) = 0$:

$$\dot{Z}_2(t) = 6y(t)$$

$$\dot{Z}_2(t) = 6(\alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0)$$

$$\dot{Z}_2(t) = 6\alpha_2 t^2 + 6\alpha_1 t + 6\alpha_0$$

$$Z_2(t) = 2\alpha_2 t^3 + 3\alpha_1 t^2 + 6\alpha_0 t$$

Resolvendo a equação do estágio Z_1 do filtro variante no tempo, com $Z_1(0) = 0$:

$$\dot{Z}_1(t) = -18y(t)t^1 + Z_2(t)$$

$$\dot{Z}_1(t) = -18(\alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0)t^1 + 2\alpha_2 t^3 + 3\alpha_1 t^2 + 6\alpha_0 t$$

$$\dot{Z}_1(t) = (-18\alpha_2 t^3 - 18\alpha_1 t^2 - 18\alpha_0 t) + 2\alpha_2 t^3 + 3\alpha_1 t^2 + 6\alpha_0 t$$

$$\dot{Z}_1(t) = -16\alpha_2 t^3 - 15\alpha_1 t^2 - 12\alpha_0 t$$

$$Z_1(t) = -4\alpha_2 t^4 - 5\alpha_1 t^3 - 6\alpha_0 t^2$$

A estimativa da primeira derivada nos leva a:

$$y^{(1)}(t) = \frac{6}{t}y(t) + \frac{1}{t^3}Z_1(t)$$

$$y^{(1)}(t) = \frac{6}{t}(\alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0) + \frac{1}{t^3}(-4\alpha_2 t^4 - 5\alpha_1 t^3 - 6\alpha_0 t^2)$$

$$y^{(1)}(t) = 6\alpha_2 t^1 + 6\alpha_1 + 6\alpha_0 \frac{1}{t} - 4\alpha_2 t^1 - 5\alpha_1 - 6\alpha_0 \frac{1}{t}$$

$$y^{(1)}(t) = 2\alpha_2 t + \alpha_1$$

E da segunda derivada:

$$y^{(2)}(t) = \frac{12}{t^2}y(t) + \frac{3}{t^4}Z_1(t) + \frac{1}{t^3}Z_2(t)$$

$$\begin{aligned}
y^{(2)}(t) &= \frac{12}{t^2} (\alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0) + \frac{3}{t^4} (-4\alpha_2 t^4 - 5\alpha_1 t^3 - 6\alpha_0 t^2) + \frac{1}{t^3} (+2\alpha_2 t^3 + 3\alpha_1 t^2 + 6\alpha_0 t) \\
y^{(2)}(t) &= 12\alpha_2 + 12\alpha_1 \frac{1}{t} + 12\alpha_0 \frac{1}{t^2} - 12\alpha_2 - 15\alpha_1 \frac{1}{t} - 18\alpha_0 \frac{1}{t^2} + 2\alpha_2 + 3\alpha_1 \frac{1}{t} + 6\alpha_0 \frac{1}{t^2} \\
y^{(2)}(t) &= 12\alpha_2 - 12\alpha_2 + 2\alpha_2 + 12\alpha_1 \frac{1}{t} - 15\alpha_1 \frac{1}{t} + 3\alpha_1 \frac{1}{t} + 12\alpha_0 \frac{1}{t^2} - 18\alpha_0 \frac{1}{t^2} + 6\alpha_0 \frac{1}{t^2} \\
y^{(2)}(t) &= 2\alpha_2
\end{aligned}$$

Como se pode observar, as estimativas são exatamente as derivadas reais, obtidas a partir da soma ponderada do sinal e de suas integrais no tempo.

2.4 Particularidades da teoria de estimadores rápidos

É claro que a técnica descrita possui limitações. Ao se analisar a equação das derivadas (2.31) observa-se facilmente que não existe solução para $t = 0$. Entretanto após este instante de singularidade, a estimativa teórica existe e é válida. Na prática entretanto, ao se realizar estas operações com auxílio de um computador, ou seja, com uma precisão numérica finita, observaremos que o resultado desta equação não será válido dentro de um pequeno intervalo onde $t \in [0, \varepsilon)$.

O estimador é construído supondo um sinal polinômial de grau k , o que não acontece na prática. Embora o sinal de entrada não seja perfeitamente polinomial, ainda assim pode ser bem descrito por um polinômio de grau k por um certo intervalo de tempo. Tem-se então que as derivadas estimadas têm também um intervalo de validade e, quando nos aproximamos do limiar desta janela de tempo o estimador deverá ser reinicializado. Em [8] discute-se detalhadamente o erro de estimação para um sinal senoidal, mas no presente trabalho a análise deste erro não será considerada.

Este procedimento de reinicialização do estimador consiste apenas em zerar todos os estágios do filtro Z e fazer com que o tempo dentro do algoritmo de estimação seja também transladado a zero.

O critério para reinicializar o estimador pode ser baseado em algum critério de erro acumulado, ou simplesmente escolher um intervalo fixo. Neste trabalho utilizaremos um intervalo fixo para realizar o “reset” do estimador. Não há procedimento bem definido para nortear a escolha deste intervalo, mas ele afeta, como veremos adiante, a banda passante do estimador e, desta maneira, se precisamos detectar as derivadas de sinais com frequências mais elevadas, devemos reduzir o intervalo de reset.

2.5 Uso de dois estimadores em paralelo

Conforme observaremos adiante a banda passante do estimador vai se reduzindo com o passar do tempo, conseqüentemente aumenta-se sua capacidade de rejeitar ruídos de alta frequência. Veremos que existe uma região de bom compromisso entre a validade da estimativa e a rejeição de ruídos de alta frequência. Para se explorar ao máximo esta região vamos operar, seguindo [2], um esquema com dois estimadores em paralelo e uso de “reset” defasado, de forma e sempre ter um estimador em seu melhor intervalo de estimação. A figura 2.1 demonstra a idéia básica:

Figura 2.1: Esquema de chaveamento entre dois estimadores.

2.6 Uso de filtragem adicional

Em [2] discute-se ainda a utilização conjunta de uma filtragem adicional, invariante no tempo. O uso de filtragem adicional pode reduzir os ruídos mas ocasiona um atraso de fase.

Na implementação em tempo discreto, utilizamos uma aproximação polinomial que é de uma certa maneira, uma filtragem adicional invariante no tempo e que só foi empregada para permitir a implementação em um sistema de controle de tempo real. No presente trabalho não faremos uso de qualquer outro tipo adicional de filtragem, de modo a exibir o mais fielmente

possível o comportamento fundamental dos estimadores rápidos.

2.7 Simulações

Seguem algumas simulações de diversos sinais, íntegros e corrompidos com ruído. O objetivo destas simulações é identificar características e o comportamento dos estimadores algébricos de diferentes ordens na estimação de derivadas de sinais diversos.

Nos ensaios a seguir, utilizou-se um estimador de ordem $k = 7$.

O primeiro ensaio, figura 2.3, se refere a uma função seno, $y(t) = \sin(t)$. A derivada é estimada corretamente quase que imediatamente após o instante $t = 0$ e um valor próximo em avaliação meramente visual é obtido até aproximadamente oito segundos.

Figura 2.2: Estimando a primeira derivada de $y(t) = \sin(t)$.

Para uma função $y(t) = \sin(2t)$, a validade da estimativa se verifica até aproximadamente quatro segundos, como pode ser visualizado na figura 2.3.

Figura 2.3: Estimando a primeira derivada de $y(t) = \sin(t)$.

Na simulação a seguir, figuras 2.4 2.5 e 2.6, o sinal de entrada foi uma composição de senos, $y(t) = \sin(t) + \frac{\sin(100t)}{1000} + \frac{\sin(10000t)}{1000000}$. A primeira derivada desta função é dada por $y^{(1)}(t) = \cos(t) + \frac{\cos(100t)}{10} + \frac{\cos(10000t)}{100}$, mas para alguns instantes logo após $t = 0$, pode ser aproximada por $1 + \frac{\cos(100t)}{10} + \frac{\cos(10000t)}{100}$ ou $1.1 + \frac{\cos(10000t)}{100}$.

Observa-se, pelas figuras, que a estimativa é aceitável por praticamente oito segundos para a derivada do termo $\sin(t)$ e que as derivadas das parcelas $\frac{\sin(100t)}{1000}$ e $\frac{\sin(10000t)}{1000000}$ foram bem estimadas até $8 \cdot 10^{-2}$ e $8 \cdot 10^{-4}$ segundos respectivamente. Estas informações nos demonstram que o tempo de reinicialização está intimamente associado à largura de banda desejada, e que com o passar do tempo, a banda passante do estimador diminui.

Figura 2.4: Estimando a primeira derivada de $y(t) = \sin(t) + \frac{\sin(100t)}{1000} + \frac{\sin(10000t)}{1000000}$.

Figura 2.5: Detalhe da estimativa da primeira derivada de $y(t) = \sin(t) + \frac{\sin(100t)}{1000} + \frac{\sin(10000t)}{1000000}$.

Figura 2.6: Detalhe da estimativa da primeira derivada de $y(t) = \sin(t) + \frac{\sin(100t)}{1000} + \frac{\sin(10000t)}{1000000}$.

O comportamento do estimador proposto foi analisado também quando o sinal está comprometido por ruído. Para as simulações a seguir, com o intuito de obter-se uma função geradora de ruído contínuo, não nos utilizamos das funções usuais do software Matlab. O ruído foi gerado por uma soma de dez mil senóides com frequências escolhidas aleatoriamente dentro de um determinado intervalo, assim obteve-se uma função contínua que aproxima o ruído branco e que pode ser integrada numericamente pela rotina ode45. A figura 2.7 ilustra o resultado obtido.

Novamente, observa-se o estreitamento da banda passante do estimador com o passar do tempo, resultando em uma atenuação progressiva do ruído.

Figura 2.7: Estimando a primeira derivada de $y(t) = \sin(t)$ quando comprometido por ruído.

Fica evidente que existe um compromisso entre a atenuação de ruídos de alta frequência e a precisão das derivadas estimadas, o intervalo de reset deve ser escolhido de forma chegar a uma boa atenuação de ruídos mantendo as estimativas válidas. Aumentando o tempo de reset chegamos a uma menor banda passante à medida que o tempo passa e isto leva a uma maior atenuação do ruído, porém diminuimos a precisão de estimação.

3 *Implementação em tempo discreto*

“‘Eu... eu sou uma menininha’, respondeu Alice, bastante insegura, lembrando-se do número de mudanças que sofrera aquele dia. ‘Realmente uma história muito plausível!’ disse a Pomba num tom do mais profundo desprezo, ‘Vi muitas menininhas no meu tempo, mas nunca uma com um pescoço desse! Não, não! Você é uma cobra; e não adianta negar. Suponho agora que vai dizer que nunca provou um ovo!’ ‘Provei ovos, sem dúvida’, disse Alice, que era uma criança muito sincera; ‘mas meninas comem quase tantos ovos quanto as cobras, sabe’. ‘Não acredito nisso’, declarou a Pomba; ‘mas, se comem, então são uma espécie de cobra, é só o que posso dizer’.”

(CARROL, 2002, p. 51-53)

Aqui descreve-se os problemas enfrentados para implementar a metodologia proposta no capítulo anterior, uma análise do efeito da integração numérica sobre o filtro variante no tempo. Em seguida propomos uma implementação baseada em aproximação polinomial, capaz de superar estas dificuldades, e desenvolvimento de fórmulas para pré-calculer parâmetros que facilitarão a implementação em tempo real.

Apresentamos ainda um pequeno exemplo de controle que comprova a aplicabilidade desta metodologia.

3.1 Dificuldades relativas à implementação

Implementar a teoria descrita no capítulo anterior e, desta maneira, utilizá-la em sistemas de controle em tempo real não é uma tarefa trivial. Operações de multiplicação e divisão por potências do tempo decorrido são necessárias e muito difíceis de construir apenas com circuitos analógicos. A solução imediata seria então utilizar um computador para efetuar estes cálculos. A implementação com auxílio de um computador envolve logicamente a discretização do processo, além de obter-se a resposta do filtro variante no tempo através de algum método como a integração trapezoidal de Euler ou métodos de Runge-Kutta.

Em ensaios preliminares, entretanto, observou-se que para alcançar uma rápida convergência destas equações diferenciais, o passo de integração deve ser extremamente reduzido nas proximidades de $t = 0$, implicando em uma taxa de amostragem exageradamente elevada. Para ilustrar tal observação, a figura 3.1 exibe os resultados da primeira derivada de um sinal senoidal. Utilizou-se diversos intervalos de integração numérica no método de Runge-Kutta de quarta ordem e diferentes resultados foram obtidos para cada passo de integração. Na figura 3.2 demonstra-se mais detalhadamente a convergência numérica. Na figura 3.3 apresentamos os erros absolutos.

Figura 3.1: Resultado da integração numérica para diferentes passos de integração (de 1e-2 a 1e-5).

Figura 3.2: Detalhamento da convergência da integração numérica

Figura 3.3: Erro absoluto da integração numérica em função do passo de integração.

Nesta simulação comprova-se que para obter um resultado rápido, foi preciso uma taxa de amostragem muito elevada, da ordem de 10000 amostras por segundo para estimar a derivada de um sinal senoidal com frequência de apenas $\frac{1}{2\pi}$.

Por certo os resultados relativos ao tempo de convergência não são encorajadores, e em [3], aborda-se uma solução viabilizadora, que constitui contribuição teórica deste trabalho.

3.2 Abordagem via aproximação do sinal amostrado por segmentos de polinômios

O resultado fundamental de [3] viabiliza a construção da teoria de estimadores algébricos em sistemas de controle de tempo real, sem entretanto fazer uso de elevada taxa de amostragem. Basicamente, os últimos $p + 1$ pontos amostrados do sinal cujas derivadas serão estimadas são aproximados por um polinômio de grau p . Posteriormente, a equação do filtro é resolvida, num dado intervalo de amostragem, usando os coeficientes do polinômio que aproxima o sinal de entrada, obtendo-se um resultado analítico exato.

Fazendo, para cada intervalo de amostragem, a entrada $y(t)$ ser aproximada por um polinômio de ordem p dado por:

$$y(t) \approx \sum_{g=0}^p \alpha_g t^g$$

E utilizando o resultado, demonstrado no anexo A.1:

Seja uma função $f(t_0 + \Delta_t)$ definida por uma integral múltipla:

$$f(t_0 + \Delta_t) \triangleq \int_{t_0}^{t_0 + \Delta_t} \cdots \int_{t_0} \tau^m d\tau^n$$

onde $m \in \mathbb{N}^+$, $n \in \mathbb{N}^+$ e constantes de integração nulas, então:

$$f(t_0 + \Delta_t) = \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!(m+n-j)!} t_0^j \Delta_t^{m+n-j} \quad (3.1)$$

conforme demonstrado em [3] e no anexo A.2, a equação do filtro fica reescrita como:

$$\begin{aligned} Z_l(t_0 + \Delta_t) &= \sum_{g=0}^p \sum_{h=1}^{k-l} \left[\alpha_g \sum_{j=0}^{k+g-h-l} B_{l-1+h} \times \right. \\ &\quad \times \frac{(k+g-h-l)!}{j!(k+g-l-j)!} \Delta_t^{k+g-l-j} t_0^j + \\ &\quad \left. + Z_{l+h}(t_0) \frac{\Delta_t^h}{h!} \right] + Z_l(t_0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde Δ_t é o intervalo entre as amostras, α_g são os coeficientes do polinômio pelo qual se aproxima o sinal de entrada, t_0 é o instante da amostra que é processada e B_l são as constantes já definidas na equação do filtro variante no tempo.

Desta maneira, é possível utilizar a teoria de estimadores não assintóticos em sistemas de controle de tempo real. O algoritmo se resume a calcular o polinômio que aproxima a entrada a partir da seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} y(t_0) \\ y(t_1) \\ y(t_2) \\ \vdots \\ y(t_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0^0 & t_0^1 & t_0^2 & \cdots & t_0^p \\ t_1^0 & t_1^1 & t_1^2 & \cdots & t_1^p \\ t_2^0 & t_2^1 & t_2^2 & \cdots & t_2^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_p^0 & t_p^1 & t_p^2 & \cdots & t_p^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Onde $t_1, t_2, \dots, t_p = t_n$ deve ser lido como $t_0 - n\Delta_t$ e α_n são os coeficientes do polinômio de grau p

A matriz é quadrada e sempre invertível devido a sua construção como uma matriz de Vandermonde. Então, para cada t_0 , os coeficientes do polinômio serão uma particular combinação linear da amostra atual e das anteriores.

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \mathbb{A}(t_0) \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y(t_1) \\ y(t_2) \\ \vdots \\ y(t_p) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Cada $\mathbb{A}(t_0)$ pode ser previamente calculada, o que será útil para reduzir o tempo de processamento para cada amostra.

Como o intervalo de amostragem é fixo, as potências de Δ_t também podem ser calculadas previamente. A cada amostra, t_0 será diferente, mas sempre um múltiplo inteiro de Δ_t , de forma que ele próprio e suas potências podem também ser pré calculadas. O algoritmo deve fazer uso da transformação linear adequada $\mathbb{A}$ para obter o polinômio que aproxima a entrada, tomar o valor de $Z(t_0)$ e fazer os cálculos da equação (3.2).

3.2.1 Comparando a técnica descrita com a integração numérica de um sistema caótico

As duas abordagens foram usadas para estimar o estado x_1 do sistema caótico que segue (trata-se do mesmo sistema descrito em [2]):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 \\
\dot{x}_2 &= x_1 + \frac{x_2}{5} \\
\dot{x}_3 &= \frac{1}{5} + x_1 x_3 - 5x_3
\end{aligned} \tag{3.5}$$

usando x_2 e suas derivadas, podemos estimar x_1 e x_3 :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \dot{x}_2 - \frac{x_2}{5} \\
x_2 &= x_2 \\
x_3 &= -x_2 + \frac{\dot{x}_2}{5} - \ddot{x}_2
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Ambos os estimadores (discreto e contínuo) foram simulados na ausência de perturbações e na presença de ruído aditivo com variância de $1e-5$, uma taxa de amostragem de $1e-2$ segundos e intervalo de reset de 0.5 segundos. Adicionalmente, aplicamos uma quantização de $\frac{1}{1024}$ no estimador discreto. As figuras 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 e 3.11 ilustram os resultados.

Figura 3.4: Estimador Algebrico sem ruído.

Figura 3.5: Detalhe do Estimador Algébrico sem ruído.

Figura 3.6: Erro no Estimador Algébrico sem ruído.

Figura 3.7: Detalhe do erro no Estimador Algébrico sem ruído.

Figura 3.8: Estimador Algébrico com ruído.

Figura 3.9: Detalhe do Estimador Algébrico com ruído.

Figura 3.10: Erro no Estimador Algébrico com ruído.

Figura 3.11: Detalhe do erro no Estimador Algébrico com ruído.

Observa-se que os resultados foram satisfatórios já que o estado foi estimado rapidamente e acompanhou muito bem o estado real. De um certo modo, observa-se que existe um delay de um intervalo de amostragem entre o estimador em tempo contínuo e nossa proposta para implementação em tempo discreto. Nas simulações utilizando o estimador em tempo discreto utilizamos dois estimadores em paralelo, conforme implementação descrita em [2]. Isto fez com que as estimativas em tempo discreto apresentassem um melhor comportamento em relação ao ruído.

Em ambiente livre de ruído o estimador discreto apresenta uma pequena oscilação, mas acompanha de maneira muito boa o resultado obtido pelo estimador em tempo contínuo. Já na presença de ruído, não se pode julgar qual estimador se comportou melhor, ambos apresentaram resultados bons e sem diferenças consideráveis. Deve-se recordar que o estimador em tempo discreto pode ser realizado na prática e com uma baixa taxa de amostragem, diferentemente do estimador em tempo contínuo que só pode ser simulado em ambiente computacional.

3.3 Breve aplicação em controle

Vamos descrever agora, um pequeno sistema não linear, encontrar uma lei de controle e observar o comportamento desta lei quando se faz uso dos estados estimados.

O sistema utilizado neste breve ensaio é descrito pelas equações a seguir:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= u + 2x_1 \\
\dot{x}_2 &= -x_1 - x_2^3 \\
y_1 &= x_1^2 \\
y_2 &= x_2 - x_1^2
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Trata-se de um sistema não linear de uma entrada u , duas saídas $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ e dois estados internos $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Este sistema pode ser estabilizado por Lyapunov, se fizermos;

$V = x_1^2 + x_2^2$, definida positiva.

$$\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$

$$\dot{V} = 2x_1(u + 2x_1) + 2x_2(-x_1 - x_2^3)$$

$$\dot{V} = 2x_1u + 4x_1^2 - 2x_2x_1 - 2x_2^4$$

Escolhendo $u = -3x_1 + x_2$

$$\dot{V} = 2x_1(-3x_1 + x_2) + 4x_1^2 - 2x_2x_1 - 2x_2^4$$

$$\dot{V} = -6x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1^2 - 2x_2x_1 - 2x_2^4$$

$$\dot{V} = -2x_1^2 - 2x_2^4, \text{ definida negativa.}$$

Portanto se fizermos $u = -3x_1 + x_2$, o sistema será globalmente e assintoticamente estável. A seguir apresentamos o comportamento obtido via simulação, figuras 3.12 e 3.13 para o sistema proposto quando partindo do estado interno definido por $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$:

Figura 3.12: Comportamento da saída.

Figura 3.13: Comportamento dos estados internos

É possível obter os estados internos a partir das saídas e de suas derivadas. Para isto, basta observar que:

$$x_2 = y_2 - y_1$$

então:

$$\dot{x}_2 = \dot{y}_2 - \dot{y}_1$$

mas:

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3$$

assim:

$$-x_1 - x_2^3 = y_2 - y_1$$

$$-x_1 = x_2^3 + y_2 - y_1$$

$$-x_1 = (y_2 - y_1)^3 + y_2 - y_1$$

$$x_1 = -(y_2 - y_1)^3 - y_2 + y_1$$

Nas figuras 3.14 e 3.15, exibimos o comportamento do estimador em ambiente livre de ruído e quando sujeito a um ruído aditivo:

Figura 3.14: Comportamento do estimador.

Figura 3.15: Comportamento do estimador na presença de ruído.

Por fim, nas figuras 3.16, 3.18, 3.17 e 3.19, exibimos o comportamento do sistema quando a lei de controle faz uso dos estados estimados através das saídas:

Figura 3.16: Comportamento da saída.

Figura 3.17: Comportamento do estimador.

Figura 3.18: Comportamento da saída quando o estimador é perturbado por ruído.

Figura 3.19: Comportamento do estimador quando perturbado por ruído.

Podemos observar que a realimentação dos estados estimados realmente se aproxima muito da realimentação de estados reais e que o ruído é atenuado com o passar do tempo.

3.4 Possibilidades não exploradas

A técnica abordada em [3] e detalhada na seção 3.2 é apenas uma maneira encontrada para realizar o filtro da equação (2.22) em tempo discreto. Outras possibilidades podem levar a resultados melhores ou piores, mas não foram exploradas no presente trabalho.

Em especial, sabe-se que aproximar por um polinômio um sinal com seqüências de amostras com valor constante não gera bons resultados. O polinômio aproximador tende a gerar ondulações que originalmente não existiam e isto compromete o comportamento do estimador. Uma possível extensão do presente trabalho seria estudar o comportamento de outras técnicas de representação do sinal amostrado, aproximando-o por um “spline” por exemplo. Obviamente alguns detalhes de cálculo deverão ser modificados, mas possivelmente se produzam estimativas ainda mais robustas.

4 *Sistema Mecânico*

Neste capítulo vamos descrever o sistema mecânico construído e elaborar o seu modelo representativo. Um modelo de atrito é apresentado e após alguns ensaios identificamos os parâmetros pertinentes de atrito.

4.1 Descrição do sistema

O pêndulo invertido via transferência de torque que será analisado, equacionado e simulado neste trabalho é composto basicamente por uma barra que pode girar livremente em torno de um eixo fixo. Em uma das extremidades da barra e fixo a esta, existe um motor de corrente contínua. Preso ao eixo do motor está um disco. Na outra extremidade da barra temos um contra-peso.

A barra gira sem sair do plano perpendicular ao eixo fixo, que por sua vez pode estar em qualquer posição e formando ângulos diversos com o plano horizontal. Na figura 4.1 temos uma ilustração do sistema onde o plano da barra é perpendicular ao plano horizontal, situação em que se exige o maior esforço do motor para obter o equilíbrio não trivial.

Figura 4.1: Visão geral do pêndulo.

Ao se aplicar uma corrente no motor, temos um torque aplicado ao disco e como reação, um torque é aplicado ao motor e à barra, transferindo movimento a esta. Na situação ilustrada pela figura 4.1, tem-se intuitivamente dois pontos de equilíbrio, um estável e outro instável.

O sistema em questão é não linear, devido à inclinação da barra modificar o torque através de uma função seno. Apesar de ser simples, o comportamento deste sistema nem sempre é intuitivo.

4.2 Modelagem do sistema

4.2.1 Definição da simbologia adotada

Para proceder a modelagem do sistema, cabe definir e entender o sistema de coordenadas adotado, bem como a nomenclatura das constantes utilizadas.

As coordenadas fundamentais do sistema serão definidas, deste ponto em diante, como:

Símbolo	Descrição
ϕ	Ângulo formado entre a barra e o plano vertical, nulo quando em equilíbrio não trivial, para $0 < \eta < 2\pi$
θ	Ângulo formado entre um ponto de referência no disco e a barra.
η	Ângulo formado entre o plano da barra e o plano horizontal. Constante durante os ensaios.

Tabela 4.1: Coordenadas Utilizadas.

Para tornar mais claro o equacionamento do sistema escolhido, as coordenadas estão explicitadas na figura 4.2.

Figura 4.2: Ilustração das Coordenadas Utilizadas.

As constantes serão definidas utilizando a nomenclatura $Grandeza_{Objeto}$, identificando a natureza da grandeza física e em sub-escrito o objeto ou parte do sistema ao qual a grandeza física em questão diz respeito.

As representações que serão utilizadas encontram-se nas tabelas 4.2 e 4.3:

Simbolo de Grandeza	Descrição
h	Altura
M	Massa
L	Comprimento
τ	Torque
J	Momento de Inercia
$\tau_{at,}$	Torque de Atrito

Tabela 4.2: Simbologia das grandezas físicas.

Símbolo de parte ou objeto	Descrição
<i>MOT</i>	Motor
<i>DIS</i>	Disco
<i>CIL</i>	Cilindro de Contra Peso
<i>BAR</i>	Barra em sua totalidade
<i>BAR1</i>	Trecho da barra que sustenta o motor e disco
<i>BAR2</i>	Trecho da barra que sustenta o contra peso

Tabela 4.3: Simbologia dos componentes do sistema.

Desta maneira, M_{CIL} por exemplo, faz referência à massa do cilindro compensador de peso.

4.2.2 Modelagem do sistema através do formalismo Lagrangiano

Energia potencial

A energia potencial do sistema é dada pela soma das energias potenciais de cada elemento que o constitui, assim:

$$V = V_{CIL} + V_{BAR1} + V_{BAR2} + V_{MOT} + V_{DIS}$$

$$V = g (M_{CIL}h_{CIL} + M_{BAR1}h_{BAR1} + M_{BAR2}h_{BAR2} + M_{MOT}h_{MOT} + M_{DIS}h_{DIS})$$

Observa-se que as alturas dos centros de massa são:

$$h_{CIL} = -L_{BAR2} \sin(\eta) \cos(\phi)$$

$$h_{MOT} = h_{DIS} = L_{BAR1} \sin(\eta) \cos(\phi)$$

$$h_{BAR1} = \frac{L_{BAR1}}{2} \sin(\eta) \cos(\phi)$$

$$h_{BAR2} = -\frac{L_{BAR2}}{2} \sin(\eta) \cos(\phi)$$

Efetuada os cálculos temos:

$$V = g \sin(\eta) \cos(\phi) \left(M_{MOT}L_{BAR1} + M_{DIS}L_{BAR1} + M_{BAR1}\frac{L_{BAR1}}{2} - M_{CIL}L_{BAR2} - M_{BAR2}\frac{L_{BAR2}}{2} \right)$$

$$V = g \sin(\eta) \cos(\phi) \left(L_{BAR1} \left(\frac{M_{BAR1}}{2} + M_{MOT} + M_{DIS} \right) - L_{BAR2} \left(M_{CIL} + \frac{M_{BAR2}}{2} \right) \right)$$

Chamando:

$$\mathbb{C}_3 = g \sin(\eta) \left(L_{BAR1} \left(\frac{M_{BAR1}}{2} + M_{MOT} + M_{DIS} \right) - L_{BAR2} \left(M_{CIL} + \frac{M_{BAR2}}{2} \right) \right)$$

Então:

$$V = \mathbb{C}_3 \cos(\phi)$$

Energia cinética

A energia cinética do sistema é dada pela soma das energias cinéticas de cada elemento, assim:

$$T = T_{CIL} + T_{BAR1} + T_{BAR2} + T_{MOT} + T_{DIS} \quad (4.1)$$

$$T = \frac{J_{CIL}}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{J_{BAR1}}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{J_{BAR2}}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{J_{MOT}}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{J_{DIS}}{2} (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + \frac{M_{DIS}}{2} (\dot{\phi} L_{BAR1})^2 \quad (4.2)$$

$$T = \frac{J_{CIL} + J_{BAR1} + J_{BAR2} + J_{MOT} + L_{BAR1}^2 M_{DIS}}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{J_{DIS}}{2} (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 \quad (4.3)$$

Chamando:

$$\mathbb{C}_1 = \frac{1}{J_{CIL} + J_{BAR1} + J_{BAR2} + J_{MOT} + L_{BAR1}^2 M_{DIS}} \quad (4.4)$$

$$\mathbb{C}_2 = \frac{1}{J_{DIS}} \quad (4.5)$$

Então:

$$T = \frac{\dot{\phi}^2}{2\mathbb{C}_1} + \frac{(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2}{2\mathbb{C}_2} \quad (4.6)$$

Lagrangiana

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{\dot{\phi}^2}{2\mathbb{C}_1} + \frac{(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2}{2\mathbb{C}_2} - \mathbb{C}_3 \cos(\phi) \quad (4.7)$$

Definindo as coordenadas generalizadas

$$q_1 = \theta \quad (4.8)$$

$$q_2 = \phi \quad (4.9)$$

E as forças generalizadas

$$Q_1 = \tau_{MOT} + \tau_{at,DIS} \quad (4.10)$$

$$Q_2 = \tau_{at,BAR} \quad (4.11)$$

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{q}_2^2}{2\mathbb{C}_1} + \frac{(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2}{2\mathbb{C}_2} - \mathbb{C}_3 \cos(q_2) \quad (4.12)$$

Equação de Lagrange para a variável generalizada $q_1 = \theta$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\dot{q}_1}{\mathbb{C}_2} + \frac{\dot{q}_2}{\mathbb{C}_2} \quad (4.13)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{\ddot{q}_1}{\mathbb{C}_2} + \frac{\ddot{q}_2}{\mathbb{C}_2} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 0 \quad (4.15)$$

Então a equação de Lagrange fica:

$$\frac{\ddot{q}_1}{\mathbb{C}_2} + \frac{\ddot{q}_2}{\mathbb{C}_2} = Q_1 \quad (4.16)$$

Equação de Lagrange para a variável generalizada $q_2 = \phi$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\dot{q}_1}{\mathbb{C}_2} + \frac{\dot{q}_2}{\mathbb{C}_2} + \frac{\dot{q}_2}{\mathbb{C}_1} \quad (4.17)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) = \frac{\ddot{q}_1}{\mathbb{C}_2} + \frac{\ddot{q}_2}{\mathbb{C}_2} + \frac{\ddot{q}_2}{\mathbb{C}_1} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \mathbb{C}_3 \sin(q_2) \quad (4.19)$$

Então, a equação de Lagrange fica:

$$\frac{\ddot{q}_1}{\mathbb{C}_2} + \frac{\ddot{q}_2}{\mathbb{C}_2} + \frac{\ddot{q}_2}{\mathbb{C}_1} - \mathbb{C}_3 \sin(q_2) = Q_2 \quad (4.20)$$

Equações desacopladas

Isolando $\frac{\ddot{q}_1}{\mathbb{C}_2}$ da equação (4.16):

$$\frac{\ddot{q}_1}{\mathbb{C}_2} = Q_1 - \frac{\ddot{q}_2}{\mathbb{C}_2} \quad (4.21)$$

e substituindo na equação (4.20), isolamos $\ddot{q}_2$:

$$Q_1 - \frac{\ddot{q}_2}{\mathbb{C}_2} + \frac{\ddot{q}_2}{\mathbb{C}_2} + \frac{\ddot{q}_2}{\mathbb{C}_1} - \mathbb{C}_3 \sin(q_2) = Q_2 \quad (4.22)$$

$$\ddot{q}_2 = \mathbb{C}_1 Q_2 - \mathbb{C}_1 Q_1 + \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_3 \sin(q_2) \quad (4.23)$$

E em seguida, substituindo na equação (4.16):

$$\frac{\ddot{q}_1}{\mathbb{C}_2} + \frac{\mathbb{C}_1 Q_2 - \mathbb{C}_1 Q_1 + \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_3 \sin(q_2)}{\mathbb{C}_2} = Q_1 \quad (4.24)$$

$$\ddot{q}_1 = (\mathbb{C}_1 + \mathbb{C}_2) Q_1 - \mathbb{C}_1 Q_2 - \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_3 \sin(q_2) \quad (4.25)$$

Por fim, as equações de movimento, são:

$$\ddot{\theta} = (\mathbb{C}_2 + \mathbb{C}_1) \tau_{MOT} + (\mathbb{C}_2 + \mathbb{C}_1) \tau_{at,DIS} - \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_3 \sin(\phi) - \mathbb{C}_1 \tau_{at,BAR} \quad (4.26)$$

$$\ddot{\phi} = \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_3 \sin(\phi) - \mathbb{C}_1 \tau_{MOT} + \mathbb{C}_1 \tau_{at,BAR} - \mathbb{C}_1 \tau_{at,DIS} \quad (4.27)$$

4.2.3 Modelagem do atrito

Modelar o atrito seco é uma tarefa um tanto complicada, uma vez que tal fenômeno exibe um comportamento com muitos detalhes e dependente de algumas condições do sistema. Um modelo mais representativo de atrito, como é o modelo de Coulomb, apresenta uma descontinuidade para velocidade nula, impedindo o uso de integração numérica nas simulações. No presente trabalho, adotaremos um modelo definido em [10], que aproxima o modelo de Coulomb, mas é continuamente diferenciável.

Tal modelo é descrito pela equação a seguir:

$$F_{at}(\dot{q}) = \gamma_1 (\tanh(\gamma_2 \dot{q}) - \tanh(\gamma_3 \dot{q})) + \gamma_4 \tanh(\gamma_5 \dot{q}) + \gamma_6 \dot{q}, \quad (4.28)$$

onde $\gamma_i \in \mathbb{R}^+ \forall i = 1, 2, \dots, 6$ são constantes positivas.

Os parâmetros γ_1 , γ_2 e γ_3 são responsáveis pelo efeito Stribeck que modela o atrito estático, γ_4 e γ_5 determinam o comportamento do atrito cinético, e finalmente, γ_6 determina o fator linear diretamente proporcional à velocidade.

A figura 4.3 ilustra o modelo de atrito utilizado, para as seguintes constantes $\gamma = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{50} \end{pmatrix}$:

Figura 4.3: Gráfico de comportamento do modelo de atrito.

Deve-se ressaltar que este modelo reproduz a força (ou torque) de atrito, representada com sentido contrário à velocidade. Na dedução do modelo do sistema mecânico, adotamos uma representação absoluta para todas as forças, momentos, velocidades e acelerações, de forma que o torque de atrito é representado com o mesmo sentido da velocidade e por este motivo, invertemos o sinal do torque nos modelos de atrito usados em conjunto com o modelo do sistema mecânico.

A obtenção das constantes a partir dos valores de atrito estático, cinético e viscoso é feita, inicialmente, de maneira aproximada. Esta aproximação é então refinada por um processo inspirado em simulações de recozimento (annealing simulated optimization)¹ [11], de forma a encontrar parâmetros que minimizem a distância da curva resultante de alguns pontos desejáveis. Estes pontos são o máximo de atrito estático, o mínimo de atrito cinético, ambos de velocidade diminuta, e um ponto de velocidade elevada que deve aproximar o atrito cinético somado ao termo proporcional à velocidade.

O vetor de constantes $\gamma = \begin{pmatrix} 27.8864 & 133.6172 & 114.9599 & 0.2187 & 31.1378 & 0.0200 \end{pmatrix}$ foi otimizado para gerar um coeficiente de atrito estático de 2N, um coeficiente de atrito cinético de 0,2N e um atrito viscoso equivalente a velocidade multiplicada por 0,02. O pico de atrito estático ocorre a $0,02 \frac{m}{s}$ e o vale de atrito cinético ocorre a $0,05 \frac{m}{s}$. Para este cenário de atrito, apresentamos o comportamento de um bloco de massa 1Kg em algumas situações distintas:

Figura 4.4: Ensaio do modelo de atrito, força de 1N aplicada ao bloco

¹As constantes são escolhidos de forma aleatória e se registra a cada teste o valor do grupo que ofereceu melhor aproximação segundo um índice previamente definido de qualidade. A cada novo teste os valores são escolhidos como pequenas flutuações do melhor grupo, a variância do termo aleatório é reduzida até zero quando se seleciona o melhor grupo obtido no ensaio.

Figura 4.5: Ensaio do modelo de atrito, força de 2N aplicada ao bloco

Figura 4.6: Ensaio do modelo de atrito, bloco com velocidade inicial.

4.2.4 Motor como transdutor de torque

Vamos considerar o motor como um transdutor linear de tensão em torque, ou seja, o torque será proporcional à tensão de armadura. Para tal, devemos desconsiderar a força contra eletromotriz induzida e encontrar a constante de proporcionalidade que para velocidades baixas pode ser aproximada por:

$$K\tau_{MOT} = \frac{K_{MOT}}{Ra_{MOT}}$$

desta forma:

$$\tau_{MOT} = Va \times K \tau_{MOT} \quad (4.29)$$

4.2.5 Modelo linearizado

Para o projeto de controle, assumiremos inicialmente um modelo simplificado e linearizado do sistema. Se tomarmos as equações (4.27), linearizada em torno de $\bar{\phi} = 0$ e (4.29), podemos então escrever em notação matricial, num modelo que desconsidera a posição θ e a velocidade $\dot{\theta}$ do disco:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_3 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mathbb{C}_1 K_{MOT}}{Ra_{MOT}} \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u \end{aligned} \quad (4.30)$$

Onde $x = \begin{pmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$, a entrada é a tensão de armadura $u = Va$, e a saída $y = \phi$.

4.2.6 Parâmetros numéricos do modelo

O modelo escolhido deve ter seus parâmetros escolhidos de maneira a representar fielmente o comportamento do sistema construído.

Alguns parâmetros podem ser determinados facilmente pelo projeto, como por exemplo, os momentos de inercia. Para estes parâmetros, é de se esperar que os valores calculados sejam muito próximos dos reais.

Já parâmetros como os representativos do atrito, a menos de aproximações grosseiras, não são previamente conhecidos. Devem portanto ser determinados com o auxílio de ensaios.

A esta altura, temos condições de encontrar os valores numéricos das constantes do sistema mecânico e do motor, bem como, a partir de experimentos em bancada, determinar o comportamento aproximado do atrito.

Dimensões e massas do sistema mecânico

A tabela a seguir apresenta as propriedades físicas e seus valores.

Simbolo	Valor	Descrição
g	$9.8 \left[\frac{m}{s^2} \right]$	Aceleração da gravidade.
η	$0,035 \text{ [rad]}$	Inclinação do plano da barra em relação ao plano horizontal
L_{BAR1}	0.2 [m]	Distância, no plano da barra, entre a articulação desta e o motor.
L_{BAR2}	0.1 [m]	Distância, no plano da barra, entre a articulação desta e o contra peso.
M_{BAR1}	0.141 [Kg]	Massa da barra de alumínio, relativa apenas ao braço do motor.
M_{BAR2}	0.0799 [Kg]	Massa da barra de alumínio, relativa apenas ao braço do contrapeso.
M_{MOT}	0.31 [Kg]	Massa do motor.
M_{CIL}	0.546 [Kg]	Massa do contra peso.
M_{DIS}	0.458 [Kg]	Massa do disco de alumínio.
J_{BAR1}	$0.00229 \text{ [Kg} \times m^2]$	Momento de inércia do primeiro braço da barra em relação à sua articulação.
J_{BAR2}	$0.000422 \text{ [Kg} \times m^2]$	Momento de inércia do segundo braço da barra em relação à sua articulação.
J_{MOT}	$0.0125 \text{ [Kg} \times m^2]$	Momento de inércia do motor em relação à articulação da barra.
J_{CIL}	$0.00544 \text{ [Kg} \times m^2]$	Momento de inércia do contra peso em relação à articulação da barra.
J_{DIS}	$0.00289 \text{ [Kg} \times m^2]$	Momento de inércia do disco (e flange) em relação ao seu centro de rotação própria (eixo do motor)
VEL_{MOT}	$270.177 \left[\frac{\text{rad}}{s} \right]$	Rotação nominal do motor quando submetido a tensão nominal de 12 volts.
K_{MOT}	$0.0265 \left[\frac{N}{A} \right]$	Constante de torque do motor, conforme definido pelo fabricante.
Ra_{MOT}	$1.94 \text{ } [\Omega]$	Resistência elétrica da armadura do motor.

Tabela 4.4: Propriedades físicas do sistema mecânico

Podemos então determinar os valores das constantes $\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2$ e $\mathbb{C}_3$:

$$\mathbb{C}_1 = \frac{1}{0.00544 + 0.00229 + 0.000422 + 0.0125 + (0.2)^2 0.458} = \frac{1}{0.038972} = 25.66$$

$$\mathbb{C}_2 = \frac{1}{0.00289} = 346.02$$

$$\mathbb{C}_3 = 1.069229 \cdot \sin(\eta) = 0.03743$$

Atrito no motor

Podemos ainda, determinar de forma aproximada, os coeficientes de atrito do motor, pois sabemos sua rotação nominal, a constante de torque e a resistência de armadura. Quando em regime permanente, o torque gerado pelo motor será completamente consumido pelo atrito do rotor em velocidade nominal (rad/s).

A tensão contra eletromotriz será:

$$V_{cem} = 270.177 \cdot K_{MOT} = 270.177 \cdot 0.0265 = 7.1597$$

A corrente resultante sobre a armadura é:

$$I_{aMOT} = \frac{12 - 7.1597}{1.94} = 2.495$$

E o torque de atrito total resulta:

$$\tau_{tot,at,MOT} = 0.0661$$

Em ensaios, verificou-se que a mínima tensão aplicada à armadura do motor que é capaz de tirar o rotor do repouso está em torno de 0.8 volts. Então, podemos estimar o torque de atrito estático que nesta condição vale:

$$\tau_{e,at,MOT} = \frac{0.8}{1.94} \cdot 0.0265 = 0.0109$$

Supondo o torque de atrito cinético em torno de 20 por cento do atrito estático, temos:

$$\tau_{c,at,MOT} = 0.0022$$

E por fim, a constante de atrito viscoso no motor será dada por:

$$\tau_{v,at,MOT} = \frac{0.0661 - 0.0027}{270.177} = 0.00023663$$

Tomando uma velocidade limiar para o atrito estático em torno de 10^{-4} da velocidade máxima do rotor, ou seja, 0.027 rad/s, e uma velocidade de 0.1 rad/s para o limiar de atrito cinético, as constantes do modelo de atrito foram estimadas em:

$$\gamma_{MOT} = \begin{pmatrix} 0.2809 & 54.58 & 49.9825 & 0.0027 & 60.2917 & 0.0002346 \end{pmatrix}$$

E para estas constantes, o gráfico de atrito em função da velocidade do rotor é exibido nas figuras 4.7 e 4.8:

Figura 4.7: Gráfico de comportamento do modelo de atrito.

Figura 4.8: Gráfico de comportamento do modelo de atrito.

Atrito na barra

Em ensaios realizados em bancada, com o controle desligado, observou-se que existe uma região em torno do ponto de equilíbrio instável, na qual não existe movimento da barra. Nesta região, o torque gerado pela atuação da força da gravidade no centro de massa do mecanismo

da barra não é suficiente para vencer o torque de atrito estático na articulação da barra. Esta região foi determinada como sendo aproximadamente 6 por cento de uma revolução completa da barra, -3% a $+3\%$, em torno do ponto de equilíbrio instável. No limiar de movimentação, o torque gerado pela gravidade iguala-se ao torque de atrito estático, então:

$$\tau_{e,at,BAR} = \|\mathbb{C}_3 \sin(0.03 * 2\pi)\| = 0.0093$$

Para estimar-se o atrito dinâmico, vamos utilizar os resultados de ensaio, devidamente filtrados com o auxílio de um filtro Savitzky-Golay [12], onde utilizaremos uma janela de 501 amostras, 250 antes do ponto em análise e 250 depois. O filtro Savitzky-Golay é uma técnica de filtragem off-line de janela móvel, onde o valor (e suas derivadas) em cada amostra é obtido pela aproximação de um polinômio de grau fixo que garanta a minimização dos quadrados dos desvios dentro de cada janela. Esta técnica permite a obtenção de um sinal razoavelmente livre de ruídos e boas estimativas para suas derivadas, mas por se utilizar de amostras futuras, não pode ser empregada em sistemas de tempo real.

Os resultados de ensaio, filtrados e o torque teórico são mostrados na figura 4.9.

Figura 4.9: Resultado de ensaio, após filtragem.

A curva em vermelho representa a aceleração realmente obtida no sistema, enquanto que a curva em ciano representa a aceleração teórica. A diferença entre as duas é uma estimativa da aceleração devida ao torque de atrito e é representada em roxo.

A seguir plotamos as diversas acelerações de atrito em função da velocidade. Nosso intuito é aproximar, via método dos mínimos quadrados, duas retas que modelem o atrito cinético e viscoso como função da velocidade. Para esta aproximação, eliminamos os pontos para os

quais o módulo da velocidade é muito pequeno.

Figura 4.10: Atrito cinético + viscoso.

Por fim, ilustramos o modelo de atrito obtido para as constantes estimadas:

$$\gamma_{BAR} = \begin{pmatrix} 0.03686 & 5388 & 3250 & 0.003446 & 1742.7 & 0.0002199 \end{pmatrix}$$

Figura 4.11: Atrito cinético + viscoso.

Figura 4.12: Detalhe do Atrito cinético + viscoso.

Finalizando este capítulo, apresentamos as equações do modelo construído e mostramos os resultados de ensaio.

O modelo do sistema mecânico será descrito pelas seguintes equações:

$$\ddot{\phi} = -25.66\tau_{MOT} - 25.66\tau_{at,DIS} + 25.66\tau_{at,BAR} + 0.9605 \sin(\phi) \quad (4.31)$$

$$\ddot{\theta} = 371.68\tau_{MOT} + 371.68\tau_{at,DIS} - 25.66\tau_{at,BAR} + 0.9605 \sin(\phi) \quad (4.32)$$

$$\tau_{MOT} = 0.0137v_a - 0.00036198\dot{\theta} \quad (4.33)$$

Figura 4.13: Modelo e Ensaio

Modelo simplificado e linearizado

O modelo simplificado e linearizado, descrito matricialmente por (4.30), fica:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.9605 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.3505 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned} \quad (4.34)$$

5 Controle do Pêndulo por transmissão de torque

Neste capítulo vamos projetar uma lei de controle simples e observar o funcionamento com o estimador proposto em comparação a um observador tradicional.

5.1 Realimentação linear de estados

Para projetar uma lei de controle linear, precisamos do modelo linearizado do sistema, equação (4.34).

As matrizes de controlabilidade e observabilidade resultam:

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & -0.3505 \\ -0.3505 & 0 \end{pmatrix}, \text{ com posto pleno. O sistema é completamente controlável.}$$

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ com posto pleno. O sistema é observável.}$$

Uma lei de controle capaz de alocar os pólos do sistema linearizado em $-2.5 \pm 2.5i$, obtida via comando `place` do software MATLAB é:

$$G = \begin{pmatrix} -38.4 & -14.2 \end{pmatrix}$$

O comportamento simulado desta realimentação de estados, em simulação conjunta com o modelo completo sujeito a limitação de tensão máxima de armadura de ± 10 volts é mostrado na figura 5.1:

Figura 5.1: Simulação de Controle Linear

5.2 Observador assintótico para o sistema linearizado

Sabemos que o subsistema considerado é observável, então podemos alocar livremente os pólos de um observador assintótico. A matriz de ganhos que aloca os pólos do observador em $-50 \pm 50i$, também obtida via comando `place` do software MATLAB é:

$$K = \begin{pmatrix} 100 \\ 5001 \end{pmatrix}$$

O comportamento do sistema foi simulado nas mesmas condições da seção 5.1, na figura 5.2 ilustramos o comportamento obtido sem ruído. Na figura 5.3, apresentamos os resultados obtidos na presença de ruído aditivo de variância 0.001:

Figura 5.2: Simulação de Controle Linear por observadores assintóticos de estado.

Figura 5.3: Simulação de Controle Linear por observadores assintóticos de estado em presença de ruído aditivo.

5.3 Controle com estimador algébrico

Utilizando dois estimadores de derivadas de ordem 7 intercalados e reinicializados alternadamente a cada 2 segundos (vide ilustração 2.1), construímos um observador não assintótico. Os estados observados são a saída medida pelo encoder, e sua primeira derivada estimada. Na figura 5.4 exibimos o comportamento obtido via simulação e repetimos o resultado para uma saída corrompida por ruído aditivo de variância 0.001 na figura 5.5.

Figura 5.4: Simulação de Controle Linear por observador algébrico

Figura 5.5: Simulação de Controle Linear por observador algébrico na presença de ruído

5.4 Comparações entre os observadores

Representamos nas figuras seguintes, algumas comparações entre os dois observadores construídos:

5.4.1 Posicionamento do braço do pêndulo.

As figuras 5.6 e 5.8 ilustram o comportamento obtido no posicionamento do braço do pêndulo em simulação com e sem ruído.

Figura 5.6: Comparativo de posicionamento.

Figura 5.7: Diferença de posicionamento do braço em relação à realimentação de estados reais.

Figura 5.8: Comparativo de posicionamento em ambiente ruidoso.

Figura 5.9: Diferença de posicionamento em relação à realimentação de estados reais, ambiente ruidoso.

Verifica-se que na ausência de ruídos, o estimador algébrico produz um comportamento mais próximo da realimentação pura de estados

5.4.2 Estimador de estados ϕ

Apresentamos o comportamento dos estimadores de estado para a variável ϕ (algébrico e observador assintótico) e seu erro em relação ao estado real.

Figura 5.10: Valores Estimados de ϕ Figura 5.11: Diferença entre os valores estimados e o real valor de ϕ .

Nas figuras 5.12 e 5.13, repetimos os gráficos anteriores agora com a saída do sistema corrompida por ruído aditivo.

Figura 5.12: Valores Estimados de ϕ Figura 5.13: Diferença entre os valores estimados e o real valor de ϕ , ambiente ruidoso.

5.4.3 Estimador de estados $\dot{\phi}$

Apresentamos o comportamento dos estimadores de estado para a variável $\dot{\phi}$ (algébrico e observador assintótico) e seu erro em relação ao estado real.

Figura 5.14: Valores Estimados de $\dot{\phi}$ Figura 5.15: Diferença entre os valores estimados e o valor real de $\dot{\phi}$.

Nas figuras 5.16 e 5.17, repetimos os gráficos anteriores agora com a saída do sistema corrompida por ruído aditivo.

Figura 5.16: Valores Estimados de $\dot{\phi}$, ambiente ruidoso.

Figura 5.17: Diferença entre os valores estimados e o valor real de $\dot{\phi}$, ambiente ruidoso.

Na figura 5.17 podemos observar que o erro de estimação, apesar de diminuto é maior no estimador algébrico. Isto ocorre pois o estimador é rápido e não se utilizou nenhum tipo de filtragem adicional. Já o estimador assintótico, por ser mais lento, apresentou um resultado mais preciso e livre de ruídos após o tempo de convergência.

5.5 Ensaio de Bancada com o pêndulo por transferência de torque

5.5.1 Comparativo do resultado de controle

A lei de controle e o estimador proposto nos ensaios anteriores foi implementada no controle do sistema construído. O primeiro gráfico deste ensaio, figura 5.18, é exibido a seguir e demonstra o posicionamento do braço do pêndulo (variável ϕ) em ambos os tipos de controle.

Figura 5.18: Posicionamento do braço no ensaio em bancada.

Não se percebe diferença significativa entre os controles, ambos atenderam muito bem às expectativas.

5.5.2 Comparativo entre os observadores

Nas figuras 5.19, 5.20, 5.21 e 5.22, exibimos o comportamento dos observadores de estados. Foram realizados diversos ensaios utilizando os dois tipos de observadores e os resultados foram muito repetitivos. Inclusive, como histórico de posicionamento de ambas as construções é praticamente idêntico (ver figura 5.18), assumimos a média entre os dois tipos de controle como referência nas comparações a seguir.

Figura 5.19: Comparativo entre os observadores de estado.

Figura 5.20: Comparativo entre os observadores de estado.

A variável de estado ϕ é estimada de maneira muito mais próxima no estimador algébrico.

Figura 5.21: Comparativo entre os observadores de estado.

Figura 5.22: Comparativo entre os observadores de estado.

A variável de estado $\dot{\phi}^1$ é estimada de maneira muito mais próxima no estimador algébrico, observa-se que a menos do ruído, o erro é sempre muito próximo de zero.

¹O valor de referência é na realidade uma estimativa feita após ensaio utilizando a técnica de Savitzky-Golay [12] com um polinômio de ordem 3 e uma janela de 299 amostras. Desta maneira, utilizando valores futuros em cálculo efetuado após o ensaio, obtivemos uma estimativa da primeira derivada do sinal medido e comparamos com o observado "on-line" e em tempo real, numa realização puramente causal.

5.5.3 Comparativo entre os esforços de controle

Para concluir os comparativos, apresentamos o esforço de controle em cada tipo de abordagem:

Figura 5.23: Comparativo entre os esforços de controle.

O esforço de controle é praticamente o mesmo em ambas as abordagens.

5.5.4 Considerações finais sobre o ensaio realizado

Como metodologia de controle a teoria de estimadores algébricos se mostrou bem eficaz, se comportando tão bem quanto a teoria convencional. O sistema construído apresenta uma não linearidade que não chegou a comprometer o controle linear que bastou para realizar o controle do pêndulo, mas, validou o funcionamento do controlador algébrico construído, de forma que sua utilização pode ser considerada em sistemas com não linearidades mais marcantes.

O comportamento obtido em ensaio foi ligeiramente diferente do obtido nas simulações devido a discrepâncias entre o sistema real e o modelo adotado. Não consideramos, por exemplo, a resistência elétrica do condutor que interliga o circuito de potência e o motor. Tal condutor foi escolhido fino e flexível para não prejudicar o movimento do pêndulo e em contrapartida, sua resistência elétrica se mostrou não completamente desprezível. Mesmo diante deste e possivelmente de outros erros de modelagem, o resultado de controle foi muito bom, sendo possível posicionar o braço do pêndulo na posição vertical de forma rápida.

Também ficou evidente nos ensaios que o ruído presente não é tão grande quanto o utilizado

nas simulações em computador. De fato, devido ao uso de um encoder, as únicas fontes de incertezas foram a própria quantização do encoder (comparável à quantização da placa DA/AD) e às trepidações e do sistema mecânico.

6 *Conclusões e Trabalhos Futuros*

Pelos diversos ensaios e simulações realizadas, concluímos que a teoria de estimadores rápidos é promissora e pode produzir observadores que tem algumas vantagens em relação aos observadores tradicionais. Como vantagens mais evidentes estão a rápida estimação dos estados internos e uma rápida atenuação do ruído de medição. Por outro lado, o ruído resultante ainda é elevado em algumas situações, sendo necessária a escolha correta dos parâmetros do estimador para obter o melhor compromisso entre validade da estimativa e rejeição dos ruídos. No presente momento não existe uma metodologia estabelecida para se encontrar estes parâmetros. Faltam ainda, pesquisas com relação ao correto ajuste do intervalo de reinicialização do estimador, na busca de uma metodologia robusta e que permita melhorar a rejeição de ruídos e também minimizar o erro das derivadas estimadas.

A possibilidade de estimar quase que instantaneamente o estado interno de um sistema não linear nos permite projetar uma lei de controle e construir um controlador sem preocupações com a validade do teorema da separação para a planta em questão. Entretanto esta não foi uma necessidade muito evidente no sistema proposto construído para ensaios em bancada, possivelmente devido à lei de controle utilizada que mascarou em grande parte suas características não lineares.

A maioria das possibilidades abertas para pesquisas futuras são relacionadas à implementação da teoria em tempo discreto, dando assim continuidade ao presente trabalho. Na seção 3.4, menciona-se a possibilidade de utilizar outra técnica para encontrar um polinômio que aproxime as últimas amostras do sinal de entrada. Durante a realização deste trabalho, uma idéia que surgiu foi a utilização de um intervalo com mais amostras do que o mínimo necessário e utilizar um método de mínimos quadrados ponderado para encontrar um polinômio de ordem baixa. Esta implementação diferenciada pode unir as vantagens da teoria de estimadores rápidos e a atenuação de ruídos obtida pelos filtros de Savitzky-Golay [12], por outro lado será introduzido algum atraso de fase.

Em relação ao controle do sistema mecânico construído, uma alternativa mais elaborada

pode se utilizar da segunda derivada da posição do braço para estimar a velocidade do disco. Desta maneira podemos considerar o modelo completo do motor e assim aplicar a tensão adequada em sua armadura para produzir exatamente o torque necessário, compensando a aproximação feita para o motor operando em baixas velocidades.

Referências Bibliográficas

- [1] REGER, J.; RAMIREZ, H.; FLIESS, M. On non-asymptotic observation of nonlinear systems. In: *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 4219–4224.
- [2] REGER, J.; MAI, P.; SIRA-RAMIREZ, H. Robust algebraic state estimation of chaotic systems. In: *Control Applications, 2006 IEEE International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 326–331.
- [3] NOVAES, C. E. d. B.; SILVA, P. S. P. On non-asymptotic state observers and their implementation in discrete time. *DINCON'09 - Bauru (8. : 2009 : Bauru) ISBN: 978-85-86883-45-3*, p. 6, May 2009. Disponível em: <<http://carlosnovaes.files.wordpress.com/2009/06/03-novaes.pdf>>.
- [4] KHALIL, H. *Nonlinear systems*. [S.l.]: Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [5] KAILATH, T. *Linear Systems*. [S.l.]: Prentice Hall, 1980. Paperback. ISBN 0135369614.
- [6] FLIESS, M.; LAMNABHI, M.; LAMNABHI-LAGARRIGUE, F. An algebraic approach to nonlinear functional expansions. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, v. 30, n. 8, p. 554–570, 1983.
- [7] FLIESS, M.; SIRA-RAMIREZ, H. An algebraic framework for linear identification. *ESAIM CONTROLE OPTIMISATION ET CALCUL DES VARIATIONS*, EDP SCIENCES, v. 9, p. 151, 2004.
- [8] GIBARU, O. D. L. et al. An error analysis in the algebraic estimation of a noisy sinusoidal signal. *16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, p. 1296–1301, 2008.
- [9] MIKUSINSKI, J. *Operational Calculus*. [S.l.]: Elsevier, 1960.
- [10] MAKKAR, C. et al. A new continuously differentiable friction model for control systems design. *Proceedings of the 2005 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, p. 6, July 2005.
- [11] KIRKPATRICK, S.; JR., C. D. G.; VECCHI, M. P. Optimization by simulated annealing. *Science*, v. 220, p. 671–680, May 1983. Disponível em: <<http://www.idi.ntnu.no/emner/tdt4/kirkpatrick83optimizationsimulatedannealing.pdf>>.
- [12] SAVITZKY, A.; GOLAY, M. J. E. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures. *Analytical Chemistry*, v. 36, n. 8, p. 1627+, July 1964.

ANEXO A – Demonstrações

A.1 Demonstração do resultado sobre integrais de polinômios

Lema:

Seja $f(t_0 + \Delta_t)$ uma função definida como uma integral múltipla:

$$f(t_0 + \Delta_t) = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta_t} \cdots \int \tau^m d\tau^n, t_0, \Delta_t \in \mathbb{R}^+; m, n \in \mathbb{N}^{+*}$$

Então, podemos afirmar que:

$$f(t_0 + \Delta_t) = \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j! (m+n-j)!} t_0^j \Delta_t^{m+n-j}$$

Prova:

Seja uma nova função $g(t_0 + \Delta_t)$ definida por:

$$g(t_0 + \Delta_t) = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta_t} f(\tau) d\tau$$

então:

$$f(t_0 + \Delta_t) = \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j! (m+n-j)!} t_0^j \Delta_t^{m+n-j}$$

e

$$g(t_0 + \Delta_t) = \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j! (m+n+1-j)!} t_0^j \Delta_t^{m+n+1-j} \quad (\text{A.1})$$

mas, $g(t_0 + \Delta_t)$ também pode ser calculada como se segue:

$$\begin{aligned}
 g(t_0 + \Delta_t) &= \int_{t_0}^{t_0 + \Delta_t} f(\tau) d\tau \\
 g(t_0 + \Delta_t) &= \int_{t_0}^{t_0 + \Delta_t} f(t_0 + (\tau - t_0)) d\tau \\
 g(t_0 + \Delta_t) &= \int_{t_0}^{t_0 + \Delta_t} \left[\sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!(m+n-j)!} t_0^j (\tau - t_0)^{m+n-j} \right] d\tau \\
 g(t_0 + \Delta_t) &= \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!(m+n-j)!} t_0^j \left[\int_{t_0}^{t_0 + \Delta_t} (\tau - t_0)^{m+n-j} d\tau \right] \\
 g(t_0 + \Delta_t) &= \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!(m+n-j)!} t_0^j \left[\frac{(\tau - t_0)^{m+n+1-j}}{m+n+1-j} \right]_{t_0}^{t_0 + \Delta_t} \\
 g(t_0 + \Delta_t) &= \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!(m+n+1-j)!} t_0^j \Delta_t^{m+n+1-j}
 \end{aligned}$$

Que é exatamente o mesmo resultado de (A.1).

A.2 Equação do filtro Z em tempo discreto

A derivada de cada estágio do filtro é uma função do sinal de entrada ($y(t)$), tempo t e, exceto para o último estágio, também uma função do estágio predecessor. Se a entrada puder ser aproximada por um polinômio durante um intervalo de tempo, então poderemos calcular a variação de cada estágio neste intervalo de tempo. De posse do valor anterior de cada estágio do filtro no tempo inicial $t = t_0$ de cada amostra, então podemos saber o valor final após este intervalo de amostragem.

Para exemplificar, seja um sinal de entrada aproximado numa dada amostra por:

$$\tilde{y}(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 \quad (\text{A.2})$$

Então, o último estágio do filtro Z será:

$$\dot{Z}_{k-1}(t) = B_{k-1} [\alpha_1 t + \alpha_2] t^0$$

Integrando no intervalo t_0 e $t_f = t_0 + \Delta_t$:

$$\begin{aligned} Z_{k-1}(t_0 + \Delta_t) &= \int_{t_0}^{t_0 + \Delta_t} B_{k-1} (\alpha_1 \tau + \alpha_2) d\tau + \\ &+ Z_{k-1}(t_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{k-1}(t_0 + \Delta_t) &= B_{k-1} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta_t} \alpha_1 \tau d\tau + \\ &+ B_{k-1} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta_t} \alpha_2 d\tau + \\ &+ Z_{k-1}(t_0) \end{aligned}$$

para o penúltimo estágio:

$$\dot{Z}_{k-2}(t) = B_{k-2} [\alpha_1 t + \alpha_2] t^1 + Z_{k-1}(t)$$

Integrando no intervalo de tempo já definido:

$$\begin{aligned}
Z_{k-2}(t_0 + \Delta_t) &= B_{k-2} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta_t} \alpha_1 \tau^2 d\tau + \\
&+ B_{k-2} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta_t} \alpha_2 \tau d\tau + \\
&+ B_{k-1} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta_t} \cdots \int_{t_0}^{t_0 + \Delta_t} \alpha_1 \tau d\tau^2 + \\
&+ B_{k-1} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta_t} \cdots \int_{t_0}^{t_0 + \Delta_t} \alpha_2 d\tau^2 + \\
&+ \int_{t_0}^{t_0 + \Delta_t} Z_{k-1}(t_0) \\
&+ Z_{k-2}(t_0)
\end{aligned}$$

Avançando para os outros estágios, veremos que cada equação é composta pela primeira integral das parcelas deste estágio, a segunda integral das parcelas do estágio seguinte e assim sucessivamente até o último estágio. Além disto, as condições iniciais surgem como constantes de integração no estágio atual e como integrais nos estágios seguintes. Generalizando:

$$\begin{aligned}
Z_l(t_0 + \Delta_t) &= \sum_{h=1}^{k-l} \left[B_{l-1+h} \sum_{g=0}^p \left[\alpha_g \int \cdots \int \tau^{k+g-h-l} d\tau^h \right] + \right. \\
&\quad \left. + Z_{l+h}(t_0) \int \cdots \int d\tau^h \right] + Z_l(t_0)
\end{aligned}$$

Onde p é a ordem do polinômio que aproxima a entrada $y(t)$. Por clareza, os intervalos de integração foram omitidos nesta equação.

Usando o resultado (3.1), escrevemos:

$$\begin{aligned}
Z_l(t_0 + \Delta_t) &= \sum_{g=0}^p \sum_{h=1}^{k-l} \left[\alpha_g \sum_{j=0}^{k+g-h-l} B_{l-1+h} \times \right. \\
&\quad \times \frac{(k+g-h-l)!}{j!(k+g-l-j)!} \Delta_t^{k+g-l-j} t_0^j + \\
&\quad \left. + Z_{l+h}(t_0) \frac{\Delta_t^h}{h!} \right] + Z_l(t_0)
\end{aligned}$$

Assim, a equação que define o valor de cada estágio do filtro Z em um dado intervalo de amostragem é uma combinação linear de produtos de potências inteiras de Δ_t por potências inteiras de t_0 , e então multiplicada por cada coeficiente do polinômio que aproxima as últimas amostras do sinal de entrada.

ANEXO B – Resumo de Implementação

Vamos apresentar agora um resumo focado na implementação de estimadores algébricos. A figura B.1 representa o diagrama geral de controle e a figura B.2 na página seguinte ilustra os detalhes construtivos do estimador de derivadas.

Figura B.1: Esquema fundamental do estimador.

Figura B.2: Esquema detalhado do estimador de derivadas

B.1 Definição dos parâmetros do sistema

Devemos primeiramente definir alguns parâmetros do projeto. Primeiramente a taxa de amostragem que é determinada pela banda passante do sistema, os outros parâmetros são relativos ao estimador e podem ser ajustados via simulação.

A tabela B.1 apresenta estes parâmetros e uma sugestão preliminar de valor.

Tabela B.1: Parâmetros do Estimador em tempo discreto.

Parâmetro	Descrição	Comportamento	Sugestão
Δ_t	Taxa de amostragem do sinal cujas derivadas serão estimadas.	Aumentando-se a taxa de amostragem, aumenta-se a quantidade de detalhes capturados.	Dobro da maior frequência de interesse.
d	Ordem da maior derivada que se deseja estimar.	-	-
k	Ordem do estimador.	Estimadores de ordem maior produzem estimativas válidas por tempo maior. Precisa ser superior a d .	Ao menos $d + 1$. Uma boa região é entre 5 e 9 se for suficiente para atender o critério anterior.
p	Grau do polinômio que aproxima as amostras de $y(t)$.	Um grau mais elevado aumenta a riqueza de detalhes mas diminui a atenuação do ruído.	1 grau superior à ordem da maior derivada desejada (d).
t_{reset}	Intervalo de reinicialização dos estimadores.	<p>Esta intimamente relacionado à frequência máxima do sinal de entrada, devendo ser reduzido para reproduzir comportamentos de frequência mais elevada. Este intervalo determina o compromisso entre rejeição de ruídos e estimativas corretas das derivadas. Se for grande as derivadas estimadas podem desviar muito do valor real, se for pequeno não há atenuação do ruído.</p> <p>Se a ordem do estimador é reduzida, este intervalo de reset deve ser reduzido para preservar a validade das estimativas.</p> <p>Se a ordem da maior derivada desejada é aumentada, o intervalo de reset deve ser reduzido.</p>	<p>Deve ser ensaiado em simulação até se obter o comportamento desejado.</p> <p>Como sugestão inicial, pode-se verificar nos ensaios apresentados que para estimar a primeira derivada de um sinal $y = \sin(t)$ com um estimador de ordem $k = 7$, o intervalo de reset foi próximo de 8 segundos.</p>

B.2 Pré cálculo dos coeficientes

Muitos coeficientes podem ser previamente calculados de forma a acelerar o estimador.

B.2.1 Cálculo da matriz de aproximação polinomial para cada instante possível de amostragem

A matriz que define os coeficientes do polinômio de grau p que aproxima as últimas $p + 1$ amostras do sinal de entrada é variante no tempo e deve ser pré calculada para cada instante t_0 (instante em que ocorre a amostra atual) possível. Determina-se os instantes t_0 conhecendo-se a taxa de amostragem e o intervalo de reset:

$$t_0 = n\Delta_t, n \in \left[1, 2, 3, 4, \dots, \frac{t_{reset}}{\Delta_t}\right] \quad (\text{B.1})$$

Trata-se de uma matriz quadrada com dimensão $p + 1$:

$$\mathbb{A}(t) = \begin{pmatrix} t_0^0 & t_0^1 & t_0^2 & \cdots & t_0^p \\ (t_0 - \Delta_t)^0 & (t_0 - \Delta_t)^1 & (t_0 - \Delta_t)^2 & \cdots & (t_0 - \Delta_t)^p \\ (t_0 - 2\Delta_t)^0 & (t_0 - 2\Delta_t)^1 & (t_0 - 2\Delta_t)^2 & \cdots & (t_0 - 2\Delta_t)^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (t_0 - p\Delta_t)^0 & (t_0 - p\Delta_t)^1 & (t_0 - p\Delta_t)^2 & \cdots & (t_0 - p\Delta_t)^p \end{pmatrix}^{-1} \quad (\text{B.2})$$

B.2.2 Cálculo das constantes do estimador

A tabela B.2 demonstra as constantes do estimador e como proceder a sua determinação.

Tabela B.2: Coeficientes do estimador.

Identificação	Equação	Comentários
$B(k, i, 1)$	$\binom{k}{i+1}^2 (-1)^{-i} (i+1)!$	Número Inteiro, $i \in [1, 2, 3, \dots, k-1]$.
$D(k, i, j)$	$\binom{k+i-j-1}{i-j} \frac{(k-j-1)!}{(k-i-1)!}$	Número Inteiro positivo ou zero, $i, j \in [1, 2, 3, \dots, k-1]$.
$E(k, i)$	$\frac{(k+i-1)!}{i!(k-i-1)!}$	Número Inteiro positivo, $i \in [1, 2, 3, \dots, k-1]$.

B.3 Construção do estimador

O estimador proposto é composto na realidade por dois conjuntos de filtros variantes no tempo, operando em paralelo e reinicializados alternadamente. Para tal, devemos então criar dois vetores chamados de Za e Zb , de dimensão $k - 1$. Devemos definir também dois contadores de tempo, um para cada conjunto de filtros variantes no tempo e que denominaremos ta e tb . Inicialmente, ambos os vetores e seus respectivos contadores de tempo estarão zerados.

As últimas $p + 1$ amostras do sinal de entrada devem ser armazenadas, utilizaremos então um vetor de dimensão $p + 1$ onde os elementos serão deslocados a cada nova amostra, descartando a amostra mais antiga e inserindo a amostra atual na primeira posição. Denominaremos este vetor como y_{buffer}

B.4 Algoritmo

O algoritmo descrito a seguir é ilustrado na figura B.3. A cada intervalo de amostragem, seguiremos os seguintes passos:

B.4.1 Ambos os contadores de tempo (ta e tb) serão incrementados de Δ_t

$$ta = ta + \Delta_t$$

$$tb = tb + \Delta_t$$

B.4.2 Deslocar amostras em y_{buffer} e inserir amostra atual na primeira posição

$$y_{buffer}(t_0 - \Delta_t) = \begin{bmatrix} y_5 & y_4 & y_3 & y_2 & y_1 \end{bmatrix}'$$

$$y_{buffer}(t_0) = \begin{bmatrix} \underbrace{y_6}_{\text{amostra atual}} & \underbrace{y_5 \ y_4 \ y_3 \ y_2}_{\text{deslocar amostras}} \end{bmatrix}'$$

B.4.3 Determinar os coeficientes α para o filtro Za

$$\alpha = \mathbb{A}(ta) \times y_{buffer}$$

B.4.4 Determinar a evolução dos estágios do filtro Za

$$\begin{aligned} Z_l(t_a) = & \sum_{g=0}^p \sum_{h=1}^{k-l} \left[\alpha_g \sum_{j=0}^{k+g-h-l} B_{l-1+h} \times \right. \\ & \times \frac{(k+g-h-l)!}{j!(k+g-l-j)!} \Delta_t^{k+g-l-j} (t_a - \Delta_t)^j + \\ & \left. + Z_{l+h}(t_a - \Delta_t) \frac{\Delta_t^h}{h!} \right] + Z_l(t_a - \Delta_t) \end{aligned}$$

B.4.5 Determinar os coeficientes α para o filtro Zb

$$\alpha = \mathbb{A}(tb) \times y_{buffer}$$

B.4.6 Determinar a evolução dos estágios do filtro Zb

$$\begin{aligned} Z_l(t_b) = & \sum_{g=0}^p \sum_{h=1}^{k-l} \left[\alpha_g \sum_{j=0}^{k+g-h-l} B_{l-1+h} \times \right. \\ & \times \frac{(k+g-h-l)!}{j!(k+g-l-j)!} \Delta_t^{k+g-l-j} (t_b - \Delta_t)^j + \\ & \left. + Z_{l+h}(t_b - \Delta_t) \frac{\Delta_t^h}{h!} \right] + Z_l(t_b - \Delta_t) \end{aligned}$$

B.4.7 Escolher os estágios do filtro cujo tempo relativo (ta ou tb) seja maior e usar estes valores no cálculo das estimativas das derivadas

$$\hat{y}^{(i)}(t_0) = E(k, i) \frac{1}{t[a, b]^i} y(t[a, b]) + \sum_{j=1}^i D(k, i, j) \frac{1}{t[a, b]^{k+i-j}} Z[a, b]_j(k, t[a, b])$$

B.4.8 Se o contador de tempo ta tiver valor igual a metade do valor t_{reset} , reinicializar o vetor Zb e o contador tb . Se isto não ocorrer, então verificar se o contador tb tem valor igual ou superior a metade do valor t_{reset} e neste caso reinicializar o vetor Za e o contador ta . Esta política implementa o procedimento de reinicialização alternada ilustrado em 2.1

B.4.9 Prosseguir com a próxima amostra

Figura B.3: Fluxograma do algoritmo.

ANEXO C – Ferramentas utilizadas

C.1 Introdução

No desenvolvimento do presente trabalho, utilizou-se de diversos softwares e linguagens de programação. As simulações foram executadas em MATLAB. Os desenhos foram feitos utilizando o software PovRay e as peças usinadas na construção do pêndulo foram desenhadas com auxílio do software VariCAD. Os programas em linguagem C/C++ foram compilados em ambiente GNU/Linux com o software GCC (GNU Compiler Collection) e o firmware escrito para o microcontrolador PIC foi compilado utilizando a suíte GPUtils (GNU PIC Utilities).

O ensaio em laboratório utilizou alguns componentes de hardware, uma placa de aquisição de dados LYNX modelo CAD12/36, e um computador pessoal PC AMD K6II 300MHz dotado de 32MB de memória RAM. A construção do pêndulo propriamente utilizou um encoder com capacidade para discretizar uma volta completa em 4000 pulsos, e um circuito feito com um microcontrolador PIC foi utilizado para converter os pulsos do encoder (quadratura) em código binário para aquisição pela placa LYNX.

C.2 Programas para ambiente MATLAB

C.2.1 Programa Makkar_Solve.m

Este programa encontra os parâmetros para o modelo de atrito de Makkar com base nas informações fornecidas. A busca é feita utilizando-se um processo inspirado em simulação de recozimento (annealing).

```
function [ Gamma ] = Makkar_Solve( Ff, Vf )
%MAKKAR_SOLVE Return a Vector of constants for makkar friction model
% Detailed explanation goes here

% Ff(1) : Static Friction Maximum
% Ff(2) : Kinematic Friction
```

```

% Ff(3) : Linear Friction
% Vf(1) : Maximum Static Friction Point
% Vf(2) : Minimum Kinematic Friction Point

DeltaV = Vf(2) - Vf(1);
dv = DeltaV/100;

if abs(Vf(2)) < abs(2*Vf(1))
    error('Invalid Ratio on Velocity');
end

vtest=0:dv:2*Vf(2);

Gamma=zeros(1,6);
Gamma(6)=abs(Ff(3));
Gamma(3)=abs(2/Vf(2));
Gamma(2)=10*Gamma(3);
Gamma(1)=abs(Ff(1)-Ff(2));
Gamma(5)=10*Gamma(3);
ftest=Makkar(Gamma, vtest);
Gamma(4)=Ff(2)-min(ftest);

gamma_previous = Gamma;

previous_q=inf;
temp_vec=1000:-10:300;
temp_vec=cat(2,temp_vec,300:-2:0);
for it_forge=1:2

for it_temp=temp_vec
    for it_try=1:1000
        Gamma=(rand(1,6)-(ones(1,6)/2))*it_temp/500; % range from -2 to +2 when temp=1000
        %Gamma=Gamma+gamma_previous;
        Gamma = gamma_previous .* (2).^(Gamma); %Scale parameters from 0.25 to 4
        Gamma(6) = Ff(3);
        if Gamma(2)<Gamma(3)
            gt=Gamma(2);
            Gamma(2)=Gamma(3);
            Gamma(3)=gt;
        end
        Gamma=abs(Gamma);
        ftest=Makkar(Gamma, vtest);
        points = MakkarFindPoints(ftest);
        distant_force=Makkar(Gamma, 10*Vf(2));
        desired_distant_force = Ff(3)*10*Vf(2)+Ff(2);
        q = MakkarQualityTest(ftest(points), vtest(points), Ff(1:2), Vf(1:2), distant_force, desired_distant_force);
        if q<previous_q
            previous_q=q;
            fprintf('Quality is now %d\n', 1/q);
            gamma_previous = Gamma;
        % else
        %     prob=exp(1000000*(previous_q-q)/it_temp);
        %     if rand(1) <= prob

```

```

%           fprintf('Run away from local minimum! Quality is now %d\n', 1/q);
%           gamma_previous = Gamma;
%       end
    end
end
fprintf('Annealing\n')
end
Gamma=gamma_previous;
end

function [Points] = MakkarFindPoints(Vel)
    vdiff=diff(Vel);
    pt=1;
    Points=[0 0];
    for it_p=2:length(Vel)-1
        if sign(vdiff(it_p)) ==sign(vdiff(it_p-1))
            if abs(sign(it_p))==1
                Points(pt)=it_p;
                pt=pt+1;
            end
        end
    end
    if Points(1)==0
        Points(1)=1;
    end
    if Points(2)==0
        Points(2)=1;
    end
end

end

function val = MakkarQualityTest(Ff, Vf, Fc, Vc, distant_force, desired_distant_force)
    val = ((Ff(1)-Fc(1))/Fc(1))^2 + ((Ff(2)-Fc(2))/Fc(2))^2 + 0.5*((Vf(1)-Vc(1))/Vc(1))^2 + 0.5*((Vf(2)-Vc(2))/Vc(2))^2 + ((distant_force-
desired_distant_force)/desired_distant_force)^2;
end

function [Force] = Makkar(Gamma, Vel)
    Force=Gamma(1)*(tanh(Gamma(2)*Vel)-tanh(Gamma(3)*Vel)) + Gamma(4)*tanh(Gamma(5)*Vel) + Gamma(6)*Vel;
end

```

C.2.2 Programa NAO_disc_sfunc.m

Programa MATLAB LEVEL 2 para implementar um bloco no simulink capaz de realizar a teoria de estimação de derivadas em tempo discreto, da forma proposta no presente trabalho.

```
function NAO_disc_sfunc(block)
```

```

% Level-2 M file S-Function for Non Assymptotic Observation
% Revision : 0.2

setup(block);

%endfunction

function setup(block)
% Estimator Order      (1)
% Input Approximation Order (2)
% Reset Interval      (3)
% SampleTime          (4)
block.NumDialogPrms = 4;

%% Register number of input and output ports
block.NumInputPorts = 1;
block.NumOutputPorts = 1;

%% Setup functional port properties to dynamically
%% inherited.
block.SetPreCompInPortInfoToDynamic;
block.SetPreCompOutPortInfoToDynamic;

% Input Dimension is 1
block.InputPort(1).Dimensions = 1;
block.InputPort(1).DirectFeedthrough = true;

% Output Dimension is Order - 1
block.OutputPort(1).Dimensions = block.DialogPrm(1).Data-1;

%% Set block sample time
block.SampleTimes = [block.DialogPrm(4).Data 0];

%% Register methods
block.RegBlockMethod('PostPropagationSetup', @DoPostPropSetup);
block.RegBlockMethod('InitializeConditions', @InitConditions);
block.RegBlockMethod('Outputs', @Output);
block.RegBlockMethod('Update', @Update);
%endfunction

function DoPostPropSetup(block)
%% Setup Dwork
% Discrete State Z      (1)x
% Discrete Input        (1)x
% Reset Time            (1)x
% E Constants           (1)x
% D Constants           (1)x
% Integration Constants (1)x
% Input Approximation Constants (p)x
% Control DWork
block.NumDworks = 8 ;

% Discrete State 'Z'
block.Dwork(1).Name = 'Zdisc';

```

```

block.Dwork(1).Dimensions = block.DialogPrm(1).Data - 1 ;
block.Dwork(1).DatatypeID = 0;
block.Dwork(1).Complexity = 'Real';
block.Dwork(1).UsedAsDiscState = true;

% Discrete State 'Input'
block.Dwork(2).Name = 'Input';
block.Dwork(2).Dimensions = block.DialogPrm(2).Data+1 ;
block.Dwork(2).DatatypeID = 0;
block.Dwork(2).Complexity = 'Real';
block.Dwork(2).UsedAsDiscState = true;

% Reset Time
block.Dwork(3).Name = 'ResetTime';
block.Dwork(3).Dimensions = 1;
block.Dwork(3).DatatypeID = 0;
block.Dwork(3).Complexity = 'Real';
block.Dwork(3).UsedAsDiscState = true;

% E Constants
block.Dwork(4).Name = 'E';
block.Dwork(4).Dimensions = block.DialogPrm(1).Data - 1;
block.Dwork(4).DatatypeID = 0;
block.Dwork(4).Complexity = 'Real';
block.Dwork(4).UsedAsDiscState = false;

% D Constants
block.Dwork(5).Name = 'D';
block.Dwork(5).Dimensions = (block.DialogPrm(1).Data - 1)^2 ;
block.Dwork(5).DatatypeID = 0;
block.Dwork(5).Complexity = 'Real';
block.Dwork(5).UsedAsDiscState = false;

% Integration Constants
block.Dwork(6).Name = 'Integ';
block.Dwork(6).Dimensions = (block.DialogPrm(1).Data - 1)^2;
block.Dwork(6).DatatypeID = 0;
block.Dwork(6).Complexity = 'Real';
block.Dwork(6).UsedAsDiscState = false;

% B and InputApproximations Constants
block.Dwork(7).Name = 'BAapprox_order';
block.Dwork(7).Dimensions = (block.DialogPrm(1).Data + block.DialogPrm(2).Data - 1)*(block.DialogPrm(1).Data-1)*(block.DialogPrm(2).Data
+ 1);
block.Dwork(7).DatatypeID = 0;
block.Dwork(7).Complexity = 'Real';
block.Dwork(7).UsedAsDiscState = false;

% Control
block.Dwork(8).Name = 'Control';
block.Dwork(8).Dimensions = 1 ;
block.Dwork(8).DatatypeID = 0;
block.Dwork(8).Complexity = 'Real';
block.Dwork(8).UsedAsDiscState = false;

```

```
%endfunction
```

```
function InitConditions(block)
```

```
%% Initialize Dwork
```

```
% Discrete State 'Z'
```

```
block.Dwork(1).Data=zeros((block.DialogPrm(1).Data-1),1);
```

```
% Discrete State 'Input'
```

```
block.Dwork(2).Data=zeros(1, block.DialogPrm(2).Data+1);
```

```
% Reset Time
```

```
block.Dwork(3).Data=0;
```

```
% E Constants
```

```
for it_l=1:(block.DialogPrm(1).Data-1)
```

```
    block.Dwork(4).Data(it_l,1) = EFactor(block.DialogPrm(1).Data, it_l) ;
```

```
end
```

```
% D Constants
```

```
for it_l=1:(block.DialogPrm(1).Data-1)
```

```
    for it_h=1:(block.DialogPrm(1).Data-1)
```

```
        aux = (it_h-1)*(block.DialogPrm(1).Data-1)+it_l ;
```

```
        block.Dwork(5).Data(aux, 1) = DFactor(block.DialogPrm(1).Data, it_l, it_h) ;
```

```
    end
```

```
end
```

```
% Integration Constants
```

```
block.Dwork(6).Data=zeros((block.DialogPrm(1).Data-1)^ 2, 1);
```

```
for it_l=1:(block.DialogPrm(1).Data-1)
```

```
    for it_h=0:(block.DialogPrm(1).Data-it_l-1)
```

```
        aux = (it_h+it_l-1)*(block.DialogPrm(1).Data-1)+it_l;
```

```
        block.Dwork(6).Data(aux,1) = block.DialogPrm(4).Data^it_h / factorial(it_h) ;
```

```
    end
```

```
end
```

```
% B and InputApproximations Constants
```

```
block.Dwork(7).Data=zeros((block.DialogPrm(1).Data + block.DialogPrm(2).Data - 1)*(block.DialogPrm(1).Data-1)*(block.DialogPrm(2).Data + 1), 1);
```

```
for it_l=1:(block.DialogPrm(1).Data-1)
```

```
    for it_g=0:block.DialogPrm(2).Data
```

```
        for it_h=1:(block.DialogPrm(1).Data-it_l)
```

```
            for it_j=0:(block.DialogPrm(1).Data+it_g-it_h-it_l)
```

```
                aux = (it_g)*(block.DialogPrm(1).Data + block.DialogPrm(2).Data - 1)*(block.DialogPrm(1).Data-1) + (it_j)*(block.DialogPrm(1).Data-1) + it_l;
```

```
                block.Dwork(7).Data(aux,1) = block.Dwork(7).Data(aux,1) + BFactor(block.DialogPrm(1).Data, it_l - 1 + it_h, 1) * factorial(block.DialogPrm(1).Data+it_g-it_h-it_l) / factorial(it_j) / factorial(block.DialogPrm(1).Data+it_g-it_l-it_j) * block.DialogPrm(4).Data^(block.DialogPrm(1).Data-it_l-it_j);
```

```
            end
```

```
        end
```

```
    end
```

```
end
```

```
% Control
```

```
block.Dwork(8).Data = -block.DialogPrm(2).Data;
```

```
% disp(block.Dwork(1).Data)
```

```
% disp(block.Dwork(2).Data)
```

```
% disp(block.Dwork(3).Data)
```

```
% disp(block.Dwork(4).Data)
```



```

% disp(block.Dwork(5).Data)
% disp(block.Dwork(6).Data)
% disp(block.Dwork(7).Data)
DMatrix(block)
IntCteMatrix(block)
for it_g=0:block.DialogPrm(2).Data
    disp(sprintf('Matrix for coefficient Alpha%d',it_g));
    InpApproxMatrix(block,it_g)
end
%endfunction

function Output(block)
% disp(block.CurrentTime);

% Update Discrete Input
block.Dwork(2).Data(1:block.DialogPrm(2).Data, 1) = block.Dwork(2).Data(2:block.DialogPrm(2).Data+1, 1);
block.Dwork(2).Data(block.DialogPrm(2).Data+1) = block.InputPort(1).Data ;

if block.Dwork(8).Data <0
    block.Dwork(8).Data = block.Dwork(8).Data + 1;
    block.Dwork(3).Data = block.CurrentTime ;
end

if block.CurrentTime-block.Dwork(3).Data >= block.DialogPrm(3).Data
    block.Dwork(1).Data = 0 * block.Dwork(1).Data ;
    block.Dwork(3).Data = block.CurrentTime ;
end

% Input Approximation Coefficients
times = block.CurrentTime - block.Dwork(3).Data + (-block.DialogPrm(2).Data:0)*block.DialogPrm(4).Data ;
% disp(times);
% disp(block.Dwork(2).Data);
% [coefs, scoefs, mucoefs]=polyfit(times,block.Dwork(2).Data,block.DialogPrm(2).Data);
% coefs=polyfit(times,block.Dwork(2).Data,block.DialogPrm(2).Data);
coefs=mypolyfit(times',block.Dwork(2).Data');
% disp(coefs);

if times(block.DialogPrm(2).Data) >= -0.5*block.DialogPrm(4).Data
% disp('Updating');
tzero_power = times(block.DialogPrm(2).Data) .^(0:block.DialogPrm(1).Data+block.DialogPrm(2).Data-2)';
Z_new = 0*block.Dwork(1).Data ;
for it_g=0:block.DialogPrm(2).Data
    mtz = InpApproxMatrix(block, it_g) ;
    Z_new = Z_new + coefs(block.DialogPrm(2).Data+1-it_g) * mtz * tzero_power ;
end
Z_new = Z_new + IntCteMatrix(block) * block.Dwork(1).Data;
block.Dwork(1).Data = Z_new ;

t_power = times(block.DialogPrm(2).Data+1) .^(1:2*block.DialogPrm(1).Data-2)' ;
%Derivatives_new = 0 * block.OutputPort(1).Data;
Derivatives_new = block.Dwork(4).Data ./ t_power(1:block.DialogPrm(1).Data-1) * block.InputPort(1).Data ;
mtz = DMatrix(block);
for it_j=1:(block.DialogPrm(1).Data-1)
% disp(mtz(:,it_j));

```

```

%      disp(t_power(block.DialogPrm(1).Data-it_j+1:2*block.DialogPrm(1).Data-1-it_j));
      Derivatives_new = Derivatives_new + mtz(:,it_j) ./ t_power(block.DialogPrm(1).Data-it_j+1:2*block.DialogPrm(1).Data-1-it_j) *
block.Dwork(1).Data(it_j,1) ;
      end

      block.OutputPort(1).Data = Derivatives_new ;

      end

%endfunction

function Update(block)

% if ( block.CurrentTime - block.Dwork(1).Data(2) ) > block.DialogPrm(3).Data
%   block.Dwork(1).Data(2) = block.CurrentTime;
% end
%
% t_zero = block.CurrentTime - block.Dwork(1).Data(2) - block.DialogPrm(2).Data;
% real_times = [t_zero t_zero+block.DialogPrm(2).Data] ;
% inputs = [block.Dwork(1).Data(1) block.InputPort(1).Data] ;
% t_zeros = t_zero .^ (0:block.DialogPrm(1).Data)' ;
% coefs = polyfit(real_times, inputs, 1);
%
% % disp('Update -> CurrentTime:')
% % disp(block.CurrentTime)
% %   disp('RealTimes')
% %   disp(real_times)
% %   disp('Inputs')
% %   disp(inputs)
% %   disp('Coefs')
% %   disp(coefs)
%
% Z_new = block.Dwork(2).Data * 0 ;
% if t_zero > -block.DialogPrm(2).Data/2
%   Z_new = block.Dwork(2).Data * 0 ;
%   % Constantes Alpha
%   aux = 2 ;
%   for it_h=1:block.DialogPrm(1).Data
%     Z_new = Z_new + coefs(1) * block.Dwork(aux+it_h).Data * t_zeros(it_h) ;
%   end
%   % Constantes Beta
%   aux = 2 + block.DialogPrm(1).Data;
%   for it_h=1:block.DialogPrm(1).Data-1
%     Z_new = Z_new + coefs(2) * block.Dwork(aux+it_h).Data * t_zeros(it_h) ;
%   end
%   % Constantes Z0
%   aux = 1 + 2 * block.DialogPrm(1).Data;
%   for it_h=1:block.DialogPrm(1).Data-1
%     Z_new = Z_new + block.Dwork(aux+it_h).Data * block.Dwork(2).Data(it_h) ;
%   end

```

```

% end
%
%
%
%
% block.Dwork(2).Data = Z_new;
% block.Dwork(1).Data(1) = block.InputPort(1).Data ;
% % disp(Z_new) ;

%endfunction

% Auxiliary functions
function ret=binomial(n, k)
    if k>=0
        if n>=k
            ret = factorial(n) / factorial(k) / factorial(n-k);
        else
            ret=0;
        end
    else
        ret=0;
    end
%endfunction

function ret=BFactor(k,d,m)
    ret = power( binomial(k,m+d), 2 ) * power(-1,1-m-d) * factorial(m+d);
%endfunction

function ret=EFactor(k,i)
    ret = factorial(k+i-1) / factorial(i) / factorial(k-i-1);
%endfunction

function ret=DFactor(k,i,j)
    ret = binomial(k+i-j-1,i-j) * factorial(k-j-1) / factorial(k-i-1);
%endfunction

function ret=DMatrix(block)
    for it_i=1:block.DialogPrm(1).Data-1
        for it_j=1:block.DialogPrm(1).Data-1
            ret(it_i,it_j) = block.Dwork(5).Data(it_i+(it_j-1)*(block.DialogPrm(1).Data-1));
        end
    end
%endfunction

function ret=IntCteMatrix(block)
    for it_i=1:block.DialogPrm(1).Data-1
        for it_j=1:block.DialogPrm(1).Data-1
            ret(it_i,it_j) = block.Dwork(6).Data(it_i+(it_j-1)*(block.DialogPrm(1).Data-1));
        end
    end
%endfunction

```

```
function ret=InpApproxMatrix(block, order)
    for it_i=1:block.DialogPrm(1).Data-1
        for it_j=1:(block.DialogPrm(1).Data+block.DialogPrm(2).Data-1)
            ret(it_i,it_j) = block.Dwork(7).Data(order*(block.DialogPrm(1).Data-1)*(block.DialogPrm(1).Data+block.DialogPrm(2).Data-1)+it_i+(it_j-1)*(block.DialogPrm(1).Data-1));
        end
    end
end
%endfunction
```

```
function [ ret ] = mypolyfit( x, y )

if length(x) == length(y)
    mtz = eye(length(x)) ;
    for it_i=1:length(x)
        mtz(it_i,:) = x(it_i) .^ (length(x)-1:-1:0);
    end
    ret = (inv(mtz) * y')';
else
    disp('Error, x and y must be the same length!!!');
    ret=0;
end

%endfunction
```

C.2.3 Programa SGDerivation.m

Programa que utiliza filtros de Savitzky-Golay para obter derivadas suaves de um sinal ruidoso.

```
function [ rety, rett ] = SGDerivation( y, dt, poly_order, window_size, deriv_order )
%SGDERIVATION Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here

N = poly_order;
F = window_size;
[b,g] = sgolay(N,F);

if length(dt)==1
    dx = dt;
else
    dx=abs(dt(3)-dt(2));
end;

HalfWin = ((F+1)/2)-1;
for n=(F+1)/2:length(y)-HalfWin
    SG(n) = dot(g(:,deriv_order+1), y(n-HalfWin:n+HalfWin));
end
```

```

    rety = SG / (dx^(deriv_order));
    rett = (1:length(y)-HalfWin)*dx;

end

```

C.2.4 Programa Parametros.m

Introduz os parâmetros do pêndulo, calcula as matrizes do sistema linear e os ganhos do controlador e observador.

```

g      = 9.8;           % Gravity 9.8 m/s^2
eta    = 0.035;        % rad
L_BAR1 = 0.2;          % m
L_BAR2 = 0.1;          % m
M_BAR1 = 0.141;        % Kg
M_BAR2 = 0.0799;       % Kg
M_MOT  = 0.31;         % Kg
M_CIL  = 0.546;        % Kg
M_DIS  = 0.458;        % Kg
J_BAR1 = 0.00229;      % Kg.m^2
J_BAR2 = 0.000422;     % Kg.m^2
J_MOT  = 0.0125;       % Kg.m^2
J_CIL  = 0.00544;      % Kg.m^2
J_DIS  = 0.00289;      % Kg.m^2
VEL_MOT = 270.177;     % rad/s
K_MOT  = 0.0265;       % N/A
Ra_MOT = 1.94;         % Ohm
Va_MOT_min = 0.8;      % Volt
Va_MOT_max = 12.0;     % Volt
Phi_MAX_ate = 0.03*2*pi; % rad

C1 = 1 / ( J_CIL + J_BAR1 + J_BAR2 + J_MOT + L_BAR1^2 * M_DIS );
C2 = 1 / J_DIS;
C3 = -g * sin(eta) * ( L_BAR2*(M_CIL + M_BAR2/2) - L_BAR1*(M_BAR1/2 + M_MOT + M_DIS) );

%
% Tau_MOT_ate = Va_MOT_min / Ra_MOT * K_MOT;
% Tau_MOT_atc = Tau_MOT_ate / 5;
% Tau_MOT_atv = ((Va_MOT_max - VEL_MOT*K_MOT) / Ra_MOT * K_MOT - Tau_MOT_atc) / VEL_MOT;
% Gamma_MOT = Makkar_Solve([Tau_MOT_ate Tau_MOT_atc Tau_MOT_atv], [2 10]*1e-4 );
% save Gamma_MOT.mat Gamma_MOT
load Gamma_MOT.mat

% Tau_BAR_ate = C3*sin(Phi_MAX_ate);
% [temp]=IdentificaAtritoBarra('livre_1_ccw', C1, C2, C3);
% Tau_BAR_atv=temp(1);

```

```

% Tau_BAR_atc=temp(2);
% Gamma_BAR = Makkar_Solve([Tau_BAR_ate Tau_BAR_atc Tau_BAR_atv], [2 10]*1e-3 );
% save Gamma_BAR.mat Gamma_BAR Tau_BAR_ate Tau_BAR_atc Tau_BAR_atv

load Gamma_BAR.mat

Phi_0=pi;
Theta_0=0;
Initial = [Theta_0 0 Phi_0 0];

% Modelo linearizado simples

% x = [ Phi Phip Thetap ]

% A = [0 1 0; C1*C3 0 0; 0 0 1; -C1*C3 0 0];
% B = [0; -C1; C1+C2];
% C = [1 0 0];
% D = [0];

% Modelo linearizado com motor

A = [0 1 0; C1*C3 0 C1*K_MOT^2/Ra_MOT; -C1*C3 0 -(C1+C2)*K_MOT^2/Ra_MOT];
B = [0; -C1*K_MOT/Ra_MOT; (C1+C2)*K_MOT/Ra_MOT];
C = [1 0 0];
D = [0];

% Controle

G = place(A, B, [-2 -3+3i -3-3i]*1);
Greal = [G(1) G(2) G(3)];

eig(A-B*Greal)

```

C.2.5 Programa IdentificaAtritoBarra.m

Tenta identificar as características dos atritos do sistema construído, com base em um ensaio de movimentação livre.

```

function [cfat] = IdentificaAtritoBarra(filename)
load(filename)
[q0,t]=SGDerivation(exp(:,2), exp(:,1), 4, 499, 0);
[q1,t]=SGDerivation(exp(:,2), exp(:,1), 4, 499, 1);
[q2,t]=SGDerivation(exp(:,2), exp(:,1), 4, 499, 2);

set(0,'defaultaxesfontsize',18);

```

```

ae=C1*C3*sin(q0+pi);
aa=ae-q2;
figure;
plot(t,[q0+pi; q1; q2; ae; aa], [0 45], [pi pi], 'g');
grid;
title('Comportamento livre filtrado (Savitzky-Golay)');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Valor [rad], [rad/s], [rad/s^2]');
legend('Posição', 'Velocidade', 'Aceleração', 'Aceleração Estimada', 'Aceleração devida ao atrito');

vth=5e-2;
vu_p=[];
vu_n=[];
fat_p=[];
fat_n=[];
pts_p=0;
pts_n=0;

for it_ptr=1:length(q1)
    if sign(q1(it_ptr))== -1
        if q1(it_ptr) < -vth
            pts_n=pts_n+1;
            vu_n(pts_n)=q1(it_ptr);
            fat_n(pts_n)=ae(it_ptr)/C1;
        end
    elseif sign(q1(it_ptr))== 1
        if q1(it_ptr) > vth
            pts_p=pts_p+1;
            vu_p(pts_p)=q1(it_ptr);
            fat_p(pts_p)=ae(it_ptr)/C1;
        end
    end
end

cfat_p=polyfit(vu_p, fat_p, 1);
cfat_n=polyfit(vu_n, fat_n, 1);

cfat(1)=(cfat_n(1)+cfat_p(1))/2;
cfat(2)=(cfat_p(2)-cfat_n(2))/2;
disp(cfat);

figure;
plot(q1,(C1*C3*sin(q0+pi)-q2)/C1, 'b', [min(q1) 0 0 max(q1)], [-cfat(2)+cfat(1)*min(q1) -cfat(2) cfat(2) cfat(2)+cfat(1)*max(q1)], 'g');
grid
title('Atrito vs Velocidade');
xlabel('Velocidade [rad/s]');
ylabel('Torque de Atrito [N/m]');
legend('Atrito estimado em ensaio', 'Atrito Modelado após mmq')
end

```

C.3 Modelos para SIMULINK.

C.3.1 Modelo Global

Figura C.1: Modelo Global

C.3.2 Modelo completo do Pêndulo

Figura C.2: Modelo Completo do Pêndulo.

C.3.3 Modelo idealizado do Pêndulo

Figura C.3: Modelo Idealizado do Pêndulo.

C.3.4 Modelo do Motor

Figura C.4: Modelo do Motor.

C.3.5 Modelo do Observador linear

Figura C.5: Modelo do Observador Linear.

C.3.6 Modelo do Observador algébrico

Figura C.6: Modelo do Observador Algébrico.

C.3.7 Modelo gerador de atrito

Figura C.7: Modelo de Atrito.

C.4 Programa para microcontrolador PIC

O programa a seguir traduz os pulsos recebidos pelo encoder em um código binário que será lido pela placa Lynx.

```
; listwp=18f877A
#include <P16F877A.INC>
;*****
;wConfig
__CONFIG _CP_OFFw& _PWRTE_ON & _WDT_OFF & _LVP_OFF & _XT_OSC
;*****
```

```
;wVariaveis
```

```
CountL equ 0x020
```

```
CountH equ 0x021
```

```
Input1 equ 0x022
```

```
Input2 equ 0x023
```

```
Sample equ 0x024
```

```
*****
```

```
;wreset vector
```

```
org 00000h
```

```
goto Start
```

```
*****
```

```
;wProgram
```

```
org 00030h
```

```
Start
```

```
movlw .255
```

```
bcf STATUS,RP1
```

```
bsf STATUS,RP0 ;wSet Bank 1
```

```
movwf TRISB ;wSet PORTB as INPUT bits 5 and 6
```

```
clrf TRISC ;wSet PORTC as OUTPUT
```

```
clrf TRISD ;wSet PORTD as OUTPUT
```

```
bcf STATUS,RP0 ;wSet Bank 0
```

```
clrf CountL
```

```
clrf CountH
```

```
clrf Input1
```

```
clrf Input2
```

```
movlw .010
```

```
movwf Sample
```

```
movlw 00001h
```

```
movwf PCLATH
```

```
movf PORTB,0 ;wRead Input pins
```

```
movwf Input1 ; towvar Input1
```

```
movlw .096 ;wMask bits 5 and 6
```

```
andwf Input1,1 ;wApply Mask
```

```
bcf Input1,0
```

```
movf Input1,0
```

```
movwf PCL ; andwthen to PCL
```

```
org 00100h
```

```
CheckLoop0
```

```
; Wewknow channel inputs were 0 and 0
```

```
btfss Input1,5 ; ifwtoggle bit 5, increment
```

```
goto CheckLoop0_p1
```

```
incf CountL,1
```

```
btfsc STATUS,Z ;wif Carry
incf CountH,1 ;w increment CountH
CheckLoop0_p1
btfss Input1,6 ; ifwtoggle bit 6, decrement
goto RedoLoop
decf CountL,1
comf CountL,0
btfsc STATUS,Z ;wif Carry
decf CountH,1 ;w decrement CountH

goto RedoLoop

org 00120h
CheckLoop1
; Wewknow channel inputs were 0 and 1
btfss Input1,5 ; ifwtoggle bit 5, increment
goto CheckLoop1_p1
incf CountL,1
btfsc STATUS,Z ;wif Carry
incf CountH,1 ;w increment CountH
CheckLoop1_p1
btfsc Input1,6 ; ifwtoggle bit 6, decrement
goto RedoLoop
decf CountL,1
comf CountL,0
btfsc STATUS,Z ;wif Carry
decf CountH,1 ;w decrement CountH

goto RedoLoop

org 00140h
CheckLoop2
; Wewknow channel inputs were 1 and 0
btfsc Input1,5 ; ifwtoggle bit 5, increment
goto CheckLoop2_p1
incf CountL,1
btfsc STATUS,Z ;wif Carry
incf CountH,1 ;w increment CountH
CheckLoop2_p1
btfss Input1,6 ; ifwtoggle bit 6, decrement
goto RedoLoop
decf CountL,1
comf CountL,0
btfsc STATUS,Z ;wif Carry
decf CountH,1 ;w decrement CountH

goto RedoLoop

org 00160h
CheckLoop3
; Wewknow channel inputs were 1 and 1
btfsc Input1,5 ; ifwtoggle bit 5, increment
goto CheckLoop3_p1
incf CountL,1
```

```
btfsc STATUS,Z ;wif Carry
incf CountH,1 ;w increment CountH
CheckLoop3_p1
btfsc Input1,6 ; ifwtoggle bit 6, decrement
goto RedoLoop
decf CountL,1
comf CountL,0
btfsc STATUS,Z ;wif Carry
decf CountH,1 ;w decrement CountH
```

```
RedoLoop
btfsc PORTB,0 ;wSample, if clear, load Sample
gotow UpdateOutput
movlw .010
movwf Sample ;wLoad a count value in Sample
```

```
UpdateOutput
movf Sample,0 ;wTest Sample
btfss STATUS,Z ; ifwzero we can UpdateOutput, else decrement Sample and Update Count
goto DecSample
movf CountH,0 ;wOutput
movwf PORTD
movf CountL,0 ;wOutput
movwf PORTC
goto UpdateCount ;wUpdateCount, not decrement Sample
```

```
DecSample
decf Sample,1
UpdateCount
movf Input1,0 ;wGet Previous Input
movwf Input2 ; andwput in "Input2"
movf PORTB,0 ;wRead Input pins
movwf Input1 ; towvar Input1
movlw .096 ;wMask bits 5 and 6
andwf Input1,1 ;wApply Mask
```

```
movf Input2,0 ;wreturn previous state back to wreg
movwf PCL ; andwthen to PCL
END
```

C.5 Diagrama elétrico dos dispositivos de interface

C.5.1 Circuito de leitura do encoder

Figura C.8: Circuito elétrico do leitor do encoder

Figura C.9: Circuito elétrico do display de leds

C.5.2 Circuito de saída de potência

Figura C.10: Circuito elétrico do estágio de potência

C.6 Desenho das peças usinadas na construção do pêndulo

Figura C.11: Desenho da Barra

Figura C.12: Chapa de Fixação do Encoder.

Figura C.13: Contra Peso.

Eixo de latão com furo passante de 5mm, diâmetro de 12.7mm (1/2 pol) na região central e 10mm nas pontas.

Figura C.14: Eixo.

Figura C.15: Flange do Disco.

Figura C.16: Lateral 1.

Figura C.17: Lateral 2.

Figura C.18: Tampas.

Figura C.19: Pilar.

C.7 Programas em linguagem C/C++

C.7.1 Interface para o subsistema Xenomai

Xenomai é uma extensão para a kernel do sistema operacional linux, capaz de realizar o tratamento de rotinas e periféricos em tempo real. Os arquivos a seguir listam o código necessário para disponibilizar as funções da placa de aquisição e controle LYNX, e do seu módulo (driver) escrito utilizando a extensão Xenomai. Desta maneira foi possível escrever programas em linguagem C e C++, em um sistema baseado em PC mas dedicado para controle.

Arquivo LynxClass.h

```

/*****
 * Copyright (C) 2008 by carlos_novaes      *
 * carlosnov@gmail.com                    *
 *                                         *
 * This program is free software; you can redistribute it and/or modify *
 * it under the terms of the GNU General Public License as published by *
 * the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or *
 * (at your option) any later version.      *
 *                                         *
 * This program is distributed in the hope that it will be useful, *
 * but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of *
 * MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the *
 * GNU General Public License for more details.      *
 *                                         *
 * You should have received a copy of the GNU General Public License *
 * along with this program; if not, write to the *
 * Free Software Foundation, Inc., *
 * 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA. *
 *****/

/**
 *
 * This is the interface class to access LYNX card CAD12/36
 *
 */

#include <sys/mman.h>
#include <native/event.h>
#include <native/heap.h>
#include <native/task.h>
#include "../module/lynx.h"
#include "NAO.h"
#include "BiquadFilter.h"
#include <iostream>

namespace Lynx{

```

```

class LynxClass{
public:
    LynxClass(int sample_freq, int total_samples);
    LynxClass();
    int      Start();
    int      Stop();
    int      Wait();
    //static void  AppListenerTask(void *cookie);
    #include "StaticListenerTask.h"
public:
    RT_EVENT    mEventDesc;
    RT_TASK     mTaskDesc;
    RT_HEAP     mHeapDesc;
    lynx_data_t *mpLynxData;
    int         mInitialization;
    int32_t     mEndSample;
    // MyData and its iterator;
    double*     mpMyData;
    NAO*        mpNAO_0;
    NAO*        mpNAO_1;
    NAO*        mpNAO_2;
    BiquadFilter* mpBiquadFilter_0;

};

};

Lynx::LynxClass::LynxClass(int sample_freq, int total_samples){
    int result;
    // Initialization flag;
    mInitialization=0;
    #include "LynxClassInitialization.h"
    // try to lock memory
    result = mlockall(MCL_CURRENT|MCL_FUTURE);
    if (result != 0){
        std::cerr << "Cant lock memory<< std::endl;
        mInitialization--;
    }
    // try to bind Heap
    result = rt_heap_bind(&mHeapDesc, LYNX_HEAP_NAME, TM_NONBLOCK);
    if (result){
        std::cerr << "Cant bind to Heap<< std::endl;
        mInitialization--;
    }
    // try to allocate Heap on this process
    result = rt_heap_alloc(&mHeapDesc, 0, TM_NONBLOCK, (void*)&mpLynxData);
    if (result){
        std::cerr << "Cant map memory heap<< std::endl;
        mInitialization--;
    }
}

```

```

else{
    mpLynxData->freq = sample_freq;
    mEndSample = mpLynxData->sample + total_samples;
}
// try to bind to event descriptor
result = rt_event_bind(&mEventDesc, LYNX_EVENT_NAME, TM_NONBLOCK);
if (result){
    std::cerr << "Cant bind to event descriptor<< std::endl;
    mInitialization--;
}
// try to create real time task
result = rt_task_create(&mTaskDesc, "MyListenerTask", 4096, 10, T_FPUIT_CPU(0));
if (result!=0){
    std::cerr << "Cant create Listener Task<< std::endl;
    mInitialization--;
}
else{
    // try to start real time task
    result = rt_task_start(&mTaskDesc, &AppListenerTask, (void*)this);
    if (result){
        std::cerr << "Cant start Listener Task<< std::endl;
        mInitialization--;
    }
}
};

Lynx::LynxClass::LynxClass(){
    rt_task_delete(&mTaskDesc);
    rt_event_unbind(&mEventDesc);
    rt_heap_unbind(&mHeapDesc);
    //if (mpMyData){
        //delete mpMyData;
    //}
};

int Lynx::LynxClass::Start(){
    if (mpLynxData){
        mpLynxData->run = 1;
    }
    rt_event_signal(&mEventDesc, 0x1);
};

int Lynx::LynxClass::Stop(){
    std::cout << "LynxClass::Stop()<< std::endl;
    if (mpLynxData){
        mpLynxData->run = 0;
    }
    rt_event_signal(&mEventDesc, 0x1);
};

int Lynx::LynxClass::Wait(){

```

```
if (mpLynxData){  
    for (;mpLynxData->run == 1;){  
        }  
    return mpLynxData->sample;  
    }  
    return -1;  
};
```

```
// End Of File
```

Arquivo LynxClassTest.cpp

```
#include <iostream>
#include <csignal>
#include "LynxClass.h"
#include "mymat.h"

using namespace std;
using namespace Lynx;

int sample_freq = 500;
int duration = 45;
LynxClass myLynxApp(sample_freq, duration*sample_freq);

void term(int sig)
{
    myLynxApp.Stop();
}

int main(){
    MyMatFile MatFile("exp.mat");
    int32_t x, y;
    signal(SIGINT, term); // register a SIGTERM handler
    if (myLynxApp.mInitialization==0){
        myLynxApp.Start();
        myLynxApp.Wait();
        MatFile.Trunc();
        MatFile.CreateVar("exp", sample_freq*duration, 6);
        for (x=1; x<=sample_freq*duration; x++){
            for (y=1; y<=6; y++){
                if (y==1){
                    MatFile.InsertVal(((double)(x-1) / (double)sample_freq , x, y);
                }
                else{
                    MatFile.InsertVal(myLynxApp.mpMyData[y+5*x-7], x, y);
                }
            }
        }
        MatFile.Sync();
    }
    else{
        cout << "mInitialization is << myLynxApp.mInitialization << endl;
    }
    sleep(3);
};
```

Arquivo LynxClassInitialization.h

```
/** PREVIOUS CODE
Lynx::LynxClass::LynxClass(int sample_freq, int total_samples){
    int result;
**/
// set sample stuff
// try to allocate memory to store results
mpMyData = new double[5*total_samples];
if (!mpMyData){
    std::cerr << "Cant allocate memory to store results.<< std::endl;
    mInitialization--;
}
// set NAO stuff
mpNAO_0 = new NAO(7, 3, 1.0f / (double) sample_freq, sample_freq/2, 2);
if (!mpNAO_0){
    std::cerr << "Cant create NAO instance.<< std::endl;
    mInitialization--;
}

mpBiquadFilter_0 = new BiquadFilter(0.0f, 0.0439f, 0.0536f, -1.452f, 0.5488f );
```

Arquivo StaticListenerTask.h

```

static void AppListenerTask(void *cookie){
    int aux;
    unsigned long mask_r;
    int result;
    LynxClass *cls = (LynxClass*)cookie;
    lynx_data_t *data = cls->mpLynxData;
    int32_t *end_sample = &(cls->mEndSample);
    RT_EVENT *event_desc = &(cls->mEventDesc);
    NAO *NAO_0 = cls->mpNAO_0;
    NAO *NAO_1 = cls->mpNAO_1;
    NAO *NAO_2 = cls->mpNAO_2;
    double* my_data_it = cls->mpMyData;
    BiquadFilter* BiquadFilter_0 = cls->mpBiquadFilter_0;

    int32_t *sample;
    int16_t *run;
    int16_t *status;
    int16_t *dinput;
    uint16_t *doutput;
    int16_t *ainput_channels;
    int16_t *ainput;
    int16_t *aoutput_channels;
    int16_t *aoutput;

    double input_0, input_1, input_2;
    double aux_a, aux_b, aux_c;
    double di0_dt1, di0_dt2;
    double di1_dt1, di1_dt2;
    double di2_dt1, di2_dt2;
    double output;

    if (data){
        sample = &(data->sample);
        run = &(data->run);
        status = &(data->status);
        dinput = &(data->dinput);
        doutput = &(data->doutput);
        ainput_channels = &(data->ainput_channels);
        ainput = (int16_t*)&(data->ainput);
        aoutput_channels = &(data->aoutput_channels);
        aoutput = (int16_t*)&(data->aoutput);

        // task loop
        for(;;){
            if (*sample >= *end_sample){
                if (*run != 0){
                    std::cout << "Terminando<< std::endl;
                    *run = 0;
                    rt_event_signal(event_desc, 0x1);
                }
            }
        }
    }
}

```

```

    }
}
result = rt_event_wait(event_desc, 0x2, &mask_r, EV_ANY, TM_INFINITE);

if (*status == LYNX_STATUS_DATAOK){

    // Insert your control code here

    input_0 = BiquadFilter_0->Update((double)*dinput / 4000.0f);
    input_1 = (double)ainput[0] / 3276.7f;
    NAO_0->Update( input_0 );
    di0_dt1 = NAO_0->Derivatives[0];
    di0_dt2 = NAO_0->Derivatives[1];
    output = (-1.033)*sinf(input_0*3.1415f) + (-80.0f) * input_0 + (-80.0f) * di0_dt1;
    if ( output > 9.9f){
        output = 9.9f;
    }
    if (output < -9.9f){
        output = -9.9f;
    }
    aoutput[0] = (int16_t) (output * 3276.7f );
    //std::cout << "": DERIVATIVE = << *(Nao->Derivatives);

    // End of user code
    *(my_data_it++) = input_0;
    *(my_data_it++) = di0_dt1;
    *(my_data_it++) = di0_dt2;
    *(my_data_it++) = input_1;
    *(my_data_it++) = output;

    *status = LYNX_STATUS_NODATA;
}
else{
    std::cout << "Something strange is going on...<< std::endl;
}
rt_event_clear(event_desc, 0x2, &mask_r);
}
}
else{
    // we have no data, something gone wrong...
    std::cout << "no this->mpLynxData, something is wrong!!<< std::endl;
    std::cout << "using dummy loop.<< std::endl;
}
};

```

C.7.2 Implementação discreta do observador algébrico

Os arquivos a seguir listam o código necessário para implementar a teoria de estimadores rápidos, segundo a metodologia descrita no capítulo 3.

Arquivo NAO.h

```

/*****
 * Copyright (C) 2009 by carlos_novaes      *
 * carlosnov@gmail.com                    *
 *                                     *
 * This program is free software; you can redistribute it and/or modify *
 * it under the terms of the GNU General Public License as published by *
 * the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or *
 * (at your option) any later version.      *
 *                                     *
 * This program is distributed in the hope that it will be useful, *
 * but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of *
 * MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the *
 * GNU General Public License for more details.      *
 *                                     *
 * You should have received a copy of the GNU General Public License *
 * along with this program; if not, write to the *
 * Free Software Foundation, Inc.,      *
 * 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA.      *
 *****/

#include <iostream>
#include "matrix.h"

class NAO{
public:
    NAO(int order, int poly_order, double step_time, int final_step, int derivatives);
    NAO();
    int Update(double input);
    double* Derivatives;

private:
    // Estimator Order
    int mOrder;
    // Estimator Order - 1
    int mTam;
    // Input Polynomial Approximation Order
    int mPolyOrder;
    // Sample Time
    double mStepTime;
    // Actual Sample for each parallel estimator
    int mStepA;
    int mStepB;
    // Last Step
    int mFinalStep;

```

```

int    mResetTime;
// how many derivatives we should calculate
int    mMaxDerivatives;
// true if there is enough data points to PolyGets Matrix
bool    mDataOk;
// from which estimator should we get derivatives
int    mUseEstimator;
// Pointer to Start of Input Buffer
double* mpInputBuffer;
// Iterator for Input Buffer
double* mpInputBufferIt;
// Pointer to Start of PolyGets Matrix Coefficients
double* mpPolyGets;
// Iterator to PolyGets
double* mpPolyGetsIt;
// Polynomial Coefficients
double* mpPolyCoefs;
// Iterator to Polinomial Coefficients
double* mpPolyCoefsIt;
// CCoeffs and its Iterator
double* mpCCoeffs;
double* mpCCoeffsIt;
// DCoeffs and its Iterator
double* mpDCoeffs;
double* mpDCoeffsIt;
// ECoeffs and Its Iterator
double* mpECoeffs;
double* mpECoeffsIt;
// TPowers and its Iterator
double* mpTPowers;
double* mpTPowersIt;
// Delta Time Powers Coefficients and its Iterator
double* mpDTCoeffs;
double* mpDTCoeffsIt;
// ZFilter, Tam for each estimator
double* mpZFilterA;
double* mpZFilterB;
// ZFilter Iterator
double* mpZFilterIt;
// ZDiff
double* mpZDiff;
// ZDiff Iterator
double mDiff1;
double* mpZDiffIt;
// Derivatives and its Iterator

double* mpDerivativesIt;

};

// End Of File

```


Arquivo NAO.cpp

```

/*****
 * Copyright (C) 2009 by carlos_novaes      *
 * carlosnov@gmail.com                    *
 *                                     *
 * This program is free software; you can redistribute it and/or modify *
 * it under the terms of the GNU General Public License as published by *
 * the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or *
 * (at your option) any later version.      *
 *                                     *
 * This program is distributed in the hope that it will be useful, *
 * but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of *
 * MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the *
 * GNU General Public License for more details.      *
 *                                     *
 * You should have received a copy of the GNU General Public License *
 * along with this program; if not, write to the *
 * Free Software Foundation, Inc.,      *
 * 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA.      *
 *****/

#include "NAO.h"
#include <exception>

int factorial (int num)
{
    if (num==0)
return 1;
    if (num==1)
return 1;
    return factorial(num-1)*num; // recursive call
};

int binomial (int n, int k){
    if (k>=0){
if (n>=k){
    return factorial(n)/factorial(k)/factorial(n-k);
}
else{
    return 0;
}
}
else{
return 0;
}
};

int Neg1Pow (int n){
    if (n%2==0) return 1;
    return -1;
};

int BFactor(int k, int d){

```

```

//std::cout << "BFactor ( << k << ", << d << ")<< std::endl;
return (binomial(k, d+1) * binomial (k, d+1) * factorial (d+1) * Neg1Pow(-d));

};

int DFactor(int k, int i, int j){
    return binomial(k+i-j-1,i-j) * factorial(k-j-1) / factorial (k-i-1);
}

int EFactor(int k, int i){
    return factorial(k+i-1) / factorial (k-i-1) / factorial(i);
}

NAO::NAO(int order, int poly_order, double step_time, int final_step, int derivatives){
    mOrder = order;
    mTam = order - 1;
    mPolyOrder = poly_order;
    mStepA=0;
    mStepB=0;
    mFinalStep = final_step;
    mResetTime = final_step / 2;
    mMaxDerivatives = derivatives;
    mDataOk = false;
    mUseEstimator = 0;
    mpInputBuffer = new double[poly_order+1];
    mpInputBufferIt = mpInputBuffer;
    mpPolyGets = new double[(poly_order+1)*(poly_order+1)*(final_step+1)];
    mpPolyGetsIt = mpPolyGets;
    mpPolyCoefs = new double[poly_order+1];
    mpPolyCoefsIt = mpPolyCoefs;
    mpDCoefs = new double[((derivatives)*(derivatives)+derivatives)/2];
    mpDCoefsIt = mpDCoefs;
    mpECoefs = new double[derivatives];
    mpECoefsIt = mpECoefs;
    mpTPowers = new double[(order+derivatives)*(final_step+1)];
    //mpTPowers = new double[(2*order)*(final_step+1)];
    mpTPowersIt = mpTPowers;
    mpDTCoefs = new double[order+poly_order+1];
    mpDTCoefsIt = mpDTCoefs;
    mpZDiff = new double[order-1];
    mpZDiffIt = mpZDiff;
    mpZFilterA = new double[order];
    mpZFilterB = new double[order];
    mpZFilterIt = mpZFilterA;
    Derivatives = new double[derivatives];

    // Auxiliari and flow control

    int    it_i, it_j, it_k, it_h, it_g, it_l;
    double aux_a, aux_b, aux_c;
    int    count_a;

    // Fill data
    mpPolyGetsIt = mpPolyGets;

```

```

SLAP::Matrix MtzAlpha(poly_order+1);
for (it_i=0; it_i<=final_step; it_i++){
for (it_j=0; it_j<=poly_order; it_j++){
    for (it_k=0; it_k<=poly_order; it_k++){
        MtzAlpha._Element(it_j, it_k) = powl ( (it_i + it_j - poly_order ) * step_time, poly_order - it_k );
    }
}
MtzAlpha.Inverse();
//mpPolyGetsIt = mpPolyGets;
for (it_j=0; it_j<=poly_order; it_j++){
    for (it_k=0; it_k<=poly_order; it_k++){
        //std::cout << "Elemento ( << it_j << ", << it_k << " ) = << MtzAlpha._Element(it_j, it_k) << std::endl;
        *mpPolyGetsIt++ = MtzAlpha._Element(it_j, it_k);
    }
}
//MtzAlpha.Display();
//SLAP::Matrix* mtz = new SLAP::Matrix(MtzAlpha);
//mtz->Multiply(MtzBeta);
//mtz->Display();
//delete mtz;
}
mpPolyGetsIt = mpPolyGets;

count_a = 0;
for (it_l=1; it_l<=order-1; it_l++){
    for (it_h=1; it_h<=order-it_l; it_h++){
        for (it_g=0; it_g<=poly_order; it_g++){
            for (it_j=0; it_j<=order+it_g-it_h-it_l; it_j++){
                count_a++;
            }
        }
    }
}
//std::cout << "CCoefs size is << count_a << std::endl;
mpCCoefs = new double[count_a];
mpCCoefsIt = mpCCoefs;
for (it_l=1; it_l<=order-1; it_l++){
    for (it_h=1; it_h<=order-it_l; it_h++){
        for (it_g=0; it_g<=poly_order; it_g++){
            for (it_j=0; it_j<=order+it_g-it_h-it_l; it_j++){
                *mpCCoefsIt = BFactor(order, it_l-1+it_h) * factorial(order+it_g-it_h-it_l) / factorial(it_j) / factorial(order+it_g-it_l-it_j) * powl(step_time,
order+it_g-it_l-it_j);
                //printf("[l, h, g, j] = [%d, %d, %d, %d] :: CCoef= %f{ }n", it_l, it_h, it_g, it_j, *mpCCoefsIt);
                mpCCoefsIt++;
            }
        }
    }
}
mpCCoefsIt = mpCCoefs;

mpDCoefsIt = mpDCoefs;

```



```

for(it_l=1; it_l<=derivatives; it_l++){
    for(it_j=1; it_j<=it_l; it_j++){
        *mpDCoefsIt = DFactor(order, it_l, it_j);
        //printf("DCoef(%d, %d) = %f\{ }n", *mpDCoefsIt);
        mpDCoefsIt++;
    }
}
mpDCoefsIt = mpDCoefs;

```

```

mpECoefsIt = mpECoefs;
for(it_l=1; it_l<=derivatives; it_l++){
    *mpECoefsIt = EFactor(order, it_l);
    mpECoefsIt++;
}
mpECoefsIt = mpECoefs;

```

```

mpTPowersIt = mpTPowers;
for (it_l=0; it_l<final_step+1; it_l++){
    for (it_i=0; it_i<=order-1+derivatives; it_i++){
        //for (it_i=0; it_i<2*order; it_i++){
            *mpTPowersIt = powl(step_time*it_l, it_i);
            mpTPowersIt++;
        }
    }
}
mpTPowersIt = mpTPowers;

```

```

mpDTCoefsIt = mpDTCoefs;
for (it_i=0; it_i<=order+poly_order; it_i++){
    *mpDTCoefsIt = powl(step_time, (double)it_i) / factorial(it_i);
    mpDTCoefsIt++;
}
mpDTCoefsIt = mpDTCoefs;

```

```

mpZFilterIt = mpZFilterA;
for (it_i=0; it_i<order; it_i++)
    *(mpZFilterIt++) = 0.0f;
mpZFilterIt = mpZFilterB;
for (it_i=0; it_i<order; it_i++)
    *(mpZFilterIt++) = 0.0f;

//std::cout << *(mpPolyGets+16) << std::endl;

```

```

};
NAO::NAO(){
};
int  NAO::Update(double input){
    int    it_i, it_j, it_k, it_h, it_g, it_l;
    double  aux_a, aux_b, aux_c;
    int     count_a;
    double  *ptr_aux;

    // Update Steps
    mStepA++;
    mStepB++;

    // Fill in Input buffer
    ptr_aux      = mpInputBuffer;
    mpInputBufferIt = mpInputBuffer;
    for (it_i=0; it_i<mPolyOrder; it_i++){
        *mpInputBufferIt++ = *++ptr_aux;
    }
    *mpInputBufferIt = input;
    mpInputBufferIt = mpInputBuffer;

    //std::cout << "InputBuffer = [ ";
    for (it_i=0; it_i<=mPolyOrder; it_i++){
        //std::cout << mpInputBuffer[it_i] << " , ";
    }
    //std::cout << "]"<< std::endl;

    // Check if we already got enough data points
    if (mDataOk == false){
        //std::cout << "Not OK!!!"<< std::endl;
        if (mStepA > mPolyOrder){
            mDataOk = true;
            mStepA -= mPolyOrder;
            mStepB -= mPolyOrder;
        }
    };

    // Just do Calculations if we already got enough data points
    if (mDataOk == true){

        // Calculate the Polynomial Approximation to the first estimator
        //std::cout << "Step = "<< mStep[0] << std::endl;
        mpPolyGetsIt = mpPolyGets + (mPolyOrder+1)*(mPolyOrder+1)*mStepA;
        mpPolyCoefsIt = mpPolyCoefs;
        for (it_i=0; it_i<=mPolyOrder; it_i++){
            *mpPolyCoefsIt = 0;
            mpInputBufferIt = mpInputBuffer;
            for (it_j=0; it_j<=mPolyOrder; it_j++){
                //printf("PolyGets[%d, %d] = %10.10Lf\n", it_i, it_j, *mpPolyGetsIt);
                //std::cout << "InputBuffer[i, j] = "<< *mpInputBufferIt << std::endl;
            }
        }
    }
}

```

```

    aux_a = *mpPolyGetsIt++ * *mpInputBufferIt++;
    //printf("Parcel = %10.10Lf{ }n", aux_a);
    *mpPolyCoefsIt += aux_a;
    //printf("PolyCoeff[%d] = %10.10Lf{ }n", it_i, *mpPolyCoefsIt);
}
//printf("PolyCoeff[%d] = %10.10Lf{ }n", it_i, *mpPolyCoefsIt);
//std::cout << std::endl;
mpPolyCoefsIt++;
}

//std::cout << "PolyCoefs = [ ";
//for (it_i=0; it_i<=mPolyOrder; it_i++){
//std::cout << mpPolyCoefs[it_i] << " ";
//}
//std::cout << "]" << std::endl;

mpCCoefsIt = mpCCoefs;
mpZDiffIt = mpZDiff;
for (it_l=1; it_l<=mTam; it_l++){
    *mpZDiffIt = 0;
    mpDTCoefsIt = mpDTCoefs + 1;
    for (it_h=1; it_h<=mOrder-it_l; it_h++){
        mpPolyCoefsIt = mpPolyCoefs + mPolyOrder;
        for (it_g=0; it_g<=mPolyOrder; it_g++){
            mDiff1 = 0.0f;
            mpTPowersIt = mpTPowers+((mOrder+mMaxDerivatives)*(mStepA-1));
            //mpTPowersIt = mpTPowers+((2*mOrder)*(mStepA-1));
            for (it_j=0; it_j<=mOrder+it_g-it_h-it_l; it_j++){
                //std::cout << "Calculating: ";
                //std::cout << "[l,h,g,j] = "<< it_l << " "<< it_h << " "<< it_g << " "<< it_j;
                //std::cout << " : mDiff1 += "<< *mpCCoefsIt << "*" "<< *mpTPowersIt << std::endl;
                //std::cout << " : TPowers = "<< *mpTPowersIt << std::endl;
                mDiff1 += *mpCCoefsIt * *mpTPowersIt;
                mpCCoefsIt++;
                mpTPowersIt++;
            }
            //std::cout << "mDiff1 = "<< mDiff1 << std::endl;
            //std::cout << "PolyCoeff = "<< *mpPolyCoefsIt << std::endl;
            *mpZDiffIt += mDiff1 * *mpPolyCoefsIt;
            mpPolyCoefsIt--;
            //std::cout << "ZDiffIt = "<< *mpZDiffIt << std::endl;
        }
        //printf("DTCoef = %f{ }n", *mpDTCoefsIt);
        //printf("ZFilter+1 = %f{ }n", *(mpZFilter+it_l+it_h-1));
        *mpZDiffIt += ((*mpDTCoefsIt) * (*(mpZFilterA+it_l+it_h-1)));
        mpDTCoefsIt++;
    }
    //mpZDiffIt++;
    *(mpZFilterA+it_l-1) += *mpZDiffIt;
    //std::cout << "ZFilter[ "<< it_l << " ] = "<< *(mpZFilterA+it_l-1) << std::endl;
    mpZDiffIt++;
}

// Same for estimator B

```

```

// Calculate the Polynomial Approximation to the first estimator
//std::cout << "Step = "<< mStep[0] << std::endl;
mpPolyGetsIt = mpPolyGets + (mPolyOrder+1)*(mPolyOrder+1)*mStepB;
mpPolyCoefsIt = mpPolyCoefs;
for (it_i=0; it_i<=mPolyOrder; it_i++){
    *mpPolyCoefsIt = 0;
    mpInputBufferIt = mpInputBuffer;
    for (it_j=0; it_j<=mPolyOrder; it_j++){
        //printf("PolyGets[%d, %d] = %10.10Lf{ }n", it_i, it_j, *mpPolyGetsIt);
        //std::cout << "InputBuffer[i, j] = "<< *mpInputBufferIt << std::endl;
        aux_a = *mpPolyGetsIt++ * *mpInputBufferIt++;
        //printf("Parcel = %10.10Lf{ }n", aux_a);
        *mpPolyCoefsIt += aux_a;
        //printf("PolyCoef[%d] = %10.10Lf{ }n", it_i, *mpPolyCoefsIt);
    }
    //printf("PolyCoef[%d] = %10.10Lf{ }n", it_i, *mpPolyCoefsIt);
    //std::cout << std::endl;
    mpPolyCoefsIt++;
}

//std::cout << "PolyCoefs = [ ";
//for (it_i=0; it_i<=mPolyOrder; it_i++){
//std::cout << mpPolyCoefs[it_i] << " ";
//}
//std::cout << "]" << std::endl;

mpCCoefsIt = mpCCoefs;
mpZDiffIt = mpZDiff;
for (it_l=1; it_l<=mTam; it_l++){
    *mpZDiffIt = 0;
    mpDTCoefsIt = mpDTCoefs + 1;
    for (it_h=1; it_h<=mOrder-it_l; it_h++){
        mpPolyCoefsIt = mpPolyCoefs + mPolyOrder;
        for (it_g=0; it_g<=mPolyOrder; it_g++){
            mDiff1 = 0.0f;
            mpTPowersIt = mpTPowers+((mOrder+mMaxDerivatives)*(mStepB-1));
            //mpTPowersIt = mpTPowers+((2*mOrder)*(mStepB-1));
            for (it_j=0; it_j<=mOrder+it_g-it_h-it_l; it_j++){
                //std::cout << "Calculating: ";
                //std::cout << "[l,h,g,j] = "<< it_l << " "<< it_h << " "<< it_g << " "<< it_j;
                //std::cout << "": mDiff1 += "<< *mpCCoefsIt << "*" << *mpTPowersIt << std::endl;
                mDiff1 += *mpCCoefsIt * *mpTPowersIt;
                mpCCoefsIt++;
                mpTPowersIt++;
            }
            //std::cout << "mDiff1 = "<< mDiff1 << std::endl;
            //std::cout << "PolyCoef = "<< *mpPolyCoefsIt << std::endl;
            *mpZDiffIt += mDiff1 * *mpPolyCoefsIt;
            mpPolyCoefsIt--;
            //std::cout << "ZDiffIt = "<< *mpZDiffIt << std::endl;
        }
        //printf("DTCoeff = %f{ }n", *mpDTCoefsIt);
        //printf("ZFilter+1 = %f{ }n", *(mpZFilter+it_l+it_h-1));
        *mpZDiffIt += ((*mpDTCoefsIt) * (*(mpZFilterB+it_l+it_h-1)));
    }
}

```

```

    mpDTCoefsIt++;
}
//mpZDiffIt++;
*(mpZFilterB+it_l-1) += *mpZDiffIt;
//std::cout << "ZFilter[ << it_l << "] = << *(mpZFilterA+it_l-1) << std::endl;
mpZDiffIt++;
}

if (mStepA == mResetTime){
    //std::cout << "Reset Estimator B<< std::endl;
    mpZFilterIt = mpZFilterB;
    for (it_i=0; it_i<mOrder; it_i++)
        *(mpZFilterIt++) = 0.0f;
    mStepB=0;
    mUseEstimator = 0;
}
if (mStepB == mResetTime){
    //std::cout << "Reset Estimator A<< std::endl;
    mpZFilterIt = mpZFilterA;
    for (it_i=0;it_i<mOrder;it_i++)
        *(mpZFilterIt++) = 0.0f;
    mStepA=0;
    mUseEstimator = 1;
}

if (mUseEstimator == 1){
    // Compute Derivatives
    mpZFilterIt = mpZFilterB;
    mpDerivativesIt = this->Derivatives;
    mpECoefsIt = mpECoefs;
    mpDCoefsIt = mpDCoefs;
    mpTPowersIt = mpTPowers+((mOrder+mMaxDerivatives)*(mStepB));
    for (it_i=1; it_i<=mMaxDerivatives; it_i++){
        //std::cout << "Upd<< std::endl;
        *mpDerivativesIt = 0.0f;
        *mpDerivativesIt = *(mpECoefsIt++) / *(mpTPowersIt+it_i) * input ;
        //std::cout << "Upd<< std::endl;

        for (it_j=0;it_j<it_i;it_j++){
            *mpDerivativesIt += *(mpDCoefsIt++) * *(mpZFilterIt++) / *(mpTPowersIt+it_i+mTam-it_j);

            // *mpDerivativesIt += *(mpDCoefsIt++);

        }
        mpZFilterIt = mpZFilterB;
        //std::cout << "Derivative[ << it_i << "] = << *(mpDerivativesIt) << std::endl;
        mpDerivativesIt++;
    }
    mpDCoefsIt = mpDCoefs;
}
else{
    // Compute Derivatives
    mpZFilterIt = mpZFilterA;
    mpDerivativesIt = this->Derivatives;

```

```
mpECoeffsIt = mpECoeffs;
mpDCoeffsIt = mpDCoeffs;
mpTPowersIt = mpTPowers+((mOrder+mMaxDerivatives)*(mStepA));
for (it_i=1; it_i<=mMaxDerivatives; it_i++){
    //std::cout << "Upd<< std::endl;
    *mpDerivativesIt = 0.0f;
    *mpDerivativesIt = *(mpECoeffsIt++) / *(mpTPowersIt+it_i) * input ;
    //std::cout << "Upd<< std::endl;

    for (it_j=0;it_j<it_i;it_j++){
        *mpDerivativesIt += *(mpDCoeffsIt++) * *(mpZFilterIt++) / *(mpTPowersIt+it_i+mTam-it_j);

        /*mpDerivativesIt += *(mpDCoeffsIt++);

    }
    mpZFilterIt = mpZFilterA;
    //std::cout << "Derivative[ << it_i << "] = << *(mpDerivativesIt) << std::endl;
    mpDerivativesIt++;
}
mpDCoeffsIt = mpDCoeffs;

}
}

};

// End Of File
```

Arquivo matrix.h

```
/******  
  
Small Linear Algebra Package  
  
*****/  
  
#include <iostream>  
#include <math.h>  
  
namespace SLAP{  
  
class Matrix{  
public:  
    Matrix(int size);  
    Matrix(const Matrix& m);  
    Matrix(int rols, int cols);  
    Matrix();  
  
    int    Negative();  
    int    Add(const Matrix& m);  
    int    Subtract(const Matrix& m);  
    int    Multiply(const Matrix& m);  
    int    Inverse();  
    int    ReplaceSet(int rol, int col, Matrix& m);  
    int    ReplaceSet(int rol, int col, int nrols, int ncols, Matrix& m);  
    int    Eye();  
    int    DeadZone(double threshold);  
    double& _Element(int rol, int col);  
    double& _Element(int rol, int col) const;  
    double& Element(int rol, int col);  
    double& Element(int rol, int col) const;  
    void    Display();  
  
private:  
    double* mCells;  
    int     mRols;  
    int     mCols;  
};  
  
};  
  
  
// End Of File
```

Arquivo matrix.cpp

```

/*****

Small Linear Algebra Package

*****/

#include "matrix.h"

SLAP::Matrix::Matrix(int size){
    int x, y;
    if (size>0){
        mRols=size;
        mCols=size;
        mCells = new double[mRols*mCols];
        for (x=0; x<mRols; x++){
            for (y=0; y<mCols; y++){
                this->_Element(x,y) = 0;
            }
        }
    };
    SLAP::Matrix::Matrix(const Matrix &m){
        int x;
        mRols = m.mRols;
        mCols = m.mCols;
        mCells = new double[mRols*mCols];
        for (x=0; x<mRols*mCols; x++){
            mCells[x] = m.mCells[x];
        }
    };
    SLAP::Matrix::Matrix(int rols, int cols){
        int x, y;
        if (rols>0 && cols>0){
            mRols=rols;
            mCols=cols;
            mCells = new double[mRols*mCols];
            for (x=0; x<mRols; x++){
                for (y=0; y<mCols; y++){
                    this->_Element(x,y) = 0;
                }
            }
        }
    };
    SLAP::Matrix::Matrix(){
        delete mCells;
    };

    int SLAP::Matrix::Negative(){
        int x;
        for (x=0;x<mRols*mCols;x++){
            mCells[x]=-mCells[x];

```



```

    }
};
int SLAP::Matrix::Add(const Matrix &m){
    int x;
    if (m.Cols == m.mCols && m.Rols == m.mRols){
        for (x=0;x<m.Rols*m.Cols;x++){
            m.Cells[x] += m.mCells[x];
        }
    }
};
int SLAP::Matrix::Subtract(const Matrix &m){
    int x;
    if (m.Cols == m.mCols && m.Rols == m.mRols){
        for (x=0;x<m.Rols*m.Cols;x++){
            m.Cells[x] -= m.mCells[x];
        }
    }
};
int SLAP::Matrix::Multiply(const Matrix &m){
    int x, y, z;
    int newRols;
    int newCols;
    double* newCells;
    if (m.Cols == m.mRols){
        newRols = m.Rols;
        newCols = m.Cols;
        newCells = new double[newRols*m.Cols];
        for (x=0;x<newRols;x++){
            for (y=0;y<newCols;y++){
                newCells[x*newCols+y] = 0;
                for (z=0;z<m.Cols;z++){
                    newCells[x*newCols+y] += _Element(x,z) * m._Element(z,y);
                }
            }
        }
        m.Rols = newRols;
        m.Cols = newCols;
        delete m.Cells;
        m.Cells = newCells;
    }
};
// Only Invert a Special type of matrix, just what we need
// The last column is composed of ones;
// If there are zeroes, they are all in just one line

int SLAP::Matrix::Inverse(){
    int x, y, z;
    double factor;
    if (m.Rols == m.Cols){
        Matrix *eye = new Matrix(m.Rols);
        eye->Eye();
        // what should we do... first, for each line...
        for(x=m.Rols-1; x>=0; x--){
            // from last to the first, assure that the element on trace is one

```

```

    factor = 1.0f / _Element(x,x);
    for (y=0;y<mCols;y++){
        _Element(x,y) = _Element(x,y) * factor;
        eye->_Element(x,y) = eye->_Element(x,y) * factor;
    }
    _Element(x,x) = 1.0f; // just to assure it
    // Ok, the element on trace is one. Now assure that the remaining lines have zeroes on this column
    for (y=0; y<x;y++){
        factor = 1.0f / _Element(y,x);
        for (z=0;z<mCols;z++){
            _Element(y,z) = _Element(y,z) - _Element(x,z) / factor;
            eye->_Element(y,z) = eye->_Element(y,z) - eye->_Element(x,z) / factor;
        }
        _Element(y,x) = 0.0f; // just to assure
    }
}

// now, repeat for under trace, for each line
for(x=0; x<mRols; x++){
    // from first to last, assure that the element on trace is one
    factor = 1.0f / _Element(x,x);
    for (y=0;y<mCols;y++){
        _Element(x,y) = _Element(x,y) * factor;
        eye->_Element(x,y) = eye->_Element(x,y) * factor;
    }
    _Element(x,x) = 1.0f; // just to assure it
    // Ok, the element on trace is one. Now assure that the remaining lines have zeroes on this column
    for (y=x+1; y<mRols;y++){
        factor = 1.0f / _Element(y,x);
        for (z=0;z<mCols;z++){
            _Element(y,z) = _Element(y,z) - _Element(x,z) / factor;
            eye->_Element(y,z) = eye->_Element(y,z) - eye->_Element(x,z) / factor;
        }
        _Element(y,x) = 0.0f; // just to assure
    }
}

for (x=0;x<mRols*mCols;x++){
    mCells[x] = eye->mCells[x];
}
}

};

int SLAP::Matrix::ReplaceSet(int rol, int col, int nrols, int ncols, Matrix& m){
    int x,y;
    if (nrols > m.mRols) nrols = m.mRols;
    if (ncols > m.mCols) ncols = m.mCols;
    if (nrols > mRols-rol) nrols = mRols-rol;
    if (ncols > mCols-col) ncols = mCols-col;
    for (x=0; x<nrols; x++){
        for (y=0; y<ncols; y++){
            _Element(x+rol,y+col) = m._Element(x,y);
        }
    }
}

```

```

};

int SLAP::Matrix::ReplaceSet(int rol, int col, Matrix& m){
    int nrols, ncols;
    nrols = m.mRols;
    ncols = m.mCols;
    SLAP::Matrix::ReplaceSet(rol, col, nrols, ncols, m);
};

int SLAP::Matrix::Eye(){
    int x, y;
    if (mRols != mCols) return 0;
    for (x=0;x<mRols;x++){
        for (y=0;y<mCols;y++){
            if (x == y){
                _Element(x,y) = 1;
            }
            else{
                _Element(x,y) = 0;
            }
        }
    }
};

int SLAP::Matrix::DeadZone(double threshold){
    int x;
    threshold = fabs(threshold);
    for (x=0; x<mRols*mCols; x++){
        if (fabs(mCells[x]) < threshold) mCells[x] = 0.0f;
    }
};

double& SLAP::Matrix::_Element(int rol, int col){
    int pos;
    pos = rol*mCols+col;
    if (pos<0 || pos >= mRols*mCols){
        std::cerr << "*** Matrix.cpp: Disaster, invalid element will reference to first valid one. Expect the worst.<< std::endl;
        pos=0;
    }
    return mCells[pos];
};

double& SLAP::Matrix::_Element(int rol, int col) const{
    int pos;
    pos = rol*mCols+col;
    if (pos<0 || pos >= mRols*mCols){
        std::cerr << "*** Matrix.cpp: Disaster, invalid element will reference to first valid one. Expect the worst.<< std::endl;
        pos=0;
    }
    return mCells[pos];
};

double& SLAP::Matrix::Element(int rol, int col){
    int pos;
    rol--;
    col--;
    pos = rol*mCols+col;
    if (pos<0 || pos >= mRols*mCols){

```

```
std::cerr << "*** Matrix.cpp: Disaster, invalid element will reference to first valid one. Expect the worst.<< std::endl;
pos=0;
}
return mCells[pos];
};

double& SLAP::Matrix::Element(int rol, int col) const {
    int pos;
    rol--;
    col--;
    pos = rol*mCols+col;
    if (pos<0 || pos >= mRols*mCols){
        std::cerr << "*** Matrix.cpp: Disaster, invalid element will reference to first valid one. Expect the worst.<< std::endl;
        pos=0;
    }
    return mCells[pos];
};

void SLAP::Matrix::Display(){
    int x, y;
    std::cout << "[ [ ";
    for (x=0;x<mRols;x++){
        if (x!=0){
            std::cout << "]<< std::endl;
            std::cout << "[ ";
        }
        for (y=0;y<mCols;y++){
            if (y!=0){
                std::cout << ", ";
            }
            std::cout << this->_Element(x,y);
        }
    }
    std::cout << "]"<< std::endl;
};

// End Of File
```

C.7.3 Rotinas para criar arquivos .mat

Uma pequena rotina para exportar os valores de ensaio em bancada, de forma a exibi-los no software Matlab.

Arquivo mymat.h

```

/*****
 * Copyright (C) 2008 by carlos_novaes      *
 * carlosnov@gmail.com                    *
 *                                     *
 * This program is free software; you can redistribute it and/or modify *
 * it under the terms of the GNU General Public License as published by *
 * the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or *
 * (at your option) any later version.      *
 *                                     *
 * This program is distributed in the hope that it will be useful, *
 * but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of *
 * MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the *
 * GNU General Public License for more details.      *
 *                                     *
 * You should have received a copy of the GNU General Public License *
 * aint32_t with this program; if not, write to the *
 * Free Software Foundation, Inc.,      *
 * 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA.      *
 *****/

/*****
** Functions to read and write .mat files in version 4
**
**
*****/

#ifndef MYMAT_H
#define MYMAT_H

#include <stdio.h>
#include <fstream>

typedef struct{
    int32_t    type;
    int32_t    mrows;
    int32_t    ncols;
    int32_t    imagf;
    int32_t    namelen;
} MatMatrixHeader_t;

class MyMatFile{
public:
    MyMatFile(char* fname);

```

```
MyMatFile();
int CreateVar(char* name, int32_t rows=1, int32_t cols=1, int32_t imag=0);
int InsertVal(double val, int32_t row, int32_t col, int32_t imag=0);
int InsertBlock(double* real_block, double* imag_block=NULL);
int Sync();
int Trunc();
private:
    MatMatrixHeader_t    mTempMatrixHeader;
    char*                mVarName;
    double*              mRealValues;
    double*              mImagValues;
    int32_t              mRows;
    int32_t              mCols;
    int32_t              mImagFlag;
    int32_t              mDataSize;
    std::fstream*        mFileStream;
    char*                mFileName;
};

#endif

// End Of File
```

Arquivo mymat.cpp

```

/*****
 * Copyright (C) 2008 by carlos_novaes      *
 * carlosnov@gmail.com                    *
 *                                     *
 * This program is free software; you can redistribute it and/or modify *
 * it under the terms of the GNU General Public License as published by *
 * the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or *
 * (at your option) any later version.      *
 *                                     *
 * This program is distributed in the hope that it will be useful, *
 * but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of *
 * MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the *
 * GNU General Public License for more details.      *
 *                                     *
 * You should have received a copy of the GNU General Public License *
 * aint32_t with this program; if not, write to the *
 * Free Software Foundation, Inc.,      *
 * 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA.      *
 *****/

/*****
** Functions to read and write .mat files in version 4
**
**
*****/

#include "mymat.h"
#include <iostream>
#include <cstring>

MyMatFile::MyMatFile(char* fname){
    mFileName = new char[strlen(fname)+1];
    strcpy(mFileName, fname);
    mVarName == NULL;
    mRealValues == NULL;
    mImagValues == NULL;
};

MyMatFile:: MyMatFile(){
};

int MyMatFile::CreateVar(char* name, int32_t rows, int32_t cols, int32_t imag){
    mDataSize = rows*cols;
    mImagFlag = imag;
    if (mVarName==NULL){
        delete mVarName;
        mVarName == NULL;
    }

    if (mRealValues==NULL){
        delete mRealValues;
        mRealValues == NULL;
    }
}

```

```

if (mImagValues==NULL){
    delete mImagValues;
    mImagValues = NULL;
}
mVarName = new char[strlen(name)+1];
strcpy(mVarName, name);
mRealValues = new double[mDataSize];
if (imag){
    mRealValues = new double[mDataSize];
}
mRows = rows;
mCols = cols;
mImagFlag = imag;
return 0;
};

int MyMatFile::InsertVal(double val, int32_t row, int32_t col, int32_t imag){
    row = row-1;
    col = col-1;
    if (row<0 || col<0){
        return -1;
    }
    if (row>=mRows || col>=mCols){
        return -1;
    }
    if (imag){
        if (mImagValues){
            /*(mImagValues+row*mCols+col) = val;
            //mImagValues[row*mCols+col] = val;
            mImagValues[col*mRows+row] = val;
        }
    }
    else{
        if (mRealValues){
            /*(mRealValues+row*mCols+col) = val;
            //mRealValues[row*mCols+col] = val;
            mRealValues[col*mRows+row] = val;
        }
    }
    return 0;
};

int MyMatFile::InsertBlock(double* real_block, double* imag_block){
    int32_t x, y;
    mFileStream = new std::fstream(mFileName, std::ios::out | std::ios::binary | std::ios::ate | std::ios::app);
    if (mFileStream->is_open()){
        mTempMatrixHeader.type = 0;
        mTempMatrixHeader.mrows = mRows;
        mTempMatrixHeader.ncols = mCols;
        mTempMatrixHeader.imagf = mImagFlag;
        mTempMatrixHeader.namelen = strlen(mVarName)+1;
        mFileStream->write((char*)&mTempMatrixHeader, sizeof(MatMatrixHeader_t));
        mFileStream->write((char*)mVarName, sizeof(char) * mTempMatrixHeader.namelen);
        for (x=0; x<mRows; x++){
            for (y=0; y<mCols; y++){

```



```
        if (real_block != NULL) mFileStream->write((char*)(real_block+x+y*mCols), sizeof(double));
        if (mImagFlag && imag_block != NULL) mFileStream->write((char*)(imag_block+x+y*mCols), sizeof(double));
    }
}

mFileStream->close();
}
return 0;

};

int MyMatFile::Sync(){
    mFileStream = new std::fstream(mFileName, std::ios::out | std::ios::binary | std::ios::ate | std::ios::app);
    if (mFileStream->is_open()){
        mTempMatrixHeader.type = 0;
        mTempMatrixHeader.mrows = mRows;
        mTempMatrixHeader.ncols = mCols;
        mTempMatrixHeader.imagf = mImagFlag;
        mTempMatrixHeader.namelen = strlen(mVarName)+1;
        mFileStream->write((char*)&mTempMatrixHeader, sizeof(MatMatrixHeader_t));
        mFileStream->write((char*)mVarName, sizeof(char) * mTempMatrixHeader.namelen);
        mFileStream->write((char*)mRealValues, sizeof(double) * mDataSize);
        if (mImagFlag) mFileStream->write((char*)mImagValues, sizeof(double) * mDataSize);
        mFileStream->close();
    }
    return 0;
};

int MyMatFile::Trunc(){
    mFileStream = new std::fstream(mFileName, std::ios::out | std::ios::binary | std::ios::trunc);
    mFileStream->close();
};

// End Of File
```

C.7.4 Driver para acesso à placa de aquisição LYNX12/36

O código a seguir permite a utilização de alguns recursos da placa de aquisição LYNX12/36 no sistema operacional Linux, utilizando-se da extensão Xenomai para execução de programas em tempo real. O driver é formado por três arquivos:

Arquivo lynx_module.h:

```
#include <native/heap.h>
#include <native/event.h>
#include <native/intr.h>
#include <native/task.h>
/*****/
// Constants

#define LYNX_STATUS_NODATA    0
#define LYNX_STATUS_DATAOK   4

#define LYNX_AINPUTS         16
#define LYNX_AOUTPUTS        4

/*****/
// Card Set Up
#define LYNX_IRQ              5
#define LYNX_IRQ_NAME         "LynxIntr"
#define LYNX_HEAP_NAME        "LynxHeap"
#define LYNX_EVTASK_NAME      "LynxEventTask"
#define LYNX_EVENT_NAME       "LynxEvent"
#define TASK_PRIO              50
#define TASK_MODE              T_FPU|T_CPU(0)
#define TASK_STKSZ             4096

#define LYNX_BASEADDR         0x380
// Card Address and Commands
#define LYNX_CADCRTL0          (LYNX_BASEADDR + 1)
#define LYNX_CADCRTL1          (LYNX_BASEADDR + 2)
#define LYNX_CADMODE           (LYNX_BASEADDR + 3)
#define LYNX_CADSTATUS         LYNX_BASEADDR + 3
#define LYNX_BYTEA             LYNX_BASEADDR + 4
#define LYNX_BYTEB             LYNX_BASEADDR + 5
#define LYNX_CADADDR           LYNX_BASEADDR + 4
#define LYNX_CADDATA           LYNX_BASEADDR + 5
#define LYNX_DDATA0            LYNX_BASEADDR + 6
#define LYNX_DDATA1            LYNX_BASEADDR + 7
#define LYNX_EXPANSION_0        LYNX_BASEADDR + 8
#define LYNX_EXPANSION_1        LYNX_BASEADDR + 9
#define LYNX_EXPANSION_2        LYNX_BASEADDR + 10
#define LYNX_EXPANSION_3        LYNX_BASEADDR + 11
```

```

#define LYNX_EXPANSION_4      LYNX_BASEADDR + 12
#define LYNX_EXPANSION_5      LYNX_BASEADDR + 13
#define LYNX_EXPANSION_6      LYNX_BASEADDR + 14
#define LYNX_EXPANSION_7      LYNX_BASEADDR + 15

#define LYNX_SECLIM           0
#define LYNX_SECPOINTER       1
#define LYNX_SECCOMAD         2
#define LYNX_SECRM            3
#define LYNX_SECMEM           4
#define LYNX_SECACAL          6
#define LYNX_BIPOLAR          0x80
#define LYNX_UNIPOLAR         0x00
#define LYNX_G1               112
#define LYNX_G2               96
#define LYNX_G3               80
#define LYNX_G100             48

// #include <stdint.h>
// End Of Card Specific Data

/*****
// typedefs and structs

typedef struct lynx_data_s {
    // Data to be written
    // Frequency
    int32_t    freq;
    // Should we run?
    int16_t    run;
    int32_t    overrun;

    // Data to be read
    // Data Status
    int16_t    status;
    // Sample we are dealing with
    int32_t    sample;
    // Digital Input
    uint8_t    dinput[2];
    // Digital output
    uint8_t    doutput[2];
    // Analog Input Channels
    int16_t    ainput_channels;
    // Analog Input
    int8_t     ainput[LYNX_AINPUTS*2];
    // Analog Output Channels
    int16_t    aoutput_channels;
    // Analog output
    int8_t     aoutput[LYNX_AOUTPUTS*2];

} lynx_data_t;

typedef struct lynx_module_context_s{

```



```
inb(LYNX_BYTEA); \{ }
inb(LYNX_BYTEB); \{ }
inb(LYNX_BYTEA); \{ }
inb(LYNX_BYTEB); \{ }
inb(LYNX_BYTEA); \{ }
inb(LYNX_BYTEB); \{ }
inb(LYNX_BYTEA); \{ }
inb(LYNX_BYTEB); \{ }
inb(LYNX_BYTEA)

#define _prog_timer(counter,mode,val) \{ }
    outb(counter*64+48+mode*2, LYNX_CADMODE); \{ }
    outb(val%256, LYNX_BASEADDR+counter); \{ }
    outb(val>>8, LYNX_BASEADDR+counter)

#define _disable_intgate \{ }
    _write_sec_reg(LYNX_SECRM, 0x0c)

#define _enable_intgate \{ }
    _write_sec_reg(LYNX_SECRM, 0x4c)
```

Arquivo lynx.c:

```

/*****
 * Copyright (C) 2008 by carlos_novaes      *
 * carlosnov@gmail.com                    *
 *                                     *
 * This program is free software; you can redistribute it and/or modify *
 * it under the terms of the GNU General Public License as published by *
 * the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or *
 * (at your option) any later version.      *
 *                                     *
 * This program is distributed in the hope that it will be useful, *
 * but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of *
 * MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the *
 * GNU General Public License for more details.      *
 *                                     *
 * You should have received a copy of the GNU General Public License *
 * along with this program; if not, write to the *
 * Free Software Foundation, Inc., *
 * 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA. *
 *****/

#define SETUP_INTR

/**
 * This kernel driver provide real time access to a lynx card CAD12/36
 */

#include <native/heap.h>
#include "lynx_module.h"

lynx_module_context_t context;

MODULE_LICENSE("GPL");
MODULE_AUTHOR("Carlos Novaes");
MODULE_DESCRIPTION("Provide real time access to Lynx Card CAD32/12. Requires a Xenomai kernel with complete native interface support.");

/*****
 * EVENT LISTENNER TASK */
*****/

void lynx_eventlistener_task(void *cookie){
    int result;
    unsigned long mask_r;
    for(;;){
        result = rt_event_wait(&(context.event_desc), 0x1, &mask_r, EV_ANY, TM_INFINITE);
        //printf("lynx: We got an event!!!\n");
        rt_event_clear(&(context.event_desc), 0x1, &mask_r);
        _disable_intgate;
        if (context.data->run > 0){
            //printf("Prog Timer and enable Interrupt\n");
            _prog_timer(0, 2, 2000000 / context.data->freq);

```

```

        _enable_intgate;
    }
    else{
        // Zera saidas
if LYNX_AOUTPUTS > 0
        outb( 0, LYNX_EXPANSION_0);
        outb( 0, LYNX_EXPANSION_1);
#endif
if LYNX_AOUTPUTS > 1
        outb( 0, LYNX_EXPANSION_2);
        outb( 0, LYNX_EXPANSION_3);
#endif
if LYNX_AOUTPUTS > 2
        outb( 0, LYNX_EXPANSION_4);
        outb( 0, LYNX_EXPANSION_5);
#endif
if LYNX_AOUTPUTS > 3
        outb( 0, LYNX_EXPANSION_6);
        outb( 0, LYNX_EXPANSION_7);
#endif
        outb(0, LYNX_DDATA0);
        outb(0, LYNX_DDATA1);
    }
    //Interrupt Test, cut things down here, just for debbuging
    //*****//
//    context.data->sample++;
//    rt_event_signal(&(context.event_desc), 0x2);
//    printf("sample = %d\n", context.data->sample);
//*****//
    }
};

/*****/
/*    INTERRUPT HANDLING    */
/*****/
static int lynx_interrupt_handler(struct xnintr *intr){
    int8_t result;

    // Limpa pedido de interrupção na placa.
    //printf("lynx: We got an interrupt!!!\n");
    result = inb(LYNX_CADSTATUS);

    // Entradas Digitais
    context.data->dinput[0] = inb(LYNX_DDATA0);
    context.data->dinput[1] = inb(LYNX_DDATA1);

    // Entradas Analogicas
if LYNX_AINPUTS > 0
        context.data->ainput[0] = inb(LYNX_BYTEA);
        context.data->ainput[1] = inb(LYNX_BYTEB);
#endif
if LYNX_AINPUTS > 1
        context.data->ainput[2] = inb(LYNX_BYTEA);
        context.data->ainput[3] = inb(LYNX_BYTEB);

```

```
#endif
if LYNX_AINPUTS > 2
    context.data->ainput[4] = inb(LYNX_BYTEA);
    context.data->ainput[5] = inb(LYNX_BYTEB);
#endif
if LYNX_AINPUTS > 3
    context.data->ainput[6] = inb(LYNX_BYTEA);
    context.data->ainput[7] = inb(LYNX_BYTEB);
#endif
if LYNX_AINPUTS > 4
    context.data->ainput[8] = inb(LYNX_BYTEA);
    context.data->ainput[9] = inb(LYNX_BYTEB);
#endif
if LYNX_AINPUTS > 5
    context.data->ainput[10] = inb(LYNX_BYTEA);
    context.data->ainput[11] = inb(LYNX_BYTEB);
#endif
if LYNX_AINPUTS > 6
    context.data->ainput[12] = inb(LYNX_BYTEA);
    context.data->ainput[13] = inb(LYNX_BYTEB);
#endif
if LYNX_AINPUTS > 7
    context.data->ainput[14] = inb(LYNX_BYTEA);
    context.data->ainput[15] = inb(LYNX_BYTEB);
#endif
if LYNX_AINPUTS > 8
    context.data->ainput[16] = inb(LYNX_BYTEA);
    context.data->ainput[17] = inb(LYNX_BYTEB);
#endif
if LYNX_AINPUTS > 9
    context.data->ainput[18] = inb(LYNX_BYTEA);
    context.data->ainput[19] = inb(LYNX_BYTEB);
#endif
if LYNX_AINPUTS > 10
    context.data->ainput[21] = inb(LYNX_BYTEA);
    context.data->ainput[22] = inb(LYNX_BYTEB);
#endif
if LYNX_AINPUTS > 11
    context.data->ainput[23] = inb(LYNX_BYTEA);
    context.data->ainput[24] = inb(LYNX_BYTEB);
#endif
if LYNX_AINPUTS > 12
    context.data->ainput[25] = inb(LYNX_BYTEA);
    context.data->ainput[26] = inb(LYNX_BYTEB);
#endif
if LYNX_AINPUTS > 13
    context.data->ainput[27] = inb(LYNX_BYTEA);
    context.data->ainput[28] = inb(LYNX_BYTEB);
#endif
if LYNX_AINPUTS > 14
    context.data->ainput[29] = inb(LYNX_BYTEA);
    context.data->ainput[30] = inb(LYNX_BYTEB);
#endif
if LYNX_AINPUTS > 15
```



```

    context.data->ainput[31] = inb(LYNX_BYTEA);
    context.data->ainput[32] = inb(LYNX_BYTEB);
#endif

    // Transfere dados da memória do módulo para o conversor DA.
if LYNX_AOUTPUTS > 0
    outb( context.data->aoutput[0], LYNX_EXPANSION_0);
    outb( context.data->aoutput[1], LYNX_EXPANSION_1);
#endif
if LYNX_AOUTPUTS > 1
    outb( context.data->aoutput[2], LYNX_EXPANSION_2);
    outb( context.data->aoutput[3], LYNX_EXPANSION_3);
#endif
if LYNX_AOUTPUTS > 2
    outb( context.data->aoutput[4], LYNX_EXPANSION_4);
    outb( context.data->aoutput[5], LYNX_EXPANSION_5);
#endif
if LYNX_AOUTPUTS > 3
    outb( context.data->aoutput[6], LYNX_EXPANSION_6);
    outb( context.data->aoutput[7], LYNX_EXPANSION_7);
#endif

    // Saídas Digitais
    outb(context.data->doutput[0], LYNX_DDATA0);
    outb(context.data->doutput[1], LYNX_DDATA1);
    context.data->sample++;

    if (context.data->status == LYNX_STATUS_DATAOK){
        printk("lynx: Overrun at sample %d!!!\{ }n", context.data->sample);
        if (context.data->overrun < 0){
            context.data->overrun = context.data->sample;
        }
    }

    context.data->status = LYNX_STATUS_DATAOK;
    //printk("lynx: Interrupt Handled\{ }n");
    rt_event_signal(&(context.event_desc), 0x2);

    return RT_INTR_HANDLED;
};

/*****
/*      INIT DRIVER      */
*****/

int init_module(void)
{
    int32_t result;
    printk("lynx: Inserting Module\{ }n");

```

```

// Allocate shared memory
result = rt_heap_create(&(context.heap_desc), LYNX_HEAP_NAME, sizeof(lynx_data_t), H_SHARED);
if (result){
    printk("lynx: Cant create heap object\{ }n");
    return -1;
}
result = rt_heap_alloc(&(context.heap_desc), 0, TM_NONBLOCK, (void*)&(context.data));
if (result){
    printk("lynx: Cant allocate memory for heap object\{ }n");
    return -1;
}

// Set Up Event
result = rt_event_create(&(context.event_desc), LYNX_EVENT_NAME, 0x0, EV_FIFO);
if (result < 0){
    printk("lynx: Cant create event\{ }n");
    return result;
}

// Set Up Event Listener Task
result = rt_task_create(&(context.task_desc), LYNX_EVTASK_NAME, TASK_STKSZ, TASK_PRIO, TASK_MODE);
if (result < 0){
    printk("lynx: Cant create event listener task\{ }n");
    return result;
}

// Set Up IRQ
printk("lynx: lynx_open_rt: Try to set up IRQ handler\{ }n");
#ifdef SETUP_INTR
    result = rt_intr_create(&(context.intr_desc), LYNX_IRQ_NAME, LYNX_IRQ, &lynx_interrupt_handler, NULL, 0);
#else
    result=0;
#endif
if (result < 0){
    printk("lynx: Cant create irq handler\{ }n");
    return result;
}
// Enable IRQ Handler
printk("lynx: lynx_open_rt: Try to enable IRQ handler on rtdm machine\{ }n");
#ifdef SETUP_INTR
    result = rt_intr_enable(&(context.intr_desc));
#else
    result = 0;
#endif
if (result < 0){
    printk("lynx: Cant enable irq handler\{ }n");
    return result;
}

// Set Up some data
printk("lynx: lynx_open_rt: Try to Set Up internal driver data\{ }n");
context.data->freq = 100;
context.data->status = LYNX_STATUS_NODATA;

```

```

context.data->sample = 0;

context.data->ainput_channels = LYNX_AINPUTS;
context.data->aoutput_channels = LYNX_AOUTPUTS;

// Set Up Card
printf("lynx: lynx_open_rt: Try to set up card\{ }n");
//EscreveRegSecundario (SecRM, 0).
_write_sec_reg(LYNX_SECRM, 0);

// Set Up sampling frequency
result = 2000000 / context.data->freq;
_prog_timer(0, 2, result);

// Autocal
_autocal;

//ProgramaMemoriaCanais;
_prog_channel_mem;

//EscreveRegSecundario (SecLimite, LYNX_AINPUTS-1);
_write_sec_reg(LYNX_SECLIM, LYNX_AINPUTS-1);

//EscreveRegSecundario (SecPonteiro, 0);
_write_sec_reg(LYNX_SECPOINTER, 0);

//LimpaFIFO;
_clear_fifo;

inb(LYNX_CADSTATUS);

// Start Event Listener Task
result = rt_task_start(&(context.task_desc), &lynx_eventlistener_task, NULL);

printf("lynx: Module Inserted\{ }n");

// *****

return 0;
}

/***** CLEANUP DRIVER *****/
/***** CLEANUP DRIVER *****/
void cleanup_module(void)
{
    printf("lynx: Removing Module\{ }n");

    // Free Task
    rt_task_delete(&(context.task_desc));

    // Free Event
    rt_event_delete(&(context.event_desc));

```

```
// remove irq handler;
#ifdef SETUP_INTR
    rt_intr_disable(&(context.intr_desc));
    rt_intr_delete(&(context.intr_desc));
#endif
// Free Heap
rt_heap_free(&(context.heap_desc), &(context.data));
rt_heap_delete(&(context.heap_desc));

}
```

Arquivo lynx.h:

```

#include <native/heap.h>
#include <native/event.h>
#include <native/intr.h>
#include <native/task.h>
#include <stdint.h>

/*****
// Constants

#define LYNX_STATUS_NODATA    0
#define LYNX_STATUS_DATAOK   4

#define LYNX_AINPUTS         16
#define LYNX_AOUTPUTS        4

#define LYNX_IRQ_NAME        "LynxIntr"
#define LYNX_HEAP_NAME       "LynxHeap"
#define LYNX_EVTASK_NAME     "LynxEventTask"
#define LYNX_EVENT_NAME      "LynxEvent"

*****/

typedef struct lynx_data_s {
    // Data to be written
    // Frequency
    int32_t  freq;
    // Should we run?
    int16_t  run;
    int32_t  overrun;

    // Data to be read
    // Data Status
    int16_t  status;
    // Sample we are dealing with
    int32_t  sample;
    // Digital Input
    //uint8_t  dinput[2];
    int16_t  dinput;
    // Digital output
    //uint8_t  doutput[2];
    uint16_t  doutput;
    // Analog Input Channels
    int16_t  ainput_channels;
    // Analog Input
    //int8_t  ainput[LYNX_AINPUTS][2];
    int16_t  ainput[LYNX_AINPUTS];
    // Analog Output Channels
    int16_t  aoutput_channels;
    // Analog output

```

```
//int8_t    aoutput[LYNX_AOUTPUTS][2];  
int16_t    aoutput[LYNX_AOUTPUTS];  
  
} lynx_data_t;
```