ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Átila Madureira Bueno

ESTUDO DO *JITTER* DE FASE EM REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE
SINAIS DE TEMPO

São Paulo

2009

Átila Madureira Bueno

ESTUDO DO *JITTER* DE FASE EM REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE
SINAIS DE TEMPO

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração:
Engenharia de Sistemas

Orientador:
Prof. Dr. José Roberto Castilho Piqueira

São Paulo

2009

FICHA CATALOGRÁFICA

Bueno, Átila Madureira

**Estudo do jitter de fase em redes de distribuição de sinais de tempo / A.M. Bueno. -- São Paulo, 2009.
130 p.**

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle.

**1. Sistemas dinâmicos 2. Sistemas não lineares
I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle II. t.**

*À minha esposa Viviane, que vive sempre vívida em mim;
ao meu pai (in memoriam) e à minha mãe, profundo respeito, admiração e amor;
à minha irmã, minha melhor amiga;
dedico.*

Agradecimentos

Ao professor José Roberto Castilho Piqueira, a orientação.

Aos membros da banca examinadora, a disposição de avaliar o trabalho e as sugestões.

Aos colegas Paulo Henrique da Rocha, Henrique Czar Ferreira, Andr Alves Ferreira, Diego Coln, Rodrigo Romano, Ricardo Bressan Pinheiro, Reginaldo Inojosa da Silva Filho, Rodrigo Carareto e Alain Segundo, as inmeras contribuies e os momentos de boa conversa.

 minha esposa Viviane de Oliveira Miguel Bueno, o novo significado que deu minha vida nesses dez anos.

Aos meus pais Pblio dos Santos Bueno e Adelaide Madureira Bueno, a vida e a educao, os meus bens mais valiosos.

 minha irm Giselle Madureira Bueno, a amizade.

A todos os meus professores, em especial a Ralf Gielow, Valdemir Carrara e Waldemar de Castro Leite Filho, m do conhecimento, aquilo que me deixaram de si.

 CAPES, o apoio financeiro.

*“It is far better to grasp the Universe as it really is than to persist in delusion,
however satisfying and reassuring.”*

Carl Sagan

The Demon-Haunted World: Science as a Candle in the Dark

Resumo

As redes de distribuição de sinais de tempo - ou redes de sincronismo - têm a tarefa de distribuir os sinais de fase e frequência ao longo de relógios geograficamente dispersos. Este tipo de rede é parte integrante de inúmeras aplicações e sistemas em Engenharia, tais como sistemas de comunicação e transmissão de dados, navegação e rastreamento, sistemas de monitoração e controle de processos, etc. Devido ao baixo custo e facilidade de implementação, a topologia mestre-escravo tem sido predominante na implementação das redes. Recentemente, devido ao surgimento das redes sem fio - *wireless* - de conexões dinâmicas, e ao aumento da frequência de operação dos circuitos integrados, topologias complexas, tais como as redes mutuamente conectadas e *small world* têm ganhado importância.

Essencialmente cada nó da rede é composto por um PLL - *Phase-Locked Loop* - cuja função é sincronizar um oscilador local a um sinal de entrada. Devido ao seu comportamento não-linear, o PLL apresenta um *jitter* com o dobro da frequência de livre curso dos osciladores, prejudicando o desempenho das redes.

Dessa forma, este trabalho tem como objetivo o estudo analítico e por simulação das condições que garantam a existência de estados síncronos, e do comportamento do *jitter* de fase nas redes de sincronismo. São analisadas as topologias mestre-escravo e mutuamente conectada para o PLL analógico clássico.

Palavras-chave: Distribuição de sinais de tempo, sincronismo, redes mestre-escravo, redes mutuamente conectadas, PLL, malha de sincronismo, *jitter* de frequência dupla, dinâmica não-linear, estabilidade.

Abstract

Network synchronization deals with the problem of distributing time and frequency among spatially remote locations. This kind of network is a constituent element of countless applications and systems in Engineering, such as communication and data transmission systems, navigation and position determination, monitoring and process control systems, etc. Due to its low cost and simplicity, the master-slave architecture has been widely used. In the last few years, with the growth of the dynamically connected wireless networks and the rising operational frequencies of the integrated circuits, the study of the mutually connected and small world architectures are becoming relevant.

Essentially, each node of a synchronization network is constituted by a PLL - Phase-Locked Loop - circuit that must automatically adjust the phase of a local oscillator to the phase of an incoming signal. Because of its nonlinear behavior the PLL presents a phase jitter with the double of the free running frequency of the oscillators, impairing the network performance.

Thus, this work aims to study, both analytically and by simulation, the existence conditions of the synchronous states and the behavior of the double frequency jitter in the synchronization networks. Specifically the One Way Master Slave (OWMS) and Mutually Connected (MC) network architectures for classical analogical PLLs are analysed.

Lista de Figuras

2.1	Diagrama de blocos do PLL.	12
2.2	Hierarquias das redes de sincronismo.	13
2.3	Estratégias de distribuição de sinais de tempo.	14
2.4	Diagrama de blocos do PLL distribuído.	15
2.5	Diagrama de blocos do PLL analógico clássico.	15
2.6	Resposta média (característica) de um detector de fase (multiplicador ideal) a um erro de fase ϑ , considerando sinais senoidais.	16
2.7	Diagrama fasor descrevendo a operação do PLL (os números complexos aparecem sublinhados).	16
2.8	Diagrama de blocos do PLL linearizado.	21
2.9	Plano de fase da equação 2.26, sem o termo de frequência dupla.	25
2.10	Plano de fase da equação 2.25, com o termo de frequência dupla.	25
2.11	Ampliação da figura 2.10.	26
3.1	Arquiteturas MS básicas.	28
3.2	Arranjos-estrela.	28
3.3	Arranjos-anel.	28
3.4	Diagrama de blocos dos PLLs nos nós de redes TWMS.	34
3.5	Diagrama de blocos do PLL nos nós de redes MC.	40
7.1	Sinal de controle da rede utilizando o filtro da equação 7.2 e $G = 0.5$	91

7.2	Sinal de controle da rede utilizando o filtro da equação 7.3 e $G = 0.5$.	92
7.3	Espaço de estados considerando o filtro da equação 7.2, em unidades de π .	93
7.4	Espaço de estados considerando o filtro da equação 7.3, em unidades de π .	94
7.5	Alcançabilidade do estado síncrono em redes TWMS.	96
7.6	Rede MC com quatro nós.	97
7.7	Rede MC simulada com as condições iniciais não nulas.	97
7.8	Rede MC simulada com as condições iniciais nulas.	97
7.9	Rede MC simulada com as condições iniciais não nulas.	98
7.10	Rede com a topologia cilindro.	98
7.11	Sinal de controle da rede em cilindro.	99
8.1	Comparação entre os valores da amplitude do DFJ previstos analiticamente e os obtidos por simulação . A linha ‘-.’ indica $J_{ppmax} = 0.015 \text{ rad}$ conforme [1].	102
8.2	Comparação entre a saída no nó-mestre e as saídas dos nós-escravos.	103
8.3	Sinal de controle dos nós 10 e 11. Filtro PI ativo.	104
8.4	Respostas de um PLL a uma parábola de fase.	104
8.5	Diagrama de blocos do experimento.	105
8.6	Densidade expectral de potência (PSD) medida na saída do PD e do VCO.	106
8.7	Ampliação da figura 7.11: últimos dez segundos da simulação do nó 1.	106

Lista de Tabelas

9.1	Modelos das redes de PLLs.	108
9.2	Modelos das redes no espaço de estados.	108
9.3	Sincronismo e modos de operação.	109
9.4	Existência de estados síncronos para o filtro <i>lead-lag</i> da equação 4.1. . .	109
9.5	Existência de estados síncronos para o filtro de 2ª ordem da equação 4.29.	109
9.6	Existência de estados síncronos para o filtro de 2ª ordem da equação 5.42.	109
9.7	Amplitude do DFJ para rede OWMS.	110
9.8	Amplitude do DFJ para rede TWMS.	110
9.9	Amplitude do DFJ para rede MC.	110

Lista de símbolos

α_m	Coeficientes do numerador do filtro
$\bar{\mathbf{x}}$	Vetor de estados do sistema real
$\bar{v}_d$	Sinal de saída médio do detector de fase
β_p	Coeficientes do denominador do filtro
$\dot{x}(t)$	$\frac{d}{dt}x(t)$, usa-se ponto para representar a derivada ordinária temporal
ℓ	Índice que relaciona o sinal transmitido de um nó a outro nas topologias TWMS e MC, $\ell \neq j$
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbf{J}$	Matriz Jacobiana
$\mathbf{R}$	Região do espaço de estados
$\mathbf{u}$	Vetor dos sinais de entrada para cada PLL ($\dot{\mathbf{u}}$ é o vetor dos sinais de controle dos VCOs)
$\mathbf{V}_1$	Vizinhança do estado síncrono
$\mathbf{V}_2$	Vizinhança do sinal de controle no estado síncrono
$\mathbf{x}$	Vetor de estados
$\mathbf{x}_0$	Ponto de equilíbrio

$\mathbf{x}_s$	Estado síncrono
i	Constante imaginária, $i^2 = -1$
v_i	Amplitude do sinal de entrada do PLL
v_o	Amplitude do sinal de saída do PLL
$\mathcal{L}$	Transformada de Laplace
μ_G	Relação entre o ganho da malha e o número de nós da rede
μ_p	Combinações dos coeficientes do filtro
Ω	Coefficiente da função e entrada
ω_M	Frequência de livre curso do PLL
ϕ	Coefficiente da função e entrada
$\tau_{i,j}$	Atraso de transmissão do nó i para o j
θ_i	Função de entrada (definição 2.5)
θ_o	Estimativa do PLL para a fase de entrada. A derivada é o sinal de controle do VCO
$\vartheta^{(\ell,j)}$	Erro de fase entre o nó ℓ e nó j para qualquer topologia
$\vartheta^{(j)}$	Erro de fase entre o nó j e o nó $j - 1$ na rede OWMS
F	Função de transferência do filtro do PLL
f	Resposta ao impulso do filtro do PLL
G	Ganho do PLL
Im	Função que retorna a componente imaginária de um número complexo
j	Índice que designa a posição de um nó em uma rede, para redes MS, $j = 1$ designa o nó-mestre
k_m	Ganho do detector de fase (multiplicador)

k_o	Ganho do VCO
L	Operador da definição 3.5
N	Número de nós em uma rede
Q	Operador da definição 3.5
R	Coeficiente da função e entrada
Re	Função que retorna a componente real de um número complexo
s	Variável complexa da transformada de Laplace, $s = \sigma + j\omega$
t	Tempo
t_s	Tempo de aquisição do sincronismo
v_c	Sinal de controle do VCO
v_d	Sinal de saída do detector de fase
v_i	Sinal de entrada do PLL
v_o	Sinal de saída do PLL ou nó

Acrônimos

ADPLL *All-Digital PLL*

ANSI *American National Standards Institute*. Instituto nacional americano de padronização

ATM *Asynchronous Transfer Mode*. Modo de transferência assíncrono

CSDN *Circuit-Switched Data Network*. Rede digital de comutação de circuitos

DFJ *Double-Frequency Jitter*. *Jitter* de frequência dupla

DPLL *Digital PLL*

DSP *Digital Signal Processor*. Processador digital de sinais

ETSI *European Telecommunications Standards Institute*. Instituto europeu de padronização em telecomunicações

GSM *Global System for Mobile Communications*. Sistema global para comunicações móveis

IC *Integrated Circuit*. Circuito integrado

ISDN *Integrated Services Digital Network*. Rede digital integrada de serviços

ITU-T *ITU Telecommunication Standardization Sector*. Seção de padronização da área de telecomunicações do ITU

ITU *International Telecommunication Union*. União internacional de telecomunicações

MC *Mutually Connected*. Topologia mutuamente conectada

MS *Master-Slave*. Topologia mestre-escravo

OWMS *One Way Master-Slave*. Topologia mestre-escravo de via única

PC *Personal Computer*, computador pessoal

PDH *Plesiochronous Digital Hierarchy*. Hierarquia digital plesiócrona

PD *Phase Detector*. Detector/Comparador de fase

PFD *Phase and Frequency Detector*. Detector de fase e frequência

PLL *Phase-Locked Loop*. Malha de sincronismo

PSD *Power Spectral Density*. Densidade Espectral de Potência

SDH *Synchronous Digital Hierarchy*. Hierarquia digital síncrona

SONET *Synchronous Optical Network*. Rede óptica síncrona

SPLL *Software PLL*

TWMS *Two Way Master-Slave*. Topologia mestre-escravo de via dupla

VCO *Voltage-Controlled Oscillator*. Oscilador controlado por tensão

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Estrutura do texto	5
2	Revisão bibliográfica	7
2.1	Perspectiva histórica das redes síncronas	7
2.2	Estratégias de distribuição de sinais de tempo	11
2.3	O PLL analógico clássico	14
2.3.1	Modelo matemático do PLL analógico	16
2.3.2	Modos de operação do PLL	22
2.4	Definição do Problema	24
3	Redes síncronas	27
3.1	Redes MS	27
3.1.1	Modelo da rede OWMS	29
3.1.2	Modelo da rede TWMS	34
3.2	Redes MC	40
4	O estado síncrono e os modos de operação	47
4.1	Equação de estados	48
4.1.1	PLLs de 2ª ordem	48

4.1.2	PLLs de 3 ^a ordem	53
4.2	Sincronismo e modos de operação	56
5	Existência de estados síncronos	59
5.1	Pontos de equilíbrio	59
5.1.1	Rede OWMS	59
5.1.2	Rede TWMS	60
5.1.3	Rede MC	61
5.2	Condições para existência de estados síncronos	62
5.2.1	PLLs de 2 ^a ordem	62
5.2.2	Síntese	65
5.2.3	PLLs de 3 ^a ordem	66
5.3	Alcançabilidade de estados síncronos	71
6	O DFJ em redes síncronas	73
6.1	O DFJ nas redes OWMS	74
6.2	O DFJ nas redes TWMS	78
6.3	O DFJ nas redes MC	83
7	Alcançabilidade do estado síncronismo	89
7.1	Rede OWMS	89
7.2	Rede TWMS	95
7.3	Rede MC	96
7.4	Redes Anel e Cilindro	98
8	Medidas do DFJ	101
8.1	Rede OWMS	101

8.1.1	Resultados experimentais	105
8.2	Rede-cilindro	105
9	Resultados	107
A	Sistemas Dinâmicos	123
A.1	Equação de estados: solução e ponto de equilíbrio	123
A.2	Existência e unicidade	126
A.3	Estabilidade de pontos de equilíbrio	127
B	Formulários	129

Capítulo 1

Introdução

A teoria de sincronismo está ligada a muitas aplicações e fenômenos em Engenharia, Biologia e Psicologia. As malhas de sincronismo são parte integrante de inúmeras aplicações em Engenharia, tais como redes de telefonia, sistemas de navegação e rastreamento, redes de comunicação de dados (como as redes de computadores), sistemas computacionais de processamento paralelo, sistemas de monitoramento e controle de processos em ambientes remotos e industriais, e sistemas de controle de servomecanismos. O problema da distribuição de sinais de tempo e frequência a relógios geograficamente dispersos tem sido objeto de pesquisa principalmente a partir da década de 60 quando as redes digitais de comunicação se tornaram viáveis. [2–7].

As redes de sincronismo caracterizam-se pelo fato de diversos osciladores operarem na mesma frequência [2–5]. Em sistemas digitais síncronos, o sinal do relógio define uma referência de tempo para o movimento dos dados nesse mesmo sistema [8].

O sincronismo em sistemas digitais de comunicação tem importância fundamental no desempenho e na qualidade do serviço oferecido pelos operadores aos seus clientes, já que sincroniza o fluxo de sinais de dados ao longo dessas redes. Assim, o projeto da rede de distribuição de sinais de tempo afeta dramaticamente o desempenho e a confiabilidade dos sistemas de comunicação [8, 9].

Historicamente a distribuição de sinais de tempo bem alinhados a uma referência ideal tem sido um problema difícil para os engenheiros. Entretanto, nos últimos anos, os avanços da tecnologia de microeletrônica permitiram o desenvolvimento de sistemas

de distribuição de tempo e frequência mais precisos e estáveis e, conseqüentemente, redes de comunicação maiores, de estrutura dinâmica e mais rápidas, como as redes sem fio (*wireless*) [10, 11].

Atualmente a frequência de transmissão em sistemas de comunicação digital atinge valores em gigahertz. Dada a alta frequência de operação, as dimensões e complexidades das redes atuais, as imperfeições do meio de transmissão e do processo de modulação, os atrasos de distribuição e a existência de comportamentos não-lineares, o desempenho das redes pode ser significativamente prejudicado [12–14].

Muitos sistemas comerciais adotam a estratégia de distribuição mestre-escravo (MS) devido ao seu baixo custo, confiabilidade e facilidade de implementação. Essa arquitetura é freqüentemente utilizada em redes públicas de telecomunicações, robótica e sistemas de controle [15].

Nas redes MS, o nó-mestre é um relógio atômico preciso e estável. O sinal gerado pelo mestre é enviado ao primeiro nó-escravo, que extrai as informações de fase e frequência; em seguida, o sinal é enviado ao próximo nó. Esse processo é repetido até o último nó. Quando um nó tem informações de fase e frequência apenas do nó imediatamente anterior, trata-se da rede mestre-escravo de via única (OWMS). Se, por outro lado, tiver informações tanto do nó imediatamente anterior, como do posterior, trata-se da rede mestre-escravo via dupla (TWMS).

Para aplicações de baixa frequência, como é o caso de alguns sistemas de monitoramento e controle de processos industriais ou de servomecanismos, a topologia MS apresenta desempenho satisfatório. Contudo para sistemas em que a frequência de operação se aproxima de 1GHz, como é o caso dos microprocessadores atuais, o atraso gerado pela distribuição e armazenamento (*buffering*) por um único nó passa a ser muito próximo de um ciclo do relógio [16, 17]. Em [16], uma solução é proposta através de um esquema que utiliza sincronismo com osciladores distribuídos. Outros trabalhos também estudam este problema a partir de uma estrutura distribuída para os osciladores [18–20].

As topologias de distribuição de tempo centralizadas, como as redes MS, apresentam dificuldade para a inserção e exclusão de nós (*scalability*). Por outro lado, as redes

mutuamente conectadas (MC) permitem grande paralelismo e dinamismo estrutural, como demandam as redes de telecomunicações e os sistemas de automação e controle atuais [10, 21].

A malha de sincronismo, ou PLL, é um sistema de controle de malha fechada usado para ajustar automaticamente a fase de um sinal gerado localmente à fase de um sinal de entrada. Presente em cada nó das redes de distribuição de sinais de tempo, o PLL é fundamental no desempenho de toda a rede, dado que os erros em cada nó podem acumular e ser transmitidos aos demais [3–5]. Além disso, fenômenos relacionados ao meio de transmissão e ao processo de modulação podem gerar variações instantâneas na fase do sinal de entrada produzindo oscilações no sinal de saída de cada nó. Com isso, as transições do sinal do relógio têm sua posição desviadas da posição ideal. Essa modulação de fase acidental é chamada de *jitter* de fase e corrompe a integridade do sinal de entrada [22–24].

O PLL é um circuito eletrônico composto de um detector de fase (PD), de um filtro e de um oscilador controlado por tensão (VCO). Devido à característica não-linear do PD, o PLL apresenta um *jitter* de fase com o dobro da frequência dos osciladores. Isto faz com que o PLL, embora operando nos modos de captura e retenção, orbite uma região do plano de fase, em torno do estado síncrono, prejudicando o desempenho do nó [24]. O comportamento do *jitter* de frequência dupla (DFJ) tem sido estudado nos últimos anos através de simulações e de abordagem analítica, de modo que alguns resultados foram obtidos para redes MS [12, 24–26].

As redes de sincronismo e, conseqüentemente os PLLs, podem ser implementados tanto em *software* como em *hardware* [27]. O primeiro PLL foi implementado em *hardware* por H. De Bellescize em 1932. O primeiro circuito integrado (IC) de um PLL puramente analógico surgiu em 1965. Os primeiros PLLs híbridos, que utilizavam um detector de fase digital e um VCO analógico, surgiram por volta de 1970. Os PLLs completamente digitais são implementados via *software* e não possuem nenhum componente passivo como resistores e capacitores [28].

Os PLLs atuais, como o 74HC/HCT4046A e o 74HC/HCT7046A (ambos baseados no CD4046 IC) da PhilipsTM [4], utilizam um detector de fase e frequência (PFD) seqüencial lógico e um VCO analógico, cuja saída é uma onda quadrada, e não uma se-

nóide. O PFD é acompanhado por uma bomba de corrente (*charge-pump*) que converte o sinal lógico do PFD em um sinal analógico apropriado para controlar o VCO.

Devido a sua constituição híbrida, o PLL com PFD e *charge-pump* apresenta comportamento não-linear [29, 30]. Estes PLLs são amplamente utilizados como geradores de sinal de relógio em várias aplicações, tais como microprocessadores, receptores *wireless*, *links* de transceptores seriais, etc. Uma das principais razões para seu uso é devido ao fato de, teoricamente, gerar erro estático de fase nulo [31–33].

De forma semelhante ao PLL analógico, o PLL híbrido é intolerante a erros no processo de detecção das transições dos sinais dos osciladores. Uma transição não detectada ou a detecção de uma transição inexistente (devido a algum tipo de ruído) faz com que o PFD interprete este evento como uma perda de sincronismo. Como o PFD é um circuito seqüencial, o efeito deste erro se propaga por mais de um ciclo [5]. Alguns trabalhos apresentam um estudo sobre a influência de *jitter* nos PLLs híbridos [33, 34].

Em um cenário ideal, supõe-se que o DFJ é eliminado pelo filtro do PLL. Entretanto, na prática, isso não ocorre. O DFJ depende fortemente do ganho da malha e degrada o desempenho do PLL, principalmente se somado a ruídos de fase provenientes de outros fenômenos [12, 24–26, 35, 36].

Na maior parte dos trabalhos, o PLL é considerado como sendo construído de forma que sua função de transferência seja de segunda ordem e do tipo 1 [5, 37], permitindo o rastreamento de uma rampa de fase [26]. Contudo, para suprimir distúrbios de alta frequência, como o DFJ, e diminuir o tempo de aquisição, é comum encontrar em aplicações reais PLLs de terceira ordem ou mais [5, 21, 38].

Por outro lado, os PLLs de terceira ordem podem apresentar não-linearidades indesejáveis, como bifurcações e atratores caóticos [24, 39, 40], tornando necessária a escolha cuidadosa dos parâmetros do filtro [39–41].

Deste modo, este trabalho tem como objetivo o estudo analítico e por simulação do comportamento do DFJ nas redes de PLLs analógicos, e da estabilidade do estado síncrono das redes de PLLs analógicos. São analisadas as topologias centralizadas mestre-escravo e mutuamente conectadas.

1.1 Estrutura do texto

Na revisão bibliográfica, capítulo 2, expõe-se um histórico sobre o desenvolvimento da área de sincronismo. Em seguida são, apresentadas algumas estratégias usadas para a distribuição de sinais de tempo, bem como o modelo dos PLLs analógicos e definições relacionadas a seu comportamento dinâmico. O problema estudado neste trabalho é definido apropriadamente na seção 2.4.

As equações diferenciais que modelam o comportamento dinâmico dos nós das redes OWMS, TWMS e MC são obtidas no capítulo 3. No capítulo 4, são obtidos os modelos no espaço de estados considerando-se, separadamente, redes compostas por nós de 2ª e 3ª ordens. Além disso, são estabelecidos os conceitos de sincronismo e modos de operação para as redes.

No capítulo 5, são enunciados os teoremas que garantem a existência de estados síncronos para redes compostas por nós de 2ª e 3ª ordens. Os teoremas enunciados no capítulo 6 determinam o comportamento do DFJ tanto qualitativamente como quantitativamente.

No capítulo 7, a capacidade das redes de alcançar algum estado síncrono é abordada. No capítulo 8, são comparadas as medidas do DFJ (obtidas a partir de simulações) com o que foi exposto no capítulo 6.

No capítulo 9, são feitas as considerações finais e um resumo das contribuições deste trabalho. No apêndice A, são apresentados conceitos relativos à área de sistemas dinâmicos que são usados ao longo do texto. No apêndice B, está disponível um pequeno formulário.

Capítulo 2

Revisão bibliográfica

2.1 Perspectiva histórica das redes síncronas

As redes de comunicação modernas são o resultado de um processo evolutivo iniciado no final do século XIX. Possivelmente a principal aplicação das redes de sincronismo seja o estabelecimento de uma referência de tempo em redes de telecomunicações digitais [42].

A transmissão e a comutação são as duas funções básicas de qualquer rede de telecomunicação. A transmissão cuida de transferir informação de um ponto a outro da rede. A comutação, por sua vez, cuida do encaminhamento da informação através da rede de comunicação [43]. De início as duas funções eram implementadas analogicamente. Posteriormente, com o desenvolvimento da tecnologia digital, primeiro a transmissão e, depois, a comutação se tornaram digitais.

A evolução da tecnologia digital de transmissão e comutação iniciou-se com as conexões de transmissões digitais entre máquinas de comutação analógicas. Naquele momento, o fato das transmissões serem digitais era transparente para as interfaces, não havendo, portanto, necessidade de relacionar o sinal do relógio interno de um sistema com o de outro. Na realidade, até o início da década de 70, os campos de redes de comunicação e de medição de tempo e frequência desenvolveram-se isoladamente, tendo, inclusive, cada um criado seu próprio jargão. Um número especial do *Proceedings*

*of the IEEE*¹ deu os primeiros passos no sentido de estabelecer uma conexão entre essas duas áreas [9, 42, 44].

Ainda quando os sistemas de multiplexação de vários níveis foram desenvolvidos, não havia necessidade nem tecnologia disponível para relacionar as altas frequências dos relógios dos sinais multiplexados com a frequência mais baixa dos tributários. Na verdade, os equipamentos de transmissão baseados na hierarquia digital plesiócrona (PDH) não precisam estar sincronizados, dado que a técnica de justificação positiva (inserção de pulso) permite a multiplexação de tributários assíncronos [45].

O sincronismo tornou-se necessário a partir da introdução dos sistemas de comutação digitais a fim de evitar a perda ou repetição de dados nas memórias elásticas (*slip*) [46]. A introdução, primeiramente, das redes digitais de comutação de circuitos (CSDN) e, posteriormente, das redes digitais de serviços integrados (ISDN), levou à especificação de requisitos mais rigorosos com relação ao sincronismo.

Parte do interesse pelas redes digitais vem do fato de que a transmissão e a comutação são realizadas digitalmente, permitindo a aplicação de técnicas de divisão de tempo para uma melhor distribuição, entre os usuários, dos recursos de equipamentos e serviços, o que gera economia [47].

Com a crescente disseminação das tecnologias de redes de transmissão SDH (hierarquia digital síncrona) e SONET (redes ópticas síncronas), as redes de sincronismo tornaram-se um tema de intensa pesquisa. Para explorar plenamente as capacidades das redes SDH/SONET, os requisitos para instalação de redes síncronas foram tornando-se cada vez mais rigorosos e restritivos. Além dos requisitos das SDH/SONET, os serviços criados e suportados pela existência de uma rede síncrona, tais como a comutação livre de *slip* e a melhora no desempenho dos serviços ATM (modo de transferência assíncrono), ISDN e GSM (sistema global para comunicações móveis), são considerados recursos importantes [42, 45].

Conseqüentemente foram desenvolvidos padrões pela ITU-T, ETSI e ANSI para o intercâmbio de sinais de relógio, com requisitos bastante restritivos e complexos em relação a *jitter* e *wander*² nas interfaces de sincronização e também em relação à

¹Ver referência [44].

²Em sistemas digitais síncronos, o ruído de fase de baixa frequência é denominado *wander*, e o de

precisão e estabilidade para as arquiteturas das redes de sincronismo [21, 42, 48]. Hoje em dia, SDH/SONET são os padrões para multiplexação e transmissão de sinais de alta frequência na infra-estrutura disponível das redes de comunicações [49].

Em 1985, W. C. Lindsey *et al.* publicaram um dos principais tutoriais sobre redes de sincronismo [2]. O artigo trata, do ponto de vista teórico, da distribuição de sinais de tempo numa rede com relógios geograficamente dispersos, caracterizando a rede, sua estabilidade e seu comportamento no estado síncrono.

Diferentemente P. Kartaschoff [9], em 1991, publicou um estudo bastante abrangente sobre o sincronismo em redes digitais de telecomunicações, omitindo qualquer detalhamento matemático. Neste artigo, são delineados alguns conceitos básicos em relação à arquitetura das redes e equipamentos de sincronismo. Em 1995, J. C. Bellamy [45], publicou um trabalho salientando as causas e os problemas gerados pelo *jitter* e pelo *wander*; além disso, o artigo também trata de multiplexação digital síncrona e assíncrona.

Em 1990, na *Physical Review Letters*, Pecora e Carroll [50] mostraram a possibilidade de sincronizar atratores caóticos, como os de Lorenz e Rössler, conectando-os através de um sinal comum. Cuomo e Oppenheim [51, 52] simplificaram a abordagem de Pecora e Carrol e propuseram aplicações para sistemas de comunicações. Em [53], é descrita uma implementação de um sistema de transmissão e de recepção juntamente com o sistema caótico de Lorenz com o objetivo de criptografar uma mensagem. Strogatz [54] compila esses trabalhos e apresenta um exemplo semelhante ao de [53].

Neste trabalho, contudo, o conceito de sincronismo que será apresentado nos próximos capítulos está restrito ao sincronismo de PLLs nas aplicações de sistemas de telecomunicações. Portanto, não é o mesmo ponto de vista apresentado nos trabalhos de [50–53].

Nos últimos anos, o comportamento coletivo de osciladores não-lineares acoplados através de uma rede de topologia complexa, como *scale-free* e *small-world*, tem sido o objeto de estudo de muitos trabalhos. Em 2001, Strogatz [55], associou essas topologias

alta frequência *jitter* [45].

complexas a vários processos biológicos, físicos e de engenharia. Hong, em 2002 [56], e Carareto, em 2009 [57], mostraram, utilizando uma abordagem numérica, que existe uma forte dependência entre as características do sincronismo (tempo de aquisição, diferença de fase entre os osciladores, etc.) e a conectividade entre os nós nessas topologias.

Piqueira, em 1987, aplicou a teoria qualitativa das equações diferenciais para a avaliação do comportamento dinâmico dos PLLs de 2ª e 3ª ordens, discutindo a estabilidade dos pontos de equilíbrio e a existência de ciclos-limite e atratores caóticos [58]. Em [59], é apresentado um estudo analítico sobre o desempenho e as características do sincronismo em estratégias centralizadas e descentralizadas de distribuição de sinais de tempo (redes MS e MC respectivamente). Também foram definidos conceitos elementares em teoria de sincronismo, como o de faixas de retenção e captura. o ferramental matemático utilizado é proveniente da teoria de bifurcações.

Vários trabalhos aplicaram a teoria qualitativa de equações diferenciais no estudo do comportamento dinâmico das redes de sincronismo, com o objetivo de determinar as condições para existência de estados síncronos, dentre os quais se pode citar [21, 39–41, 60].

O problema de sincronizabilidade, ou seja, o estudo das condições que permitem à rede atingir um estado síncrono assintoticamente estável é abordado de forma analítica e numérica em [61]. Nesse trabalho, é mostrado que, ainda quando se desconsidere o DFJ, a existência de um estado síncrono não é suficiente para garantir que este seja alcançado.

Nos últimos anos, tem-se estudado, através de simulações e de modelagem matemática, a influência de modulações de fase acidentais ou *jitter* de fase na capacidade de sincronização das redes. Especificamente as redes de PLLs são suscetíveis ao DFJ. Em [24], foi estudada a influência do ganho da malha do PLL no DFJ. O efeito de um *jitter* periódico em um PLL de segunda ordem foi estudado em [12], utilizando aproximações assintóticas.

Foram apresentados, em [25, 26], estudos preliminares, utilizando simulações e modelagem matemática, sobre o comportamento do DFJ em arquiteturas MS. Em [35],

o problema foi abordado experimentalmente; os resultados indicaram a necessidade de um modelo mais preciso para a avaliação do DFJ.

2.2 Estratégias de distribuição de sinais de tempo

O PLL é um elemento fundamental para o desempenho das redes de distribuição de sinais de tempo, pois é o sistema de controle em malha fechada usado para ajustar automaticamente a fase de um sinal gerado localmente à fase de um sinal de entrada, muitas vezes gerado, a uma grande distância e sujeito a inúmeras fontes de interferência durante a transmissão [3–5]. Cada nó das redes de sincronismo é, essencialmente, composto de um PLL que, por sua vez, é constituído de um detector - ou comparador - de fase (PD), de um filtro e de um VCO local (ver figura 2.1).

Existem vários tipos de PLLs, os analógicos, os híbridos, os digitais e os implementados em *software*. Os PLLs analógicos são chamados, por alguns autores (especificamente [4]), LPLLs (*Linear* PLLs). Esta não é uma boa nomenclatura dado que seu comportamento é não-linear³. Contudo tornou-se consagrada pelo uso.

Os PLLs híbridos, chamados DPPLLs (*Digital* PLLs), não são circuitos digitais. Possuem uma estrutura semelhante à da figura 2.1, sendo que o detector de fase é, na verdade, um PFD seguido de uma bomba de corrente (*Charge-Pump*). O PFD é um circuito digital que determina os erros de fase e frequência, mas a bomba de corrente, que faz a interface entre o PFD e o resto da malha analógica, é que mantém a carga para o filtro. Alguns autores denominam esse tipo de PLL Charge-Pump PLL [29, 32, 62–64].

Os PLLs digitais, chamados ADPLLs (*All-Digital* PLLs), são compostos por detector de fase, filtro e oscilador digitais. Esse PLL é, realmente, digital. Finalmente os PLLs implementados em *software* (SPLLs) são, na realidade, programas de computador. Esse tipo de PLL pode ser implementado em um microprocessador DSP, ou em

³Em [4] (p.26), o autor argumenta que, no estado síncrono, o PLL é aproximadamente linear. Entretanto, na realidade, o PLL apresenta ao menos um comportamento não-linear no estado síncrono, o DFJ. Existe, ainda, a possibilidade de existência de ciclos-limite [39] dependendo dos valores dos parâmetros do PLL.

computadores, com o objetivo de estabelecer sincronismo em *softwares*⁴.

Figura 2.1: Diagrama de blocos do PLL.

O problema da distribuição de sinais de tempo tem sido muito estudado, sendo que vários métodos foram propostos para a sincronização de relógios/PLLs dispersos sobre uma determinada área. Esses métodos podem ser classificados de acordo com seu algoritmo de controle. A existência ou não de um sinal de controle define as duas classes mais gerais de redes de distribuição de sinais de tempo: as redes plesiócronas e as redes síncronas [2, 42].

A estratégia plesiócrona é, na realidade, uma estratégia de não-sincronização. O sinal de tempo é gerado individualmente em cada nó, cada um equipado com um relógio independente. Essa é a forma mais simples de distribuição de sinais de tempo. Contudo depende exclusivamente do bom desempenho de cada relógio (ver figura 2.2(a)). A estratégia plesiócrona foi amplamente empregada no passado pelas redes PDH.

Todos os relógios das redes síncronas têm suas fases e frequências travadas⁵ a uma fase e frequência comum a toda a rede, ou seja, as escalas de fase e frequência são, na média, idênticas. O sincronismo pode ser alcançado de diversas formas, sendo que as técnicas de sincronismo podem ser classificadas como centralizadas e descentralizadas, dependendo da natureza do sinal de controle.

As redes centralizadas utilizam estratégias MS. O princípio das estratégias MS é baseado na distribuição da referência de tempo de um relógio prioritário - mestre - a todos os demais relógios da rede - escravos - de forma direta ou indireta. Assim o relógio mestre dita as escalas de tempo e frequência da rede (ver figura 2.2(b)).

⁴Como o relógio que mostra as horas no canto inferior direito da maioria dos PCs, que pode ser sincronizado a um relógio mestre. Este serviço é oferecido por vários servidores na *internet*, como o time.nist.gov e o bigben.cac.washington.edu.

⁵Embora o termo não seja a tradução ideal para o vocábulo *locked* é adotado aqui em preferência ao jargão usual “locado”.

As redes descentralizadas são baseadas no princípio da sincronização mútua. Assim as redes mutuamente sincronizadas não possuem um nó-mestre, ao contrário, todos os nós contribuem na determinação das escalas de tempo e frequência da rede [2, 42, 59] ver figura 2.2(c). Para as redes descentralizadas, em comparação à estratégia centralizada, tanto a modelagem como o estudo de estabilidade e do comportamento dinâmico são muito mais complexos. A figura 2.3 apresenta a classificação das estratégias de distribuição de sinais de tempo incluindo as redes que possuem mecanismo para compensação do atraso na transmissão do sinal⁶.

Figura 2.2: Hierarquias das redes de sincronismo.

A distribuição de sinais de tempo por toda a área de um processador é um problema complexo, e, tradicionalmente, esta tarefa era realizada por uma estrutura centralizada de distribuição. Apesar da simplicidade conceitual, para esse tipo de aplicação, essa estratégia sofre de baixa confiabilidade e capacidade de inserção e exclusão de nós. A baixa confiabilidade é devida à estrutura de árvore das topologias centralizadas (figura 2.2(b)); no caso de algum nó apresentar defeito ou perder o sincronismo, os nós nos ramos diretamente abaixo terão seu desempenho prejudicado. Devido às características dinâmicas das redes de processadores/processamento paralelo, as redes de distribuição de sinais de tempo descentralizadas são mais indicadas [10].

Ademais devido ao desenvolvimento da microeletrônica, as frequências dos relógios nos microprocessadores estão na ordem dos gigahertz. A distribuição de sinais de tempo, nesse caso, torna-se crítica, dado que o atraso gerado pela distribuição e armazenamento (*buffering*) por um único nó passa a ser muito próximo de um ciclo do relógio. Em 1998, Mizuno e Ishibashi [16] propuseram uma estratégia de distribuição

⁶Nos problemas relacionados ao sincronismo de redes de telecomunicações com equipamentos digitais, o atraso de fase fixo, que ocorre durante a transmissão do sinal, é quase sempre desconsiderado [42], pois apenas muda a posição do estado síncrono no espaço de estados [36].

Figura 2.3: Estratégias de distribuição de sinais de tempo.

de sinais de tempo, com osciladores distribuídos, formando uma malha de sincronismo distribuída (PLL-distribuído ou multi-PLL). Essa estratégia resolve o problema da distribuição de sinais de tempo num *chip* de processador, contudo, aumenta significativamente o *jitter* e o desvio (*skew*) induzidos por ruídos [10, 16–20]. A figura 2.4 apresenta o diagrama de blocos dessa técnica.

2.3 O PLL analógico clássico

O PLL sincroniza o sinal de saída de um oscilador a um sinal de referência, tanto em frequência como em fase. No estado síncrono, a diferença de fase entre o sinal de saída do oscilador local e o sinal de referência é nula ou mantém-se constante. Se ocorrer alguma perturbação e o erro de fase aumentar, a malha fechada atua no sentido de reduzir novamente o erro.

No caso do PLL analógico, o detector de fase é, na verdade, um circuito multi-

Figura 2.4: Diagrama de blocos do PLL distribuído.

plicador. A figura 2.5 apresenta o diagrama de blocos do PLL analógico. Esse sistema de controle em malha fechada tem a finalidade de sincronizar a saída do VCO, $v_o(t)$, ao sinal de referência $v_i(t)$. O sinal de controle $v_c(t)$ atua sobre a frequência do VCO, aumentando-a ou diminuindo-a, a fim de minimizar o erro de fase. O sinal $v_d(t)$ tem o mesmo sinal do erro de fase ϑ , como pode ser visto na figura 2.6, permitindo ao PLL seguir o sinal de referência [3, 5, 28].

Figura 2.5: Diagrama de blocos do PLL analógico clássico.

O funcionamento do PLL pode ser visualizado graficamente a partir de um diagrama de fasores, como o da figura 2.7. No instante t_0 o erro de fase é $\vartheta(t_0)$, sendo que, neste caso, o sinal de referência v_i lidera. A partir do valor de $\vartheta(t_0)$, o sistema de controle atua sobre o VCO, aumentando sua frequência, com o objetivo de diminuir o erro de fase. Após algum tempo, no instante t_1 , pode-se verificar que o erro de fase $\vartheta(t_1)$ diminui. Idealmente, a partir de algum instante $t_s > t_1$, $t_s < \infty$, o erro de fase torna-se nulo e o VCO passa a operar na mesma frequência do sinal v_i .

Figura 2.6: Resposta média (característica) de um detector de fase (multiplicador ideal) a um erro de fase ϑ , considerando sinais senoidais.

Figura 2.7: Diagrama fasor descrevendo a operação do PLL (os números complexos aparecem sublinhados).

2.3.1 Modelo matemático do PLL analógico

O modelamento matemático do PLL é um procedimento encontrado em muitos trabalhos [3–5, 58, 65]. O procedimento utilizado para a modelagem do PLL exposto aqui é conveniente para o modelamento das várias topologias de redes de PLLs

estudadas neste trabalho.

Assim, considerando a figura 2.5, os sinais de entrada e saída do PLL podem ser expressos de acordo com as equações abaixo:

$$v_i(t) = v_i \sin(\omega_M t + \theta_i(t)), \quad (2.1)$$

$$v_o(t) = v_o \cos(\omega_M t + \theta_o(t)), \quad (2.2)$$

sendo que $\theta_o(t)$ é a estimativa da malha para a fase $\theta_i(t)$, assim como $\dot{\theta}_o(t)$ é a estimativa para a frequência $\dot{\theta}_i(t)$. A frequência de livre curso ω_M é a frequência de operação do VCO quando $v_c(t) = 0$. Com isso, pode-se definir os erros de fase e de frequência e sincronismo num PLL analógico.

Definição 2.1 (Erros de fase e de frequência de um PLL). *O erro de fase $\vartheta(t)$ é a diferença entre a fase do sinal de entrada $v_i(t)$ e a fase do sinal de saída $v_o(t)$ do VCO local. O erro de frequência é a derivada do erro de fase com relação ao tempo. São expressos pelas equações abaixo:*

$$\vartheta(t) = \theta_i(t) - \theta_o(t), \quad (2.3)$$

$$\dot{\vartheta}(t) = \dot{\theta}_i(t) - \dot{\theta}_o(t). \quad (2.4)$$

É importante observar que o PLL analógico apresenta erro de fase estático. Quando o erro de fase é nulo tem-se $\theta_i(t) = \theta_o(t)$ e, nesse caso, observando as equações 2.1 e 2.2, conclui-se que para $\vartheta = 0$ o PLL apresenta uma diferença de fase de $\frac{\pi}{2} rad$ entre a entrada e a saída [3].

Os PLLs usualmente possuem um filtro na malha (ver figura 2.5). Para grande parte das aplicações, principalmente em sistemas de telecomunicações, este filtro é um passa-baixas linear [5]. Cada PLL é representado por uma equação diferencial de ordem $P + 1$, sendo P a ordem do filtro [65].

Definição 2.2 (Função de transferência do filtro do PLL). *Definimos $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ como a transformada de Laplace da resposta ao impulso [37] do filtro, idêntica à sua função de transferência. $F(s)$ pode ser expressa como uma razão de polinômios em s de acordo com a equação 2.5.*

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.5)$$

com

$$N(s) = \sum_{m=0}^M \alpha_m s^m \quad (2.6)$$

$$D(s) = \sum_{p=0}^P \beta_p s^p \quad (2.7)$$

sendo que $M \leq P$.

Para a obtenção do modelo, precisamos definir os operadores Q e L e o ganho G do PLL.

Definição 2.3 (Operadores Q e L). *Seja $X(s)$ a transformada de Laplace de uma função $x(t)$. Assim, a partir da definição 2.2⁷: $Q(x) = \mathcal{L}^{-1}[N(s)X(s)] = \sum_{m=0}^M \alpha_m \frac{d^m}{dt^m} x(t)$ e $L(x) = \mathcal{L}^{-1}[sD(s)X(s)] = \sum_{p=0}^P \beta_p \frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}} x(t)$. Com isso, define-se:*

$$Q(\cdot) = \sum_{m=0}^M \alpha_m \frac{d^m}{dt^m} (\cdot) \quad (2.8)$$

e

$$L(\cdot) = \sum_{p=0}^P \beta_p \frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}} (\cdot) \quad (2.9)$$

sendo M e P as ordens dos polinômios $N(s)$ e $D(s)$, respectivamente, de acordo com as equações 2.6 e 2.7.

Observação 2.1 (Operadores Q e L). *Sejam $x(t)$ e $y(t)$ as transformadas inversas de Laplace de $X(s)$ e $Y(s)$. Então, decorre diretamente da propriedade linear da transformada de Laplace que*

⁷Pode-se verificar facilmente a validade das duas igualdades através da aplicação direta das propriedades da transformada de Laplace: $\frac{d^n}{dt^n} x(t) = \mathcal{L}^{-1}[s^n X(s)]$. Ver [37] p.26

$$Q(ax + by) = aQ(x) + bQ(y) \quad (2.10)$$

e

$$L(ax + by) = aL(x) + bL(y) \quad (2.11)$$

com a e b reais.

Definição 2.4 (Ganho do PLL). *O ganho do PLL é definido pela equação abaixo:*

$$G = \frac{1}{2}k_mk_ov_iv_o \quad (2.12)$$

sendo k_m o ganho do detector de fase (V/rad), k_o o ganho do VCO (rad/V); v_i e v_o são as amplitudes dos sinais de entrada e saída do PLL, respectivamente.

A saída do detector de fase é proporcional ao produto do sinal de entrada pelo sinal de saída do VCO.

$$v_d(t) = k_mv_i(t)v_o(t). \quad (2.13)$$

Substituindo as equações 2.1 e 2.2 em 2.13, obtém-se:

$$v_d(t) = k_mv_iv_o \sin(\omega_M t + \theta_i(t)) \cos(\omega_M t + \theta_o(t)). \quad (2.14)$$

Aplicando-se a identidade trigonométrica B.1 e a definição 2.4, resulta em:

$$v_d(t) = \frac{G}{k_o}v_\delta(t) \quad (2.15)$$

com

$$v_\delta(t) = \sin(\vartheta(t)) + \sin(2\omega_M t + \theta_i(t) + \theta_o(t)). \quad (2.16)$$

A fase de saída $\theta_o(t)$ do VCO é controlada através da relação:

$$\frac{d}{dt}\theta_o(t) = k_ov_c(t), \quad (2.17)$$

sendo que o sinal de controle - saída do filtro $f(t)$ (figura 2.5) - é expresso pela convolução:

$$v_c(t) = f(t) * v_d(t). \quad (2.18)$$

Substituindo a equação 2.18 na equação 2.17, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}\theta_o(t) = k_o f(t) * v_d(t). \quad (2.19)$$

Aplicando-se o teorema da convolução e a definição 2.2 na equação 2.19, resulta em:

$$k_o N(s) V_d(s) = s D(s) \Theta_o(s). \quad (2.20)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace em ambos os lados da equação 2.20, juntamente com os operadores Q e L da definição 2.3, obtém-se:

$$k_o Q [v_d(t)] = L [\theta_o(t)]. \quad (2.21)$$

Considerando as equações 2.3 e 2.15, tem-se que

$$k_o Q \left[\frac{G}{k_o} v_\delta(t) \right] = L [\theta_i(t) - \vartheta(t)], \quad (2.22)$$

e aplicando-se a observação 2.1, resulta em:

$$L (\vartheta(t)) + G Q [v_\delta(t)] = L [\theta_i(t)]. \quad (2.23)$$

Substituindo a equação 2.16 em 2.23 e aplicando novamente a observação 2.1, obtém-se:

$$L [\vartheta(t)] + G Q [\sin (\vartheta(t))] = L [\theta_i(t)] - G Q [\sin (2\omega_M t + \theta_i(t) + \theta_o(t))]. \quad (2.24)$$

Finalmente, isolando $\theta_o(t)$ na equação 2.3 e substituindo o resultado na equação anterior, obtém-se:

$$L [\vartheta(t)] + G Q [\sin (\vartheta(t))] = L [\theta_i(t)] - G Q [\sin (2(\omega_M t + \theta_i(t)) - \vartheta(t))]. \quad (2.25)$$

A equação 2.25 relaciona o erro de fase ϑ do PLL a uma fase de entrada θ_i . Evidentemente a equação 2.25 depende dos operadores Q e L , que, por sua vez, dependem dos coeficientes da função de transferência do filtro F . Deve-se levar em conta também que as restrições impostas ao filtro são duas: que o filtro seja linear e invariante no

tempo, e sua função de transferência seja realizável (ver definição 2.2). São restrições usualmente encontradas na literatura especializada.

Como pode ser visto na equação 2.15, o detector de fase (multiplicador) gera uma saída contendo duas parcelas, ambas de comportamento oscilatório, uma de baixa frequência e outra com o dobro da frequência de livre curso do VCO. Essa oscilação de frequência dupla constitui um problema sério em algumas aplicações, e a sua supressão, através de filtragem ou outra técnica, exige um esforço considerável [5]. Ainda assim, usualmente, considera-se que o filtro f rejeita essa oscilação de frequência dupla [4]. Então, para a análise do comportamento dinâmico do PLL ou mesmo para o projeto, o termo de frequência dupla é desconsiderado [24], resultando em:

$$L[\vartheta(t)] + GQ[\sin(\vartheta(t))] = L[\theta_i(t)]. \quad (2.26)$$

Além disso, se o PLL opera com erro de fase suficientemente pequeno, podemos linearizar a equação 2.26 considerando⁸ $\sin(\vartheta(t)) \approx \vartheta(t)$:

$$L[\vartheta(t)] + GQ[\vartheta(t)] = L[\theta_i(t)]. \quad (2.27)$$

O diagrama de blocos do PLL linearizado pode ser visto na figura 2.8. A equação 2.28 é a função de transferência do PLL linearizado.

Figura 2.8: Diagrama de blocos do PLL linearizado.

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{k_m k_o F(s)}{s + k_m k_o F(s)} \quad (2.28)$$

Em grande parte dos projetos de PLLs, são utilizados filtros passa-baixas de primeira ou segunda ordens. Os mais frequentemente considerados na literatura são:

⁸Neste caso, a função seno é aproximada pelo primeiro termo da série de Taylor, ver equação B.4.

- de primeira ordem

– *lead-lag* passivo

$$\frac{sT_2 + 1}{s(T_2 + T_1) + 1}, \quad (2.29)$$

– *lead-lag* ativo

$$\frac{sT_2 + 1}{sT_1 + 1}, \quad (2.30)$$

– PI ativo

$$\frac{sT_2 + 1}{sT_1}, \quad (2.31)$$

– *all-pole* ou *lag*

$$\frac{\alpha_0}{s + \beta_0}, \quad (2.32)$$

- de segunda ordem

$$\frac{\alpha_1 s + \alpha_0}{\beta_0 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}. \quad (2.33)$$

O filtro *lag*, embora simplifique o tratamento matemático do modelo do PLL, é utilizado apenas nos casos em que não há necessidade de banda estreita, ou seja, quando a diferença entre as frequências do sinal de entrada e a frequência de operação do PLL não precisa ser pequena. Quando há necessidade de banda estreita e ganho alto, utiliza-se alguma configuração *lead-lag* ou o PI ativo. O filtro de segunda ordem é muito utilizado, principalmente pelo fato de atenuar o DFJ e os outros tipos de *jitter* [5, 28, 35, 36].

Um modelo linear para o PLL, como a função de transferência da equação 2.28, permite a utilização de toda a teoria de análise e técnicas de projeto disponíveis para sistemas lineares. De fato, muitos resultados para o PLL linear podem ser encontrados na literatura [3–5, 65]. Contudo vários fenômenos presentes no comportamento do PLL -DFJ, ciclos-limite, atratores caóticos - essencialmente não-lineares -, não podem ser analisados através de um modelo linear.

2.3.2 Modos de operação do PLL

O PLL apresenta dois modos de operação: o modo de aquisição e o modo de rastreamento. Simplificadamente pode-se definir o modo de aquisição como o modo

dinâmico em que o PLL busca atingir, a partir de uma determinada condição inicial, um estado síncrono. Da mesma forma, pode-se definir o modo de rastreamento como o modo dinâmico em que o PLL realiza pequenos ajustes com o objetivo de manter o estado síncrono, mesmo na presença de perturbações.

Para uma definição mais precisa dos modos de aquisição e rastreamento, deve-se estabelecer, primeiramente, os conceitos de sincronismo, faixa de captura e faixa de retenção, o que é feito a seguir.

Definição 2.5 (Função de entrada ou de excitação). *Considera-se a fase de referência $\theta_i(t)$ do PLL (ver equação 2.1) uma função real ($\theta_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) do tipo degrau, rampa ou parábola, dada por:*

$$\theta_i(t) = \frac{R}{2}t^2 + \Omega t + \phi \quad (2.34)$$

Definindo convenientemente os coeficientes R , Ω e ϕ , todos reais, pode-se obter, isoladamente, qualquer uma das entradas desejadas

Definição 2.6 (Sincronismo num PLL analógico). *Um PLL atingiu o estado síncrono se opera em um ponto de equilíbrio da equação 2.26 com erro de fase ϑ nulo.*

Definição 2.7 (Faixa de captura de um PLL). *Faixa de captura de um PLL é o conjunto de valores dos coeficientes R , Ω e ϕ da função de entrada, de forma que a solução da equação 2.26 convirja para um ponto de equilíbrio assintoticamente estável dada qualquer condição inicial do PLL.*

Definição 2.8 (Faixa de retenção de um PLL). *Faixa de retenção de um PLL é o conjunto de valores dos coeficientes R , Ω e ϕ da função de entrada, de forma que a solução da equação 2.26 tenha um ponto de equilíbrio assintoticamente estável correspondente a um estado síncrono.*

Definição 2.9 (Modo de aquisição de um PLL). *Um PLL opera em modo de aquisição se opera dentro de sua faixa de captura.*

Definição 2.10 (Modo de rastreamento de um PLL). *Um PLL opera em modo de rastreamento se opera dentro de sua faixa de retenção.*

As definições 2.6 a 2.10 estão de acordo com a literatura [59]. Entretanto aplicam-se à equação 2.26, que desconsidera o termo de frequência dupla. Além disso, a equação 2.25 é não-autônoma [66] e, portanto, não possui ponto de equilíbrio. Com isso, essas definições não são adequadas ao estudo do comportamento das malhas de sincronismo com DFJ.

Ademais, para estruturas mais complexas das redes de distribuição de sinais de tempo, como as redes TWMS e FC, a definição 2.6 não é suficiente para caracterizar o sincronismo. Portanto, ao longo deste trabalho, esses conceitos serão revistos.

2.4 Definição do Problema

Na maioria dos trabalhos, o termo de frequência dupla da equação 2.25 é desprezado pois se considera que o filtro o elimina (ver figura 2.5). Contudo o DFJ sempre está presente, prejudicando o desempenho da malha [2–5, 24, 35].

O DFJ caracteriza-se por uma trajetória fechada no plano de fase da equação 2.25. Esta trajetória fechada aparece em torno de um estado síncrono da equação 2.26 (ver figuras 2.9 e 2.10). Para a obtenção dos planos de fase, foram considerados, nas duas equações, ganho do PLL unitário $G = 1$, e o filtro *lag* abaixo:

$$\frac{1}{s + 1} \quad (2.35)$$

Observando a figura 2.10, nota-se que, embora a equação 2.25 não possua pontos de equilíbrio, a sua solução parece convergir para os pontos de equilíbrio da equação 2.26, que podem ser visualizados na figura 2.9. Na realidade, o que ocorre é que a partir de um determinado instante $t > t_s$, $t_s < \infty$, a solução da equação 2.25 orbita os pontos de equilíbrio da equação 2.26, como pode ser observado na figura 2.11.

Considerando o exposto, este trabalho tem como objetivo o estudo analítico e por simulação do comportamento do DFJ em redes de PLLs analógicos. Além disso, dado que o DFJ é sensível ao ganho e aos coeficientes da malha, estuda-se quais condições garantem a existência de estados síncronos nas redes OWMS, TWMS e MC, contruídas com PLLs de segunda e terceira ordens.

Figura 2.9: Plano de fase da equação 2.26, sem o termo de frequência dupla.

Figura 2.10: Plano de fase da equação 2.25, com o termo de frequência dupla.

Figura 2.11: Ampliação da figura 2.10.

Capítulo 3

Redes síncronas

Neste trabalho, estuda-se o efeito do DFJ nas redes de sincronismo com PLLs analógicos. Portanto os modelos das redes devem levar em conta o termo de frequência dupla. Cada topologia de rede é modelada separadamente, e os modelos são desenvolvidos nas seções 3.1 e 3.2.

3.1 Redes MS

As redes síncronas que possuem algum mecanismo de priorização de relógios são chamadas de redes mestre-escravo (MS). Esta arquitetura, devido ao baixo custo e facilidade de implementação, é muito utilizada em sistemas de comunicações.

Existem vários arranjos para a arquitetura MS, por exemplo, redes OWMS e TWMS, OWMS - estrela simples, TWMS - estrela dupla, anel simples e duplo, etc. (ver [59]), como pode ser observado nas figuras 3.1 a 3.3.

Essencialmente qualquer arranjo MS pode ser construído a partir de pequenas modificações nas arquiteturas OWMS e TWMS básicas, que serão modeladas nas próximas seções.

Figura 3.1: Arquiteturas MS básicas.

Figura 3.2: Arranjos-estrela.

Figura 3.3: Arranjos-anel.

3.1.1 Modelo da rede OWMS

Em uma estrutura fortemente hierarquizada, como a das redes MS, a posição de um nó em relação aos demais é um indicativo de sua influência sobre a rede. Na topologia OWMS, o primeiro nó, de forma exclusiva, dita as bases de tempo para toda a rede. Assim define-se:

Definição 3.1 (Nó-mestre). *Seja $j = 1, 2, \dots, N$ a designação da posição de um nó em uma rede MS. O primeiro nó da rede, designado por $j = 1$, é definido como mestre. Todos os demais nós $1 < j \leq N$ são chamados de escravos.*

Considera-se que o relógio mestre gera a base de tempo de forma estável e precisa. Dessa forma, o mestre pode ser representado por seu sinal de saída,

$$v_o^{(1)}(t) = v_o^{(1)} \cos(\omega_M t + \theta_o^{(1)}(t)). \quad (3.1)$$

Para qualquer nó-escravo em uma rede OWMS, pode-se definir os sinais de entrada e saída de forma semelhante às equações 2.1 e 2.2, levando em conta o atraso de transmissão τ entre nós consecutivos.

Definição 3.2 (Sinais de entrada e saída para os nós-escravos em uma rede OWMS). *Em uma rede síncrona OWMS, como a da figura 3.1(a), define-se os sinais de entrada e saída através das equações 3.2 e 3.3,*

$$\begin{aligned} v_i^{(j)}(t) &= v_o^{(j-1)}(t - \tau_{j-1,j}) = \\ &= v_o^{(j-1)} \sin\left(\omega_M(t - \tau_{j-1,j}) + \theta_o^{(j-1)}(t - \tau_{j-1,j}) + (j-1)\frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$v_o^{(j)}(t) = v_o^{(j)} \cos\left(\omega_M t + \theta_o^{(j)}(t) + (j-1)\frac{\pi}{2}\right) \quad (3.3)$$

respectivamente.

A inclusão dos termos múltiplos de $\frac{\pi}{2}$ na definição 3.2 deve-se ao fato de que cada nó gera um erro de fase de $\frac{\pi}{2} rad$ como foi explicado anteriormente (pág. 17). Dessa forma, os nós $j = 5, 10, 15, \dots$ terão erro estático de fase nulo em relação ao mestre.

Considera-se que todos os nós operam com a mesma frequência de livre curso ω_M e, portanto, todo erro de fase se deve ao desalinhamento entre as fases $\theta_o^{(j-1)}$ e $\theta_o^{(j)}$.

Definição 3.3 (Erros de fase e de frequência de um nó-escravo). *O erro de fase $\vartheta^{(j)}(t)$ de um nó-escravo é a diferença entre a fase do sinal de entrada $v_i^{(j)}(t)$ e a fase do sinal de saída $v_o^{(j)}(t)$. O erro de frequência é a derivada do erro de fase com relação ao tempo. São expressos pelas equações 3.4 e 3.5:*

$$\vartheta^{(j)}(t) = \theta_o^{(j-1)}(t - \tau_{j-1,j}) - \theta_o^{(j)}(t) \quad (3.4)$$

$$\dot{\vartheta}^{(j)}(t) = \dot{\theta}_o^{(j-1)}(t - \tau_{j-1,j}) - \dot{\theta}_o^{(j)}(t) \quad (3.5)$$

Em uma rede OWMS, cada nó pode ser construído utilizando filtros ou ganhos diferentes; então pode-se definir:

Definição 3.4 (Função de transferência do filtro de um nó-escravo). *Seja $F^{(j)}(s) = \mathcal{L}[f^{(j)}(t)]$ a transformada de Laplace da função peso do filtro do nó j . A função de transferência $F^{(j)}(s)$ é expressa como uma razão de polinômios em s de acordo com a equação 3.6:*

$$F^{(j)}(s) = \frac{N^{(j)}(s)}{D^{(j)}(s)} \quad (3.6)$$

com

$$N^{(j)}(s) = \sum_{m=0}^{M^{(j)}} \alpha_m^{(j)} s^m \quad (3.7)$$

$$D^{(j)}(s) = \sum_{p=0}^{P^{(j)}} \beta_p^{(j)} s^p \quad (3.8)$$

sendo que $M^{(j)} \leq P^{(j)}$.

Definição 3.5 (Operadores $Q^{(j)}$ e $L^{(j)}$ em redes síncronas). *Seja $X(s)$ a transformada de Laplace de uma função $x(t)$. Assim, a partir da definição 3.4, dizemos que $Q^{(j)}(x) = \mathcal{L}^{-1}[N^{(j)}(s)X(s)] = \sum_{m=0}^{M^{(j)}} \alpha_m^{(j)} \frac{d^m}{dt^m} x(t)$ e também que $L^{(j)}(x) = \mathcal{L}^{-1}[sD^{(j)}(s)X(s)] = \sum_{p=0}^{P^{(j)}} \beta_p^{(j)} \frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}} x(t)$. Com isso, define-se:*

$$Q^{(j)}(\cdot) = \sum_{m=0}^{M^{(j)}} \alpha_m^{(j)} \frac{d^m}{dt^m}(\cdot) \quad (3.9)$$

e

$$L^{(j)}(\cdot) = \sum_{p=0}^{P^{(j)}} \beta_p^{(j)} \frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}}(\cdot) \quad (3.10)$$

sendo $M^{(j)}$ e $P^{(j)}$ as ordens dos polinômios $N^{(j)}(s)$ e $D^{(j)}(s)$, respectivamente, de acordo com as equações 3.7 e 3.8.

Observação 3.1 (Operadores $Q^{(j)}$ e $L^{(j)}$ em redes síncronas). *Igualmente à observação 2.1, decorre, diretamente da propriedade de linearidade da transformada de Laplace, que:*

$$Q^{(j)}(ax + by) = aQ^{(j)}(x) + bQ^{(j)}(y) \quad (3.11)$$

e

$$L^{(j)}(ax + by) = aL^{(j)}(x) + bL^{(j)}(y) \quad (3.12)$$

com a e b reais.

Definição 3.6 (Ganho de um nó em uma rede OWMS). *O ganho de um nó é definido pela equação 3.13,*

$$G^{(j)} = \frac{1}{2} k_m^{(j)} k_o^{(j)} v_o^{(j-1)} v_o^{(j)} \quad (3.13)$$

sendo $k_m^{(j)} (V/\text{rad})$ e $k_o^{(j)} (\text{rad}/V)$ os ganhos do detector de fase e do VCO; $v_o^{(j-1)}$, e $v_o^{(j)}$ as amplitudes dos sinais de entrada e saída do nó j , respectivamente.

Dadas as definições acima, pode-se prosseguir de forma análoga à seção 2.3.1. Assim, a saída do detector de fase do nó j é expressa da seguinte forma:

$$v_d^{(j)}(t) = k_m^{(j)} v_o^{(j-1)}(t - \tau_{j-1,j}) v_o^{(j)}(t), \quad (3.14)$$

lembrando que $\tau_{j-1,j}$ é o atraso de transmissão entre nós consecutivos.

Substituindo as equações 3.2 e 3.3 em 3.14, juntamente com a definição 3.6, obtém-se:

$$v_d^{(j)}(t) = \frac{G^{(j)}}{k_o^{(j)}} \sin \left(\omega_M (t - \tau_{j-1,j}) + \theta_o^{(j-1)}(t - \tau_{j-1,j}) + (j-1) \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(\omega_M t + \theta_o^{(j)}(t) + (j-1) \frac{\pi}{2} \right). \quad (3.15)$$

Aplicando-se a identidade trigonométrica B.1 e a definição 3.3, o resultado é:

$$v_d^{(j)}(t) = \frac{G^{(j)}}{k_o^{(j)}} v_\delta^{(j)}(t) \quad (3.16)$$

com

$$v_\delta^{(j)}(t) = \sin \left(\vartheta^{(j)}(t) - \omega_M \tau_{j-1,j} \right) + \sin \left(2\omega_M t + \theta_o^{(j-1)}(t - \tau_{j-1,j}) + \theta_o^{(j)}(t) - \omega_M \tau_{j-1,j} + (j-1)\pi \right). \quad (3.17)$$

A correção da fase $\theta_o^{(j)}(t)$ é determinada através da lei de controle expressa em 3.18:

$$\frac{d}{dt}\theta_o^{(j)}(t) = k_o^{(j)}v_c^{(j)}(t), \quad (3.18)$$

sendo que o sinal de saída do filtro pode ser expresso pela convolução

$$v_c^{(j)}(t) = f^{(j)}(t) * v_d^{(j)}(t). \quad (3.19)$$

Substituindo a equação 3.19 na equação 3.18, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}\theta_o^{(j)}(t) = k_o^{(j)}f^{(j)}(t) * v_d^{(j)}(t). \quad (3.20)$$

Aplicando-se o teorema da convolução¹ e a definição 3.4 na equação 3.20, o resultado é:

$$k_o^{(j)}N^{(j)}(s)V_d^{(j)}(s) = sD^{(j)}(s)\Theta_o^{(j)}(s). \quad (3.21)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace em ambos os lados da equação 3.21, juntamente com os operadores $Q^{(j)}$ e $L^{(j)}$ da definição 3.5, obtém-se a equação:

$$k_o^{(j)}Q^{(j)}\left[v_d^{(j)}(t)\right] = L^{(j)}\left[\theta_o^{(j)}(t)\right]. \quad (3.22)$$

Isolando $\theta_o^{(j)}(t)$ na equação 3.4 e considerando a equação 3.16, a partir da equação anterior, tem-se que:

$$k_o^{(j)}Q^{(j)}\left[\frac{G^{(j)}}{k_o^{(j)}}v_\delta^{(j)}(t)\right] = L^{(j)}\left[\theta_o^{(j-1)}(t - \tau_{j-1,j}) - \vartheta^{(j)}(t)\right]. \quad (3.23)$$

Aplicando-se a observação 3.1, o resultado é:

$$L^{(j)}\left(\vartheta^{(j)}(t)\right) + G^{(j)}Q^{(j)}\left[v_\delta^{(j)}(t)\right] = L^{(j)}\left[\theta_o^{(j-1)}(t - \tau_{j-1,j})\right]. \quad (3.24)$$

Substituindo a equação 3.17 em 3.24 e aplicando novamente a observação 3.1, obtém-se a equação 3.25:

$$\begin{aligned} & L^{(j)}\left[\vartheta^{(j)}(t)\right] + G^{(j)}Q^{(j)}\left[\sin\left(\vartheta^{(j)}(t) - \omega_M\tau_{j-1,j}\right)\right] L^{(j)}\left[\theta_o^{(j-1)}(t - \tau_{j-1,j})\right] \\ & - G^{(j)}Q^{(j)}\left[\sin\left(2\omega_M t + \theta_o^{(j-1)}(t - \tau_{j-1,j}) + \theta_o^{(j)}(t) - \omega_M\tau_{j-1,j} + (j-1)\pi\right)\right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

¹Para o teorema da convolução, ver [37, 67, 68].

Aplicando a identidade B.2 na segunda parcela do membro direito da equação 3.25, obtém-se:

$$\begin{aligned} \text{sen} (2\omega_M t + \theta_o^{(j-1)}(t - \tau_{j-1,j}) + \theta_o^{(j)}(t) - \omega_M \tau_{j-1,j} + (j-1)\pi) = \\ (-1)^{j-1} \text{sen} (2\omega_M t + \theta_o^{(j-1)}(t - \tau_{j-1,j}) + \theta_o^{(j)}(t) - \omega_M \tau_{j-1,j}). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Substituindo a equação 3.26 na equação 3.25, obtém-se:

$$\begin{aligned} L^{(j)} [\vartheta^{(j)}(t)] + G^{(j)} Q^{(j)} [\text{sen} (\vartheta^{(j)}(t) - \omega_M \tau_{j-1,j})] = L^{(j)} [\theta_o^{(j-1)}(t - \tau_{j-1,j})] \\ + (-1)^j G^{(j)} Q^{(j)} [\text{sen} (2\omega_M t + \theta_o^{(j-1)}(t - \tau_{j-1,j}) + \theta_o^{(j)}(t) - \omega_M \tau_{j-1,j})]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Isolando $\theta_o^{(j)}(t)$ na equação 3.4 e substituindo o resultado na equação anterior, obtém-se a equação 3.28, que é um modelo para os os nós-escravos ($j = 2, 3, \dots, N$) de uma rede OWMS:

$$\begin{aligned} L^{(j)} [\vartheta^{(j)}(t)] + G^{(j)} Q^{(j)} [\text{sen} (\vartheta^{(j)}(t) - \omega_M \tau_{j-1,j})] = L^{(j)} [\theta_o^{(j-1)}(t - \tau_{j-1,j})] \\ + (-1)^j G^{(j)} Q^{(j)} [\text{sen} (2(\omega_M t + \theta_o^{(j-1)}(t - \tau_{j-1,j})) - \vartheta^{(j)}(t) - \omega_M \tau_{j-1,j})]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

De acordo com [42], o desvio de fase fixo (constante) devido a atrasos na transmissão não constitui um problema sério nas aplicações de telecomunicações. Com isso, pode-se considerar a simplificação $\tau_{j-1,j} = 0$ na equação 3.29, que resulta em:

$$\begin{aligned} L^{(j)} [\vartheta^{(j)}(t)] + G^{(j)} Q^{(j)} [\text{sen} (\vartheta^{(j)}(t))] = L^{(j)} [\theta_o^{(j-1)}(t)] \\ + (-1)^j G^{(j)} Q^{(j)} [\text{sen} (2(\omega_M t + \theta_o^{(j-1)}(t)) - \vartheta^{(j)}(t))]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

As equações 3.28 e 3.29 relacionam o erro de fase de cada nó-escravo à fase do nó anterior, levando em consideração o fato de cada nó gerar um erro de fase estático de $\frac{\pi}{2} \text{rad}$. A equação 3.28 considera o atraso devido à transmissão entre os nós.

Duas outras simplificações que podem ser feitas (e pelas mesmas razões que nas equações 2.26 e 2.27), são: i. desconsiderar o termo de frequência dupla e ii. considerar a aproximação $\sin(\vartheta(t)) \approx \vartheta(t)$. Dessa forma, obtém-se as equações 3.30 e 3.31:

$$L^{(j)} [\vartheta^{(j)}(t)] + G^{(j)} Q^{(j)} [\sin(\vartheta^{(j)}(t))] = L^{(j)} [\theta_o^{(j-1)}(t)] \quad (3.30)$$

$$L^{(j)} [\vartheta^{(j)}(t)] + G^{(j)} Q^{(j)} [\vartheta^{(j)}(t)] = L^{(j)} [\theta_o^{(j-1)}(t)] . \quad (3.31)$$

3.1.2 Modelo da rede TWMS

Em uma rede TWMS, como mostrado na figura 3.1(b), cada nó-escravo² deve comparar as fases dos nós anterior e posterior com a sua própria fase, gerando a necessidade de um comparador de fase a mais. Cada nó-escravo deve, então, ser construído de acordo com o diagrama de blocos da figura 3.4.

Figura 3.4: Diagrama de blocos dos PLLs nos nós de redes TWMS.

Em alguns trabalhos, como em [59], talvez por uma questão de simetria na topologia da rede TWMS, considera-se que o relógio mestre pondera sua fase levando em conta a fase do primeiro escravo (nó 2). Contudo, de um ponto de vista prático, isso não é interessante, já que os relógios utilizados nos nós-mestres são mais estáveis e precisos, além de mais caros, que os relógios utilizados em nós-escravos.

Assim, da mesma forma que na topologia OWMS, considera-se que o relógio

²Ver definição 3.1.

mestre gera a base de tempo de forma estável e precisa, sendo representado por seu sinal de saída, exatamente como na equação 3.1.

Diferentemente da topologia OWMS, não é possível considerar que cada nó gera um atraso de fase fixo de $\frac{\pi}{2}rad$ em relação ao nó anterior. Na verdade, em uma rede TWMS, cada nó gera o atraso de $\frac{\pi}{2}rad$ em relação à ponderação ou média ponderada das entradas. Considera-se, então, que as diferenças de fase geradas por cada nó-escravo j estão embutidas na estimativa de fase $\theta_o^{(j)}$ (equação 3.33).

Definição 3.7 (Sinais de entrada e saída para os nós-escravos em uma rede TWMS). *Em uma rede síncrona TWMS, os sinais de entrada são definidos através da equação 3.32. O sinal de saída é definido de acordo com a equação 3.33.*

$$v_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) = v_o^{(\ell)} \sin(\omega_M(t - \tau_{\ell,j}) + \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j})) \quad (3.32)$$

$$v_o^{(j)}(t) = v_o^{(j)} \cos(\omega_M t + \theta_o^{(j)}(t)) \quad (3.33)$$

Com $\ell = j - 1, j + 1$.

Assim como na topologia OWMS, considera-se que todos os nós possuem a mesma frequência de livre curso ω_M , contudo, devido ao fato de haver duas entradas, os erros de fase e frequência devem ser revistos.

Definição 3.8 (Erros de fase e de frequência de um nó-escravo em uma rede TWMS). *O erro de fase $\vartheta^{(\ell,j)}(t)$ de um nó-escravo é a diferença entre a fase do sinal de entrada $v_o^{(\ell)}(t + \tau_{\ell,j})$ e a fase do sinal de saída $v_o^{(j)}(t)$, com $\ell = j - 1, j + 1$. O erro de frequência é a derivada do erro de fase com relação ao tempo. São expressos pelas equações 3.34 e 3.35.*

$$\vartheta^{(\ell,j)}(t) = \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) - \theta_o^{(j)}(t) \quad (3.34)$$

$$\dot{\vartheta}^{(\ell,j)}(t) = \dot{\theta}_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) - \dot{\theta}_o^{(j)}(t). \quad (3.35)$$

As definições 3.4 e 3.5 das funções de transferência dos filtros e dos operadores $Q^{(j)}$ e $L^{(j)}$ continuam válidas para a rede TWMS, assim como a observação 3.1.

A definição do ganho de cada nó em uma rede TWMS é um tanto mais complexa do que na topologia OWMS. Isso ocorre porque as amplitudes $v_o^{(j-1)}$ e $v_o^{(j+1)}$ dos sinais

de entrada fazem parte do ganho³, mas não são necessariamente iguais. Assim, para a rede TWMS, define-se o ganho associado a cada entrada.

Definição 3.9 (Ganho associado a cada entrada em uma rede TWMS). *O ganho associado a cada entrada de um nó j em uma rede TWMS é definido pela equação 3.36:*

$$G^{(\ell,j)} = \frac{1}{2} a_{\ell,j} k_m^{(j)} k_o^{(j)} v_o^{(j)} v_o^{(\ell)} \quad (3.36)$$

com $\ell = j - 1, j + 1$. Os ganhos do detector de fase e do VCO são $k_m^{(j)} (V/\text{rad})$ e $k_o^{(j)} (\text{rad}/V)$, respectivamente. As amplitudes dos sinais de entrada e saída do nó j são $v_o^{(\ell)}$ e $v_o^{(j)}$. O coeficiente $a_{\ell,j}$ pondera a saída de cada multiplicador.

Nessa topologia, o detector de fase é o conjunto formado pelo multiplicador e pelo somatório, como pode ser visto na figura 3.4. Nesse caso, o multiplicador compara as fases dos sinais de entrada com a fase do VCO local, e o somatório realiza uma ponderação entre as diferenças de fase. Com isso, $v_d^{(j)}(t)$ é positivo, se a média ponderada dos erros de fase for positiva, e negativo, se a média ponderada for negativa. Então, a saída do detector de fase é expressa da seguinte forma:

$$v_d^{(j)}(t) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell = j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} a_{\ell,j} u_d^{(\ell,j)}(t). \quad (3.37)$$

com

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell = j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} a_{\ell,j} = 1 \quad (3.38)$$

e

$$u_d^{(\ell,j)}(t) = k_m^{(j)} v_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) v_o^{(j)}(t). \quad (3.39)$$

Substituindo as equações 3.32 e 3.33 da definição 3.7 na equação 3.39, juntamente com a equação 3.36, obtém-se:

$$u_d^{(\ell,j)}(t) = \frac{G^{(\ell,j)}}{a_{\ell,j} k_o^{(j)}} \sin(\omega_M(t - \tau_{\ell,j}) + \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j})) \cos(\omega_M t + \theta_o^{(j)}(t)). \quad (3.40)$$

³Ver definições 2.4 e 3.6.

Aplicando-se a identidade trigonométrica B.1 e a definição 3.8 na equação 3.40, o resultado é:

$$u_d^{(\ell,j)}(t) = \frac{G^{(\ell,j)}}{a_{\ell,j}k_o^{(j)}} u_\delta^{(\ell,j)}(t) \quad (3.41)$$

com

$$u_\delta^{(\ell,j)}(t) = \sin(\vartheta^{(\ell,j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j}) + \sin(2\omega_M t + \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) + \theta_o^{(j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j}). \quad (3.42)$$

A fase de saída $\theta_o^{(j)}(t)$ do nó-escravo j é determinada através da lei de controle expressa em 3.43, abaixo:

$$\frac{d}{dt} \theta_o^{(j)}(t) = k_o^{(j)} v_c^{(j)}(t), \quad (3.43)$$

dado que o sinal de controle $v_c^{(j)}(t)$ pode ser expresso pela convolução

$$v_c^{(j)}(t) = f^{(j)}(t) * v_d^{(j)}(t). \quad (3.44)$$

Substituindo a equação 3.44 na equação 3.43, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \theta_o^{(j)}(t) = k_o^{(j)} f^{(j)}(t) * v_d^{(j)}(t). \quad (3.45)$$

Igualmente ao que foi considerado para a topologia OWMS, aplica-se o teorema da convolução e a definição 3.4 na equação 3.45, obtendo-se:

$$k_o^{(j)} N^{(j)}(s) V_d^{(j)}(s) = s D^{(j)}(s) \Theta_o^{(j)}(s). \quad (3.46)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace em ambos os lados da equação 3.46, juntamente com os operadores $Q^{(j)}$ e $L^{(j)}$ da definição 3.5, obtém-se a equação:

$$k_o^{(j)} Q^{(j)} [v_d^{(j)}(t)] = L^{(j)} [\theta_o^{(j)}(t)]. \quad (3.47)$$

A partir do erro de fase na equação 3.34, pode-se escrever:

$$\vartheta^{(j-1,j)}(t) = \theta_o^{(j-1)}(t - \tau_{j-1,j}) - \theta_o^{(j)}(t) \quad (3.48)$$

e

$$\vartheta^{(j+1,j)}(t) = \theta_o^{(j+1)}(t - \tau_{j+1,j}) - \theta_o^{(j)}(t). \quad (3.49)$$

Então, somando as equações 3.48 e 3.49 e isolando $\theta_o^{(j)}(t)$, obtém-se:

$$\theta_o^{(j)}(t) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} \vartheta^{(\ell,j)}(t). \quad (3.50)$$

Deve-se, agora, substituir a equação 3.50 na equação 3.47 e, considerando a observação 3.1, obtém-se:

$$L^{(j)} \left[\frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} \vartheta^{(\ell,j)}(t) \right] + k_o^{(j)} Q^{(j)} [v_d^{(j)}(t)] = L^{(j)} \left[\frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) \right]. \quad (3.51)$$

Substituindo as equações 3.37 e 3.41 na equação 3.51, pode-se escrever:

$$L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} \vartheta^{(\ell,j)}(t) \right] + Q^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} u_\delta^{(\ell,j)}(t) \right] = L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) \right], \quad (3.52)$$

e substituindo a equação 3.42 na equação 3.52, obtém-se:

$$\begin{aligned} & L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} \vartheta^{(\ell,j)}(t) \right] + Q^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} \text{sen}(\vartheta^{(\ell,j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j}) \right] = \\ & -Q^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} \text{sen}(2\omega_M t + \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) + \theta_o^{(j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j}) \right] \\ & + L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) \right]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Por fim, isolando $\theta_o^{(j)}$ na equação 3.34 e substituindo o resultado em 3.53, tem-se:

$$\begin{aligned}
& L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} \vartheta^{(\ell,j)}(t) \right] + Q^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} \text{sen} \left(\vartheta^{(\ell,j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j} \right) \right] = \\
& -Q^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} \text{sen} \left(2 \left(\omega_M t + \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) \right) - \vartheta_o^{(\ell,j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j} \right) \right] \\
& + L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) \right]. \tag{3.54}
\end{aligned}$$

Empregando as mesmas simplificações usadas para a topologia OWMS (equações 3.29, 3.30 e 3.31), obtêm-se as equações 3.55, 3.56 e 3.57:

$$\begin{aligned}
& L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} \vartheta^{(\ell,j)}(t) \right] + Q^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} \text{sen} \left(\vartheta^{(\ell,j)}(t) \right) \right] = \\
& -Q^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} \text{sen} \left(2 \left(\omega_M t + \theta_o^{(\ell)}(t) \right) - \vartheta_o^{(\ell,j)}(t) \right) \right] \\
& + L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} \theta_o^{(\ell)}(t) \right], \tag{3.55}
\end{aligned}$$

$$L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} \vartheta^{(\ell,j)}(t) \right] + Q^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} \text{sen} \left(\vartheta^{(\ell,j)}(t) \right) \right] = L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} \theta_o^{(\ell)}(t) \right], \tag{3.56}$$

$$L^{(j)} \begin{bmatrix} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} \vartheta^{(\ell,j)}(t) \end{bmatrix} + Q^{(j)} \begin{bmatrix} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)}(\vartheta^{(\ell,j)}(t)) \end{bmatrix} = L^{(j)} \begin{bmatrix} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} \theta_o^{(\ell)}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

A equação 3.54 representa cada nó-escravo de uma rede TWMS ($j = 2, 3, \dots, N$), levando em conta os atrasos de transmissão entre os nós e o termo de frequência dupla.

Na equação 3.55, desconsidera-se o atraso de transmissão. Do mesmo modo, na equação 3.56, desconsidera-se o termo de frequência dupla. Na equação 3.57, linearizam-se os termos que contêm a função $\sin(\vartheta^{(\ell,j)}(t))$.

3.2 Redes MC

A figura 3.5 mostra o diagrama de blocos dos PLLs que constituem os nós na topologia MC. Cada nó possui $N - 1$ entradas, como pode ser observado nas figuras 2.2(c) e 3.5. Cada uma tem sua fase comparada à fase do VCO local, fazendo com que o detector de fase gere um sinal $v_d^{(j)}$ proporcional ao erro médio ponderado da rede.

Figura 3.5: Diagrama de blocos do PLL nos nós de redes MC.

Devido a sua característica democrática na determinação do erro e da correção

de fase, após atingir o estado síncrono, cada nó estará sincronizado à média ponderada das fases dos demais nós. Além disso, devido a essa característica, não há conveniência em definir-se nós-mestres ou escravos, ou seja, não existe hierarquia nessa topologia.

As duas principais diferenças entre as topologias TWMS e MC estão relacionadas à existência de um nó-mestre e ao número de conexões. Contudo, observando as figuras 3.4 e 3.5, nota-se que, exceto pelo número de conexões, não existe diferença significativa entre os nós-escravos da rede TWMS e os nós da rede MC. Com isso, o modelo da rede MC é bastante semelhante ao da rede TWMS.

Nas redes MC, devido a sua organização não hierarquizada, não é possível estabelecer de fato a posição relativa entre dois nós. A numeração dos nós tem caráter discriminatório, mas não implica qualquer tipo de ordem ou precedência. Por isso, da mesma forma que nas redes TWMS, considera-se que toda diferença de fase, inclusive a gerada pelo atraso estático de $\frac{\pi}{2}rad^4$, está embutida na estimativa de fase $\theta_o^{(j)}$.

Definição 3.10 (Sinais de entrada e saída para os nós em uma rede MC). *Em uma rede síncrona MC os sinais de entrada são definidos através da equação 3.58. O sinal de saída é definido de acordo com a equação 3.59.*

$$v_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) = v_o^{(\ell)} \sin(\omega_M(t - \tau_{\ell,j}) + \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j})) \quad (3.58)$$

$$v_o^{(j)}(t) = v_o^{(j)} \cos(\omega_M t + \theta_o^{(j)}(t)) \quad (3.59)$$

Com $\ell = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, N$.

Igualmente às topologias OWMS e TWMS, considera-se que todos os nós possuem a mesma frequência de livre curso ω_M .

Definição 3.11 (Erros de fase e de frequência de um nó em uma rede MC). *O erro de fase $\vartheta^{(\ell,j)}(t)$ de um nó, é a diferença entre a fase do sinal de entrada $v_o^{(\ell)}(t + \tau_{\ell,j})$ e a fase do sinal de saída $v_o^{(j)}(t)$, $\ell = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, N$. O erro de frequência é a derivada do erro de fase com relação ao tempo. São expressos pelas equações 3.60 e 3.61:*

$$\vartheta^{(\ell,j)}(t) = \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) - \theta_o^{(j)}(t) \quad (3.60)$$

$$\dot{\vartheta}^{(\ell,j)}(t) = \dot{\theta}_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) - \dot{\theta}_o^{(j)}(t). \quad (3.61)$$

⁴Ver seção 2.3.1 p.17.

As definições 3.4 e 3.5 das funções de transferência dos filtros e dos operadores $Q^{(j)}$ e $L^{(j)}$ continuam válidas para a rede MC, assim como a observação 3.1.

A definição do ganho associado a cada entrada na topologia MC é idêntica à da rede TWMS, exceto pelo número de entradas.

Definição 3.12 (Ganho associado a cada entrada em uma rede MC). *O ganho associado a cada entrada de um nó j em uma rede MC é definido pela equação 3.62,*

$$G^{(\ell,j)} = \frac{1}{2} a_{\ell,j} k_m^{(j)} k_o^{(j)} v_o^{(j)} v_o^{(\ell)} \quad (3.62)$$

com $\ell = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, N$. Os ganhos do detector de fase e do VCO são $k_m^{(j)}(V/\text{rad})$ e $k_o^{(j)}(\text{rad}/V)$, respectivamente. As amplitudes dos sinais de entrada e saída do nó j são $v_o^{(\ell)}$ e $v_o^{(j)}$. O coeficiente $a_{\ell,j}$ pondera a saída de cada multiplicador.

Assim como na topologia TWMS, considera-se que o detector de fase é a associação entre o multiplicador e o somatório (ver figura 3.5). O multiplicador compara as fases dos sinais de entrada com a fase do VCO local. O somatório realiza uma ponderação entre as diferenças de fase, gerando $v_d^{(j)}(t)$ positivo, se a média ponderada dos erros de fase for positiva e, negativo, se a média ponderada for negativa. Assim, tem-se:

$$v_d^{(j)}(t) = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N a_{\ell,j} u_d^{(\ell,j)}(t) \quad (3.63)$$

com

$$\frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N a_{\ell,j} = 1 \quad (3.64)$$

e

$$u_d^{(\ell,j)}(t) = k_m^{(j)} v_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) v_o^{(j)}(t). \quad (3.65)$$

A saída de cada comparador de fase $u_d^{(\ell,j)}$ é diretamente proporcional ao produto das equações 3.58 e 3.59 da definição 3.10. Considerando também a definição 3.12, obtém-se:

$$u_d^{(\ell,j)}(t) = \frac{G^{(\ell,j)}}{a_{\ell,j} k_o^{(j)}} \text{sen} \left(\omega_M (t - \tau_{\ell,j}) + \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) \right) \cos \left(\omega_M t + \theta_o^{(j)}(t) \right). \quad (3.66)$$

Aplicando a identidade trigonométrica B.1 e a definição 3.11 (equação 3.60) na equação 3.66, obtém-se:

$$u_d^{(\ell,j)}(t) = \frac{G^{(\ell,j)}}{a_{\ell,j}k_o^{(j)}} u_\delta^{(\ell,j)}(t) \quad (3.67)$$

com

$$u_\delta^{(\ell,j)}(t) = \sin(\vartheta^{(\ell,j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j}) + \sin(2\omega_M t + \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) + \theta_o^{(j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j}). \quad (3.68)$$

A fase de saída - ou estimativa de fase - do nó j ($\theta_o^{(j)}(t)$) é determinada através da lei de controle expressa em 3.69:

$$\frac{d}{dt} \theta_o^{(j)}(t) = k_o^{(j)} v_c^{(j)}(t) \quad (3.69)$$

A resposta do filtro $f^{(j)}$ é determinada a partir da convolução

$$v_c^{(j)}(t) = f^{(j)}(t) * v_d^{(j)}(t), \quad (3.70)$$

que, substituída na equação 3.69, resulta:

$$\frac{d}{dt} \theta_o^{(j)}(t) = k_o^{(j)} f^{(j)}(t) * v_d^{(j)}(t). \quad (3.71)$$

Analogamente ao que foi feito para as topologias TWMS e OWMS, aplica-se o teorema da convolução e a definição 3.4 na equação 3.71, obtendo-se:

$$k_o^{(j)} N^{(j)}(s) V_d^{(j)}(s) = s D^{(j)}(s) \Theta_o^{(j)}(s). \quad (3.72)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace em ambos os lados da equação 3.72, juntamente com os operadores $Q^{(j)}$ e $L^{(j)}$ da definição 3.5, obtém-se a equação:

$$k_o^{(j)} Q^{(j)} \left[v_d^{(j)}(t) \right] = L^{(j)} \left[\theta_o^{(j)}(t) \right]. \quad (3.73)$$

A partir do erro de fase definido na equação 3.60, pode-se escrever:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta^{(1,j)}(t) = \theta_o^{(1)}(t - \tau_{1,j}) - \theta_o^{(j)}(t) \\ \vdots \\ \vartheta^{(j-1,j)}(t) = \theta_o^{(j-1)}(t - \tau_{j-1,j}) - \theta_o^{(j)}(t) \\ \vartheta^{(j+1,j)}(t) = \theta_o^{(j+1)}(t - \tau_{j+1,j}) - \theta_o^{(j)}(t) \\ \vdots \\ \vartheta^{(N,j)}(t) = \theta_o^{(N)}(t - \tau_{N,j}) - \theta_o^{(j)}(t). \end{array} \right. \quad (3.74)$$

Somando todas as equações em 3.74 e isolando $\theta_o^{(j)}(t)$, tem-se:

$$\theta_o^{(j)}(t) = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) - \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N \vartheta^{(\ell,j)}(t). \quad (3.75)$$

Substituindo a equação 3.75 na equação 3.73 e considerando a observação 3.1, obtém-se:

$$L^{(j)} \left[\frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N \vartheta^{(\ell,j)}(t) \right] + k_o^{(j)} Q^{(j)} \left[v_d^{(j)}(t) \right] = L^{(j)} \left[\frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) \right]. \quad (3.76)$$

Da mesma forma, substituindo as equações 3.63 e 3.67 na equação 3.76, tem-se:

$$L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N \vartheta^{(\ell,j)}(t) \right] + Q^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{N1} G^{(\ell,j)} u_\delta^{(\ell,j)}(t) \right] = L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) \right]. \quad (3.77)$$

Considerando a equação 3.68 e substituindo $u_\delta^{(\ell,j)}(t)$ na equação 3.77, o resultado é:

$$\begin{aligned} & L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N \vartheta^{(\ell,j)}(t) \right] + Q^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} \text{sen} \left(\vartheta^{(\ell,j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j} \right) \right] = \\ & -Q^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} \text{sen} \left(2\omega_M t + \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) + \theta_o^{(j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j} \right) \right] \\ & + L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) \right]. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Isolando $\theta_o^{(j)}$ na equação 3.60 e substituindo o resultado na equação anterior,

obtém-se:

$$\begin{aligned}
& L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N \vartheta^{(\ell,j)}(t) \right] + Q^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} \text{sen} \left(\vartheta^{(\ell,j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j} \right) \right] = \\
& -Q^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} \text{sen} \left(2 \left(\omega_M t + \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) \right) - \vartheta^{(\ell,j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j} \right) \right] \\
& + L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N \theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) \right]. \tag{3.79}
\end{aligned}$$

Aplicando-se as mesmas simplificações empregadas nas topologias anteriores, obtêm-se as equações 3.80, 3.81 e 3.82. A equação 3.79 representa cada nó de uma rede MC, levando em conta os atrasos de transmissão entre os nós e o termo de frequência dupla. Desconsidera-se o atraso de transmissão na equação 3.80 e o termo de frequência dupla na equação 3.81. Na equação 3.82, linearizam-se os termos que contêm a função $\text{sen}(\vartheta^{(\ell,j)}(t))$.

$$\begin{aligned}
& L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N \vartheta^{(\ell,j)}(t) \right] + Q^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} \text{sen} \left(\vartheta^{(\ell,j)}(t) \right) \right] = \\
& -Q^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} \text{sen} \left(2 \left(\omega_M t + \theta_o^{(\ell)}(t) \right) - \vartheta_o^{(\ell,j)}(t) \right) \right] \\
& + L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N \theta_o^{(\ell)}(t) \right] \tag{3.80}
\end{aligned}$$

$$L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N \vartheta^{(\ell,j)}(t) \right] + Q^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} \text{sen} \left(\vartheta^{(\ell,j)}(t) \right) \right] = L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N \theta_o^{(\ell)}(t) \right] \tag{3.81}$$

$$L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N \vartheta^{(\ell,j)}(t) \right] + Q^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} \left(\vartheta^{(\ell,j)}(t) \right) \right] = L^{(j)} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N \theta_o^{(\ell)}(t) \right] \quad (3.82)$$

Capítulo 4

O estado síncrono e os modos de operação

Na seção 2.3.2, foram apresentados os conceitos de sincronismo e de modos de operação de um PLL analógico; contudo, estas definições, extraídas de [59], desconsideram o DFJ e outros tipos de *jitter* de fase.

A equação 2.25, por outro lado, modela o comportamento dinâmico de um PLL analógico levando em conta o termo de frequência dupla devido ao detector de fase. O DFJ, que é objeto de estudo deste trabalho, é gerado pelo termo de frequência dupla.

Ao observar-se o termo de frequência dupla na equação 2.25, nota-se que este atua como um termo forçante para a equação diferencial. Com isso, após o transitório, a trajetória do sistema no espaço de estados apresenta uma órbita fechada em torno de um ponto, caracterizando o DFJ.

Esse comportamento é esperado e já foi observado em simulações, como a mostrada nas figuras 2.10 e 2.11 (p.26), e experimentalmente [35]. Como foi dito anteriormente, a partir de um instante $t_s < \infty$, essa oscilação ocorre em torno de um ponto de equilíbrio da equação 2.26 [24], impedindo, desse modo, que o PLL atinja o estado síncrono da definição 2.6. Fica, dessa forma, evidente, que a definição 2.6 não é conveniente para o estudo do sincronismo quando se considera o DFJ ou outros tipos de *jitter* e, por conseguinte, as definições dos modos de operação do PLL, apresentadas na seção 2.3.2, também devem ser revistas.

Tanto para as definições de sincronismo e modos de operação como para o estabelecimento das condições de existência de estados síncronos, serão desconsiderados os atrasos de transmissão fixos entre os nós, $\tau_{\ell,j}$, pois apenas modificam a posição dos pontos de equilíbrio das equações no espaço de estados [36].

Os conceitos de sincronismo e modos de operação das redes de sincronismo podem ser estabelecidos em relação às equações dos modelos desenvolvidos no capítulo 3. Nesse caso, essas definições seriam relativas a cada nó da rede, isoladamente. Neste trabalho, entretanto, as definições de sincronismo e modos de operação levarão em conta a rede como um todo. Para tanto, é necessário obter representações dos modelos no espaço de estados. Com o objetivo de simplificar o tratamento matemático supõe-se que todos os nós são construídos da mesma forma. Com isso, $G^{(\ell,j)} = G$, $L^{(j)}[\cdot] = L[\cdot]$ e $Q^{(j)}[\cdot] = Q[\cdot]$, nas equações 3.30, 3.56 e 3.81.

Na seção 4.1, as equações de estados de cada topologia são obtidas e, em seguida, na seção 4.2, são definidos os conceitos de sincronismo e de modos de operação.

4.1 Equação de estados

Em grande parte dos artigos encontrados na literatura especializada considera-se redes de PLLs de segunda ordem, sendo que em boa parte desses casos o filtro da malha é do tipo *lag* (equação 2.32). Embora simplifique o tratamento matemático, este tipo de filtro tem aplicação restrita a casos em que não há necessidade de banda de operação estreita [5, 36, 60, 69]. Com isso, as equações de estados serão obtidas considerando filtros *lead-lag* e de segunda ordem.

4.1.1 PLLs de 2ª ordem

As equações de estados das redes utilizando PLLs de 2ª ordem são obtidas considerando o filtro *lead-lag*

$$F(s) = \frac{\alpha_1 s + \alpha_0}{\beta_1 s + \beta_0} \quad (4.1)$$

na malha de cada nó.

Além disso, para a obtenção das equações de estados, serão necessárias as seguintes relações entre os erros de fase:

$$\vartheta^{(\ell,j)} = \theta_o^{(\ell)} - \theta_o^{(j)} = -(\theta_o^{(j)} - \theta_o^{(\ell)}) = -\vartheta^{(j,\ell)} \quad (4.2)$$

e

$$\vartheta^{(\ell,j)} = \theta_o^{(\ell)} - \theta_o^{(j)} = \theta_o^{(\ell)} - \theta_o^{(1)} + \theta_o^{(1)} - \theta_o^{(j)} = \vartheta^{(\ell,1)} - \vartheta^{(j,1)}. \quad (4.3)$$

Rede OWMS

A partir da equação 3.30, obtém-se:

$$-L [\theta_o^{(j)}] + GQ [\text{sen} (\vartheta^{(j)})] = 0, \quad (4.4)$$

para o nó j , e

$$-L [\theta_o^{(j-1)}] + GQ [\text{sen} (\vartheta^{(j-1)})] = 0, \quad (4.5)$$

para o nó $j - 1$.

Subtraindo 4.5 de 4.4, o resulta é¹:

$$L [\vartheta^{(j-1,j)}] + GQ [\text{sen} (\vartheta^{(j-1,j)})] - GQ [\text{sen} (\vartheta^{(j-2,j-1)})] = 0. \quad (4.6)$$

A partir das equações 4.6 e 4.1, e da definição 3.5, tem-se:

$$\begin{aligned} &\ddot{\vartheta}^{(j-1,j)} + \mu_0 \dot{\vartheta}^{(j-1,j)} + \mu_1 G \dot{\vartheta}^{(j-1,j)} \cos (\vartheta^{(j-1,j)}) + \mu_2 G \text{sen} (\vartheta^{(j-1,j)}) \\ &+ \mu_1 G \dot{\vartheta}^{(j-2,j-1)} \cos (\vartheta^{(j-2,j-1)}) + \mu_2 G \text{sen} (\vartheta^{(j-2,j-1)}) = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

para $j = 2, 3, \dots, N$, sendo:

$$\mu_0 = \frac{\beta_0}{\beta_1}, \quad (4.8)$$

$$\mu_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad (4.9)$$

¹ $\vartheta^{(\ell,j)} = \theta_o^{(\ell)} - \theta_o^{(j)}$, modifica-se a notação em relação à equação 3.30 para que seja possível discriminar corretamente as diferenças de fase entre os nós.

$$\mu_2 = \frac{\alpha_0}{\beta_1}. \quad (4.10)$$

A equação 4.7 pode ser levada no espaço de estados definindo-se:

$$x_1^{(m)} = \vartheta^{(j-1,j)} \quad (4.11)$$

e

$$x_2^{(m)} = \dot{\vartheta}^{(j-1,j)} \quad (4.12)$$

com $m = j - 1$, e $j = 2, 3, \dots, N$. Então,

$$\dot{\mathbf{x}}^{(m)} = \begin{cases} \dot{x}_1^{(m)} = x_2^{(m)} \\ \dot{x}_2^{(m)} = -\mu_0 x_2^{(m)} - \mu_1 G x_2^{(m)} \cos(x_1^{(m)}) - \mu_2 G \sin(x_1^{(m)}) \\ \quad - \mu_1 G x_2^{(m-1)} \cos(x_1^{(m-1)}) - \mu_2 G \sin(x_1^{(m-1)}) \end{cases} \quad (4.13)$$

A equação de estados 4.13 representa a dinâmica das diferenças de fase entre os nós da malha.

Rede TWMS

Analogamente à seção anterior, a partir da equação 3.56, obtém-se:

$$-2L [\theta_o^{(j)}] + GQ \left[\sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} \sin(\vartheta^{(\ell,j)}) \right] = 0 \quad (4.14)$$

para o nó j , e

$$-2L [\theta_o^{(j-1)}] + GQ \left[\sum_{\substack{\ell=j-2 \\ \ell \neq j-1}}^j \sin(\vartheta^{(\ell,j-1)}) \right] = 0 \quad (4.15)$$

para o nó-escravo $j - 1$, sendo $j = 2, 3, \dots, N - 1$.

Subtraindo a equação 4.15 de 4.14, e utilizando a relação expressa na equação 4.2, obtém-se:

$$L [\vartheta^{(j-1,j)}] + GQ [\sin(\vartheta^{(j-1,j)})] - \frac{1}{2} GQ [\sin(\vartheta^{(j,j+1)}) + \sin(\vartheta^{(j-2,j-1)})] = 0 \quad (4.16)$$

para $j = 2, 3, \dots, N - 1$.

Considerando o filtro de primeira ordem da equação 4.1, a definição 3.5 e a equação 4.16, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \ddot{\vartheta}^{(j-1,j)} + \mu_0 \dot{\vartheta}^{(j-1,j)} + \mu_1 G \dot{\vartheta}^{(j-1,j)} \cos(\vartheta^{(j-1,j)}) + \mu_2 G \sin(\vartheta^{(j-1,j)}) \\ & - \frac{1}{2} \mu_1 G \left[\dot{\vartheta}^{(j,j+1)} \cos(\vartheta^{(j,j+1)}) + \dot{\vartheta}^{(j-2,j-1)} \cos(\vartheta^{(j-2,j-1)}) \right] \\ & - \frac{1}{2} \mu_2 G \left[\sin(\vartheta^{(j,j+1)}) + \sin(\vartheta^{(j-2,j-1)}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

para $j = 2, 3, \dots, N - 1$, e os coeficientes μ_0 , μ_1 e μ_2 , dados pelas equações 4.8, 4.9 e 4.10, respectivamente.

Definindo as variáveis de estado da mesma forma que nas equações 4.11 e 4.12, tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(m)} = \begin{cases} \dot{x}_1^{(m)} = x_2^{(m)} \\ \dot{x}_2^{(m)} = -\mu_0 x_2^{(m)} - \mu_1 G x_2^{(m)} \cos(x_1^{(m)}) - \mu_2 G \sin(x_1^{(m)}) \\ \quad + \frac{1}{2} \mu_1 G \left[x_2^{(m+1)} \cos(x_2^{(m+1)}) + x_2^{(m-1)} \cos(x_2^{(m-1)}) \right] \\ \quad + \frac{1}{2} \mu_2 G \left[\sin(x_1^{(m+1)}) + \sin(x_1^{(m-1)}) \right] \end{cases} \quad (4.18)$$

para $m = j - 1$, $m = 1, 2, \dots, N - 2$, e

$$\dot{\mathbf{x}}^{(N-1)} = \begin{cases} \dot{x}_1^{(N-1)} = x_2^{(N-1)} \\ \dot{x}_2^{(N-1)} = -\mu_0 x_2^{(N-1)} - \mu_1 G x_2^{(N-1)} \cos(x_1^{(N-1)}) - \mu_2 G \sin(x_1^{(N-1)}) \\ \quad - \mu_1 G x_2^{(N-2)} \cos(x_1^{(N-2)}) - \mu_2 G \sin(x_1^{(N-2)}) \end{cases} \quad (4.19)$$

para $m = N - 1$. Na topologia TWMS, o último nó é construído da mesma forma que um nó-escravo da rede OWMS (ver figura 3.1(b)).

Rede MC

No caso da rede MC, expressa-se a diferença de fase entre todos os nós e o nó 1, escolhido arbitrariamente, dado que, nesse caso, a numeração não implica ordem ou precedência entre os nós. Assim, a partir das equações 3.81 e 3.75, tem-se:

$$-(N-1)L [\theta_o^{(1)}] + GQ \left[\sum_{\ell=2}^N \text{sen} (\vartheta^{(\ell,1)}) \right] = 0, \quad (4.20)$$

para o nó 1, e

$$-(N-1)L [\theta_o^{(j)}] + GQ \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N \text{sen} (\vartheta^{(\ell,j)}) \right] = 0 \quad (4.21)$$

para $j = 2, 3, \dots, N$. Subtraindo 4.21 de 4.20, obtém-se:

$$(N-1)L [\vartheta^{(j,1)}] + GQ \left[\sum_{\ell=2}^N \text{sen} (\vartheta^{(\ell,1)}) \right] - GQ \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N \text{sen} (\vartheta^{(\ell,j)}) \right] = 0. \quad (4.22)$$

Utilizando as relações expressas nas equações 4.2 e 4.3, após alguma manipulação algébrica, tem-se:

$$L [\vartheta^{(j,1)}] + 2\mu_G Q [\text{sen} (\vartheta^{(j,1)})] + \mu_G Q \left[\sum_{\substack{\ell=2 \\ \ell \neq j}}^N \left(\text{sen} (\vartheta^{(\ell,1)}) - \text{sen} (\vartheta^{(\ell,1)} - \vartheta^{(j,1)}) \right) \right] = 0, \quad (4.23)$$

para $j = 2, 3, \dots, N$, sendo

$$\mu_G = \frac{G}{N-1}. \quad (4.24)$$

Considerando o filtro da equação 4.1, a definição 3.5 e a equação 4.23, tem-se:

$$\begin{aligned} & \ddot{\vartheta}^{(j,1)} + \mu_0 \dot{\vartheta}^{(j,1)} + 2\mu_1 \mu_G \dot{\vartheta}^{(j,1)} \cos (\vartheta^{(j,1)}) + 2\mu_2 \mu_G \text{sen} (\vartheta^{(j,1)}) \\ & + \mu_1 \mu_G \sum_{\substack{\ell=2 \\ \ell \neq j}}^N \left(\dot{\vartheta}^{(\ell,1)} \cos (\vartheta^{(\ell,1)}) - (\dot{\vartheta}^{(\ell,1)} - \dot{\vartheta}^{(j,1)}) \cos (\vartheta^{(\ell,1)} - \vartheta^{(j,1)}) \right) \\ & + \mu_2 \mu_G \sum_{\substack{\ell=2 \\ \ell \neq j}}^N \left(\sin (\vartheta^{(\ell,1)}) - \sin (\vartheta^{(\ell,1)} - \vartheta^{(j,1)}) \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

com μ_0 , μ_1 e μ_2 , dados pelas equações 4.8, 4.9 e 4.10, respectivamente.

Definindo as variáveis de estado

$$x_1^{(m)} = \vartheta^{(j,1)}, \quad (4.26)$$

e

$$x_2^{(m)} = \dot{\vartheta}^{(j,1)}, \quad (4.27)$$

para $j = 2, 3, \dots, N$ e $m = j - 1$, obtém-se:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(m)} = \begin{cases} \dot{x}_1^{(m)} = x_2^{(m)} \\ \dot{x}_2^{(m)} = -\mu_0 x_2^{(m)} - 2\mu_1 \mu_G x_2^{(m)} \cos(x_1^{(m)}) - 2\mu_2 \mu_G \sin(x_1^{(m)}) \\ \quad - \mu_1 \mu_G \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N-1} \left(x_2^{(n)} \cos(x_1^{(n)}) - (x_2^{(n)} - x_2^{(m)}) \cos(x_1^{(n)} - x_1^{(m)}) \right) \\ \quad - \mu_2 \mu_G \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N-1} \left(\sin(x_1^{(n)}) - \sin(x_1^{(n)} - x_1^{(m)}) \right) \end{cases} \quad (4.28)$$

para $m = 1, 2, \dots, N - 1$. A equação de estados 4.28 representa a dinâmica das diferenças de fases entre o nó 1 e os demais $N - 1$ nós.

4.1.2 PLLs de 3ª ordem

As equações de estados das redes que utilizam PLLs de 3ª ordem são obtidas considerando o filtro de 2ª ordem abaixo²:

$$F(s) = \frac{\alpha_1 s + \alpha_0}{\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}. \quad (4.29)$$

Rede OWMS

A partir das equações 4.6 e 4.29 e da definição 3.5, tem-se:

$$\begin{aligned} & \ddot{\vartheta}^{(j-1,j)} + \mu_0 \ddot{\vartheta}^{(j-1,j)} + \mu_1 \dot{\vartheta}^{(j-1,j)} + \mu_2 G \dot{\vartheta}^{(j-1,j)} \cos(\vartheta^{(j-1,j)}) + \mu_3 G \sin(\vartheta^{(j-1,j)}) \\ & + \mu_2 G \dot{\vartheta}^{(j-2,j-1)} \cos(\vartheta^{(j-2,j-1)}) + \mu_3 G \sin(\vartheta^{(j-2,j-1)}) = 0, \end{aligned} \quad (4.30)$$

²Este é o mesmo filtro da equação 2.33, reapresentado aqui para facilitar a leitura.

para $j = 2, 3, \dots, N$, sendo:

$$\mu_0 = \frac{\beta_1}{\beta_2}, \quad (4.31)$$

$$\mu_1 = \frac{\beta_0}{\beta_2}, \quad (4.32)$$

$$\mu_2 = \frac{\alpha_1}{\beta_2}, \quad (4.33)$$

$$\mu_3 = \frac{\alpha_0}{\beta_2}. \quad (4.34)$$

A equação 4.30 pode ser representada no espaço de estados considerando-se as variáveis de estado definidas nas equações 4.11 e 4.12, mais uma terceira definida abaixo:

$$x_3^{(m)} = \ddot{\vartheta}^{(j-1,j)}, \quad (4.35)$$

então,

$$\dot{\mathbf{x}}^{(m)} = \begin{cases} \dot{x}_1^{(m)} = x_2^{(m)} \\ \dot{x}_2^{(m)} = x_3^{(m)} \\ \dot{x}_3^{(m)} = -\mu_0 x_3^{(m)} - \mu_1 x_2^{(m)} - \mu_2 G x_2^{(m)} \cos(x_1^{(m)}) - \mu_3 G \sin(x_1^{(m)}) \\ \quad - \mu_2 G x_2^{(m-1)} \cos(x_1^{(m-1)}) - \mu_3 G \sin(x_1^{(m-1)}), \end{cases} \quad (4.36)$$

para $j = 2, 3, \dots, N$.

Rede TWMS

Considerando o filtro da equação 4.29, a definição 3.5 e a equação 4.16, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \ddot{\vartheta}^{(j-1,j)} + \mu_0 \ddot{\vartheta}^{(j-1,j)} + \mu_1 \dot{\vartheta}^{(j-1,j)} + \mu_2 G \dot{\vartheta}^{(j-1,j)} \cos(\vartheta^{(j-1,j)}) + \mu_3 G \sin(\vartheta^{(j-1,j)}) \\ & - \frac{1}{2} \mu_2 G \left[\dot{\vartheta}^{(j,j+1)} \cos(\vartheta^{(j,j+1)}) + \dot{\vartheta}^{(j-2,j-1)} \cos(\vartheta^{(j-2,j-1)}) \right] \\ & - \frac{1}{2} \mu_3 G \left[\sin(\vartheta^{(j,j+1)}) + \sin(\vartheta^{(j-2,j-1)}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

para $j = 2, 3, \dots, N - 1$. Os coeficientes μ_0, μ_1, μ_2 e μ_3 são dados pelas equações 4.31, 4.32, 4.33 e 4.34, respectivamente.

Definindo as variáveis de estado da mesma forma que nas equações 4.11, 4.12 e 4.35, tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(m)} = \begin{cases} \dot{x}_1^{(m)} = x_2^{(m)} \\ \dot{x}_2^{(m)} = x_3^{(m)} \\ \dot{x}_3^{(m)} = -\mu_0^{(m)} x_3^{(m)} - \mu_1^{(m)} x_2^{(m)} \\ \quad - \mu_2^{(m)} G x_2^{(m)} \cos(x_1^{(m)}) - \mu_3^{(m)} G \sin(x_1^{(m)}) \\ \quad + \frac{1}{2} \mu_2 G \left[x_2^{(m+1)} \cos(x_2^{(m+1)}) + x_2^{(m-1)} \cos(x_2^{(m-1)}) \right] \\ \quad + \frac{1}{2} \mu_3 G \left[\sin(x_1^{(m+1)}) + \sin(x_1^{(m-1)}) \right] \end{cases} \quad (4.38)$$

para $m = j - 1, m = 1, 2, \dots, N - 2$, e

$$\dot{\mathbf{x}}^{(N-1)} = \begin{cases} \dot{x}_1^{(N-1)} = x_2^{(N-1)} \\ \dot{x}_2^{(N-1)} = x_3^{(N-1)} \\ \dot{x}_3^{(N-1)} = -\mu_0 x_3^{(N-1)} - \mu_1 x_2^{(N-1)} \\ \quad - \mu_2 G x_2^{(N-1)} \cos(x_1^{(N-1)}) - \mu_3 G \sin(x_1^{(N-1)}) \\ \quad - \mu_2 G x_2^{(N-2)} \cos(x_1^{(N-2)}) - \mu_3 G \sin(x_1^{(N-2)}) \end{cases} \quad (4.39)$$

para $m = N - 1$.

Rede MC

A partir da equação 4.23, da definição 3.5 e do filtro da equação 4.29, tem-se:

$$\begin{aligned} & \ddot{\vartheta}^{(j,1)} + \mu_0 \ddot{\vartheta}^{(j,1)} + \mu_1 \dot{\vartheta}^{(j,1)} + 2\mu_2 \mu_G \dot{\vartheta}^{(j,1)} \cos(\vartheta^{(j,1)}) + 2\mu_3 \mu_G \sin(\vartheta^{(j,1)}) \\ & + \mu_2 \mu_G \sum_{\substack{\ell=2 \\ \ell \neq j}}^N \left(\dot{\vartheta}^{(\ell,1)} \cos(\vartheta^{(\ell,1)}) - (\dot{\vartheta}^{(\ell,1)} - \dot{\vartheta}^{(j,1)}) \cos(\vartheta^{(\ell,1)} - \vartheta^{(j,1)}) \right) \\ & + \mu_3 \mu_G \sum_{\substack{\ell=2 \\ \ell \neq j}}^N \left(\sin(\vartheta^{(\ell,1)}) - \sin(\vartheta^{(\ell,1)} - \vartheta^{(j,1)}) \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.40)$$

com μ_0 , μ_1 , μ_2 , μ_3 e μ_G , dados pelas equações 4.31, 4.32, 4.33, 4.34 e 4.24, respectivamente.

Considerando as variáveis de estado definidas nas equações 4.26 e 4.27, mais uma terceira variável de estado dada por:

$$x_3^{(m)} = \ddot{\vartheta}^{(j,1)}, \quad (4.41)$$

para $j = 2, 3, \dots, N$ e $m = j - 1$, obtém-se:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(m)} = \begin{cases} \dot{x}_1^{(m)} = x_2^{(m)} \\ \dot{x}_2^{(m)} = x_3^{(m)} \\ \dot{x}_3^{(m)} = -\mu_0 x_3^{(m)} - \mu_1 x_2^{(m)} \\ \quad - 2\mu_2 \mu_G x_2^{(m)} \cos(x_1^{(m)}) - 2\mu_3 \mu_G \sin(x_1^{(m)}) \\ \quad - \mu_2 \mu_G \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N-1} \left(x_2^{(n)} \cos(x_1^{(n)}) - (x_2^{(n)} - x_2^{(m)}) \cos(x_1^{(n)} - x_1^{(m)}) \right) \\ \quad - \mu_3 \mu_G \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N-1} \left(\sin(x_1^{(n)}) - \sin(x_1^{(n)} - x_1^{(m)}) \right) \end{cases} \quad (4.42)$$

para $m = 1, 2, \dots, N - 1$. A equação de estados 4.42 representa a dinâmica das diferenças de fases entre o nó 1 e os demais $N - 1$ nós.

4.2 Sincronismo e modos de operação

Definição 4.1 (Modelos dinâmicos das malhas de sincronismo). *O comportamento dinâmico das diferenças de fases entre os nós das malhas de sincronismo pode ser representado no espaço de estados $\mathbb{R}^{(N-1)(P+1)}$, através das equações de estados, sendo N o número de nós e P a ordem do filtro.*

As equações de estados autônomas (que consideram PLLs de segunda ou de terceira ordens) todas obtidas na seção 4.1, podem ser expressas da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad (4.43)$$

sendo o vetor de estados dado por:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)T} & \mathbf{x}^{(2)T} & \dots & \mathbf{x}^{(N-1)T} \end{bmatrix}^T \quad (4.44)$$

com

$$\mathbf{x}^{(m)} = \begin{bmatrix} x_1^{(m)} & \cdots & x_{P+1}^{(m)} \end{bmatrix}^T. \quad (4.45)$$

para $m = 1, 2, \dots, N - 1$.

A partir das equações 3.29, 3.55 e 3.80, seguindo os mesmos passos da seção 4.1 e considerando as mesmas definições das variáveis de estado em cada topologia, pode-se obter uma representação no espaço de estados que considere o termo de frequência dupla. Essa nova equação de estados não autônoma será denominada “sistema real”.

O sistema real é descrito da forma:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{X}}(t, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}), \quad (4.46)$$

com

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \theta_o^{(1)} & \theta_o^{(2)} & \cdots & \theta_o^{(N)} \end{bmatrix}^T. \quad (4.47)$$

Definição 4.2 (Estado síncrono). *Seja o sistema dinâmico da equação 4.43 o modelo de uma malha de sincronismo e seja $\mathbf{x}_0$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de 4.43, então $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_0$ é um estado síncrono.*

Definição 4.3 (Sincronismo). *Seja $\mathbf{x}_s$ um estado síncrono de uma malha de sincronismo representada pela equação 4.43; seja também $\dot{\mathbf{u}}(t)$ o vetor dos sinais de controle dos VCOs da rede³ e a trajetória $\bar{\mathbf{x}}$ uma solução do sistema real. Se para todo $t > t_s$, $t_s < \infty$, tem-se⁴:*

$$\bar{\mathbf{x}}(t) \subset \mathbf{V}_1(\mathbf{x}_s, \varepsilon_1) \text{ e } \dot{\mathbf{u}}(t) \subset \mathbf{V}_2(\mathbf{c}, \varepsilon_2),$$

com $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c & c & \cdots & c \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^N$ e $|c| < \infty$, então considera-se que a rede alcançou o estado síncrono $\mathbf{x}_0$.

³Ver equações 3.18, 3.43, 3.69 e 4.47.

⁴Os conjuntos $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ são chamados de ε -vizinhanças ou bolas. Suas definições podem ser encontradas em [70, 71].

Definição 4.4 (Faixa de captura). *A faixa de captura do estado síncrono $\mathbf{x}_s$ é uma região $\mathbf{R}_c \subset \mathbb{R}^{(N-1)(P+1)}$ do espaço de estados, com $\mathbf{x}_s \in \mathbf{R}_c$, para a qual apenas o estado síncrono $\mathbf{x}_s$ é alcançável.*

Definição 4.5 (Faixa de retenção). *A faixa de retenção de uma rede é uma região $\mathbf{R}_r \subset \mathbb{R}^{(N-1)(P+1)}$ do espaço de estados para a qual algum estado síncrono é alcançável.*

Definição 4.6 (Modo de aquisição). *Uma rede opera em modo de aquisição se opera dentro da faixa de captura.*

Definição 4.7 (Modo de rastreamento). *Uma rede opera em modo de rastreamento se opera dentro da faixa de retenção.*

Capítulo 5

Existência de estados síncronos

De acordo com a definição 4.2, a existência de um estado síncrono está associada à existência de pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis das equações de estados de cada topologia. Na seção 5.1, são determinados os pontos de equilíbrio das equações de estados de cada topologia de rede considerando PLLs de 2ª e 3ª ordens. Na seção 5.2, as condições de existência dos estados síncronos são estabelecidas.

5.1 Pontos de equilíbrio

5.1.1 Rede OWMS

Fazendo $\dot{x}_1^{(m)} = \dot{x}_2^{(m)} = 0$ na equação 4.13, tem-se:

$$\begin{cases} 0 &= x_2^{(m)} \\ 0 &= \sin(x_1^{(m)}) + \sin(x_1^{(m-1)}) \end{cases} \quad (5.1)$$

Devido às suposições feitas no capítulo 3 em relação ao nó-mestre, tem-se, para $m = 1$, que:

$$x_1^{(0)} = 0. \quad (5.2)$$

Dessa forma, para $m = 1, 2, \dots, N - 1$, obtém-se:

$$\begin{cases} \sin(x_1^{(1)}) = 0 \\ \sin(x_1^{(2)}) + \sin(x_1^{(1)}) = 0 \\ \vdots \\ \sin(x_1^{(N-1)}) + \sin(x_1^{(N-2)}) = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Resolvendo o sistema de equações 5.3, conclui-se que os pontos de equilíbrio da equação 4.13 são dados por:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^{(1)T} & \mathbf{x}_0^{(2)T} & \dots & \mathbf{x}_0^{(N-1)T} \end{bmatrix}^T, \quad (5.4)$$

sendo

$$\mathbf{x}_0^{(m)} = \begin{bmatrix} k\pi & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (5.5)$$

com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e $m = 1, 2, \dots, N - 1$.

Fazendo $\dot{x}_1^{(m)} = \dot{x}_2^{(m)} = \dot{x}_3^{(m)} = 0$ na equação 4.36, juntamente com as demais considerações acima, obtém-se:

$$\mathbf{x}_0^{(m)} = \begin{bmatrix} k\pi & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (5.6)$$

com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e $m = 1, 2, \dots, N - 1$.

5.1.2 Rede TWMS

Fazendo $\dot{x}_1^{(m)} = \dot{x}_2^{(m)} = 0$ nas equações 4.18 e 4.19, para $m = 1, 2, \dots, N - 1$, o resultado é:

$$\begin{cases} 0 = x_2^{(m)} \\ 0 = -\sin(x_1^{(m)}) + \frac{1}{2} \left[\sin(x_1^{(m+1)}) + \sin(x_1^{(m-1)}) \right] \end{cases} \quad (5.7)$$

e

$$\begin{cases} 0 = x_2^{(N-1)} \\ 0 = \sin(x_1^{(N-1)}) + \sin(x_1^{(N-2)}) \end{cases}. \quad (5.8)$$

A partir das equações 5.7 e 5.8, e levando em conta a mesma suposição expressa pela equação 5.2, obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen} \left(x_1^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \text{sen} \left(x_1^{(2)} \right) = 0 \\ \text{sen} \left(x_1^{(2)} \right) + \frac{1}{2} \left[\text{sen} \left(x_1^{(1)} \right) + \text{sen} \left(x_1^{(3)} \right) \right] = 0 \\ \vdots \\ \text{sen} \left(x_1^{(N-2)} \right) + \frac{1}{2} \left[\text{sen} \left(x_1^{(N-3)} \right) + \text{sen} \left(x_1^{(N-1)} \right) \right] = 0 \\ \text{sen} \left(x_1^{(N-1)} \right) + \text{sen} \left(x_1^{(N-2)} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Resolvendo o sistema de equações 5.9, conclui-se que os pontos de equilíbrio das equações 4.18 e 4.19 são dados por:

$$\mathbf{x}_0 = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{x}_0^{(1)T} & \mathbf{x}_0^{(2)T} & \dots & \mathbf{x}_0^{(N-1)T} \end{array} \right]^T, \quad (5.10)$$

sendo

$$\mathbf{x}_0^{(m)} = \left[\begin{array}{cc} k\pi & 0 \end{array} \right]^T, \quad (5.11)$$

com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e $m = 1, 2, \dots, N - 1$.

Fazendo $\dot{x}_1^{(m)} = \dot{x}_2^{(m)} = \dot{x}_3^{(m)} = 0$ nas equações 4.38 e 4.39, e com as demais considerações acima, obtém-se:

$$\mathbf{x}_0^{(m)} = \left[\begin{array}{ccc} k\pi & 0 & 0 \end{array} \right]^T, \quad (5.12)$$

com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e $m = 1, 2, \dots, N - 1$.

5.1.3 Rede MC

Analogamente às topologias OWMS e TWMS, fazendo-se $\dot{x}_1^{(m)} = \dot{x}_2^{(m)} = 0$ na equação 4.28, para $m = 1, 2, \dots, N - 1$, o resultado é:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = x_2^{(m)} \\ 0 = 2\text{sen} \left(x_1^{(m)} \right) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N-1} \left(\text{sen} \left(x_1^{(n)} \right) - \text{sen} \left(x_1^{(n)} - x_1^{(m)} \right) \right) \end{array} \right. \quad (5.13)$$

A partir da equação 5.13 obtém-se os pontos de equilíbrio das equação 4.28, que são dados por:

$$\mathbf{x}_0 = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{x}_0^{(1)T} & \mathbf{x}_0^{(2)T} & \dots & \mathbf{x}_0^{(N-1)T} \end{array} \right]^T, \quad (5.14)$$

sendo

$$\mathbf{x}_0^{(m)} = \begin{bmatrix} k\pi & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (5.15)$$

com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e $m = 1, 2, \dots, N - 1$.

Fazendo $\dot{x}_1^{(m)} = \dot{x}_2^{(m)} = \dot{x}_3^{(m)} = 0$ na equação 4.42, com as demais considerações acima, obtém-se:

$$\mathbf{x}_0^{(m)} = \begin{bmatrix} k\pi & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (5.16)$$

com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e $m = 1, 2, \dots, N - 1$.

5.2 Condições para existência de estados síncronos

Nesta seção são enunciados os teoremas relacionados à existência de estados síncronos nas redes OWMS¹, TWMS e MC.

5.2.1 PLLs de 2ª ordem

Rede OWMS

Teorema 5.1 (Existência de estado síncrono). *Seja uma rede OWMS descrita pelas equações 4.13 e 4.43. Se os coeficientes do filtro dado pela equação 4.1 forem todos positivos, então os estados síncronos existem e são dados por:*

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s^{(1)T} & \mathbf{x}_s^{(2)T} & \dots & \mathbf{x}_s^{(N-1)T} \end{bmatrix}^T, \quad (5.17)$$

sendo $\mathbf{x}_s^{(m)} = \begin{bmatrix} r\pi & 0 \end{bmatrix}^T$, com $r = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$

Prova. De acordo com a definição 4.2, deve-se buscar pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis. Dos pontos de equilíbrio obtidos na seção 5.1 (equação 5.4), os

¹Os resultados apresentados em [72, 73] são um pouco mais gerais pois levam em conta a situação em que a equação do modelo de cada nó possui coeficientes diferentes. Entretanto, neste trabalho, para manter a simetria com as equações de estados das redes TWMS e MC, optou-se por considerar que todos os nós da rede OWMS são contruídos de forma idêntica.

designados por $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ são instáveis para qualquer combinação de parâmetros das equações de estados [36, 38–40, 72]. Com isso, consideram-se apenas os pontos de equilíbrio designados pelos valores pares de k , ou seja, $k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$. A estabilidade dos pontos de equilíbrio pode ser determinada através dos autovalores da matriz jacobiana da equação 4.13, que é dada por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathbf{X}, \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{(2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}^{(N-1)} \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

sendo

$$\mathbf{A}^{(m)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu_2 G & -(\mu_0 + \mu_1 G) \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

e

$$\mathbf{x}_0^{(m)} = \begin{bmatrix} r\pi & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (5.20)$$

para $r = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$. É importante notar que a matriz $\mathbf{A}$ é a mesma para qualquer r , sendo possível, dessa forma, determinar a estabilidade de todos os pontos de equilíbrio designados por r . Os autovalores de $\mathbf{A}$ são as raízes de seu polinômio característico, que é dado por:

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + (\mu_0 + \mu_1 G)\lambda + \mu_2 G)^{N-1}. \quad (5.21)$$

O polinômio característico possui $(N - 1)$ pares repetidos de raízes que, considerando as equações 4.8, 4.9 e 4.10, são dados por:

$$\lambda = -\frac{\beta_0 + G\alpha_1}{2\beta_1} \pm \frac{\sqrt{(\beta_0 + G\alpha_1)^2 - 4G\alpha_0\beta_1}}{2\beta_1}. \quad (5.22)$$

De acordo com a definição 3.6, o ganho da malha G é sempre positivo. Então, se todos os coeficientes do filtro (equação 4.1) forem positivos, os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ são hiperbólicos com parte real negativa. Logo, os pontos de equilíbrio designados por $r = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ são assintoticamente estáveis. Pela definição 4.2, cada um dos pontos de equilíbrio está associado a um estado síncrono da forma:

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s^{(1)T} & \mathbf{x}_s^{(2)T} & \dots & \mathbf{x}_s^{(N-1)T} \end{bmatrix}^T, \quad (5.23)$$

sendo $\mathbf{x}_s^{(m)} = \begin{bmatrix} r\pi & 0 \end{bmatrix}^T$, com $r = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$, como se queria demonstrar. $\square$

Rede TWMS

Teorema 5.2 (Existência de estado síncrono). *Seja uma rede TWMS descrita pelas equações 4.18, 4.19 e 4.43; se os coeficientes do filtro dado pela equação 4.1 forem todos positivos, então os estados síncronos existem e são dados por:*

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s^{(1)T} & \mathbf{x}_s^{(2)T} & \dots & \mathbf{x}_s^{(N-1)T} \end{bmatrix}^T, \quad (5.24)$$

sendo $\mathbf{x}_s^{(m)} = \begin{bmatrix} r\pi & 0 \end{bmatrix}^T$, com $r = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$

Prova. A matriz jacobiana é idêntica à obtida para a rede OWMS (equações 5.18 e 5.19). Portanto, a prova do teorema 5.2 é análoga à prova do teorema 5.1. $\square$

Rede MC

Teorema 5.3 (Existência de estado síncrono). *Seja uma rede MC descrita pelas equações 4.28 e 4.43; se os coeficientes do filtro dado pela equação 4.1 forem todos positivos, então os estados síncronos existem e são dados por:*

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s^{(1)T} & \mathbf{x}_s^{(2)T} & \dots & \mathbf{x}_s^{(N-1)T} \end{bmatrix}^T, \quad (5.25)$$

sendo $\mathbf{x}_s^{(m)} = \begin{bmatrix} r\pi & 0 \end{bmatrix}^T$, com $r = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$

Prova. Da mesma forma que nas provas anteriores, e de acordo com a definição 4.2, buscam-se pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis, sendo que, dos pontos de equilíbrio obtidos na seção 5.1 (equação 5.14), os designados por valores ímpares de k são instáveis para qualquer combinação de parâmetros [36, 38–40, 72]. Consideram-se, então, apenas os pontos de equilíbrio designados pelos valores pares de k . A matriz jacobiana da equação 4.13 é dada por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathbf{X}, \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{(2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}^{(N-1)} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

sendo

$$\mathbf{A}^{(m)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -N\mu_2\mu_G & -(\mu_0 + N\mu_1\mu_G) \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

e

$$\mathbf{x}_0^{(m)} = \begin{bmatrix} r\pi & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (5.28)$$

para $r = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$. A matriz $\mathbf{A}$ é a mesma para qualquer r . Pode-se determinar a estabilidade de todos os pontos de equilíbrio designados por r calculando os autovalores de $\mathbf{A}$. O polinômio característico é dado por:

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + (\mu_0 + N\mu_1\mu_G)\lambda + N\mu_2\mu_G)^{N-1}, \quad (5.29)$$

o que resulta em $(N - 1)$ pares de autovalores repetidos. Considerando as equações 4.8, 4.9, 4.10 e 4.24, as raízes do polinômio característico são dadas por:

$$\lambda = -\frac{(N-1)\beta_0 + NG\alpha_1}{2(N-1)\beta_1} \pm \frac{\sqrt{[(N-1)\beta_0 + NG\alpha_1]^2 - 4N(N-1)G\alpha_0\beta_1}}{2(N-1)\beta_1}. \quad (5.30)$$

De acordo com a definição 3.12, o ganho da malha G é sempre positivo. Então, se todos os coeficientes do filtro (equação 4.1) forem positivos, os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ (equação 5.26) são hiperbólicos com parte real negativa, e os pontos de equilíbrio designados por $r = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ são assintoticamente estáveis. Pela definição 4.2, cada um dos pontos de equilíbrio está associado a um estado síncrono da forma:

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s^{(1)T} & \mathbf{x}_s^{(2)T} & \dots & \mathbf{x}_s^{(N-1)T} \end{bmatrix}^T, \quad (5.31)$$

sendo $\mathbf{x}_s^{(m)} = \begin{bmatrix} r\pi & 0 \end{bmatrix}^T$, com $r = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$, como se queria demonstrar. $\square$

5.2.2 Síntese

Nesta seção, os teoremas 5.1, 5.2 e 5.3 são sintetizados levando-se em conta os filtros apresentados na seção 2.3.1.

Teorema 5.4 (Existência de estado síncrono). *Para qualquer uma das redes OWMS, TWMS ou MC descrita pela equação 4.43, os estados síncronos existem e são dados por:*

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s^{(1)T} & \mathbf{x}_s^{(2)T} & \dots & \mathbf{x}_s^{(N-1)T} \end{bmatrix}^T \quad (5.32)$$

sendo $\mathbf{x}_s^{(m)} = \begin{bmatrix} r\pi & 0 \end{bmatrix}^T$, com $r = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$, se o filtro da malha for algum dos filtros dados pelas equações 2.29, 2.30, 2.31, 2.32 ou 4.1 e os coeficientes do filtro forem todos positivos.

Prova. Decorre diretamente das provas dos teoremas 5.1, 5.2 e 5.3. $\square$

5.2.3 PLLs de 3ª ordem

Rede OWMS

Teorema 5.5 (Existência de estado síncrono). *Seja uma rede OWMS descrita pelas equações 4.36 e 4.43 e o filtro da malha dado pela equação 4.29, com todos os coeficientes positivos. Então os estados síncronos existem e são dados por:*

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s^{(1)T} & \mathbf{x}_s^{(2)T} & \dots & \mathbf{x}_s^{(N-1)T} \end{bmatrix}^T, \quad (5.33)$$

sendo $\mathbf{x}_s^{(m)} = \begin{bmatrix} r\pi & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, com $r = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$, desde que a expressão:

$$G < \frac{\beta_0\beta_1}{\alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_1} \quad (5.34)$$

seja satisfeita, impondo um limite superior ao ganho da malha.

Prova. Da mesma forma que na prova do teorema 5.1, consideram-se apenas os pontos de equilíbrio designados por $k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$. A estabilidade dos pontos de equilíbrio pode ser determinada através dos autovalores da matriz jacobiana da equação 4.36, dada por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathbf{X}, \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{(2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}^{(N-1)} \end{bmatrix}, \quad (5.35)$$

sendo que

$$\mathbf{A}^{(m)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\mu_3 G & -(\mu_1 + \mu_2 G) & -\mu_0 \end{bmatrix}, \quad (5.36)$$

e

$$\mathbf{x}_0^{(m)} = \begin{bmatrix} r\pi & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (5.37)$$

para $r = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$. Sendo que $\mathbf{A}$ é a mesma para qualquer r . Os autovalores de $\mathbf{A}$ são as raízes de seu polinômio característico, que é dado por:

$$P(\lambda) = (\lambda^3 + \mu_0 \lambda^2 + (\mu_1 + \mu_2 G) \lambda + \mu_3 G)^{N-1}, \quad (5.38)$$

gerando $(N - 1)$ trios repetidos de raízes.

Os sinais das partes reais dos autovalores da matriz $\mathbf{A}$ podem ser determinados aplicando o critério de Routh-Hurwitz [37]. Assim:

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & 1 & \mu_1 + \mu_2 G \\ \lambda^2 & \mu_0 & \mu_3 G \\ \lambda^1 & \frac{\mu_0(\mu_1 + \mu_2 G) - \mu_3 G}{\mu_0} & \\ \lambda^0 & \mu_3 G, & \end{array}$$

se todos os coeficientes são positivos, as raízes têm parte real negativa se a expressão:

$$\mu_0 (\mu_1 + \mu_2 G) > \mu_3 G \quad (5.39)$$

for satisfeita. Substituindo as equações 4.31, 4.32, 4.33 e 4.34 na expressão 5.39, obtém-se:

$$G < \frac{\beta_0 \beta_1}{\alpha_0 \beta_2 - \alpha_1 \beta_1}, \quad (5.40)$$

impondo um limite superior ao ganho da malha. Nessas condições, os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ são assintoticamente estáveis e, de acordo com a definição 4.2, os estados síncronos existem e são dados por:

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s^{(1)T} & \mathbf{x}_s^{(2)T} & \dots & \mathbf{x}_s^{(N-1)T} \end{bmatrix}^T, \quad (5.41)$$

sendo $\mathbf{x}_s^{(m)} = \begin{bmatrix} r\pi & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, com $r = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$, como se queria demonstrar. $\square$

Corolário 5.1 (Existência de estado síncrono). *Se na função de transferência do filtro da malha (equação 4.29) considerar-se $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ e $\beta_1 = 1$, obtém-se:*

$$F(s) = \frac{\alpha_1 s + 1}{s(\beta_2 s + 1)}, \quad (5.42)$$

que combina uma integração pura e um filtro lead-lag. Então, os estados síncronos existem, como na equação 5.33, desde que:

$$\alpha_1 > \beta_2. \quad (5.43)$$

Nesse caso, o ganho G não é limitado.

Prova. Considerando as equações 4.31, 4.32 e 4.34, e os coeficientes do filtro tem-se: $\mu_0 = \mu_3$ e $\mu_1 = 0$, que, se substituídos, juntamente com a equação 4.33, na expressão 5.39, gera a expressão 5.43. Nessas condições, os estados síncronos existem como na equação 5.33, e o ganho G não é limitado. Como se queria demonstrar. $\square$

Rede TWMS

Teorema 5.6 (Existência de estado síncrono). *Seja uma rede TWMS descrita pelas equações 4.38, 4.39 e 4.43, e o filtro da malha dado pela equação 4.29, com todos os coeficientes positivos. Então os estados síncronos existem e são dados por:*

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s^{(1)T} & \mathbf{x}_s^{(2)T} & \dots & \mathbf{x}_s^{(N-1)T} \end{bmatrix}^T, \quad (5.44)$$

sendo $\mathbf{x}_s^{(m)} = \begin{bmatrix} r\pi & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, com $r = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$, desde que a expressão:

$$G < \frac{\beta_0 \beta_1}{\alpha_0 \beta_2 - \alpha_1 \beta_1} \quad (5.45)$$

seja satisfeita, impondo um limite superior ao ganho da malha.

Prova. Análoga à prova do teorema 5.5. $\square$

Corolário 5.2 (Existência de estado síncrono). *Se a função de transferência do filtro da malha for dada pela equação 5.42. Então, os estados síncronos existem, como na equação 5.33, desde que a expressão 5.43 seja satisfeita. Nesse caso o ganho G não é limitado.*

Prova. Análoga à prova do corolário 5.1. $\square$

Rede MC

Teorema 5.7 (Existência de estado síncrono). *Seja uma rede MC descrita pelas equações 4.42 e 4.43, e o filtro da malha dado pela equação 4.29, com todos os coeficientes positivos. Então os estados síncronos existem e são dados por:*

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s^{(1)T} & \mathbf{x}_s^{(2)T} & \dots & \mathbf{x}_s^{(N-1)T} \end{bmatrix}^T \quad (5.46)$$

sendo $\mathbf{x}_s^{(m)} = \begin{bmatrix} r\pi & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, com $r = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$, desde que a expressão:

$$N < \frac{\beta_0\beta_1}{\mu_G(\alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_1)} \quad (5.47)$$

seja satisfeita, impondo um limite superior ao número de nós da malha.

Prova. Da mesma forma que na prova dos teoremas anteriores consideram-se apenas os pontos de equilíbrio designados por $k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$. A estabilidade dos pontos de equilíbrio pode ser determinada através dos autovalores da matriz jacobiana da equação 4.42, dada por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathbf{X}, \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{(2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}^{(N-1)} \end{bmatrix}, \quad (5.48)$$

sendo que

$$\mathbf{A}^{(m)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -N\mu_3\mu_G & -(\mu_1 + N\mu_2\mu_G) & -\mu_0 \end{bmatrix}, \quad (5.49)$$

e

$$\mathbf{x}_0^{(m)} = \begin{bmatrix} r\pi & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (5.50)$$

para $r = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$. Sendo que $\mathbf{A}$ é a mesma para qualquer r . Os autovalores de $\mathbf{A}$ são as raízes de seu polinômio característico, que é dado por:

$$P(\lambda) = (\lambda^3 + \mu_0\lambda^2 + (\mu_1 + N\mu_2\mu_G)\lambda + N\mu_3\mu_G)^{N-1}, \quad (5.51)$$

gerando $(N - 1)$ trios repetidos de raízes.

Os sinais das partes reais dos autovalores da matriz $\mathbf{A}$ podem ser determinados aplicando o critério de Routh-Hurwitz [37]. Assim:

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & 1 & \mu_1 + N\mu_2\mu_G \\ \lambda^2 & \mu_0 & N\mu_3\mu_G \\ \lambda^1 & \frac{\mu_0(\mu_1 + N\mu_2\mu_G) - N\mu_3\mu_G}{\mu_0} & \\ \lambda^0 & N\mu_3\mu_G, & \end{array}$$

considerando que todos os coeficientes são positivos, as raízes têm parte real negativa se a expressão:

$$\mu_0 (\mu_1 + N\mu_2\mu_G) > N\mu_3\mu_G \quad (5.52)$$

for satisfeita. Substituindo as equações 4.31, 4.32, 4.33 e 4.34 na expressão 5.52, obtém-se:

$$N < \frac{\beta_0\beta_1}{\mu_G (\alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_1)}, \quad (5.53)$$

impondo um limite superior ao número de nós da malha. Nessas condições, os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ são assintoticamente estáveis e de acordo com a definição 4.2, os estados síncronos existem e são dados por:

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s^{(1)T} & \mathbf{x}_s^{(2)T} & \dots & \mathbf{x}_s^{(N-1)T} \end{bmatrix}^T, \quad (5.54)$$

sendo $\mathbf{x}_s^{(m)} = \begin{bmatrix} r\pi & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, com $r = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$, como se queria demonstrar. $\square$

Corolário 5.3 (Existência de estado síncrono). *Se na função de transferência do filtro da malha (equação 4.29) considerar-se $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ e $\beta_1 = 1$, obtém-se a função de transferência da equação 5.42, que combina uma integração pura e um filtro lead-lag. Então, os estados síncronos existem, como na equação 5.46, desde que:*

$$\alpha_1 > \beta_2. \quad (5.55)$$

Nesse caso o número de nós N não é limitado.

Prova. Considerando as equações 4.31, 4.32 e 4.34 e os coeficientes do filtro tem-se: $\mu_0 = \mu_3$ e $\mu_1 = 0$, que, se substituídos, juntamente com a equação 4.33, na expressão 5.52, gera a expressão 5.55. Nessas condições, os estados síncronos existem como na equação 5.46, e o número de nós N não é limitado. Como se queria demonstrar. $\square$

5.3 Alcançabilidade de estados síncronos

Os teoremas enunciados na seção 5.2 tratam da existência de estados síncronos em uma rede síncrona, e, de acordo com a definição 4.2, um estado síncrono é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável da equação que representa o comportamento dinâmico da rede.

Contudo a existência de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável não garante a estabilidade de todas as soluções de um sistema dinâmico autônomo não-linear. Por isso, a existência de um estado síncrono não é garantia de sua alcançabilidade [61, 72].

O estudo da alcançabilidade de estados síncronos requer o conhecimento explícito de uma função de Lyapunov [66, 72, 74]. Como não existe um método geral e simples, a determinação de uma função de Lyapunov é, quase sempre, um trabalho penoso.

No capítulo 7, o problema da alcançabilidade de estados síncronos é abordado e analisado sob o ponto de vista numérico.

Capítulo 6

O DFJ em redes síncronas

O *jitter* de frequência dupla (DFJ) é resultado da característica do detector de fase utilizado em um PLL analógico; por isso, é impossível eliminá-lo [3, 75]. Em boa parte da literatura especializada, o termo de frequência dupla é desprezado e, algumas vezes, sem que se mencione os efeitos gerados por essa simplificação. Considera-se apenas que o filtro da malha o elimina.

Uma dentre poucas exceções é [5], que trata o DFJ como um *ripple* gerado pelo multiplicador e chega a propor filtros para sua supressão. Entretanto, mesmo nesse trabalho, o estudo analítico dos efeitos do DFJ no sincronismo é deixado de lado.

Recentemente, e especificamente a partir de [24] em 2003, surgiram trabalhos com o objetivo de estudar, analiticamente e por simulação, a influência do DFJ no sincronismo dos PLLs e das redes de distribuição de sinais de tempo. Especificamente em [35], foi observada a necessidade de uma abordagem analítica mais precisa.

Nas próximas seções, serão enunciados os teoremas que determinam a amplitude do DFJ e sua influência nas redes síncronas, os quais resultaram do estudo analítico proposto em [35].

6.1 O DFJ nas redes OWMS

Teorema 6.1 (Amplitude do DFJ no sinal de controle em uma rede OWMS para uma entrada tipo degrau). *Sejam a equação diferencial 3.28 o modelo de um nó em uma rede OWMS, e $F^{(j)}(s)$ a transformada de Laplace do filtro de acordo com a definição 3.4. Seja também $\theta_o^{(j-1)}(t) = \frac{R}{2}t^2 + \Omega t + \phi$, com $R = \Omega = 0$ e ϕ constante, a função de excitação do nó j de acordo com a definição 2.5. Então, após o nó atingir o estado síncrono, a amplitude do DFJ no sinal de controle pode ser determinada, de forma aproximada, pela equação 6.1¹:*

$$\left| \dot{\theta}_{DFJ}^{(j)} \right| = G^{(j)} \left| F^{(j)}(2\omega_M i) \right|. \quad (6.1)$$

Prova. Considerando-se as equações 3.16 e 3.20, pode-se escrever:

$$\frac{d}{dt}\theta_o^{(j)}(t) = G^{(j)} f^{(j)}(t) * v_\delta^{(j)}(t). \quad (6.2)$$

Isolando $\theta_o^{(j)}(t)$ na equação 3.4 e substituindo o resultado no termo de frequência dupla da equação 3.17, obtém-se:

$$\begin{aligned} v_\delta^{(j)}(t) = & \text{sen}(\vartheta^{(j)}(t) - \omega_M \tau_{j-1,j}) \\ & + \text{sen}(2\omega_M t + 2\theta_o^{(j-1)}(t - \tau_{j-1,j}) - \vartheta^{(j)}(t) - \omega_M \tau_{j-1,j} + (j-1)\pi). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Substituindo a equação 6.3 na equação 6.2 e considerando a função de entrada do tipo degrau, o resultado é:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\theta_o^{(j)}(t) = & G^{(j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}(\vartheta^{(j)}(t) - \omega_M \tau_{j-1,j}) \\ & + G^{(j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}(2\omega_M t + 2\phi - \vartheta^{(j)}(t) - \omega_M \tau_{j-1,j} + (j-1)\pi). \end{aligned} \quad (6.4)$$

De acordo com a definição 4.3, no estado síncrono, o erro de fase $\vartheta^{(j)}$ pode ser considerado aproximadamente constante. Com isso a equação 6.4 pode ser reescrita,

¹O ponto sobre a variável θ é usado para evidenciar a relação entre o sinal de controle e a estimativa de frequência do nó. Embora seja um abuso de notação, é adotado por ser conveniente.

considerando-se $\vartheta^{(j)}(t) = \vartheta^{(j)}$ constante para $t > t_s$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\theta_o^{(j)}(t) &= G^{(j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}(\vartheta^{(j)} - \omega_M \tau_{j-1,j}) \\ &+ G^{(j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}(2\omega_M t + 2\phi - \vartheta^{(j)} - \omega_M \tau_{j-1,j} + (j-1)\pi), \quad t > t_s. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Desprezando a parcela constante na equação 6.5, que não influencia o DFJ, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}\theta_{DFJ}^{(j)}(t) = G^{(j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}(2\omega_M t + c), \quad (6.6)$$

com $c = 2\phi - \vartheta^{(j)} - \omega_M \tau_{j-1,j} + (j-1)\pi$ constante. A equação 6.6 é a parcela responsável pelo DFJ no sinal de controle. Aplicando o teorema da convolução na equação 6.6, obtém-se:

$$\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt}\theta_{DFJ}^{(j)}(t) \right] = G^{(j)} F^{(j)}(s) \mathcal{L} [\text{sen}(2\omega_M t + c)]. \quad (6.7)$$

Aplicando-se as técnicas de resposta em frequência na equação 6.7 (ver [37]), pode-se determinar a amplitude do DFJ no sinal de controle, resultando:

$$\left| \dot{\theta}_{DFJ}^{(j)} \right| = \left| \mathcal{L} \left[\frac{d}{dt}\theta_{DFJ}^{(j)}(t) \right] \right| = G^{(j)} |F^{(j)}(2\omega_M i)|, \quad (6.8)$$

como se queria demonstrar. $\square$

Corolário 6.1 (Amplitude do DFJ na fase do nó de uma rede OWMS para uma entrada tipo degrau). *Para uma entrada tipo degrau a amplitude do DFJ na fase do nó é dada pela equação 6.9:*

$$\left| \theta_{DFJ}^{(j)} \right| = G^{(j)} \left| \frac{F^{(j)}(2\omega_M i)}{2\omega_M i} \right|. \quad (6.9)$$

Prova. Aplicando a propriedade B.7² da transformada de Laplace sobre a equação 6.7, o resultado é:

$$\mathcal{L} [\theta_{DFJ}^{(j)}(t)] = G^{(j)} \frac{F^{(j)}(s)}{s} \mathcal{L} [\text{sen}(2\omega_M t + c)], \quad (6.10)$$

donde obtém-se:

$$\left| \theta_{DFJ}^{(j)} \right| = \left| \mathcal{L} [\theta_{DFJ}^{(j)}(t)] \right| = G^{(j)} \left| \frac{F^{(j)}(2\omega_M i)}{2\omega_M i} \right|, \quad (6.11)$$

como se queria demonstrar. $\square$

²Neste caso considera-se $f(0\pm) = 0$.

Teorema 6.2 (Amplitude do DFJ no sinal de controle de uma rede OWMS para uma entrada tipo rampa). *Seja a equação diferencial 3.28 o modelo de um nó em uma rede OWMS e $F^{(j)}(s)$ a transformada de Laplace do filtro da malha, de acordo com a definição 3.4. Seja também $\theta_o^{(j-1)}(t) = \frac{R}{2}t^2 + \Omega t + \phi$, com $R = \phi = 0$ e Ω constante, a função de excitação do nó j de acordo com a definição 2.5. Então, após o nó atingir o estado síncrono, a amplitude do DFJ no sinal de controle pode ser determinada, de forma aproximada, pela equação 6.12:*

$$\left| \dot{\theta}_{DFJ}^{(j)} \right| = G^{(j)} \left| F^{(j)}(2(\omega_M + \Omega)i) \right|. \quad (6.12)$$

Prova. Substituindo a equação 6.3 na equação 6.2 e considerando a função de entrada do tipo rampa, o resultado é:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \theta_o^{(j)}(t) &= G^{(j)} f^{(j)}(t) * \sin(\vartheta^{(j)}(t) - \omega_M \tau_{j-1,j}) \\ &+ G^{(j)} f^{(j)}(t) * \sin(2(\omega_M + \Omega)t - (\omega_M + 2\Omega)\tau_{j-1,j} + \vartheta^{(j)}(t) + (j-1)\pi) \end{aligned} \quad (6.13)$$

De acordo com a definição 4.3, pode-se considerar que, no estado síncrono, o erro de fase $\vartheta^{(j)}$ é aproximadamente constante. Com isso, a equação 6.13 pode ser reescrita considerando-se $\vartheta^{(j)}(t) = \vartheta^{(j)}$ constante para $t > t_s$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \theta_o^{(j)}(t) &= G^{(j)} f^{(j)}(t) * \sin(\vartheta^{(j)} - \omega_M \tau_{j-1,j}) \\ &+ G^{(j)} f^{(j)}(t) * \sin(2(\omega_M + \Omega)t - (\omega_M + 2\Omega)\tau_{j-1,j} - \vartheta^{(j)} + (j-1)\pi), \end{aligned} \quad (6.14)$$

para $t > t_s$.

Desprezando a parcela constante na equação 6.14, que não influencia o DFJ, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \theta_{DFJ}^{(j)}(t) = G^{(j)} f^{(j)}(t) * \sin(2(\omega_M + \Omega)t + c) \quad (6.15)$$

com $c = -(\omega_M + 2\Omega)\tau_{j-1,j} - \vartheta^{(j)} + (j-1)\pi$ constante. A equação 6.15 é a parcela responsável pelo DFJ no sinal de controle. Aplicando o teorema da convolução na equação 6.15, obtém-se:

$$\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} \theta_{DFJ}^{(j)}(t) \right] = G^{(j)} F^{(j)}(s) \mathcal{L} [\sin(2(\omega_M t + \Omega) + c)]. \quad (6.16)$$

Aplicando-se as técnicas de resposta em frequência na equação 6.16 (ver [37]), pode-se determinar a amplitude do DFJ no sinal de controle, tem-se:

$$\left| \dot{\theta}_{DFJ}^{(j)} \right| = \left| \mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} \theta_{DFJ}^{(j)}(t) \right] \right| = G^{(j)} \left| F^{(j)}(2(\omega_M + \Omega) i) \right|, \quad (6.17)$$

como se queria demonstrar. $\square$

Teorema 6.3 (Amplitude do DFJ no sinal de controle de uma rede OWMS para uma entrada tipo parábola). *Seja a equação diferencial 3.28 o modelo de um nó de uma rede OWMS e $F^{(j)}(s)$ a transformada de Laplace do filtro da malha de acordo com a definição 3.4. Seja também $\theta_o^{(j)}(t) = \frac{R}{2}t^2 + \Omega t + \phi$ com $\Omega = \phi = 0$ e R constante a função de excitação do nó j de acordo com a definição 2.5. Então, se o filtro $F^{(j)}(s)$ do nó tiver mais pólos que zeros $M^{(j)} < P^{(j)}$, a amplitude do DFJ no sinal de controle torna-se nula ao longo do tempo, ou seja, $\left| \dot{\theta}_{DFJ} \right| \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$.*

Prova. Substituindo a equação 6.3 na equação 6.2 e considerando a função de entrada do tipo parábola, o resultado é:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \theta_o^{(j)}(t) &= G^{(j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}(\vartheta^{(j)}(t) - \omega_M \tau_{j-1,j}) \\ &\quad + G^{(j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}(Rt^2 + 2(\omega_M - R\tau_{j-1,j})t \\ &\quad + R\tau_{j-1,j}^2 - \omega_M \tau_{j-1,j} - \vartheta^{(j)}(t) + (j-1)\pi). \end{aligned} \quad (6.18)$$

De acordo com a definição 4.3, considera-se que no estado síncrono o erro de fase $\vartheta^{(j)}$ é aproximadamente constante. Com isso a equação 6.13 pode ser reescrita considerando-se $\vartheta^{(j)}(t) = \vartheta^{(j)}$ constante para $t > t_s$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \theta_o^{(j)}(t) &= G^{(j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}(\vartheta^{(j)} - \omega_M \tau_{j-1,j}) \\ &\quad + G^{(j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}(Rt^2 + 2(\omega_M - R\tau_{j-1,j})t \\ &\quad + R\tau_{j-1,j}^2 - \omega_M \tau_{j-1,j} - \vartheta^{(j)} + (j-1)\pi), t > t_s. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Desprezando a parcela constante na equação 6.19, que não influencia o DFJ, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \theta_{DFJ}^{(j)}(t) = G^{(j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}(Rt^2 + 2(\omega_M - R\tau_{j-1,j})t + c), \quad (6.20)$$

com $c = R\tau_{j-1,j}^2 - \omega_M \tau_{j-1,j} - \vartheta^{(j)} + (j-1)\pi$ constante. A equação 6.20 é a parcela responsável pelo DFJ no sinal de controle. Nota-se que a frequência do DFJ aumenta com o passar do tempo. Dado que o filtro tem, no mínimo, um pólo a mais que zeros, as altas frequências serão atenuadas a uma razão de decaimento de, ao menos, 20db/dec. Com isso, quanto maior a frequência do DFJ menor a sua amplitude, ou seja, $|\dot{\theta}_{DFJ}| \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$, como se queria demonstrar. $\square$

Corolário 6.2 (Amplitude do DFJ no sinal de controle para uma entrada tipo parábola). *Se o filtro $F(s)$ tiver o mesmo número de pólos e zeros $M^{(j)} = P^{(j)}$, então o DFJ terá amplitude constante. Se o filtro for um passa-baixas, o DFJ será atenuado. Caso contrário, será amplificado.*

Prova. Se o filtro tem o mesmo número de pólos e zeros e é um passa-baixas, então atenua as altas frequências por um fator constante, ou seja, a razão de decaimento é nula. Logo, observando a equação 6.20, conclui-se que, apesar da frequência do DFJ aumentar ao longo do tempo, sua amplitude será constante. Para o caso contrário, a demonstração é análoga. Como se queria demonstrar. $\square$

6.2 O DFJ nas redes TWMS

Teorema 6.4 (Amplitude do DFJ no sinal de controle de uma rede TWMS para uma entrada tipo degrau). *Seja a equação diferencial 3.54 o modelo de um nó em uma rede TWMS e $F^{(j)}(s)$ a transformada de Laplace do filtro de acordo com a definição 3.4. Seja também $\theta_o^{(\ell)}(t) = \frac{R^{(\ell)}}{2}t^2 + \Omega^{(\ell)}t + \phi^{(\ell)}$, com $R^{(\ell)} = \Omega^{(\ell)} = 0$ e $\phi^{(\ell)}$ constante, $\ell = j-1, j+1$, a função de excitação do nó j de acordo com a definição 2.5. Então, após o nó atingir o estado síncrono, a amplitude do DFJ no sinal de controle pode ser determinada, de forma aproximada, pela equação 6.21:*

$$|\dot{\theta}_{DFJ}^{(j)}| = \frac{1}{2} (G^{(j-1,j)} + G^{(j+1,j)}) |F^{(j)}(2\omega_M i)|. \quad (6.21)$$

Prova. Considerando-se as equações 3.37, 3.41 e 3.45, pode-se escrever:

$$\frac{d}{dt}\theta_o^{(j)}(t) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * u_{\delta}^{(\ell,j)}(t). \quad (6.22)$$

Isolando $\theta_o^{(j)}(t)$ na equação 3.34 e substituindo o resultado no termo de frequência dupla da equação 3.42, obtém-se:

$$\begin{aligned} u_{\delta}^{(\ell,j)}(t) = & \text{sen} \left(\vartheta^{(\ell,j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j} \right) \\ & + \text{sen} \left(2\omega_M t + 2\theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) - \vartheta^{(\ell,j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j} \right). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Substituindo a equação 6.23 na equação 6.22 e considerando as funções de entrada do tipo degrau, o resultado é:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \theta_o^{(j)}(t) = & \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen} \left(\vartheta^{(\ell,j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j} \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen} \left(2\omega_M t + 2\phi^{(\ell)} - \vartheta^{(\ell,j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j} \right). \end{aligned} \quad (6.24)$$

De acordo com a definição 4.3, pode-se considerar que no estado síncrono os erros de fases $\vartheta^{(j-1,j)}$ e $\vartheta^{(j+1,j)}$ são aproximadamente constantes. Com isso a equação 6.24 pode ser reescrita, considerando-se $\vartheta^{(\ell,j)}(t) = \vartheta^{(\ell,j)}$ constante para $t > t_s$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \theta_o^{(j)}(t) = & \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen} \left(\vartheta^{(\ell,j)} - \omega_M \tau_{\ell,j} \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen} \left(2\omega_M t + 2\phi^{(\ell)} - \vartheta^{(\ell,j)} - \omega_M \tau_{\ell,j} \right), t > t_s. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Desprezando a parcela constante na equação 6.25, que não influencia o DFJ, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \theta_{DFJ}^{(j)}(t) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen} \left(2\omega_M t + c^{(\ell,j)} \right), t > t_s, \quad (6.26)$$

com $c^{(\ell,j)} = 2\phi^{(\ell)} - \vartheta^{(\ell,j)} - \omega_M \tau_{\ell,j}$ constante. A equação 6.26 é a parcela responsável pelo DFJ no sinal de controle. Aplicando o teorema da convolução na equação 6.26,

obtém-se:

$$\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} \theta_{DFJ}^{(j)}(t) \right] = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} F^{(j)}(s) * \mathcal{L} [\text{sen}(2\omega_M t + c)]. \quad (6.27)$$

Expandindo o somatório da equação 6.27, pode-se aplicar as técnicas de resposta em frequência [37] para determinar a amplitude do DFJ no sinal de controle, resultando a equação 6.28:

$$\left| \dot{\theta}_{DFJ}^{(j)} \right| = \left| \mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} \theta_{DFJ}^{(j)}(t) \right] \right| = \frac{1}{2} (G^{(j-1,j)} + G^{(j+1,j)}) \left| F^{(j)}(2\omega_M i) \right|, \quad (6.28)$$

como se queria demonstrar. $\square$

Corolário 6.3 (Amplitude do DFJ na fase do nó para uma entrada tipo degrau). *Para uma entrada tipo degrau, a amplitude do DFJ na fase do nó de uma rede TWMS é dada pela equação 6.29:*

$$\left| \theta_{DFJ}^{(j)} \right| = \frac{1}{2} (G^{(j-1,j)} + G^{(j+1,j)}) \left| \frac{F^{(j)}(2\omega_M i)}{2\omega_M i} \right|. \quad (6.29)$$

Prova. A prova do corolário 6.3 é análoga à do corolário 6.1. $\square$

Teorema 6.5 (Amplitude do DFJ no sinal de controle de uma rede TWMS para uma entrada tipo rampa). *Seja a equação diferencial 3.54 o modelo de um nó em uma rede TWMS e $F^{(j)}(s)$ a transformada de Laplace do filtro de acordo com a definição 3.4. Seja também $\theta_o^{(\ell)}(t) = \frac{R^{(\ell)}}{2}t^2 + \Omega^{(\ell)}t + \phi^{(\ell)}$, com $R^{(\ell)} = \phi^{(\ell)} = 0$ e $\Omega^{(\ell)}$ constante, $\ell = j-1, j+1$, a função de excitação do nó j de acordo com a definição 2.5. Então, após o nó atingir o estado síncrono, a amplitude do DFJ no sinal de controle pode ser determinada, de forma aproximada, pela equação 6.30:*

$$\left| \dot{\theta}_{DFJ}^{(j)} \right| = \frac{1}{2} \left(G^{(j-1,j)} \left| F^{(j)}(2(\omega_M + \Omega^{(j-1)})i) \right| + G^{(j+1,j)} \left| F^{(j)}(2(\omega_M + \Omega^{(j+1)})i) \right| \right). \quad (6.30)$$

Prova. Substituindo a equação 6.23 na equação 6.22 e considerando a função de entrada do tipo rampa, o resultado é:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\theta_o^{(j)}(t) = & \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}\left(\vartheta^{(\ell,j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j}\right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}\left(2(\omega_M + \Omega^{(\ell)})t \right. \\ & \left. - (\omega_M + 2\Omega^{(\ell)})\tau_{\ell,j} - \vartheta^{(\ell,j)}(t)\right). \end{aligned} \quad (6.31)$$

De acordo com a definição 4.3, considera-se que no estado síncrono o erro de fase $\vartheta^{(\ell,j)}$ é aproximadamente constante. Com isso a equação 6.31 pode ser reescrita, considerando-se $\vartheta^{(\ell,j)}(t) = \vartheta^{(\ell,j)}$ constante para $t > t_s$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\theta_o^{(j)}(t) = & \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}\left(\vartheta^{(\ell,j)} - \omega_M \tau_{\ell,j}\right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}\left(2(\omega_M + \Omega^{(\ell)})t \right. \\ & \left. - (\omega_M + 2\Omega^{(\ell)})\tau_{\ell,j} - \vartheta^{(\ell,j)}\right), t > t_s. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Desprezando a parcela constante na equação 6.32, que não influencia o DFJ, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}\theta_{DFJ}^{(j)}(t) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}\left(2(\omega_M + \Omega^{(\ell)})t + c\right). \quad (6.33)$$

com $c = -(\omega_M + 2\Omega^{(\ell)})\tau_{\ell,j} - \vartheta^{(\ell,j)}$ constante. A equação 6.33 é a parcela responsável pelo DFJ no sinal de controle. Aplicando o teorema da convolução na equação 6.33, obtém-se:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\theta_{DFJ}^{(j)}(t)\right] = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} F^{(j)}(s) \mathcal{L}\left[\text{sen}\left(2(\omega_M + \Omega^{(\ell)})t + c\right)\right]. \quad (6.34)$$

Aplicando-se as técnicas de resposta em frequência na equação 6.34 (ver [37]), pode-se determinar a amplitude do DFJ no sinal de controle, resultando:

$$\left| \dot{\theta}_{DFJ}^{(j)} \right| = \left| \mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} \theta_{DFJ}^{(j)}(t) \right] \right| = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} \left| F^{(j)}(2(\omega_M + \Omega^{(\ell)})i) \right|. \quad (6.35)$$

Expandindo o somatório, obtém-se:

$$\left| \dot{\theta}_{DFJ}^{(j)} \right| = \frac{1}{2} \left(G^{(j-1,j)} \left| F^{(j)}(2(\omega_M + \Omega^{(j-1)})i) \right| + G^{(j+1,j)} \left| F^{(j)}(2(\omega_M + \Omega^{(j+1)})i) \right| \right), \quad (6.36)$$

como se queria demonstrar. $\square$

Teorema 6.6 (Amplitude do DFJ no sinal de controle de uma rede TWMS para uma entrada tipo parábola). *Seja a equação diferencial 3.54 o modelo de um nó de uma rede TWMS e $F^{(j)}(s)$ a transformada de Laplace do filtro da malha de acordo com a definição 3.4. Seja também $\theta_o^{(j)}(t) = \frac{R^{(\ell)}}{2}t^2 + \Omega^{(\ell)}t + \phi^{(\ell)}$, com $\Omega^{(\ell)} = \phi^{(\ell)} = 0$ e $R^{(\ell)}$ constante, $\ell = j-1, j+1$, a função de excitação do nó j de acordo com a definição 2.5. Então, se o filtro $F^{(j)}(s)$ do nó tiver mais pólos que zeros $M^{(j)} < P^{(j)}$, a amplitude do DFJ no sinal de controle torna-se nula ao longo do tempo, ou seja, $\left| \dot{\theta}_{DFJ} \right| \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$.*

Prova. Substituindo a equação 6.23 na equação 6.22 e considerando a função de entrada do tipo parábola, o resultado é:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \theta_o^{(j)}(t) = & \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen} \left(\vartheta^{(\ell,j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j} \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen} \left(R^{(\ell)}t^2 + 2(\omega_M - R^{(\ell)}\tau_{\ell,j})t \right. \\ & \left. + R^{(\ell)}\tau_{\ell,j}^2 - \omega_M \tau_{\ell,j} - \vartheta^{(\ell,j)}(t) \right). \end{aligned} \quad (6.37)$$

De acordo com a definição 4.3, considera-se que, no estado síncrono o erro de fase $\vartheta^{(\ell,j)}$ é aproximadamente constante. Com isso, a equação 6.37 pode ser reescrita

considerando-se $\vartheta^{(\ell,j)}(t) = \vartheta^{(\ell,j)}$ constante para $t > t_s$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\theta_o^{(j)}(t) = & \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}\left(\vartheta^{(\ell,j)} - \omega_M \tau_{\ell,j}\right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}\left(R^{(\ell)} t^2 + 2(\omega_M - R^{(\ell)} \tau_{\ell,j}) t \right. \\ & \left. + R^{(\ell)} \tau_{\ell,j}^2 - \omega_M \tau_{\ell,j} - \vartheta^{(\ell,j)}\right). \end{aligned} \quad (6.38)$$

Desprezando a parcela constante na equação 6.32, que não influencia o DFJ, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}\theta_{DFJ}^{(j)}(t) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=j-1 \\ \ell \neq j}}^{j+1} G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}\left(R^{(\ell)} t^2 + 2(\omega_M - R^{(\ell)} \tau_{\ell,j}) t + c\right). \quad (6.39)$$

com $c = R^{(\ell)} \tau_{\ell,j}^2 - \omega_M \tau_{\ell,j} - \vartheta^{(\ell,j)}$ constante. A equação 6.39 é a parcela responsável pelo DFJ no sinal de controle. A análise da equação 6.39 é análoga à da equação 6.20 na demonstração do teorema 6.3. Com isso, tem-se que a amplitude do DFJ no sinal de controle torna-se nula ao longo do tempo, ou seja, $|\dot{\theta}_{DFJ}| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Como se queria demonstrar. $\square$

O corolário 6.2 continua válido para as redes TWMS; a prova é análoga.

6.3 O DFJ nas redes MC

Teorema 6.7 (Amplitude do DFJ no sinal de controle de uma rede MC para uma entrada tipo degrau). *Seja a equação diferencial 3.79 o modelo de um nó em uma rede MC e $F^{(j)}(s)$ a transformada de Laplace do filtro de acordo com a definição 3.4. Seja também $\theta_o^{(\ell)}(t) = \frac{R^{(\ell)}}{2} t^2 + \Omega^{(\ell)} t + \phi^{(\ell)}$, com $R^{(\ell)} = \Omega^{(\ell)} = 0$ e $\phi^{(\ell)}$ constante, $\ell = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, N$, a função de excitação do nó j de acordo com a definição 2.5. Então, após o nó atingir o estado síncrono, a amplitude do DFJ no sinal de controle*

pode ser determinada, de forma aproximada, pela equação 6.40:

$$\left| \dot{\theta}_{DFJ}^{(j)} \right| = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} \left| F^{(j)}(2\omega_M i) \right|. \quad (6.40)$$

Prova. Considerando as equações 3.63, 3.67 e 3.71, pode-se escrever:

$$\frac{d}{dt} \theta_o^{(j)}(t) = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * u_{\delta}^{(\ell,j)}(t) \quad (6.41)$$

Isolando $\theta_o^{(j)}(t)$ na equação 3.60 e substituindo o resultado no termo de frequência dupla da equação 3.68, obtém-se:

$$\begin{aligned} u_{\delta}^{(\ell,j)}(t) = & \text{sen} \left(\vartheta^{(\ell,j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j} \right) \\ & + \text{sen} \left(2\omega_M t + 2\theta_o^{(\ell)}(t - \tau_{\ell,j}) - \vartheta^{(\ell,j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j} \right). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Substituindo a equação 6.42 na equação 6.41 e considerando as funções de entrada do tipo degrau, o resultado é:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \theta_o^{(j)}(t) = & \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen} \left(\vartheta^{(\ell,j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j} \right) \\ & + \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen} \left(2\omega_M t + 2\phi^{(\ell)} - \vartheta^{(\ell,j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j} \right). \end{aligned} \quad (6.43)$$

De acordo com a definição 4.3, considera-se que no estado síncrono os erros de fases $\vartheta^{(\ell,j)}$, $\ell = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, N$, são aproximadamente constantes. Com isso a equação 6.43 pode ser reescrita, considerando-se $\vartheta^{(\ell,j)}(t) = \vartheta^{(\ell,j)}$ constante para $t > t_s$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \theta_o^{(j)}(t) = & \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen} \left(\vartheta^{(\ell,j)} - \omega_M \tau_{\ell,j} \right) \\ & + \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen} \left(2\omega_M t + 2\phi^{(\ell)} - \vartheta^{(\ell,j)} - \omega_M \tau_{\ell,j} \right), \end{aligned} \quad (6.44)$$

para $t > t_s$.

Desprezando a parcela constante na equação 6.44, que não influencia o DFJ, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}\theta_{DFJ}^{(j)}(t) = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}(2\omega_M t + c^{(\ell,j)}), \quad t > t_s, \quad (6.45)$$

com $c^{(\ell,j)} = 2\phi^{(\ell)} - \vartheta^{(\ell,j)} - \omega_M \tau_{\ell,j}$ constante. A equação 6.45 é a parcela responsável pelo DFJ no sinal de controle. Aplicando o teorema da convolução na equação 6.45, obtém-se:

$$\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt}\theta_{DFJ}^{(j)}(t) \right] = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} F^{(j)}(s) * \mathcal{L}[\text{sen}(2\omega_M t + c)]. \quad (6.46)$$

Aplicando as técnicas de resposta em frequência [37] para determinar a amplitude do DFJ no sinal de controle, resulta a equação 6.47:

$$\left| \dot{\theta}_{DFJ}^{(j)} \right| = \mathcal{L} \left[\frac{d}{dt}\theta_{DFJ}^{(j)}(t) \right] = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} \left| F^{(j)}(2\omega_M i) \right|, \quad (6.47)$$

como se queria demonstrar. □

Corolário 6.4 (Amplitude do DFJ na fase do nó de uma rede MC para uma entrada tipo degrau). *Para uma entrada tipo degrau, a amplitude do DFJ na fase do nó de uma rede MC é dada pela equação 6.48:*

$$\left| \theta_{DFJ}^{(j)} \right| = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} \left| \frac{F^{(j)}(2\omega_M i)}{2\omega_M i} \right|. \quad (6.48)$$

Prova. A prova do corolário 6.4 é análoga à do corolário 6.1.

Teorema 6.8 (Amplitude do DFJ no sinal de controle de uma rede MC para uma entrada tipo rampa). *Seja a equação diferencial 3.79 o modelo de um nó em uma rede MC e $F^{(j)}(s)$ a transformada de Laplace do filtro de acordo com a definição 3.4. Seja também $\theta_o^{(\ell)}(t) = \frac{R^{(\ell)}}{2}t^2 + \Omega^{(\ell)}t + \phi^{(\ell)}$, com $R^{(\ell)} = \phi^{(\ell)} = 0$ e $\Omega^{(\ell)}$ constante, $\ell = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, N$, a função de excitação do nó j de acordo com a definição 2.5. Então, após o nó atingir o estado síncrono, a amplitude do DFJ no sinal de controle pode ser determinada, de forma aproximada, pela equação 6.49:*

$$\left| \dot{\theta}_{DFJ}^{(j)} \right| = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} \left| F^{(j)}(2(\omega_M + \Omega^{(\ell)})i) \right|. \quad (6.49)$$

Prova. Substituindo a equação 6.42 na equação 6.41 e considerando a função de entrada do tipo rampa, o resultado é:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\theta_o^{(j)}(t) &= \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}\left(\vartheta^{(\ell,j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j}\right) \\ &+ \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}\left(2(\omega_M + \Omega^{(\ell)})t - (\omega_M + 2\Omega^{(\ell)})\tau_{\ell,j} - \vartheta^{(\ell,j)}(t)\right). \end{aligned} \quad (6.50)$$

De acordo com a definição 4.3, considera-se que, no estado síncrono, o erro de fase $\vartheta^{(\ell,j)}$ é aproximadamente constante. Com isso, a equação 6.50 pode ser reescrita considerando-se $\vartheta^{(\ell,j)}(t) = \vartheta^{(\ell,j)}$ constante para $t > t_s$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\theta_o^{(j)}(t) &= \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}\left(\vartheta^{(\ell,j)} - \omega_M \tau_{\ell,j}\right) \\ &+ \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}\left(2(\omega_M + \Omega^{(\ell)})t - (\omega_M + 2\Omega^{(\ell)})\tau_{\ell,j} - \vartheta^{(\ell,j)}\right), t > t_s. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Desprezando a parcela constante na equação 6.51, que não influencia o DFJ, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}\theta_{DFJ}^{(j)}(t) = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}\left(2(\omega_M + \Omega^{(\ell)})t + c\right). \quad (6.52)$$

com $c = -(\omega_M + 2\Omega^{(\ell)})\tau_{\ell,j} - \vartheta^{(\ell,j)}$ constante. A equação 6.52 é a parcela responsável pelo DFJ no sinal de controle. Aplicando o teorema da convolução na equação 6.52, obtém-se:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\theta_{DFJ}^{(j)}(t)\right] = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} F^{(j)}(s) \mathcal{L}\left[\text{sen}\left(2(\omega_M + \Omega^{(\ell)})t + c\right)\right]. \quad (6.53)$$

Aplicando-se as técnicas de resposta em frequência na equação 6.53 (ver [37]), pode-se determinar a amplitude do DFJ no sinal de controle, o resultado é:

$$\left|\dot{\theta}_{DFJ}^{(j)}\right| = \left|\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\theta_{DFJ}^{(j)}(t)\right]\right| = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} \left|F^{(j)}(2(\omega_M + \Omega^{(\ell)})i)\right|, \quad (6.54)$$

como se queria demonstrar. $\square$

Teorema 6.9 (Amplitude do DFJ no sinal de controle de um nó uma rede MC para uma entrada tipo parábola). *Seja a equação diferencial 3.79 o modelo de um nó de uma rede MC e $F^{(j)}(s)$ a transformada de Laplace do filtro da malha de acordo com a definição 3.4. Seja também $\theta_o^{(j)}(t) = \frac{R^{(\ell)}}{2}t^2 + \Omega^{(ell)}t + \phi^{(\ell)}$, com $\Omega^{(\ell)} = \phi^{(\ell)} = 0$ e $R^{(\ell)}$ constante, $\ell = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, N$, a função de excitação do nó j de acordo com a definição 2.5. Então, se o filtro $F^{(j)}(s)$ do nó tiver mais pólos que zeros $M^{(j)} < P^{(j)}$, tem-se que $\left|\dot{\theta}_{DFJ}\right| \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$.*

Prova. Substituindo a equação 6.42 na equação 6.41 e considerando a função de entrada do tipo parábola, o resultado é:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\theta_o^{(j)}(t) &= \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}\left(\vartheta^{(\ell,j)}(t) - \omega_M \tau_{\ell,j}\right) \\ &\quad + \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}\left(R^{(\ell)}t^2 + 2(\omega_M - R^{(\ell)}\tau_{\ell,j})t\right. \\ &\quad \left.+ R^{(\ell)}\tau_{\ell,j}^2 - \omega_M \tau_{\ell,j} - \vartheta^{(\ell,j)}(t)\right). \end{aligned} \quad (6.55)$$

De acordo com a definição 4.3, considera-se que, no estado síncrono o erro de fase $\vartheta^{(\ell,j)}$ é aproximadamente constante. Com isso, a equação 6.55 pode ser reescrita, considerando-se $\vartheta^{(\ell,j)}(t) = \vartheta^{(\ell,j)}$ constante para $t > t_s$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\theta_o^{(j)}(t) = & \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}\left(\vartheta^{(\ell,j)} - \omega_M \tau_{\ell,j}\right) \\ & + \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}\left(R^{(\ell)} t^2 + 2(\omega_M - R^{(\ell)} \tau_{\ell,j}) t \right. \\ & \left. + R^{(\ell)} \tau_{\ell,j}^2 - \omega_M \tau_{\ell,j} - \vartheta^{(\ell,j)}\right). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Desprezando a parcela constante na equação 6.51, que não influencia o DFJ, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}\theta_{DFJ}^{(j)}(t) = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} f^{(j)}(t) * \text{sen}\left(R^{(\ell)} t^2 + 2(\omega_M - R^{(\ell)} \tau_{\ell,j}) t + c\right). \quad (6.57)$$

com $c = R^{(\ell)} \tau_{\ell,j}^2 - \omega_M \tau_{\ell,j} - \vartheta^{(\ell,j)}$ constante. A equação 6.57 é a parcela responsável pelo DFJ no sinal de controle. A análise da equação 6.57 é análoga à da equação 6.20 na demonstração do teorema 6.3. Com isso, tem-se que a amplitude do DFJ no sinal de controle se torna nula ao longo do tempo, ou seja, $\left|\dot{\theta}_{DFJ}\right| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Como se queria demonstrar. $\square$

O corolário 6.2 continua válido para os nós das redes MC; a prova é análoga.

Capítulo 7

Alcançabilidade do estado síncronismo

Os teoremas da seção 5.2 estabelecem as condições para a existência de estados síncronos. Contudo, como foi dito na seção 5.3, essas condições não garantem a alcançabilidade dos estados síncronos.

Para garantir que uma rede alcançará o estado síncrono, é necessário o conhecimento explícito de uma função de Lyapunov. Entretanto, em grande parte dos casos, a obtenção de uma função de Lyapunov não é factível devido, principalmente, à falta de um método geral.

Neste capítulo, serão consideradas abordagens numéricas e analíticas para estudar a alcançabilidade dos estados síncronos das topologias OWMS, TWMS e MC. O objetivo não é demonstrar a alcançabilidade de estados síncronos, mas sim, através da análise das simulações e do comportamento dos PLLs, adquirir conhecimento empírico sobre a alcançabilidade dos estados síncronos.

7.1 Rede OWMS

Uma forma de observar o comportamento das redes é através de simulações. Apesar da impossibilidade de generalização, os resultados das simulações conferem ao especialista um conhecimento empírico e intuitivo dificilmente obtido através de alguma outra abordagem.

Tendo isso em mente, pode-se tentar inferir, através de um conjunto de simulações, se uma determinada rede consegue alcançar o estado síncrono. A idéia é observar como as trajetórias se comportam dentro de uma região limitada do espaço de estados, ou seja, observar o comportamento das trajetórias iniciando em um ponto dentro de uma região limitada e fixa¹ do espaço de estados.

Como os estados síncronos se repetem periodicamente no espaço de estados (ver seções 5.1.1 e 5.2.1), com as mesmas características estruturais, a região no espaço de estados é escolhida de modo a conter a origem, sendo definida pelo conjunto:

$$\mathbf{R}^{(m)} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & x_3^{(m)} \end{bmatrix}^T \mid -3\pi < x_1^{(m)} < 3\pi; \right. \\ \left. -3\pi < x_2^{(m)} < 3\pi; \quad -3\pi < x_3^{(m)} < 3\pi \right\}, \quad (7.1)$$

para $m = 1, 2, \dots, N - 1$, incluindo três estados síncronos $([-2\pi \ 0 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 0]^T, [2\pi \ 0 \ 0]^T)$. As simulações foram realizadas no MatlabTM, utilizando o integrador “ode45”. Foram utilizados os filtros:

$$F_1 = \frac{s + 1}{s^2 + s + 1}, \quad (7.2)$$

e

$$F_2 = \frac{1.5s + 1}{s(s + 1)} \quad (7.3)$$

e ganho $G = 0.5$, satisfazendo as condições do teorema 5.5 e do corolário 5.1.

As figuras 7.1 e 7.2 apresentam o resultado da simulação de uma rede OWMS com dez nós-escravos. No instante $t = 0$, é aplicado um degrau de fase na função de excitação (definição 2.5) do nó-mestre. Então, a partir de condições iniciais nulas a rede alcança o estado síncrono.

Em relação à figura 7.1, observa-se que a rede alcança o estado síncrono por volta dos 250 segundos. Comparativamente a rede que utiliza o filtro da equação 7.3, figura 7.2, atinge o estado síncrono por volta dos 650 segundos. Além disso, as amplitudes do sinal de controle (v_c) da figura 7.1 também são menores.

¹O tamanho dessa região é arbitrário.

Com isso, fica claro que o estado síncrono da rede é alcançável com os filtros dados pelas equações 7.2 e 7.3 e com o ganho $G = 0.5$. Para compactar os resultados, as figuras 7.3 e 7.4 apresentam as trajetórias de apenas um único nó, considerando condições iniciais não nulas, mas dentro de $\mathbf{R}$, para as mesmas redes.

Figura 7.1: Sinal de controle da rede utilizando o filtro da equação 7.2 e $G = 0.5$.

Em ambos os casos, as trajetórias, representadas pelas linhas contínuas mais grossas, iniciam próximo a um estado síncrono e, com o passar do tempo, alcançam

Figura 7.2: Sinal de controle da rede utilizando o filtro da equação 7.3 e $G = 0.5$.

esse estado síncrono.

Observando as trajetórias T_1 , T_2 e T_3 na figura 7.3, nota-se que, embora todas iniciem dentro de $\mathbf{R}$, T_2 deixa $\mathbf{R}$, e não retorna (ver figuras 7.3(a), 7.3(b) e 7.3(c)). O mesmo ocorre com a trajetória T_1 nas figuras 7.4(a), 7.4(b) e 7.4(c).

Entretanto, observando as trajetórias T_2 e T_1 , nas figuras 7.3(d) e 7.4(d), respectivamente, verifica-se que, em ambos os casos, as variáveis de estado x_2 e x_3 decaem com

(a) Vista 3D.

(b) Planos $x_1 \times x_2$. (c) Planos $x_1 \times x_3$. (d) Planos $x_2 \times x_3$.Figura 7.3: Espaço de estados considerando o filtro da equação 7.2, em unidades de π .

(a) Vista 3D.

(b) Planos $x_1 \times x_2$. (c) Planos $x_1 \times x_3$. (d) Planos $x_2 \times x_3$.Figura 7.4: Espaço de estados considerando o filtro da equação 7.3, em unidades de π .

o tempo. Assim as trajetórias que deixam $\mathbf{R}$ também alcançam um estado síncrono, mas, neste caso, fora de $\mathbf{R}$.

Para todas as simulações realizadas, considerando condições iniciais dentro de $\mathbf{R}$, apenas os dois comportamentos descritos acima foram observados. Isso sugere que todas as trajetórias que iniciam dentro de $\mathbf{R}$ alcançam o estado síncrono.

Além disso, o fato de os estados síncronos repetirem-se periodicamente no espaço de estados, com as mesmas características estruturais, também sugere que, se a região $\mathbf{R}$ fosse definida de modo a incluir todos os valores possíveis de x_1 , as conclusões relativas à alcançabilidade dos estados síncronos não seriam afetadas.

As simulações realizadas utilizando PLLs de 2ª ordem, ou seja, com filtros de 1ª ordem, levaram às mesmas conclusões.

Para as redes OWMS, as simulações realizadas sugerem que, se os teoremas 5.1 e 5.5 forem satisfeitos a rede sempre alcançará algum estado síncrono.

Na prática, entretanto, o sinal de controle do VCO é limitado e, conseqüentemente, a faixa de frequências em que o VCO pode operar. Isso faz com que exista um valor máximo para o erro de frequência inicial que permita ao PLL e, então, às redes, alcançar o estado síncrono.

Esse erro de frequência máximo é que, em última instância, define a faixa de retenção (definição 4.5), já que limita os estados síncronos alcançáveis.

7.2 Rede TWMS

Com relação à rede TWMS nenhum estado síncrono é alcançável. Isto ocorre devido à diferença de fase de $\frac{\pi}{2}rad$ gerada por cada nó. A figura 7.5 ilustra como isso ocorre.

Se uma rede TWMS formada por dois nós alcançou o estado síncrono, então, num determinado instante $t_1 > t_s$, a saída do nó 1 é $\sin(\varphi)$ (figura 7.5(a)). Como os dois nós estão sincronizados a saída do nó 2 será $\sin(\varphi + \frac{\pi}{2})$ (figura 7.5(b)). Da mesma forma, fechando a malha, a saída do nó 1 é $\sin(\varphi + \pi) = -\sin(\varphi)$ (figura 7.5(c)). Obviamente

Figura 7.5: Alcançabilidade do estado síncrono em redes TWMS.

a saída no nó 1 não pode ser $\text{sen}(\varphi)$ e $-\text{sen}(\varphi)$ ao mesmo tempo, indicando que os nós, na verdade, não estão sincronizados.

Como a rede TWMS é composta de vários elos iguais ao da figura 7.5, fica evidente que o estado síncrono não é alcançável.

7.3 Rede MC

A complexidade de uma rede MC torna o estudo da alcançabilidade de estados síncronos um problema bastante difícil. A princípio, como a rede MC é composta essencialmente por vários elos (ver figura 7.6), assim como a rede TWMS, poder-se-ia concluir que nenhum nó alcançaria o estado síncrono.

De fato, em nenhuma das simulações realizadas, considerando diferentes filtros de 1ª e 2ª ordens, a rede MC alcançou o estado síncrono. Contudo, em algumas simulações, como as mostradas nas figuras 7.7, 7.8 e 7.9, verifica-se que alguns nós sincronizam. O filtro utilizado na simulação é de 2ª ordem, dado por:

$$F = \frac{s + 21}{s^2 + 20s + 10}, \quad (7.4)$$

e o ganho de malha de cada nó é $G = 10$, atendendo às condições de existência do estado síncrono do teorema 5.7². Na figura 7.7, vê-se a evolução do sinal de controle para cada nó, sendo que os nós 3 e 4 estão sincronizados.

A figura 7.8 apresenta o resultado da simulação da mesma rede, mas com ganho de malha $G = 100$ e condições iniciais nulas. Como pode ser observado, apenas o nó 1 não está sincronizado. Nesse caso, o teorema 5.7 sequer garante a existência de um

²Para o filtro e ganho considerados, a rede pode ser formada por, no máximo, 5 nós.

estado síncrono.

Figura 7.6: Rede MC com quatro nós.

Figura 7.7: Rede MC simulada com as condições iniciais não nulas.

Figura 7.8: Rede MC simulada com as condições iniciais nulas.

Se as condições iniciais forem não nulas, como é o caso da figura 7.9, fica mais difícil verificar se o estado síncrono foi alcançado pela simples inspeção do gráfico, mas neste exemplo, ainda é possível perceber que o nó 3 é o que não está sincronizado.

O fato de as redes TWMS e MC não alcançarem o estado síncrono, mais o comportamento apresentado nas figuras 7.7, 7.8 e 7.9, levou ao estudo por simulação de

Figura 7.9: Rede MC simulada com as condições iniciais não nulas.

outras topologias que, embora apresentassem circuitos fechados (elos) em suas conexões, fossem capazes de alcançar o estado síncrono. Observou-se que as topologias em anel ou cilindro, formadas por quatro colunas de PLLs em cascata, permitem à rede alcançar o estado síncrono.

7.4 Redes Anel e Cilindro

A figura 7.10 mostra a rede na topologia cilindro. A topologia anel seria uma rede formada, por exemplo, pelos nós 1, 4, 7 e 10.

Figura 7.10: Rede com a topologia cilindro.

Nessa topologia, diferentemente da rede TWMS, o elo é formado pelo circuito fechado de quatro PLLs (ou quatro colunas de PLLs) em cascata. Conectando-se os PLLs dessa forma, o erro estático de fase gerado por cada anel é de $2\pi \text{ rad}$. Essa situação permite à rede alcançar o estado síncrono, já que o sinal, na saída dos PLLs da última coluna, fica com a mesma fase (defasada de $2\pi \text{ rad}$) dos sinais na entrada dos PLLs da primeira coluna.

A rede mostrada na figura 7.10 foi simulada no SimulinkTM, utilizando o filtro de primeira ordem:

$$F = \frac{s + 2\pi}{s + \frac{2\pi}{10}}, \quad (7.5)$$

com ganho de malha $G = 0.5$ e frequência de livre curso $\omega_M = 2\pi$. As condições iniciais são não nulas, ou seja, para cada nó foi dado uma fase inicial $\theta_o^{(j)}(0) \neq 0$. Cada nó é construído da mesma forma que os nós da rede MC, mas, nesse caso, cada nó tem apenas três conexões na entrada.

O resultado da simulação é apresentado na figura 7.11. Como pode ser observado, a rede alcançou o estado síncrono.

Figura 7.11: Sinal de controle da rede em cilindro.

Capítulo 8

Medidas do DFJ

Com o intuito de validar os resultados analíticos obtidos no capítulo 6, foram tomadas medidas do DFJ em simulações das redes OWMS e Cilindro. Como as redes TWMS e MC não alcançam o estado síncrono, não é possível medir o DFJ nas simulações.

8.1 Rede OWMS

As simulações foram realizadas utilizando blocos do SimulinkTM[76]. Os métodos de integração utilizados são “ode45”, usado nas simulações com valores baixos do ganho da malha (até $G=10$), e “ode23” para ganhos altos.

A rede OWMS simulada é formada por um nó-mestre e dez escravos, seguindo a recomendação G.812 da ITU-T [77]. A figura 8.1 apresenta a comparação entre os valores previstos do DFJ pelos teoremas da seção 6.1 e os valores obtidos pelas simulações.

Em cada gráfico os valores da amplitude do DFJ são comparados com a recomendação G.811 da ITU-T [1] de 0.015 UIpp ¹, para o valor máximo do DFJ. Esse valor é adaptado para a frequência central usada neste trabalho, correspondendo a $J_{ppmax} = 0.015 \text{ rad}$.

¹Intervalos unitários pico-a-pico (*Unitary Intervals peak-to-peak*).

Nas simulações, foram considerados três filtros, o *lead-lag* passivo (equação 2.29), o *lead-lag* ativo (equação 2.30) e o PI ativo (equação 2.31), com $T_1 = 6280$ e $T_2 = 62.80$. Também foram considerados quatro ganhos diferentes para a malha, $G = 1$, $G = 10$, $G = 100$ e $G = 1000$. A figura 8.1 mostra que as simulações confirmam os valores previstos analiticamente para a rede OWMS.

Figura 8.1: Comparação entre os valores da amplitude do DFJ previstos analiticamente e os obtidos por simulação. A linha ‘-.’ indica $J_{ppmax} = 0.015 \text{ rad}$ conforme [1].

As figuras 8.2 e 8.3 mostram como o DFJ influencia na qualidade do sincronismo. O gráfico da figura 8.2 relaciona a saída de cada nó-escravo com a saída do nó-mestre, deixando evidente que os nós de números 5 e 9 voltam a ficar com a mesma fase do mestre. Além disso, pode-se observar que, para valores do ganho $G \leq 10$, a influência do DFJ é imperceptível a olho nú. Ainda assim, para $G = 10$ (figura 8.2(b)), a amplitude do DFJ já atinge o valor máximo, $J_{ppmax} = 0.015 \text{ rad}$, recomendado pela ITU-T.

Quando $G = 100$ (figura 8.2(c)), já se pode notar pequenas distorções. Para $G = 1000$ (figura 8.2(d)), as saídas dos nós já aparecem intensamente distorcidas em comparação com a saída do nó-mestre.

A figura 8.3 mostra o sinal de controle dos VCOs para os nós de números 10 e 11

Figura 8.2: Comparação entre a saída no nó-mestre e as saídas dos nós-escravos.

e para os ganhos $G = 1$, $G = 10$, $G = 100$ e $G = 1000$. Embora os gráficos não estejam na mesma escala, é possível observar a influência do ganho da malha na amplitude do DFJ. Para valores de ganhos da malha mais altos, o tempo de aquisição do sincronismo é menor. Contudo a amplitude do DFJ pode tornar-se proibitiva. Dessa forma, fica clara a importância de levar-se em conta no projeto do filtro a necessidade de atenuar apropriadamente o DFJ.

A figura 8.4 mostra que, quando a função de excitação de um nó é uma parábola e o filtro tem mais pólos que zeros, a amplitude do DFJ diminui ao longo do tempo, confirmando o teorema 6.3. Os filtros considerados foram um *lag* de 1ª ordem e um de segunda ordem com $G = 0.5$.

Figura 8.3: Sinal de controle dos nós 10 e 11. Filtro PI ativo.

Figura 8.4: Respostas de um PLL a uma parábola de fase.

8.1.1 Resultados experimentais

O diagrama de blocos da figura 8.5 representa o circuito apresentado em [35], que é uma implementação de uma rede OWMS composta de um mestre e um escravo. Posteriormente, em [75], o número de nós foi aumentado para 5, ou seja, um mestre e quatro escravos. A figura 8.6 mostra as densidades espectrais de potência (PSDs) do PD, do sinal de controle e da saída do VCO. Como todos os nós-escravos apresentam praticamente o mesmo PSD, apenas o do último nó é mostrado.

Pode-se observar que o nó-escravo está sincronizado em 216 KHz , e o DFJ pode ser visto em 432 KHz . O DFJ na saída do detector de fase é atenuado pelo filtro. Pôde-se verificar que o DFJ não se acumula à medida que o número de nós aumenta, deixando clara a influência dos ganhos da malha e do filtro sobre o DFJ.

Figura 8.5: Diagrama de blocos do experimento.

8.2 Rede-cilindro

Embora nenhum dos teoremas do capítulo 6 aborde o DFJ da rede-cilindro, pode-se adaptar o teorema 6.8 da seção 6.3. Com esse fim, considera-se $N = 4$ para um dado nó da rede-cilindro². Como todos os nós são construídos da mesma forma, isto é, com os mesmos filtros e ganhos, a amplitude do DFJ é dada pelo produto entre o ganho da malha (G) e o ganho do filtro na frequência em que a rede sincroniza. Assim tem-se:

$$\left| \dot{\theta}_{DFJ} \right| = G \left| F(2(\omega_M + \Omega)i) \right|, \quad (8.1)$$

²Na verdade, considera-se uma sub-rede formada por quatro nós: o próprio nó mais os outros três que geram as entradas.

Figura 8.6: Densidade espectral de potência (PSD) medida na saída do PD e do VCO.

sendo $\omega_M = 2\pi$ e $G = 0.5$. O filtro é dado pela equação 7.5, e $\Omega = 0.4982 \text{ rad}$ foi medido no MatlabTM a partir da figura 8.7. Substituindo esses valores na equação 8.1, obtém-se $|\dot{\theta}_{DFJ}| = 0.0550$, que é, exatamente, o mesmo valor obtido na simulação.

Figura 8.7: Ampliação da figura 7.11: últimos dez segundos da simulação do nó 1.

Capítulo 9

Resultados

Este trabalho iniciou-se a partir da leitura dos artigos [25] e [24], que começaram o estudo da influência do DFJ em redes de PLLs.

Nesses artigos, assim como ao longo deste texto, observa-se que, se o DFJ não for atenuado apropriadamente, o desempenho da rede pode ser seriamente prejudicado.

Num primeiro momento, é possível argumentar que o problema pode ser resolvido com a utilização de filtros de ordem superior para atenuar o DFJ. Contudo os PLLs estão sujeitos a comportamentos não-lineares como bifurcações, ciclos-limite e caos, quando se utiliza filtros de 2ª ordem ou superiores [39, 40].

Portanto, neste trabalho, o problema foi abordado sob dois aspectos. Primeiramente, através do desenvolvimento de modelos que levassem em conta o termo de frequência dupla, a partir desses modelos, pôde-se determinar o comportamento qualitativo e quantitativo do DFJ.

Em segundo lugar, através do estudo do sincronismo nas redes de PLLs analógicos, que consistiu na definição do sincronismo e dos modos de operação, na determinação das condições que garantam a existência de estados síncronos para PLLs de 2ª e 3ª ordens e no estudo do problema da alcançabilidade de estados síncronos, que foi abordado, principalmente, do ponto de vista numérico.

São, portanto, contribuições deste trabalho:

- Os modelos das redes que levam em conta o termo de frequência dupla, responsável pelo DFJ, e os atrasos de transmissão entre os nós das redes. Além disso, devido à forma como as equações diferenciais foram escritas, pode-se adaptar o modelo a diferentes filtros lineares. Os parâmetros dos filtros e os ganhos de malha também podem ser diferentes para cada nó. A Tabela 9.1 designa cada modelo.

Rede	Equação	Página
OWMS	3.28	33
TWMS	3.54	39
MC	3.79	45

Tabela 9.1: Modelos das redes de PLLs.

- Os modelos das redes no espaço de estados (tabela 9.2) considerando PLLs de 2ª e 3ª ordens. Nesses modelos, considerou-se que todos os nós das redes são construídos da mesma forma e com os mesmos ganhos, o que permitiu a obtenção de equações de estados autônomas.

Rede	Equação	Página
OWMS 2ª ordem	4.13	50
OWMS 3ª ordem	4.36	54
TWMS 2ª ordem	4.18 e 4.19	51
TWMS 3ª ordem	4.38 e 4.39	55
MC 2ª ordem	4.28	53
MC 3ª ordem	4.42	56

Tabela 9.2: Modelos das redes no espaço de estados.

- As definições do conceito de sincronismo e dos modos de operação das redes. Estas definições (tabela 9.3) contemplam a existência de fenômenos como o DFJ.
- Os teoremas que estabelecem as condições para a existência de estados síncronos

Definição	Número	Página
Estado síncrono	4.2	57
Sincronismo	4.3	57
Faixa de captura	4.4	58
Faixa de retenção	4.5	58
Modo de aquisição	4.6	58
Modo de rastreamento	4.7	58

Tabela 9.3: Sincronismo e modos de operação.

em termos dos coeficientes dos filtros (equações 4.1, 4.29 e 5.42), do ganho da malha e do número de nós das redes. Ver tabelas 9.4, 9.5 e 9.6.

Rede	Teorema	Página	Condição
OWMS	5.1	62	coeficientes positivos
TWMS	5.2	64	coeficientes positivos
MC	5.3	64	coeficientes positivos

Tabela 9.4: Existência de estados síncronos para o filtro *lead-lag* da equação 4.1.

Rede	Teorema	Página	Condição
OWMS	5.5	66	$G < \frac{\beta_0\beta_1}{\alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_1}$
TWMS	5.6	68	$G < \frac{\beta_0\beta_1}{\alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_1}$
MC	5.7	69	$N < \frac{\beta_0\beta_1}{\mu_G(\alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_1)}$

Tabela 9.5: Existência de estados síncronos para o filtro de 2ª ordem da equação 4.29.

Rede	Corolário	Página	Condição
OWMS	5.1	66	$\alpha_1 > \beta_2$
TWMS	5.2	68	$\alpha_1 > \beta_2$
MC	5.3	69	$\alpha_1 > \beta_2$

Tabela 9.6: Existência de estados síncronos para o filtro de 2ª ordem da equação 5.42.

- Os teoremas que determinam a amplitude do DFJ para cada topologia de rede, ver tabelas 9.7, 9.8 e 9.9.

Entrada	Teorema	Corolário	Página	Amplitude
Degrau	6.1		74	$G^{(j)} F^{(j)}(2\omega_M i) $
Rampa	6.2		76	$G^{(j)} F^{(j)}(2(\omega_M + \Omega)i) $
Parábola	6.3		77	Nula †
Parábola		6.2	77	Constante ‡

†Filtro com mais pólos que zeros. ‡Filtro com mesmo número de pólos e zeros.

Tabela 9.7: Amplitude do DFJ para rede OWMS.

Entrada	Teorema	Página	Amplitude
Degrau	6.4	78	$\frac{1}{2} (G^{(j-1,j)} + G^{(j+1,j)}) F^{(j)}(2\omega_M i) $
Rampa	6.5	80	$\frac{1}{2} \left(G^{(j-1,j)} F^{(j)}(2(\omega_M + \Omega^{(j-1)})i) + G^{(j+1,j)} F^{(j)}(2(\omega_M + \Omega^{(j+1)})i) \right)$
Parábola	6.6	82	Mesmo que tabela 9.7

Tabela 9.8: Amplitude do DFJ para rede TWMS.

Entrada	Teorema	Página	Amplitude
Degrau	6.7	83	$\frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} F^{(j)}(2\omega_M i) $
Rampa	6.8	86	$\frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N G^{(\ell,j)} F^{(j)}(2(\omega_M + \Omega^{(\ell)})i) $
Parábola	6.9	87	Mesmo que tabela 9.7

Tabela 9.9: Amplitude do DFJ para rede MC.

Os teoremas da tabela 9.7 foram validados nas simulações apresentadas no capítulo 8, e, experimentalmente, em [35, 75].

O teorema 6.8 mostrou aplicabilidade no caso da rede-cilindro, embora não tenha sido possível validá-lo para a rede MC, assim como, aos demais teoremas das tabelas 9.8 (rede TWMS) e 9.9 (rede MC).

- Os estudos numéricos e analíticos sobre a alcançabilidade dos estados síncronos das redes OWMS, TWMS e MC (capítulo 7). Verificou-se que a rede OWMS alcança o estado síncrono desde que os teoremas de existência estejam satisfeitos, e que o erro de frequência inicial não seja maior que um determinado limite, dado pelas faixas de retenção. Além disso, verificou-se numericamente a alcançabilidade dos estados síncronos para a rede-cilindro.

Os resultados obtidos indicam novos tópicos para continuação da pesquisa:

- Os teoremas relativos a amplitude do DFJ e à existência de estados síncronos auxiliam o projetista a melhorar a robustez do estado síncrono, se o DFJ for levado em conta durante o projeto. Neste sentido, poder-se-ia pesquisar quais estruturas de filtro seriam melhores para atender aos requisitos de projeto incluindo a atenuação do DFJ;
- A impossibilidade de obter sincronismo nas redes TWMS e MC aponta para a necessidade de modificar a estrutura dessas redes ou buscar formas alternativas para controlar cada nó, com o objetivo de garantir a alcançabilidade do estado síncrono;
- Estudar topologias combinando grupos de quatro PLLs, como na topologia cilindro ou anel, para que se possa obter redes TWMS ou MC que tenham a capacidade de alcançar o estado síncrono;
- Estudo da influência do atraso de transmissão $(\tau_{\ell,j})$ no desempenho das redes.

Referências Bibliográficas

- 1 ITU-T. *Timing Characteristics of Primary Clocks - Recomendation G.811*. [S.l.], 1997.
- 2 LINDSEY, W. C. et al. Network synchronization. In: *Proceedings of the IEEE*. [S.l.: s.n.], 1985. v. 73, n. 10, p. 1445–1467.
- 3 MEYR, H.; ASCHEID, G. *Synchronization in Digital Communications Phase-Frequency-Locked Loops, and Amplitude Control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1990. 510 p.
- 4 BEST, R. E. *Phase-Locked Loops - Design, Simulation, and Applications*. 4. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 1999. 408 p.
- 5 GARDNER, F. M. *Phaselock Techniques*. 3. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2005.
- 6 HSIEH, G.-C.; HUNG, J. C. Phase-locked loop techniques - a survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 43, n. 6, p. 609–615, dez. 1996.
- 7 MARAFÃO, F. P. et al. Metodologia de projeto e análise de algoritmos de sincronismo de pll. *Eletrônica de Potência*, v. 10, n. 1, p. 7–14, jun. 2005.
- 8 FIEDMAN, E. G. Clock distribution networks in synchronous digital integrated circuits. In: *Proceedings of the IEEE*. [S.l.: s.n.], 2001. v. 89, n. 5, p. 665–692.
- 9 KARTASCHOFF, P. Synchronization in digital communications networks. In: *Proceedings of the IEEE*. [S.l.: s.n.], 1991. v. 79, n. 7, p. 1019–1027.

- 10 PRATT, G. A.; NGUYEN, J. Distributed synchronous clocking. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, v. 6, n. 3, p. 314–328, mar. 1995.
- 11 SULLIVAN, D. B.; LEVINE, J. Time generation and distribution. In: *Proceedings of the IEEE*. [S.l.: s.n.], 1991. v. 79, n. 7, p. 906–914.
- 12 PIQUEIRA, J. R. C.; TAKADA, E.; MONTEIRO, L. H. A. Analysing the effect of the phase-jitter in the operation of second order phase-locked loops. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II-Express Briefs*, Vol. 52, n. No. 6, p. pp. 331–335, jun. 2005.
- 13 TAKADA, E. *Análise do efeito do jitter de fase na operação de malhas de sincronismo de fase*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo - SP, 2006.
- 14 ORSATTI, F. *Redes Mutuamente Conectadas de DPLLs: Modelagem, Simulação e Otimização*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2007.
- 15 PIQUEIRA, J. R. C.; MONTEIRO, L. H. A. All-pole phase-locked loops: calculating lock-in range by using evan's root-locus. *International Journal of Control*, v. 79, n. 07, p. 822–829, jul. 2006.
- 16 MIZUNO, H.; ISHIBASHI, K. A noise-immune GHz clock distribution scheme using synchronous distributed oscillators. In: *Digest of Technical Papers. 45th ISSCC 1998 IEEE International Solid-State Circuits Conference, 1998*. [S.l.: s.n.], 1998. p. 404–405.
- 17 GUTNIK, V.; CHANDRAKASAN, A. P. Active GHz clock network using distributed plls. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, v. 35, n. 11, p. 1553–1560, nov. 2000.
- 18 TANAKA, H.-A. et al. Synchronizability of distributed clock oscillators. *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications*, v. 49, n. 9, p. 1271–1278, set. 2002.

- 19 SAINT-LAURENT, M.; SWAMINATHAN, M. A multi-pll clock distribution architecture for gigascale integration. In: *Proceedings. IEEE Computer Society Workshop on VLSI, 2001*. [S.l.: s.n.], 2001. p. 30–35.
- 20 SAINT-LAURENT, M. et al. Optimal clock distribution with an array of phase-locked loops for multiprocessor chips. In: *Proceedings of the 44th IEEE 2001 Midwest Symposium on Circuits and Systems, 2001. MWSCAS 2001*. [S.l.: s.n.], 2001. p. 454.
- 21 PIQUEIRA, J. R. C.; CASTILLO-VARGAS, S.; MONTEIRO, L. H. A. Two-way master-slave double-chain networks: Limitations imposed by linear master drift for second order pll's as slave nodes. *IEEE communications letters*, v. 9, n. 9, p. 829–831, set. 2005.
- 22 MEHROTRA, A. Noise analysis of phase-locked loops. *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications*, v. 49, n. 9, p. 1309–1316, set. 2002.
- 23 SHIMANOUCHI, M. An approach to consistent jitter modeling for various jitter aspects and measurements methods. In: *Proceedings of the IEEE ITC International Test Conference*. [S.l.: s.n.], 2001. p. 848–857.
- 24 PIQUEIRA, J. R. C.; MONTEIRO, L. H. A. Considering second-harmonic terms in the operation of the phase detector for second-order phase-locked loop. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I-Fundamental Theory and Applications*, v. 50, n. 6, p. 805 – 809, jun. 2003.
- 25 PIQUEIRA, J. R. C.; CALIGARES, A. Double-frequency jitter in chain master-slave clock distribution networks: Comparing topologies. *Journal of Communications and Networks*, v. 8, n. 1, p. 8–11, mar. 2006.
- 26 PIQUEIRA, J. R. C.; CALIGARES, A.; MONTEIRO, L. H. A. Double-frequency jitter figures in master-slave pll networks. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, v. 61, n. 10, p. 678–683, nov. 2007.
- 27 BREGNI, S. *Synchronization of Digital Telecommunications Networks*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2002.

- 28 BEST, R. E. *Phase-Locked Loops - Design, Simulation, and Applications*. 5. ed. [S.l.]: McGraw Hill Education, 2003. (McGraw Hill Education).
- 29 GARDNER, F. M. Charge-pump phase-lock loops. *IEEE Transactions on Communications*, COM-28, n. 11, p. 1849–1858, nov. 1980.
- 30 WANG, Z. An analysis of charge-pump phase-locked loops. *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Regular Papers*, v. 52, n. 10, p. 2128–2138, out. 2005.
- 31 GARDNER, F. M. Phase accuracy of charge pump pll's. *IEEE Transactions on Communications*, COM-30, n. 10, p. 2362–2363, out. 1982.
- 32 HANUMOLU, P. K. et al. Analysis of charge-pump phase-locked loops. *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Regular Papers*, v. 51, n. 9, p. 1665–1673, set. 2004.
- 33 BURBIDGE, M. J. Detection and evaluation of deterministic jitter causes in cp-pll's due to macro level faults and pre-detection using simple methods. *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*, n. 21, p. 267–281, 2005.
- 34 BURBIDGE, M. J.; TIJOU, J. Towards generic charge-pump phase-locked loop, jitter estimation techniques using indirect on chip methods. *INTEGRATION, the VLSI Journal*, n. 40, p. 133–148, 2007.
- 35 FERREIRA, A. A.; BUENO, A. M.; PIQUEIRA, J. R. C. Modeling and measuring double-frequency jitter in one-way master-slave networks. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 14, n. 5, p. 1854 – 1860, maio 2009.
- 36 BUENO, A. M.; FERREIRA, A. A.; PIQUEIRA, J. R. C. Fully-connected pll networks: how filter determines the number of nodes. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009. Accept. 03/03/2009.
- 37 OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Rio de Janeiro,RJ: Prentice Hall do Brasil, 1993.

- 38 PIQUEIRA, J. R. C.; FRESCHI, M. Models for master-slave clock distribution networks with third-order phase-locked loops. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2007, n. Article ID 18609, 2007.
- 39 MONTEIRO, L. H. A.; FAVARETTO, D.; PIQUEIRA, J. R. C. Bifurcation analysis for third-order phase-locked loops. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 11, n. 5, p. 494–496, maio 2004.
- 40 PIQUEIRA, J. R. C. Using bifurcations in the determination of lock-in ranges for third-order phase-locked loops. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 14, n. 5, p. 2328–2335, 2009.
- 41 PIQUEIRA, J. R. C.; MARMO, C.; MONTEIRO, L. H. A. Using central manifold theorem in the analysis of master-slave synchronization networks. *Journal of Communications and Networks*, v. 6, n. 3, p. 197–202, set. 2004.
- 42 BREGNI, S. A historical perspective on telecommunications network synchronization. *IEEE Communications Magazine*, v. 36, n. 6, p. 158–166, jun. 1998.
- 43 COUCH, L. W. *Digital and Analog Communication Systems*. 5. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1997.
- 44 JESPERSEN, J.; BLAIR, B.; GATTERER, L. Scanning the issue. In: *Proceedings of the IEEE*. [S.l.: s.n.], 1972. v. 60, n. 5, p. 476–478. ISSN 0018-9219.
- 45 BELLAMY, J. C. Digital network synchronization. *IEEE Communications Magazine*, v. 33, n. 4, p. 70–82, abr. 1995.
- 46 BELLAMY, J. C. *Digital telephony*. 2. ed. [S.l.]: Wiley, 1991. (Wiley series in telecommunications).
- 47 PAN, J. W. Synchronizing and multiplexing in a digital communications network. *Proceedings of the IEEE*, v. 60, n. 5, p. 594–601, maio 1972. ISSN 0018-9219.
- 48 IEEE Std. 1588 - 2002 IEEE Standard for a Precision Clock Synchronization Protocol for Networked Measurement and Control Systems. *IEEE Std 1588-2002*, p. i–144, 2002.

- 49 NGA, D. T. T.; KANG, M. Dynamic solutions to improve the performance of SONET/SDH networks. *The Joint International Conference on Optical Internet and Next Generation Network, 2006. COIN-NGNCON 2006.*, p. 8–10, jul. 2006.
- 50 PECORA, L. M.; CARROLL, T. L. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, v. 64, n. 8, p. 821–824, fev. 1990.
- 51 CUOMO, K. M.; OPPENHEIM, A. V. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. *Physical Review Letters*, v. 71, n. 1, p. 65–68, jul. 1993.
- 52 CUOMO, K. M.; OPPENHEIM, A. V. Chaotic signals and systems for communications. *MIT Research Laboratory of Electronics Technical Report*, n. 575, 1992.
- 53 CUOMO, K. M.; OPPENHEIM, A. V.; STROGATZ, S. H. Synchronization of lorenz-based chaotic circuits with applications to communications. *IEEE Transactions on Circuits and Systems- II: Analog and Digital Signal Processing*, v. 40, n. 10, p. 626–633, out. 1993.
- 54 STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. 1. ed. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1996. (Studies In Nonlinearity, v. 1).
- 55 STROGATZ, S. H. Exploring complex networks. *Nature*, v. 410, p. 268–276, mar. 2001.
- 56 HONG, H.; CHOI, M. Y.; KIM, B. J. Synchronization on small-world networks. *Physical Review E*, v. 65, p. 026139, 2002.
- 57 CARARETO, R.; ORSATTI, F.; PIQUEIRA, J. R. C. Optimized network structure for full-synchronization. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 14, n. 6, p. 2536–2541, 2009.
- 58 PIQUEIRA, J. R. C. *Aplicação da Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais a Problemas de Sincronismo de Fase*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1987.

- 59 PIQUEIRA, J. R. C. *Uma Contribuição ao estudo das redes com malhas de sincronismo*. Tese (Livre doc.) — Escola Politécnica da USP, 1997.
- 60 PIQUEIRA, J. R. C.; OLIVEIRA, M.; MONTEIRO, L. H. A. Synchronous state in a fully connected phase-locked loop network. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2006, n. Article ID 52356, p. 1–12, 2006.
- 61 CARARETO, R.; ORSATTI, F. M.; PIQUEIRA, J. R. C. Reachability of the synchronous state in a mutually connected pll network. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, 2009.
- 62 LARSSON, P. A simulator core for charge-pump pll's. *IEEE Transactions on Circuits and Systems- II: Analog and Digital Signal Processing*, v. 45, n. 9, p. 1323–1326, set. 1998.
- 63 HEDAYAT, C. D. et al. Modeling and characterization of the 3rd order charge-pump pll:a fully event-driven approach. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, n. 19, p. 25–45, 1999.
- 64 CAN, S.; SAHINKAYA, Y. E. Modeling and simulations of an analog charge-pump phase locked loop. *Simulation*, v. 50, n. 4, p. 155–160, abr. 1988.
- 65 LINDSEY, W. C. *Synchronization systems in communication and control*. [S.l.]: Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, 1972. 695 p.
- 66 WIGGINS, S. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1990. (Texts in applied mathematics).
- 67 ZADEH, L. A.; DESOER, C. A. *Linear System Theory: The State Space Approach*. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, 1963.
- 68 KAILATH, T. *Linear Systems*. [S.l.]: Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, 1980. 682 p. (Prentice-Hall information and system science series).
- 69 PIQUEIRA, J. R. C.; OLIVEIRA, M.; MONTEIRO, L. H. A. Linear approach for synchronous state stability in fully connected pll networks. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2008, p. 13, 2008.

- 70 KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1978.
- 71 KÜHLKAMP, N. *Introdução à topologia geral*. 2. ed. [S.l.]: Editora da UFSC, 2002.
- 72 BUENO, A. M. et al. Design constraints for third-order pll nodes in master-slave clock distribution networks. *IET Communications*, 2009. Subm.
- 73 BUENO, A. M. et al. Synchronous state stability of third order phase-locked loops. In: *Proceedings of the 6th American Nuclear Society International Topical Meeting on Nuclear Plant Instrumentation, Controls and Human Machine Interface Technology*. [S.l.: s.n.], 2009.
- 74 ISIDORI, A. *Nonlinear Control Systems*. [S.l.: s.n.], 1995.
- 75 BUENO, A. M.; FERREIRA, A. A.; PIQUEIRA, J. R. C. Double-frequency jitter amplitude in one-way master-slave chain networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II-Express Briefs*, 2009. Subm. oct/2008.
- 76 LYNCH, S. *Dynamical Systems With Applications Using MATLAB*. 1. ed. Boston: Birkhauser, 2004. 459 p.
- 77 ITU-T. *Timing Requirements of Slave Clocks Suitable for Use as Node Clocks in Synchronization Networks - Recommendation G.812*. [S.l.], 1997.
- 78 MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinamicos*. 1. ed. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2002.
- 79 BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 6. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1997.
- 80 OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S. *Signals and Systems*. 2. ed. [S.l.]: Prentice Hall India, 2006.
- 81 KAPLAN, W. *Advanced Calculus*. 2. ed. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

- 82 KAPLAN, W.; LEWIS, D. J. *Cálculo e Álgebra Linear*. [S.l.]: Livros Tecnicos e Científicos, 1972.
- 83 ARNOLD, V. I. *Ordinary differential equations*. Cambridge, MA: MIT Press, 1973.
- 84 GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. 2. ed. [S.l.]: Springer, 1983. (Applied Mathematical Sciences, v. 42).
- 85 HIRSCH, M. W.; SMALE, S. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. New York: Academic Press, 1974.
- 86 HALE, J. K. *Ordinary Differential Equations*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1969. (Pure & Applied Mathematics, XXI).
- 87 KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. 3. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2001.
- 88 BIRKHOFF, G.; ROTA, G. C. *Ordinary Differential Equations*. 4. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1989.
- 89 VIDYASAGAR, M. *Nonlinear systems analysis*. Prentice-hall. [S.l.]: Prentice Hall, 1978. (Prentice-Hall electrical engineering series, v. 1).
- 90 SPIEGEL, M. R. *Manual de Fórmulas, Métodos e Tabelas de Matemática*. [S.l.]: Makron Books, 1992. 420p. p. (Schaum McGraw-Hill).

Apêndice A

Sistemas Dinâmicos

Nesta seção são revistos alguns conceitos de sistemas dinâmicos que são utilizados ao longo deste trabalho. A bibliografia sobre o tema é extensa, dentre os quais cita-se [37, 54, 66, 68, 78–89].

A.1 Equação de estados: solução e ponto de equilíbrio

Definição A.1 (Derivada). *Seja a função $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$, definida no aberto U do $\mathbb{R}$. Para cada $t \in U$ a derivada $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(t)$ é definida pelo limite*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t}, \quad (\text{A.1})$$

desde que o limite exista. O diferencial $d\mathbf{x}$ da função $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ é definido abaixo:

$$d\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}}(t)\Delta t. \quad (\text{A.2})$$

Do ponto de vista geométrico, a derivada é o valor do coeficiente angular da reta tangente à curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ calculado no ponto $(t, \mathbf{x}(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, com isso, na equação A.2, Δt pode ser substituído por dt , logo:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}(t). \quad (\text{A.3})$$

A segunda derivada $\ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$ é definida como a derivada da primeira derivada. As derivadas de ordem superior são definidas de forma análoga.

Definição A.2 (Derivada parcial). *Seja a função $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no aberto U do $\mathbb{R}^m$, com $m, n \in \mathbb{Z}_+^*$, e $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$. Então, o limite,*

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_m) - \mathbf{x}(x_1, \dots, x_m)}{\Delta x_i}, \quad (\text{A.4})$$

é chamado de derivada parcial de $\mathbf{x}$ em relação x_i , desde que o limite exista. O diferencial total $d\mathbf{x}$ é dado por:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_m} dx_m. \quad (\text{A.5})$$

Definição A.3 (Classe C^k). $\mathbf{x}(t)$ é de classe C^k se $\frac{d^k \mathbf{x}}{dt^k}$ é contínua.

Definição A.4 (Equação diferencial ordinária de ordem m). *Uma equação diferencial ordinária de ordem m é uma equação da forma:*

$$F\left(t, \mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}, \dots, \frac{d^m\mathbf{x}}{dt^m}\right) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Definição A.5 (Sistema dinâmico). *Um sistema de r equações diferenciais ordinárias de ordem m descrito por:*

$$\mathbf{F} = \begin{cases} F_1(t, \mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}, \dots, \frac{d^m\mathbf{x}}{dt^m}) = 0 \\ F_2(t, \mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}, \dots, \frac{d^m\mathbf{x}}{dt^m}) = 0 \\ \vdots \\ F_r(t, \mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}, \dots, \frac{d^m\mathbf{x}}{dt^m}) = 0, \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

é chamado de sistema dinâmico.

Definição A.6 (Sistema dinâmico autônomo). *Um sistema dinâmico é dito autônomo se pode ser descrito por r equação diferenciais da forma:*

$$\mathbf{F} = \begin{cases} F_1(\mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}, \dots, \frac{d^m\mathbf{x}}{dt^m}) = 0 \\ F_2(\mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}, \dots, \frac{d^m\mathbf{x}}{dt^m}) = 0 \\ \vdots \\ F_r(\mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}, \dots, \frac{d^m\mathbf{x}}{dt^m}) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Definição A.7 (Equação de estados). *Um sistema dinâmico descrito por n equações diferenciais de primeira ordem da forma:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \dot{x}_1 = X_1(t, \mathbf{x}) \\ \dot{x}_2 = X_2(t, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = X_n(t, \mathbf{x}), \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

com $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}^T$, é chamado de equação de estados. O vetor $\mathbf{x}$ é chamado de vetor de estados e o ponto $(t, \mathbf{x}(t))$ é chamado de estado. Utilizando notação vetorial pode-se rescrever a equação A.9 de forma mais compacta:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}). \quad (\text{A.10})$$

Definição A.8 (Equação de estados autônoma). *Se a equação de estados é da forma:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad (\text{A.11})$$

é chamada de equação de estados autônoma.

Definição A.9 (Solução da equação de estados). *O conjunto de n funções de classe C^1 ,*

$$\mathbf{x}(t) = \left\{ x_1(t), \quad x_2(t), \quad \cdots, \quad x_n(t) \right\} \quad (\text{A.12})$$

é uma solução da equação de estados se satisfaz às n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem da definição A.7.

Definição A.10 (Solução da equação de estados autônoma). *O conjunto de n funções de classe C^1 ,*

$$\mathbf{x}(t) = \left\{ x_1(t), \quad x_2(t), \quad \cdots, \quad x_n(t) \right\} \quad (\text{A.13})$$

é uma solução da equação de estados autônoma se satisfaz às n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem da definição A.8.

Definição A.11 (Ponto de equilíbrio). *O ponto $\mathbf{x}_0 = (t_0, \mathbf{x}(t_0)) \in \mathbf{X} \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ é chamado de ponto de equilíbrio no instante $t_0 \in \mathbb{R}_+$ da equação A.10 se:*

$$\mathbf{X}(t_0, \mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (\text{A.14})$$

Se $\mathbf{x}(t_0)$ é um ponto de equilíbrio da equação A.10 no instante t_0 , então é também ponto de equilíbrio para todos os instantes $t > t_0$.

Definição A.12 (Ponto de equilíbrio do sistema autônomo). *O ponto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \in \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$, é um ponto de equilíbrio da equação A.11 se:*

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.15})$$

Além disso, se $\mathbf{x} = \mathbf{c}$ é um ponto de equilíbrio da equação de estados autônoma A.11, então $\mathbf{x} = \left\{ c_1, c_2, \dots, c_n \right\}$ é uma solução trivial da equação de estados autônoma A.11, de acordo com a definição A.10.

A.2 Existência e unicidade

Definição A.13 (Condição de Lipschitz). *Uma família de campos vetoriais $\mathbf{X}(t, \mathbf{x}(t))$ satisfaz a condição de Lipschitz numa região $\mathcal{R}$ do espaço $(t, \mathbf{x}(t))$ se, e somente se, para uma dada constante de Lipschitz L ,*

$$|\mathbf{X}(t, \mathbf{x}(t)) - \mathbf{X}(t, \mathbf{y}(t))| \leq L |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \quad (\text{A.16})$$

Lema A.1 (Condição de Lipschitz). *Se $\mathbf{X}(t, \mathbf{x}(t))$ é C^1 num domínio $\mathbf{D}$ compacto e convexo [70, 71], então a condição de Lipschitz é satisfeita em $\mathbf{D}$.*

Prova Ver pág 174 de [88], capítulo 8 de [85], capítulo 3 de [89]. □

Teorema A.1 (Unicidade). *Se os campos vetoriais $\mathbf{X}(t, \mathbf{x}(t))$ satisfazem a condição de Lipschitz num domínio $\mathcal{R}$, então existe no máximo uma solução $\mathbf{x}(t)$ da equação A.10 que satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(a) = \mathbf{c} \in \mathcal{R}$.*

Prova Ver pág. 174 de [88], capítulo 8 de [85] ou pág. 16 de [86]. □

Teorema A.2 (Existência¹). *Se $\mathbf{X}(t, \mathbf{x}(t))$ é contínua para $|\mathbf{x} - \mathbf{c}| \leq K$, $|t - a| \leq T$, e se $\mathbf{X}(t, \mathbf{x}(t)) \leq M$, então a equação A.10 tem ao menos uma solução $\mathbf{x}(t)$, definida para $|t - a| \leq \min(T, K/M)$, que satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(a) = \mathbf{c}$.*

Prova. Ver pág. 192 de [88] ou pág 14 de [86]. □

Teoremas relacionados a continuidade e diferenciabilidade das soluções podem ser encontrados em: [66] pág 37, [86] pág 16, [85] pág 169 e [88] pág 174.

A.3 Estabilidade de pontos de equilíbrio

Definição A.14 (Estabilidade no sentido de Lyapunov). *Seja $\mathbf{x}_o$ um ponto de equilíbrio da equação de estados autônoma A.11. Então $\mathbf{x}_o$ é dito estável, ou estável no sentido de Lyapunov, se: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para qualquer outra solução $\mathbf{y}(t)$ (da equação A.11) satisfazendo $|\mathbf{x}_o - \mathbf{y}(t)| < \delta$, tem-se $|\mathbf{x}_o - \mathbf{y}(t)| < \varepsilon$ para $t > t_0$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$.*

Definição A.15 (Estabilidade assintótica). *Seja $\mathbf{x}_o$ um ponto de equilíbrio da equação de estados autônoma A.11. Então, $\mathbf{x}_o$ é dito assintoticamente estável se é estável no sentido de Lyapunov e se existe uma constante $b > 0$ tal que se $|\mathbf{x}_o - \mathbf{y}(t_0)| < b$ implica $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_o - \mathbf{y}(t)| = 0$.*

Definição A.16 (Linearização). *Sejam o sistema dinâmico autônomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ de classe C^1 com relação a $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}^T$, e $\mathbf{x}_0$ um ponto de equilíbrio. Então, o sistema dinâmico:*

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad (\text{A.17})$$

com

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathbf{X}, \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}_0} & \cdots & \left. \frac{\partial X_1}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}_0} \\ \left. \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}_0} & \cdots & \left. \frac{\partial X_2}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial X_n}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial X_n}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}_0} & \cdots & \left. \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}_0} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

¹Teorema de Peano.

e

$$\mathbf{y} = \left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_{\mathbf{x}_0}, \quad (\text{A.19})$$

é um modelo linearizado, ou uma linearização, de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ em torno de $\mathbf{x}_0$. A matriz $\mathbf{J}(\mathbf{X}, \mathbf{x}_0)$ é chamada de matriz Jacobiana associada ao sistema dinâmico e ao ponto $\mathbf{x}_0$.

É fácil verificar, utilizando a equação A.5, que a equação A.17 é o primeiro termo não nulo da expansão pela série de Taylor [90] de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ em torno de $\mathbf{x}_0$.

Definição A.17 (Ponto de equilíbrio hiperbólico). *Seja a equação de estados $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ uma linearização da equação estados autônoma da definição A.8 e $\mathbf{x}_0$ um ponto de equilíbrio. Se todos os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ forem não nulos, então $\mathbf{x}_0$ é chamado de ponto de equilíbrio hiperbólico.*

Teorema A.3 (Estabilidade linearizada). *Seja a equação de estados $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ uma linearização da equação estados autônoma da definição A.8 e $\mathbf{x}_0$ um ponto de equilíbrio hiperbólico. Se todos os autovalores de $\mathbf{A}$ tiverem parte real negativa, então $\mathbf{x}_0$ é dito localmente assintoticamente estável, ou assintoticamente estável. Caso contrário $\mathbf{x}_0$ é instável.*

Prova. A prova desse teorema pode ser encontrada em várias referências, podendo-se citar [37, 66, 68, 78–81]. □

Apêndice B

Formulários

Fórmulas B.1 (Identidades envolvendo senos e cossenos).¹

$$\operatorname{sen}(A) \cos(B) = \frac{1}{2} \{ \operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B) \} \quad (\text{B.1})$$

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen}(A) \cos(B) \pm \operatorname{sen}(B) \cos(A) \quad (\text{B.2})$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(A)}{1 + \cos(A)} \quad (\text{B.3})$$

Fórmulas B.2 (Série de Taylor).²

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{B.4})$$

Fórmulas B.3 (Propriedades da transformada de Laplace).³

$$\mathcal{L}[Af(t)] = AF(s) \quad (\text{B.5})$$

$$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s) \quad (\text{B.6})$$

$$\mathcal{L}_{\pm}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0\pm) \quad (\text{B.7})$$

¹Ver [90], B.1 pp.29, B.2 pp.26, B.3 pp.28.

²Ver [90], B.4 pp.175.

³Ver [37], pp.26, Tabela 1.2.