BC FT-641

Paulo Sérgio Pereira da Silva

Eng. Telec. , Intituto Militar de Engenharia, 1982
Mestre em Eng. Elétrica, Escola Politécnica da USP, 1988

Desacoplamento de Perturbações por Realimentação Dinâmica Regular para Sistemas Não-Lineares Afins

Tese Apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Doutor em Eng. Elétrica.

Orientador : Prof. Dr. Vitor Marques Pinto Leite

São Paulo, 1992

Ao meu querido tio Mauro

[Para ser grande]

Para ser grande, sê inteiro : nada
Teu exagera ou exclui.
Sê todo em cada coisa. Põe quanto és
No mínimo que fazes.
Assim em cada lago a lua toda
Brilha, porque alta vive.

Ricardo Reis, 14-2-1933

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Vitor M. P. Leite pela orientação e amizade desde o meu período de mestrado. Ao Prof. Dr. Henk Nijmeijer por suas sugestões e estimulantes diálogos via BITNET. Aos Prof. Dr. Pedro Tonelli e Prof. Dr. Francisco Rui T. de Miranda por diversos diálogos esclarescedores. À minha amorosa esposa, pelo apoio e paciência durante os períodos mais difíceis. Aos meus pais, pois a eles devo o ser e o existir.

Resumo

Neste trabalho, consideramos o Problema de Desacoplamento de Perturbações por Realimentação Dinâmica Regular do Estado para sistemas não lineares afins. Utilizando a abordagem Geométrica-Diferencial, estabelecemos condições necessárias e suficientes de solução de tal problema. Mostramos que tais condições são baseadas na geometria de um Sistema Estendido, obtido pela colocação de integradores em série com as entradas do sistema original. Quando tal problema é solúvel, mostramos também que o algoritmo de extensão dinâmica permite a construção do compensador solução. Como um subproduto de tais técnicas, obtemos uma forma geométrica de determinação da estrutura algébrica no infinito, através da geometria do Sistema Estendido.

Abstract

In this work we consider the Problem of Disturbance Decoupling by Regular Dynamic Feedback for the class of affine nonlinear systems. We use the so-called Differential Geometric Approach to derive the necessary and sufficient conditions for this problem's solution. We show that the solvability of this problem is governed by the geometry of an Extended System obtained by putting integrators in series with the inputs of the original system. When the necessary conditions are satisfied, we show that the well known dynamic extension algorithm can be used to construct a solution. We also show that the algebraic structure at infinity can be computed by geometric methods with the aid of the Extended System .

Lista de Símbolos

Símbolo	Uso	Definição	Página
$\mathbb{R}$		*Corpo dos números reais*	5
C^{∞}		*Conjunto das Funções infinitamente diferenciáveis*	5
C^{ω}		*Conjunto das Funções analíticas*	5
$DF(p)$		*Derivada de F no ponto p*	5
$\partial F/\partial x(p)$		*Jacobiana de F no ponto p*	6
$\partial F/\partial x$		*Jacobiana de F como função de p*	6
$\circ$	$H \circ G$	*Composição das aplicações H com G*	7
$\times$	$A \times B$	*Produto cartesiano de A e B*	8
$\times$	$S_1 \times S_2$	*Espaço topológico produto*	9
$\mathcal{A}$	Atlas		12
$-$	$A - B$	*Diferença de Conjuntos*	13
$\mid$	$\psi \mid U$	*Restrição da Aplicação ψ ao conjunto U*	14
$\mathcal{N} \times \mathcal{M}$		*Variedade Produto*	15
$T_p\mathcal{N}$		*Espaço tangente em $p \in \mathcal{N}$*	19
$(\partial/\partial x_i)_p$		*Vetor tangente em $p \in \mathcal{N}$*	19
$C^{\infty}(p)$		*Conjunto das funções C^{∞} numa viz. de $p \in \mathcal{N}$*	19
$\mathbb{A}(p)$		*Conjunto das funções analíticas numa viz. de p*	19
$\mathbb{A}$		*Conjunto das funções analíticas em $\mathcal{N}$*	19
F_*		*Derivada de F*	21
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	$\langle \omega, v \rangle$	*Valor do funcional linear ω calculado no vetor v*	26
$(d\lambda)_p$		*Diferencial de λ em p*	26
$T_p^*\mathcal{N}$		*Espaço cotangente em p*	26
F^*		*Coderivada (aplicação linear dual da derivada)*	27
$(\partial/\partial x_i)$		*Campo vetorial*	28
dx_i		*Campo covetorial*	28
$L_f\lambda$		*Derivada de Lie da função λ*	30
$[f,g]$		*Colchête de Lie dos campos f e g*	32
$L_f^k g$		*Derivada de Lie iterada dos campos g ao longo de f*	32
$L_f\omega$		*Derivada de Lie do campo covetor ω ao longo de f*	32
$\langle \nu, g \rangle$		*Função definida em p por $\langle \nu(p), g(p) \rangle$, onde ν é um campo covetor e g é um campo*	32
span	$span\{v_1, \ldots, v_k\}$	*Subespaço gerado pelos vetores $v_1, \ldots, v_k$*	32
Δ		*Distribuição*	33
sp	$sp\{f_1, \ldots, f_k\}$	*Distribuição gerada pelos campos $f_1, \ldots, f_k$*	34
$\Delta_1 + \Delta_2$		*Soma de distribuições*	34
$\Delta_1 \cap \Delta_2$		*Interesecção de distribuições*	34
$\Delta_1 \subset \Delta_2$		*$\Delta_1(q) \subset \Delta_2(q)$ para todo q*	34
$\theta \in \Delta$		*O campo θ é tal que $\theta(p) \in \Delta(p)$ para todo p*	34
$\Delta^{\perp}$		*Anulador da distribuição Δ*	35
$\Omega^{\perp}$		*Anulador da codistribuição Ω*	35
$[f,\Delta]$		*Distribuição gerada pelos campos $[f,\tau]$, onde $\tau \in \Delta$*	37
$[f,\Delta] \subset \Delta$		*Distribuição f-invariante*	37
$L_f\Omega$		*Codistribuição gerada por $L_f\omega$, $\omega \in \Omega$*	38
Γ_α		*Conjunto de zeros da função analítica α*	39
$\mathcal{K}$		*Corpo das funções meromórficas*	39
α/β		*função meromórfica*	40

$\mathfrak{D}(M)$ ..... *Dimensão genérica da matriz M* 41
Γ ..... *Conjunto Analítico* 42
$\mathfrak{D}(\Delta)$ ..... *Dimensão genérica da distribuição* Δ 44
$\mathfrak{D}(F_*)$ ..... *Dimensão genérica da aplicação F* 44
sp{dh} ..... *Codistribuição* 46
ker dh ..... *Distribuição* 46
(h,f,g,p) ..... *Sistema Afim* 47
(α,β) ..... *Realimentação regular* 48
g ..... *Campos* $[g_1 \ldots g_m]$ 48
p ..... *Campos* $[p_1 \ldots p_{m_p}]$ 48
G ..... *Distribuição* $sp\{g_1,\ldots,g_m\}$ 48
P ..... *Distribuição* $sp\{p_1,\ldots,p_{m_p}\}$ 48
A(x) ..... *Matriz de desacoplamento* 57
$\mathcal{K}_n$ ..... *Corpo* 60
$\mathcal{E}$ ..... *Espaço Vetorial sobre o corpo* $\mathcal{K}_n$ 60
$\mathcal{E}_k$ ..... *Subespaço de* $\mathcal{E}$ *sobre o corpo* $\mathcal{K}_n$ 60
$(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ ..... *Estrutura Algébrica no Infinito* 61
(α,β,Ψ,Φ) ..... *Realimentação Dinâmica* 61, 62
δ ..... *Aplicação analítica* 63
$\tilde{N}$ ..... *Variedade produto* $\mathcal{N}\times(\mathbb{R}^m)^n$ 69
$(\tilde{x},\tilde{w}_1,\ldots,\tilde{w}_n)$ ..... *Sistema de Coordenadas Locais de* $\tilde{N}$ 69
$u^{(k)}$ ..... *Sinônimo de* $\tilde{w}_{k+1}$ 69
$(x_e,z_e,w_{e_1},\ldots,w_{e_n})$ ..... *Sistema de Coordenadas Locais de* $\mathcal{B}\times(\mathbb{R}^m)^n$ 71
$(x,z,v^{(0)},\ldots,v^{(n)})$ ..... *Sistema de Coordenadas Locais de* $\mathcal{B}\times(\mathbb{R}^m)^n$ 74
SE ..... *Sistema Estendido* 69, 70
SCE ..... *Sistema Compensado Estendido* 71
$\tilde{P}$ ..... *Distribuição* $sp\{\tilde{p}\}$ 71
P_e ..... *Distribuição* $sp\{p_e\}$ 71
$\tilde{y}^{(k)}$ ..... *Derivada de Lie iterada de y ao longo de* $\tilde{f}$ 72
$u^{(k)}$ ..... *Sinônimo de* $\tilde{w}_{k+1}$ 73
$(\tilde{x},u^{(0)},\ldots,u^{(n)})$ ..... *Sistema de Coordenadas Locais de* $\tilde{N}$ 73
$v^{(k)}$ ..... *Sinônimo de* $w_{e_{k+1}}$ 74
$(x,z,v^{(0)},\ldots,v^{(n)})$ ..... *Sistema de Coordenadas Locais de* $\mathcal{B}\times(\mathbb{R}^m)^n$ 74
$u_e^{(k)}$ ..... *Derivada de Lie iterada de* u *ao longo de* f_e 74
$u^{(k)}$ ..... *idem acima quando o contexto permitir* 74
$h_k=(\bar{h}_k,\hat{h}_k)$ ..... *Partição de* h *do k-ésimo passo do alg. ext. din.* 79
$\Sigma_k : (h_k,f_k,g_k)$ ..... *Sistema obtido no k-ésimo passo do alg. ext. din.* 89
$\bar{V}$ ..... *Conjunto aberto e denso* 80
$\tilde{\Omega}_k$ ..... *Codistribuição* 82
$\tilde{V}$ ..... *Conjunto aberto e denso* 83
$\bar{U}$ ..... *Subconjunto aberto e denso em* $\bar{V}$ 83
$\bar{\Omega}_k$ ..... *Codistribuição* 83
Ω_k^e ..... *Codistribuição* 89

$\tilde{U}$ ..... *Conjunto aberto e denso* 93
$\pi : \tilde{U} \mapsto \bar{U}$ ..... *Projeção entre* $\tilde{U}$ *e o espaço de estados de* Σ_n 93

Lista de Problemas

PDDRR(Problema de Desacoplamento da Perturbação por Realimentação Regular de Estado) 49
PDRRE(Problema de Desacoplamento entrada-saída por Realimentação Regular de Estado) 56
PDRD(Problema de Desacoplamento entrada-saída por Realimentação Dinâmica (Regular) de Estado) 62
PDPRDR(Problema de Desacoplamento da Perturbação por Realimentação Regular de Estado) 67
PLIRD(Problema de Linearização Interna por Realimentação Dinâmica) 102

Sumário

Introdução p.1

Cap.1 - Preliminares Matemáticos p.4

1.1. Objetivos do Capítulo p.4

1.2. Alguns Fatos do Cálculo e da Topologia do $\mathbb{R}^n$ p.5

1.3. Noções elementares de Topologia p.8

1.4. Variedades Diferenciáveis p.10

1.5. Vetores Tangentes sobre Variedades p.18

1.6. Campos de Vetores tangentes em Variedades p.28

1.7. Distribições e Codistribuições Diferenciáveis p.33

1.8. Funções, Distribuições e Codistr. Analíticas em Variedades Conexas p.38

1.9. Algumas Notações Particulares p.45

1.10. Notas e Referências p.46

Cap. 2. Sistemas Não-Lineares Afins p.47

2.1. Introdução p.47

2.2. Sistemas não Lineares Afins p.47

2.2. Realimentação Regular de Estado p.48

2.3. Invariância, (f,g)-invariância e o Problema de Desacoplamento de Perturbações p.49

2.4. O Problema de Desacoplamento Entrada-Saída Por Realimentação Regular . p.56

2.5 A Estrutura Algébrica no Infinito p.59

2.6. Notas e Referências p.64

Cap.3 - Problema de Desacoplamento da Perturbação por Realimentação Dinâmica Regular do Estado (PDPRDR) p.66

3.1. Introdução p.61

3.2. O Problema de Desacoplamento da Perturbação por Realimentação Regular (PDPRR) p.67

3.3. O Sistema Estendido (SE) e o Sistema Compensado Estendido (SCE) p.69

3.4. As Derivadas Temporais das Saídas ao Longo de uma Solução p.72

3.5. O Algorítimo de Extensão Dinâmica p.74

3.6. Ferramental Geométrico para a Solução do PDPRDR p.88

3.7. Solução do Problema de Desacoplamento da Perturbação por Realimentação Dinâmica Regular (PDPRDR) p.97

3.8. Notas e Referências p.101

Conclusões p.102

Anexo 1. Exemplos p.104

A.1. Exemplo 1 ..... p.104

A.2. Exemplo 2 ..... p.105

Bibliografia p.107

Introdução

As aplicações de geometria diferencial na teoria e no projeto de sistemas de controle para sistemas não lineares, apesar de recentes, já possuem uma base sólida atestada pelos livros textos de Isidori[19] e Nijmeijer e Van-der-Schaft[27]. Alguns aspectos mais práticos, especialmente em aplicações aeroespaciais e em robótica já se evidenciam na rica bibliografia de [19] e [27]. Recentemente também tem ocorrido um casamento feliz entre tal abordagem e a teoria de controle adaptativo, fornecendo resultados interessantes para sistemas linearizáveis. Enfim, podemos afirmar que dentro de poucos anos tal campo de pesquisa deixará de ser tão fértil em termos de novidades mas passará a ser uma ferramenta útil para muitos campos de pesquisa na teoria e projeto de controle.

Nossa introdução nesta área iniciou-se durante o segundo semestre de 1989, onde juntamente com meu orientador, Prof. Dr. Vitor M. P. Leite, apresentamos na forma de seminários a 1ª edição de Isidori[19]. Esses seminários duraram até o fim do primeiro semestre de 1990, e foram fundamentais para nossa formação e especialização nesta área. Iniciamos a pesquisa nesta linha no segundo semestre de 1990. Durante o ano de 1991, meu orientador cumpriu programa de Pós-Doutoramento na Itália na equipe do Prof. Dr. Isidori. Se é verdade que tal programa será de grande valia a partir de agora, posso dizer que não ter a presença constante de meu orientador durante este período foi difícil para mim, já que, desde meu programa de mestrado também orientado por ele, somos parceiros de pesquisa. Afinal, se o doutoramento é a fase onde o pesquisador obtém credenciamento e credibilidade ele também deve obter certa independência.

Na teoria linear, a tão chamada "abordagem geométrica" iniciou-se com os trabalhos de Basile e Marro [2] e Wonham e Morse [38]. O conceito de (A,B)-invariância , definido por tais pesquisadores, forneceu uma solução elegante para o

problema de desacoplamento da perturbação por realimentação de estado. Através das idéias de Schumacher [22] pode-se mostrar que o problema de desacoplamento da perturbação por realimentação de estado é solúvel se e só se o mesmo problema for solúvel por realimentação dinâmica do estado. Assim, o problema de desacoplamento da perturbação por realimentação dinâmica de estado não é relevante para sistemas lineares.

Espelhando-se na teoria linear, os trabalhos de Hischorn [14], Isidori et. al. [20] e [21], Nijmeijer [24] e Krener [22], generalizaram tal idéia de invariância para sistemas não lineares afins, gerando o conceito de "(f,g)-invariância" e solucionando o problema de desacoplamento da perturbação por realimentação regular de estado (PDRRE). Posteriormente mostrou-se que, no caso não linear, o problema de desacoplamento da perturbação por realimentação dinâmica de estado pode ser solúvel enquanto o mesmo problema por realimentação regular de estado não o seja [16]. Isto dá relevância à pesquisa sobre tal tema.

A contribuição desta tese é a solução, pela via geométrica, do Problema de Desacoplamento de Perturbações por Realimentação Dinâmica Regular de Estado (PDPRDR) para sistemas não lineares Afins. Após ter dado uma solução parcial ao problema utilizando a abordagem geométrica (através das idéias contidas em Silva[29]) descobrimos, através de um contato com o Dr. Nijmeijer (Univ. Twente - Holanda), que este problema possuía uma solução analítica (vide [16], [17] e [18]) através do algorítmo de Singh [33]. Ele gentilmente nos enviou tais trabalhos, na forma de "preprints". Em [17] é mostrado que o algorítmo de Singh permite verificar a solubilidade do PDPRDR e construir a solução, no caso em que o problema é solúvel. Trabalhando um pouco mais no problema, desenvolvemos condições necessárias e suficientes com ferramentas geométricas e mostramos que nossas condições geométricas são equivalentes às de [17]. Mostramos que o algorítmo de *extensão dinâmica* [7] também permite a construção da solução. Nosso resultado é

geométrico e aparenta ser um método eficaz para verificação da solubilidade do PDPRDR independentemente da técnica que podemos utilizar para construção da solução. Como o PDPRDR é uma generalização do Problema de Desacoplamento da Perturbação por Realimentação Regular de Estado (PDPRR), nossas condições são também necessárias para solubilidade do segundo problema. Assim podemos resumir nossa contribuição para o PDPRDR em dois pontos principais, sendo o primeiro o fato de termos fornecido uma condição geométrica e o segundo o fato de termos desenvolvido uma nova técnica de construção do compensador solução.

A presente tese divide-se em duas partes principais. A primeira parte, compreendendo os capítulos 1 e 2 são dedicadas ao leitor não especializado na abordagem geométrica-diferencial. O cap. 1 dedica-se aos fundamentos de variedades diferenciáveis e a notação. O leitor experiente nesta área deve fazer uma leitura diagonal apenas para reconhecer a notação utilizada. Alguma novidade para este tipo de leitor talvez possa ser encontrada na seção 1.8, onde fizemos um apanhado dos fatos que necessitaremos sobre variedades analíticas. O capítulo 2 reúne os principais resultados bem conhecidos que necessitaremos da teoria geométrica não-linear. O leitor interessado em uma apresentação mais completa deve remeter-se à [19] e [27] e ainda verificar a bibliografia anexa. A segunda parte desta tese, compreendendo o capítulo 3, as Conclusões e o Anexo-1, é dedicada à contribuição. No anexo-1 incluímos dois exemplos ilustrativos.

Cap.1 - Preliminares Matemáticos

1.1. Objetivos do Capítulo

Neste capítulo introduziremos a linguagem e notação matemáticas utilizadas ao longo desta tese. Os resultados serão apresentados sem provas, tornando este trabalho mais "auto-contido" na medida do possível. O leitor que já conhece os fatos básicos de Variedades Diferenciáveis pode, num rápido vislumbre, reconhecer a notação adotada. O leitor que não está acostumado com estes conceitos não deve esperar deste capítulo nada além de uma apresentação muito superficial dos mesmos. Para as provas e maiores detalhes dos resultados aqui apresentados, indicamos especialmente o texto clássico Boothby [3].

A qualidade mais importante e destacada do universo de fatos que batizamos com o nome de Geometria Diferencial é o seu caráter intrínseco (ou canônico), isto é, a sua maneira de ver as coisas independentemente de um sistema de coordenadas ou mesmo a capacidade de abstrair o espaço onde um determinado ente geométrico está imerso (uma esfera é sempre uma esfera, independentemente se ela estiver imersa no $\mathbb{R}^3$ ou no $\mathbb{R}^4$, se consideramos um sistema de coordenadas do tipo latitide e longitude ou do tipo estereográfico). Assim, os três adjetivos "intrínseco", "canônico" e "geométrico" são sinônimos nesta tese, e quando referidos a alguma propriedade de um certo objeto, querem dizer que esta propriedade não depende de um sistema de coordenadas especial, embora muitas vezes tenhamos que escolher algum sistema de coordenadas para "fazer as contas". Quando estudamos cálculo e análise num espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, pelo fato de tal espaço possuir coordenadas ditas "canônicas", nos esquecemos muitas vezes da geometria que está escondida por trás destes conceitos. No entanto, ao estudarmos superfícies simples, tais como a esfera S^2, percebemos a necessidade de definirmos "sistemas de coordenadas locais" porque

não conseguimos "cobrir" toda a superfície da esfera com um único sistema de coordenadas (como é o caso do $\mathbb{R}^n$). Estes sistemas de coordenadas locais devem "colar" de maneira suave, isto é, na intersecção de seus domínios podemos calcular as coordenadas de um sistema a partir das coordenadas do outro com um certo grau de diferenciabilidade. Estas idéias dão origem ao conceito de *estrutura diferenciável* e *variedade diferenciável*, que tentaremos apresentar.

1.2. Alguns Fatos do Cálculo e da Topologia do $\mathbb{R}^n$

A bola aberta de raio δ e centro z numa norma $\|\cdot\|$ do $\mathbb{R}^n$ é o conjunto $B(\delta,z)=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x-z\|<\delta\}$. Um subconjunto $A\subset\mathbb{R}^n$ é aberto se para todo ponto $z\in A$, existir δ suficientemente pequeno tal que $B(\delta,z)\subset A$. O complementar de um conjunto aberto é dito ser fechado. Os únicos subconjuntos simultaneamente abertos e fechados do $\mathbb{R}^n$ são o próprio $\mathbb{R}^n$ e o conjunto vazio. A união de uma coleção arbitrária de abertos é um aberto. A intersecção de uma coleção finita de abertos é um aberto. Complementanto a propriedade anterior teremos que a intersecção de uma coleção arbitrária de fechados é um fechado. A união de uma coleção finita de fechados é um fechado. Tais propriedades se constituem no que se denomina a Topologia do $\mathbb{R}^n$. Mostra-se que todas a normas do $\mathbb{R}^n$ geram a mesma topologia.

Se A é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $f:A\mapsto\mathbb{R}$ é uma função, denota-se o valor de f num ponto $x=(x_1,\ldots,x_n)$ por $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$. A função f é dita ser de classe C^∞ se as suas derivadas parciais de qualquer ordem com relação a $x_1,\ldots,x_n$ existem e são contínuas. f é dita ser analítica se ela for C^∞ e para todo ponto $z\in\mathbb{R}^n$ a sua série de Taylor centrada em z converge para f numa vizinhança aberta U de z. Se f é analítica, podemos denotar $f\in C^\omega$. Note que existem funções C^∞ que não são analíticas. Por exemplo, tome $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\exp(-1/x)$ para $x>0$ e $f(x)=0$ para $x\leq 0$. Tal função é C^∞ e possui as derivadas de qualquer ordem nulas na origem

e portanto não é analítica. Uma aplicação $F:A\mapsto\mathbb{R}^m$ é uma coleção $(f_1,\ldots,f_m)$ de funções $f_i:A\mapsto\mathbb{R}$. A aplicação F é C^∞ (analítica) se as f_i são C^∞ (analíticas) para $i=1,\ldots,m$. Se $F:A\mapsto\mathbb{R}^m$ é uma aplicação C^∞ então, para todo $p\in\mathbb{R}^n$, existem uma aplicação linear $DF(p):\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^m$ denominada derivada de F num ponto $p\in\mathbb{R}^n$ e um aberto $B_p\subset\mathbb{R}^n$ tal que $x\in B_p$ implica em $(x+p)\in A$, de maneira que R_p: $B_p\mapsto\mathbb{R}^m$ definida por

$$R_p(x)=F(x+p)-F(p)-DF(p).x$$

é tal que

$$\lim_{\|x\|\to 0}\frac{R_p(x)}{\|x\|}=0$$

Assim, DF(p).x é a "melhor" aproximação linear de $F(x+p)-F(p)$ para pequenos valores de x. Nas coordenadas canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, a derivada DF(p) admite uma representação matricial denominada matriz Jacobiana de F em p, sendo denotada por JF(p) ou ainda $\frac{\partial F}{\partial x}(p)$ e definida por

$$\frac{\partial F}{\partial x}(p)=\left.\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}\right|_p$$

algumas vezes denotamos a matriz Jacobiana por $\frac{\partial F}{\partial x}$, representando uma matriz cujos elementos são as funções $\partial f_j/\partial x_i$ definidas em $A\subset\mathbb{R}^n$.

Sejam V e U dois abertos do $\mathbb{R}^n$. Uma aplicação $F:V\mapsto U$ é dita ser um difeomorfismo de classe C^∞ (C^ω) se F é bijetiva e tanto F como F^{-1} são de classe C^∞ (C^ω).

Teorema 1.1 (*da Função Inversa*) : *Seja A um aberto do* $\mathbb{R}^n$ *e* F: $A\mapsto\mathbb{R}^n$ *é uma aplicação de classe* $C^\infty(C^\omega)$. *Suponha que* $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_z$ *é não singular. Então*

existe uma vizinhança aberta U de z com $U \subset A$ tal que $V = F(U)$ é um aberto e a restrição de F ao aberto U é um difeomorfismo de classe $C^\infty(C^\omega)$ sobre V.

Teorema 1.2 (do Pôsto) : Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abertos e $F: A \mapsto B$ é uma aplicação de classe $C^\infty(C^\omega)$. Suponha que $\frac{\partial F}{\partial x}$ possui pôsto k em A. Então existe uma vizinhança aberta A_0 de z e uma vizinhança aberta B_0 de $F(z)$, dois abertos $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ e dois difeomorfismos $G: U \mapsto A_0$ e $H: V \mapsto B_0$ tais que, para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in U$ teremos :

$$(H \circ F \circ G)(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$$

Observação 1.3: Seja $\pi_k: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ tal que

$$\pi_k(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$$

então, como H e G são invertíveis, podemos dizer que para todo ponto x de A_0 teremos

$$F(x) = H^{-1} \circ \pi_k \circ G^{-1}(x)$$

Teorema 1.4 (das Funções Implícitas) : Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos e $F: A \times B \mapsto \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe $C^\infty(C^\omega)$. Denote um ponto (x,y) de $A \times B$ por $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)$. Suponha que para algum ponto (x_0, y_0) de $A \times B$ tenhamos

(i) $F(x_0, y_0) = 0$

(ii) $$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}\right|_{(x_0, y_0)} \quad \text{é não singular.}$$

Então existem vizinhanças abertas A_0 de x_0 em A, B_0 de y_0 em B e uma única

aplicação C^∞ (C^ω) $G: A_0 \mapsto B_0$ *tais que, se* $(x,y) \in A_0 \times B_0$, *então*

$$F(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=G(x)$$

1.3. Noções elementares de Topologia

No espaço $\mathbb{R}^n$ estamos acostumados com as noções de conjuntos abertos, fechados, continuiadade de funções que derivam naturalmente da topologia definida anteriormente. No entanto podemos definir uma topologia para um espaço dado, possivelmente abstrato, e assim definir para este espaço a noção de abertos, fechados e funções contínuas. Assim, seja S um conjunto. Uma estrutura topológica de S é uma coleção de subconjuntos de S, chamados subconjuntos abertos, satisfazendo a :

(i) A união de uma coleção arbitrária de abertos é um aberto.

(ii) A intersecção de uma coleção finita de abertos é um aberto.

(iii) O conjunto S e o conjunto vazio são abertos.

Um conjunto S munido de uma topologia é denominado espaço topológico.

Uma base $\mathcal{B}$ de uma topologia de um espaço topológico S é uma coleção de subconjuntos abertos denominados abertos básicos, tais que qualquer aberto de S pode ser escrito como a união de abertos de $\mathcal{B}$. Por exemplo, as bolas abertas do $\mathbb{R}^n$ de centro em $\mathbb{Q}^n$ e raio racional formam uma base da topologia de $\mathbb{R}^n$. Como $\mathbb{Q}$ (conjunto dos racionais) é um conjunto enumerável, segue-se que esta base é enumerável.

Uma vizinhança aberta U de um ponto $p \in S$ é um aberto U contendo p. Sejam S_1 e S_2 dois espaços topológicos e seja $F: S_1 \mapsto S_2$ uma aplicação. Dizemos que F é contínua se e para todo aberto $V \subset S_2$ teremos que $F^{-1}(V)$ é um aberto de S_2. Uma

aplicação F é dita aberta quando V_1 aberto em S_1 implicar em $F(V_1)$ aberto em S_2. Um homeomorfismo é uma aplicação bijetiva contínua e aberta, isto é, sua inversa é também contínua. Um subconjunto U é dito ser fechado se o seu complemento $\overline{U}$ for aberto. Vê-se facilmente que a união de uma família finita de fechados é um fechado e a intersecção de uma família arbitrária de abertos é um aberto. Um espaço topológico S é fechado em S, bem como o subconjunto vazio. Se S_0 é um subconjunto de um espaço topológico S, existe um único conjunto aberto, denominado interior de S_0 e denotado por $\mathrm{int}(S_0)$, tal que $\mathrm{int}(S_0) \subset S_0$ e qualquer aberto $A \subset S_0$ também está contido em $\mathrm{int}(S_0)$. De fato

$$\mathrm{int}(S_0) = \bigcup_{\substack{A \text{ aberto} \\ A \subset S_0}} A$$

Analogamente, existe um único conjunto fechado, denominado fecho de S_0 e denotado $\mathrm{cl}(S_0)$ tal que $\mathrm{cl}(S_0) \subset S_0)$ e $\mathrm{cl}(S_0)$ está contido em todo fechado que contém S_0. Tem-se

$$\mathrm{cl}(S_0) = \bigcap_{\substack{F \text{ fechado} \\ F \supset S_0}} F$$

Um subconjunto S_0 é dito denso em S se $\mathrm{cl}(S_0) = S_0$. Se S_1 e S_2 são dois espaços topológicos, podemos definir para o produto cartesiano $S_1 \times S_2$ uma topologia de maneira que os abertos de $S_1 \times S_2$ sejam a união de uma família arbitrária de conjuntos da forma $U_1 \times U_2$, onde U_1 é um aberto em S_1 e U_2 é um aberto em S_2. Quando munido desta topologia, $S_1 \times S_2$ é denominado espaço topológico produto.

Se S é um espaço topológico e $S_1 \subset S$, então o subconjunto S_1 herda de S uma topologia denominada topologia de subconjunto tal que os seus abertos são da forma $S_1 \cap U$, onde U é um aberto de S.

Seja $F: S_1 \mapsto S_2$ uma aplicação contínua entre espaços topológicos, e seja $F(S_1) \subset S_2$ a imagem de F. Considerando $F(S_1)$ com a topologia de subconjunto, vê-se que a aplicação $F': S_1 \mapsto F(S_2)$ definida por $F'(p)=F(p)$ é contínua mas não é necessariamente aberta. Considere agora $F(S_1)$ com a topologia tal que os conjuntos abertos são a imagem $F(A)$ de um subconjunto aberto $A \subset S_1$, denominada topologia induzida. Essa topologia contém a topologia de subconjunto (no sentido em que um aberto da topologia de subconjunto é também um aberto da topologia induzida). Com a topologia induzida, a aplicação F' é aberta. Logo, se F for injetiva, segue-se que F' é um homeomorfismo entre S_1 e $F(S_1)$ com a topologia induzida.

Um espaço topológico é dito ser Hausdorff se pontos distintos p_1 e p_2 admitirem vizinhanças abertas V_1 e V_2 disjuntas.

Um espaço topológico S é dito ser conexo se os únicos conjuntos simultaneamente abertos e fechados forem o conjunto vazio e o próprio S. Para topologias mais particulares como por exemplo espaços métricos ou localmente euclidianos (veja seção seguinte para a definição de localmente euclidiano) tal definição equivale a dizer que S não é a união de dois abertos disjuntos não vazios. Um subconjunto C de S é conexo se C for um espaço conexo na topologia de subconjunto.

Um caminho σ em um espaço S é uma aplicação contínua $\sigma:[a,b] \mapsto S$. Dizemos que um caminho liga dois pontos p_1 e p_2 de S se $\sigma(a)=p_1$ e $\sigma(b)=p_2$. Um subconjunto C de S é dito ser conexo por caminhos se todo par de pontos de C pode ser ligado por um caminho.

1.4. Variedades Diferenciáveis

Um espaço topológico $\mathcal{N}$ é dito ser localmente euclidiano de dimensão n se

para todo ponto $p \in \mathcal{N}$ existir uma vizinhança U de p, um aberto V de $\mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo $\phi : U \mapsto V$.

Definição 1.5: *Uma variedade $\mathcal{N}$ de dimensão n é um espaço topológico Hausdorff localmente euclidiano de dimensão n, possuindo uma base enumerável.*

Uma carta local de um ponto p de uma variedade $\mathcal{N}$ de dimensão n é um par (U, ϕ) onde U é uma vizinhança aberta de p e $\phi : U \mapsto V \subset \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo e V é um aberto em $\mathbb{R}^n$. Denota-se $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ e cada $\phi_i : U \mapsto \mathbb{R}$ é denominada função coordenada.

Sejam (U, Φ) e (V, Ψ) duas cartas locais de uma variedade $\mathcal{N}$ de dimensão n. Suponha que $U \bigcap V \neq \varnothing$ e defina o homeomorfismo entre abertos do $\mathbb{R}^n$, denominado *mudança de coordenadas*, pondo

$$\Psi \circ \Phi^{-1}(\Phi(U \cap V)) \mapsto \Psi(U \cap V)$$

Se denotarmos $x = \Phi(p) = (x_1, \ldots, x_n)'$ e $y = \Psi(p) = (y_1, \ldots, y_n)'$ para cada $p \in U \cap V$, podemos escrever

$$y(x) = \Psi \circ \Phi^{-1}(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_n(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

e a transformação inversa é da forma $x = x(y)$.

Duas cartas locais (U, Φ) e (V, Ψ) são ditas C^∞ (C^ω)-*compatíveis* se um dos dois fatos abaixo ocorrerem :

(i) $U \cap V = \varnothing$;

(ii) $U \cap V \neq \varnothing$ e a mudança de coordenadas é um difeomorfismo de classe C^∞

(respectivamente, analítico).

Um atlas C^∞ (C^ω) de uma variedade $\mathcal{N}$ é uma coleção de cartas locais C^∞ (C^ω) compatíveis

$$\mathcal{A}=\{(U_\lambda,\Phi_\lambda) : \lambda\in\Lambda\}$$

tal que

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda=\mathcal{N}$$

Um atlas é dito completo se ele não estiver contido propriamente em nenhum outro atlas. Para todo atlas $\mathcal{A}$ podemos fazer o processo de completamento, adicionando a $\mathcal{A}$ todas as cartas locais que ainda mantenham a compatibilidade. Neste processo obtemos o atlas $\mathcal{A}^\star$, o único atlas completo que contém $\mathcal{A}$. Um atlas completo $\mathcal{A}^\star$ C^∞ (C^ω) de uma variedade $\mathcal{N}$ de dimensão n é denominado estrutura diferenciável (respectivamente, analítica) de $\mathcal{N}$.

Definição 1.6: *Uma variedadade diferenciável (analítica) $\mathcal{N}$ de dimensão n é uma variedade $\mathcal{N}$ munida de uma estrutura diferenciável (analítica).*

A seguir damos alguns exemplos elementares de variedades diferenciáveis :

(1) Qualquer aberto U de $\mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável se definirmos a estrutura diferenciável que maximiza o atlas $\mathcal{A}=\{(U,i) : i=\text{identidade em } U\}$. Em particular, $\mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável.

(2) Seja S^1 o conjunto dos pontos do $\mathbb{R}^2$ (x_1,x_2) tais que $x_1^2+x_2^2=1$, com a topologia de subconjunto (Hausdorff e de base enumerável). Seja $p_1=(-1,0)$ e $p_2=(1,0)$. Considere as aplicações

$$\Phi : S^1-\{p_1\}\mapsto\mathbb{R} \quad , \Phi=2x_2/(x_1+1)$$

$\Psi : S^1 - \{p_2\} \mapsto \mathbb{R}$, $\Psi = 2x_2/(1-x_1)$

mostra-se que Φ e Ψ são homeomorfismos, e que a mudança de coordenadas é $y(x)=4/x$. Note também que para $p \in S^1 - \{p_1, p_2\}$ teremos $\Phi(p) \neq 0$ e $\Psi(p) \neq 0$ e a mudança de coordenadas $\Phi \circ \Psi^{-1} : \mathbb{R} - \{0\} \mapsto \mathbb{R} - \{0\}$ é um difeomorfismo de classe C^∞ . O atlas maximal $\mathcal{A}^\star$ que contém Φ e Ψ é uma estrutura diferenciável para S^1.

(3) Podemos definir estruturas diferenciáveis diferentes sobre um espaço topológico, gerando variedades diferenciáveis com natureza diferentes. De fato, seja $\mathcal{N} = \mathbb{R}$ e considere as cartas $(\mathbb{R}, \Phi)$ e $(\mathbb{R}, \Psi)$ tais que :

$$\Phi(x) = x$$

$$\Psi(x) = x^3$$

Como $\Psi^{-1}(x) = x^{1/3}$, segue-se que $\Phi \circ \Psi^{-1}(x) = x^{1/3}$. Assim Φ e Ψ não são cartas compatíveis. Assim os atlas maximais $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ que contém respectivamente $(\mathbb{R}, \Phi)$ e $(\mathbb{R}, \Psi)$, são diferentes e portanto podemos definir diferentes estruturas diferenciáveis sobre $\mathbb{R}$.

(4) Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um subconjunto aberto e suponha que $\lambda : U \mapsto \mathbb{R}^{m-n}$ é uma aplicação C^∞. Denote $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \ldots, \lambda_{m-n}(x))$ e defina $\mathcal{N} \subset U$ como sendo o subconjunto (fechado) de U, tal que :

$$\mathcal{N} = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \ : \ \lambda_i(x) = 0, \ i = 1, \ldots, m-n \right\}$$

Considere $\mathcal{N} \subset U$ como o espaço topológico com a topologia de subconjunto. Suponha também que a matriz jacobiana

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \lambda_{m-n}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \lambda_{m-n}}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

possua pôsto $m-n$ para todo $x \in \mathcal{N}$. Então $\mathcal{N}$ é uma variedade diferenciável de

dimensão n. A prova de tal afirmação é uma consequêcia imediata do teorema das funções implícitas, já que, a menos de uma reordenação dos x_i e dos λ_j, podemos supor que para todo ponto $x^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0,x_{n+1}^0,\ldots,x_m^0)\in\mathcal{N}$ a matriz jacobiana

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\lambda_1}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial\lambda_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\lambda_{m-n}}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial\lambda_{m-n}}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

é não singular. Portanto, existem vizinhanças abertas $A_0\subset\mathbb{R}^n$ de $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ e $B_0\subset\mathbb{R}^{m-n}$ de $(x_{n+1}^0,\ldots,x_m^0)$ e uma aplicação C^∞ $G_0:A_0\mapsto B_0$ tal que $\lambda(x)=0$ e $x\in(A_0\times B_0)$ se e só se $x=(x_1,\ldots,x_n,G_0(x_1,\ldots,x_n))$. Assim, em uma vizinhança aberta $V_0=\mathcal{N}\cap(A_0\times B_0)$ de $x^0\in\mathcal{N}$ podemos definir uma carta local $\psi_0:V_0\mapsto A_0$. Note que $\psi_0^{-1}(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_n,G_0(x_1,\ldots,x_n))$. Assim, mostra-se facilmente que as cartas locais contruídas desta forma são sempre compatíveis e formam um atlas. A maximização deste atlas define uma estrutura diferenciável.

(5) O conjunto $S^{m-1}=\{(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m:\ x_1^2+\ldots+x_m^2=1\}$ é uma variedade diferenciável. De fato, do exemplo acima, podemos definir $\lambda:\mathbb{R}^m\mapsto\mathbb{R}$, pondo $\lambda(x_1,\ldots,x_m)=x_1^2+\ldots+x_m^2-1$ e notar que

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=[\ 2x_1\ \ \ldots\ \ 2x_m\ ]$$

e assim a matriz jacobiana de λ possui pôsto 1 para todo ponto de S^{m-1}. Assim S^{m-1} é uma variedade diferenciável de dimensão $m-1$ em virtude do exemplo (4).

(6) Um aberto U de uma variedade $\mathcal{N}$ é também uma variedade diferenciável. De fato, se $\mathcal{A}=\{(U_\lambda,\Phi_\lambda)\ :\ \lambda\in\Lambda\}$ é um atlas de $\mathcal{N}$, então $\mathcal{A}'=\{(U_\lambda',\Phi_\lambda')\ :\ \lambda\in\Lambda\}$, onde

$$U_\lambda'=U\cap U_\lambda$$

$$\Phi_\lambda'=\Phi_\lambda|U_\lambda'$$

é um atlas de U. Com esta estrutura, U é denominado subvariedade aberta de $\mathcal{N}$.

(7) Se $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}$ são variedades diferenciáveis respectivamrente de dimensão n e m, com atlas maximais respectivos $\{(U_\lambda, \phi_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ e $\{(V_\gamma, \psi_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ então o espaço topológico produto $\mathcal{N} \times \mathcal{M}$ possui uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão $n+m$ dada pela maximização do atlas

$$\mathcal{A} = \left\{ \left(U_\lambda \times V_\gamma, \phi_\lambda \times \psi_\gamma \right) : \lambda \in \Lambda \ , \ \gamma \in \Gamma \right\}$$

onde, para $p \in U_\lambda \subset \mathcal{N}$ e $q \in V_\gamma \subset \mathcal{M}$, a carta local

$$\phi_\lambda \times \psi_\gamma : U_\lambda \times V_\gamma \mapsto \phi_\lambda(U_\lambda) \times \psi_\gamma(V_\gamma)$$

é definida pondo-se

$$\phi_\lambda \times \psi_\gamma(p,q) = (\phi_\lambda(p), \ \psi_\gamma(q))$$

O resultado a seguir será de utilidade no futuro :

Proposição 1.7: *Uma variedade $\mathcal{N}$ conexa é conexa por caminhos.*

Prova : Fixemos $x_1 \in \mathcal{N}$. É suficiente mostrar que o conjunto $\mathcal{C}$ de pontos que podem ser ligados a x_1 por um caminho contínuo é aberto e fechado em $\mathcal{N}$. Para isso suponha $x \in \mathcal{C}$ e tome uma carta (U, ψ) em torno de x. Seja $V = \psi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Como V é um aberto de $\mathbb{R}^n$, existe uma bola aberta B de centro em $\psi(x)$ e raio δ contida em V. Mas todo ponto b da bola B pode ser ligado por um caminho contínuo σ ao seu centro $\psi(x)$. Portanto todos os pontos de $\psi^{-1}(B)$ podem ser ligados a x por um caminho contínuo $\psi^{-1} \circ \sigma$. Logo $\mathcal{C}$ é aberto, pois podemos contruir um caminho contínuo ligando x_1 a qualquer elemento de $\psi^{-1}(B)$ por justaposição. Um raciocínio análogo mostra que o complementar de $\mathcal{C}$ é também aberto. □

Seja $F:\mathcal{N}\mapsto\mathcal{M}$ uma aplicação contínua entre variedades diferenciáveis (analíticas) $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}$ de dimensões n e m, respectivamente. Denote os atlas maximais de $\mathcal{N}$ por $\mathcal{A}_n$ e de $\mathcal{M}$ por $\mathcal{A}_m$. Seja $(V,\psi)\in\mathcal{A}_m$ uma carta local de F(p), com $p\in\mathcal{N}$. Como F é contínua, então $F^{-1}(V)$ é um aberto em $\mathcal{N}$ contendo p. Podemos tomar em $\mathcal{A}_n$ uma carta (W,Φ) de p tal que $W\subset F^{-1}(V)$. Desta forma a aplicação $\psi\circ F\circ\Phi^{-1}:\Phi(W)\subset\mathbb{R}^n\mapsto\psi(V)\subset\mathbb{R}^m$ fica bem definida e é uma aplicação entre abertos de espaços euclidianos. Denominaremos tal aplicação $\hat{F}=\psi\circ F\circ\Phi^{-1}$ de expressão de F em coordenadas locais em torno de p.

Definição 1.8: Uma aplicação contínua $F:\mathcal{N}\mapsto\mathcal{M}$ entre variedades diferenciáveis (analíticas) é dita ser diferenciável se a sua expressão em coordenadas locais for diferenciável (analítica) em torno de todo ponto p de $\mathcal{N}$. F é dita ser diferenciável (analítica) num aberto $U\subset\mathcal{N}$ se $F|U:U\mapsto\mathcal{M}$ é diferenciável (analítica) com U sendo a variedade diferenciável do exemplo (6). F é dita ser um difeomorfismo se F for bijetiva e F e F^{-1} são diferenciáveis.

Naturalmente a diferenciabilidade de uma aplicação F não depende das cartas escolhidas para compor a sua expressão em cordenadas locais. De fato, isto é consequência da compatibilidade dos atlas, pois se Φ_1,Φ_2 são cartas de $\mathcal{N}$, ψ_1 e ψ_2 são cartas de $\mathcal{M}$, com as devidas restrições nos domínios, podemos escrever

$$\begin{aligned}\psi_1\circ F\circ\Phi_1^{-1}&=\psi_1\circ(\psi_2^{-1}\circ\psi_2)\circ F\circ(\Phi_2^{-1}\circ\Phi_2)\circ\Phi_1^{-1}=\\&=(\psi_1\circ\psi_2^{-1})\circ(\psi_2\circ F\circ\Phi_2^{-1})\circ(\Phi_2\circ\Phi_1^{-1})=\end{aligned}\tag{1.1}$$

Note que $(\psi_1\circ\psi_2^{-1})$ e $(\Phi_2\circ\Phi_1^{-1})$ são mudanças de coordenadas, sendo portanto diferenciáveis. Logo $(\psi_2\circ F\circ\Phi_2^{-1})$ é diferenciável se e só se $\psi_1\circ F\circ\Phi_1^{-1}$ também o

for.

Definição 1.9: *O pôsto de uma aplicação diferenciável* $F: \mathcal{N} \mapsto \mathcal{M}$ *entre variedades difernciáveis num ponto* $p \in \mathcal{N}$ *é definido como sendo o pôsto da matriz jacobiana de da expressão de F em coordenadas locais.*

Em virtude de (1.1), o pôsto de F num ponto p é um número inteiro bem definido, não dependendo da expressão de F em coordenadas locais.

Definição 1.10: *Uma aplicação diferenciável* $F: \mathcal{N} \mapsto \mathcal{M}$ *entre variedades diferenciáveis é dita ser uma submersão se o pôsto de F for igual à dimensão de* $\mathcal{M}$ *para todo ponto p de* $\mathcal{N}$. *F é dita ser uma imersão se o pôsto de F for igual à dimensão de* $\mathcal{N}$ *para todo ponto p de* $\mathcal{N}$. *Definições análogas podem ser feitas para as restrições de F à abertos de* $\mathcal{N}$.

A definição acima equivale respectivamente a dizer que a matriz jacobiana da expressão de F em coordenadas locais possui pôsto pleno de linha (submersão) ou possui posto pleno de coluna (imersão). O resultado a seguir é uma consequência mais ou menos imediata do teorema da função inversa e do teorema do pôsto.

Proposição 1.11: *As seguintes afirmativas são verdadeiras para uma aplicação diferenciável* $F: \mathcal{N} \mapsto \mathcal{M}$.

(i) F é um difeomorfismo se e só se F é bijetiva, é uma submersão e uma imersão, isto é, a matriz jacobiana $J\hat{F}$ *da expressão de F em coordenadas locais é invertível para todo ponto p de* $\mathcal{N}$.

(ii) (Teorema do pôsto) Sejam $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}$ variedades diferenciáveis de dimensão n e m respectivamente. Identificaremos $\mathbb{R}^n$ com $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ e $\mathbb{R}^m$ com $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$, de maneira que um ponto x do $\mathbb{R}^n$ será denotado por (x_1, x_2) , $x_1 \in \mathbb{R}^r$ e $x_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$ e um ponto z do $\mathbb{R}^m$ será denotado por (z_1, z_2), $z_1 \in \mathbb{R}^r$ e $z_2 \in \mathbb{R}^{m-r}$. Seja $F : \mathcal{N} \mapsto \mathcal{M}$ diferenciável de pôsto r no ponto $p \in \mathcal{N}$. Então existem cartas locais (U, Φ) de p e (V, ψ) de $F(p)$ tais que, para todo $(x_1, x_2) \in U$ teremos

$$\psi \circ F \circ \Phi^{-1}(x_1, x_2) = (x_1, 0) \tag{1.2}$$

onde 0 denota o vetor nulo de $\mathbb{R}^{m-r}$.

(iii) (Forma local das Submersões) Se F é uma submersão, então (1.2) toma a forma

$$\psi \circ F \circ \Phi^{-1}(x_1, x_2) = x_1 \tag{1.3}$$

Em particular uma submersão é uma aplicação aberta.

(iv) (Forma local das Imersões) Se F é uma imersão, então (1.2) toma a forma

$$\psi \circ F \circ \Phi^{-1}(x_1) = (x_1, 0) \tag{1.4}$$

1.5 Vetores Tangentes sobre Variedades

Seja U uma vizinhança aberta de um ponto p de uma variedade diferenciável $\mathcal{N}$ de dimensão n e suponha que $\lambda : U \mapsto \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Seja $C^\infty(p)$ o conjunto de todas as funções diferenciáveis em uma vizinhança de p. Note também

que $C^\infty(p)$ possui uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, pois se $\lambda: U \mapsto \mathbb{R}$ e $\gamma: V \mapsto \mathbb{R}$ e a, b são constantes reais então podemos definir $(a\lambda + b\gamma): W \mapsto \mathbb{R}$, onde

$$(a\lambda + b\gamma)(x) = a\lambda(x) + b\gamma(x)$$

$$W = U \cap V \text{ (é não vazio, pois contém p)}$$

Note que $C^\infty(p)$ possui uma estrutura de anel, pois em W podemos definir a função produto $\lambda\gamma: W \mapsto \mathbb{R}$ pondo $\lambda\gamma(x) = \lambda(x)\gamma(x)$. Para variedades analíticas uma definição análoga para funções de classe C^ω será denotada por $\mathbb{A}(p)$. Em todas as definições e resultados que se seguem podemos substituir $C^\infty(p)$ por $\mathbb{A}(p)$ quando consideramos o caso analítico.

Definição 1.12: *Um vetor tangente v num ponto p de uma variedade dif. $\mathcal{N}$ é um operador "derivação", ou seja, é uma aplicação $v: C^\infty(p) \mapsto \mathbb{R}$ possuindo as propriedades :*

(i) Linearidade : $v(a\lambda + b\gamma) = a\,v(\lambda) + b\,v(\gamma)$, $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $\lambda, \gamma \in C^\infty(p)$.

(ii) Regra de Leibnitz : $v(\lambda\gamma) = v(\lambda)\,\gamma(p) + \lambda(p)\,v(\gamma)$.

Note que o conjunto $T_p\mathcal{N}$ dos vetores tangentes em p possui uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, considerando-se $(av_1 + bv_2)(\lambda) = av_1(\lambda) + bv_2(\lambda)$ *para* a, $b \in \mathbb{R}$ $v_1, v_2 \in T_p\mathcal{N}$ *e* $\lambda \in C^\infty(p)$.

Agora tome uma carta local $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ de $p \in \mathcal{N}$. Note que as funções coordenadas $x_i: U \mapsto \mathbb{R}$ pertencem a $C^\infty(p)$. A esta carta local podemos associar para $i = 1, \ldots, n$, os vetores tangentes $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ sobre o ponto p, definidos pela equação :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p(\lambda) = \left.\frac{\partial(\lambda \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}\right|_{x = \psi(p)}$$

Note que $\lambda \circ \psi^{-1}$ é a expressão de λ em coordenadas locais.

Teorema 1.13 : *Seja* $\mathcal{N}$ *uma variedade diferenciável de dimensão* n *e seja* $(U, \psi=(x_1, \ldots, x_n))$ *uma carta de* $p \in \mathcal{N}$. *Então* $T_p\mathcal{N}$ *é espaço vetorial de dimensão* n *sobre o corpo real e o conjunto* $\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\right]_p, \ldots, \left[\frac{\partial}{\partial x_n}\right]_p\right\}$ *forma uma base de* $T_p\mathcal{N}$.

Seja v um vetor tangente de T_p. Do teorema anterior vê-se que

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\right]_p \tag{1.5.a}$$

e portanto

$$\begin{aligned} v(x_j) &= \sum_{i=1}^{n} a_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\right]_p (x_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial(x_j \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}\right|_{x=\psi(p)} \\ &= a_j \end{aligned} \tag{1.5.b}$$

Uma mudança de coordenadas em torno de p induz uma mudança de coordendas em $T_p\mathcal{N}$. De fato, se $(U, \Phi=(x_1, \ldots, x_n))$ e $(V, \psi=(y_1, \ldots, y_n))$ são cartas locais de $p \in \mathcal{N}$, então

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial y_i}\right]_p (\lambda) &= \left.\frac{\partial(\lambda \circ \psi^{-1})}{\partial y_i}\right|_{y=\psi(p)} = \\ &= \left.\frac{\partial(\lambda \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \circ \psi^{-1})}{\partial y_i}\right|_{y=\psi(p)} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial(\lambda \circ \Phi^{-1})}{\partial x_j}\right|_{x=\phi(p)} \cdot \left.\frac{\partial(x_j \circ \psi^{-1})}{\partial y_i}\right|_{y=\psi(p)} = \end{aligned}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p(\lambda)\,.\,\frac{\partial(x_j\circ\psi^{-1})}{\partial y_i}\bigg|_{y=\psi(p)}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(x_j\circ\psi^{-1})}{\partial y_i}\bigg|_{y=\psi(p)}\,.\,\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p(\lambda)$$

Note que $\frac{\partial(x_j\circ\psi^{-1})}{\partial y_i}$ é a j-ésima linha da matriz jacobiana da aplicação mudança de coordenadas $x(y)=\Phi\circ\psi^{-1}(y)$. Portanto, se $v=(v_1,\ldots,v_n)'$ é um vetor tangente em p escrito na base $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p,\ldots,\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right\}$ e $w=(w_1,\ldots,w_n)$ é um vetor tangente em p escrito na base $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p,\ldots,\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_p\right\}$, então

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

A seguir veremos o conceito intrínseco de derivada de uma aplicação em variedades que generaliza o mesmo conceito para aplicações entre espaços euclidianos de dimensão finita. Lembremos que no caso em que $F:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^m$, a derivada DF(p) é uma aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. No caso em que F é uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis, a derivada num ponto p será uma aplicação linear do espaço tangente em p no espaço tangente em F(p).

Definição 1.14: *Sejam $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}$ variedades diferenciáveis e seja $F:\mathcal{N}\mapsto\mathcal{M}$ uma aplicação diferenciável. A derivada de F num ponto p, denotada por F_* é a aplicação linear $F_*:T_p\mathcal{N}\mapsto T_{F(p)}\mathcal{M}$ definida por*

$$F_*(v)(\lambda)=v(\lambda\circ F) \tag{1.6}$$

para todo $\lambda \in C^{\infty}(F(p))$ *e todo* $v \in T_p\mathcal{N}$.

Observação 1.15: *A notação* F_* *para a derivada em* p *deixa implícito que ela está sendo considerada ponto* p. *Assim a eq.* (1.6) *pode também ser escrita como*

$$F_*(p)(v)(\lambda) = v(\lambda \circ F) \tag{1.7}$$

Proposição 1.16: *Sejam* $(U, \Phi = (x_1, \ldots, x_n))$ *e* $(V, \psi = (y_1, \ldots, y_m))$ *cartas locais de* p *e* $F(p)$, *respectivamente, tais que* $F(U) \subset V$ *e seja* $\hat{F}(x) = \psi \circ F \circ \Phi^{-1}(x)$ *a expressão de* F *em coordenadas locais. A matriz da transformação linear* $F_*(p)$ *quando escrita nas bases* $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right\}$ *de* $T_p\mathcal{N}$ *e* $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{F(p)}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_{F(p)}\right\}$ *de* $T_{F(p)}\mathcal{M}$ *coincide com a matriz*

$$\left.\frac{\partial \hat{F}}{\partial x}\right|_{\Phi(p)}$$

jacobiana da expressão de F *em coordendas locais no ponto* $\Phi(p)$.

Prova : De fato, seja $v_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p \in T_p\mathcal{N}$. Então $F_*(v_i) \in T_{F(p)}\mathcal{M}$ e portanto pode ser escrito na forma $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{F(p)}$, sendo que, pela eq. (5.5.a-b) teremos que $a_{ij} = F_*(v_j)(y_i)$. Assim

$$a_{ij} = F_*(v_j)(y_i) =$$

$$= v_j(y_i \circ F) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p (y_i \circ F) =$$

$$=\frac{\partial(y_i \circ F \circ \Phi^{-1})}{\partial x_j}=\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x_i}$$

Proposição 1.17: *(Regra da Cadeia) Se* $F:\mathcal{N}\mapsto\mathcal{M}$ *e* $G:\mathcal{P}\mapsto\mathcal{N}$ *são aplicações diferenciáveis entre variedades diferenciáveis, então* $F\circ G$ *é diferenciável e* $(F\circ G)_*=F_*G_*$. *(A justaposição de* F_* *com* G_* *denota a composição de aplicações lineares.*

Dizemos que uma variedade $\mathcal{N}$ está imersa em uma variedade $\mathcal{M}$ quando existir uma imersão injetiva $i:\mathcal{N}\mapsto\mathcal{M}$. Neste caso dizemos que $i(\mathcal{N})$ é uma subvariedade imersa em $\mathcal{M}$. De fato, $i(\mathcal{N})$ é um espaço topológico com a topologia induzida por i. Seja $\iota:\mathcal{N}\mapsto i(\mathcal{N})$ tal que $\iota(p)=i(p)$. Temos que ι é um homeomorfismo. assim, cada carta (U,ψ) de $\mathcal{N}$ induz uma carta $(\iota(U),\psi\circ\iota^{-1})$, gerando uma estrutura diferenciável para $i(\mathcal{N})$ que se torna uma variedade com mesma dimensão de $\mathcal{N}$. Com esta construção, o espaço tangente $T_q i(\mathcal{N})$ em um ponto $q=i(p)$ pode ser identificado com um subespaço de $T_q\mathcal{M}$. De fato, por definição, $T_q i(\mathcal{N})=\iota_*(T_p\mathcal{N})$. Mas note que cada vetor $w=\iota_*(v)$ de $T_q i(\mathcal{N})$ pode ser identificado com o vetor $w'=i_*(v)$ de $T_q\mathcal{M}$. Denotamos tal procedimento de identificação por:

$$T_q i(\mathcal{N})=\iota_*(T_p\mathcal{N})\simeq i_*(T_p\mathcal{N})\subset T_q\mathcal{M}. \tag{1.8}$$

Se a topologia induzida por i em $\mathcal{P}=i(\mathcal{N})$ coincidir com a topologia de subconjunto de $\mathcal{M}$, então dizemos que i *é um mergulho* e $\mathcal{P}$ é uma variedade mergulhada. A proposição seguinte, cuja prova é uma aplicação do teorema do pôsto, caracteriza as variedades mergulhadas.

Proposição 1.18: *Seja* $\mathcal{M}$ *uma variedade diferenciável de dimensão* m *e seja* $\mathcal{P}\subset\mathcal{M}$ *uma variedade imersa de dimensão* ρ. *Então as seguintes afirmativas são equivalentes* :

(1) $\mathcal{P}$ *é uma variedade mergulhada, isto é, a aplicação inserção* $\iota_s : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{M}$ *tal que* $\iota_s(p) = p$ *é um mergulho.*

(2) *Para cada ponto* p *de* $\mathcal{P}$, *existe uma carta local* $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_\rho, x_{\rho+1}, \ldots, x_m))$ *de* $\mathcal{M}$ *com* $p \in U$, *tal que* $\psi : U \mapsto W_1 \times W_2$, $W_1 \subset \mathbb{R}^\rho$ *e* $W_2 \subset \mathbb{R}^{m-\rho}$ *são subconjuntos abertos, e ainda :*

(i) $V = U \cap \mathcal{P} = \psi^{-1}(W_1 \times \{0\})$ *é um aberto em* $\mathcal{P}$.

(ii) Seja $\pi : \mathbb{R}^\rho \times \mathbb{R}^{m-\rho} \mapsto \mathbb{R}^\rho$ *é tal que* $\pi(x_1, \ldots, x_\rho, 0, \ldots, 0) = (x_1, \ldots, x_\rho)$ *então a aplicação* $\Phi : V \mapsto W_1 \subset \mathbb{R}^\rho$ *tal que* $\Phi(q) = \pi \circ \psi$ *é uma carta local de* $\mathcal{P}$ *em torno de* p.

A carta ψ, com as propriedades enunciadas na proposição anterior, é denominada carta adaptada em torno de p. Note que o aberto $V = U \cap \mathcal{P}$ de $\mathcal{P}$ é mapeado por ψ numa fatia ρ-dimensional de $\mathbb{R}^\rho \times \mathbb{R}^{m-\rho}$ constituída pelos pontos da forma $(x_1, \ldots, x_\rho, 0, \ldots, 0)$.

Mostraremos agora que a definição de vetor tangente adotada, apesar de abstrata, coincide com a definição usual no caso de superfícies. Para isso, considere por exemplo S^2 , a esfera imersa em $\mathbb{R}^3$, isto é,

$$S^2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$

Defina a aplicação $G : (0,1) \times (0,1) \mapsto \mathbb{R}$ pondo $G(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$. Seja a aplicação $\psi : V \mapsto (0,1) \times (0,1)$ tal que

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$$

onde

$$V = S^1 \cap (0,1) \times (0,1) \times (0,1)$$

Verifica-se facilmente que ψ é uma carta local de S^2, sendo $\psi^{-1} : (0,1) \times (0,1) \mapsto V$ dado por

$$\psi^{-1}(x_1,x_2)=(x_1,x_2,\ G(x_1,x_2))$$

A aplicação $\xi=\psi^{-1}$ é muitas vezes denominada de "parametrização" da esfera. Note agora que os vetores ξ_1 e ξ_2 do $\mathbb{R}^3$, definidos por

$$\xi_1=\frac{\partial\psi^{-1}(x_1,x_2)}{\partial x_1}=(1,\ 0,\ \frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1,x_2))$$

$$\xi_2=\frac{\partial\psi^{-1}(x_1,x_2)}{\partial x_2}=(0,\ 1,\ \frac{\partial G}{\partial x_2}(x_1,x_2))$$

geram sobre cada ponto $p=(x_1,x_2,G(x_1,x_2))\in(S^1\cap V)$ o plano tangente sobre p, que será denotado por T_pS^2. Note que esta definição de vetor tangente e plano tangente usou fortemente o fato de que a esfera está imersa em $\mathbb{R}^3$ e que a definição abstrata da seção 1.5 é bem mais geométrica, no sentido em que ela não depende do espaço em que uma variedade possa estar imersa.

Voltemos agora à definição 1.12. Considere $i:S^2\mapsto\mathbb{R}^3$ a aplicação inserção. Havíamos construído uma carta local $\psi:V\subset S^2\mapsto(0,1)\times(0,1)$ tal que $\psi(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2)$ e $\psi^{-1}(x_1,x_2)=(x_1,x_2,G(x_1,x_2))$. Como S^2 é uma variedade imersa no $\mathbb{R}^3$, há sentido em considerar T_pS^2 como um subespaço de $T_p\mathbb{R}^3$ (na realidade S^2 é uma variedade mergulhada porque possui a topologia de subconjunto de $\mathbb{R}^3$). Fazendo esta identificação, a expressão de i em coordenadas locais (V,ψ) de S^2 e nas coordenadas canônicas do $\mathbb{R}^3$ será $i(x_1,x_2)=(x_1,x_2,G(x_1,x_2))$. Assim a expressão de $i_*(\frac{\partial}{\partial x_1})$ e $i_*(\frac{\partial}{\partial x_2})$ nestas coordenadas será exatamente a definição clássica ξ_1 e ξ_2 dada anteriormente, ou seja

$$\xi_1=i_*(\frac{\partial}{\partial x_1})=(1,\ 0,\ \frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1,x_2))$$

$$\xi_2=i_*(\frac{\partial}{\partial x_1})=(0,\ 1,\ \frac{\partial G}{\partial x_2}(x_1,x_2))$$

Assim a definição clássica de um vetor tangente em uma superfície do $\mathbb{R}^n$ é obtida da definição "moderna" a partir da identificação (§.8).

Seja $\omega : T_p\mathcal{N} \mapsto \mathbb{R}$. Como ω é um funcional linear sobre $T_p\mathcal{N}$ denotamos o valor de $\omega(v)$ por $<\omega, v>$. Seja U uma vizinhança aberta de p e seja $\lambda \in C^\infty(p)$. Define-se a diferencial $(d\lambda)_p$ como sendo o funcional linear $(d\lambda)_p : T_p\mathcal{N} \mapsto \mathbb{R}$, tal que, para todo $v \in T_p\mathcal{N}$, tenhamos

$$<(d\lambda)_p, v> = v(\lambda)$$

Em particular $(d\lambda)_p \in T_p^*\mathcal{N}$. Seja $i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ a aplicação identidade. Note que

$$<(d\lambda)_p, v> = v(i \circ \lambda) =$$

$$= \lambda_*(v)(i)$$

e a segunda equação pode servir de definição para a diferencial de λ.

Se $F : \mathcal{N} \mapsto \mathcal{M}$ é uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis, $p \in \mathcal{N}$, $\gamma \in C^\infty(F(p))$ e $w \in T_{F(p)}\mathcal{M}$, então

$$<d(\gamma \circ F), w> = w(\gamma \circ F)$$

$$= F_*(w)(\gamma) \tag{1.9}$$

Podemos definir o espaço vetorial dual de $T_p\mathcal{N}$, denominado espaço cotangente e denotado por $T_p^*\mathcal{N}$. Assim $T_p^*\mathcal{N}$ é o espaço dos funcionais lineares $v^* : T_p\mathcal{N} \mapsto \mathbb{R}$. Dado um sistema de coordenadas $(U, \Phi = (x_1, \ldots, x_n))$ e a base $\mathbb{B} = \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\right]_p, \ldots, \left[\frac{\partial}{\partial x_n}\right]_p \right\}$ de $T_p\mathcal{N}$, demonstra-se que a base dual de $\mathbb{B}$ é dada por $\mathbb{B}^* = \left\{ (dx_1)_p, \ldots, (dx_n)_p \right\}$, isto é, $\mathbb{B}^*$ é uma base de $T_p^*\mathcal{N}$ tal que

$$<(dx_i)_p, \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\right]_p> = \delta_{ij} \tag{1.10}$$

onde $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$. Assim, qualquer covetor $v^* \in T_p^*\mathcal{N}$ pode ser escrito por

$$v^* = \sum_{i=1}^{n} b_i (dx_i)_p \tag{1.11.a}$$

e assim é fácil ver que

$$b_i = \langle v^*, \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \rangle \tag{1.11.b}$$

Em particular,

$$(d\lambda)_p = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (\lambda)(dx_i)_p = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial x_i}\right)_{\Phi(p)} (dx_i)_p$$

Dada uma aplicação diferenciável $F : \mathcal{N} \mapsto \mathcal{M}$ entre variedades diferenciáveis, podemos definir a aplicação linear dual da derivada F_* num ponto $p \in \mathcal{N}$, denotada por $F^* : T^*_{F(p)}\mathcal{M} \mapsto T^*_p\mathcal{N}$, denominada coderivada em p, pondo

$$\langle F^*(v^*), v \rangle = \langle v^*, F_*(v) \rangle \quad \text{para todo } v^* \in T^*_{F(p)}\mathcal{M} \text{ e } v \in T_p\mathcal{N} \tag{1.12}$$

Note que esta é a definição usual de aplicação dual. Portanto, em coordenadas locais, a matriz F^* em bases $\{(dx_1)_p, \ldots, (dx_n)_p\}$ e $\{(dy_1)_{F(p)}, \ldots, (dy_m)_{F(p)}\}$ respectivamente de $T^*_p\mathcal{N}$ e $T^*_{F(p)}\mathcal{M}$ é a transposta da matriz de F_* nas bases duais correspondentes $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right\}$ e $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{F(p)}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_{F(p)}\right\}$ de $T_p\mathcal{N}$ e $T_p\mathcal{M}$, respectivamente .

É importante ressaltar (1.12) implica em $d(\lambda \circ \psi)(p) = \psi^* d\lambda(\psi(p))$ para toda aplicação diferenciável $\psi : \mathcal{N} \mapsto \mathcal{M}$ e toda função $\lambda \in C^\infty(\psi(p))$.

1.6. Campos de Vetores tangentes em Variedades

Um campo de vetores f em uma variedadade diferenciável $\mathcal{N}$ é uma aplicação que associa a cada ponto p de $\mathcal{N}$ um vetor tangente f(p) de $T_p\mathcal{N}$. (Esta definição é simples mas possui desvantagens para definirmos campos diferenciáveis de uma forma mais intrínseca. Uma forma mais elegante seria usar a estrutura de variedade do fibrado tangente $\mathcal{B}=\bigcup_{p\in\mathcal{N}} T_p\mathcal{N}$ e definir um campo como uma seção do fibrado, veja [1]).

De forma análoga, campo covetorial ω em $\mathcal{N}$ é uma aplicação que associa a cada $p\in\mathcal{N}$ um covetor $\omega(p)\in T_p^*\mathcal{N}$.

Um campo vetorial diferenciável f é tal que, para todo $p\in\mathcal{N}$ existe uma carta $(U,\Phi=(x_1,\ldots,x_n))$ de p e funções C^∞ f_i $(i=1,\ldots,n)$, tais que para todo $q\in U$ tem-se:

$$f(q)=\sum_{i=1}^{n} f_i(q)\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\right]_q$$

Analogamente, um campo covetorial diferenciável ω é tal que, para todo $p\in\mathcal{N}$ existe uma carta $(U,\Phi=(x_1,\ldots,x_n))$ de p e funções C^∞ w_i $(i=1,\ldots,n)$, tais que para todo $q\in U$ tem-se:

$$\omega(q)=\sum_{i=1}^{n} \omega_i(q)\left[dx_i\right]_q$$

Os campos diferenciáveis em U que associam a cada $p\in U$ o vetor tangente $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\right]_p$ serão denotados por $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Analogamente, podemos definir os campos covetoriais dx_i. Um campo covetor $\omega=d\lambda$ é denominado campo covetor exato.

Se $(V,\psi=(y_1,\ldots,y_n)$ é outra carta de p, verifica-se facilmente que em $U\cap V$ temos

$$f(q)=\sum_{i=1}^{n} f_i'(q)\left[\frac{\partial}{\partial y_i}\right]_q$$

onde

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_n \end{bmatrix}$$

Assim a noção de campo diferenciável é independente do sistema de coordenadas escolhido. Mais ainda, uma mudança de coordenadas locais induz uma mudança de coordenadas locais na descrição dos campos. Um resultado análogo pode ser verificado para os campos covetoriais diferenciáveis. O conjunto dos campos diferenciáveis de uma variedade será denotado por $V(\mathcal{N})$ e o conjunto de de campos covetores diferenciáveis será denotado por $V^*(\mathcal{N})$. Note que os conjuntos $V(\mathcal{N})$ e $V^*(\mathcal{N})$ possuem estrutura de espaço vetorial sobre o corpo real e de módulo sobre o anel das funções diferenciáveis.

Agora seja $\sigma:(a,b)\mapsto\mathcal{N}$ uma aplicação diferenciável. Note que $\sigma_*\left(\frac{d}{dt}\right)_t$ é uma aplicação que associa a cada $t\in(a,b)$ um vetor tangente pertencente a $T_{\sigma(t)}\mathcal{N}$. Assim, se denotarmos $\dot{\sigma}(t)=\sigma_*\left(\frac{d}{dt}\right)_t$, segue-se que a equação

$$\dot{\sigma}(t)=f(\sigma(t)) \tag{1.13}$$

possui sentido bem definido. Se (5.13) é obedecida, dizemos que σ é uma curva integral do campo f. Note que em coordenadas locais $(U,\Phi=(x_1,\ldots,x_n))$ de $\sigma(t)$ podemos escrever

$$\dot{\sigma}(t)=\sigma_*\left(\frac{d}{dt}\right)_t=\sum_{i=1}^{n}\dot{s}_i(t)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\sigma(t)}$$

$$\dot{s}_i = \sigma_*\left(\frac{d}{dt}\right)_t(x_i)$$

e ainda

$$f(\sigma(t)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\sigma(t))\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\sigma(t)}$$

Assim, se $s(t) = \Phi \circ \sigma(t)$, a equação (1.13) é localmente equivalente à eq. diferencial ordinária no aberto $\Phi(U) \in \mathbb{R}^n$, dada por :

$$\dot{s}_1 = f_1(\Phi^{-1} \circ s(t))$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{s}_n = f_n(\Phi^{-1} \circ s(t))$$

Isto dá sentido à noção de eq. diferencial em variedades diferenciáveis. Aplicando a teoria de equações diferenciais ordinárias juntamente com as propriedadades de variedades diferenciáveis podemos estudar para eq. diferenciais em variedades, a existência e unicidade de soluções maximais, fluxos, completude, etc. (veja [3] ou pag. 427-429 de Isidori [19]).

Se f é um campo diferenciável , $p \in \mathcal{N}$ e $\lambda \in C^\infty(p)$, a derivada de Lie de λ ao longo de f em p é denotada por $L_f\,\lambda(p)$ e definida por :

$$L_f\,\lambda(p) = \langle d\lambda, f(p)\rangle = f(p)(\lambda) \tag{1.14}$$

Em coordenadas $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ teremos $\hat{\lambda} = \lambda \circ \psi^{-1}$ e $f(p) = \sum_{i=1}^{n} f_i(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$

$$L_f\lambda(p)=\begin{bmatrix}\frac{\partial\hat{\lambda}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\hat{\lambda}}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(p)\\ \vdots \\ f_n(p\end{bmatrix}$$

Assim, $L_f\lambda \in C^\infty$. Logo faz sentido definirmos derivadas de Lie iteradas do tipo $L_f^k\lambda$, se definirmos indutivamente $L_f^0\lambda=\lambda$ e $L_f^k\lambda=L_f(L_f^{k-1}\lambda)$ ou ainda derivadas de Lie do tipo $L_gL_f\lambda$, $L_fL_gL_f\lambda$ etc.

Sejam f, g campos diferenciáveis. Define-se um novo campo diferenciável, denominado conchête de Lie e denotado por [f,g], pondo para todo $\lambda \in C^\infty(p)$:

$$L_{[f,g]}\lambda(p)=[f,g](p)(\lambda)=L_fL_g\lambda(p)-L_gL_f\lambda(p)$$

Verifica-se que a expressão de [f,g] em coordenadas locais é,

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1\\ \vdots \\ f_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_1\\ \vdots \\ g_n\end{bmatrix}=\frac{\partial g}{\partial x}f-\frac{\partial f}{\partial x}g$$

Proposição 1.19: *Sejam* f_1, f_2, f_3 *campos diferenciáveis e* α_1, α_2 *constantes reais. Então:*

(i) $[f_1,f_2]=-[f_2,f_1]$

(ii) $[\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2, f_3]=\alpha_1[f_1,f_3]+\alpha_2[f_2,f_3]$

(iii) $[f_1,[f_2,f_3]]+[f_2,[f_3,f_1]]+[f_3,[f_1,f_2]]=0$ (*identidade de Jacobi*)

Como $V(\mathcal{N})$ é um espaço vetorial real munido de uma operação $[\cdot,\cdot]: V(\mathcal{N})\times V(\mathcal{N})\mapsto V(\mathcal{N})$ com as propriedades (i) , (ii) e (iii) acima, $V(\mathcal{N})$ é dito ser uma álgebra de Lie.

Denota-se $[f,g]$ por $ad_f g$ ou ainda $L_f g$, sendo que a última notação é lida como sendo a derivada de Lie de g ao longo de f. Tais notações facilitam a representação de colchêtes iterativos definidos indutivamente por :

$$L_f^0 g = g$$

$$L_f^k g = L_f(L_f^{k-1} g)$$

Pode-se definir ainda a derivada de Lie $L_f \omega$ de um campo covetor ω ao longo de um campo f, como sendo o novo campo covetor tal que, se g é um campo qualquer de $V(\mathcal{N})$, então

$$<L_f\omega, g> = L_f <\omega, g> - <\omega, L_f g> \tag{1.15}$$

Se ω é exata, isto é, se $\omega = d\lambda$, então

$$L_f\omega = L_f d\lambda = d\, L_f\lambda \tag{1.16}$$

Note que o operador "derivada de Lie ao longo de um campo f", denotado por L_f, possui três sentidos distintos

(i) Como um operador entre funções $L_f : C^\infty(p) \mapsto C^\infty(p)$. Exemplo :

$\lambda \in C^\infty(p)$, então $\gamma = L_f\lambda$ é tal que $\gamma \in C^\infty(p)$.

(ii) Como um operador entre campos vetoriais $L_f : V(\mathcal{N}) \mapsto V(\mathcal{N})$. Exemplo :

$g \in V(\mathcal{N})$, então $\theta = L_f g$ é tal que $\theta \in V(\mathcal{N})$.

(iii) Como um operador entre campos covetoriais $L_f : V^*(\mathcal{N}) \mapsto V^*(\mathcal{N})$. Exemplo :

$\omega \in V^*(\mathcal{N})$, então $\nu = L_f \omega$ é tal que $\nu \in V^*(\mathcal{N})$.

Podemos reunir os aspectos computacionais que envolvem a derivada de Lie de tais objetos numa proposição :

Proposição 1.20: *Seja* $\lambda, \delta, \gamma \in C^{\infty}(p)$, $f, g \in V(\mathcal{N})$ *e* $\omega \in V^{*}(\mathcal{N})$. *Então* :

(*i*) $L_{\delta f}\lambda\gamma = \delta(\gamma L_f\lambda + \gamma L_f\gamma)$

(*ii*) $[\lambda f, \gamma g] = \lambda\gamma[f,g] + \lambda(L_f\gamma)g - \gamma(L_f\lambda)f$

(*iii*) $L_f g(\lambda) = L_{[f,g]}\lambda = L_f L_g\lambda - L_g L_f\lambda$

(*iv*) $L_{\lambda f}\gamma\omega = \lambda\gamma(L_f\omega) + \gamma<\omega, f> d\lambda + \lambda(L_f\gamma)\omega$

(*v*) $L_f d\lambda = dL_f\lambda$

(*vi*) $L_f<\omega, g> = <L_f\omega, g> + <\omega, L_f g>$

1.7. Distribições e Codistribuições Diferenciáveis

Uma distribuição Δ em uma variedade diferenciável $\mathcal{N}$ é uma aplicação que, a cada ponto p de uma variedade $\mathcal{N}$, associa um subespaço do espaço tangente $T_p\mathcal{N}$. (Esta definição é simples mas peca no que tange à diferenciabilidade. Outras definições mais geométricas podem ser encontradas considerando seções das Grassmanianas). Um ponto p é dito ponto regular de Δ se existir uma vizinhança U de p tal que para todo $q \in U$ tenhamos $d(\Delta(q)) = d(\Delta(p))$. Uma distribuição Δ é dita ser não singular se $d(\Delta(p))$ é constante e igual a r para todo $p \in \mathcal{N}$. Uma distribuição é dita ser diferenciável (analítica) se para todo $p \in \mathcal{N}$ existirem uma vizinhança U de p e uma família $\mathbb{F} = \{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de campos diferenciáveis (analíticos) em U tais que, para todo $q \in U$ tenhamos $\Delta(q) = \mathrm{span}\{f_\lambda(q) : \lambda \in \Lambda\}$.

Proposição 1.21: *Se* Δ *é diferenciável (analítica) e não-singular e* $d(\Delta) = r$, *então para todo* $p \in \mathcal{N}$ *exitem uma vizinhança U de p e uma família*

$\{f_1,\dots,f_r\}$ *de campos diferenciáveis (analíticos) em* U *tais que, para todo* $q\in U$ *tenhamos* $\Delta(q)=span\{f_1(q),\dots,f_r(q)\}$. *Denota-se* $\Delta=sp\{f_1,\dots,f_r\}$ *em* U, *onde "sp" é considerado o "span" ponto a ponto dentro do aberto* U.

Dadas duas distribuições Δ_1 e Δ_2 em uma variedade diferenciável $\mathcal{N}$, dizemos que $\Delta_1\subset\Delta_2$ se $\Delta_1(q)\subset\Delta_2(q)$ para todo $q\in\mathcal{N}$.

Podemos definir as distribuições soma $\Delta_1+\Delta_2$ e intersecção $\Delta_1\cap\Delta_2$, pondo :

$$(\Delta_1+\Delta_2)(p)=\Delta_1(p)+\Delta_2(p)$$

$$(\Delta_1\cap\Delta_2)(p)=\Delta_1(p)\cap\Delta_2(p)$$

onde a soma e a intersecção do lado direito das equações anteriores deve ser entendida como soma e intersecção de subespaços de $T_p\mathcal{N}$. A soma de duas distribuições diferenciáveis é claramente uma distribuição diferenciável. A intersecção de duas distribuições diferenciáveis nem sempre é diferenciável (vide Isidori [19], pag. 16). Teremos os seguintes resultados úteis :

Proposição 1.22: *Sejam* Δ,Δ_1 *e* Δ_2 *distribuiçõe diferenciáveis (analíticas) :*

(i) O conjunto dos pontos regulares de Δ *é aberto e denso em* $\mathcal{N}$.

(ii) Suponha que Δ_1 *é não singular,* $\Delta_1(q)\subset\Delta_2(q)$ *para todo ponto* q *de um subconjunto denso* $D\subset\mathcal{N}$. *Então* $\Delta_1\subset\Delta_2$.

(iii) Suponha que Δ_1 *é não singular,* $\Delta_1\subset\Delta_2$ *e* $\Delta_1(q)=\Delta_2(q)$ *para todo ponto* q *de um subconjunto denso* $D\subset\mathcal{N}$. *Então* $\Delta_1=\Delta_2$.

(iv) Seja p *um ponto regular de* Δ_1, Δ_2 *e* $\Delta_1\cap\Delta_2$. *Então existe uma vizinhança aberta* U *de* p *tal que a restrição de* $\Delta_1\cap\Delta_2$ *a* U *é diferenciável (analítica).*

A afirmação (iv) da última proposição nos diz que, em torno de pontos regulares, a intersecção de distribuições diferenciáveis é diferenciável.

Seja $\theta\in V(\mathcal{N})$ um campo diferenciável e seja Δ uma distribuição em $\mathcal{N}$. Dizemos que $\theta\in\Delta$ se $\theta(p)\in\Delta(p)$ para todo $p\in\mathcal{N}$. Dizemos neste caso que "θ é um

campo de Δ".

O objeto dual de uma distribuição, denominado codistribuição em uma variedade $\mathcal{N}$, é uma aplicação Ω que associa a cada ponto p de $\mathcal{N}$, um subespaço de $T_p^*\mathcal{N}$. Uma codistribuição Ω é dita diferenciável quando, para todo ponto $p \in \mathcal{N}$ existirem uma vizinhança aberta U de p e uma família $\mathcal{F}=\{\omega_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de campos covetoriais diferenciáveis tais que, para todo $q \in U$, tenhamos $\Omega(q)=\{\omega_\lambda(q) : \lambda \in \Lambda\}$. Em U denota-se $\Omega = sp\{\omega_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Resultados análogos aos verificados para distribuições são evidentemente válidos. Por exemplo :

Proposição 1.23: *Se Ω é diferenciável (analítica) e não-singular e $d(\Omega)=r$, então para todo $p \in \mathcal{N}$ exitem uma vizinhança U de p e uma família $\{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$ de campos covetores diferenciáveis (analíticos) em U tais que, para todo $q \in U$ tenhamos $\Omega(q) = span\{\omega_1(q), \ldots, \omega_r(q)\}$.*

A cada distribuição Δ em $\mathcal{N}$ podemos associar uma codistribuição $\Delta^\perp$ (leia-se, *anulador de* Δ) definida por :

$$\Delta^\perp(p) = \{\omega \in T_p^*\mathcal{N} \ : \ <\omega, \theta> = 0 \text{ para todo } \theta \in \Delta(p)\}$$

Por outro lado, associamos a cada codistribuição Ω de $\mathcal{N}$ uma distribuição $\Omega^\perp$, denominada anulador de Ω, e definida por

$$\Omega^\perp(p) = \{\theta \in T_p\mathcal{N} \ : \ <\omega, \theta> = 0 \text{ para todo } \omega \in \Omega(p)\}$$

Note que podemos fazer as identificações $(\Delta^\perp)^\perp = \Delta$ e $(\Omega^\perp)^\perp = \Omega$. Segue-se que as propriedades usuais de dualidade em álgebra linear são válidas para distribuições e codistribuições. Por exemplo

$$(\Delta_1 + \Delta_2)^\perp = \Delta_1^\perp \cap \Delta_2^\perp$$

$$(\Delta_1 \cap \Delta_2)^\perp = \Delta_1^\perp + \Delta_2^\perp$$

$$(\Omega_1+\Omega_2)^{\perp}=\Omega_1^{\perp}\cap\Omega_2^{\perp}$$
$$(\Omega_1\cap\Omega_2)^{\perp}=\Omega_1^{\perp}+\Omega_2^{\perp}$$

Proposição 1.24: *Seja* Δ *uma distribuição não singular e diferenciável (analítica). Então* $\Delta^{\perp}$ *é uma codistribuição diferenciável (analítica).*

Proposição 1.25: *Seja* Ω *uma codistribuição não singular e diferenciável (analítica). Então* $\Omega^{\perp}$ *é uma distribuição diferenciável (analítica).*

Uma distribuição diferenciável Δ é dita ser involutiva se para todo par de campos τ_1 e τ_2 de Δ tenhamos $[\tau_1,\tau_2]\in\Delta$. Dada uma distribuição diferenciável Δ e não involutiva, existe sempre uma distribuição diferenciável e involutiva $\bar{\Delta}$, denominada fecho involutivo de Δ, contendo Δ e contida em qualquer outra distribuição involutiva que contenha Δ.

Seja Δ uma distribuição diferenciável em $\mathcal{N}$. Seja $\mathcal{P}\subset\mathcal{N}$ uma variedade imersa em $\mathcal{N}$. Para cada ponto $p\in\mathcal{P}$, identifique $T_p\mathcal{P}$ com um subespaço de $T_p\mathcal{N}$ (vide eq. (1.8)). Dizemos que $\mathcal{P}$ é uma *variedade integral* de Δ passando por $q\in\mathcal{N}$ se $q\in\mathcal{P}$ e $T_p\mathcal{P}=\Delta(p)$ para todo $p\in\mathcal{P}$. Uma distribuição Δ é dita ser integrável se para todo Se $q\in\mathcal{N}$ existir uma variedade integral que passa por q. O teorema a seguir caracteriza as distribuições não-singulares integráveis :

Teorema 1.26 *(de Frobënius local) : Seja* Δ *uma distribuição não singular em* $\mathcal{N}$. *Então* Δ *é integrável se e só se ela for uma distribuição involutiva.*

Observação 1.27: *Se* Δ *é não singular e involutiva com* $d(\Delta)=r$, *se e só se, para todo ponto* $p\in\mathcal{N}$ *existe uma carta local* $(U,\psi=(x_1,\ldots,x_r,x_{r+1},\ldots,x_n))$ *tal que, restrita a* U,

$$\Delta = sp\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r}\right\}$$

Em particular uma distribuição não singular de dimensão r é involutiva se só se $\Delta^{\perp} = sp\{dx_{r+1}, \ldots, dx_n\}$ *localmente, isto é,* $\Delta^{\perp}$ *é localmente gerada por* $n-r$ *campos covetores exatos. Ademais, para todo ponto* $q = \psi^{-1}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r, \overline{x}_{r+1}, \ldots, \overline{x}_n) \in U$, *a variedade integral de* Δ *que passa por* q *é a "folha" r-dimensional dos pontos de* U *da forma* $\psi^{-1}(x_1, \ldots, x_r, \overline{x}_r, \ldots, \overline{x}_n)$. *Uma distribuição integrável* Δ *induz uma folheação, isto é, uma partição de* $\mathcal{N}$ *em folhas disjuntas (variedades integrais).*

Seja Δ uma distribução diferenciável em $\mathcal{N}$ e seja f um campo de $V(\mathcal{N})$. Denotamos por $[f, \Delta]$ ou ainda $L_f \Delta$ a distribuição diferenciável definida por :

$$[f, \Delta] = sp\{[f, \tau] : \tau \in \Delta\}$$

Dizemos que Δ *é invariante por* f *se* $[f, \Delta] \subset \Delta$. A noção de invariância pode ser caracterizada com auxílio do teorema de Frobënius, fornecendo a proposição seguinte.

Proposição 1.28: *Seja* Δ *uma distribuição não singular e involutiva com* $d(\Delta) = r$ *e seja* $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n))$ *um sistema de coordenadas local tal que* $\Delta = sp\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r}\right\}$. *Então* Δ *é invariante por* f *se e só se, nas coordenadas* $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ *tivermos*

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_r(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) \\ f_{r+1}(x_{r+1}, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_{r+1}, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

Agora considere Ω uma codistribuição diferenciável. Definimos a codistribuição diferenciável $L_f\Omega$ por

$$L_f\Omega = \mathrm{sp}\{L_f\omega : \omega \in \Omega\}$$

Dizemos que Ω é invariante por f se $L_f\,\Omega \subset \Omega$. Para uma distribuição Δ não-singular, a noção de invariância de uma distribuição Δ é equivalente à noção de invariância da codistribuição $\Delta^{\perp}$. De fato, seja Δ uma distribuição diferenciável tal que $[f,\Delta] \subset \Delta$ e seja $\Omega = \Delta^{\perp}$. Assim, de (5.15) podemos escrever para todo $\tau \in \Delta$ e todo $\omega \in \Omega$

$$<L_f\omega, \tau> = L_f <\omega, \tau> - <\omega, [f, \tau]>$$

mas como $[f,\tau] \in \Delta$, segue-se que $L_f\omega \in \Omega$. Por outro lado, se supusermos $L_f\,\omega \in \Omega$ segue-se que $[f,\tau] \in \Delta = \Omega^{\perp}$. Em outras palavras

$$L_f\Omega \subset \Omega \;\Leftrightarrow\; [f,\Delta] \subset \Delta \;,\; \Omega = \Delta^{\perp} \tag{1.17}$$

Seja $\mathcal{N} = \mathbb{R}^n$ com suas coordenadas canônicas. Note que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ podemos associar canonicamente $T_x\mathbb{R}^n$ com o próprio $\mathbb{R}^n$. Seja $\mathcal{V}$ um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e seja Δ a distribuição tal que $\Delta(p) = \mathcal{V}$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$ (com a devida associação). Seja $f(x) = Ax$ onde A é uma matriz (n,n). Então é fácil verificar que $[f,\Delta] \subset \Delta$ se e só se $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$. Em outras palavras, a noção de invariância para campos lineares coincide com a definição de invariância de subespaços.

1.8 Funções, Distribuições e Codistribuições Analíticas em Variedades Conexas

Seja $\mathcal{N}$ uma variedade analítica conexa de dimensão n. Então podemos definir objetos tais como funções, distribuições e codistribuições analíticas em $\mathcal{N}$. A analiticidade vai nos garantir que tais objetos gozem de propriedades bastante úteis, tais como dimensões genéricas de matrizes de funções analíticas, de codistribuições e

de distribuições. Em outras palavras, tais objetos terão pôsto (dimensão constante) em uma subvariedade aberta e densa em $\mathcal{N}$ cujo complemento é bastante "magro". Um resultado fundamental é o *princípio da extensão analítica* :

Teorema 1.29: (*Princípio da Extensão Analítica*) *Seja* $\mathcal{N}$ *uma variedade analítica conexa de dimensão* n *e sejam* $\alpha:\mathcal{N}\mapsto\mathbb{R}$ *e* $\beta:\mathcal{N}\mapsto\mathbb{R}$ *duas funções analíticas tais que* $\alpha(x)=\beta(x)$ *para todo* x *de um aberto não vazio* $G\subset\mathcal{N}$. *Então* $\alpha(x)=\beta(x)$ *para todo* $x\in\mathcal{N}$.

Prova : Tal resultado é válido quando $\mathcal{N}$ é um aberto conexo de um espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ (vide Dieudonné[8], cap.9 , (9.4.2)). Assim, seja $F=\{x\in\mathcal{N}:\ \alpha(x)=\beta(x)\}$ e seja V o interior de F. Por definição, temos V aberto contendo G. Mostraremos que V é fechado e portanto, como $\mathcal{N}$ é conexa, segue-se que $V=\mathcal{N}$. De fato, seja q um ponto aderente de V e seja (U,ϕ) uma carta de q. Assim, existe uma sequência x_k de pontos de V que converge para q. Logo existe k suficientemente grande tal que $x_k\in U$. Portanto, como $x_k\in V$ e V é aberto, existe um aberto Q que contém x_k e $\alpha|Q=\beta|Q$. Seja $P=Q\cap U$. Logo, $\alpha\circ\phi^{-1}|\phi(P)=\ \beta\circ\phi^{-1}|\phi(P)$ e assim $\alpha\circ\phi^{-1}|\phi(U)=\beta\circ\phi^{-1}|\phi(U)$ pelo resultado acima citado de [8] . Assim, $\alpha(q)=\beta(q)$ e portanto $q\in V$. Assim todo ponto aderente a V pertence a V e portanto tal conjunto é fechado. □

A seguir apresentamos as definição de conjunto globalmente analítico e do corpo de funções meromórficas.

Definição 1.30: *Um subconjunto* ***globalmente analítico*** $\Gamma_\alpha\subset\mathcal{N}$ *é um subconjunto da forma*

$$\Gamma_\alpha=\{x\in\mathcal{N}\ :\ \alpha(x)=0,\ com\ \alpha:\mathcal{N}\mapsto\mathbb{R}\ analítica\}$$

É fácil mostrar que $\Gamma_\alpha \cup \Gamma_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}$ e $\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta = \Gamma_{\alpha^2+\beta^2}$ e assim a classe de subconjuntos globalmente analíticos é fechada com relação a um número finito de operações de união e intersecção.

Definição 1.31 : *O conjunto* $\mathcal{K}$ *das funções meromórficas de* $\mathcal{N}$ *é o conjunto*

$$\mathcal{K} = \left\{ \kappa \ : \ \kappa = \frac{\alpha}{\beta} \ \textit{com} \ \alpha : \mathcal{N} \mapsto \mathbb{R} \ \textit{e} \ \beta : \mathcal{N} \mapsto \mathbb{R} \ \textit{analíticas} \right\}$$

Uma "função" meromórfica é um objeto abstrato. A palavra "função" é um pouco abusiva, já que não especificamos o seu domínio. Note que uma função meromórfica $\kappa = \alpha/\beta$ não está definido necessariamente em todo $\mathcal{N}$, já que β pode se anular em um subconjunto globalmente analítico Γ_β. Logo κ fica bem definida e analítica a menos de um subconjunto globalmente analítico. Como a soma e o produto de funções analíticas é também uma função analítica, o conjunto $\mathcal{K}$ possui estrutura formal de corpo com as operações de soma e multiplicação definidas por :

$$\alpha_1/\beta_1 + \alpha_2/\beta_2 = (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)/(\beta_1\beta_2)$$

$$\alpha_1/\beta_1 \times \alpha_2/\beta_2 = (\alpha_1\alpha_2)/(\beta_1\beta_2)$$

Note que o elemento neutro da adição em $\mathcal{K}$ é $(\underline{0}/\underline{1})$, onde $\underline{1}$ é a função identicamente igual a 1 e o elemento neutro da multiplicação é $(\underline{1}/\underline{1})$. Defina :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha/\beta) = \frac{(\frac{\partial \alpha}{\partial x_i})\beta - \alpha(\frac{\partial \beta}{\partial x_i})}{\beta^2}$$

$$L_T(\alpha/\beta) = \frac{(L_T\alpha)\beta - \alpha(L_T\beta)}{\beta^2}$$

e como derivadas parciais e derivadas de Lie de funções analíticas são funções analíticas, segue-se que tais derivadas de funções meromórficas são também meromórficas.

Proposição 1.32 : *Seja* $\alpha : \mathcal{N} \mapsto \mathbb{R}$ *uma função analítica que não seja identicamente nula. Então* Γ_α *é um conjunto fechado de interior vazio (em outras palavras, seu complementar é aberto e denso).*

Prova : Γ_α é fechado porque é a imagem inversa do fechado $\{0\}$ por uma função contínua. Possui interior vazio porque, se α se anulasse em algum aberto, então α seria identicamente nula pelo princípio de extensão analítica. □

Do resultado acima vemos que uma função meromórfica é bem definida e analítica numa subvariedade aberta e densa. Note agora que $\mathcal{K}^n = \{(\nu_1, \ldots, \nu_n)' : \nu_i \in \mathcal{K}\}$ é um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $\mathcal{K}$ com as operações de soma e multiplicação por escalar definidas de maneira natural. Note que o pôsto de uma matriz de funções meromórficas quando calculado sobre o corpo $\mathcal{K}$ é a maior ordem de um determinante menor que não é uma função identicamente nula. Por exemplo, para a matriz de funções reais

$$\begin{bmatrix} 1/x & x-1 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{bmatrix}$$

notamos que seu pôsto calculado em $\mathcal{K}$ é igual a 3. Porém, seu pôsto quando calculado sobre $\mathbb{R}$ para x=2 e x=1 é igual a 2. Para $x \notin \{0,1,2\}$ o pôsto sobre $\mathbb{R}$ é igual a 3. Para x=0 a matriz não é bem definida.

A proposição a seguir mostra que podemos definir o pôsto genérico de uma matriz de funções analíticas (ou de funções meromórficos) :

Proposição 1.33 : *Seja* $M : \mathcal{N} \mapsto \mathbb{R}^{(n,m)}$ *que associa a cada* $x \in \mathcal{N}$ *uma matriz*

(n,m) $M(x)$ tal que $\{M(x)\}_{ij}=m_{ij}(x)$, onde cada $m_{ij}:\mathcal{N}\mapsto\mathbb{R}$ é analítica. Seja r o pôsto da matriz M de funções analíticas calculado sobre o corpo das funções meromórficas, denotado por $r=\mathfrak{D}(M)$ e denominado pôsto genérico de M. Então existe uma função analítica não identicamente nula $\beta:\mathcal{N}\mapsto\mathbb{R}$ tal que:

(i) *pôsto$[M(x)]=r$ para $x\notin\Gamma_\beta$*

(ii) *pôsto$[M(x)]<r$ para $x\in\Gamma_\beta$*

Prova: Note que os determinantes menores da matriz M são funções analíticas. Assim, pelo teorema de extensão analítica, cada det. menor é identicamente nulo ou não se anula num conjunto globalmente analítico. Portanto existe um número inteiro $r\leq\min\{n,m\}$ que representa a ordem máxima dos determinantes menores não identicamente nulos. Denote estes determinantes por $\beta_i(x)$, $i\in\mathbb{I}$ e seja $\beta=\sum_{i\in\mathbb{I}}\beta_i^2$. É imediato verificar que r coincide com o pôsto de M calculado sobre o corpo $\mathcal{K}$ e que (i) e (ii) são satisfeitos para Γ_β. □

Como o complementar de Γ_β é aberto e denso, é fácil mostrar que $\mathfrak{D}(M)$ é o pôsto máximo de M em qualquer aberto de $\mathcal{N}$. Note também que a proposição anterior vale para uma matriz de funções meromomórficas se nos restringirmos à subvariedade aberta e densa onde tais funções são analíticas. A idéia de conjunto globalmente analítico pode ser generalizada dando origem ao conceito de conjunto analítico, como veremos a seguir.

Definição 1.34 : *Um subconjunto $\Gamma\subset\mathcal{N}$ é dito ser* ***analítico*** *em $\overline{x}\in\mathcal{N}$ se existir um aberto $U_{\overline{x}}\subset\mathcal{N}$, com $\overline{x}\in U_{\overline{x}}$, e uma aplicação analítica $\alpha_{\overline{x}}:U_{\overline{x}}\mapsto\mathbb{R}$ tal que $\Gamma\cap U_{\overline{x}}=\Gamma_{\overline{x}}$, onde*

$$\Gamma_{\overline{x}}=\{x\in U_{\overline{x}}\ :\ \alpha_{\overline{x}}(x)=0\}$$

Um subconjunto $\Gamma\subset\mathcal{N}$ é dito ser analítico se ele for analítico para todo

$\overline{x} \in \mathcal{N}$. *Um subconjunto analítico é dito ser* ***regularmente próprio*** *se para todo ponto* $\overline{x}$, *a função analítica* $\alpha_{\overline{x}}$ *não for identicamente nula.*

Não é difícil mostrar que a classe dos conjuntos analíticos é fechada com relação a um número finito de operações de união e intersecção. A proposição seguinte caracteriza os conjuntos analíticos regularmente próprios.

Proposição 1.35 : *Um subconjunto analítico é regularmente próprio se e só se ele for um conjunto fechado de interior vazio, isto é, seu complementar é uma subvariedade aberta e densa.*

Prova : Suponha inicialmente Γ regularmente próprio. Note que $\Gamma = \bigcup_{\overline{x} \in \mathcal{N}} \Gamma \cap U_{\overline{x}}$. Logo :

$$\mathcal{N} - \Gamma = \mathcal{N} - \bigcup_{\overline{x} \in \mathcal{N}} \Gamma \cap U_{\overline{x}} = \bigcup_{\overline{x} \in \mathcal{N}} (U_{\overline{x}} - \Gamma_{\overline{x}})$$

assim é imediato que $\mathcal{N} - \Gamma$ é aberto, pois $(U_{\overline{x}} - \Gamma_{\overline{x}})$ é aberto pela continuidade de cada $\alpha_{\overline{x}}$. Pelo princípio de extensão analítica e do fato de cada $\alpha_{\overline{x}}$ não ser identicamente nulo, segue-se que $(U_{\overline{x}} - \Gamma_{\overline{x}})$ é denso em $U_{\overline{x}}$ e portanto $\mathcal{N} - \Gamma$ é denso em $\mathcal{N}$.

Agora suponha que o complementar de Γ é aberto e denso em $\mathcal{N}$. Logo não podemos ter $\alpha_{\overline{x}}$ identicamente nula para nenhum $\overline{x}$, pois caso contrário Γ conteria o aberto $U_{\overline{x}}$. □

Mostraremos agora que uma distribuição (codistribuição) analítica possui dimensão constante r num conjunto aberto e denso cujo complementar é um conjunto analítico e dimensão menor ou igual a r neste conjunto analítico. Tal dimensão será denominada dimensão genérica da dist. (codist.).

Teorema 1.36 : *Seja* Δ *uma distribuição (codistribuição) analítica de* $\mathcal{N}$. *Então existe um subconjunto analítico regularmente próprio* $\Gamma \subset \mathcal{N}$ *e um inteiro* r *denominado dimensão genérica de* Δ *e denotado por* $r = \mathfrak{D}(\Delta)$, *tais que*

$$(i) \quad d(\Delta(x)) = r \ , \ x \notin \Gamma$$

$$(ii) \quad d(\Delta(x)) < r \ , \ x \in \Gamma$$

Prova : Uma distribuição analítica é localmente finitamente gerada (vide Sussmanm[34]), isto é, para todo ponto $x \in \mathcal{N}$ existe uma vizinhança aberta U_x tal que, em U_x :

$$\Delta = \mathrm{sp}\{\delta_1, \ldots, \delta_p\}$$

onde $\{\delta_1, \ldots, \delta_s\}$ é um conjunto de campos analíticos de $\mathcal{N}$. Assim, existe um aberto $V_x \subset U_x$, com $x \in V_x$, e uma carta local (V_x, ψ_x). Nestas coordenadas podemos escrever :

$$\delta_j(x) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \ , \quad x \in V_x \ , \ j = 1, \ldots, p$$

onde as funções $m_{ij}(x)$ são analíticas para $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, p$. Em particular a dimensão de $\Delta(x)$ é determinada pelo pôsto da matriz $M(x)$ tal que $\{M(x)\}_{ij} = m_{ij}(x)$. Pela proposição 1.33 aplicada nesta construção, vê-se que, para todo ponto $x \in \mathcal{N}$, existe um inteiro não negativo r_x, um aberto V_x e uma função analítica $\alpha_x : V_x \mapsto \mathbb{R}$ não identicamente nula tal que a dimensão de $d(\Delta) = r_x$ em $V_x - \Gamma_{\alpha_x}$ e $d(\Delta) < r_x$ em Γ_{α_x}, onde $\Gamma_{\alpha_x} = \{q \in V_x \ : \ \alpha_x(q) = 0\}$. Resta mostrar somente que r_x não depende de x. Como $\mathcal{N}$ é conexa, então $\mathcal{N}$ é conexa por caminhos. Assim, dados dois pontos x_0 e x_1 de $\mathcal{N}$ existe um caminho contínuo $\sigma : [0,1] \mapsto \mathcal{N}$ tal que $\sigma(0) = x_0$ e $\sigma(1) = x_1$. Defina o subconjunto $A \subset [0,1]$, pondo $A = \{t \in [0,1] : r_{\sigma(t)} = r_{x_1}\}$. Note que A é não vazio, e é aberto e fechado em [0,1] em virtude da propriedade anteriormente mostrada. Logo

$A=[0,1]$ e isto conclui a demonstração. □

Note que a prova foi feita para uma distribuição analítica. Argumentos similares podem ser usados para uma codistribuição analítica Ω.

A partir dos resultados anteriores vemos que, para uma (co)distribuição analítica em uma variedade analítica conexa, podemos definir a sua dimensão genérica $\mathfrak{D}(\Delta)$. Note que, da densidade de $\mathcal{N}-\Gamma$ em $\mathcal{N}$, *concluímos que* $\mathfrak{D}(\Delta)$ *é a dimensão máxima de* Δ *em qualquer aberto de* $\mathcal{N}$.

De posse desses resultados podemos definir o posto genérico de uma aplicação analítica entre variedades analíticas :

Corolário 1.37 : *Sejam* $\mathcal{N},\mathcal{M}$ *variedades analíticas de dimensão* n *e* m *respectivamente. Seja* $F:\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ *uma aplicação analítica. Então existe um subconjunto analítico regularmente próprio* $\Gamma\subset\mathcal{N}$ *e um inteiro* r *denominado posto genérico de* F *e denotado por* $r=\mathfrak{D}(F_*)$, *tais que*

(i) $posto(F_*(x))=r$, $x\notin\Gamma$

(ii) $posto(F_*(x))<r$, $x\in\Gamma$

Prova : Defina a codistribuição analítica em em $\mathcal{N}$ pondo

$$\Omega(x)=F^*(T^*_{F(x)}\mathcal{M})$$

Note que em cada ponto $x\in\mathcal{N}$ teremos $d(\Omega(x))=\text{posto}\ (F^*(x))=\text{posto}(F_*(x))$. Então o resultado desejado é consequência do teorema anterior aplicado a Ω. □

1.9. Algumas Notações Particulares

Ao longo desta tese utilizaremos algumas notações não Standards (Vide

Isidori[19]) que listaremos a seguir.

Se $\mathcal{N}$ é uma variedade diferenciável e $h:\mathcal{N}\mapsto\mathbb{R}^l$ é uma aplicação diferenciável, denotaremos por $sp\{dh\}$ a codistribuição $sp\{dh_1,\ldots,dh_l\}$. A distribuição $sp\{dh\}^{\perp}$ será denotada por $ker\,dh$ ou ainda $ker\ h_*$. Se $(U,\psi=(x_1,\ldots,x_r,y_{r+1},\ldots,y_n))$ é um sistema de coordenadas locais então $\frac{\partial}{\partial x}$ denotará a linha de campos $(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_r})$. Donotaremos por $\frac{\partial h}{\partial x}$ ou $<dh,\frac{\partial}{\partial x}>$ a matriz (l,r) tal que $\left\{\frac{\partial h}{\partial x}\right\}_{ij}=\frac{\partial h_i}{\partial x_j}=<dh_i,\frac{\partial h}{\partial x_j}>$. Se $f=(f_1,\ldots,f_r)'$ é um vetor de r funções diferenciáveis, então $\frac{\partial}{\partial x}f$ denotará o campo diferenciável dado por $\sum_{i=1}^{r} f_i\frac{\partial}{\partial x_i}$.

1.10. Notas e Refências

Uma introdução às variedades diferenciáveis pode ser encontrada em Boothby[3] ou Warner[36]. Uma abordagem bastante diferente no que diz respeito ao fibrado tangente pode ser encontrada em Abraham e Marsden[1]. O resumo apresentado neste capítulo se baseou fortemente nos apêndices e capítulos introdutórios de Isidori[19] e Nijmeijer e Van-der-Schaft[27]. A seção 1.8 contém fatos sobre variedades analíticas que são casos particulares de teorias mais gerais (vide [12] e [13]). No entanto a apresentação desta seção se fez necessária porque não foi encontrada uma referência que tenha explicitamente todos os resultados desejados.

Cap. 2. Sistemas Não-Lineares Afins

2.1. Introdução

Neste capítulo apresentaremos alguns fatos bem conhecidos de sistemas não lineares afins. O conceito de (f,g)-invariância será brevemente apresentado, bem como sua aplicação no Problema de Desacoplamento da Perturbação por Realimentação Regular (PDPRR). A Estrutura Algébrica no Infinito será também apresentada. Mostraremos que tal estrutura rege a solubilidade dos problemas de desacoplamento entrada-saída por realimentação dinâmica do estado e invertibilidade à direita e à esquerda do sistema. O conceito de pôsto será definido para um sistema e para uma realimentação dinâmica. A noção de realimentação dinâmica regular será estudada.

2.2. Sistemas não Lineares Afins

Um sistema não linear analítico afim (h,f,g,p) é um sistema dinâmico que evolui em uma variedade analítica de dimensão n, denotada por $\mathcal{N}$, sendo definido por:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \sum_{j=1}^{m} g_j(x(t))\, u_j(t) + \sum_{j=1}^{m_p} p_j(x(t))\, q_j(t) \quad , \quad t \geq t_0 \tag{2.1.a}$$

$$y_i = h_i(x(t)) \qquad i = 1 \, , \, \ldots \, , \, l \quad , \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.1.b}$$

onde f, $g_1, \ldots, g_m$, $p_1, \ldots, p_{m_p}$ são campos analíticos em $\mathcal{N}$ e $h = (h_1 \ldots h_l)'$ é um vetor de funções reais analíticas em $\mathcal{N}$ denominadas saídas do sistema. As funções $u_j : [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ são as *entradas* do sistema nas quais temos acesso direto para aplicação do valor que desejarmos. As funções $q_j : [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ são as *perturbações* no sistema, sendo desconhecidas e sem acesso. Geralmente a entrada $u(\cdot)$ é considerada contínua por partes e a perturbação $q(\cdot)$ é suficientemente regular (por exemplo L_1)

para que a solução x(t) de (2.1) seja bem definida.

Denote as "matrizes" de campos coluna $g=[g_1 \dots g_m]$ e $p=[p_1,\dots,p_{m_p}]$ e os vetores coluna respectivamente, de entradas $u=(u_1,\dots,u_m)'$ e de perturbações $q=(q_1,\dots,q_{m_p})'$, de maneira que a eq. (2.1.a) pode ser reescrita por :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + p(x)q \tag{2.1.c}$$

ao longo desta tese, denotaremos as distribuições analíticas, $sp\{p\}$ por P, e $sp\{g\}$ por G.

2.2. Realimentação Regular de Estado

Considere o sistema (2.1.c) juntamente com uma lei de controle da forma

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \tag{2.2}$$

onde $\alpha : U \mapsto \mathbb{R}^m$, $\beta : U \mapsto \mathbb{R}^{(m,m)}$ são analíticas em um aberto $U \subset \mathcal{N}$ e $v(\cdot)$ é a nova entrada externa, admitida na classe das funções contínuas por partes. Tal lei de controle será denominada *realimentação local de estado analítica em U*, ou por simplicidade *realimentação de estado*. Se a matriz β for não singular em U, isto é $\det(\beta(x)) \neq 0$ para todo $x \in U$, então a tal lei de controle é chamada de *realimentação de estado localmente regular e analítica em U*, ou simplesmente *realimentação regular de estado*. O sistema analítico, evoluindo em U, e dado por

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)u + p(x)q \tag{2.3.a}$$

$$y = h(x) \tag{2.3.b}$$

onde

$$\tilde{f} = f + g\alpha \tag{2.3.c}$$

$$\tilde{g} = g\beta \tag{2.3.d}$$

é denominado *sistema em malha fechada com a realimentação regular.*

2.3. Invariância, (f,g)-invariância e o Problema de Desacoplamento de Perturbações

O problema de desacoplamento da perturbação para sistemas lineares encontrou uma solução elegante através das noções de A-invariância e (A,B)-invariância. A generalização dessas noções deu origem aos conceitos de invariância e (f,g)-invariância de sistemas não lineares afins, definidos a seguir. Antes de apresentar tais conceitos, definiremos a noção de "*desacoplamento da perturbação*" e em seguida daremos o enunciado do problema em questão.

Definição 2.1 : *Para um sistema* (2.1.c), *denote a saída obtida a partir de uma condição inicial* $x_0 \in \mathcal{N}$, *uma entrada* $u(\cdot)$ *e uma perturbação* $q(\cdot)$ *por* $y(t, x_0, u(\cdot), q(\cdot))$. *Dizemos que há* ***desacoplamento da perturbação*** *ou simplesmente que a* ***perturbação não influencia a saída*** *se para todo* $x_0 \in \mathcal{N}$, *toda entrada* $u(\cdot)$ *e todo par de perturbações* $q_1(\cdot)$ *e* $q_2(\cdot)$, *tivermos* $y(t, x_0, u(\cdot), q_1(\cdot)) = y(t, x_0, u(\cdot), q_2(\cdot))$ *onde um deles for bem definido.*

Definição 2.2 : (*Problema de Desacoplamento da Perturbação por Realimentação Regular - PDPRR*) *É o problema de encontrarmos uma realimentação regular e analítica em uma vizinhança aberta* U *de* $x_0 \in \mathcal{N}$ *tal que, a saída do sistema em malha fechada* (2.3) *não seja influenciada pela perturbação* q.

Por definição, o PDPRR é um problema local. Obviamente se $U = \mathcal{N}$ teremos a

versão global do mesmo problema.

A definição a seguir introduz o conceito de invariância para sistemas não lineares afins.

Definição 2.3 : *Uma distribuição analítica* Δ *em* $\mathcal{N}$ *é dita ser invariante pelo sistema* (2.1) *se*

$$[f,\Delta]\subset\Delta \tag{2.4.a}$$

$$[g_j,\Delta]\subset\Delta \quad (j=1,\ldots,m) \tag{2.4.b}$$

Denote por $x(t,x_0,u(\cdot),q(\cdot))$ a solução do sistema (2.1) a partir de uma condição inicial x_0 em $t=t_0$, uma entrada $u(\cdot)$ e uma perturbação $q(\cdot)$ aplicadas. Se Δ é uma distribuição integrável, tal distribuição induz para todo ponto x de $\mathcal{N}$ uma subvariedade integral, denominada folha de Δ que passa por x. O conceito de invariância possui o seguinte significado geométrico para o sistema (2.1) :

Proposição 2.4 : *Seja o sistema* (2.1) *sem perturbações, isto é,* $q\equiv 0$. *Sejam* x_1 *e* x_2 *pontos de uma mesma folha induzida por* Δ. *Então, para* $t-t_0$ *suficientemente pequeno teremos que* $x(t,x_1,u(\cdot),0)$ *e* $x(t,x_0,u(\cdot),0)$ *são pertencentes à mesma folha de* Δ.

Uma realimentação de estado pode tornar invariante uma distribuição Δ que não era originalmente invariante gerando o conceito de (f,g)-invariância.

Definição 2.5 : *Uma distribuição* Δ *é* ***localmente (f,g)-invariante*** *ou simplesmente* ***(f,g)-invariante*** *se para todo* $x\in\mathcal{N}$, *existir uma realimentação* (2.1.*a-b*) *analítica e regular em um aberto* $U\subset\mathcal{N}$ *contendo* x *tal que* Δ *seja*

invariante pelo sistema em malha fechada, isto é

$$[\tilde{f},\Delta]\subset\Delta \tag{2.5.a}$$

$$[\tilde{g}_j,\Delta]\subset\Delta \quad (j=1,\ldots,m) \tag{2.5.b}$$

onde $\tilde{f}$ *e* $\tilde{g}=[\tilde{g}_1\ldots\tilde{g}_m]$ *são dados por* (2.3.c-d).

Note que as equações (2.5.a-b) fazem sentido apenas em U. No caso em que $U=\mathcal{N}$, dizemos que Δ é *globalmente* (f,g)*-invariante.*

O resultado a seguir, sob certas condições de regularidade, caracteriza geometricamente o conceito de (f,g)-invariância :

Teorema 2.6 : *Suponha que as distribuições* Δ, G *e* $\Delta\cap G$ *são não singulares e* Δ *é involutiva. Nestas condições, a distribuição* Δ *é* (f,g)*-invariante se e somente se*

$$[f,\Delta]\subset\Delta+G \tag{2.6.a}$$

$$[g_j,\Delta]\subset\Delta+G \quad (j=1,\ldots,m) \tag{2.6.b}$$

A classe $\mathcal{I}$(f,g,ker dh) das distribuições contidas em ker dh que satisfazem a (2.6.a-b) é não vazia (a distribuição identicamente nula pertence a esta classe), e fechada pelas operações de soma e fechamento involutivo. Assim, pode-se mostrar que

Proposição 2.7 : *A classe* $\mathcal{I}(f,g,\ker dh)$ *possui um elemento maximal involutivo* $\Delta^*(f,g,\ker dh)$, *que contém todos os elementos desta classe, e que denotaremos, quando o contexto o permitir, por* Δ^*.

A determinação de Δ^* pode recair num sistema de equações diferenciais parciais, dificultando em termos práticos, a solução de tal problema (vide [19] e [27]). No entanto, sob certas condições de regularidade, um algorítimo permite a computação de Δ^* :

Proposição 2.8 : (*Computação do elemento maximal de* $\mathfrak{I}(f,g,dh)$). *Calcule a sequência de distribuições analíticas* :

$$\Omega_0 = sp\{dh_1, \ldots, dh_t\} \tag{2.7.a}$$

$$\Omega_k = \Omega_{k-1} + L_f(\Omega_{k-1} \cap G^{\perp}) + \sum_{i=1}^{m} L_{g_i}(\Omega_{k-1} \cap G^{\perp}) \tag{2.7.b}$$

e suponha que G, Ω_k *e* $\Omega_k \cap G^{\perp}$ *são não singulares para* $k<n$. *Então, para algum* $k^* < n$, *teremos* $\Omega_{k^*} = \Omega_j$ *para* $j \geq k^*$ *e* $\Delta^* = \Omega_{k^*}^{\perp}$.

Nas mesmas condições de regularidade da proposição anterior, o algorítmo de Krener [22] permite computar Δ^* e ao mesmo tempo determinar a realimentação regular que torna Δ^* invariante pelo sistema em malha fechada correspondente. Na verdade, tal algorítimo computa em cada passo a eq. (2.7.b).

Algorítmo 2.9 : (*Krener* [22]) *Suponha que, para as eq.* (2.7), G, Ω_k *e* $\Omega_k \cap G^{\perp}$ *são não singulares para* $k<n$ *em torno de* x_0.

<u>*Passo 0 :*</u>

Suponha que $d(\Omega_0) = p_0$. *Após uma permutação adequada das saídas teremos* $\Omega_0 = sp\{dh_1, \ldots, dh_{p_0}\}$. *Defina* $\phi_0 = (h_1, \ldots, h_{p_0})'$ *de maneira que* $\Omega_0 = sp\{d\phi_0\}$ *em torno de* x_0.

<u>*Passo* $k+1$:</u>

Suponha que, após o passo k, os vetores de funções $\phi_0(x),\ldots,\phi_k(x)$ *foram definidos de maneira que* $\Omega_j = sp\{d\phi_j\}$ *para* $j=0,\ldots,k$. *Então calcule*

$$\dot{\phi}_k = <d\phi_k, f(x)+g(x)u> = A_{k+1}(x)+B_{k+1}(x)u \tag{2.8}$$

Como $\Omega_k \cap G^{\perp}$ *é não singular em torno de* x_0, *a matriz* B_{k+1} *será não singular em torno de* x_0, *com posto* r_{k+1}. *Após uma possível permutação nos elementos de* ϕ_k, *então podemos assumir que as primeiras* r_{k+1} *linhas de* B_{k+1} *são L.I. em torno de* x_0. *Assim, podemos escrever :*

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\phi}}_k \\ \dot{\hat{\phi}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{k+1}(x)+\tilde{B}_{k+1}(x)u \\ \hat{A}_{k+1}(x)+\hat{B}_{k+1}(x)u \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

onde $\tilde{B}_{k+1}$ *possui posto pleno de linha* r_{k+1} *em torno de* x_0. *Seja* $\tilde{C}_{k+1}(x)$ *uma inversa à direita de* $\tilde{B}_{k+1}$, *isto é,* $\tilde{B}_{k+1}\tilde{C}_{k+1} = I_{r_{k+1}}$ *em torno de* x_0 *e seja* $\bar{C}_{k+1}$ *uma matriz tal que* $\tilde{B}_{k+1}\bar{C}_{k+1}=0$, *isto é, as colunas de* $\bar{C}_k(x)$ *geram o subespaço Ker* $\tilde{B}_{k+1}(x)$. *Defina :*

$$\alpha_{k+1} = -\tilde{C}_{k+1}\tilde{A}_{k+1}$$

$$\beta_{k+1} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{k+1} & \bar{C}_{k+1} \end{bmatrix}$$

Verifica-se que β_{k+1} *é não singular em torno de* x_0. *Faça* $u=\alpha_{k+1}+\beta_{k+1}v$, *teremos de (2.9), que*

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\phi}}_k \\ \dot{\hat{\phi}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{A}_{k+1}+\hat{B}_{k+1}\tilde{C}_{k+1}\tilde{A}_{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{r_{k+1}} & 0 \\ \hat{B}_{k+1}\tilde{C}_{k+1} & 0 \end{bmatrix} v =$$

$$=\begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{k+1}(x) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} Ir_{k+1} & 0 \\ \tau_{k+1}(x) & 0 \end{bmatrix} v \tag{2.10}$$

Como cada linha de $\hat{B}_{k+1}$ *é LI com relação às linhas de* $\tilde{B}_{k+1}(x)$, *segue-se que* $\sigma_{k+1}(x)$ *e* $\tau_{k+1}(x)$ *são independentes da escolha de* $\tilde{C}_{k+1}$ *e* $\bar{C}_{k+1}$. *Mais ainda, pode-se mostrar que*

$$\Omega_{k+1}= span\{d\phi_k, d\sigma_{k+1}, d\tau_{k+1}\}$$

Como por hipótese Ω_{k+1} *é não singular em torno de* x_0, *podemos escolher funções apropriadas dos vetores de funções* $\sigma_{k+1}, d\tau_{k+1}$ *para formar um vetor de funções* $\bar{\phi}_{k+1}$ *de maneira que o conjunto de diferenciais* $\{d\phi_k, d\bar{\phi}_{k+1}\}$ *seja LI em torno de* x_0 *e tenhamos :*

$$\Omega_{k+1}= span\{d\phi_k, d\bar{\phi}_{k+1}\}$$

Finalmente, defina $\phi_{k+1}=(\phi_k', \bar{\phi}_{k+1}')'$.

Este algoritimo termina num passo $k^*<n$ *quando* $\Omega_{k^*}=\Omega_{k^*-1}$. *A realimentação* $(\alpha_{k^*}, \beta_{k^*})$ *é tal que a eq.* (2.5) *é obedecida numa vizinhança aberta U de* x_0. □

A observação seguinte caracteriza a invariância pela existência de um sistema de coordenadas no qual a estrutura do sistema se torna muito especial.

Observação 2.10 : *Suponha que* Δ *seja involutiva, invariante pelo sistema* (2.1) *e que*

$$\Delta \subset \ker dh \tag{2.11.a}$$

$$P \subset \Delta \tag{2.11.b}$$

Seja $x \in \mathcal{N}$ *um ponto regular de* Δ *com* $d[\Delta(x)]=\delta$. *Pelo teorema (local) de Frobenius, podemos tomar uma carta local* $(U, \phi=(x_1, \ldots, x_\delta, x_{\delta+1}, \ldots, x_n))$ *tal que* $d[\Delta(x)]=\delta$ *e* $\Delta(x)=\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_\delta}\Big|_x\right\}$ *para todo* $x \in U$. *Denote* $z_1=(x_1, \ldots, x_\delta)'$ *e* $z_2=(x_{\delta+1}, \ldots, x_n)'$. *Neste caso, verifica-se que* (2.4.*a-b*) *e* (2.11.*a-b*) *são equivalentes a termos, nestas coordenadas, o sistema* (2.1) *descrito por* :

$$\dot{z}_1 = f_1(z_1, z_2) + g_1(z_1, z_2)u + p_1(z_1, z_2)q \tag{2.12.a}$$

$$\dot{z}_2 = f_2(z_2) \quad + \quad g_2(z_2)u \tag{2.12.b}$$

$$y = h(z_2) \tag{2.12.c}$$

Vê-se de (2.12.a-b-c) que a perturbação q não influencia a saída y, quaisquer que sejam a condição inicial (z_1, z_2) e a entrada $u(\cdot)$ aplicada. Note também que, localmente falando, a distribuição Δ induz folheações onde cada folha é definida deixando-se z_2 constante e "variando-se" z_1. Geometricamente, as condições acima garantem que cada folha é mapeada por h em um mesmo valor de y e que $x(t, x_0, u(\cdot), q_1(\cdot))$ e $x(t, x_0, u(\cdot), q_2(\cdot))$ pertencem sempre a uma mesma folha para quaisquer par de perturbações $q_1(\cdot)$ e $q_2(\cdot)$. Mais ainda, podemos enunciar o seguinte resultado :

Teorema 2.11 : *Num sistema* (2.1), *a perturbação* $q(\cdot)$ *não influenciará a saída y se e só se existir uma distribuição invariante* Δ *obedecendo a* (2.11.*a-b*).

Baseado neste resultado, podemos provar o seguinte teorema :

Teorema 2.12 : *Suponha que* $\Delta^*, \Delta^* \cap G$ *e* G *são não singulares (em torno de* x_0*). Então o PDDRR é solúvel (em torno de* x_0*) se e somente se* $P \subset \Delta^*$.

Assim, para solucionar o problema PDDRR em torno de um ponto x_0 no qual nossas hipóteses de regularidade são satisfeitas, executa-se o algorítimo de Krener e verifica-se se $P \subset \Delta^*$. Em caso afirmativo, o algorítmo fornece a realimentação regular desejada num passo k^*. No caso em que P não está contida em Δ^*, o problema não possui solução.

2.4. O Problema de Desacoplamento Entrada-Saída Por Realimentação Regular de Estado (PDRRE)

Um problema frequente na síntese de sistemas de controle é o problema de desacoplamento entrada-saída, isto é, conseguir através de uma lei de controle adequada, que um vetor de saídas $y_1, \ldots, y_l$ seja controlado independentemente (ou não interativamente) por um conjunto de entradas externas $v_1, \ldots, v_l$. Em outras palavras, dizemos que um sistema é desacoplado entrada saída-quando cada entrada v_i só influenciar a saída y_j para $j=i$, sendo que a saída y_i deve ser "controlada" pela entrada u_i para $i=1, \ldots, l$. Podemos assim definir :

Definição 2.13 : (*Problema Local de Desacoplamento por Realimentação Regular de Estado PDRRE*) *É o problema de encontrarmos uma realimentação* (α, β) *regular e analítica numa vizinhança* U *de* x_0 *de maneira que o sistema em malha fechada* (2.3) *seja desacoplado entrada-saída.*

As condições necessárias e suficientes de solução de tal problema por realimentação regular de estado dependem essencialmente do pôsto de uma matriz, denominada matriz de desacoplamento, definida a seguir

Definição 2.14 : (*Matriz de Desacoplamento*) *Seja um sistema na forma* (2.1.). *Seja* U *uma vizinhança aberta de* x_0 *e suponha que para cada função saída* $y_i = h_i(x)$ $(i=1,\dots,l)$ *exista um inteiro* r_i *denominado grau relativo da saída* y_i *de maneira que*

(*i*) $L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0$ *para todo* k, $0 \leq k < r_i - 1$ *e todo* $x \in U$.

(*ii*) $\left[\; L_{g_1} L_f^{r_i - 1} h_i(x_0) \; \dots \; L_{g_m} L_f^{r_i - 1} h_i(x_0) \; \right] \neq [\, 0 \; \dots \; 0 \,]$

Então podemos definir em U *a matriz* $A(x)$ *com* l *linhas e* m *colunas, denominada matriz de desacoplamento, pondo* $\{A(x)\}_{ij} = \{L_{g_j} L_f^{r_i - 1} h_i(x)\}$.

Para a classe de sistemas afins onde as condições (i) e (ii) da definição anterior são satisfeitas, o teorema a seguir soluciona o PDRRE :

Teorema 2.15 : *Suponha que as condições* (*i*) *e* (*ii*) *da definição* 2.14 *são satisfeitas para uma viz. aberta* U *de um ponto* x_0. *Então o PDRRE é solúvel em uma vizinhança aberta* V *de* x_0 *se e só se* $A(x_0)$ *possuir pôsto igual ao número de saídas. Em caso afirmativo, a lei de controle* $u = \alpha(x) + \beta(x) v$, *dada por*

$$\alpha(x) = -A^+(x) b(x)$$

$$\beta(x) = A^+(x)$$

onde $b(x) = (\, L_f^{r_1} h_1(x), \; \dots \; , L_f^{r_l} h_l(x))'$ *e* $A^+(x)$ *é tal que* $A(x)A^+(x) = [\, I_l \;\; 0 \,]$, *fornece solução para o PDRRE numa viz. aberta* V *de* x_0.

Observação 2.16 : *Pode-se mostrar que, se* $A(x_0)$ *possui pôsto* l, *então as diferenciais:*

$$dh_1, dL_f h_1, \ldots, dL_f^{r_1-1} h_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$dh_l, dL_f h_l, \ldots, dL_f^{r_l-1} h_l$$

formam um conjunto L.I. numa vizinhança aberta de x_0. *Em particular, existe um sistema de coordenadas locais* $(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1})$ *tal que* $x_i = (h_i \;\; L_f h_i \ldots L_f^{r_i-1} h_i)'$, $(i=1,\ldots,l)$ *e* x_{l+1} *é um vetor de* $(n - \sum_{i=1}^{l} r_i)$ *funções. Mostra-se também que o sistema em malha fechada com a lei de controle definida no teorema* 2.16, *quando escrito neste sistema de coordenadas locais é dado por :*

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 v_1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{x}_l = A_l x_l + b_l v_l$$

$$\dot{x}_{l+1} = f_{l+1}(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}) + \sum_{i=1}^{l} g_{l+1}^{i}(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1})\, v_i$$

$$y_i = C_i(x_i) \;,\; i=1,\ldots,l$$

onde A_i *e* b_i *e* c_i *são matrizes respectivamente* (r_i, r_i), $(r_i, 1)$ *e* $(1, r_i)$, *dadas por :*

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \qquad b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

para $i=1,\dots,l$. *Note que o subsistema linear corresponsente a cada saída* y_i *e cada entrada* v_i *é minimal (controlável e observável) e possui função de transferência dada por* $\hat{y}_i(s)=(1/s^{r_i})v_i(s)$. *Porisso, tal sistema é dito estar desacoplado em integradores. Note que uma realimentação de estado adequada pode impor os pólos de cada subsistema* (A_i, b_i). *Se* $\sum_{i=1}^{l} r_i = n$, *então o subsistema não linear correspondente às coordenadas* x_{l+1} *está ausente e o sistema em malha fechada se reduz a um sistema linear controlável.* □

Uma outra abordagem para o problema (equivalente, porém mais geométrica) pode ser encontrada em Nijmeijer e Schumacher[25]. Neste trabalho, é definida a chamada estrutura (geométrica) no infinito, e a solubilidade do PDRRE depende essencialmente desta estrutura e dos inteiros r_i. No entanto, verifica-se que esta estrutura não é adequada quando tratamos do mesmo problema por realimentação dinâmica (vide [7]). A seção seguinte trata da abordagem adequada para os nossos propósitos.

2.5 A Estrutura Algébrica no Infinito

Os trabalhos de Fliess [9] e [10], com uma abordagem proveniente da Álgebra-Diferencial, trouxeram nova luz aos problemas de invertibilidade a direita e à esquerda para sistemas não lineares. Antes da publicação dos mesmos, a invertibilidade à esquerda foi caracterizada por um algorítimo (Singh[33]) e é equivalente à capacidade de deduzirmos a entrada de um sistema a partir do conhecimento da saída e da condição inicial, se restringirmos o conjunto de entradas

adequadamente. A invertibilidade à direita é (grosseiramente) equivalente à "independência" entre as equações diferenciais que regem o comportamento de cada saída(veja Fliess[9],[10]). Pode também ser caracterizada por uma propriedade de reproducibilidade (veja [30]). Sabe-se também que a invertibilidade à direita é diretamente ligada ao problema de desacoplamento entrada-saída [6], [7],[30] e pode ser definida pelo pôsto genérico de certas matrizes Jacobianas (vide Nijmeijer [23]). Para nossos propósitos apresentaremos a estrutura algébrica no infinito [7]. Para isso seja, por simplicidade, $\mathcal{N}$ um aberto de $\mathbb{R}^n$ e considere o sistema (2.1), sem perturbações, evoluindo em $\mathcal{N}$. Defina as derivadas formais das saídas, pondo indutivamente :

$$y^{(0)} = h(x) \tag{2.13.a}$$

$$y^{(k+1)} = \frac{\partial y^{(k)}}{\partial x}(f + g\,u^{(0)}) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial y^{(k)}}{\partial u^{(i)}}\, u^{(i+1)} \tag{2.13.b}$$

Assim, vemos que $y^{(0)}(x)$, $y^{(1)}(x,u^{(0)}),\ldots\ldots$, $y^{(p)}(x,u^{(0)},\ldots,u^{(p-1)})$ são vetores de funções polinomiais em $u^{(0)},\ldots,u^{(p-1)}$ com coeficientes que são funções analíticas em $\mathcal{N}$. Agora considere o espaço linear $\mathcal{E}$ de dimensão $n+p.m$ gerado pelas diferenciais formais $\{dx, du^{(0)},\ldots,du^{(p-1)}\}$ sobre o corpo $\mathcal{K}_p$ das funções racionais em $u^{(0)},\ldots,u^{(p-1)}$ com coeficientes meromórficos em $\mathcal{N}$. Note que as diferenciais formais

$$dy^{(k)} = \frac{\partial y^{(k)}}{\partial x}dx + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial y^{(k)}}{\partial u^{(i)}}\, du^{(i)} \tag{2.14.b}$$

são elementos de $\mathcal{E}$. Portanto $\mathcal{E}_k = \{dx,\ dy^{(0)},\ldots\ldots,dy^{(k)}\}, k=0,\ldots,p$, são subespaços de $\mathcal{E}$ sobre o corpo $\mathcal{K}_p$. Como as saídas são definidas por uma função h que só depende de x, então $\mathcal{E}_0 = sp\{dx\}$. Seja $d_k = d(\mathcal{E}_k + sp\{dx\})$ sobre o corpo $\mathcal{K}_p$. Defina a sequência crescente de inteiros $\sigma_i = d_i - d_{i-1}$, $i=1,\ldots,p$. Dos resultados de [7], não há vantagem

estrutural em tomarmos $p>n$ porque neste caso a sequencia de inteiros σ_i é tal que $\sigma_i=\sigma_{i-1}$ para $i>n$. Assim, toma-se usualmente $p=n$ e denomina-se a sequência de inteiros $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ de *estrutura no infinito* do sistema. O inteiro σ_i, para $i=1,\ldots,n-1$, é denominado *número de zeros no infinito de ordem menor ou igual a* i. O inteiro $\rho=\sigma_n$ é denominado *número total de zeros no infinito*, ou simplesmente *pôsto do sistema*. Note que $\rho=d(\mathcal{E}_n)-d(\mathcal{E}_{n-1})$. Mostra-se que $\rho\leq\min\{l,m\}$, l=dimensão do vetor de saídas e m=dimensão do vetor de entradas.

Agora, definamos a aplicação $\gamma_k:\mathcal{N}\times(\mathbb{R}^m)^n\mapsto\mathcal{N}\times(\mathbb{R}^l)^k$, pondo :

$$\gamma_k(x,u^{(0)},\ldots,u^{(n-1)})\mapsto(x,y^{(0)},\ldots,y^{(k)}),\quad k=0,\ldots,n \tag{2.15}$$

e considere a matriz jacobiana

$$J_k(x,u^{(0)},\ldots,u^{(n-1)})=\frac{\partial(x,y^{(0)},\ldots,y^{(k)})}{\partial(x,u^{(0)},\ldots,u^{(n-1)})} \tag{2.16}$$

As matrizes J_k para $k=0,\ldots,n$, possuem elementos no corpo $\mathcal{K}_n$, sendo que suas linhas representam as diferenciais formais das derivadas das saídas quando escritas na base $\left\{dx,du^{(0)},\ldots,du^{(n-1)}\right\}$. Resulta que a dimensão de $\mathcal{E}_k+sp\{dx\}$ coincide com o pôsto de J_k tomado sobre o corpo $\mathcal{K}_n$, e pelos resultados do cap. 1, seção 1.8, teremos $d(\mathcal{E}_k+sp\{dx\})=\mathcal{D}(J_k)$.

Seja $E=\mathbb{R}^s$ e suponha que $\mathcal{B}$ é um aberto de $\mathcal{N}\times E$. Defina a lei de controle da forma :

$$u=\alpha(x,z)+\beta(x,z)v \tag{2.17.a}$$

$$\dot{z}=\Psi(x,z)+\Phi(x,z)v \tag{2.17.b}$$

onde α,β,Ψ e Φ são analíticas em $\mathcal{B}$, $z\in E$ é o estado do compensador e $v(t)\in\mathbb{R}^m$ é o novo vetor de entradas. Tal lei de controle define, em malha fechada, o novo sistema $(\bar{h},\bar{f},\bar{g})$ evoluindo numa variedade analítica $\mathcal{B}$ aberta em $\mathcal{N}\times E$, e dado por

$$\dot{x} = \bar{f}(x,z) + \bar{g}(x,z)v \tag{2.18.a}$$

$$y = \bar{h}(x,z) = h(x) \tag{2.18.b}$$

onde

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} f+g\alpha \\ \Psi \end{bmatrix} \qquad \bar{g} = \begin{bmatrix} g\beta \\ \Phi \end{bmatrix} \tag{2.18.c}$$

Uma lei de controle da forma (2.17) é denotada por $(\alpha, \beta, \Psi, \Phi)$ e é denominada *realimentação dinâmica de estado* ou simplesmente *realimentação dinâmica*.

Para o sistema (2.18) podemos considerar as derivadas formais do vetor de entradas u do sistema (h,f,g) considerado como saída do sistema $(\bar{f},\bar{g})$. Para isso denote $\bar{x} = (x' \ z')$ e defina

$$u^{(0)} = \alpha(\bar{x}) + \beta(\bar{x})v^{(0)} \tag{2.19.a}$$

$$u^{(k+1)} = \frac{\partial u^{(k)}}{\partial \bar{x}}(\bar{f} + \bar{g}v^{(0)}) + \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial v^{(i)}} v^{(i+1)} \tag{2.19.b}$$

De forma análoga ao exposto anteriormente, podemos considerar as diferenciais formais

$$du^{(k)} = \frac{\partial u^{(k)}}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial v^{(i)}} dv^{(i)}$$

e os subespaços $\mathcal{V}_k = sp\{dx, dz, du^{(0)}, \ldots, du^{(k)}\}$ sobre o corpo $\mathcal{K}_e$ das funções racionais em $v^{(0)}, \ldots, v^{(n+s)}$ com coeficientes meromórficos em $\bar{x}$ sobre $\mathcal{B}$. O pôsto de uma realimentação é definido por $R = d(\mathcal{V}_{n+s}) - d(\mathcal{V}_{n+s-1})$. Mostra-se que $R \leq m$, onde m é a dimensão do vetor de entradas u. Se $R = m$ a realimentação dinâmica é dita *regular*.

Os seguintes resultados são explícitos em [7] :

Teorema 2.17 : *O problema de desacoplamento dinâmico entrada saída é solúvel por realimentação dinâmica (regular) se e somente se o pôsto do*

sistema for igual ao número de saídas e isto é equivalente ao sistema ser invertível à direita.

Um compensador solução para o problema de desacoplamento entrada-saída dinâmico pode ser obtido via algorítmo de extensão dinâmica (vide cap 3).

Teorema 2.18 : Um sistema é invertível à esquerda se e somente se o pôsto do sistema for igual ao número de entradas.

Um sitema inverso à esquerda pode ser obtido com o auxílio do algorítmo de Singh [33].

Teorema 2.19 : Uma realimentação dinâmica regular não altera o pôsto do sistema, isto é, ω número total de zeros no infinito é invariante por realimentação dinâmica regular.

O seguinte resultado é uma consequêcia imediata dos resultados de [7].

Lema 2.20 : Seja (α,β,Ψ,Φ) *uma realimentação analítica regular em* $\mathfrak{B}$. *Seja* $\delta:\mathfrak{B}\times(\mathbb{R}^m)^n \mapsto \mathcal{N}\times(\mathbb{R}^m)^n$ *a aplicação analítica definida por*

$$\delta(x,z,v^{(0)},\ldots,v^{(n-1)})=(x,u^{(0)},\ldots,u^{(n-1)})$$

onde $u^{(i)}$ *é definida em* (2.19). *Então, a matriz jacobiana*

$$J\delta=\frac{\partial(x,u^{(0)},\ldots,u^{(n-1)})}{\partial(x,z,v^{(0)},\ldots,v^{(n-1)})}$$

possui pôsto pleno de linha sobre o corpo $\mathcal{K}_e$. *Em particular o pôsto genérico*

de $J\delta$ é pleno de linha.

Prova : Note inicialmente que sobre o corpo $\mathcal{K}_e$, $sp\{dx, du^{(0)},\ldots,du^{(n-1)}\}$ é um subespaço de $sp\{dx, dz, dv^{(0)},\ldots,dv^{(n-1)}\}$. Pela prova do lema 3.3 pag. 668 de [7], teremos que para todo inteiro $p \leq n+s$, o conjunto $sp\{dx, du^{(0)},\ldots,du^{(p)}\}$ é linearmente independente sobre $\mathcal{K}_e$. Em particular, para $p=n-1$, observando que as linhas de $J\delta$ são os coeficientes das diferenciais de $\{dx, du^{(0)},\ldots,du^{(n-1)}\}$ com relação à base $sp\{dx, dz, dv^{(0)},\ldots,dv^{(n-1)}\}$, segue-se o resultado esperado. □

2.6. Notas e Referências

O conceito de (A,B)-invariância em sistemas lineares é devido aos trabalhos de Basile e Marro [2] e Wonham e Morse [38]. Tais trabalhos permitiram uma solução geométrica elegante para os problemas de desacoplamento da perturbação e desacoplamento entrada-saída. Para uma apresentação completa da abordagem geométrica de controle não linear, veja Wonham[37].

A generalização do conceito de (A,B)-invariância para sistemas não lineares afins é devida a Isidori et al. [20], [21], Hischorn [14], Nijmeijer [24]. O algorítmo 2.9 é devido a Krener[22]. Tais conceitos permitiram obter uma solução elegante para o problema de desacoplamento entrada-saída e desacoplamento de perturbações por realimentação regular do estado. Para uma apresentação completa do assunto veja os livros textos [19] e [27]. Uma versão mais fraca do problema de desacoplamento entrada-saída para sistemas não-lineares é apresentada em Silva[28].

A primeira definição precisa de estrutura no infinito e sua relação com os problemas de desacoplamento é devida a Nijmeijer e Schumacher[25].

A invertibilidade à esquerda foi caracterizada inicialmente pelo algorítmo de Singh[33]. A relação entre a invertibilidade à direita e o problema de desacoplamento dinâmico entrada saída foi estudada por Fliess [9], [10]. Algorítmos específicos para construção do compensador solução para o problema de desacoplamento dinâmico entrada saída foram estudados por Descusse e Moog [5] e [6], Nijmeijer e Respondek [26] e Singh [33]. Para a classe de sistemas lineares afins, Di Benedetto, Moog e Grizzle [7] mostraram que os trabalhos [9],[10],[6], [26] e [33] podem ser unificados num só conceito denominado *estrutura algébrica no infinito*.

Cap.3 - Problema de Desacoplamento da Perturbação por Realimentação Dinâmica Regular do Estado (PDPRDR)

3.1. Introdução

Neste capítulo discutiremos o *Problema de Desacoplamento da Perturbação por Realimentação Dinâmica Regular* do estado (PDPRDR) para sistemas não lineares afins.

Em sistemas lineares, sabemos que o problema de desacoplamento das perturbações é solúvel por realimentação dinâmica se e somente se tal problema for solúvel por realimentação (estática) de estado. De fato, isto é uma consequência dos resultados de Schumacher [22], onde é mostrado que um (A, B)-invariante dinâmico (em um espaço de estados estendido) induz um (A, B)-invariante no espaço original. No entanto, para sistemas não lineares afins, pode-se exibir exemplos (vide [16]) onde o problema de desacoplamento da perturbação por realimentação (estática) regular de estado não é solúvel mas o PDPRDR o é (veja também o exemplo do Anexo 1).

O PDPRDR foi originalmente estudado em [16] e [17] onde foi utilizado o algorítmo de Singh[33] para o desenvolvimento das condições de solubilidade. As condições obtidas em [16] e [17] são algorítmicas. Nossa contribuição será mostrar que a solubilidade do problema PDPRDR é dependente das propriedades geométricas do chamado sistema estendido (SE), exibindo condições necessárias e suficientes de solubilidade do PDPRDR. Para o caso em que o problema é solúvel, apresentaremos uma técnica de construção do compensador solução baseada numa versão do algorítmo de extensão dinâmica encontrada em [7]. Como um subproduto de nosso trabalho, obteremos uma técnica geométrica de computação da estrutura algébrica no infinito.

O capítulo será organizado como se segue. Na seção 3.2 definiremos o

problema tratado (PDPRDR). Na seção 3.3 definiremos o Sistema Estendido (SE) e o Sistema Compensado Estendido (SCE). Na seção 3.4 mostraremos que as derivadas formais das saídas podem ser substituídas por derivadas de Lie ao longo do campo $\tilde{f}$ do sistema SE. Na seção 3.5 mostraremos o algoritmo de extensão dinâmica e algumas de suas propriedades geométricas. Mostraremos também que a dimensão genérica de uma sequência de codistribuições permite computar a estrutura no infinito. Na seção 3.6, desenvolveremos o ferramental geométrico utilizado para demonstração do nosso resultado principal, que é apresentado somente na seção 3.7.

3.2. O Problema de Desacoplamento da Perturbação por Realimentação Dinâmica Regular PDPRDR

Nesta seção, definiremos o Problema de Desacoplamento da Perturbação por Realimentação Dinâmica Regular (PDPRDR). Definiremos o Sistema em Malha Fechada com uma Realimentação Dinâmica de Estado e o denominaremos de *Sistema Compensado* (*SC*). Para isso, seja a quádrupla (h,f,g,p) representando um sistema não linear analítico afim evoluindo em uma variedade analítica de dimensão n, denotada por $\mathcal{N}$. Em outras palavras :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \sum_{j=1}^{m} g_j(x(t))\, u_j(t) + \sum_{j=1}^{m_p} p_j(x(t))\, q_j(t) \quad , \quad t \geq t_0 \tag{3.1.a}$$

$$y_i = h_i(x(t)) \qquad i = 1 , \ldots , l \quad , \quad x(t_0) = x_0 \tag{3.1.b}$$

onde f, $g_1, \ldots, g_m$, $p_1, \ldots, p_{m_p}$ são campos analíticos em $\mathcal{N}$ e $h = (h_1 \ldots\ldots h_l)'$ é um vetor de funções reais analíticas em $\mathcal{N}$ denominadas saídas do sistema. As funções $u_j : [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ são as *entradas* do sistema nas quais temos acesso direto para aplicação do valor que desejarmos. As funções $q_j : [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ são as *perturbações* no

sistema, sendo desconhecidas e sem acesso.

Denote as "matrizes" de campos coluna $g=[g_1 \dots g_m]$ e $p=[p_1,\dots,p_{m_p}]$ e os vetores coluna de entradas $u=(u_1,\dots,u_m)'$ e de perturbações $q=(q_1,\dots,q_{m_p})'$, de maneira que a eq. (3.1.a) pode ser reescrita por :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + p(x)q \tag{3.1.c}$$

Deseja-se uma realimentação dinâmica regular (α,β,Ψ,Φ) (regular no sentido do Cap.2)

$$u=\alpha(x,z)+\beta(x,z)v \tag{3.2.a}$$

$$\dot{z}=\Psi(x,z)+\Phi(x,z)v \tag{3.2.b}$$

onde $z\in E=\mathbb{R}^s$ é o estado do compensador e $v(t)\in\mathbb{R}^m$ é o novo vetor de entradas, de maneira que o novo sistema $(h,\bar{f},\bar{g})$ evoluindo numa variedade analítica $\mathcal{B}$ aberta em $\mathcal{N}\times E$, e dado por

$$\dot{x} = \bar{f}(x,z) + \bar{g}(x,z) + \bar{p}(x)q \tag{3.3.a}$$

$$y=h(x) \tag{3.3.b}$$

onde

$$\bar{f}=\begin{bmatrix} f+g\alpha \\ \Psi \end{bmatrix} \qquad \bar{g}=\begin{bmatrix} g\beta \\ \Phi \end{bmatrix} \qquad \bar{p}=\begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.c}$$

seja tal que a perturbação q não *influencie* a saída y (veja definição de influência no cap 1). O sistema da eq. (3.3.a-b-c) será denominado Sistema Compensado (SC). A distribuição analítica em $\mathcal{B}$ definida por $sp\{\bar{p}\}$ será denotada por $\bar{P}$.

3.3. O Sistema Estendido (SE) e o Sistema Compensado Estendido (SCE)

Seja (h,f,g,p) sistema não linear analítico afim da eq. (3.1.a-b). Seja $\tilde{N}=\mathcal{N}\times(\mathbb{R}^m)^n$ a variedade analítica produto. Seja (U,ϕ) uma carta do atlas maximal da variedade analítica conexa $\mathcal{N}$. É importante ressaltar que a estrutura de variedade analítica que daremos a $\tilde{N}=\mathcal{N}\times(\mathbb{R}^m)^n$ é proveniente do atlas maximal construído a partir do atlas cujas cartas são da forma $\psi: U\times(\mathbb{R}^m)^n \mapsto \phi(U)\times(\mathbb{R}^m)^n$ onde $\psi(x,\nu)=(\phi(x),\nu)$, com $x\in\mathcal{N}$ e $\nu\in(\mathbb{R}^m)^n$. É evidente que tal estrutura é de variedade analítica já que a mudança de coordenadas entre ψ_1, ψ_2 provenientes respectivamente ϕ_1 e ϕ_2, é da forma (vide Cap.1) :

$$\psi_1\circ\psi_2^{-1}(x,\nu)=(\phi_1\circ\phi_2^{-1}(x),\nu)$$

Denote as funções coordenadas canônicas de $(\mathbb{R}^m)^n$ por $(w_1,\dots,w_n)$ onde $w_i:(\mathbb{R}^m)^n\mapsto\mathbb{R}^m, i=1,\dots,n$. Sejam as projeções canônicas

$$\pi_1:\tilde{N}\mapsto\mathcal{N}\ ,\ \pi_2:\tilde{N}\mapsto(\mathbb{R}^m)^n \tag{3.4.a}$$

Escolhida uma carta $(U,\phi=(x_1,\dots,x_n))$ de $\mathcal{N}$, induzimos uma carta local $\left[U\times(\mathbb{R}^m)^n,\psi=(\tilde{x},\tilde{w}_1,\dots,\tilde{w}_n)\right]$ de $\tilde{N}=\mathcal{N}\times(\mathbb{R}^m)^n$, onde

$$\tilde{x}=\phi\circ\pi_1 \quad , \quad \tilde{w}_i=w_i\circ\pi_2 \tag{3.4.b}$$

E note que as cartas desta natureza formam um atlas de $\tilde{N}$.

Agora seja o *sistema estendido* (SE) evoluindo na variedade $\tilde{N}$, denotado por $(\tilde{h},\tilde{f},\tilde{g},\tilde{p})$ e definido univocamente pelas relações:

$$(\pi_1)_*\tilde{f}= f\circ\pi_1+(g\circ\pi_1)\tilde{w}_1 \tag{3.5.a}$$

$$(\pi_2)_*\tilde{f}= \sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{\partial}{\partial w_i}\circ\pi_2\right]\tilde{w}_{i+1} \tag{3.5.b}$$

$$(\pi_1)_*\tilde{g}= 0 \tag{3.5.c}$$

$$(\pi_2)_*\tilde{g}= \frac{\partial}{\partial w_n}\circ\pi_2 \tag{3.5.d}$$

$$(\pi_1)_*\tilde{p}= p\circ\pi_1 \tag{3.5.e}$$

$$(\pi_2)_* \tilde{p} = 0 \tag{3.5.f}$$

Assim, teremos o sistema analítico afim evoluindo em $\tilde{N}$ e definido por :

$$\dot{\xi} = \tilde{f}(\xi) + \tilde{g}(\xi) u^{(n)} + \tilde{p}(\xi) q \tag{3.6.a}$$

$$y_i = \tilde{h}_i(\xi) \qquad i = 1, \ldots, \ell \tag{3.6.b}$$

onde $\xi \in \tilde{N}$ é o estado, $u^{(n)} : [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^m$ é a entrada, $q : [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^{mp}$ são as perturbações e $y \in \mathbb{R}^\ell$ é o vetor de saídas. Nas coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n)$, teremos :

$$\tilde{f} = \begin{bmatrix} f + g\tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{w}_n \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix} \qquad \tilde{p} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.6.c}$$

$$\tilde{h}_i = h_i \qquad i = 1, \ldots, \ell \tag{3.6.d}$$

onde I_m é a matriz identidade (m, m). Com a notação do cap. 1, podemos escrever :

$$\tilde{f} = \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\right)(f + g\tilde{w}_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{w}_i}\right) \tilde{w}_{i+1} \tag{3.7.a}$$

$$\tilde{g} = \frac{\partial}{\partial \tilde{w}_n} \tag{3.7.b}$$

$$\tilde{p} = p \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tag{3.7.b}$$

Suponha agora que a perturbação q(t) e a entrada u(t) são funções suaves. É

fácil verificar por unicidade, que a solução $x(t)$ obtida a partir da condição inicial $x(t_0)=x_0$, pela aplicação de uma entrada $u(\cdot)\in C^n$ no sistema (3.1.a-b) pode ser obtida a partir da solução $\xi(t)=(x(t),w_1(t),\ldots,w_n(t))$ do sistema (3.6.a) a partir da condição inicial $\xi_0=(x_0,u(t_0),u^{(1)}(t_0),\ldots,u^{(n-1)}(t_0))$, pela aplicação da entrada $u^{(n)}(t)$ e da perturbação $q(t)$. Mais ainda, vemos que $\xi(t)=(x(t),u(t),u^{(1)}(t),\ldots,u^{(n-1)}(t))$. Desta forma, podemos afirmar que a variedade $\tilde{N}$ é construída de maneira a termos acima de x uma fibra composta das entradas e das suas derivadas até a ordem $(n-1)$. Da teoria de equações diferenciais, como todos os objetos envolvidos na eq. (3.6.a) são de classe C^∞, temos que a a solução $\xi(t)$ (e portanto $x(t)$) está bem definida num intervalo $[t_0,\ t_0+\epsilon)$, para ϵ suficientemente pequeno que pode depender de x_0, da entrada $u(\cdot)$ e da perturbação $q(\cdot)$.

Se (α,β,Ψ,Φ) é uma realimentação dinâmica analítica (3.2.a-b) em $\mathcal{B}\subset\mathcal{N}\times E$, denotaremos o sistema estendido obtido a partir de $(h,\bar{f},\bar{g},\bar{p})$ por (h,f_e,g_e,p_e) e o denominaremos *sistema compensado estendido* (*SCE*). Note que este sistema evolui na variedade $\mathcal{B}\times(\mathbb{R}^m)^n$. Agora considere as projeções canônicas

$$\pi_1^e:\mathcal{B}\times(\mathbb{R}^m)^n\mapsto\mathcal{N}\ ,\quad \pi_E^e:\mathcal{B}\times(\mathbb{R}^m)^n\mapsto E,\quad \pi_2^e:\mathcal{B}\times(\mathbb{R}^m)^n\mapsto(\mathbb{R}^m)^n \tag{3.8.a}$$

Escolhida uma carta $(U,\phi=(x_1,\ldots,x_n))$ de $\mathcal{N}$ induzimos, analogamente ao caso anterior, uma carta local $(x_e,\ z_e,\ w_{e_1},\ldots,w_{e_n})$ de $\mathcal{B}\times(\mathbb{R}^m)^n$, onde

$$x_e=\phi\circ\pi_1^e\quad ,\quad z_e=z\circ\pi_E^e,\quad w_{e_i}=w_i\circ\pi_2^e\ , \tag{3.8.b}$$

e note que as cartas desta natureza formam um atlas de $\mathcal{B}\times(\mathbb{R}^m)^n$. Nestas coordenadas teremos :

$$f_e=\left[\frac{\partial}{\partial x_e}\right][f+g(\alpha+\beta w_{e_1})]+\left[\frac{\partial}{\partial z_e}\right](\Psi+\Phi w_{e_1})+\sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{\partial}{\partial w_{e_i}}\right]w_{e_{i+1}} \tag{3.9.a}$$

$$g_e=\frac{\partial}{\partial w_{e_n}} \tag{3.9.b}$$

$$p_e=p\frac{\partial}{\partial x_e} \tag{3.9.b}$$

As distribuições analíticas $sp\{\tilde{p}\}$, de $\tilde{N}$, e $sp\{p_e\}$, de $\mathcal{B}\times(\mathbb{R}^m)^n$, serão denotadas respectivamente por $\tilde{P}$ e P_e.

3.4. As Derivadas Temporais das Saídas ao Longo de uma Solução

Nesta seção consideraremos as derivadas temporais das saídas do sistema (3.1.a-b) ao longo de uma solução quando a perturbação está ausente, isto é, $p\equiv 0$. No lema 3.11 da seção (3.6), a situação onde uma perturbação é aplicada será considerada. Como não fixamos a classe de diferenciabilidade da entrada $u(\cdot)$, denominaremos tais derivadas de derivadas formais. Para os nossos interesses, trabalharemos com o sistema estendido (SE), pois as derivadas de Lie de h pelo campo $\tilde{f}$ produzirão as derivadas formais desejadas de ordem 0 até n. Para isso, considere o sistema (3.6.a-b) sem pertubações, isto é, $\tilde{p}\equiv 0$. Defina a aplicação analítica $\tilde{y}^{(k)}:\tilde{N}\mapsto\mathbb{R}^l$, $k=0,\ldots,n$, pondo

$$\tilde{y}^{(k)}=L_{\tilde{f}}^{k}h \tag{3.10}$$

Proposição 3.1 : *Suponha que* $k\leq n$, *então*

(i) Tome uma carta (U,ϕ) *de* $\mathcal{N}$ *e a carta induzida* $(\tilde{x},\tilde{w}_1,\ldots,\tilde{w}_n)$ *de* $\tilde{N}$. *Nessas coordenadas teremos*

$$\tilde{y}^{(k)}=\frac{\partial\tilde{y}^{(k-1)}}{\partial\tilde{x}}(f+g\tilde{w}_1)+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial\tilde{y}^{(k)}}{\partial\tilde{w}_i}\tilde{w}_{i+1}$$

(ii) $\tilde{y}^{(k)}$ *é uma função polinomial em* $(\tilde{w}_1,\ldots,\tilde{w}_k)$ *com coeficientes que são funções analíticas de* $\mathcal{N}$. *Em particular,* $\tilde{y}^{(k)}:\tilde{N}\mapsto\mathbb{R}^l$ *é analítica.*

Prova : Para $k=0$ tais afirmações são imediatas. Suponha que (i) e (ii) são válidas para k, com $k<n$, e provemos que elas são válidas para $k+1$. De fato, teremos da expressão de $\tilde{f}$ em coordenadas :

$$\tilde{y}^{(k+1)}=\frac{\partial\tilde{y}^{(k)}}{\partial\tilde{x}}(f+g\tilde{w}_1)+\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\tilde{y}^{(k)}}{\partial\tilde{w}_i}\tilde{w}_{i+1} \tag{3.11}$$

onde somamos somente até k devido ao fato de (ii) valer para k. Para mostrar que (ii) vale para $k+1$, basta notar que, da eq. anterior, a hipótese (ii) para k garante que as derivadas parciais de $L_{\tilde{f}}^{k}\tilde{h}_i$ com relação às funções coordenadas são funções polinomiais de $\tilde{w}_1,\ldots,\tilde{w}_k$ com coeficientes analíticos em $\mathcal{N}$. Como f e g dependem apenas de $\tilde{x}$, segue-se que (ii) é verdadeiro para $k+1$. □

Rebatize agora as variáveis $(\tilde{x},\tilde{w}_1,\ldots,\tilde{w}_n)$ para $(\tilde{x},u,u^{(1)},\ldots,u^{(n-1)})$. Note que as expressões

$$\tilde{y}^{(0)}=h(x) \tag{3.12.a}$$

$$\tilde{y}^{(k)}=\frac{\partial\tilde{y}^{(k-1)}}{\partial\tilde{x}}(f+gu)+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial\tilde{y}^{(k-1)}}{\partial u^{(i-1)}}u^{(i)} \tag{3.12.b}$$

calculam indutivamente as derivadas formais das saídas (vide eq (2.13.a-b)). Se a entrada for pelo menos de classe C^n e a solução for bem definida em t, então as derivadas formais de ordem $k\leq n$ no instante t serão as derivadas temporais das saídas calculadas em $\xi=(\tilde{x}(t),u(t),u^{(1)}(t),\ldots,u^{(n-1)}(t))$. Analogamente, para o sistema (SCE) da eq. (3.9), podemos definir as derivadas formais das entradas $u_e^{(j)}:\mathcal{B}\times(\mathbb{R}^m)^n\mapsto\mathbb{R}^m$, pondo (vide eq. (3.2.a)) :

$$u_e^{(0)} = (\alpha + \beta w_{e_1}) \tag{3.13.a}$$

$$u_e^{(i)} = L_{f_e} u_e^{(i-1)}, \; i = 1, \ldots, n-1 \tag{3.13.b}$$

Por simplicidade não escreveremos o subescrito e em $u_e^{(i)}$. Rebatizaremos w_{e_i} para $v^{(i-1)}$.

3.5. O Algorítimo de Extensão Dinâmica

A relação entre desacoplamento dinâmico e invertibilidade à direita foi recentemente esclarecida por Fliess [9], [10] cujo trabalho inspirou diversos autores a desenvolver algorítmos concretos para construção do compensador dinâmico que forneça solução para este problema [32],[5],[6], [26]. Em [7] é mostrado que estes algorítmos constroem uma base para a sequência de subespaços $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{S}_n$ (vide cap. 2), fornecendo a estrutura algébrica no infinito $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Na versão que apresentamos nos interessaremos mais com os aspectos geométricos relacionados com o sistema em malha fechada Σ_n:(h, f_n, g_n) obtido no enésimo passo do algorítmo. Em particular estaremos interessados em exibir a maior distribuição (f_n, g_n)-invariante Δ contida em Kerdh, já que queremos mostrar que Σ_n é um candidato à solução do PDPRDR.

Algorítmo 3.2 (*Extensão Dinâmica Algébrica* [7]) :

<u>Passo 1</u> :*Seja* Σ_0 *o sistema* (3.1.*a-b*) *com* $p \equiv 0$. *Calcule*

$$\dot{y} = \langle dy, f(x) + g(x)u \rangle = a_1(x) + b_1(x)u \tag{3.14}$$

Como b_1 *é uma matriz de funções meromórficas, podemos definir seu pôsto no corpo* $\mathcal{K}_0$ *das funções meromórficas de* x.

$$\sigma_1 = \text{pôsto } b_1(x) \tag{3.15}$$

Permute, se necessário, os componentes da saída até que as σ_1 primeiras linhas de b_1 sejam linearmente independentes. Assim :

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{y}}_1 \\ \dot{\hat{y}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1(x) + \bar{b}_1(x)u \\ \hat{a}_1(x) + \hat{b}_1(x)u \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Seja

$$u = \alpha_1(x) + \beta_1(x)v_1 \tag{3.17}$$

onde $v_1 = (\bar{v}'_1 \ \hat{v}'_1)'$, *de maneira que*

(*i*) $\beta_1(x)$ *é não singular no corpo* $\mathcal{K}_0$.

(*ii*) $\dot{\bar{y}}_1 = \bar{v}_1$

Tal par (α_1, β_1) *sempre existe. De fato, a menos de uma reordenação nas entradas, podemos formar uma matriz* $\bar{b}_{11}$ *a partir das primeiras* σ_1 *colunas de* $\bar{b}_1$ *tal que* $\bar{b}_{11}$ *seja não singular no corpo* $\mathcal{K}_0$. *Seja*

$$b_1 = \begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} \\ \hat{b}_{21} & \hat{b}_{22} \end{bmatrix}$$

Assim podemos tomar :

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} \bar{b}_{11}^{-1} & -\bar{b}_{11}^{-1}\bar{b}_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} -\bar{b}_{11}^{-1}\,\bar{a}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde as operações matriciais foram feitas sobre o corpo $\mathcal{K}_0$. *Desta escolha e de* (3.16), *teremos*

$$b_1\beta=\begin{bmatrix} I_{\sigma_1} & 0 \\ X & 0 \end{bmatrix}$$

onde o zero superior é consequência da definição de β *e o zero inferior é obtido pois senão o pôsto de* b_1 *sobre* $\mathcal{K}_0$ *seria superior a* σ_1.

Para qualquer escolha de α *e* β *obedecendo* (*i*) *e* (*ii*) *acima, teremos*

$$\dot{\bar{y}}_1=\bar{v}_1 \tag{3.18.a}$$

$$\dot{\hat{y}}_1=d_1(x)+e_1(x)\bar{v}_1 \tag{3.18.b}$$

pois se em $\dot{\hat{y}}_1$ *houvesse um termo aditivo* $f_1(x)\hat{v}_1$ *com* $f_1(x)$ *não nulo isso implicaria* (*como acima*) *que o pôsto de* b_1 *é maior que* σ_1. *Introduza uma extensão dinâmica*

$$\dot{\bar{v}}_1=\bar{u}_1 \tag{3.19.a}$$

e rebatize os componentes restantes de v_1

$$\hat{v}_1=\hat{u}_1 \tag{3.19.b}$$

Seja Γ_1 *o subconjunto analítico de* $\mathcal{N}$ *tal que* α_1, β_1 *e* β_1^{-1} *são analíticos em* $V_1=\mathcal{N}-\Gamma_1$. *Seja* Σ_1 *o sistema afim* (h, f_1, g_1) *cujo estado é* $x_1=\begin{bmatrix} x \\ \bar{v}_1 \end{bmatrix}$ *e cuja entrada é* $u_1=\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \hat{u}_1 \end{bmatrix}$, *formado pelo sistema* Σ_0, *a realimentação de estado* (3.17) *e a extensão dinâmica* (3.19). *Em outras palavras*

$$\Sigma_1 : \quad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ u &= \alpha(x) + \beta(x)\begin{bmatrix} \overline{v}_1 \\ \widehat{u}_1 \end{bmatrix} \\ \dot{\overline{v}}_1 &= \overline{u}_1 \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{3.20}$$

que denotaremos por

$$\Sigma_1 : \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)u_1 \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{3.21}$$

Seja $\mathcal{K}_1$ *o corpo das funções meromórficas em* $V_1 \times \mathbb{R}^{\sigma_1}$. *Então note que*

(a) de (3.18) temos que $\dot{y} = <dy, f_1 + g_1>$ *é um vetor de elementos (analíticos) de* $\mathcal{K}_1$.

(b) Σ_1 *é um sistema analítico em* $V_1 \times \mathbb{R}^{\sigma_1}$.

(c) Calculando

$$y^{(2)} = <d\dot{y}, f_1(x_1) + g_1(x_1)u_1> = a_2(x_1) + b_2(x_1)u_1$$

Teremos que a_2 *e* b_2 *são formados por elementos (analíticos) de* $\mathcal{K}_2$. *De (3.19.a) segue-se que as primeiras* σ_1 *linhas de* a_2 *são nulas e as primeiras* σ_1 *linhas de* b_2 *formam a matriz* $\begin{bmatrix} I_{\sigma_1} & 0 \end{bmatrix}$.

<u>*Passo k+1*</u> : *No passo k, um sistema* Σ_k *da forma*

$$\Sigma_k : \quad \begin{aligned} \dot{x}_k &= f_k(x_k) + g_k(x_k)u_k \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{3.22}$$

foi construído de maneira que :

(a) $y_k^{(k)} = y_k^{(k)}(x_k)$ *é um vetor de elementos do corpo* $\mathcal{K}_k$ *das funções meromórficas em* $V_k \times \mathbb{R}^{\sigma_k}$.

(b) Σ_k *é um sistema analítico em* $V_k \times \mathbb{R}^{\sigma_k}$.

Calculando :

$$y^{(k+1)} = < dy_k^{(k)}, f_k(x_k) + g_k(x_k) u_k > = a_{k+1}(x_k) + b_{k+1}(x_k) u_k \tag{3.23}$$

Podemos definir

$$\sigma_{k+1} = \text{pôsto } b_{k+1}(x_k) \tag{3.24}$$

sendo o pôsto tomado sobre o corpo $\mathcal{K}_k$. *Suponha por construção que*

(c) *As primeiras* σ_k *linhas de* a_{k+1} *são nulas e as primeiras* σ_k *linhas de* b_{k+1} *formam a matriz* $\begin{bmatrix} I_{\sigma_k} & 0 \end{bmatrix}$.

Permute, se necessário, as últimas $l - \sigma_k$ *componentes da saída de maneira que as primeiras* σ_{k+1} *linhas de* b_{k+1} *sejam independentes sobre o corpo* $\mathcal{K}_k$. *Decomponha* $y^{(k+1)}$ *de modo que*

$$y^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{k+1}^{(k+1)} \\ \hat{y}_{k+1}^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{k+1}(x_k) + \bar{b}_{k+1}(x_k) u \\ \hat{a}_{k+1}(x_k) + \hat{b}_{k+1}(x_k) u \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

Seja a realimentação de estado com elementos em $\mathcal{K}_k$

$$u_k = \alpha_{k+1}(x_k) + \beta_{k+1}(x_k) v_{k+1} \tag{3.26}$$

onde $v_{k+1}=(\overline{v}'_{k+1}\ \hat{v}'_{k+1})'$, *de maneira que*

(*i*) $\beta_{k+1}(x_k)$ *é não singular no corpo* $\mathcal{K}_k$.

(*ii*) $\overline{y}_{k+1}^{(k+1)}=\overline{v}_{k+1}$

Tal par $(\alpha_{k+1},\beta_{k+1})$ *sempre existe.*

Para o sistema resultante em malha fechada podemos escrever :

$$\overline{y}_{k+1}^{(k+1)}=\overline{v}_{k+1} \tag{3.27.a}$$

$$\hat{y}_{k+1}^{(k+1)}=d_{k+1}(x_k)+e_{k+1}(x_k)\overline{v}_{k+1} \tag{3.27.b}$$

Seja Γ_{k+1} *o subconjunto analítico de* $V_k\times\mathbb{R}^{\sigma_k}$ *tal que* α_{k+1},β_{k+1} *e* β_{k+1}^{-1} *são analíticos em* $V_{k+1}=V_k\times\mathbb{R}^{\sigma_k}-\Gamma_{k+1}$. *Agora introduza a extensão dinâmica :*

$$\dot{\overline{v}}_{k+1}=\overline{u}_{k+1} \tag{3.28.a}$$

e rebatize os componentes restantes de v_{k+1}

$$\dot{\hat{v}}_{k+1}=\hat{u}_{k+1} \tag{3.28.b}$$

Seja Σ_k *o sistema afim* (h,f_{k+1},g_{k+1}) *cujo estado é* $x_{k+1}=\begin{bmatrix} x_k \\ \overline{v}_{k+1}\end{bmatrix}$ *e cuja entrada é* $u_{k+1}=\begin{bmatrix}\overline{u}_{k+1}\\ \hat{u}_{k+1}\end{bmatrix}$, *formado pelo sistema* Σ_k, *a realimentação de estado* (3.26) *e a extensão dinâmica* (3.28). *Em outras palavras*

$$\Sigma_{k+1}:\ \begin{aligned} \dot{x}_k &= f_k(x_k)+g_k(x_k)u_k \\ u_k &= \alpha_{k+1}(x_k)+\beta_{k+1}(x_k)\begin{bmatrix}\overline{v}_{k+1}\\ \hat{u}_{k+1}\end{bmatrix} \\ \dot{\overline{v}}_{k+1} &= \overline{u}_{k+1} \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{3.29}$$

que denotaremos por

$$\Sigma_{k+1}: \begin{array}{l} \dot{x}_{k+1} = f_{k+1}(x_{k+1}) + g_{k+1}(x_{k+1})\, u_{k+1} \\ y = h(x) \end{array} \tag{3.30}$$

Assim podemos afirmar que

(a) $y_{k+1}^{(k+1)}$ *é um vetor de elementos (analíticos) de* $\mathcal{K}_{k+1}$

(b) Σ_{k+1} *é um sistema analítico* $V_{k+1} \times \mathbb{R}^{\sigma_{k+1}}$.

(c) *Calculando*

$$y^{(k+2)} = \langle dy_{k+1}^{(k+1)},\ f_{k+1}(x_{k+1}) + g_{k+1}(x_{k+1}) u_{k+1} \rangle =$$

$$= a_{k+2}(x_{k+1}) + b_{k+2}(x_{k+1})\, u_{k+1}$$

temos que as primeiras σ_{k+1} *linhas de* a_{k+2} *são nulas e as primeiras* σ_{k+1} *linhas de* b_{k+2} *formam a matriz* $\begin{bmatrix} I_{\sigma_{k+1}} & 0 \end{bmatrix}$.

<u>*Fim do passo k+1 e da descrição do algorítmo*</u> □

Observação 3.3 : É preciso ressaltar que tal algorítmo só será executado até o passo n, onde n é a dimensão da variedade $\mathcal{N}$. *De fato, para* $k > n$ *teremos* $\sigma_k = \sigma_{k-1}$. *(Vide [7]). Note que existirá um subconjunto analítico fechado de interior vazio* $\Gamma \subset \bar{N} = \mathcal{N} \times \mathbb{R}^{\sigma_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{\sigma_n}$ *tal que, em* $\bar{V} = \bar{N} - \Gamma$ *teremos que* $\alpha_k, \beta_k, \beta_k^{-1}$ *são analíticas em* $\bar{V}$. *Com isso, verifica-se facilmente que o sistema* Σ_n *será analítico em* $\bar{V}$. □

Proposição 3.4: Em $\bar{V}$ *teremos :*

(i) *O sistema* $\Sigma_n : (h, f_n, g_n)$ *é obtido do sistema* (h, f, g) *em malha fechada com uma realimentação dinâmica analítica regular.*

(ii) Se $d[sp\{g\}]=m$ em $\mathcal{N}$, então $sp\{g_n\}$ é não singular de dimensão m.

Prova : A prova de (i) é consequência dos seguintes fatos que podem ser facilmente verificados com a abordagem de [7] :

(1) Uma realimentação regular de estado é em particular uma realimentação dinâmica regular.

(2) A colocação de integradores em série com algumas entradas deixando as outras intactas é uma realimentação dinâmica regular.

(3) Uma realimentação dinâmica regular não altera o pôsto do sistema.

Considere agora o sistema $\Sigma_0:(h,f,g)$. É evidente que o pôsto do sistema cuja entrada é u e cuja saída é também u possui pôsto m. Note agora que em cada passo do algorítmo de extensão, obtemos Σ_i a partir de Σ_{i-1} através de uma realimentação regular de estado e o acréscimo de integradores em algumas entradas. Assim, Σ_i é obtido de Σ_{i-1} por uma realimentação dinâmica regular que em cada passo não alterará o pôsto do sistema onde u é a saída e u_i é a entrada.

Para provar (ii) basta notar que a aplicação de uma realimentação regular de estado $u=\alpha(x)+\beta(x)v$, e a colocação de integradores em série com as primeiras p entradas de v fornece o sistema $(\bar{f},\bar{g})$ com um vetor w(t) de m entradas, definido por:

$$\dot{\bar{x}}=\bar{f}(\bar{x})+\bar{g}(\bar{x})w$$

onde

$$\bar{x}=\begin{bmatrix} x \\ \bar{v} \end{bmatrix} \qquad \bar{f}=\begin{bmatrix} f+g\alpha+g\bar{\beta}\bar{v} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{g}=\begin{bmatrix} g\hat{\beta} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$$

sendo $v=(\bar{v}' \quad \hat{v}')'$, $\beta=[\bar{\beta} \quad \hat{\beta}]$ partições respectivamente nos primeiros p componentes de v e nas primeiras p colunas de β. Assim, se $sp\{g\}$ possui dimensão m, segue-se que $sp\{g\hat{\beta}\}$ possuirá dimensão $m-p$ e assim é imediato verificar que $sp\{\bar{g}\}$ possui dimensão m. Logo podemos proceder facilmente a prova de (ii) por indução ao longo

dos passos do algorítmo 3.2. □

Agora defiremos duas sequências de codistribuições $\tilde{\Omega}_k$ e $\bar{\Omega}_k$ $(k=0,\dots,n)$ respectivamente em abertos de $\tilde{N}=\mathcal{N}\times(\mathbb{R}^m)^n$ e $\bar{N}=\mathcal{N}\times\mathbb{R}^{\sigma_1}\times\dots\times\mathbb{R}^{\sigma_n}$. Tais codistribuições terão um papel crucial em nosso desenvolvimento.

Assim defina

$$\tilde{\Omega}_0=\mathrm{sp}\{d\tilde{h}_1, \dots, d\tilde{h}_t\} \tag{3.31.a}$$

considerada como uma codistribuição analítica de $T^*\tilde{N}$ e considere o algorítimo

$$\tilde{\Omega}_k=\tilde{\Omega}_{k-1} + L_{\tilde{f}}(\tilde{\Omega}_{k-1}) \quad , k=1,\dots,n \tag{3.31.b}$$

Defina as sequências de codistribuições analíticas

$$\tilde{\Omega}_k=\mathrm{sp}\{dL_{\tilde{f}}^p h : p=0,\dots,n\} \tag{3.32.a}$$

$$\tilde{\Omega}_k+\mathrm{sp}\{dx\}=\mathrm{sp}\{dx\}+\mathrm{sp}\{dL_{\tilde{f}}^p h : p=0,\dots,n\} \tag{3.32.b}$$

onde por abuso de notação $\mathrm{sp}\{dx\}$ denotará a codistribuição tal que $\mathrm{sp}\{dx\}(\xi)\equiv(\pi_1)^*\left[T^*_{\pi_1(\xi)}\mathcal{N}\right]$, onde π_1 é definida em (3.4.a).

Neste ponto é interessante ressaltar a conexão entre as codistribuições (3.32.b) e os subespaços $\mathcal{E}_k+\mathrm{sp}\{dx\}$ da seção 2.5 do cap.2. Para isso note que, de acordo com a seção 1.8 do cap. 1, os inteiros

$$p_k=\mathcal{D}\left[\tilde{\Omega}_k\right] , k=0,\dots,n.$$

$$d_k=\mathcal{D}\left[\mathrm{sp}\{dx\}+\tilde{\Omega}_k\right] , k=0,\dots,n.$$

onde $\mathfrak{D}$ é "dimensão genérica" em $\tilde{N}$, estão bem definidos e representam exatamente a dimensão destas codistribuições no complementar de um subconjunto analítico fechado de interior vazio. Defina $\tilde{V} \subset \tilde{N}$ como sendo o subconjunto aberto e denso com complementar analítico onde as distribuições $\tilde{\Omega}_k$ e $\tilde{\Omega}_k + sp\{dx\}$, $(k=0,\ldots,n)$ são não singulares, isto é, possuem dimensão máxima (vide seção 1.8). Note que d_k coincide com o pôsto genérico da aplicação $\gamma_k : \tilde{N} = \mathcal{N} \times (\mathbb{R}^m)^n \mapsto \mathcal{N} \times (\mathbb{R}^l)^k$ tal que

$$\gamma_k(x, u^{(0)}, \ldots, u^{(n-1)}) \mapsto (x, y^{(0)}, \ldots, y^{(k)}), \quad k=0,\ldots,n$$

De fato, $(\gamma_k)_*$ quando escrita em coordenadas equivale à matriz Jacobiana da eq. (2.16). Portanto, a sequência de inteiros $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, onde $\sigma_i = d_i - d_{i-1}$, coincide com a estrutura algébrica no infinito do sistema.

Seja $\bar{V} \subset \bar{N}$ definida na observação (3.3). Considere o sistema Σ_n produzido no final do enésimo passo do algorítmo 3.2. Como tal sistema é analítico em $\bar{V}$, podemos definir a sequência de codistribuições analíticas em $\bar{V}$:

$$\bar{\Omega}_0 = sp\{dh\} \tag{3.33.a}$$

$$\bar{\Omega}_k = \bar{\Omega}_{k-1} + L_{f_n}(\bar{\Omega}_{k-1}) = sp\{dh, dL_{f_n}h, \ldots, dL^k_{f_n}h\} \tag{3.33.b}$$

Note que para qualquer partição (com reordenação) $h_j = (\hat{h}_j' \ \bar{h}_j')'$, $j=0,\ldots,n$, correspondente ao passo j do algorítimo 3.2, tem-se

$$sp\{dL^k_{f_n}h\} = sp\{dL^k_{f_n}\bar{h}_j, dL^k_{f_n}\hat{h}_j\}$$

Seja $\bar{U}$ a subvariedade aberta e densa em $\bar{V}$, com complementar analítico, tal que as codistribuições analíticas $\bar{\Omega}_k$, $\bar{\Omega}_k + sp\{dx\}$, $k=0,\ldots,n$ são não singulares. Assim podemos enunciar as seguintes propriedades geométricas de Σ_n:

Lema 3.5 : Em $\bar{U}$ valem as seguintes afirmativas :

(i) $\bar{\Omega}_k \cap sp\{dx\}$ *é uma codistribuição analítica não singular,* $k=0,\ldots,n$.

(ii) $L^k_{f_n}\bar{h}_k = \bar{y}^{(k)}_k = \bar{v}_k$, $k=1,\ldots,n$

(iii) $L^k_{f_n}\hat{h}_k = \hat{y}^{(k)}_k(x, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$, $k=1,\ldots,n$

(*iv*) $sp\{g_n\} \subset (\bar{\Omega}_k)^{\perp}$, $k=0,\dots,n-1$

(*v*) $L_{f_n}(L_{f_n}^{n}\bar{h}_n)=L_{f_n}\bar{v}_n=0$

(*vi*) $L_{g_n}(L_{f_n}^{n}\bar{h}_n)=L_{g_n}\bar{v}_n=[\ I_{\sigma_n}\quad 0\ ]$

(*vii*) $dL_{f_n}^{n}\hat{h}_n \in \bar{\Omega}_{n-1}+sp\{dL_{f_n}^{n}\bar{h}_n\}$

(*viii*) $[\bar{\Omega}_k \cap sp\{g_n\}^{\perp}]$ *é uma codistribuição analítica e não singular para* $k=0,\dots,n$.

(*ix*) $\Delta=\bar{\Omega}_n^{\perp}$ *é a distribuiçao* (f_n,g_n)*-invariante maximal contida em* $sp\{dh\}^{\perp}$, *sendo não-singular, involutiva e tal que* $[f_n,\Delta]\subset\Delta$ *e* $[g_n,\Delta]$.

Prova : (i) Temos

$$d[\bar{\Omega}_k \cap sp\{dx\}]= d[\bar{\Omega}_k + sp\{dx\}]-d(\bar{\Omega}_k)-d[sp\{dx\}].$$

Como $\bar{\Omega}_k, sp\{dx\}$ e $\bar{\Omega}_k+sp\{dx\}$ são codistribuições não singulares e analíticas, então $\bar{\Omega}_k \cap sp\{dx\}$ é não singular. Sabemos que o anulador de uma distribuição $\mathcal{R}$ (respectivamente, codistribuição) analítica não singular é uma codistribuição $\mathcal{R}^{\perp}$ (respec.distribuição) analítica não singular. Lembremos também que $(\mathcal{R}^{\perp})^{\perp}=\mathcal{R}$. Segue-se da igualdade $\bar{\Omega}_k \cap sp\{dx\}= [\bar{\Omega}_k^{\perp}+sp\{dx\}^{\perp}]^{\perp}$ e do fato acima aplicado repetidas vezes, que $\bar{\Omega}_k \cap sp\{dx\}$ é não singular e analítica.

(ii), (iii), (iv) Note da equação (3.18) que

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{y}}_1 \\ \dot{\hat{y}}_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} <d\bar{h}_1,\ f_n> \\ <d\hat{h}_1,\ f_n> \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} <d\bar{h}_1,\ g_n> \\ <d\hat{h}_1,\ g_n> \end{bmatrix}u_n=$$

$$=\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \dot{\hat{y}}_1(x,\bar{v}_1) \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

e assim, vê-se que

$$L_{f_n}\bar{h}_1=<d\bar{h}_1,\ f_n>=\bar{v}_1\ , \qquad <d\bar{h}_1,\ g_n>=0,$$

$$L_{f_n}\hat{h}_1=<d\hat{h}_1,\ f_n>=\dot{\hat{y}}_1(x,\bar{v}_1) \qquad <d\hat{h}_1, g_n>=0,$$

Por indução, suponha que (ii),(iii) e (iv) são verdadeiras para $j=1,\dots,k-1$.

Mostremos que tais afirmações são válidas para $k \leq n$. Para isso observe que, da eq. (3.27), decorre que

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_k^{(k)} \\ \hat{y}_k^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} <dL_{f_n}^{k-1}\bar{h}_k, f_n> \\ <dL_{f_n}^{k-1}\hat{h}_k, f_n> \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} <dL_{f_n}^{k-1}\bar{h}_k, g_n> \\ <dL_{f_n}^{k-1}\hat{h}_k, g_n> \end{bmatrix} u_n =$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{v}_k \\ \hat{y}_k^{(k)}(x_k) \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

e assim, vê-se que

$$L_{f_n}^k \bar{h}_k = \bar{v}_k \quad , \qquad <dL_{f_n}^{k-1}\bar{h}_k, g_n> = 0,$$

$$L_{f_n}^k \hat{h}_k = \hat{y}_k^{(k)}(x_k) \ , \ <dL_{f_n}^{k-1}\hat{h}_k, g_n> = 0,$$

e isso mostra (ii), (iii), (iv).

(v),(vi) Note que, da eq. (3.28.a), podemos escrever :

$$\dot{\bar{v}}_n = <d\bar{v}_n, f_n> + <d\bar{v}_n, g_n> u_n = \bar{u}_n$$

e assim $<d\bar{v}_n, f_n> = 0$ e $<d\bar{v}_n, g_n> = \begin{bmatrix} I_{\sigma_n} & 0 \end{bmatrix}$.

(vii) De (ii) e (iii) vemos que

$$\bar{\Omega}_k + sp\{dx\} = sp\{dx, d\bar{v}_1, \ldots, d\bar{v}_k\} \quad , \ k = 0, \ldots, n$$

sendo que o conjunto do lado esquerdo da eq. acima é LI (lembre que os pontos de $\bar{U}$ são da forma $(x, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$). De (ii) e (iii) vemos também que podemos escrever as diferenciais $dL_{f_k}^k \hat{h}_k$ da forma :

$$dh = \eta_0 dx \tag{3.36.a}$$

$$dL_{f_k}^k \hat{h}_k = \eta_k dx + \sum_{j=1}^{k} \nu_{kj} d\bar{v}_j \quad , \ k = 1, \ldots, n \tag{3.36.b}$$

Onde η_k e ν_{kj} são vetores linha de funções analíticas adequados. Mas de (ii) teremos $dL_{f_k}^k \bar{h}_k = d\bar{v}_k$. Assim, é fácil verificar que

$$\bar{\Omega}_k \cap sp\{dx\} = sp\{\eta_0 dx, , \ldots, \eta_k dx\} \quad , \ k = 0, \ldots, n \tag{3.37.a}$$

$$\bar{\Omega}_k = sp\{\eta_0 dx, , \ldots, \eta_k dx\} + sp\{d\bar{v}_1, \ldots, d\bar{v}_k\} \quad , \ k = 0, \ldots, n \tag{3.37.b}$$

De (i) segue-se que existe $\bar{n}$ com $0 \leq \bar{n} \leq n$ tal que

$$\eta_{\bar{n}} dx \in sp\{\eta_0 dx, , \ldots, \eta_{\bar{n}-1} dx\} \tag{3.38}$$

pois caso contrário a dimensão de $\bar{\Omega}_n \cap sp\{dx\}$ suplantaria n. Logo

$$dL_{f_n}^{\bar{n}} \hat{h}_{\bar{n}} = \eta_{\bar{n}} dx + \sum_{j=1}^{\bar{n}} \nu_{\bar{n}j} d\bar{v}_j \in sp\{\eta_0 dx, , \ldots, \eta_{\bar{n}-1} dx, d\bar{v}_1, \ldots, d\bar{v}_{\bar{n}-1}\} + sp\{d\bar{v}_{\bar{n}}\} =$$
$$= \bar{\Omega}_{\bar{n}-1} + sp\{d L_{f_n}^{\bar{n}} \bar{h}_{\bar{n}}\} \tag{3.39}$$

Portanto

$$dL_{f_n}^{\bar{n}+1} \hat{h}_{\bar{n}} = L_{f_n}(dL_{f_n}^{\bar{n}} \hat{h}_{\bar{n}}) \in \bar{\Omega}_{\bar{n}-1} + L_{f_n}(\bar{\Omega}_{\bar{n}-1}) + sp\{d L_{f_n}^{\bar{n}} \bar{h}_{\bar{n}}\} + sp\{d L_{f_n}^{\bar{n}+1} \bar{h}_{\bar{n}}\}$$

e como $\bar{\Omega}_{\bar{n}} = \bar{\Omega}_{\bar{n}-1} + L_{f_n}(\bar{\Omega}_{\bar{n}-1})$, $d L_{f_n}^{\bar{n}} \bar{h}_{\bar{n}} \in \bar{\Omega}_{\bar{n}}$, $\hat{h}_{k+1}$ é um subvetor de $\hat{h}_k$ e $\bar{h}_k$ é um subvetor de $\bar{h}_{k+1}$, segue-se que

$$dL_{f_n}^{\bar{n}+1} \hat{h}_{\bar{n}+1} \in \bar{\Omega}_{\bar{n}} + sp\{d L_{f_n}^{\bar{n}+1} \bar{h}_{\bar{n}+1}\} \tag{3.40}$$

E como só usamos (3.39) para mostrar (3.40), segue-se por indução que (vii) é verdadeiro.

(viii) De (iv) segue-se que (viii) é verdadeiro para $k=0, \ldots, n-1$, pois $\bar{\Omega}_k$ é não singular em $\bar{U}$ e portanto $\left(\bar{\Omega}_k \cap sp\{g_n\}^{\perp}\right) = \left(\bar{\Omega}_k^{\perp} + sp\{g_n\}\right)^{\perp} = \bar{\Omega}_k$ é também não singular. Assim resta mostrar tal fato para $k=n$. Para isso defina

$\bar{g}_n$ = primeiras σ_n colunas de g_n

$\hat{g}_n$ = últimas $m-\sigma_n$ colunas de g_n.

De (iv), (vi) e de (vii) vemos que

$$\begin{bmatrix} <dL_{f_n}^{n} \bar{h}_n, g_n> \\ <dL_{f_n}^{n} \hat{h}_n, g_n> \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\sigma_n} & 0 \\ X & 0 \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

E assim de (iv) e da eq. anterior, é fácil verificar que $\left(\bar{\Omega}_n^{\perp} \cap sp\{g_n\}\right) = sp\{\hat{g}_n\}$ mostrando pela prop. (3.4) que a distribuição do lado esquerdo da última equação é não singular. Como $\bar{\Omega}_n$, $sp\{g_n\}$ são não singulares e

$$d\left[\bar{\Omega}_n^{\perp}+sp\{g_n\}\right]=d(\bar{\Omega}_n^{\perp})+d(sp\{g_n\})-d\left[\bar{\Omega}_n^{\perp}\cap sp\{g_n\}\right]$$

segue-se que $\bar{\Omega}_n^{\perp}+sp\{g_n\}$ é não singular e portanto $\left[\bar{\Omega}_n\cap sp\{g_n\}^{\perp}\right]$ é também não singular, já que $\left[\bar{\Omega}_n\cap sp\{g_n\}^{\perp}\right]=\left[\bar{\Omega}_n^{\perp}+sp\{g_n\}\right]^{\perp}$.

(ix) Considere o algorítmo (vide teo. 2.6, e proposições 2.7 e 2.8)

$$\bar{\Omega}_0=sp\{dh\}$$

$$\bar{\Omega}_k=\bar{\Omega}_{k-1}+L_{f_n}\left[\bar{\Omega}_{k-1}\cap sp\{g_n\}^{\perp}\right]+L_{g_n}\left[\bar{\Omega}_{k-1}\cap sp\{g_n\}^{\perp}\right]$$

Pelo lema 3.5 parte (iv) é fácil verificar por indução que as codistribuições geradas pelo algorítimo acima coincidem com as da eq. (3.33) para $k=0,\dots,n$. De fato, isso é verdadeiro para $k=0$. Suponha válido para $k-1$, com $k-1<n$. Então, $\bar{\Omega}_{k-1}=sp\left\{dL_{f_n}^{j}h;\, j=0,\dots,k-1\right\}$. Do lema 3.5 parte (iv) teremos $\bar{\Omega}_{k-1}\cap sp\left\{g_n\right\}^{\perp}=\bar{\Omega}_k$ e $L_{g_n}(dL_{f_n}^{j}h)=dL_{g_n}(L_{f_n}^{j}h)=d<dL_{f_n}^{j}h,g_n>=0$, mostrando o resultado para k. Note agora que, pela definição de $\bar{U}$ e do lema 3.5 parte (viii) temos que as codistribuições $\bar{\Omega}_k$, $\bar{\Omega}_k\cap sp\left\{g_n\right\}^{\perp}$ $(k=0,\dots,n)$ são não singulares. Assim, se mostrarmos que :

(a) $L_{f_n}\left[\bar{\Omega}_n\right]\subset\bar{\Omega}_n$

(b) $L_{g_n}\left[\bar{\Omega}_n\right]\subset\bar{\Omega}_n$

resulta do teo. 2.6, prop. 2.7 e 2.8 que Δ é distribuição (f_n,g_n)-invariante maximal contida em kerdh, sendo involutiva (por ser gerada por um conjunto de diferenciais de funções) e não singular em $\tilde{U}$. Note de (1.17) que (a) e (b) são equivalentes a

(c) $[f_n,\Delta]\subset\Delta$

(d) $[g_n,\Delta]\subset\Delta$.

Para mostrar (a) aplica-se o lema 3.5 partes (v) e (vii) , resultando em $dL_{f_n}^{n+1}\bar{h}_n=0$ e $dL_{f_n}^{n+1}\hat{h}_n\in\bar{\Omega}_n$. Assim

$$\begin{aligned}L_{f_n}\left[\bar{\Omega}_n\right]&=L_{f_n}\left[sp\{dL_{f_n}^{j}\bar{h}_n,dL_{f_n}^{j}\hat{h}_n\ ;\ j=0,\dots,n\}\right]\subset\\&\subset\bar{\Omega}_n+sp\left\{dL_{f_n}^{n+1}\bar{h}_n,dL_{f_n}^{n+1}\hat{h}_n\right\}=\\&=\bar{\Omega}_n\end{aligned}$$

Para mostrar (b) aplica-se o lema 3.5 parte (iv) resultando em $L_{g_n}(dL_{f_n}^{j}\bar{h}_n)=0$, $L_{g_n}(dL_{f_n}^{j}\hat{h}_n)=0$, $j=0,\dots,n-1$. Em particular,

$$L_{g_n}(\bar{\Omega}_{n-1}) \subset \bar{\Omega}_{n-1}$$

Pelo lema 3.5 partes (vi), (vi) e (vii), teremos

$$L_{g_n}(dL_{f_n}^n \bar{h}_n) = dL_{g_n}(L_{f_n}^n \bar{h}_n) = d[\, I_{\sigma_1} \;\; 0 \,] = 0$$

$$L_{g_n}(dL_{f_n}^n \hat{h}_n) \in L_{g_n}\left(\bar{\Omega}_{n-1} + sp\{dL_{f_n}^n \bar{h}_n\}\right) \subset \bar{\Omega}_n$$

logo, das três últimas equações acima, teremos

$$L_{g_n}\left(\bar{\Omega}_n\right) = L_{g_n}\left(\bar{\Omega}_{n-1} + sp\{dL_{f_n}^n \bar{h}_n, dL_{f_n}^n \hat{h}_n\}\right) \subset$$

$$\subset \bar{\Omega}_n + \left(sp\{L_{g_n}(dL_{f_n}^j \bar{h}_n), L_{g_n}(dL_{f_n}^j \hat{h}_n) \;;\; j=0,\ldots,n\}\right) \subset \bar{\Omega}_n. \qquad \square$$

3.6 Ferramental Geométrico para a Solução do Problema de Desacoplamento da Perturbação por Realimentação Dinâmica Regular (PDPRDR)

Nesta seção desenvolveremos o ferramental geométrico para a demonstração do nosso resultado principal, apresentado somente na seção 3.7. Tal ferramental é baseado na geometria do sistema estendido (SE) e na geometria do sistema compensado estendido (SCE). O lema 3.7 e a proposição 3.8 serão utilizados na prova da necessidade do nosso resultado principal. O lema 3.5 da seção 5 e a proposição 3.10 serão utilizados para demonstração da suficiência. Os outros resultados da presente seção são apenas auxiliares. O lema auxiliar a seguir é utilizado na prova do lema 3.7 e generaliza a proposição 3.1 :

Lema 3.6 : Seja o sistema analítico evoluindo em uma variedade analítica $\mathcal{N}$ de dimensão n, dado pela eq. (3.1.a-b). Seja $\tilde{\Omega}_k$ ($k=0,\ldots,n$) a sequência de codistribuições definida pela eq. (3.32) e suponha que $\tilde{P} \subset \tilde{\Omega}_k^{\perp}$ para $k<p$, onde $0 \leq p \leq n-1$. Então as derivadas formais das saídas de ordem até $p+1$, ao longo da solução deste sistema, são dadas por

(i) $\quad y^{(k)} = L_{\tilde{f}}^{k} h \quad , \quad k=0,\ldots,p$

(ii) $y^{(p+1)} = L_{\tilde{f}}^{p+1} h + \langle dL_{\tilde{f}}^{p} h, \tilde{p} \rangle q$

Prova : Calculemos as derivadas formais em coordenadas. Para $k=0$ a igualdade (i) é imediata. Suponhamos que (i) é válida para k. Então,

$$y^{(k+1)} = \frac{\partial y^{(k)}}{\partial x}(f + g u + pq) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\partial y^{(k)}}{\partial u^{(j)}} u^{(j+1)} =$$

$$= \frac{\partial y^{(k)}}{\partial x}(f + g u) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\partial y^{(k)}}{\partial u^{(j)}} u^{(j+1)} + \frac{\partial y^{(k)}}{\partial x} pq$$

$$= \langle dL_{\tilde{f}}^{k} h, \tilde{f} \rangle + \langle dL_{\tilde{f}}^{k} h, \tilde{p} \rangle q = L_{\tilde{f}}^{k+1} h + \langle dL_{\tilde{f}}^{k} h, \tilde{p} \rangle q$$

Assim, se $k=p$, a eq. acima fornece (ii). Caso contrário teremos $\langle dL_{\tilde{f}}^{k} h, \tilde{p} \rangle = 0$, fornecendo (i) para $k+1$ e concluindo a prova. Cabe observar que uma condição suficiente para que as derivadas formais coincidam com as derivadas temporais das saídas é que a entrada $u(\cdot)$ e a perturbação $q(\cdot)$ sejam funções "suaves". □

O lema a seguir é uma condição geométrica do sistema SCE, necessária para solução do PDPRDR.

Lema 3.7 : Suponha que uma realimentação dinâmica analítica $(\alpha, \beta, \Psi, \Phi)$ *fornece solução local para o problema de desacoplamento de distúrbios em um aberto* $\mathcal{B} \subset \mathcal{N} \times E$. *Seja* (h_e, f_e, g_e, p_e) *o sistema compensado estendido (SCE) da eq. (3.9), definido em* $\mathcal{M} = \mathcal{B} \times (\mathbb{R}^m)^n$. *Seja* $y_e^{(k)} : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}^l$ $(k=0, \ldots, n)$ *tal que*

$$y_e^{(k)}(x, z, v^{(0)}, \ldots, v^{(k-1)}) = L_{f_e}^{k} h_e$$

e defina a sequência Ω_k^e $(k=0, \ldots, n-1)$ *de codistribuições em* $\mathcal{M}$, *pondo*

$$\Omega_k^e = sp\left\{ dL_{f_e}^{j} h_e \ : \ j=0, \ldots, k \right\}$$

Então $P_e \subset \Omega_k^{e\,\perp}$ $\quad (k=0, \ldots, n-1)$.

Prova : Seja $k \leq n-1$ o menor inteiro tal que exista $\xi_e \in \mathcal{M}$ tal que $P_e(\xi_e)$ não está

contido em $\Omega_k^{e\perp}(\xi_e)$. Em outras palavras

$$<dy_e^{(k)}, p_e> (\xi_e) \neq 0$$

Assim, por continuidade, $<dy_e^{(k)}, p_e>$ será não nulo num aberto $A_e \subset \mathcal{M}$ que contém ξ_e. Pelo lema 3.6 aplicado ao sistema compensado, teremos

$$y^{(k+1)} = y_e^{(k+1)} + <dy_e^{(k)}, p_e> q$$

Assim, para uma condição inicial (x_0, z_0) e se $v(\cdot)$ é uma entrada C^∞ tal que $(x_0, z_0, v^{(0)}(t_0), \ldots, v^{(k-1)}(t_0)) \in A_e$, teremos que é possível construir uma perturbação $q(\cdot)$ que influencie a saída. □

Seja uma realimentação dinâmica analítica da forma (3.2) em um aberto $\mathcal{B} \subset \mathcal{N} \times E$ e defina a aplicação analítica (vide lema 2.20)

$$\delta : \mathcal{B} \times (\mathbb{R}^m)^n \mapsto \tilde{N}$$

pondo

$$\delta(x, z, v^{(0)}, \ldots, v^{(n-1)}) = (x, u^{(0)}, \ldots, u^{(n-1)})$$

onde

$$u^{(0)} = \alpha(x, z) + \beta(x, z) v^{(0)}$$

$$u^{(i)} = L_{f_e} u^{(i-1)}, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

e sejam as aplicações analíticas $y_e^{(k)} : \mathcal{B} \times (\mathbb{R}^m)^n \mapsto \mathbb{R}^l$ e $\tilde{y}^{(k)} : \tilde{N} \mapsto \mathbb{R}^l$ tais que

$$y_e^{(k)} = L_{f_e}^k h \ , \ k = 0, \ldots, n$$

$$\tilde{y}^{(k)} = L_{\tilde{f}}^k h \ , \ k = 0, \ldots, n$$

A proposição seguinte mostra que os campos $\tilde{f}$ e f_e são δ-relacionados. Isso implicará na "regra da cadeia", isto é, as derivadas formais das saídas do sistema compensado (SC) são obtidas das derivadas formais das saídas do sistema (SCE) pela composição da aplicação δ. Tal propriedade permitirá fazer o transporte ("push forward" por δ) da condição necessária da proposição 3.7 (que é uma condição geométrica sobre o SCE) para uma condição sobre o SE, ou seja, da variedade $\tilde{N}$.

Mais ainda, tal proposição garantirá que este transporte atingirá pelo menos um aberto de $\tilde{N}$.

Proposição 3.8 : Então :

(i) $\delta_* f_e = \tilde{f} \circ \delta$

(ii) $y_e^{(k)} = \tilde{y}^{(k)} \circ \delta$, $k=0,\dots,n$

(iii) Suponha que a realimentação dinâmica que dá origem ao sistema compensado é regular. Então, existe um conjunto aberto $D \subset \mathcal{B} \times (\mathbb{R}^m)^n$ *tal que* $\delta(D)$ *é aberto em* $\tilde{N}$.

Prova : Inicialmente mostraremos que f_e e $\tilde{f}$ são δ-relacionados, isto é,

$$\delta_* f_e = \tilde{f} \circ \delta \tag{3.42}$$

Para isso suponha que $(w_1,\dots,w_n)$, onde $w_i \in \mathbb{R}^m$, $i=1,\dots,n$, é o sistema de coordenadas canônico de $(\mathbb{R}^m)^n$ e seja (z) o sistema de coordenadas canônico de E. Sejam as projeções canônicas

$$\pi_1 : \tilde{N} \mapsto \mathcal{N} \ , \ \pi_2 : \tilde{N} \mapsto (\mathbb{R}^m)^n$$

$$\pi_1^e : \mathcal{B} \times (\mathbb{R}^m)^n \mapsto \mathcal{N} \ , \ \pi_E^e : \mathcal{B} \times (\mathbb{R}^m)^n \mapsto E, \pi_2^e : \mathcal{B} \times (\mathbb{R}^m)^n \mapsto (\mathbb{R}^m)^n$$

Escolhida uma carta $(U, \phi = (x_1,\dots,x_n))$ de $\mathcal{N}$, induzimos cartas locais $(\tilde{x}, \tilde{w}_1,\dots,\tilde{w}_n)$ de $\tilde{N} = \mathcal{N} \times (\mathbb{R}^m)^n$ e $(x_e, z_e, w_{e_1},\dots,w_{e_n})$ de $\mathcal{B} \times (\mathbb{R}^m)^n$, onde

$$\tilde{x} = \phi \circ \pi_1 \quad , \quad \tilde{w}_i = w_i \circ \pi_2$$

$$x_e = \phi \circ \pi_1^e \quad , \quad z_e = z \circ \pi_E^e \ , \quad w_{e_i} = w_i \circ \pi_2^e \ ,$$

As cartas desta natureza formam um atlas de $\tilde{N}$ e $\mathcal{B} \times (\mathbb{R}^m)^n$. Assim é suficiente mostrar que a igualdade (3.42) vale nestas coordenadas. Para isso observe que para todo $\xi \in \tilde{N}$ e $\varsigma \in \mathcal{B} \times (\mathbb{R}^m)^n$, teremos da definição de $\tilde{f}$ e f_e (eq. (3.7.a) e eq. (3.9.a) :

$$<d\tilde{x}, \tilde{f}> (\xi) = <dx, f + g\tilde{w}_i> (\pi_1(\xi))$$

$$<dx_e, f_e> (\varsigma) = <dx, f + g u^{(0)}> (\pi_1^e(\varsigma))$$

e do fato de

$$x_e = \tilde{x} \circ \delta$$

$$\pi_1^e = \pi_1 \circ \delta$$

$$u^{(i-1)} = \tilde{w}_i \circ \delta \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

Teremos

$$\begin{aligned} <d\tilde{x}, \tilde{f} \circ \delta(\varsigma)> &= <dx_e, f_e(\varsigma)> = \\ &= <d(\tilde{x} \circ \delta), f_e(\varsigma)> = \\ &= <d\tilde{x}, \delta_* f_e(\varsigma)>. \end{aligned}$$

Analogamente, da definição de $\tilde{f}$ e de $u^{(i)}$ teremos :

$$<d\tilde{w}_i, \tilde{f}> (\xi) = L_{\tilde{f}} \tilde{w}_i(\xi) = \tilde{w}_{i+1}$$

$$<du^{(i-1)}, f_e> (\varsigma) = L_{f_e} u^{(i-1)}(\varsigma) = u^{(i)}(\varsigma)$$

mas note que $u^{(i)} = \tilde{w}_{i+1} \circ \delta(\xi)$ e portanto

$$\begin{aligned} <d\tilde{w}_i, \tilde{f} \circ \delta(\varsigma)> &= \tilde{w}_{i+1} \circ \delta(\varsigma) \\ &= u^{(i)}(\varsigma) \\ &= <du^{(i)}, f_e(\varsigma)> \\ &= <d(\tilde{w}_i \circ \delta), f_e(\varsigma)> \\ &= <d\tilde{w}_i, \delta_* f_e(\varsigma)>. \end{aligned}$$

Logo, como (3.42) vale coordenada a coordenada, ela é válida em $\mathcal{B} \times (\mathbb{R}^m)^n$. Agora mostremos que $y_e^{(k)} = \tilde{y}^{(k)} \circ \delta$, $k=0, \ldots, n$ por indução em k. Para $k=0$, tal afirmação é imediata porque y=h(x) só é função de x. Supondo válida para k, teremos :

$$\begin{aligned} y_e^{(k+1)} &= L_{f_e}(L_{f_e}^k h) \\ &= L_{f_e}(L_{\tilde{f}}^k h \circ \delta) \\ &= <d(L_{\tilde{f}}^k h \circ \delta), f_e> \\ &= <dL_{\tilde{f}}^k h, \delta_* f_e> = \\ &= <dL_{\tilde{f}}^k h, \tilde{f} \circ \delta> = (L_{\tilde{f}}^{k+1} h) \circ \delta = \tilde{y}^{(k+1)} \circ \delta \end{aligned}$$

Como a realimentação é regular, pelo lema 2.20 teremos que a matriz jacobiana

$$J\delta(x,z,v^{(0)},\ldots,v^{(n-1)})=\frac{\partial(x,u^{(0)},\ldots,u^{(n-1)})}{\partial(x,z,v^{(0)},\ldots,v^{(n-1)})}$$

possui pôsto genérico pleno de linha. Em particular, dos resultados da seção 1.8 do capítulo 1, existe uma subvariedade aberta e densa D com complementar analítico tal que o pôsto de $J\delta$ é pleno de linha em D. Logo a imagem de D é um aberto em $\tilde{N}$, pois a aplicação δ restrita a D é uma submersão (uma submersão é uma aplicação aberta, vide cap.1). □

A proposição a seguir define uma projeção π entre os espaços de estados do sistema estendido (SE) e do sistema Σ_n obtido no enésimo passo do algorítmo 3.2. Mostramos também que as derivadas formais do sistema são obtidas das derivadas de Lie $L^k_{f_n}h$ compostas com π. Tal resultado permitirá o transporte das nossas condições suficientes em $\tilde{N}$ sobre condições em $\bar{U}$ que vão garantir que Σ_n forneça uma solução para o PDPRDR.

Proposição 3.9: *Defina a aplicação analítica* $\pi:\tilde{N}\mapsto\mathcal{N}\times\mathbb{R}^{\sigma_1}\times\ldots\times\mathbb{R}^{\sigma_n}$ *tal que*

$$\pi(x,u,\ldots,u^{(n-1)})=(x,\bar{h}_1^{(1)},\ldots,\bar{h}_n^{(n)})$$

onde $\bar{h}_i^{(i)}=L^i_{\tilde{f}}\bar{h}_i$, *onde* $\bar{h}_i$ *é o subconjunto das entradas obtido no i-ésimo passo do algorítmo* (3.2). *Então existe* $\tilde{U}\subset\tilde{N}$ *aberto e denso em* $\tilde{N}$, *complementar de um subconjunto analítico, tal que*

(*i*) $\pi|\tilde{U}:\tilde{U}\mapsto\bar{U}$ *é uma submersão sobrejetiva de classe* C^ω;

(*ii*) $L^k_{\tilde{f}}h(\xi)=L^k_{f_n}h\circ\pi(\xi)$, *para todo* $\xi\in\tilde{U}$.

(*iii*) *Sejam as sequências de codistribuições* $\tilde{\Omega}_k$ *e* $\bar{\Omega}_k$, $k=0,\ldots,n$ *definidas respectivamente em* $\tilde{U}$ *e* $\bar{U}$ *por* (3.32) *e* (3.33). *Então em* $\tilde{U}$

teremos :

(iii.a) $\pi^*\bar{\Omega}_k \circ \pi = \tilde{\Omega}_k$, $k=0,\dots,n$

(iii.b) $\pi^*(\bar{\Omega}_k + sp\{dx\}) \circ \pi = \tilde{\Omega}_k + sp\{dx\}$, $k=0,\dots,n$

(iii.c) $\pi^*(\bar{\Omega}_k \cap sp\{dx\}) \circ \pi = \tilde{\Omega}_k \cap sp\{dx\}$, $k=0,\dots,n$

mais ainda, $d(\bar{\Omega}_k) = d(\tilde{\Omega}_k)$, $d(\bar{\Omega}_k + sp\{dx\}) = d(\tilde{\Omega}_k + sp\{dx\})$, $d(\bar{\Omega}_k \cap sp\{dx\}) = d(\tilde{\Omega}_k \cap sp\{dx\})$, $k=0,\dots,n$ *e portanto todas essas codistribuições são analíticas e não singulares, respectivamente em* $\bar{U}$ *e* $\tilde{U}$.

Prova : Como π é analítica por definição, construiremos $\tilde{U}$ e mostremos inicialmente que $\pi|\tilde{U}:\tilde{U} \mapsto \bar{U}$ é uma submersão sobrejetiva. Para isso note pelo lema (3.5) parte (ii) que o sistema compensado Σ_n fornecido no enésimo passo do algorítimo 3.2 é tal que que a escolha da condição inicial $(x, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ em $\bar{U}$ define as derivadas das saídas :

$$\bar{v}_i = \bar{y}_i^{(i)} = L_{\bar{f}_n}^{i} \bar{h}_i \tag{3.43.a}$$

Seja $\delta : \bar{U} \times (\mathbb{R}^m)^n \mapsto \tilde{N}$ é a aplicação analítica tal que $\delta(x, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n, u_n^{(0)}, \dots, u_n^{(n-1)}) = (x, u^{(0)}, \dots, u^{(n-1)})$ onde $u^{(0)} = \alpha_e(x_n) + \beta_e(x_n) u_n$ e $u^{(i)} = L_{f_e} u^{(i-1)}$, $i=1,\dots,n-1$. Pela proposição (3.6) e pelo lema (3.5) parte (ii), teremos:

$$L_{f_e}^{i} \bar{h}_i = \bar{v}_i = (L_{\tilde{f}}^{i} \bar{h}_i) \circ \delta \tag{3.43.b}$$

assim concluímos de (3.43.a) e (3.43.b) que

$$\pi \circ \delta(x, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n, u_n^{(0)}, \dots, u_n^{(n-1)}) = (x, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) \tag{3.43.c}$$

Logo $(\pi \circ \delta)(\bar{U} \times (\mathbb{R}^m)^n)$ contém $\bar{U}$, ou seja, π mapeia a imagem de δ num conjunto que contém $\bar{U}$. Note agora que $(\pi \circ \delta)_*$ é uma aplicação linear sobrejetiva para cada ponto de $\bar{U} \times (\mathbb{R}^m)^n$. Mas temos $(\pi \circ \delta)_* = \pi_* \delta_*$ e portanto π_* é uma aplicação linear sobrejetiva para todo ponto da imagem da aplicação δ. Como a realimentação dinâmica considerada é regular (prop. (3.4)) , pela proposição (3.7) existe um aberto $B \subset \bar{U} \times (\mathbb{R}^m)^n$ tal que $A = \delta(B)$ é um aberto de $\tilde{N}$. Em particular π_* é uma submersão

em A e portanto possui pôsto genérico pleno em $\tilde{N}$. Seja $\tilde{U}_1 \subset \tilde{N}$ o complementar de um conjunto analítico fechado de interior vazio tal que π_* é uma aplicação linear sobrejetiva em $\tilde{U}$. Por definição teremos que $\tilde{U}_1$ contém a imagem de δ. Defina $\tilde{U} = \tilde{U}_1 \cap \pi^{-1}(\bar{U})$. Segue-se que (i) é verdadeira para $\tilde{U}$. Para provar (ii) note de (3.43.b) e (3.43.c) e do lema 3.5 partes (ii) e (iii), que

$$L^i_{f_e} h = L^i_{f_n} h \circ \pi \circ \delta$$

portanto, pela proposição 3.8 e a equação anterior, teremos

$$L^i_{f_n} h \circ \pi \circ \delta = (L^i_{\tilde{f}} h) \circ \delta$$

Assim vale a igualdade $L^i_{f_n} \bar{h}_i \circ \pi = (L^i_{\tilde{f}} h_i)$ para todo ponto da imagem de δ. Em particular isto ocorre no aberto $A \subset \pi^{-1}(\bar{U}) \subset \tilde{N}$. Como tais funções são analíticas em $\pi^{-1}(\bar{U})$, segue-se pelo princípio da extensão analítica que a igualdade vale em $\pi^{-1}(\bar{U})$ e portanto em $\tilde{U}$.

Provemos agora (iii). Pela proposição parte 3.9 (ii), teremos

$$y^{(k)} = L^k_{\tilde{f}} h = (L^k_{f_n} h) \circ \pi$$

por outro lado, funções coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{N}$ induzem em $\tilde{U}$ e $\bar{U}$ funções $\tilde{x}_i$ e $\bar{x}_i$ tais que

$$\tilde{x}_i = \bar{x}_i \circ \pi$$

Mostremos agora que, se $\bar{\theta} : \bar{U} \mapsto \mathbb{R}$ e $\tilde{\theta} : \tilde{U} \mapsto \mathbb{R}$ são analíticas tais que $\tilde{\theta} = \theta \circ \pi$, então $\pi^* d\bar{\theta} \circ \pi = d\tilde{\theta}$. Note que tal afirmação faz sentido pois π^* em $\xi \in \tilde{U}$ é uma aplicação linear de $T^*_{\pi(\xi)}\bar{U}$ em $T^*_\xi \tilde{U}$. Por outro lado, seja $\tilde{\tau} \in T_\xi \tilde{U}$. Por definição :

$$\begin{aligned} &< \pi^* d\bar{\theta}(\pi(\xi)), \tilde{\tau} > = \\ &= < d\bar{\theta}(\pi(\xi)), \pi_* \tilde{\tau} > = \\ &= < d(\bar{\theta} \circ \pi)(\xi), \tilde{\tau} > = < d\tilde{\theta}(\xi), \tilde{\tau} > \end{aligned}$$

E como isto é válido para todo $\tilde{\tau} \in T_\xi \tilde{U}$, segue-se a igualdade esperada. Assim, podemos escrever :

$$\pi^* \bar{\Omega}_k \circ \pi = \pi^* \operatorname{sp}\left\{ dL^j_{f_n} h \ : \ j = 0, \ldots, k \right\} \circ \pi$$

$$=\mathrm{sp}\left\{\pi^* dL^j_{f_n} h\circ\pi \ : \ j=0,\dots,k\right\}$$
$$=\mathrm{sp}\left\{dL^j_{\tilde{f}} h \ : \ j=0,\dots,k\right\}=\tilde{\Omega}_k$$

e procede-se analogamente para $\bar{\Omega}_k+\mathrm{sp}\{dx\}$, mostrando-se (iii.a) e (iii.b). Como π é uma submersão, π_* é um mapa linear sobrejetivo e portanto π^* é um mapa linear injetivo. Assim π^*, num ponto ξ de $\tilde{U}$, mapeia um subspaço de $T^*_{\pi(\xi)}\bar{U}$ em um subespaço de $T^*_\xi\tilde{U}$ de mesma dimensão de $T^*_\xi\tilde{U}$. De (iii.a) e (iii.b) vemos que $\pi^*(\bar{\Omega}_k\cap\mathrm{sp}\{dx\})\circ\pi\subset\tilde{\Omega}_k\cap\mathrm{sp}\{dx\}$ sendo que a igualdade decorre da igualdade dimensional. □

A proposição seguinte é a passagem de nossas condições definidas em $\tilde{N}$ para o sistema Σ_n, sendo crucial na prova do resultado principal desta tese.

Proposição 3.10 : *Para todo* $\xi\in\tilde{U}$ *e* $k=0,\dots,n-1$, *teremos*

$$\tilde{P}(\xi)\subset\left[\tilde{\Omega}_k\cap sp\{dx\}\right]^\perp(\xi) \quad\Leftrightarrow\quad \bar{P}(\pi(\xi))\subset\left[\bar{\Omega}_k\cap sp\{dx\}\right]^\perp(\pi(\xi))$$

Prova : Lembremos que funções coordenadas $(x_1,\dots,x_n)$ de $\mathcal{N}$ induzem em $\tilde{U}$ e $\bar{U}$ funções $\tilde{x}_i$ e $\bar{x}_i$ tais que $\tilde{x}_i=\bar{x}_i\circ\pi$. Por definição de $\tilde{p}$ e $\bar{p}$, os valores de suas componentes nas direções $\frac{\partial}{\partial x}$ são coincidentes, isto é

$$<d(\bar{x}_i\circ\pi),\tilde{p}>(\xi)=<d\bar{x}_i,\bar{p}>(\pi(\xi)) \tag{3.44}$$

Localmente, em torno de cada ponto de $\bar{U}$, existe um conjunto de campos covetores dado por $\{\bar{\omega}_1,\dots,\bar{\omega}_s\}$ tal que $\bar{\omega}_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}d\bar{x}_j$ tais que $\bar{\Omega}_k\cap\mathrm{sp}\{dx\}=\mathrm{sp}\{\bar{\omega}_1,\dots,\bar{\omega}_s\}$. Assim pela proposição 3.9), teremos

$$\tilde{\Omega}_k\cap\mathrm{sp}\{dx\}=\pi^*\mathrm{sp}\{\bar{\omega}_1,\dots,\bar{\omega}_s\}\circ\pi=\ \mathrm{sp}\{\pi^*\bar{\omega}_1\circ\pi,\dots,\pi^*\bar{\omega}_s\circ\pi\}.$$

Assim, é suficiente mostrar que,

$$<\pi^*\bar{\omega}_i\circ\pi,\ \tilde{p}>(\xi)=0 \ \Leftrightarrow\ <\bar{\omega}_i,\ \bar{p}>(\pi(\xi))=0\ ,\ i=1,\dots,s$$

Mas isso é imediato pois, pela prova da proposição 3.9 teremos $\pi^*d\bar{x}_j\circ\pi=d\tilde{x}_j$ e pela

eq. (3.44) segue-se que:

$$<\pi^*\overline{\omega}_i\circ\pi,\ \tilde{p}>(\xi)=<\pi^*(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}d\overline{x}_j\circ\pi),\ \tilde{p}>(\xi)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}<\pi^*(d\overline{x}_j\circ\pi),\ \tilde{p}>(\xi)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}<d\tilde{x}_j,\ \tilde{p}>(\xi)=\ (\text{ eq. } (3.44)\Rightarrow)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}<d\overline{x}_j,\ \overline{p}>(\pi(\xi))$$

$$=<\sum_{j=1}^{n}a_{ij}d\overline{x}_j,\ \overline{p}>(\pi(\xi))=<\overline{\omega}_i,\ \overline{p}>(\pi(\xi)) \qquad \square$$

3.7. Solução do Problema de Desacoplamento da Perturbação por Realimentação Dinâmica Regular (PDPRDR)

Nesta seção utilizaremos os resultados da seção 3.6 para mostrar as condições necessárias e suficientes de solução do PDPRDR. No caso em que tais condições são satisfeitas, o algorítimo de extensão dinâmica da seção 3.5 permite a construção do compensador solução. Enfim, enunciamos o resultado principal de nossa tese :

Teorema 3.11 : *A realimentação dinâmica regular* (α,β,Ψ,Φ) *fornece solução para o problema de desacoplamento de perturbações PDPRDR num aberto* $\mathcal{B}\subset\mathcal{N}\times E$ *se e somente se, para todo ponto* ξ *de* $\tilde{V}$ *tivermos* :

$$\tilde{P}(\xi)\subset\left[\tilde{\Omega}_{n-1}\cap sp\{dx\}\right]^{\perp}(\xi)$$

Prova : (a) Necessidade :

Suponha que existe solução local para o PDPRD. Seja a aplicação $\tilde{y}^{(k)}:\tilde{N}\mapsto\mathbb{R}^i$ tal que $\tilde{y}^{(k)}=L_{\tilde{f}}^{k}h$. Seja $\delta:\mathcal{M}\mapsto\tilde{N}$ definida na proposição (3.6). Note que

$$y_e^{(k)}(x,z,v^{(0)},\dots,v^{(k-1)})=L_{f_e}^{k}h=$$

$$=L_{\tilde f}^{k}h\circ\delta=\tilde y^{(k)}\circ\delta$$

Pelo lema (3.7), se $\Omega_k^e=sp\{dL_{f_e}^{j}h_e \ : \ j=0,\dots,k\}$, então $P_e\subset\Omega_k^{e\perp}$ $(k=0,\dots,n-1)$.

Assim, para todo $\xi\in\mathcal{M}$ teremos

$$0=<dL_{f_e}^{k}h,p_e>(\xi)=$$

$$=<d(L_{\tilde f}^{k}h\circ\delta),p_e>(\xi)=$$

$$=<dL_{\tilde f}^{k}h\circ\delta,\delta_*p_e>(\xi) \qquad (k=0,\dots,n-1)$$

em particular, se $\omega\in\left[\Omega_k\cap sp\{dx\}\right](\delta(\xi))\in T^*_{\delta(\xi)}\tilde N$, $(k=0,\dots,n-1)$, então

$$<\omega,\delta_*p_e(\xi)>=0$$

Note que $\omega=\sum_{j=1}^{n}a_j d\tilde x_j$, onde $a_j\in\mathbb{R}$ (fixamos o ponto). Note também que, pela definição de $\tilde p$ e p_e, que as suas componentes nas direções $\frac{\partial}{\partial x}$ coincidem, isto é $<d(\tilde x_j\circ\delta),p_e(\xi)>=<d\tilde x_j,\tilde p(\delta(\xi))>$. Logo

$$0=<\omega,\delta_*p_e(\xi)>=$$

$$=<\sum_{j=1}^{n}a_j d\tilde x_j,\delta_*p_e(\xi)>=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_j<d\tilde x_j,\delta_*p_e(\xi)>=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_j<d(\tilde x_j\circ\delta),p_e(\xi)>$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_j<d\tilde x_j,\tilde p(\delta(\xi))>=$$

$$=<\sum_{j=1}^{n}a_j d\tilde x_j,\tilde p(\delta(\xi))>=$$

$$=<\omega,\tilde p(\delta(\xi))>$$

Seja $\Delta(\xi)=\left[\tilde\Omega_{n-1}\cap sp\{dx\}\right]^{\perp}(\xi)$. Logo, $\tilde P(\xi)\subset\Delta(\xi)$, pelo menos para cada ponto ξ da imagem da aplicação δ. Como a realimentação dinâmica é regular, pela proposição 3.8 esta imagem contém um aberto de $\tilde N$. Pela definição, $\tilde V$ é aberto e denso em $\tilde N$, segue-se que $\tilde P(\xi)\subset\Delta(\xi)$ para ξ em um aberto de $\tilde V$. Lembre que $\Delta(\xi)$ é uma distribuição analítica e não singular em $\tilde V$ e portanto fica bem definida a igualdade de dimensões genéricas $\mathcal{D}(\tilde P+\Delta)=\mathcal{D}(\Delta)$, já que a dimensão genérica é a dimensão máxima em qualquer aberto (vide seção 1.8 do cap.1). Logo, $\tilde P(\xi)\subset\Delta(\xi)$ em $\tilde V$ pois caso contrário

a dimensão genérica $\mathfrak{D}(\tilde{P}+\Delta)$ ultrapassaria $\mathfrak{D}(\Delta)$.

(b) Suficiência :

Suponha que $\tilde{P}(\xi)\subset\left[\tilde{\Omega}_{n-1}\cap sp\{dx\}\right]^{\perp}(\xi)$ para todo ponto ξ de $\tilde{V}$. Em particular isto é verdadeiro para $\xi\in\tilde{U}$, já que as codistribuições $\tilde{\Omega}_k$, $\tilde{\Omega}_k+sp\{dx\}$ e $\tilde{\Omega}_k\cap sp\{dx\}$ são não singulares em $\tilde{U}$ pela prop. 3.9 e $\tilde{V}$ é definido como sendo o conjunto onde estas codistribuições são não singulares. Lembremos que $\pi(\tilde{U})=\bar{U}\subset\bar{N}$ é a subvariedade aberta e densa onde as codistribuições $\bar{\Omega}_k$, $\bar{\Omega}_k+sp\{dx\}$, $\bar{\Omega}_k\cap sp\{dx\}$, $k=0,\dots,n$ são analíticas e não singulares. Pela proposição 3.10 teremos que $\bar{P}\subset\left[\bar{\Omega}_k\cap sp\{dx\}\right]^{\perp}$ $(k=0,\dots,n-1)$ em $\bar{U}$ (lembremos que $\bar{\Omega}_j\subset\bar{\Omega}_{j+1}$). Agora considere o sistema Σ_n fornecido no passo n do algorítimo 3.2, juntamente com a perturbação :

$$x_n=f_n(x_n)+g_n(x_n)u_n+\bar{p}(x)q$$

$$y=h(x)$$

Seja $\Delta=\tilde{\Omega}_n^{\perp}$. Pela lema (3.5) parte (ix) e pelos resultados da seção 2.3 do cap. 2, para mostrar que o sistema acima fornece uma solução para o PDPRDR é suficiente mostrar que $\bar{P}\subset\Delta$. De fato, pela definição de $\bar{p}$ temos $<d\bar{v}_j,\bar{p}>=0$. Do lema (3.5) parte (ii) segue-se que $<dL^j_{f_n}\bar{h}_j,\bar{p}>=<d\bar{v}_j,\bar{p}>=0$; $j=0,\dots,n$. Assim, das equações (3.36) e (3.37) da prova do lema 3.5 e do fato de $\bar{P}\subset\left[\bar{\Omega}_k\cap sp\{dx\}\right]$, $k=0,\dots,n-1$, segue-se que $<dL^j_{f_n}\hat{h}_j,\bar{p}>=0$, $j=0,\dots,n-1$. Logo

$$\bar{P}\subset\left[sp\{dL^j_{f_n}\bar{h}_j,dL^j_{f_n}\hat{h}_j\ :j=0,\dots,n-1\}+sp\{dL^n_{f_n}\bar{h}_n\}\right]^{\perp}=$$
$$=\left[\bar{\Omega}_{n-1}+sp\{dL^n_{f_n}\bar{h}_n\}\right]^{\perp} \tag{3.45}$$

e portanto resta mostrar que $\bar{P}\subset\left[sp\{dL^n_{f_n}\hat{h}_n\}\right]^{\perp}$. Mas isso é consequência direta da eq. (3.45) e do lema (3.5) parte (vii). □

Observação 3.12 : *Seja* $z_{i_0}=\bar{h}_{n_i}$, *isto é, a i-ésima saída do grupo de* $\rho=\sigma_n$ *saídas* $\bar{h}_n$ *obtido no enésimo passo do algorítmo de extensão dinâmica. Mostra-se facilmente com a técnica da observação* 2.16 *que existe um sistema local de coordenadas* $\{z_1,\dots,z_\rho,z_{\rho+1}\}$ *em* $\bar{U}$, *onde*

$$z_i = (z_{i_0}, L_{f_n} z_{i_0}, \ldots, L_{f_n}^n z_{i_0})$$

e $z_{\rho+1}$ *é algum vetor adequado de* $[n+\sum_{i=1}^{n}\sigma_i-(n+1)\rho]$ *funções analíticas em* $\bar{U}$. *Ademais, nestas coordenadas o sistema* (h_n, f_n, g_n) *pode ser escrito por*

$$\dot{z}_1 = A_1 z_1 + b_1 u_1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{z}_\rho = A_\rho z_\rho + b_\rho u_\rho$$

$$\dot{z}_{\rho+1} = f_{\rho+1}(z_1, \ldots, z_\rho, z_{\rho+1}) + \sum_{i=1}^{m} g_{\rho+1}^i(z_1, \ldots, z_\rho, z_{\rho+1}) u_i$$

$$z_{i_0} = C_i z_i \ , \quad i = 1, \ldots, \rho$$

onde A_i , b_i , c_i *são matrizes respectivamente* $(n+1, n+1)$, $(n+1, 1)$ *e* $(1, n+1)$, *dadas por :*

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \qquad b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

para $i = 1, \ldots, l$. *Note que o subsistema linear corresponsente a cada saída* z_{i_0} *e cada entrada* u_i *é minimal (controlável e observável) e possui função de transferência dada por* $(1/s^{n+1})$. *Porisso, tal sistema é dito estar desacoplado em integradores. Note que uma realimentação de estado adequada pode impor os pólos de cada subsistema* (A_i, b_i). *Se* $n+\sum_{i=1}^{n}\sigma_i = (n+1)\rho$, *ou equivalentemente, se*

$$n = n\rho - \sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i \tag{3.46}$$

então o subsistema não linear correspondente às coordenadas $z_{\rho+1}$ *está ausente e o sistema em malha fechada se reduz* ***a um sistema linear controlável.*** *No entanto, se isto ocorrer o PDPRDR jamais terá solução porque neste caso teremos* $\bar{\Omega}_n^{\perp}=0$ *e a maior distribuição* (f_n, g_n)*-invariante contida em* $\ker dh$ *será nula. Assim, para solucionarmos o PDPRDR com estabilidade com auxílio do algorítmo de extensão dinâmica é preciso estudar a estabilidade do subsistema não linear correspondente às coordenadas do subvetor* $z_{\rho+1}$. □

3.8. Notas e Referências

O algorítmo de extensão dinâmica foi desenvolvido por Descusse e Moog[5], [6], Nijmeijer e Respondek [26] e Respondek e Nijmeijer[30]. A estrutura algébrica no infinito bem como a versão do algorítmo de extensão dinâmica aqui apresentada, é devida a Di Benedetto, Grizzle and Moog[7]. A relação entre o sistema estendido (SE) e a estrutura algébrica no infinito é devido a Silva[29] com uma abordagem ligeiramente distinta. O PDPRDR foi inicialmente estudado em Huijberts, Nijmeijer e Van der Wegen [16] e [17] onde a sua solubilidade podia ser deduzida pelo algorítmo de Singh [33]. Uma aplicação do PDPRDR no controle de um motor de indução foi apresentada em [18]. O teorema 3.11, que caracteriza geometricamente a solubilidade do PDPRDR, bem como o fato do compensador solução poder ser construída pelo algorítmo de extensão dinâmica, até onde sabemos, são fatos inéditos.

Conclusões

Neste trabalho mostramos, por métodos elementares de geometria diferencial, as condições necessárias e suficientes de solução do Problema de Desacoplamento de Perturbações por Realimentação dinâmica regular de estado (PDPRDR) (Teorema 3.11). Tais condições são referentes à geometria de um sistema estendido, que evolui numa variedade estendida $\tilde{N}=\mathcal{N}\times(\mathbb{R}^m)^n$. É importante ressaltar que a condição obtida na variedade estendida poderia ser interpretada na variedade original $\mathcal{N}$ mediante um tipo de projeção não linear pela aplicação de um algorítmo de [35] (vide [16], [17], onde tal técnica foi aplicada). Assim, é de se esperar que tal condição possa ser expressa em função da geometria dos campos f,g,p e da aplicação saída h na variedade $\mathcal{N}$. No entanto, devido à complexidade do algorítmo de projeção de [35] as condições na variedade $\mathcal{N}$ se tornam difíceis de se interpretar a partir do sistema (h, f, g, p). Em termos de verificação computacional da solubilidade, é provável que o trabalho de cálculo da condição do teorema 3.11 seja bem mais simples do que a execução do algorítmo de extensão dinâmica. No entanto o algorítmo de extensão dinâmica já fornece o compensador solução do problema no caso em que o mesmo for solúvel. Note que o PDPRDR será solúvel com desacoplamento entrada-saída simultâneo se e só se as condições do teorema 3.11 forem atendidas e o pôsto do sistema for igual ao número de saídas.

Neste trabalho não consideramos o PDPRDR com estabilidade (veja observação 3.12). Para tanto, um estudo da Dinâmica Zero (Zero Dynamics) do sistema deve ser realizado (veja Isidori [19], pag. 289).

A observação 3.12 nos mostra também uma estreita ligação entre o algorítmo de extensão dinâmica e o problema de linearização interna por realimentação dinâmica (PLIRD). Ressaltamos que o PLIRD ainda é um problema em aberto, possuindo apenas contribuições parciais (veja por exemplo [4]). Como pesquisa futura, esperamos dar uma contribuição para tal problema estudando a geometria do sistema estendido (SE)

sem fixarmos a aplicação saída h. É importante ressaltar que a geometria do sistema estendido, em particular das codistribuições $\tilde{\Omega}_k$ definidas pelas equações (3.31.a-b), governa a solubilidade dos problemas de invertibilidade a direita e à esquerda, desacoplamento entrada saída e o problema de desacoplamento da perturbação, sendo portanto objeto de comprovada utilidade nos problemas de síntese de controle não linear.

Anexo-1 - Exemplos

A.1. Exemplo 1

Considere o sistema afim em $\mathbb{R}^3$ (n=3) com duas entradas u_1 e u_2 (m=2) e duas saídas y_1, y_2 (ι=2) dado por

$$f=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad g=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad y_1=x_1 \qquad y_2=x_2$$

Calculando as derivadas das saídas até a ordem n=3 vemos que

$$y_1^{(1)}=x_1^{(1)}=u_1$$

$$y_1^{(i)}=u_1^{(i-1)}$$

$$y_2^{(1)}=x_2^{(1)}=x_3 u_1$$

$$y_2^{(2)}=u_2 u_1+x_3 u_1^{(1)}$$

$$y_2^{(3)}=u_2^{(1)}u_1+u_2 u_1^{(1)}+u_2 u_1^{(1)}+x_3 u_1^{(2)}$$

Calculando as codistribuições $\tilde{\Omega}_k$ e $\tilde{\Omega}_k+sp\{dx\}$ definidas na eq. (3.31.a-b) vamos obter

$$\tilde{\Omega}_0=sp\{dx_1,dx_2\} \qquad sp\{dx\}+\tilde{\Omega}_0=sp\{dx\} \qquad d_0=3\ ,\ \sigma_0=0$$

$$\tilde{\Omega}_1=\tilde{\Omega}_0+L_{\tilde{f}}(\tilde{\Omega}_0)=sp\{dx_1,dx_2,du_1,x_3 du_1+u_1 dx_3\}=$$

$$=sp\{dx_1,dx_2,du_1,\ u_1 dx_3\}$$

$$sp\{dx\}+\tilde{\Omega}_1=\ sp\{dx\}+sp\{du_1\} \qquad d_1=4,\ \sigma_1=d_1-d_0=1$$

$$\tilde{\Omega}_2=\ \tilde{\Omega}_1+L_{\tilde{f}}(\tilde{\Omega}_1)=sp\{dx_1,dx_2,du_1,du_1^{(1)},\ u_1 dx_3,u_1^{(1)}dx_3+u_1 du_2\}$$

$$sp\{dx\}+\tilde{\Omega}_2=\ sp\{dx\}+sp\{du_1,du_1^{(1)},u_1 du_2\}$$

$$d_2=6\ ,\quad \sigma_2=d_2-d_1=2$$

Vê-se que não há necessidade de determinarmos $\tilde{\Omega}_3$ para determinarmos o pôsto do sistema $\rho=\sigma_3$. De fato, como $\sigma_2=2$ e a estrutura no infinito é uma lista não

decrescente com $\sigma_i \leq \max\{m, i\}$, teremos $\sigma_3 = 2$. Note que

$$n = n\sigma_n - \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i = 3.2 - 3 = 3$$

Pela observação 3.12, vemos que o algorítmo de extensão dinâmica permitirá o desacoplamento com linearização exata e imposição de pólos. No entanto, tal sistema não permitirá a solução do PDPRDR para nenhuma coleção de campos coluna de perturbações p(x).

Obs : Verifica-se que tal sistema não é desacoplável por realimentação de estado.

A.2. Exemplo 2

Mostraremos que o teorema 3.11 permite verificar que o PDPRDR é solúvel para o seguinte sistema considerado em [18] :

$$\dot{x}_1 = x_2 u_1 \qquad y_1 = x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_5 \qquad y_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_2 + x_4 u_1$$

$$\dot{x}_4 = u_2$$

$$\dot{x}_5 = x_1 u_1 + q$$

Para este sistema, verifica-se pelo algorítmo 2.9 que o problema de desacoplamento da perturbação por realimentação regular de estado (sem dinâmica) não é solúvel, já que a distribuição (f,g)-invariante maximal contida em kerdh é nula.Calculando-se as derivadas das saídas com $q = 0$ teremos

$$y_1^{(0)} = x_1$$

$$y_1^{(1)} = x_2 u_1^{(0)}$$

$$y_1^{(2)} = x_5 u_1^{(0)} + x_2 u_1^{(1)}$$

$$y_1^{(3)} = x_1 (u_1^{(0)})^2 + x_5 u_1^{(1)} + x_5 u_1^{(1)} + x_2 u_1^{(2)}$$

$$y_1^{(4)} = x_2 (u_1^{(0)})^3 + 2 x_1 u_1^{(0)} u_1^{(1)} + x_1 u_1^{(0)} u_1^{(1)} + x_5 u_1^{(2)} + x_1 u_1^{(0)} u_1^{(1)} + x_5 u_1^{(2)} + x_5 u_1^{(2)} + x_2 u_1^{(3)}$$

$$y_2^{(0)} = x_3$$

$$y_2^{(1)} = x_2 + x_4 u_1^{(0)}$$

$$y_2^{(2)} = x_5 + u_2 u_1^{(0)} + x_4 u_1^{(1)}$$

$$y_2^{(3)} = x_1 u_1^{(0)} + u_2^{(1)} u_1^{(0)} + u_2^{(0)} u_1^{(2)} + u_2^{(0)} u_1^{(1)} + x_4 u_1^{(2)}$$

$$y_2^{(4)} = x_2 u_1^{2} + x_1 u_1^{(1)} + u_2^{(2)} u_1^{(0)} + u_2^{(1)} u_1^{(1)} + u_2^{(1)} u_1^{(2)} +$$

$$+ u_2^{(0)} u_1^{(3)} + u_2^{(1)} u_1^{(1)} + 2 u_2^{(0)} u_1^{(2)} + x_4 u_1^{(2)}$$

Com isso verifica-se que $\tilde{\Omega}_4 \cap sp\{dx\} = sp\{dx_1, dx_3, x_4 dy_1^{(1)} - x_2 dy_2^{(1)}\}$ e como $P = sp\{\frac{\partial}{\partial x_5}\}$, vê-se que $P \subset [\tilde{\Omega}_4 \cap sp\{dx\}]^{\perp}$ e assim, pelo teorema 3.12 a execução do algorítimo de extensão dinâmica fornecerá uma solução para o PDPRDR.

Bibliografia

[1] R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2ª ed., The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1978.

[2] G. Basile, G Marro, *Controlled and Conditioned Invariance Subspaces in Linear Systems Theory*, J. Optimiz. Th. Applic. 3, pp. 306-315, 1969.

[3] W. A. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemmaniann Geometry*, Academic Press, 1975.

[4] B. Chalet, J. Levine and R. Marino, *Sufficient Conditions for Dynamic State Feedback Linearization*, SIAM J. Contr. Optimiz, Vol. 29, no.1, pp.38-57, Jan. 1991.

[5] J. Descusse e C.H Moog, *Decoupling with Dynamic Compensation for Strong Invertible Affine Non-Linear Control Systems*, Int. J. Control, vol.42, no.6, 1985, pp.1387-1398.

[6] _____ , *Dynamic Decoupling for Right Invertible Nonlinear Systems, Systems and Control Letters*, 8 , 1987, pp. 345-349.

[7] M. D. Di Benedetto, J.W. Grizzle and C.H. Moog, *Rank Invariant of Nonlinear Systems, SIAM J. Control and Optimization*, Vol. 27, no.3, 1989, pp.658-672.

[8] J. Dieudonne, *Foundations of Modern Analysys*, vol.1, Academic Press Inc., New York, 1960.

[9] M. Fliess, *A Note on the Invertibility of Nonlinear Systems*, Systems and Control Lettters, 8, 1986, pp. 147-151.

[10] _____ , *A New Approach to the Nonninteracting Control Problem in The Nonlinear Systems Theory, Proc. 23rd Allerton Conf.* , Monticello IL (oct. 1985) pp.123-129.

[11] A. Glumineau and C.H. Moog, *Essential Orders and the Non-Linear Decoupling Problem* , *Int. J. Control*, Vol.50, no.5, 1989, pp.1825-1834.

[12] R. M. Hardt, *Stratification of Real Analytic Mappings and Images*, Inventiones Math. 28, pp.193-208, 1975.

[13] H. Hironaka, *Subanalytic Sets* , Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Vol. in honor of Y. Akizuki, 1973.

[14] R. M. Hischorn, *(A,B)-invariant Distributions and Disturbance Decoupling of Nonlinear Systems*, SIAM J. Contr. Optimiz. 19, pp.1-19,1981.

[15] H.J.C. Huijberts, *A Nonregular Solution of the Nonlinear Dynamic disturbance Decoupling Problem withh an Application to a Complete Solution of The Nonlinear Model Matching Problem*, to Appear in SIAM J. Control and Optimiz.

[16] H.J.C. Huijberts,H. Nijmeijer and L.L.M. van der Wegen, *Dynamic Disturbance Decoupling for Nonlinear Systems : the Nonsquare and Noninvertible Case*, Controlled Dynamical Systems, B. Bonard, B. Bride, J.P. Gauthier and I. Kupka (eds), Birkhäuser, Boston, 1991.

[17] H.J.C. Huijberts, H. Nijemijer and L.L.M. Van der Wegen, *Dynamic Disturbance Decoupling for Nonlinear Systems*, to appear in SIAM J. Control Optimiz.

[18] H.J.C. Huijberts, *Dynamic Feedback in Nonlinear Synthesis Problems*, Tese de Doutorado, Universidade de Twente, Holanda, 1991, p. 58.

[19] A. Isidori, *Non-Linear Control Systems*, Springer Verlag , Berlin-N.York, 2nd Edition, 1989.

[20] A. Isidori, A.J. Krener, C. Gori-Giorgi, S. Monaco, *Locally (f,g)-invariant distributions*, Syst. Contr. Lett. 1, pp.12-15, 1981.

[21] A. Isidori, A.J. Krener, C. Gori-Giorgi, S. Monaco, *Nonlinear Decoupling Via-Feedback : a Differential Geometric Approach*, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-26, pp. 331-345, 1981.

[22] A. J. Krener, *(Ad f,g), (ad f,g) and locally (ad f,g) invariant distributions*, SIAM J. Contr. Optimiz. 23, pp523-549, 1985.

[23] H. Nijmeijer, *Right Invertibility for a class of nonlinear control systems : A geometric approach, Systems and Control Letters*, 7, 1986, pp.125-132.

[24] H. Nijmeijer, *Controlled Invariance for Affine Control Systems*, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-27, pp. 904-914, 1982.

[25] H. Nijmeijer and J. M. Schumacher, *Zeros at Infinity for Affine Nonlinear Systems*, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-30, pp. 566-573, 1985.

[26] H. Nijmeijer and W. Respondek, *Dynamic Input Output Decoupling of Nonlinear Systems, IEEE Trans. Automat. Control*, Vol AC-33, Nov. 1988, pp. 1065-1070.

[27] H. Nijmeijer and A. J. Van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer Verlag, Berlin-New York, 1990.

[28] P. S. Pereira da Silva, *Static Decoupling of Nonlinear Systems*, Aceito para o IFAC-NOLCOS (Nonlinear Control Systems Design Symposium, Bordeaux, Jun. 24-26, 1992).

[29] P. S. Pereira da Silva, *On the Decoupling by Dynamic Feedback of Nonlinear Affine Smooth Systems*, Aceito para o IFAC-NOLCOS (Nonlinear Control Systems Design Symposium, Bordeaux, Jun. 24-26, 1992).

[30] W. Respondek and H. Nijmeijer, *On Local Right Invertibility of Nonlinear Control Systems, CTAT*, vol.4, no.3, pp.325-348, Sep. 1988.

[31] J.M. Schumacher, *Compensator Synthesys Using (C,A,B)-Pairs*, IEEE Trans. Automat. Control, AC-25, pp.1133-1138, 1980.

[32] S. N. Singh, *Decoupling of Invertible Nonlinear Systems with State Feedback and Precompensation*, IEEE Trans. Automat. Control, AC-25, 1980, pp.1237-1239.

[33] S. N. Singh, *A modified Algorithm for Invertible in Nonlinear Systems*, IEEE Trans. Automat. Control, AC-26, 1981, pp.595-598.

[34] H. Sussmann, *Orbits of Families of Vector Fields and Integrability of Distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. 180, June 1973, pp. 171-188.

[35] A. J. Van der Schaft, *Observability and Controllability for Smooth Nonlinear Systems*, SIAM J. Control Optimiz., 20, pp.338-354, 1982.

[36] F. W. Warner, *Foundations of Differentiables Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman Hill, 1979.

[37] W.M. Wonham, *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, Springer Verlag, Berlin, 1979.

[38] W.M. Wonham and A.S.Morse, *Decoupling and Pole Assignment in Linear Multivariable Systems : a Geometric Approach*, SIAM J. Contr. Optimiz 8, pp.1-18,1970.