ESTELA MARA DE OLIVEIRA

**MODELOS DE OTIMIZAÇÃO PARA O ERRO DE
RASTREAMENTO EM CARTEIRAS DE INVESTIMENTO**

SÃO PAULO

2014

ESTELA MARA DE OLIVEIRA

**MODELOS DE OTIMIZAÇÃO PARA O ERRO DE
RASTREAMENTO EM CARTEIRAS DE INVESTIMENTO**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia.

SÃO PAULO

2014

ESTELA MARA DE OLIVEIRA

**MODELOS DE OTIMIZAÇÃO PARA O ERRO DE
RASTREAMENTO EM CARTEIRAS DE INVESTIMENTO**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia de Sistemas

Orientador: Prof. Dr. Oswaldo Luiz do
Valle Costa.

SÃO PAULO

2014

Dedico esta dissertação de Mestrado em Engenharia de Sistemas à minha mãe Pedra Tobias, ao meu pai Jose Augusto, e ao meu avô Augusto Luis (em memória).

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, por esta conquista maravilhosa, por ter colocado pessoas tão competentes e amigas para me acompanharem durante a realização do meu mestrado. Em seguida e de forma especial agradeço ao meu orientador Professor Oswaldo Luiz do Valle Costa, que além de me receber muito bem na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, me ensinou a explorar o melhor de mim e a nunca desistir. À amiga e professora Sonia Regina Leite Garcia do IME/USP pelas discussões matemáticas. Aos meus amigos engenheiros da Poli Elétrica, que ajudaram no meu crescimento acadêmico e também pessoal, além das orientações nas construções dos gráficos. Ao professor Alexandre M. Baptista do Department of Finance da George Washington University, (Washington, DC 20052, USA), pelas orientações com relação ao seu modelo que foi analisado nesta pesquisa. À POLI/Elétrica da Universidade de São Paulo. À FUSP (Fundação de Apoio à Universidade de São Paulo) pelo financiamento para participar dos Congressos *CNMAC/2014* e *CBA/2014*, nos quais tive dois trabalhos publicados (como segunda autora no artigo do CBA). À minha mãe Pedra Tobias que me deu todo apoio e coragem em todos os momentos da realização desta pesquisa. Ao meu pai Jose e às minhas irmãs Cristina, Magda e Sara pela ajuda. E a todos os amigos que me incentivaram.

RESUMO

Neste trabalho apresentam-se modelos de erro de rastreamento que são estratégias utilizadas pelos administradores de carteiras de investimento que visam montar portfólios para seguir algum índice de referência (*benchmark*). Denomina-se nesses casos de erro de rastreamento a diferença entre o retorno da carteira que se deseja montar e o retorno da carteira de referência. Propõe-se um modelo de minimização da variância do erro de rastreamento para um excesso de retorno esperado fixado para carteiras de investimento com ativos que tenham alta liquidez, além de apresentar os modelos de média variância de Markowitz ([16]) e de erro de rastreamento de Roll ([1], [19]). O trabalho é concluído com a análise gráfica dos modelos, onde observa-se que o modelo com restrição de liquidez nos ativos apresenta bons resultados.

Palavras-chave: Otimização, risco, retorno, erro de rastreamento.

ABSTRACT

This work shows the tracking error models that are strategies used by portfolios investment managers in order to build (construct) portfolios to follow (track) some benchmark. It is denominated in those cases the tracking error to the difference between the return in the portfolio wanted and the benchmark return. It is proposed a minimization model of the tracking error variance for some excess of the expected return fixed to investment portfolios with assets that have high liquidity, besides to show the Markowitz mean variance models [17] and the Roll tracking error models [1, 19]. The work ends with a graphical analysis of the models, where it is observed that the model with liquidity constraints in assets shows good results.

Keywords: optimization, risk, return and tracking error.

Lista de Figuras

2.1	<i>Fronteira eficiente do modelo média variância e linha de mercado do modelo de Sharpe</i>	18
5.1	<i>Fronteira eficiente</i>	48
5.2	<i>Fronteira eficiente</i>	48
5.3	<i>Fronteira eficiente</i>	49
5.4	<i>Fronteira eficiente</i>	49
5.5	<i>Norma do erro entre o retorno mensal do IBOVESPA e das carteiras TEV_{rl}, média-variância, $TEValfa$ e TEV</i>	50
5.6	<i>Retorno mensal do IBOVESPA, e das carteiras</i>	51
5.7	<i>Norma do erro entre o retorno mensal do IBOVESPA e das carteiras MAD, MADD, MinMax e DMinMax</i>	52
5.8	<i>Retorno mensal do IBOVESPA, e das carteiras MAD, MADD, MinMax e DMinMax</i>	53
5.9	<i>Rentabilidade mensal acumulada dos modelos e do IBOVESPA</i>	54
5.10	<i>Erro entre o retorno mensal do IBOVESPA e das carteiras de todos os modelos</i>	55
5.11	<i>Norma do erro de rastreamento</i>	55

Lista de Tabelas

5.1	Ativos e retorno esperado (r)	43
5.2	Pesos dos modelos que consideram a matriz de covariância	44
5.3	Pesos Modelos que não consideram a matriz de covariância	45
5.4	Erros quadráticos dos modelos que utilizam matriz de covariância	45
5.5	Erros quadráticos dos modelos que não utilizam matriz de covariância . . .	46

Lista de Abreviaturas e Siglas

BOVESPA Bolsa de Valores de São Paulo

CAPM Modelo de Precificação de Ativos de Capital (*Capital Asset Pricing Model*)

DMinMax variação do modelo MinMax (*downside MinMax model*)

Erro DMinMax erro calculado a partir do modelo DMinMax

Erro EV erro calculado a partir do modelo EV

Erro MAD erro calculado a partir do modelo MAD

Erro MADD erro calculado a partir do modelo MADD

Erro MinMax erro calculado a partir do modelo MinMax

Erro TEV erro calculado a partir do modelo TEV

Erro TEV_{rl} erro calculado a partir do modelo TEV_{rl}

Erro TEValfa erro calculado a partir do modelo TEValfa

EV média-variância (*mean/variance*)

IBOVESPA Índice da Bolsa de Valores de São Paulo

MAD desvios absolutos da média (*mean absolute deviations*)

MADD variação do modelo MAD (*mean absolute downside deviation*)

MinMax maior desvio absoluto entre a carteira e o índice de referência (*maximum deviation between portfolio and benchmark*)

PDMinMax peso dos ativos calculados a partir do modelo DMinMax

PEV peso dos ativos calculados a partir do modelo EV

PMAD peso dos ativos calculados a partir do modelo MAD

PMADD peso dos ativos calculados a partir do modelo MADD

PMinMax peso dos ativos calculados a partir do modelo MinMax

PTEV peso dos ativos calculados a partir do modelo TEV

$PTEV_{rl}$ peso dos ativos calculados a partir do modelo TEV_{rl}

$PTEValfa$ peso dos ativos calculados a partir do modelo $TEValfa$

RB Retorno da carteira de referência

TEV variância do erro de rastreamento (*tracking error variance*)

TEV_{rl} variância do erro de rastreamento com restrição de liquidez (*tracking error variance with liquidity restrictions*)

$TEValfa$ variância do erro de rastreamento com a constante alfa (*tracking error variance with constant alpha*)

wDMinMax carteira calculada a partir do modelo DMinMax

wEV carteira calculada a partir do modelo EV

wMAD carteira calculada a partir do modelo MAD

wMADD carteira calculada a partir do modelo MADD

wMinMax carteira calculada a partir do modelo MinMax

wTEV carteira calculada a partir do modelo TEV

$wTEV_{rl}$ carteira calculada a partir do modelo TEV_{rl}

wTEValfa carteira calculada a partir do modelo TEValfa

Lista de símbolos

Símbolos	Descrição
w_a	carteira de mínima variância
σ_a^2	variância da carteira w_a
μ_a	retorno esperado da carteira w_a
w_g	carteira de mínima variância global
σ_g^2	variância da carteira w_g
μ_g	retorno esperado da carteira w_g

Sumário

Dedicatória	1
1 Introdução	12
1.1 Motivação	13
1.2 Objetivos	14
1.3 Organização da Dissertação	14
2 Revisão Bibliográfica	16
2.1 Revisão Bibliográfica	16
3 Modelos de Otimização	20
3.1 Modelos que consideram a matriz de covariância dos retornos dos ativos	22
3.1.1 Modelo de Markowitz	22
3.1.2 Modelo de Roll	24
3.1.3 Modelo de Gordon e Batista	27
3.2 Modelos que não consideram a matriz de covariância dos retornos dos ativos .	28
3.2.1 Modelo MAD	29
3.2.2 Modelo Min-Max	31
3.2.3 Modelo MADD	32

3.2.4 Modelo DMin-Max	32
4 Modelo de minimização do erro de rastreamento com restrição de liquidez	34
4.1 Carteira de Mínimo TEV com Restrições de Liquidez	35
5 Simulações	42
5.1 Variáveis das simulações	43
5.2 Alocação dos ativos	44
5.3 Análise dos resultados dos modelos que consideram a matriz de covariância . .	48
5.4 Análise dos resultados dos modelos que não consideram a matriz de covariância	52
6 Conclusões	56
Referências Bibliográficas	58
A Multiplicadores de Lagrange	61

Capítulo 1

Introdução

A utilização de modelos matemáticos no planejamento e gestão de carteiras de investimento tem recebido cada vez mais destaque na área financeira. Esse fato vem acontecendo devido à necessidade de se analisar o desempenho de fundos de ativos financeiros de risco em um mercado com grandes incertezas, isto é, de difícil controle.

A globalização e o desenvolvimento tecnológico que disponibilizam um grande número de informações diárias, que devem ser processadas rapidamente para auxiliar os gestores de fundos financeiros na tomada de suas decisões, tornam cada vez mais necessário o uso de conceitos estatísticos e de otimização no planejamento e na gestão financeira.

Uma carteira de investimento é um conjunto de ativos, onde cada ativo representa um valor monetário e pode gerar algum retorno para a pessoa que o possui. Por exemplo, podem ser considerados como ativos: terrenos, carros, imóveis, eletrodomésticos, ou, no caso de ativos financeiros, moedas estrangeiras, ações, títulos públicos entre outros. O administrador da carteira pode escolher qual o tipo e a quantidade de ativos que irá compor a sua carteira, essa escolha pode ser feita a partir de diversas análises possíveis. Neste trabalho, um ponto de interesse é a Teoria Moderna de Investimento [8], introduzida por Harry Markowitz em 1952 [16]. Antes dessa teoria não havia resultados matemáticos teóricos aceitos de que a diversificação dos ativos diminui o risco de investimento.

O trabalho de Markowitz estendeu-se por várias direções, incluindo os casos de otimização robusta, custo de transação e rastreamento de carteiras (veja, por exemplo, [1, 2, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 19, 20, 21]), sendo o rastreamento de carteiras a base desta dissertação. No caso de rastreamento de carteiras o problema de decisão consiste em montar uma

carteira que rastreie uma carteira de referência (*benchmark*), geralmente representada por um índice amplamente diversificado de ativos. Denomina-se como erro de rastreamento a diferença entre o retorno da carteira que se deseja montar e o retorno da carteira de referência. O problema de minimização da variância do erro de rastreamento (*tracking error variance*, TEV) pode ser colocado como sendo o de encontrar uma carteira que minimiza a variância do erro de rastreamento fixando-se uma expectativa de ganho determinado pelo excesso de retorno esperado (ou seja, a diferença entre o valor esperado do retorno da carteira e o valor esperado do retorno da carteira de referência). Em [1, 19] problemas desse tipo foram considerados assumindo que a carteira que se deseja montar poderia ser formada com os mesmos ativos que compõem a carteira de referência. Nesse caso é claro que se o excesso de retorno esperado é zero, a solução do modelo seria apenas replicar a carteira de referência, fazendo com isso que o erro de rastreamento seja zero.

Neste trabalho, com o objetivo de apresentar um resultado melhor em relação aos já existentes na literatura no que se refere ao erro de rastreamento mostra-se uma solução do modelo da carteira que minimiza a variância do erro de rastreamento (TEV) para um excesso de retorno esperado fixado, considerando para isso apenas os ativos de maior liquidez que compõem a carteira de referência ver ([5]).

1.1 Motivação

Na área de administração financeira encontra-se fortemente a ideia de que quanto maior o risco do investimento maior será a rentabilidade. Para analisar esta ideia é necessário definir risco, retorno e rentabilidade, além de apresentar uma forma de medi-los. Há algumas maneiras de medi-los, por exemplo, por projeção de cenários econômico, ou por análise de séries históricas de preços. Com relação às definições, o retorno de um determinado ativo é uma variável aleatória, o risco é definido no modelo como a variância do retorno e a rentabilidade é o valor esperado.

Este trabalho tem por objetivo apresentar modelos em que a partir de um valor de rentabilidade fixo, busca-se minimizar o risco, ou seja, recai-se em modelos de otimização de carteiras de investimento, assunto que vem sendo bem explorado pelos administradores financeiros, especialmente por causa das incertezas do mercado.

1.2 Objetivos

Este trabalho busca fazer uma contribuição aos avanços na área de otimização de carteiras de investimento através da proposta de um modelo para o erro de rastreamento de carteiras com restrições de liquidez nos ativos. A solução desse modelo foi obtida por uma fórmula analítica da carteira que minimiza a variância do erro de rastreamento para um excesso de retorno esperado fixado, considerando para isso apenas ativos de maior liquidez que compõem a carteira de referência.

Outros modelos de erro de rastreamento já existentes na literatura também são apresentados neste trabalho, e é feita uma análise do desempenho dos resultados e uma comparação entre os modelos.

São realizadas simulações e análises destes modelos, baseadas em ativos do IBOVESPA. O modelo de erro de rastreamento com restrição de liquidez nos ativos apresentou bons resultados quando comparados com os já existentes.

1.3 Organização da Dissertação

O trabalho está organizado de forma que apresenta no capítulo 1 uma introdução do assunto, seguida no capítulo 2 por uma revisão bibliográfica, e no capítulo 3 pela apresentação dos modelos de média-variância e de erro de rastreamento já existentes na literatura. O resultado principal deste trabalho encontra-se no capítulo 4, com a apresentação e estudo do modelo para o erro de rastreamento de carteiras com restrições de liquidez nos ativos. No capítulo 5 apresentam-se exemplos numéricos baseado nas ações que compõem o IBOVESPA. Foram considerados quinze ativos da IBOVESPA sendo dez com alta liquidez, cinco com baixa liquidez e todos de setores diferentes, utiliza-se o IBOVESPA com n ativos como a carteira de referência. Os 15 ativos são: Petrobras (Petroléo, Gás e Biocombustíveis); Vale do Rio Doce (Mineração); Bradesco (Práticas de operações bancárias em geral); Goll (Transporte aéreo e construção);

Embraer (Material aeronáutico); Usiminas (Siderurgia); PDG Realt (Setor imobiliário - Construção); EVEN3A (Construção e incorporação); MRFG3 (Produção e distribuição de alimentos à base de carne bovina, suína, avícola e outros produtos alimentícios); NATU3 (Comércio atacadista de comércio e produtos de perfumaria); ALLL3 (Prestar serviços de transporte de cargas através dos modais ferroviários e rodoviários); BRML3 (setor financeiros e imóveis); CCRO (prestadora de serviços públicos via concessão, nas áreas de rodoviária, metroviária e inspeção veicular aeronáutica); SUZB5 (indústria e comércio de papel e celulose) e ULTRAPAR (distribuição de combustíveis químicos e armazenagem para grãos líquidos)). O trabalho é finalizado com alguns comentários apresentados no capítulo 6.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Revisão Bibliográfica

O assunto abordado neste trabalho é o de modelos de otimização de carteiras de investimento. Dentre esses, os modelos de média-variância e de minimização da variância do erro de rastreamento se destacam. O primeiro, por ter sido o precursor no avanço da área financeira nos últimos sessenta e dois anos ([17]). Já o segundo, devido à busca, na atualidade, pelos administradores de carteiras de investimento, de um portfólio que rastreie um determinado índice de referência (ver [1, 19, 20]).

O modelo de média variância apresentado por H. Markowitz (ver [17]), na década de 1950, e publicado em livros nos anos de 1959 e 1987 (ver [3]), dá ao autor o Prêmio Nobel da Economia em 1990.

As variáveis utilizadas nesse modelo são o risco e o retorno de investimentos financeiros. Esse importante modelo proposto por H. Markowitz baseia-se em dois pontos que ainda não tinham sido analisados por outros autores: o primeiro ponto é o de diversificar os ativos que irão compor a carteira de investimento que será otimizada, ou seja, não investirem todo o capital num mesmo ativo, pois num mercado financeiro com incertezas, não há garantias de que este ativo será o melhor para se investir no período analisado pelo administrador da carteira de investimento (ver [17]). O segundo ponto consiste na análise de uma curva risco versus retorno, chamada fronteira eficiente, para carteiras de investimento, obtida através de uma equação da hipérbole risco versus retorno.

Existem vários estudos na literatura que foram realizados a partir do modelo de Markowitz, veja por exemplo, [1, 17, 19, 20, 22].

Um exemplo de aplicação do modelo de média-variância seria: um administrador de carteiras de investimento deseja montar um fundo composto por 90% de ações, 10% de renda fixa, e que seja menos arriscado do que o IBOVESPA. Nesse caso o administrador está considerando a carteira com um ativo livre de risco, ou seja, esse ativo possui um retorno com baixo risco (ver [3]).

Como já foi mencionado esse modelo de média-variância tem entre as suas ramificações o estudo da minimização da variância do erro de rastreamento que baseia-se na construção de uma carteira de investimento que irá rastrear um dado índice de referência (*benchmark*) geralmente formado por ativos diversificados.

Um dos grandes pesquisadores desse assunto foi Richard Roll (ver [19]), que propôs um modelo que considera a diferença de rentabilidade entre a carteira que irá rastrear o índice de referência e esse índice, diferente do modelo de média-variância tradicional que baseia-se apenas nos pesos da carteira de investimento de modo a minimizar a variância do retorno sujeito a uma restrição na rentabilidade esperada. Com esse modelo obtém-se a fronteira eficiente risco versus retorno para a variância do erro de rastreamento mínimo (*TEV* mínimo).

Suponha agora que um grupo de investidores adote como estratégia o modelo de média-variância, isto é, seus investimentos pertencem à fronteira eficiente. Diz-se nesse caso que o mercado está em equilíbrio. Nesta situação de equilíbrio Sharpe apresenta um modelo de precificação de ativos (ver [14, 22]) que considera uma carteira de investimento w , de retorno P , retorno esperado r e variância σ^2 , composta por ativos de risco e um ativo livre de risco, uma carteira de referência w_B , de retorno P_B , retorno esperado r_B e variância σ_B^2 . Considere agora uma situação em que um capital D será totalmente investido na carteira w , sendo a proporção x de D investido nos ativos de risco e o restante do capital D , $1 - x$, nos ativos livres de risco. Com x e $1 - x$ pode-se escrever o retorno esperado da carteira μ a partir uma combinação linear dos retornos do ativo livre de risco (r_f) e do retorno da carteira de referência (r_B), da seguinte forma (ver [3]):

$$\mu = r_f + \frac{(r_B - r_f)}{\sigma_B} \sigma, \quad (2.1)$$

onde

r_f = retorno do ativo livre de risco,

A fronteira eficiente é a reta dada pela equação (2.1) também conhecida como linha de mercado.

Figura 2.1: *Fronteira eficiente do modelo média variância e linha de mercado do modelo de Sharpe*

A carteira comum na fronteira eficiente do modelo de Sharpe e do modelo de média-variância é denominada carteira tangente que, em um mercado em equilíbrio, coincide com a carteira de mercado (ver 2.1).

Utilizando o modelo de Sharpe encontra-se na literatura um modelo de Gordon e Batista para minimizar a variância do erro de rastreamento que considera a diferença entre o retorno esperado da carteira que segue o índice de referência e o retorno esperado calculado segundo o modelo de Sharpe. Este modelo é descrito por uma combinação entre as carteiras global, local e do *benchmark* (ver [1]). O fato do modelo de Gordon e Batista poder considerar todos os ativos da carteira de referência em seus cálculos consiste em uma diferença em relação ao modelo de Roll que não a considera explicitamente em seu modelo (ver [19]). Com o modelo de Gordon obtém-se uma fronteira eficiente denominada alfa-TEV.

Os modelos de otimização de carteiras de investimento mencionados até aqui utilizam a matriz de covariância dos retornos dos ativos, o que não ocorre com os modelos MAD,

MADD, MinMax e DMinMax, que analisam o mínimo do valor absoluto da diferença entre o retorno da carteira de referência e o retorno da carteira de rastreamento. Esses quatro modelos são apresentados na sua forma linear, o que facilita a implementação via programação linear (ver [1, 12, 17, 19, 20]).

Capítulo 3

Modelos de Otimização

Neste capítulo apresentam-se os modelos de média-variância e de erro de rastreamento que utilizam a matriz de covariância dos retornos dos ativos, bem como os modelos que não a utilizam.

Na apresentação dos modelos de otimização, considera-se: uma carteira de taxa de retorno P , composta por n ativos de taxa de retornos $R_1, \dots, R_n$ respectivamente; retornos esperados $r_1, \dots, r_n$ respectivamente, matriz de covariância $V > 0$, portanto tem determinante diferente de 0, e é inversível. A inversa de V é utilizada nos modelos que serão analisados. Para os cálculos utiliza-se a taxa de retorno esperado ($r_i = E(R_i)$) dos ativos.

Para definir a taxa de retorno financeiro (R_i) de um ativo i , considera-se o valor $X_i(1)$ do ativo i no instante $t = 1$ e o valor $X_i(0)$ deste ativo no instante $t = 0$. A taxa de retorno desse ativo i , que é uma variável aleatória, é definido por:

$$R_i = \frac{X_i(1) - X_i(0)}{X_i(0)}$$

A média do ativo financeiro R_i (no período considerado) é uma estimativa do retorno esperado.

O retorno P de uma carteira é dado por:

$$P = \sum_{i=1}^n w_i R_i, \tag{3.1}$$

onde:

w_i = proporção do capital investido no ativo i ,

de forma que

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

Cada w_i pode ser positivo ou negativo; quando for negativo, estará indicando venda a descoberto. Esta representa a situação onde, no instante inicial, toma-se emprestado de um agente financeiro um ativo cujo valor é $X_i(0)$, e vende-se esse ativo para possível investimento em outros ativos. No instante seguinte, compra-se esse mesmo ativo pelo valor de mercado $X_i(1)$, devolvendo-o ao agente financeiro que fez o empréstimo inicial. No caso da solução analítica do modelo de média-variância pode-se obter $w_i < 0$, ou seja, são permitidas vendas a descoberto, porém em alguns modelos de erro de rastreamento isso não ocorre, pois será colocada a restrição $w_i \geq 0$.

Para efeito de cálculos utiliza-se a seguinte notação vetorial:

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} ; R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} ; e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} ; r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = E(R) = \begin{pmatrix} E(R_1) \\ \vdots \\ E(R_n) \end{pmatrix}$$

$V = cov(R) = E((R - r)(R - r)') =$ matriz de covariância dos retornos.

$(R - r)' =$ matriz transposta.

Como

$$P = \sum_{i=1}^n w_i R_i = w' R, \tag{3.2}$$

tem-se que a sua média é dada por:

$$\mu = E(P) = E(w'R) = w'E(R) = w'r$$

E a variância de P é dada por:

$$\sigma^2 = E((P - \mu)^2) = w'E((R - r)(R - r)')w = w'Vw.$$

3.1 Modelos que consideram a matriz de covariância dos retornos dos ativos

3.1.1 Modelo de Markowitz

O primeiro modelo a ser apresentado aqui é o de média-variância, que tem como objetivo minimizar a variância para um dado valor de rentabilidade desejada. Este modelo desenvolveu-se a partir da hipótese de que os investidores fariam a análise de suas carteiras de investimento utilizando somente o retorno e o risco que é definido pela variância das taxas de retorno no período considerado. Dessa forma, dentre as carteiras com o mesmo risco os investidores deveriam optar pela carteira que tiver maior retorno, reciprocamente, se tivessem carteiras com o mesmo retorno esperado deveriam escolher a que possui menor risco.

A partir dessas duas hipóteses Markowitz desenvolveu a Teoria Moderna de Carteiras, na qual, entre outros resultados, definiu a fronteira eficiente para as carteiras de investimento. A formulação matemática desse modelo é:

$$\begin{aligned}
& \min w'Vw & (3.3) \\
& \text{sujeito a} & w'r = \mu, \\
& & w'e = 1, \\
& & w \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

A restrição $w'e = w_1 + \dots + w_n = 1$ indica que todo o capital foi investido nos ativos. Na apresentação da solução do modelo de Markowitz é necessário definir as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned}
a &= r'V^{-1}r \\
b &= e'V^{-1}r \\
c &= e'V^{-1}e \\
d &= ca - b^2
\end{aligned}$$

Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange (vide Apêndice A) na equação (3.3) (ver [3]), obtém-se a seguinte solução para o modelo de média-variância em função das variáveis a , b , c e d :

$$w = h\mu + g, \quad (3.4)$$

onde:

$$\begin{aligned}
h &= \frac{c}{d}V^{-1}r - \frac{b}{d}V^{-1}e, \\
g &= \frac{a}{d}V^{-1}e - \frac{b}{d}V^{-1}r.
\end{aligned}$$

Uma outra forma de apresentar a solução do modelo (3.3) pode ser obtida a partir da carteira de mínima variância w_a de retorno esperado μ_a e variância σ_a^2 e da carteira de mínima variância global w_g de retorno μ_g , com variância σ_g^2 . Essas definições são apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned}
w_a &= \frac{1}{b}V^{-1}r & w_g &= \frac{1}{c}V^{-1}e \\
\sigma_a^2 &= \frac{a}{b^2} & \sigma_g^2 &= \frac{1}{c} \\
\mu_a &= \frac{a}{b} & \mu_g &= \frac{b}{c}
\end{aligned}$$

A partir dessas carteiras e seus retornos a solução da equação (3.3) pode ser escrita da seguinte maneira ([1]):

$$w = \left(1 - \frac{\mu - \mu_g}{\mu_a - \mu_g}\right)w_g + \left(\frac{\mu - \mu_g}{\mu_a - \mu_g}\right)w_a. \quad (3.5)$$

Deve-se notar que (3.4) é igual (3.5).

Com o valor mínimo da variância σ^2 da carteira de retorno P obtido a partir do sistema (3.3) tem-se a equação da parábola que descreve a região de mínima variância (fronteira eficiente) para $\mu > \frac{c}{a}$, que é dada por ([3]):

$$\sigma^2 = \frac{a}{b}\left(\mu - \frac{c}{a}\right)^2 + \frac{1}{a}. \quad (3.6)$$

3.1.2 Modelo de Roll

Como já foi citado, o modelo de Markowitz é de suma importância na área econômica, sendo uma de suas extensões o estudo sobre rastreamento de carteiras, que teve destaque com Roll ([19]), através de seu modelo sobre minimização da variância do erro de rastreamento. Antes de apresentar esse modelo faz-se necessário definir alguns conceitos. Para isso considere, uma carteira de referência (*benchmark*) w_B , com taxa de retorno P_B , taxa de retorno esperado μ_B , e variância σ_B^2 , que será rastreada pela carteira de retorno P , com uma expectativa de ganho representada pelo excesso de retorno esperado μ_e . Para a análise de uma relação entre as carteiras de retorno P e P_B define-se o erro de rastreamento como:

$$P_e = P - P_B = w'R - w_B'R = (w - w_B)'R$$

A partir dessa definição obtêm-se o ganho μ_e e a variância do erro de rastreamento σ_e^2 , onde:

$$\mu_e = \mu - \mu_B = (w - w_B)'r, \quad (3.7)$$

$$\sigma_e^2 = E((P_e - \mu_e)^2) = (w - w_B)'V(w - w_B). \quad (3.8)$$

O objetivo desse modelo é encontrar uma carteira de mínima variância do erro de rastreamento com um retorno esperado fixado (μ_e).

Formulação matemática do modelo:

$$\begin{aligned} \min(w - w_B)'V(w - w_B) \\ \text{sujeito a} \quad (w - w_B)'r = \mu_e, \\ (w - w_B)'e = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

Observa-se que a dimensão de w é n , que é a mesma da carteira de referência, ou seja, a carteira de investimento que irá rastrear o índice pode ter os mesmos ativos do *benchmark*. Nesse caso, o ganho $\mu_e = 0$ levará a carteira ótima, que seria $w = w_B$. A solução analítica desse problema, também obtida através dos multiplicadores de Lagrange (vide Apêndice A)([3]) é dada em função das carteiras w_a e w_g por:

$$(w - w_B) = \frac{\mu_e}{\mu_a - \mu_g}(w_a - w_g). \quad (3.10)$$

A equação que gera a fronteira eficiente TEV é obtida a partir do risco mínimo do modelo de variância do erro de rastreamento, e será dada por ([3]):

$$\sigma_P^2 = \sigma_{P_B}^2 + \left(\frac{\mu_e}{\mu_a - \mu_g}\right)^2 (\sigma_a^2 - \sigma_g^2) + 2\left(\frac{\mu_e}{\mu_a - \mu_g}\right) \sigma_g^2 \left(\frac{\mu_B}{\mu_g} - 1\right). \quad (3.11)$$

Considere uma carteira de retorno P^* pertencendo à fronteira eficiente de média-variância (EV) com mesmo retorno esperado que P , sendo que a carteira de retorno P pertence à fronteira eficiente TEV, e a variância da carteira de retorno P^* é $\hat{\sigma}_{P^*}^2$. Considere também uma carteira de referência eficiente de retorno P_B^* com mesmo retorno esperado do P_B e que tenha variância $\hat{\sigma}_{P_B^*}^2$.

Fazendo as substituições destes dados na equação (3.11), obtém-se :

$$\sigma_P^2 = \sigma_{P_B}^2 + \left(\frac{\mu_e}{\mu_a - \mu_g}\right)^2 (\sigma_a^2 - \sigma_g^2) + 2\left(\frac{\mu_e}{\mu_a - \mu_g}\right) \sigma_g^2 \left(\frac{\mu_B}{\mu_g} - 1\right). \quad (3.12)$$

$$\hat{\sigma}_{P^*}^2 = \sigma_{P_B^*}^2 + \left(\frac{\mu_e}{\mu_a - \mu_g}\right)^2 (\sigma_a^2 - \sigma_g^2) + 2\left(\frac{\mu_e}{\mu_a - \mu_g}\right) \sigma_g^2 \left(\frac{\mu_B}{\mu_g} - 1\right). \quad (3.13)$$

Subtraindo (3.12) de (3.13), obtém-se:

$$\sigma_P^2 - \hat{\sigma}_{P^*}^2 = \sigma_{P_B}^2 - \hat{\sigma}_{P_B^*}^2. \quad (3.14)$$

Da equação (3.14) concluímos que, se o *benchmark* for eficiente, então $\sigma_{P_B}^2 = \hat{\sigma}_{P_B^*}^2$, e, consequentemente $\sigma_P^2 = \hat{\sigma}_{P^*}^2$, ou seja, a carteira de retorno P será eficiente, uma vez que toma-se P^* na fronteira eficiente de média-variância.

Conclui-se que se a carteira de retorno P for eficiente então a curva risco retorno, de Roll coincide com a de Markowitz. Caso contrário, será dominada pela curva risco retorno de Markowitz, isto é, a curva de Roll estará abaixo da fronteira eficiente de Markowitz.

3.1.3 Modelo de Gordon e Batista

Com o objetivo de obter resultados mais satisfatórios da minimização do TEV em relação aos apresentados por Roll ([19]), Gordon e Batista ([1]) mostram um modelo de minimização do TEV que determina uma fronteira eficiente chamada de alfaTEV, uma vez que este modelo depende de um valor alfa fixado que é a constante do modelo de Sharpe ([22]).

A formulação matemática do $\tilde{\alpha}$ do modelo de Precificação de Ativos de Capital (CAPM) de Sharpe (ver [22]), mencionada acima, é

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= (\mu - r_f) - \beta(\mu_B - r_f), \text{ onde} \\ \beta &= \frac{(w - w_B)'V(w - w_B)}{\sigma_B^2}, \\ r_f &= \text{retorno do ativo livre de risco.}\end{aligned}$$

Formulação matemática do modelo de minimização da variância do erro de rastreamento de Gordon e Batista ([1]).

$$\begin{aligned}\min(w_\alpha - w_B)'V(w_\alpha - w_B) & \tag{3.15} \\ \text{sujeito a} \quad (w_\alpha - w_B)'(r - Vw_B(\frac{\mu_B - r_f}{\sigma_B^2})) &= \alpha, \\ (w_\alpha - w_B)'e &= 0,\end{aligned}$$

onde:

$$\alpha = \frac{\mu - r_f}{\frac{-ck_1}{k_2}} \mathbf{r}'w_g + \left(\frac{b}{k_2}\right)(\mathbf{r}'w_a) - \left((-c\frac{k_1}{k_2}) + \frac{b}{k_2}\mathbf{r}'w_B\right).$$

Na definição do α e para apresentar a solução deste modelo faz-se necessário definir as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{b - \frac{(\mu_B - r_f)}{\sigma_B^2}}{c}, \\ k_2 &= a + \frac{r_f^2 - \mu_B^2}{\sigma_B^2} - \frac{\left[b - \left(\frac{\mu_B - r_f}{\sigma_B^2}\right)\right]^2}{c}, \\ k_3 &= \frac{d}{c} + \frac{\left(\frac{b}{c} - \mu_B\right) * (\mu_B - r_f)}{\sigma_B^2}.\end{aligned}$$

k_1 e k_3 podem ser positivos, negativos ou nulos, porém, k_2 é sempre positivo.

Também serão usadas:

$$\gamma_{0,\alpha} = \frac{\alpha ck_1}{k_2},$$

$$\gamma_{1,\alpha} = \frac{\alpha b}{k_2}.$$

A solução analítica desse modelo é:

$$(w_\alpha - w_B) = \gamma_{0,\alpha} w_g + \gamma_{1,\alpha} w_a + (1 - \gamma_{0,\alpha} - \gamma_{1,\alpha}) w_B.$$

A equação que gera a fronteira eficiente alfaTEV, a partir do modelo de Gordon e Batista ([1]) é dada por:

$$\sigma_{\alpha TEV}^2 = \frac{\left\{ r - \left[\mu_B + \frac{k_3}{k_2} (k_1 - r_f) \right] \right\}^2}{\frac{k_3^2}{k_2}} + \sigma_B^2 - \frac{(k_1 - r_f)^2}{k_2} \quad (3.16)$$

3.2 Modelos que não consideram a matriz de covariância dos retornos dos ativos

Um outro grupo de modelos sobre erro de rastreamento são os propostos por Rudolf ([20]), sendo eles: MAD, MADD, MinMax e DMinMax. Esses modelos utilizam o desvio absoluto como medida de risco e não o desvio padrão, isto é, a matriz de covariância não faz parte dos cálculos. Segundo Konno e Yamazaki ([12]), utilizar essa medida de risco facilita a aplicação dos modelos quanto à atualização dos dados de entrada, pois computacionalmente programas lineares são mais simples.

A forma linear desses modelos foi apresentada por Rudolf ([20]). Para linearizar os modelos que utilizam o desvio absoluto como medida de risco, considera-se um limitante superior $f \geq 0$ para o módulo da diferença entre P_B e Mw , e aplica-se a definição de

módulo e o fato de tratar-se de minimização para obter as equações lineares. A nova função objetivo a ser minimizada é o limitante superior f e as desigualdades obtidas a partir da função módulo passam a fazer parte do conjunto das restrições.

A seguir faz-se a apresentação de cada modelo e da sua forma linear. Para isso considere uma matriz P_B , $N \times 1$ com retornos observados do *benchmark* $P_B(n)$ nos instantes $n = 1, \dots, N$, e M a matriz $N \times n$ com os retornos observados da carteira w , cujas notações matriciais são:

$$M = \begin{pmatrix} M_1(1) & \cdots & M_n(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_1(N) & \cdots & M_n(N) \end{pmatrix} \quad e \quad P_B = \begin{pmatrix} P_B(1) \\ \vdots \\ P_B(N) \end{pmatrix}.$$

Observe que o vetor P_B e a matriz M são observações passadas em cada instante de tempo t do índice P_B e dos retornos M_i , onde $t = 1, \dots, N$.

3.2.1 Modelo MAD

O modelo MAD consiste em minimizar $e'(|P_B - Mw|)$ sujeito a algumas restrições, conforme apresentado abaixo:

$$\begin{aligned} \min e'(|P_B - Mw|) &= \sum_{t=1}^T (|P_B(t) - M(t)w|) \\ \text{sujeito a} \quad &w'e = 1, \\ &w \geq 0, \\ &w \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{3.17}$$

onde:

$$M(t)w = M_1(t)w_1 + \dots + M_n(t)w_n,$$

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

No modelo MAD, o peso w é calculado através da minimização da média dos desvios absolutos entre a carteira de investimento e o *benchmark*. Na sequência, apresentamos o modelo MAD usando programação linear. Para isso, será conveniente usar as notações abaixo. Para $x \in \mathbb{R}$, define-se

$$(x)^+ = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

e

$$(x)^- = \begin{cases} -x, & \text{se } x \leq 0; \\ 0, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Note que

$$|P_B(t) - M(t)w| = (P_B(t) - M(t)w)^+ + (P_B(t) - M(t)w)^-.$$

Definindo f como $|(P_B(t) - M(t)w)|$ pode-se reescrever (3.17) como:

$$\begin{aligned} \min \sum_{t=1}^T (f^+(t) + f^-(t)) & \tag{3.18} \\ \text{sujeito a} \quad & P_B(t) - M(t)w = f^+(t) - f^-(t), t = 1, \dots, T. \\ & f^+(t) \geq 0, f^-(t) \geq 0, t = 1, \dots, T, \\ & w'e = 1, \\ & w \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

3.2.2 Modelo Min-Max

O modelo Min-Max consiste em minimizar $\max_t (|P_B(t) - M(t)w|)$ sujeito à certas restrições como detalhado a seguir:

$$\min_w \max_t (|P_B(t) - M(t)w|) \quad (3.19)$$

sujeito a

$$w'e = 1,$$

$$w \geq 0,$$

$$w \in \mathbb{R}^n.$$

No modelo MinMax, o peso w é calculado através da minimização do máximo desvio entre a carteira de investimento e o benchmark. Este modelo representa o “pior caso possível”, pois minimiza os maiores desvios.

Na sequência, apresentamos o modelo MinMax usando programação linear. Observe que (3.19) é equivalente a:

$$\begin{aligned} \min f & \quad (3.20) \\ \text{sujeito a} \quad & f \geq P_B(t) - M(t)w, t = 1, \dots, T. \\ & -f \leq P_B(t) - M(t)w, t = 1, \dots, T, \\ & w'e = 1, \\ & w \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Obtém-se duas variações dos modelos MAD e MinMax quando se penaliza apenas o caso em que o retorno está abaixo da carteira de referência: os modelos MADD e DMinMax respectivamente, que serão apresentados a seguir.

3.2.3 Modelo MADD

O modelo MADD consiste em minimizar $e'((P_B - Mw)^+)$ sob certas restrições, como apresentamos abaixo:

$$\min e'((P_B - Mw)^+) \quad (3.21)$$

sujeito a

$$w'e = 1,$$

$$w \geq 0,$$

$$w \in \mathbb{R}^n,$$

em que

$$(P_B - Mw)^+ = \begin{pmatrix} (P_B(1) - M(1)w)^+ \\ \vdots \\ (P_B(T) - M(T)w)^+ \end{pmatrix}.$$

Em seguida, apresentamos o modelo utilizando a programação linear. Observe que (3.21) é equivalente a:

$$\min \sum_{t=1}^T f^+(t) \quad (3.22)$$

$$\text{sujeito a } P_B(t) - M(t)w \leq f^+(t), t = 1, \dots, T,$$

$$w'e = 1,$$

$$f^+(t) \geq 0, t = 1, \dots, T,$$

$$w \in \mathbb{R}^n.$$

3.2.4 Modelo DMin-Max

O modelo DMinMax consiste em minimizar $\max_t (P_B(t) - M(t)w)^+$ sujeito a certas restrições, como apresentado abaixo:

$$\min_w \max_t (P_B(t) - M(t)w)^+ \quad (3.23)$$

sujeito a

$$w'e = 1,$$

$$w \geq 0,$$

$$w \in \mathbb{R}^n.$$

Em seguida, apresentamos o modelo utilizando a programação linear. Observe que (3.23) é equivalente a:

$$\min f \quad (3.24)$$

$$\text{sujeito a} \quad f \geq P_B(t) - M(t)w, t = 1, \dots, T,$$

$$w'e = 1,$$

$$w \in \mathbb{R}^n.$$

Capítulo 4

Modelo de minimização do erro de rastreamento com restrição de liquidez

Conforme a notação apresentada no capítulo 3, considere uma carteira com retorno P composta por n ativos com retornos $R_1, \dots, R_n$ respectivamente; retorno esperado $r_1, \dots, r_n$ respectivamente; e matriz covariância $\Sigma > 0$.

Introduzindo as restrições de liquidez, a carteira que se deseja montar utiliza apenas os $p \leq n$ ativos da carteira de referência, ou seja, $\omega_i = 0$ para $i = p+1, \dots, n$. Essa restrição pode ser vista como sendo uma restrição de liquidez, onde se considera apenas os p ativos mais líquidos da carteira de referência. Deve-se notar que o caso $p = n$ corresponde ao problema considerado no modelo de Roll [19]. Denotaremos por $\bar{\omega}$ o vetor com os p pesos dessa carteira, e $\bar{e}$ o vetor formado por 1's, mas agora p dimensional. Denomina-se $\bar{R}$ o vetor aleatório p -dimensional com os retornos dos ativos que se deseja utilizar na carteira, seu valor esperado por $\bar{r}$, sua matriz de covariância por $\bar{\Sigma} > 0$ ($p \times p$), e a matriz de covariância entre $\bar{R}$ e R por $\tilde{\Sigma}$ ($p \times n$), isto é,

$$\bar{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_p \end{pmatrix}, \bar{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_p \end{pmatrix}, \bar{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_p \end{pmatrix},$$
$$\bar{\Sigma} = \text{cov}(\bar{R}), \tilde{\Sigma} = \text{cov}(\bar{R}, R) = E((\bar{R} - \bar{r})(R - r)').$$

Utilizando a notação acima, de (3.7) e (3.8) segue que

$$\mu_e = \bar{\omega}'\bar{r} - \mu_B, \quad (4.1)$$

$$\sigma_e^2 = \bar{\omega}'\bar{\Sigma}\bar{\omega} - 2\bar{\omega}'\tilde{\Sigma}\omega_B + \sigma_B^2 \quad (4.2)$$

onde σ_B^2 representa a variância da carteira de referência.

O problema da minimização da variância do erro de rastreamento (TEV) para um excesso de retorno esperado fixado μ_e com restrições de liquidez é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}\bar{\omega}'\bar{\Sigma}\bar{\omega} - \bar{\omega}'\tilde{\Sigma}\omega_B \\ \text{sujeito a} \quad & \bar{\omega}'\bar{r} - \mu_B = \mu_e \\ & \bar{\omega}'\bar{e} = 1 \\ & \bar{\omega} \in \mathbb{R}^p. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Na próxima seção será apresentada a solução analítica desse problema.

4.1 Carteira de Mínimo TEV com Restrições de Liquidez

Como veremos a seguir, a solução do problema (4.3) será obtida em termos dos seguintes dados de entrada: $\bar{r}$, $\bar{\Sigma}$, μ_B e

$$\begin{aligned} \Psi_B &= cov(\bar{R}, P_B) = E((\bar{R} - \bar{r})(P_B - \mu_B)) \\ &= E((\bar{R} - \bar{r})(R - r)')\omega_B = \tilde{\Sigma}\omega_B. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Antes de apresentarmos a solução do problema (4.3), necessitamos das seguintes definições:

$$\alpha = \bar{e}'\bar{\Sigma}^{-1}\bar{e}, \quad (4.5)$$

$$\gamma = \bar{r}'\bar{\Sigma}^{-1}\bar{r}, \quad (4.6)$$

$$\psi = \bar{e}'\bar{\Sigma}^{-1}\bar{r}, \quad (4.7)$$

$$\delta = \alpha\gamma - \psi^2. \quad (4.8)$$

Temos o seguinte resultado, demonstrado em [3]:

Proposição 4.1. *Para as constantes α , γ , ψ e δ , definidas em (4.5), (4.6), (4.7) e (4.8) tem-se que: $\delta > 0$ e*

$$\begin{aligned} \alpha &\in \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\bar{\Sigma})}, \frac{p}{\lambda_{\min}(\bar{\Sigma})} \right], \\ \gamma &\in \left[\frac{\|\bar{r}\|^2}{\lambda_{\max}(\bar{\Sigma})}, \frac{\|\bar{r}\|^2}{\lambda_{\min}(\bar{\Sigma})} \right], \\ |\psi| &< \sqrt{p} \frac{\|\bar{r}\|}{\lambda_{\min}(\bar{\Sigma})}, \end{aligned}$$

onde $\lambda_{\min}$ e $\lambda_{\max}$ representam os autovalores mínimo e máximo da matriz $\bar{\Sigma}$.

De maneira similar a ([1, 18, 19]) a representação da carteira ótima, solução do problema (4.3), será obtida a partir da combinação de 3 carteiras ω_g , ω_a , $\hat{\omega}_B$, definidas a seguir:

$$\omega_g = \frac{1}{\alpha} \bar{\Sigma}^{-1} \bar{e}, \quad (4.9)$$

$$\omega_a = \frac{1}{\psi} \bar{\Sigma}^{-1} \bar{r}, \quad (4.10)$$

$$\hat{\omega}_B = \bar{\Sigma}^{-1} \Psi_B + \left[-\frac{\psi}{\delta} \bar{\Sigma}^{-1} \bar{r} + \frac{\gamma}{\delta} \bar{\Sigma}^{-1} \bar{e} \right] T_2, \quad (4.11)$$

onde

$$T_2 = 1 - \bar{e}'\bar{\Sigma}^{-1}\Psi_B. \quad (4.12)$$

Deve-se notar que ω_g corresponde à carteira com mínima variância global entre as carteiras obtidas a partir de $\bar{R}$, e que ω_a corresponde à carteira na fronteira eficiente

(entre as carteiras obtidas a partir de $\bar{R}$) com retorno esperado

$$\mu_a = \frac{\gamma}{\psi} \quad (\text{assumindo } \psi > 0). \quad (4.13)$$

Note que

$$\mu_g = \omega'_g \bar{r} = \frac{\psi}{\alpha}, \quad (4.14)$$

de modo que

$$\mu_a - \mu_g = \frac{\delta}{\psi\alpha} > 0. \quad (4.15)$$

Tem-se também que

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{\alpha} \quad (4.16)$$

e

$$\sigma_a^2 = \frac{\gamma}{\psi^2} \quad (4.17)$$

(veja, por exemplo, [18]).

Observação 1: Com relação a $\hat{\omega}_B$ deve-se notar que para o caso em que $p = n$ (sem restrição de liquidez), tem-se que $\bar{\Sigma} = \Sigma$, $\tilde{\Sigma} = \Sigma$, de modo que $\bar{\Sigma}^{-1}\Psi_B = \Sigma^{-1}\Sigma\omega_B = \omega_B$, e $\bar{e}'\bar{\Sigma}^{-1}\Psi_B\bar{e}'\omega_B = 1$, ou seja, $T_2 = 0$. Dessa maneira temos que $\hat{\omega}_B = \omega_B$ para o caso em que $p = n$.

A seguir apresentamos a solução do problema (4.3) e a equação da fronteira eficiente.

Teorema 4.1. A solução do problema (4.3) é dada por

$$\omega^* = \hat{\omega}_B + \frac{T_1(\mu)}{\mu_a - \mu_g}(\omega_a - \omega_g) \quad (4.18)$$

onde $\mu = \mu_e + \mu_B$,

$$T_1(\mu) = \mu - \bar{r}'\bar{\Sigma}^{-1}\Psi_B. \quad (4.19)$$

Mais ainda, a curva relacionando risco e retorno na fronteira de mínimo TEV é dada por

$$\begin{aligned}\sigma^2 = & \hat{\sigma}_B^2 + \left(\frac{T_1(\mu)}{\mu_a - \mu_g} \right)^2 (\sigma_a^2 - \sigma_g^2) \\ & + 2 \left(\frac{T_1(\mu)\sigma_g^2}{\mu_a - \mu_g} \right) \left(\frac{\hat{\mu}_B}{\mu_g} - 1 \right)\end{aligned}\quad (4.20)$$

onde

$$\hat{\sigma}_B^2 = \hat{\omega}'_B \bar{\Sigma} \hat{\omega}_B, \quad (4.21)$$

$$\hat{\mu}_B = \hat{\omega}'_B \bar{r} = \bar{r}' \bar{\Sigma}^{-1} \Psi_B. \quad (4.22)$$

Demonstração: Considere o lagrangiano do problema (4.3), onde lembramos de (4.4) que $\Psi_B = \bar{\Sigma} \omega_B$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\bar{\omega}, \lambda) = & \bar{\omega}' \bar{\Sigma} \bar{\omega} - \bar{\omega}' \Psi_B + \\ & \lambda_1 (\mu_e - \bar{\omega}' \bar{r} + \mu_B) + \lambda_2 (1 - \bar{\omega}' \bar{e}).\end{aligned}\quad (4.23)$$

Derivando e igualando a zero, e chamando de ω^* o vetor $\bar{\omega}$ que satisfaz essas condições, obtêm-se as condições necessárias de 1^a ordem:.

$$\begin{cases} \bar{\Sigma} \omega^* - \Psi_B - \lambda_1 \bar{r} - \lambda_2 \bar{e} = 0 \\ \bar{r}' \omega^* = \mu_e + \mu_B \\ \bar{e}' \omega^* = 1 \end{cases} \quad (4.24)$$

Segue que

$$\omega^* = \bar{\Sigma}^{-1} (\Psi_B + \lambda_1 \bar{r} + \lambda_2 \bar{e}), \quad (4.25)$$

e portanto, de (4.24) e (4.25),

$$\begin{cases} \bar{r}' (\bar{\Sigma}^{-1} (\Psi_B + \lambda_1 \bar{r} + \lambda_2 \bar{e})) = \mu_e + \mu_B \\ \bar{e}' (\bar{\Sigma}^{-1} (\Psi_B + \lambda_1 \bar{r} + \lambda_2 \bar{e})) = 1 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} \bar{r}'\bar{\Sigma}^{-1}\bar{r} & \bar{r}'\bar{\Sigma}^{-1}\bar{e} \\ \bar{e}'\bar{\Sigma}^{-1}\bar{r} & \bar{e}'\bar{\Sigma}^{-1}\bar{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_e + \mu_B - \bar{r}'\bar{\Sigma}^{-1}\Psi_B \\ 1 - \bar{e}'\bar{\Sigma}^{-1}\Psi_B \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} T_1(\mu) \\ T_2 \end{pmatrix}.$$

Utilizando os parâmetros definidos em (4.5), (4.6), (4.7) e (4.8), decorre que

$$\begin{pmatrix} \gamma & \psi \\ \psi & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(\mu) \\ T_2 \end{pmatrix}$$

e, de acordo com a Proposição 4.1,

$$\begin{pmatrix} \gamma & \psi \\ \psi & \alpha \end{pmatrix} > 0.$$

Lembrando que para uma matriz 2×2 simétrica com determinante diferente de zero vale que

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_1c_1 - b_1^2} \begin{pmatrix} c_1 & -b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix},$$

tem-se que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} \alpha & -\psi \\ \psi & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1(\mu) \\ T_2 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{\delta}(\alpha T_1(\mu) - \psi T_2) \\ \lambda_2 = \frac{1}{\delta}(-\psi T_1(\mu) + \gamma T_2) \end{cases}. \quad (4.26)$$

Substituindo (4.26) em (4.25), tem-se de (4.9), (4.10), (4.11) que

$$\begin{aligned}
\omega^* &= \bar{\Sigma}^{-1}(\Psi_B + \lambda_1 \bar{r} + \lambda_2 \bar{e}) \\
&= \bar{\Sigma}^{-1}\Psi_B + \frac{1}{\delta} \left(\alpha T_1(\mu) - \psi T_2 \right) \bar{\Sigma}^{-1} \bar{r} \\
&\quad + \frac{1}{\delta} \left(-\psi T_1(\mu) + \gamma T_2 \right) \bar{\Sigma}^{-1} \bar{e} \\
&= \bar{\Sigma}^{-1}\Psi_B + \left(-\frac{\psi}{\delta} \bar{\Sigma}^{-1} \bar{r} + \frac{\gamma}{\delta} \bar{\Sigma}^{-1} \bar{e} \right) T_2 \\
&\quad + \left(\frac{\alpha}{\delta} \bar{\Sigma}^{-1} \bar{r} - \frac{\psi}{\delta} \bar{\Sigma}^{-1} \bar{e} \right) T_1(\mu) \\
&= \hat{\omega}_B + \frac{T_1(\mu)}{\frac{\gamma}{\psi} - \frac{\psi}{\alpha}} \left(\frac{1}{\psi} \Sigma^{-1} r - \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} e \right) \\
&= \hat{\omega}_B + \frac{T_1(\mu)}{\mu_a - \mu_g} (\omega_a - \omega_g).
\end{aligned}$$

Aplicando as condições de 2ª ordem, obtém-se que a segunda derivada do lagrangeano (4.23) em relação a $\bar{\omega}$, denotada por $L(\bar{\omega})$, é $L(\bar{\omega}) = \bar{\Sigma} > 0$ e, portanto, a solução encontrada realmente corresponde a um ponto de mínimo local. Como a função objetivo é convexa, e o conjunto de soluções factíveis é um conjunto convexo, o ponto de mínimo obtido é global, provando a otimalidade de (4.18). Deve-se notar também que, de (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) e (4.11), segue que

$$\begin{aligned}
\bar{r}' \hat{\omega}_B &= \bar{r}' \bar{\Sigma}^{-1} \Psi_B + \left[-\frac{\psi}{\delta} \bar{r}' \bar{\Sigma}^{-1} \bar{r} + \frac{\gamma}{\delta} \bar{r}' \bar{\Sigma}^{-1} \bar{e} \right] T_2 \\
&= \bar{r}' \bar{\Sigma}^{-1} \Psi_B + \left[-\frac{\psi}{\delta} \gamma + \frac{\gamma}{\delta} \psi \right] T_2 \\
&= \bar{r}' \bar{\Sigma}^{-1} \Psi_B,
\end{aligned}$$

mostrando a equação (4.18).

A variância da carteira obtida de (4.18) é dada por $\sigma^2 = (\omega^*)' \bar{\Sigma} (\omega^*)$ e portanto de (4.18) segue que

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \hat{\omega}_B' \bar{\Sigma} \hat{\omega}_B + 2 \frac{T_1(\mu)}{\mu_a - \mu_g} (\omega_a - \omega_g)' \bar{\Sigma} \hat{\omega}_B \\
&\quad + \left(\frac{T_1(\mu)}{\mu_a - \mu_g} \right)^2 (\omega_a - \omega_g)' \bar{\Sigma} (\omega_a - \omega_g).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Conforme mostrado na equação (4.6) em [3])

$$(\omega_a - \omega_g)' \bar{\Sigma} (\omega_a - \omega_g) = (\sigma_a^2 - \sigma_g^2). \quad (4.28)$$

Tem-se também de (4.9), (4.10), (4.11) e (4.21), e lembrando que $\bar{e}' \hat{\omega}_B = 1$, que

$$(\omega_a - \omega_g)' \bar{\Sigma} \hat{\omega}_B = \left(\frac{1}{\psi} \bar{r} - \frac{1}{\alpha} \bar{e} \right)' \hat{\omega}_B = \left(\frac{1}{\psi} \hat{\mu}_B - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\psi} \hat{\mu}_B - 1 \right) = \sigma_g^2 \left(\frac{\hat{\mu}_B}{\mu_g} - 1 \right) \quad (4.29)$$

já que $\sigma_g^2 = \frac{1}{\alpha}$ e $\mu_g = \frac{\psi}{\alpha}$. Combinando (4.22), (4.27), (4.28) e (4.29) obtém-se (4.20), completando a prova do resultado. ■

Observação 2: Para o caso em que $p = n$, o resultado do Teorema 4.1 coincide com os resultados obtidos em [19]. Realmente, neste caso temos que, como visto na Observação 1, $\bar{\Sigma}^{-1} \Psi_B = \omega_B$ e $\hat{\omega}_B = \omega_B$, e portanto $T_1(\mu) = \mu - \mu_B$. Desse modo temos que (4.18) e (4.20) coincidem com os resultados Roll ([19]). Em particular, para $\mu = \mu_B$ segue que $\omega^* = \omega_B$ e $\sigma^2 = \sigma_B^2$. Note que, para o caso $p < n$, esse resultado não é em geral válido.

Capítulo 5

Simulações

Neste capítulo apresentam-se exemplos numéricos para aplicações dos modelos discutidos no capítulo 3 e do modelo proposto no capítulo 4. Serão traçadas as curvas de risco versus retorno dos modelos que utilizam a matriz de covariância, bem como será realizado um *back test* dos mesmos. Para isto toma-se uma série histórica de dados no período de 2008 a 2014 de ações negociadas na BOVESPA. Estes dados são referentes aos quinze ativos sendo dez com alta liquidez e cinco com baixa liquidez e todos de setores diferentes que compõem o IBOVESPA, sendo este utilizado como a carteira de referência. Os 15 ativos são: Petrobras (Petroléo, Gás e Biocombustíveis); Vale do Rio Doce (Mineração); Bradesco (Práticas de operações bancárias em geral); Goll (Transporte aéreo e construção); Embraer (Material aeronáutico); Usiminas (Siderurgia); PDG Realt (Setor imobiliário - Construção); EVEN3A (Construção e incorporação); MRFG3 (Produção e distribuição de alimentos à base de carne bovina, suína, avícola e outros produtos alimentícios); NATU3 (Comércio atacadista de comércio e produtos de perfumaria); ALLL3 (Prestar serviços de transporte de cargas através dos modais ferroviários e rodoviários); BRML3 (setor financeiros e imóveis); CCRO (prestadora de serviços públicos via concessão, nas áreas de rodoviária, metroviária e inspeção veicular aeronáutica); SUZB5 (indústria e comércio de papel e celulose) e ULTRAPAR (distribuição de combustíveis químicos e armazenagem para grânéis líquidos). Com esses dados de entrada (série histórica), foram calculadas as taxas de retorno no período de 2013 a 2014 para obter-se o retorno esperado (r) e a matriz de covariância dos ativos considerados (V), o retorno esperado do índice (μ_B) e a variância do IBOVESPA (σ_B^2),

através de algoritmos via programa Matlab. A partir destes obtêm-se as equações risco versus retorno dos modelos de *média-variância*, de *variância do erro de rastreamento* e as fronteiras eficientes. Na sequência elabora-se um outro algoritmo para a análise do desempenho dos modelos.

Para a análise do desempenho dos modelos realiza-se um *back test* onde cada um deles é comparado com o modelo de *média-variância*. O período testado corresponde aos meses de janeiro a dezembro de 2013, e considerou-se o retorno e covariâncias estimadas a partir dos 12 meses anteriores ao mês considerado para o *back test*. Por exemplo, para o mês de janeiro de 2013 considerou-se os 12 retornos mensais anteriores observados no banco de dados para o cálculo das médias e covariâncias. Com isso calculou-se as carteiras correspondentes a cada modelo e para o de *média-variância* (dado pela equação $w = h\mu + g$, onde $h = \frac{c}{d}V^{-1}r - \frac{b}{d}V^{-1}e$, $g = \frac{a}{d}V^{-1}e - \frac{b}{d}V^{-1}r$), que seriam utilizadas no início do mês de janeiro de 2013. Ao final do mês de janeiro de 2013 calcula-se a diferença entre as rentabilidades da carteira de cada modelo e a rentabilidade mensal de janeiro de 2013 do índice IBOVESPA e, da mesma maneira, a diferença entre a rentabilidade da carteira de *média-variância* e a rentabilidade mensal de janeiro de 2013 do índice IBOVESPA.

5.1 Variáveis das simulações

Com os dados da série histórica dos ativos da BOVESPA no período de 2008 a 2013, foram calculados os retornos esperados (r) e a matriz de covariância (V) dos retornos.

Tabela 5.1: Ativos e retorno esperado (r)

Ativos	r
PetroTA	-0.0135
ValeTA	-0.0106
EMBR3A	0.0058
BRAD	-0.0082
PDGR3A	-0.0338
USIM5A	-0.0214
GolTA	-0.0036

A seguir apresenta-se a matriz de covariância dos retornos dos ativos.

$$V = \begin{pmatrix} 0.0105 & 0.0043 & 0.0008 & 0.0032 & 0.0035 & 0.0068 & 0.0050 \\ 0.0043 & 0.0057 & 0.0016 & 0.0020 & 0.0032 & 0.0038 & 0.0045 \\ 0.0008 & 0.0016 & 0.0104 & 0.0022 & 0.0014 & 0.0019 & 0.0001 \\ 0.0032 & 0.0020 & 0.0022 & 0.0050 & 0.0025 & 0.0029 & 0.0040 \\ 0.0035 & 0.0032 & 0.0014 & 0.0025 & 0.0224 & 0.0071 & 0.0126 \\ 0.0068 & 0.0038 & 0.0019 & 0.0029 & 0.0071 & 0.0192 & 0.0081 \\ 0.0050 & 0.0045 & 0.0001 & 0.0040 & 0.0126 & 0.0081 & 0.0249 \end{pmatrix}$$

Para a análise do risco adota-se uma rentabilidade esperada de 2%.

5.2 Alocação dos ativos

As alocações obtidas para a carteira de investimento a partir dos modelos aplicados estão descritas nas tabelas 5.2 e 5.3. O período considerado foi de 2008 até 2013. Por exemplo, o peso do ativo PetroTA calculado via modelo EV com os dados desse período é de 3,68%.

Tabela 5.2: Pesos dos modelos que consideram a matriz de covariância

Ativos	PEV	PTEVrl	PTEValfa	PTEV
PetroTA	3,68%	15,86%	8,81%	1,59%
ValeTA	21,48%	13,12%	-26,73%	-13,73%
EMBR3A	78,02%	72,45%	98,86%	58,31%
BRAD	26,03%	14,06%	-23,09%	-16,17%
PDGR3A	-51,14%	-55,67%	-44,79%	-53,00%
USIM5A	-21,72%	-17,43%	7,14%	-21,28%
GolTA	43,64%	57,62%	79,82%	44,27%

Tabela 5.3: Pesos Modelos que não consideram a matriz de covariância

Ativo	PMAD	PMADD	PMinMax	PDMinMax
PetroTA	28,95%	19,15%	21,22%	15,84%
ValeTA	33,01%	27,22%	43,68%	31,40%
EMBR3A	17,61%	25,02%	25,26%	33,45%
BRAD	0%	0	0	0,44%
PDGR3A	8,64%	0	2,19%	2,06%
USIM5A	2,48%	13,71%	5,09%	7,69%
GoITA	9,31%	14,90%	2,56%	9,11%

Nota-se, por exemplo, que o ativo BRAD teve pesos bem diferentes com os modelos lineares quando comparados aos modelos que possuem matriz de covariância.

Já nas tabelas 5.4 e 5.5 apresentam-se os erros quadráticos, obtidos através dos cálculos dos valores absolutos dos erros de rastreamento para cada modelo, em seguida o módulo do erro foi elevado ao quadrado e por fim, extraiu-se a raiz quadrada da soma dos erros ao quadrado nos doze períodos de tempo analisados para cada modelo. O retorno do *benchmark* foi calculado no período $t + 12$, para atender aos critérios do *back test* citados no início deste capítulo.

Tabela com os erros quadráticos, para os modelos: EV, TEV_{rl} , TEValfa e TEV.

Tabela 5.4: Erros quadráticos dos modelos que utilizam matriz de covariância

Período = t	Erro EV(t)	Erro $TEV_{rl}(t)$	Erro TEValfa(t)	Erro TEV(t)
jan/13	0.0655	0.0398	0.0083	0.0462
fev/13	0.0429	0.0127	0.0413	0.0767
mar/13	0.0111	0.0173	0.0281	0.0511
abr/13	0.0990	0.0598	0.1209	0.0314
mai/13	0.1034	0.0286	0.0149	0.0478
jun/13	0.1128	0.0699	0.0533	0.1755
jul/13	0.0837	0.0343	0.0110	0.0040
ago/13	0.0191	0.0046	0.0759	0.0385
set/13	0.0558	0.0345	0.0491	0.0828
out/13	0.0639	0.0226	0.0466	0.0207
nov/13	0.0954	0.0871	0.1114	0.1803
dez/13	0.0896	0.0882	0.1355	0.0566
EQ	0.2666	0.1720	0.2480	0.2987

onde:

$$ErroEV(t) = |(w_{EV}(t) - RB(t + 12))|,$$

$$ErroTEVrl(t) = |(w_{TEVrl}(t) - RB(t + 12))|,$$

$$ErroTEValfa(t) = |(w_{TEValfa}(t) - RB(t + 12))|,$$

$$ErroTEV(t) = |(w_{TEV}(t) - RB(t + 12))|,$$

EQ = erro quadrático definido pela raiz quadrada da soma de cada módulo elevado ao quadrado. Esse cálculo do EQ foi feito para cada um dos modelos nos doze períodos.

As carteiras dos modelos são:

$w_{EV}(t)$ = carteira calculada a partir do modelo EV,

$w_{TEVrl}(t)$ = carteira calculada a partir do modelo TEV_{rl} ,

$w_{TEValfa}(t)$ = carteira calculada a partir do modelo TEValfa,

$w_{TEV}(t)$ = carteira calculada a partir do modelo TEV,

RB = retorno do *benchmark*,

t = período mensal para os cálculos dos erros de rastreamento.

Vide conclusões das tabelas 5.4 e 5.5 na figura 5.8.

Tabela com os erros quadráticos, para os modelos: MAD, MinMax, MADD e DMinMax.

Tabela 5.5: Erros quadráticos dos modelos que não utilizam matriz de covariância				
Período = t	Erro MAD(t)	Erro MinMax(t)	Erro MADD(t)	Erro DMinMax(t)
jan/13	0.0049	0.0217	0.0102	0.0171
fev/13	0.0622	0.0218	0.0438	0.0431
mar/13	0.0307	0.0541	0.0096	0.0379
abr/13	0.0387	0.0244	0.0255	0.0253
mai/13	0.0032	0.0204	0.0083	0.0187
jun/13	0.0307	0.0418	0.0741	0.0713
jul/13	0.0371	0.0255	0.0189	0.0033
ago/13	0.0093	0.0426	0.0034	0.0055
set/13	0.0197	0.0053	0.0193	0.0098
out/13	0.0139	0.0219	0.0210	0.0349
nov/13	0.0069	0.0476	0.0193	0.0165
dez/13	0.0359	0.0477	0.0463	0.0397
EQ	0.1034	0.1189	0.1096	0.1136

onde:

$$ErroMAD(t) = |(w_{MAD}(t) - RB(t + 12))|,$$

$$ErroMinMax(t) = |(w_{MinMax}(t) - RB(t + 12))|,$$

$$ErroMADD(t) = |(w_{MADD}(t) - RB(t + 12))|,$$

$$ErroDMinMax(t) = |(w_{DMinMax}(t) - RB(t + 12))|,$$

As carteiras dos modelos são:

$w_{MAD}(t)$ = carteira calculada a partir do modelo de MAD,

$w_{MinMax}(t)$ = carteira calculada a partir do modelo MinMax,

$w_{MADD}(t)$ = carteira calculada a partir do modelo MADD,

$w_{DMinMax}(t)$ = carteira calculada a partir do modelo DMinMax,

5.3 Análise dos resultados dos modelos que consideram a matriz de covariância

Nas figuras 5.1, 5.2 e 5.3 encontram-se as quatro curvas risco versus retorno implementadas com quantidade de ativos diferentes, 7, 10 e 15 ativos no período de 2008 a 2014, respectivamente. Na figura 5.4 as curvas dos modelos EV, TEV e alfaTEV foram implementadas com 15 ativos sendo 10 com alta liquidez e 5 com baixa ou média liquidez, comparou-se essas três curvas com a curva do modelo TEV_{rl} que foi gerada a partir dos 10 ativos com alta liquidez. Nota-se neste caso que a carteira de mínima variância global possui um retorno esperado negativo.

7 ativos

Figura 5.1: *Fronteira eficiente*

10 ativos com boa liquidez

Figura 5.2: *Fronteira eficiente*

15 ativos sendo 10 com boa liquidez e 5 sem boa liquidez, mas pertencente ao IBOVESPA.

Figura 5.3: *Fronteira eficiente*

15 ativos sendo 10 com boa liquidez e 5 sem boa liquidez, mas pertencente ao IBOVESPA e implementação do modelo TEV_{rl} apenas nos 10 ativos com boa liquidez.

Figura 5.4: *Fronteira eficiente*

Como era de se esperar, a fronteira eficiente para os modelos de minimização de erro de rastreamento é dominada pela fronteira eficiente do modelo de *média-variância*, uma vez que os quatro modelos consideram os mesmos ativos e, conforme mostrado em [19], se a carteira aproximada de referência $\hat{\omega}_B$ não for eficiente (que é o caso), as soluções dos problemas (3.9), (3.15) e (4.3) sempre levará a uma carteira não-eficiente, e as curvas no plano risco-retorno estarão sempre distante da fronteira eficiente por um valor constante (ou seja, a “ineficiência” se mantém constante). No entanto nota-se pela figura 5.1 que a carteira TEV_{rl} apresenta um resultado melhor que a carteira TEV , e que a curva $alfaTEV$ está acima da curva TEV_{rl} para alguns valores do risco, porém a curva TEV_{rl} mostra um resultado melhor durante o restante do período analisado, nas três primeiras figuras. E na figura 5.4 os dados de entrada na implementação do algoritmo foram alterados, isto é, toma-se os 15 ativos com alta e baixa liquidez e aplica-se no modelos EV, TEV e alfaTEV em seguida toma-se 10 ativos com alta liquidez dos 15 totais e aplica-se o modelo TEV_{rl} . Observa-se que a fronteira eficiente TEV_{rl} continua sendo dominada pela fronteira EV, porém para alguns períodos obtem-se como resultado da aplicação do modelo TEV e alfaTEV um retorno esperado maior do que o retorno esperado obtido através do modelo TEV_{rl} para um mesmo valor de risco.

As figuras 5.5 e 5.6 mostram as curvas que representam os erros de rastreamento de acordo com a aplicação de cada modelo e o retorno acumulado do IBOVESPA, respectivamente.

Figura 5.5: Norma do erro entre o retorno mensal do IBOVESPA e das carteiras TEV_{rl} , *média-variância*, $TEValfa$ e TEV

Figura 5.6: Retorno mensal do IBOVESPA, e das carteiras

Observa-se:

- que o modelo TEV de Roll ([19]) apresentou, por exemplo, um erro de rastreamento menor que no modelo de média-variância, do terceiro ao quinto período, do sétimo ao oitavo período e do nono ao décimo primeiro período. O erro obtido no modelo de Roll fica muito alto no sexto e no décimo período, enquanto o erro de rastreamento calculado através do modelo de Alexandre e Baptista ([1]) permanece menor que o obtido no de média-variância do quarto ao sétimo período.
- já o modelo TEV_{rl} teve um erro de rastreamento menor que o do modelo de *média-variância* do primeiro ao terceiro mês, e do quarto ao décimo segundo mês. Enquanto o modelo de *média-variância* teve um erro de rastreamento menor no terceiro mês. Esse resultado se reflete nos valores obtidos para os erros quadráticos que resulta menor no modelo TEV_{rl} que no modelo *média-variância*. Pode-se verificar na tabela 5.4 que nesse período o modelo TEV_{rl} , que teve um erro quadrático de 0,1720, seguiu melhor o IBOVESPA que o modelo de *média-variância*, que teve um erro quadrático de 0,2666.

Na figura 5.6 apresenta-se o gráfico do retorno mensal observado nos 12 meses de 2013 do IBOVESPA e das carteiras TEV_{rl} , *média-variância*, $TEValfa$ e TEV .

5.4 Análise dos resultados dos modelos que não consideram a matriz de covariância

Nesta seção apresenta-se uma comparação entre os modelos MAD e MADD (ver seção 3.2 do capítulo 3), uma vez que, o modelo MADD é uma variação do modelo MAD. Repete-se o processo para os modelos MinMax e DMinMax (ver figura 5.7).

Figura 5.7: Norma do erro entre o retorno mensal do IBOVESPA e das carteiras MAD, MADD, MinMax e DMinMax

Modelo MADD teve um erro de rastreamento menor que o do modelo MAD do primeiro ao quinto período, e depois, do sétimo ao nono. Enquanto o modelo MAD teve um erro de rastreamento menor nos outros meses. O modelo MinMax teve um erro de rastreamento menor do que o erro do modelo DMinMax do primeiro ao terceiro período, do quarto ao quinto período, e sétimo e nono período. Enquanto o modelo DMinMax teve um erro de rastreamento menor nos demais períodos, sendo os erros de ambos os modelos iguais no quarto período.

Figura 5.8: *Retorno mensal do IBOVESPA, e das carteiras MAD, MADD, MinMax e DMinMax*

Na figura 5.8 apresentam-se as rentabilidades acumuladas dos modelos de Rudolf e do IBOVESPA, nota-se que o IBOVESPA encontra-se abaixo das carteiras MinMax e DMinMax na maior parte do período analisado, ou seja, as carteiras MinMax e DMinMax não acompanharam de forma regular a variabilidade (volatilidade) do IBOVESPA. Já as carteiras MAD e MADD, com erro quadrático, 0.1034 e 0.1096 respectivamente, seguiram melhor o IBOVESPA ver tabela 5.5.

Figura 5.9: *Rentabilidade mensal acumulada dos modelos e do IBOVESPA*

A figura 5.9 mostra a análise das carteiras dos modelos em relação ao IBOVESPA e a figura 5.10 apresenta todos os gráficos dos erros de rastreamento dos diversos modelos apresentados neste trabalho.

Na figura 5.11 a norma utilizada foi a euclidiana, a partir dessa norma foi possível fazer uma comparação entre o oitos valores dos erros de rastreamento de cada modelo analisado neste trabalho. Dentre os modelos que utilizam matriz de covariância o TEV_{rl} teve o menor error quadrático e entre os modelos que não utilizam a matriz de covariância o modelo MAD teve menor erro quadrático.

Figura 5.10: *Erro entre o retorno mensal do IBOVESPA e das carteiras de todos os modelos*

Figura 5.11: *Norma do erro de rastreamento*

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho foram apresentados modelos de otimização de carteiras de investimento. O tema central foi o modelo de erro de rastreamento, porém o modelo de média-variância foi apresentado por ser destaque na área econômica e ter extensões como o próprio rastreamento de carteiras.

Os modelos foram analisados a partir do pressuposto de que para um retorno fixo buscou-se um risco mínimo, dois tipos de medidas de risco foram estudados, sendo eles: desvio absoluto e desvio padrão. No capítulo 3 foram analisados os modelos de Rudolf ([20]) que usam o desvio absoluto como medida de risco, e uma linearização dos modelos é apresentada, pois essa torna-os computacionalmente mais eficientes.

O resultado principal do trabalho está no capítulo 4, onde foi mostrado um modelo de erro de rastreamento para carteiras com restrições de liquidez. A solução desse foi demonstrada através da técnica dos multiplicadores de Lagrange ([5] e apêndice A).

Finalizando o trabalho no capítulo 5 os modelos foram implementados para a verificação de seus desempenhos com dados do mercado acionário da Bolsa de Valores de São Paulo, utilizando o IBOVESPA como *benchmark*. A partir da comparação entre os modelos chegou-se às seguintes conclusões:

Avaliando os oito modelos, notou-se que apesar dos modelos MAD e TEV_{rl} terem naturezas diferentes, obtiveram resultados semelhantes e acompanharam melhor o *benchmark* em relação aos modelos MinMax, DMinMax, MADD, EV, TEV e TEValfa (ver figura 5.9).

No entanto o modelo MAD permaneceu mais regular durante o período analisado, pois

teve um erro quadrático mais baixo (ver figura 5.11). Isso mostra que trabalhar com o desvio absoluto como medida de risco, apresentou resultados melhores do que usando o desvio padrão como medida (ver figura 5.10).

Entretanto dentre os modelos que consideram a matriz de covariância o erro calculado pelo modelo TEV_{rl} permanece menor do que o erro dos modelos EV, TEV e TEValfa de forma mais constante no período analisado, quando aplica-se os mesmos dados de entrada. O caso onde altera-se os dados de entrada para os quatro modelos foi apresentado na figura 5.4, onde notou-se que o modelo TEV_{rl} não teve retorno esperado maior do que os demais modelos citados para um dado risco num determinado período. Um estudo com mais detalhes do erro de rastreamento para esse caso será apresentado em trabalhos futuros bem como o estudo do modelo TEV_{rl} com multiperíodo.

Referências Bibliográficas

- [1] Alexander, Gordon J.; Baptista, Alexandre M. Active portfolio management with benchmarking: A frontier based on alpha. *The Journal of Banking and Finance*, 34: 2185–2197, 2010.
- [2] Chen, Chen; Kwon, Roy H. Robust portfolio selection for index tracking. *Computers & Operations Research*, 39(4):829 – 837, 2012.
- [3] Costa, O. L. V.; Assunção, H. G. V. *Análise de Risco e Retorno em Investimentos Financeiros*. Manole., 2005.
- [4] Costa, O. L. V.; Nabholz, R. B. A linear matrix inequalities approach to robust mean-semivariance portfolio optimization. In Kontoghiorghe, Erricos John; Rustem, Berc; Siokos, Stavros, editors, *Computational Methods in Decision-Making, Economics and Finance*, p. 87–105. Boston, Kluwer, 2002.
- [5] Costa, O. L. V.; Oliveira, E. M. Análise de média-variância para o erro de rastreamento de carteiras com restrições de liquidez. *XX Congresso Brasileiro de Automática*, 1:4123–4129, 2014.
- [6] Costa, O. L. V.; Paiva, A. C. Robust portfolio selection using linear matrix inequalities. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26:889–909, 2002.
- [7] Duarte Jr., A. M. Fast computation of efficient portfolios. *The Journal of Risk*, 4: 71–94, 1999.
- [8] Elton, E. J.; Gruber, M. J. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. Nova York, Wiley, 1995.

- [9] Fabozzi, Frank J; Huang, Dashan; Zhou, Guofu. Robust portfolios: contributions from operations research and finance. *Annals of Operations Research*, 176(1):191–220, 2010.
- [10] Hanza, F.; Janssen, J. The mean-semivariances approach to realistic portfolio optimization subject to transactions costs. *Applied Stochastics Models and Data Analysis*, 14:275–83, 1998.
- [11] Howe, M. A.; Rustem, B. A robust hedging algorithm. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21:1065–92, 1997.
- [12] Konno, Hiroshi; Yamazaki, Hiroaki. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to tokyo stock market. *Management science*, 37(5):519–531, 1991.
- [13] Ling, Aifan; Sun, Jie; Yang, Xiaoguang. Robust tracking error portfolio selection with worst-case downside risk measures. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 39: 178–207, 2014.
- [14] Lintner, J. Security prices, risk, and maximal gains from diversification. *Journal of Finance*, 20:587–616, 1965.
- [15] Luenberger, Dacid G. Investment science, 1998.
- [16] Markowitz, H. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. John Wiley, New York., 1959.
- [17] Markowitz, H. M. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7:77–91, 1952.
- [18] Merton, Robert C. An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 4:1851–1872, 1972.
- [19] Roll, R. A mean/variance analysis of tracking error. *The Journal of Portfolio Management*, 18:13–22, 1992.
- [20] Rudolf, M.; Wolter, H. J.; Zimmermann, H. A linear model for tracking error minimization. *The Journal of Banking and Finance*, 23:85–103, 1999.

- [21] Rustem, B.; Becker, R. G.; Marty, W. Robust min-max portfolio strategies for rival forecast and risk scenarios. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24:1591–1621, 1995.
- [22] Sharpe, W. The capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, 19:425–442, 1964.
- [23] Stewart, J. *Cálculo*. Thomson., 2007.

Apêndice A

Multiplicadores de Lagrange

Nos modelos de otimização, o objetivo é minimizar ou maximizar uma determinada função f , denominada função objetivo, que está sujeita a certas restrições, $g_m = c$, por exemplo. O método dos multiplicadores de Lagrange possibilita encontrar os pontos de mínimo (ou de máximo) da função objetivo sujeita a certas restrições (ver [23]). A seguir tem-se a descrição do método dos multiplicadores de Lagrange, que baseia-se em estudar a função de Lagrange (veja [23]), definida por:

$$L(y, c) = f(y) + \lambda(g(y) - c)$$

onde:

$f(y)$ = função objetivo a ser otimizada;

λ = multiplicador de Lagrange, que multiplica a função restrição;

$g(y)$ = função restrição;

c = constante da restrição.

Para a definição formal do método de Lagrange considere uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e m funções de restrição $g_1 \dots g_m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com f e g_j funções com derivadas contínuas e tais que, para qualquer ponto do domínio, existe um i para o qual $\nabla_{g_i}(x) \neq 0$. Se f restrita ao conjunto dado pelas restrições $g_i = c_{ij}$ tiver ponto de máximo ou de mínimo, isto é um ponto $Q(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$, satisfazendo $g_1(Q) = c_1 \dots g_m(Q) = c_m$, então:

$$\nabla f(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_{g_i}(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*).$$

onde,

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m)$$

são os multiplicadores de Lagrange.

Exemplo

Determine o valor máximo da função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na curva da intersecção do plano $x - y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ (ver [23]).

Resolução:

$f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ é a função objetivo restrita à curva dada por $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$, com:

$$g(x, y, z) = x - y + z - 1$$

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$$

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(Q), \frac{\partial f}{\partial y}(Q), \frac{\partial f}{\partial z}(Q) \right) = (1, 2, 3)$$

$$\nabla g(x, y, z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(Q), \frac{\partial g}{\partial y}(Q), \frac{\partial g}{\partial z}(Q) \right) = (1, -1, 1)$$

$$\nabla h(x, y, z) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(Q), \frac{\partial h}{\partial y}(Q), \frac{\partial h}{\partial z}(Q) \right) = (2x, 2y, 0)$$

$$(1, 2, 3) = \lambda_1(1, -1, 1) + \lambda_2(2x, 2y, 0)$$

$$(1, 2, 3) = (\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_1) + (2x\lambda_2, 2y\lambda_2, 0)$$

As condições de otimalidade são:

$$\lambda_1 + 2x\lambda_2 = 1 \tag{A.1}$$

$$-\lambda_1 + 2y\lambda_2 = 2 \tag{A.2}$$

$$\lambda_1 + 0 = 3 \tag{A.3}$$

$$x - y + z = 1 \tag{A.4}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{A.5}$$

Substituindo $\lambda_1 = 3$ na equação (A.1) obtém-se

$$x = \frac{-1}{\lambda_2}$$

Substituindo $\lambda_1 = 3$ na equação (A.2) tem-se:

$$y = \frac{5}{2\lambda_2}$$

Substituindo x e y , dados em função do λ_2 , na equação (A.5) encontramos $\lambda_2 = +\frac{\sqrt{29}}{2}$ e $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{29}}{2}$.

A partir do λ_1 e $\lambda_2 > 0$ calculados obtemos as coordenadas dos pontos $Q_1(x, y, z) = (-0.3714, 0.9285, 2.2999)$ e $Q_2(x, y, z) = (0.3714, -0.9285, -0.2999)$ e o valor máximo da função é obtido para $\lambda_2 > 0$, isto é, $f(Q_1)$ na curva dada será 8.3852.