IDERVAL SILVA DE SOUZA

**GEOMETRIA DO DESACOPLAMENTO E
INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS NÃO LINEARES IMPLÍCITAS**

São Paulo
2006

IDERVAL SILVA DE SOUZA

**GEOMETRIA DO DESACOPLAMENTO E
INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS NÃO LINEARES IMPLÍCITAS**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Área de Concentração:
Engenharia de Sistemas

Orientador:
Paulo Sérgio Pereira da Silva

São Paulo
2006

À

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha mãe, a memória de meu pai, a minha esposa, e
especialmente ao meu filho Hugo.

Agradecimentos

Ao professor, Paulo Sérgio Pereira da Silva, pela orientação e constante estímulo transmitido durante todo o trabalho.

Agradeço aos amigos e a todos que colaboraram direta ou indiretamente na execução deste trabalho.

Resumo

Existem métodos de integração de equações algébrico diferenciais não lineares (DAEs) considerados clássicos pela literatura. Porém, neste trabalho, através uma abordagem geométrica, apresenta-se um método de integração de DAEs. Tal método é inspirado na teoria de desacoplamento de sistemas não lineares explícitos, quando se considera que as saídas são restrições algébricas. Neste caso, a DAE pode ser identificada como dinâmica zero. O resultado principal desta abordagem é que, dada uma DAE, sob certas condições, é possível a construção de um sistema explícito, de tal maneira, que as soluções desse sistema explícito convergem para as soluções da DAE.

Palavras-chave: Integração Numérica. Equações Diferenciais. Sistemas Não-Lineares. Sistemas Implícitos. Sistemas Explícitos. Desacoplamento Entrada-Saída. Dinâmica Zero.

Abstract

Classical methods for numerical integration of differential algebraic equations (DAEs) can be found in the literature. In this work, using a differential geometric approach, a numerical method of integration of DAEs is established. This method is inspired in the decoupling theory of nonlinear explicit systems, when one considers that the outputs are algebraic constraints. The main result is the construction of an explicit system, whose solutions converge to the solutions of the DAE.

Keywords: Numerical Integration . Differential Equations. Nonlinear Systems. Implicit Systems. Explicit Systems. Input-output decoupling input-output. Zero dynamics.

Sumário

Introdução	1
1 Apresentação do algoritmo	5
1.1 Descrição do algoritmo	6
1.1.1 Derivando as saídas	7
1.1.2 Determinação de $\hat{x}(x)$	7
1.1.3 Determinação numérica de $\hat{x}(x)$	8
1.1.4 Determinação da matriz $T(x, u)$	9
1.1.5 Construção da equação que determina $\tau(x, u)$	9
1.1.6 Arquivos de simulação	9
1.2 Exemplo de aplicação	10
1.2.1 Derivando as saídas	11
1.2.2 Determinação de $\hat{x}(x)$	11
1.2.3 Determinação numérica de $\hat{x}(x)$	12
1.2.4 Determinação da matriz $T(x, u)$	13
1.2.5 Construção da equação que determina $\tau(x, u)$	13
1.2.6 Arquivos de simulação	13
1.3 Análise dos resultados	14
1.3.1 Resultados de $\hat{x}(x)$ fixo	14
1.3.2 Resultados de $\hat{x}(x)$ numérico	16
2 Teoria de desacoplamento de sistemas implícitos	18
2.1 Teoria de desacoplamento de sistemas explícitos	18
2.1.1 Dinâmica zero e sistemas implícitos	24
3 Um método de integração numérica de DAEs	25
3.1 Equações algébrico diferenciais	25
3.1.1 Index de uma DAE	26
3.2 Descrição do método	26
3.3 Calculando $\hat{x}$ numericamente	30
3.4 DAEs variantes no tempo	32
3.5 Obtenção de condições iniciais compatíveis	33
3.6 Comparando os resultados	34
3.6.1 Descrição do modelo	34

3.6.2	Calculando condições iniciais compatíveis	35
3.6.3	Análise dos resultados	35
3.6.4	Análise das restrições	36
3.6.5	Análise dos resultados	39
Conclusões		44
Apêndice		45
A.1	Arquivos fonte do exemplo de aplicação do Capítulo 1 na versão $\hat{x}(x)$ fixo	45
A.1.1	Cálculo simbólico	45
A.1.2	Arquivo de entrada	47
A.1.3	Arquivo de saída	48
A.2	Arquivos fonte do exemplo de aplicação do Capítulo 1 na versão $\hat{x}(x)$ numérico	48
A.2.1	Cálculo simbólico	48
A.2.2	Arquivo de entrada para versão $\hat{x}(x)$ numérico	50
A.2.3	Diagrama de simulação	51
Referências		53

Introdução

Modelos matemáticos geralmente envolvem relações entre taxas de variação instantâneas de diversas variáveis com relação a uma outra coleção de variáveis denominadas de variáveis independentes. Quando temos apenas uma variável independente, o modelo matemático é dado em termos de equações diferenciais ordinárias ou EDOs.

A forma explícita de apresentação de uma EDO, completamente determinada, de primeira ordem invariante no tempo, é dada a seguir

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (1)$$

onde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação definida num aberto Ω do espaço $\mathbb{R}^n$, onde $x \in \mathbb{R}^n$. Uma solução para a equação (1) é uma aplicação diferenciável $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e tal que

$$\begin{aligned} (\phi(t)) &\in \Omega, \text{ para todo } t \in I, \\ \phi(t) &= f(\phi(t)), \text{ para todo } t \in I. \end{aligned} \quad (2)$$

As EDOs têm sido utilizadas em técnicas de modelagem matemática para descrever fenômenos de engenharia, fenômenos econômicos, etc. No entanto muitos cientistas tem reconhecido que seus modelos matemáticos são, de fato, equações algébrico diferenciais. Neste trabalho estas equações serão referenciadas por DAEs, pois são assim conhecidas na literatura. Podemos descrever as DAEs como sendo equações diferenciais ordinárias com restrições algébricas, sendo a solução desses sistemas, soluções das equações diferenciais que satisfazem as restrições.

O problema de integração numérica das DAEs é um campo ativo de pesquisa [8, 9, 10]. A dificuldade de integração é, em geral, medida por um inteiro, denominado *index*, que avalia o número suficiente de derivadas da equação original para que se possa, pelo menos teoricamente, explicitar a dinâmica (vide exemplo 1). Considere a DAE dada da seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t), \\ y(t) &= h(x(t)) = 0,\end{aligned}\tag{3}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o pseudo-estado, $u(t) \in \mathbb{R}^n$ é a pseudo-entrada, e $y(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de restrições. A utilização do prefixo “pseudo” será justificada mais adiante.

Exemplo 1 Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u_1, \\ \dot{x}_3 &= x_1 + (1 + x_2)x_3u_2, \\ y &= x_1 = 0,\end{aligned}\tag{4}$$

onde $y = x_1 = 0$ é considerada a restrição do sistema. Derivando-se y uma vez, tem-se

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 = 0.\tag{5}$$

Derivando-se y uma segunda vez obtém-se

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 = u_1 = 0.\tag{6}$$

Assim a equação (4) é equivalente à dinâmica explícita

$$\dot{x}_3 = x_3u_2,\tag{7}$$

que possui *index* 3, valor obtido pelo número de derivações realizadas para explicitar a dinâmica mais um.

Mostra-se, neste trabalho, um algoritmo de integração numérica de DAEs de alto *index*, que foi testado em uma plataforma MATLAB/Simulink. O resultado

principal do trabalho é que, dada uma DAE da forma (3), então, sob certas condições, pode-se construir um sistema explícito $\tau(x, u)$, dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \tau(x, u), \quad (8)$$

de tal maneira que as soluções de $\tau(x, u)$ convergem para as soluções de (3). Note que as componentes de u não são as entradas do sistema (8), pois são determinadas completamente a partir da dinâmica de (8). De fato, o caso considerado neste trabalho é a classe de sistemas implícitos completamente determinados, isto é, que não possuem entradas externas. No caso do exemplo 1, o sistema não é completamente determinado, pois tal sistema implícito equivale à equação (7) que admite uma entrada. Voltando a equação (4), referenciada no exemplo 1, nota-se que o estado do sistema implícito é x_3 e a entrada do sistema implícito é u_2 (vide equação (7)). Por essa razão $x(t)$ é denominado de pseudo-estado e $u(t)$ de pseudo-entrada. A verdadeira entrada e o verdadeiro estado do sistema implícito são, em geral, subconjuntos de $u(t)$ e de $x(t)$, respectivamente.

Exemplo 2

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u_1, \\ \dot{x}_3 = x_1 + (1 + x_2)x_3u_2, \\ \dot{x}_4 = x_3 + u_2, \\ y_1 = x_1 = 0, \\ y_2 = x_4 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Analogamente ao exemplo 1,

$$\begin{aligned} \text{do fato de } y_1 = \dot{y}_1 = \ddot{y}_1 = 0, \text{ tem-se } x_1 = x_2 = u_1 = 0, \\ \text{do fato de } y_2 = \dot{y}_2 = 0, \text{ tem-se } x_3 = -u_2 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Portanto, tal dinâmica é equivalente a

$$\dot{x}_3 = -x_3^2,$$

que é um sistema sem entradas, portanto completamente determinado.

O método é apresentado para sistemas completamente determinados e invariantes no tempo, porém na Seção 3.4 é apresentada uma versão para sistemas variantes no tempo.

O método descrito não estuda os aspectos numéricos associados, porém a teoria desenvolvida pode ser combinada com métodos clássicos de álgebra linear computacional e com métodos de integração numérica para obter um algoritmo que possa ser aplicado em uma classe ampla de sistemas de alto index. Uma das vantagens do método é que os algoritmos podem ser implementados em programas matemáticos e de simulação, onde técnicas tradicionais de integração numérica de sistemas explícitos podem ser utilizadas. O trabalho está organizado em três capítulos, tendo antes uma breve introdução sobre o trabalho. O primeiro capítulo é uma apresentação informal do método, seguida de um exemplo de aplicação. Este capítulo visa criar um roteiro básico de aplicação do método. O segundo capítulo apresenta a teoria de desacoplamento para sistemas explícitos. Parte dessa teoria está relacionada com sistemas implícitos, e tal relação é apresentada também neste capítulo. O capítulo final destina-se à apresentação da teoria do método de integração de DAEs, bem como exemplos de aplicação e comparação de resultados com um método de integração de DAEs que é consagrado na literatura.

Capítulo 1

Apresentação do algoritmo

A principal motivação para o desenvolvimento de um método para análise de equações algébrico diferenciais está na solução de problemas nas mais diversas áreas da engenharia. O método aqui apresentado é eficiente e relativamente fácil de ser aplicado. Lembrando que o problema consiste na determinação de soluções de equações diferenciais ordinárias com restrições algébricas, e que a estratégia do método consiste em construir um sistema explícito, cujas soluções convergem para solução do sistema implícito original. Após isso, aplica-se um método tradicional de integração de ODEs explícitos tais como Runge Kutta, Adams etc.

A apresentação do algoritmo, neste capítulo, busca atender ao leitor interessado no método mas que não possui interesse na teoria que o justifica. Desta forma a apresentação tem um caráter meramente utilitário, deixando os detalhes para os capítulos 2 e 3.

Considere os sistemas implícitos na seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x(t)) + g(x(t))u(t), \\ y(t) &= h(x(t)) = 0,\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é a notação para o vetor coluna $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ e $(y_1(t), \dots, y_r(t))$ representa o conjunto de restrições, $f(x)$ e $g(x)$ representam vetores de funções C^∞ , $h(x)$ está representando as equações de restrições e $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$ representa as variáveis algébricas do sistema, isto é, aquelas que não são derivadas

nas equações. Note que $u(t)$ não é necessariamente a entrada do sistema, e nem $x(t)$ o estado do sistema. Como está sendo considerado o número de pseudo-entradas igual ao número de pseudo-saídas, obtém-se um sistema quadrado, ou seja um sistema onde $\dim(y) = \dim(u)$. Neste caso, com as hipóteses consideradas, mostra-se na Seção 3.2 que o sistema será completamente determinado, isto é, não possuirá entrada.

Agora considere o seguinte sistema explícito, com estado $x(t)$, entrada $u(t)$ e saída $y(t)$.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad (1.2a)$$

$$y(t) = h(x(t)). \quad (1.2b)$$

Note que o sistema (1.2a)-(1.2b) é obtido de (1.1) considerando as restrições $y(t)$ do sistema (1.1) como saídas do sistema, e que estas saídas podem ser não nulas.

1.1 Descrição do algoritmo

Descreve-se aqui os procedimentos básicos do algoritmo, que visa a construção do sistema explícito $\tau(x, u)$ dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \tau(x, u), \quad (1.3)$$

que é obtido a partir de derivações simbólicas das saídas dos sistema (1.2a)-(1.2b), e cujas soluções convergem para as soluções de (1.1). Nesta descrição, e no restante do trabalho, considere as seguintes notações. Para uma dada função λ então $\frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda}$ será denotado por $\lambda^{(1)}$ e suas derivadas de ordem k , $\frac{d^k \lambda}{dt^k}$, serão denotadas por $\lambda^{(k)}$. Nesta mesma linha para o conjunto de funções $x = (x_1, \dots, x_r)$, suas derivadas de ordem k , $\frac{d^k x}{dt^k}$, serão denotadas por $x^{(k)}$. Seja $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_r)$ um conjunto de inteiros e $y = (y_1, \dots, y_r)$ o conjunto de saídas, então as derivadas $(y_1^{(\rho_1)}, \dots, y_r^{(\rho_r)})$ do conjunto de saídas serão denotadas por $y^{(\rho)}$, e $(y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(\rho_1)}, \dots, y_r^{(0)}, \dots, y_r^{(\rho_r)})$ denota-se por $Y^{(\rho)}$. Além disso será utilizado $y^{(\rho-1)}$ para representar $(y_1^{(\rho_1-1)}, \dots, y_r^{(\rho_r-1)})$ e $Y^{(\rho-1)}$ como notação de $(y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(\rho_1-1)}, y_r^{(1)}, \dots, y_r^{(\rho_r-1)})$.

1.1.1 Derivando as saídas

Derivando simbolicamente o conjunto de saídas (1.2b) uma primeira vez, obtém-se

$$y_i^{(1)}(t) = \frac{\partial h_i}{\partial x} \dot{x}(t) = \frac{\partial h_i}{\partial x} (f(x(t)) + g(x(t))u(t)), \quad (1.4)$$

onde $y_i^{(1)}(t)$ representa a derivada primeira das saídas (1.2b). Suponha que

$$\frac{\partial h_i}{\partial x} g(x(t)) \equiv 0. \quad (1.5)$$

Neste caso, a derivada primeira $y_i^{(1)}(t)$ não sofre influência do conjunto de entradas $u(t)$, ou seja, tem-se $y_i^{(1)}(t)$ dependente somente de $x(t)$. Note que $\frac{\partial h_i}{\partial x}$ é um vetor linha de n posições e $g(x)$ é uma matriz $n \times m$, portanto $\frac{\partial h_i}{\partial x} g(x(t))$ é um vetor linha $1 \times m$. Caso (1.5) seja verdadeiro, deriva-se as restrições (1.2b) uma vez mais, assim

$$y_i^{(2)} = \frac{\partial h_i^{(1)}}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h_i^{(1)}}{\partial x} (f(x(t)) + g(x(t))u(t)) \quad (1.6)$$

e se

$$\frac{\partial h_i^{(1)}}{\partial x} g(x(t)) \equiv 0 \quad (1.7)$$

o processo é repetido.

Para $k = 1, \dots, \rho_i$ calcula-se

$$h_i^{(k)}(x, u) = \frac{\partial h_i^{(k-1)}}{\partial x} (f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad (1.8)$$

onde ρ_i representa o menor inteiro tal que $h_i^{(\rho_i)}(x, u)$ dependa de $u(t)$. Tal procedimento pode ser realizado para todas as saídas $(y_1, \dots, y_r)$. Cabe aqui informar que nesta implementação as derivadas podem ser obtidas com o auxílio de algum programa matemático de cálculo simbólico.

1.1.2 Determinação de $\hat{x}(x)$

Como será visto na seção 2.1 $\hat{x}(x)$ é estado do sistema implícito. será visto que $(\hat{x}, Y^{(\rho-1)})$ é um novo sistema de coordenadas. Então fixado $x \in \mathbb{R}^n$, $\hat{x}(x)$ é

escolhido de forma que a matriz

$$\begin{bmatrix} R(x) \\ \frac{\partial Y^{\langle \rho-1 \rangle}}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

onde $Y^{\langle \rho-1 \rangle} = (y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(\rho-1)}, \dots, y_r^{(1)}, \dots, y_r^{(\rho_r-1)})$ seja não singular, e onde R é dado por

$$R = \frac{\partial \hat{x}(x)}{\partial x}. \quad (1.10)$$

Vale ressaltar que este procedimento pode ser feito através de manipulações simbólicas, embora possa ser um procedimento complexo para grandes dimensões do vetor de estados.

1.1.3 Determinação numérica de $\hat{x}(x)$

A obtenção de $\hat{x}(x)$ através de uma solução numérica, pode ser baseada no mesmo conceito utilizado para solução através de manipulações simbólicas. Para isso deve-se construir uma matriz $H(x)$ dada por

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y^{\langle \rho-1 \rangle}}{\partial x} \end{pmatrix}_{s \times n}, \quad (1.11)$$

sendo $s = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_r$ e $n = \dim x$.

A esta matriz $H(x)$ é aplicada a decomposição QR [1]. Esta decomposição é na verdade, uma interpretação matricial do processo de ortogonalização de Gramm-Schmidt. Segundo ela, toda matriz de posto pleno de coluna $S = [s_{ij}]$ admite uma decomposição do tipo $S = QR$, onde Q é ortogonal e R é triangular superior, com elementos positivos na diagonal. A aplicação da técnica de decomposição QR à transposta de (1.11), gera uma matriz triangular superior R com as mesmas dimensões de H e uma matriz quadrada Q , tal que

$$Q_{n \times n} \times R_{n \times s} = H_{n \times s}^\top. \quad (1.12)$$

Chama-se a atenção do leitor para diferenciar a notação R tradicionalmente utilizada nesta fatoração com qualquer outra notação utilizada neste trabalho.

Prosseguindo, é possível reescrever Q da seguinte forma

$$Q_{n \times n} = (Q_1 \ Q_2)_{n \times n}, \quad (1.13)$$

onde Q_2 é dada pelas $n - s$ últimas colunas de Q , sendo s o posto da matriz $H(x)$. Então pode-se tomar $R = Q_2^\top$ obtendo-se uma matriz (1.9) invertível.

1.1.4 Determinação da matriz $T(x, u)$

Esta determinação é feita através de

$$T(x, u) = \begin{pmatrix} R(x) & \frac{\partial \hat{x}}{\partial u} \\ \frac{\partial Y^{\langle \rho-1 \rangle}}{\partial x} & \frac{\partial Y^{\langle \rho-1 \rangle}}{\partial u} \\ \frac{\partial y^{\langle \rho \rangle}}{\partial x} & \frac{\partial y^{\langle \rho \rangle}}{\partial u} \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

onde $y^{\langle \rho \rangle} = (y_1^{(\rho_1)}, \dots, y_r^{(\rho_r)})$ e $Y^{\langle \rho-1 \rangle} = (y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(\rho-1)}, \dots, y_r^{(1)}, \dots, y_r^{(\rho_r-1)})$.

É importante observar que $\frac{\partial \hat{x}}{\partial u} \equiv 0$ e $\frac{\partial y^{\langle \rho-1 \rangle}}{\partial u} \equiv 0$.

1.1.5 Construção da equação que determina $\tau(x, u)$

A construção do sistema explícito $\tau(x, u)$, é feita pela solução do sistema linear

$$T(x, u)\tau(x, u) = \begin{pmatrix} R\dot{x} \\ -\gamma(Y^{\langle \rho \rangle}) \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

A escolha de γ deve ser feita no sentido de se obter $Y^{\langle \rho \rangle}(t) = Y^{\langle \rho \rangle}(t_0)e^{-\gamma(t-t_0)}$ de forma que $\lim_{t \rightarrow \infty} Y^{\langle \rho \rangle} = 0$. A escolha de γ será abordada com maiores detalhes na Seção 3.2. A inversão de $T(x, u)$ para obtenção de $\tau(x, u)$ é feita numericamente, e não simbolicamente.

1.1.6 Arquivos de simulação

Diagrama de blocos do arquivo de simulação

Este diagrama necessita de uma função de simulação que é uma função composta das constantes do sistema e o resultado dos cálculos simbólicos de (1.14) e (1.15). A função de saída é composta do resultado do cálculo simbólico de $y^{(\rho)}$. As condições iniciais do sistema são impostas no bloco integrador. O ideal é inicializar com valores que tornem $Y^{(\rho)}$ próximo do vetor nulo.

1.2 Exemplo de aplicação

O método descrito foi implementado no modelo a seguir, através do Software MATLAB. Sua apresentação visa auxiliar a compreensão da forma de utilização do método. Assim dado o seguinte sistema

$$\begin{cases} M\ddot{x} = F(x, \dot{x}, u), \\ y = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

onde $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $F(x, \dot{x}, u) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}u$.

Para dispor o sistema (1.16) na mesma forma de (1.2a)-(1.2b) adotou-se

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = \dot{x}_1, \quad z_4 = \dot{x}_2 \quad \text{e} \quad z = (z_1, z_2, z_3, z_4). \quad (1.17)$$

A equação de primeira ordem associada ao sistema, será denotada por $\dot{z} = f(z, u)$. Assim verifica-se que o sistema será dado por

$$f(z, u) = \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \\ M^{-1} \begin{pmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \end{pmatrix} + M^{-1} \begin{pmatrix} 2z_1 \\ 2z_2 \end{pmatrix} u \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

com saída

$$y = z_1^2 + z_2^2 - 1. \quad (1.19)$$

Uma vez obtido o sistema na forma descrita em (1.2a)-(1.2b) tem-se as condições para a aplicação do algoritmo.

1.2.1 Derivando as saídas

O primeiro passo do algoritmo consiste em derivar o conjunto de restrições (apenas uma restrição no caso). Logo a derivada de y será dada por

$$y^{(1)} = 2z_1z_3 + 2z_2z_4 \quad (1.20)$$

Fazendo o cálculo simbólico de $\frac{\partial y^{(1)}}{\partial u}$ verifica-se que $y^{(1)}$ não sofre influência da entrada u , de dimensão unitária no caso do exemplo. Então deriva-se a restrição y uma vez mais, obtendo-se

$$y^{(2)} = 2z_3^2 + 2z_4^2 + z_1^3 + 2uz_1^2 - \frac{1}{2}z_1z_2^2 - 2z_1uz_2 - \frac{1}{2}z_2z_1^2 + \frac{3}{4}z_2^3 + \frac{3}{2}uz_2^2 \quad (1.21)$$

Calculando simbolicamente $\frac{\partial y^{(2)}}{\partial u}$ verifica-se que $y^{(2)}$ sofre influência da entrada u , pois

$$\frac{\partial y^{(2)}}{\partial u} = 2z_1^2 - 2z_1z_2 + \frac{3}{2}z_2^2 \neq 0, \quad (1.22)$$

resultado verificado através do critério de Sylvester. Este critério mostra que uma condição necessária e suficiente para uma forma quadrática $x^\top Ax$, onde A é uma matriz $n \times n$ real e simétrica, ser positiva definida é que o determinante de A seja positivo e que seus determinantes menores principais do determinante A sejam positivos. Este resultado mostra que para $z_1 \neq 0$ ou $z_2 \neq 0$ tem-se $y^{(2)}$ influenciado pela variável u . Para determinação deste resultado derivou-se a restrição duas vezes, logo obteve-se um sistema de index 3, ou seja, $\rho = 2$.

1.2.2 Determinação de $\hat{x}(x)$

A determinação de $\hat{x}$ foi feita a partir da matriz jacobiana linearmente independente

$$\left(\frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} \right), \quad (1.23)$$

que no caso particular do exemplo será

$$\frac{\partial Y^{\langle \rho-1 \rangle}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2z_1, & 2z_2, & 0, & 0 \\ 2z_3, & 2z_4, & 2z_1, & 2z_2 \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

O objetivo é obter linhas complementares a (1.24), de forma a se obter uma matriz quadrada também $T(x, u)$ não singular. Dada as condições, construiu-se o vetor

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 3z_1 + 2z_2 \\ 3z_3 + 2z_4 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

Calculando-se a seguinte matriz jacobiana

$$R = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}, \quad (1.26)$$

obteve-se para o exemplo

$$R = \begin{pmatrix} 3, & 2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 3, & 2 \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

que é o conjunto de linhas complementares a (1.24) para a construção de $T(x, u)$.

1.2.3 Determinação numérica de $\hat{x}(x)$

Neste exemplo aplicou-se também a técnica para obtenção de $\hat{x}$ através de um método numérico. Basicamente seguiu-se o procedimento apresentado na Seção 1.1.3, assim a matriz H será dada por

$$H = \begin{pmatrix} 2z_1, & 2z_2, & 0, & 0 \\ 2z_3, & 2z_4, & 2z_1, & 2z_2 \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

sendo $H^\top$ dada por

$$H^\top = \begin{pmatrix} 2z_1, & 2z_3 \\ 2z_2, & 2z_4 \\ 0, & 2z_1 \\ 0, & 2z_2 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

com $n = 4$ e $s = 2$ e aplicando a técnica de fatoração QR em H tem-se

$$Q_{n \times n} \times R_{n \times s} = H_{n \times s}^\top. \quad (1.30)$$

Da matriz quadrada Q gerada, extrai-se a matriz Q_2 , obtida das $n - s$ últimas colunas de Q . Sendo o posto s da matriz $H(x)$ igual a 2, tem-se

$$Q_2^\top = [q_{ij}]_{2 \times 4}, \quad (1.31)$$

que substitui R em (1.27).

1.2.4 Determinação da matriz $T(x, u)$

A determinação de $\hat{x}(x)$ possibilita a construção de $T(x, u)$, descrita em (1.1.4), que por sua vez permitirá a construção do sistema explícito $\tau(x, u)$. Assim para o exemplo em questão tem-se

$$T(x, u) = \begin{pmatrix} 3, & 2, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 3, & 2, & 0 \\ 2z_1, & 2z_2, & 0, & 0, & 0 \\ 2z_3, & 2z_4, & 2z_1, & 2z_2, & 0 \\ 3z_1^2 + 4uz_1 & -z_2z_1 - 2uz_1 & 4z_3, & 4z_4, & 2z_1^2 - 2z_2z_1 \\ -\frac{1}{2}z_2^2 - 2uz_2 - z_2z_1, & -\frac{1}{2}z_1^2 + \frac{9}{4}z_2^2 + 3uz_2, & & & +\frac{3}{2}z_2^2 \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

1.2.5 Construção da equação que determina $\tau(x, u)$

Uma vez obtido R e $T(x, u)$, o próximo passo consiste em construir o vetor coluna $T(x, u)\tau(x, u)$, de acordo com (1.1.5), assim para o exemplo verifica-se que

$$T(x, u)\tau(x, u) = \begin{pmatrix} 3z_3 + 2z_4 \\ z_1^2 + 2uz_1 \\ -\gamma(z_1^2 + z_2^2 - 1) \\ -2\gamma(z_1z_3 + z_2z_4) \\ -\frac{1}{4}\gamma(8z_3^2 + 8z_4^2 + 4z_1^3 + 8uz_1^2 - 2z_1z_2^2) \\ -8z_1uz_2 - 2z_2z_1^2 + 3z_2^3 + 6uz_2^2 \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Aqui deve ser observado que este é um cálculo simbólico e que portanto o valor numérico de γ deve ser fornecido no diagrama de simulação.

1.2.6 Arquivos de simulação

Todo este procedimento, conforme já citado, visa a reunião de condições para implementação de algum método numérico de integração de DAEs. Nesta implementação foi utilizado o pacote Simulink do Matlab. Para a simulação foi elaborado um diagrama de simulação que é apresentado no apêndice deste trabalho. Este diagrama é composto de um bloco de entrada, denominado de EX1_entrada o qual armazena, sob a forma de arquivo, os resultados dos cálculos simbólicos

de $T(x, u)$ e $T(x, u)\tau(x, u)$. Através destes resultados, será possível o cálculo numérico de $T^{-1}(x, u)$. O bloco Ex1_saída, armazena a resposta do cálculo simbólico de $Y^{(\rho)}$, conforme tabela a seguir.

Bloco	Entradas	Saídas
Ex_1_entrada	$\gamma, (x, u)$	$\tau(x, u)$
Ex_1_saída	(x, u)	$Y^{(\rho)}$

O bloco integrador inclui as condições iniciais para a simulação. A escolha de do valor armazenado no bloco Gama, conforme citado em (1.1.5), deve ser feita no sentido de se obter $Y^{(\rho)}(t) = Y^{(\rho)}e^{-\gamma t}$ de forma que $Y^{(\rho)}$ tenda para $\lim_{t \rightarrow \infty} Y^{(\rho)} = 0$. Os blocos x_{1_1} e x_{2_2} armazenam os valores de x_1 e x_2 respectivamente. Os blocos x_1 e x_2 permitem a visualização gráfica desses referidos estados. O leitor encontra no apêndice os arquivos fontes dos programas utilizados.

1.3 Análise dos resultados

O objetivo desta seção é a análise do comportamento do método através dos gráficos das variáveis do exemplo da seção 1.2. Lembrando que o método visa construir condições para solução de DAEs através de algum método numérico de integração. E conforme descrito em na seção 1.2, para aplicação do método neste exemplo, foi utilizado o pacote Simulink do Matlab.

1.3.1 Resultados de $\hat{x}(x)$ fixo

Os primeiros resultados apresentados foram obtidos na versão do método em que se utiliza o cálculo de $\hat{x}(x)$ fixo descrito em 1.1.2.

Por se tratar de um exemplo didático, optou-se por condições iniciais ligeiramente fora da superfície $Y^{(\rho)} = 0$ de forma a se obter resultados que facilitem a compreensão do método pelo leitor. Assim tem-se

$$z_1 = 1.1, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = 0, \quad u = 0 .$$

A resposta ideal para a saída y é zero, e através do Gráfico 1, apresentado a seguir. Observa-se que de fato ocorre a convergência da saída y para zero.

Gráfico 1

Porém para esta versão do método, para alguma combinação de z_1 e z_2 tem-se a matriz $T(x, u)$ com valores próximos da singularidade. Como $\tau(x, u)$ é calculado através da equação

$$T(x, u)\tau(x, u) = \begin{pmatrix} R\dot{x} \\ -\gamma(Y\langle\rho\rangle) \end{pmatrix},$$

o método necessita inverter $T(x, u)$. Logo com $T(x, u)$ com valores próximos da singularidade esta inversão pode não ser possível numericamente, conseqüentemente ocorrendo a interrupção do fluxo do algoritmo. Esta situação, por sua vez, pode ser apontada como um dos inconvenientes na utilização método com a determinação de um $\hat{x}(x)$ fixo.

Do modelo estudado era esperado como resposta grafica a construção de uma circunferência de raio 1. Porém, em função do problema justificado anteriormente o resultado obtido é o apresentado no Gráfico 2.

Gráfico 2

1.3.2 Resultados de $\hat{x}(x)$ numérico

Os resultados a seguir foram obtidos na versão do método em se utiliza a determinação numérica de $\hat{x}(x)$, conforme descrito em 1.1.6. Para efeito de comparação foram mantidas as mesmas condições iniciais de 1.3.1.

Assim como em 1.3.1, a resposta ideal para a saída y é zero, e através do Gráfico 3, apresentado a seguir, observa-se que de fato ocorre a convergência da saída y para zero.

Gráfico 3

Porém nesta versão assegura-se sempre uma construção de $\hat{x}(x)$ de forma que $T(x, u)$ não se torne singular permitindo o cálculo de $\tau(x, u)$. Assim, a resposta gráfica esperada para o modelo pode ser melhor observada como mostra o Gráfico 4 a seguir.

Gráfico 4

Capítulo 2

Teoria de desacoplamento de sistemas implícitos

Este capítulo visa apresentar ao leitor, alguns aspectos teóricos sobre desacoplamento entrada-saída para sistemas explícitos. Um aspecto da teoria é a decomposição do sistema em duas partes. A primeira é o subsistema desacoplado, que é linear, e cujas coordenadas são compostas das saídas e suas derivadas até certa ordem. A segunda parte é denominada de dinâmica-zero. O nome dinâmica-zero sugere a relação deste subsistema com o sistema implícito obtido ao acrescentar-se a restrição $y = 0$. Tal relação é explicada no final do capítulo.

2.1 Teoria de desacoplamento de sistemas explícitos

Na teoria de controle, um sistema explícito, que neste trabalho será denotado por S , é apresentado na forma de equação de estado, ou seja

$$\dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad (2.1a)$$

$$y(t) = h(x(t)), \quad (2.1b)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado do sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ é a entrada, e $y(t) \in \mathbb{R}^r$ a saída. Seja x_0 a condição inicial do sistema e seja $u_j(\cdot)$ as entradas aplicadas para $j = 1, \dots, r$. Denote por $y_i(t, x_0, u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_r(\cdot))$ a saída y_i obtida, para $i = 1, \dots, r$. Cada saída y_i está definida pelo menos para t suficientemente pequeno.

$$\begin{aligned} & y_i(t, x_0, u_1(\cdot), u_{j-1}(\cdot), u_j^1(\cdot), u_{j+1}(\cdot), \dots, u_r(\cdot)) \\ &= y_i(t, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_{j-1}(\cdot), u_j^2(\cdot), u_{j+1}(\cdot), \dots, u_r(\cdot)), \end{aligned} \quad (2.2)$$

- (i) cada saída y_i é invariante com respeito as entradas u_j , $j \neq i$;
- (ii) a saída y_i não é invariante com respeito às entradas u_i , para $i = 1, \dots, r$.

$$y_i^{(1)} = \frac{\partial h_i}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h_i}{\partial x} (f(x(t)) + g(x(t))u(t)) = h_i^{(1)}(x, u). \quad (2.3)$$
$$y_i^{(2)} = \frac{\partial h_i^{(1)}}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h_i^{(1)}}{\partial x} (f(x(t)) + g(x(t))u(t)) = h_i^{(2)}(x, u). \quad (2.4)$$
$$\frac{\partial h_i^{(1)}}{\partial x} g(x(t)) = 0, \quad (2.5)$$
$$h_i^{(k)}(x, u) = \frac{\partial h_i^{(k-1)}}{\partial x}(f(x(t)) + g(x(t))u(t)), \quad (2.6)$$
[illegible]

que é chamada de matriz de desacoplamento, aqui denotada por $b(x)$. Assim, por construção tem-se

$$\begin{pmatrix} y_1^{(\rho_1)} \\ \vdots \\ y_r^{(\rho_r)} \end{pmatrix} = a(x) + b(x)u \quad (2.8)$$

onde $b(x)$ é a matriz de desacoplamento e $a(x)$ é o vetor linha dado por:

$$a(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1^{(\rho_1-1)}}{\partial x} f(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial h_r^{(\rho_r-1)}}{\partial x} f(x) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Definição 2 Uma realimentação estática regular local (entorno de $\bar{x}$) para um sistema (2.1a)-(2.1b) é um par (α, β) , onde $\alpha : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\beta : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que U é um aberto contendo $\bar{x}$ e $\det \beta(x) \neq 0$ para todo $x \in U$. A lei de realimentação correspondente é dada por

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v. \quad (2.10)$$

Observação: A regularidade garante que, em U ,

$$v = -\beta^{-1}x + \beta^{-1}u \quad (2.11)$$

é a realimentação inversa. Mais ainda, o sistema em malha fechada é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)v, \\ y &= h(x), \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde $\tilde{f} = f + g\alpha$ e $\tilde{g} = g\beta$.

Teorema 3 *Existe uma realimentação estática regular que é solução local do problema do desacoplamento entrada-saída se e somente se, o posto da matriz de desacoplamento $b(x)_{r \times r}$ seja igual a r . Neste caso é dito que a saída $y(t)$ possui grau relativo $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_r)$.*

A invertibilidade de $b(x)$ é condição suficiente para que o sistema em malha fechada seja desacoplado. Isto é uma consequência imediata de (2.8). De fato, se

$$\alpha = -b^{-1}(x)a(x), \quad (2.13)$$

$$\beta = b^{-1}(x) \quad (2.14)$$

e

$$u = \alpha + \beta v \quad (2.15)$$

então

$$\begin{aligned} y_1^{(\rho_1)} &= v_1, \\ &\vdots \\ y_m^{(\rho_m)} &= v_m. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para a demonstração da necessidade veja [3].

Lema 4 *Suponha que a matriz de desacoplamento tem posto igual a dimensão de y , em torno de x_0 . Então o conjunto $dY^{\langle \rho-1 \rangle} = \{dy_1^{(0)}, \dots, dy^{(\rho_1-1)}, \dots, dy_r^{(0)}, \dots, dy_r^{(\rho_r-1)}\}$ é localmente linearmente independente em torno de x_0 .*

Prova: Veja [2].

Lema 5 *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ conjunto aberto contendo x_0 . Suponha que $\{\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n : i = 1, \dots, \rho\}$ é um conjunto de funções C^1 tais que $\{d\rho_i : i = 1, \dots, \rho\}$ é independente em x_0 . Então existe um aberto $V \subset U$ com $x_0 \in V$ e um conjunto de funções $\{\hat{x}_i : V \rightarrow \mathbb{R}_n\}$ tais que a aplicação $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_\rho(x), \hat{x}_1(x), \dots, \hat{x}_{r-\rho}(x))$ é um difeomorfismo local sobre sua imagem.*

Prova: Seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação definida por $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_\rho(x))$.

Considere a matriz jacobiana

$$J\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_\rho(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_\rho(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

$$\overline{J\varphi}(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi(x_0)}{\partial x_\rho} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi(x_0)}{\partial x_\rho} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$
$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x_0} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \end{array} \right] \bigg|_{x_0} = \left[\begin{array}{cc} \partial \varphi^0(x_0) & X(x_0) \\ 0 & I_{n-p} \end{array} \right]. \quad (2.19)$$

Pelo lema 5 e pelo lema 4, existe uma mudança de coordenadas $x \mapsto (Y^{(\rho-1)}, \hat{x})$ tal que, nestas coordenadas, o sistema assuma a seguinte forma canônica [3]

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_1^{(1)} & \dot{y}_r &= y_r^{(1)} \\
\vdots & & \dot{y}_r^{(\rho_r-2)} &= y_r^{(\rho_r-1)} \\
\dot{y}_1^{(\rho_1-2)} &= y_1^{(\rho_1-1)} & \vdots & \\
\dot{y}_1^{(\rho_1-1)} &= a_1 + b_1 u & \dot{y}_r^{(\rho_r-1)} &= a_r + b_r u
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Observa-se que qualquer conjunto de $n - \sum_{i=1}^r \rho_i$ funções $\hat{x}(x)$ tais que o conjunto $\{dY^{(\rho-1)}, d\hat{x}\}$ seja localmente independente, será uma boa escolha para um sistema de coordenadas locais de forma $\{\hat{x}, Y^{(\rho-1)}\}$. Na literatura $\hat{x}(x)$ é chamado *estado da dinâmica zero* [4], e está diretamente relacionado com o subsistema obtido pelo “anulamento da saída”, e conseqüentemente está também relacionado com o sistema implícito, como pode ser visto na seção seguinte. O subsistema

$$\dot{\hat{x}} = \eta(\hat{x}, Y^{\langle \rho-1 \rangle}, u) \quad (2.21)$$

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad (2.22)$$

sendo $\beta(x)$ não singular. Os elementos desta realimentação, para o sistema explícito (2.1a)-(2.1b), são obtidos fazendo

$$\begin{pmatrix} y_1^{(\rho_1)} \\ \vdots \\ y_r^{(\rho_r)} \end{pmatrix} = a(x) + b(x)u = v. \quad (2.23)$$

Pretende-se aqui obter $u(t)$ em função de $b(x)$, $a(x)$ e v . Para isso multiplica-se a esquerda de (2.23) pela inversa de $b(x)$

$$b^{-1}(x)a(x) + b^{-1}(x)b(x)u = b^{-1}(x)v, \quad (2.24)$$

obtendo

$$u = b^{-1}(x)a(x) + b^{-1}v. \quad (2.25)$$

Assim pode-se tomar em (2.22)

$$\alpha(x) = -b^{-1}(x)a(x) \quad (2.26)$$

e

$$\beta(x) = b^{-1}(x)v. \quad (2.27)$$

A realimentação (2.26)-(2.27) aplicada ao sistema (2.1a)-(2.1b), fornece

$$\begin{pmatrix} y_1^{(\rho_1)} \\ \vdots \\ y_r^{(\rho_r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

que implica que o sistema em malha fechada é desacoplado.

Note que o sistema em malha fechada possui estado $z = (\hat{x}, Y^{(\rho-1)})$ e entrada $v = (v_1, \dots, v_r)$, sendo dado por

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1^{(1)} & \dot{y}_r &= y_r^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \\ \dot{y}_1^{(\rho_1-2)} &= y_1^{(\rho_1-1)} & \dot{y}_r^{(\rho_r-2)} &= y_r^{(\rho_r-1)} \\ \dot{y}_1^{(\rho_1-1)} &= y_1^{(\rho_1)} & \dot{y}_r^{(\rho_r-1)} &= y_r^{(\rho_r)} \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\dot{\hat{x}} = \theta(\hat{x}, Y^{(\rho)}), \quad (2.30)$$

onde

$$\theta = \eta(\dot{x}, Y^{\langle \rho-1 \rangle}, \alpha + \beta v). \quad (2.31)$$

Observação: lembre que $Y^{\langle \rho-1 \rangle} = (y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(\rho_1-1)}, \dots, y_r^{(0)}, \dots, y_r^{(\rho_r-1)})$ e $Y^{\langle \rho \rangle} = (y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(\rho_1)}, \dots, y_r^{(0)}, \dots, y_r^{(\rho_r)})$.

2.1.1 Dinâmica zero e sistemas implícitos

Agora considere o sistema implícito

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t), \\ y(t) &= h(x(t)) = 0, \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o pseudo-estado, o vetor de variáveis algébricas $u(t) \in \mathbb{R}^r$ é a pseudo entrada, e $y(t) \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de restrições. Percebe-se que o sistema implícito é equivalente ao anulamento das saídas do sistema explícito: zero

$$Y^{\langle \rho \rangle} = 0, \quad (2.33)$$

$$\dot{\hat{x}} = \theta(\hat{x}, 0). \quad (2.34)$$

Seja $\Sigma = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ com coordenadas globais (x, u) . Considere $\Gamma \subset \Sigma$ definida por (2.33)-(2.34). Pelos resultados de [3], assumindo que y possui grau relativo entorno de todo ponto de Γ , então é fácil mostrar que Γ é uma subvariedade de Σ . Isto é consequência do fato de que $\{d\hat{x}, dY^{\langle \rho-1 \rangle}, dy^{\langle \rho \rangle}, du\}$ é uma base local do $\text{span } \{dx, du\}$ e, em particular, o conjunto $\{dY^{\langle \rho \rangle}\}$ é localmente independente. Note que $\hat{x}$ é de fato um sistema de coordenadas locais da variedade Γ . Note também que o sistema implícito evolui sobre a subvariedade Γ . Assim, o estado da dinâmica implícita é respectivamente dada por $\hat{x}$. Note também que, se o número de restrições r é igual ao número de pseudo-entradas, então a entrada do sistema implícito será ausente e ele será completamente determinado.

Capítulo 3

Um método de integração numérica de DAEs

Neste capítulo está a principal contribuição deste trabalho. Nele é apresentado um método de integração numérica de equações algébrico diferenciais. O método é um esquema simbólico / numérico [6], e está baseado no resultado geométrico [7, 14, 15] de que, dada uma DAE completamente determinada, é possível construir um sistema explícito τ , utilizando-se para isso, de algumas derivações simbólicas das restrições, tal que as soluções de τ convergem para as soluções do sistema implícito. O método é de fato um integrador explícito de DAEs [11]. Mostra-se que existe um sistema explícito de controle dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \tau(x(t), u(t)), \quad (3.1)$$

tendo a propriedade de que o subvetor $x(t)$ das soluções de (3.1) converge (globalmente) para as soluções do sistema implícito (2.33)-(2.34). Baseado neste resultado, desenvolveu-se um método de integração numérica para DAEs de alto index.

3.1 Equações algébrico diferenciais

Neste trabalho, como já afirmado, considera-se equações algébrico diferenciais da forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad (3.2)$$

$$y(t) = h(x(t)) = 0, \quad (3.3)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o pseudo-estado do sistema, o vetor de variáveis algébricas $u(t) \in \mathbb{R}^r$ é a pseudo-entrada e $y(t) \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de restrições. Estas equações são muitas vezes denominadas de equações semi-implícitas. Observe que dada uma equação implícita

$$H(z(t), \dot{z}(t)) = 0, \quad (3.4)$$

com $z(t) \in \mathbb{R}^s$, pode-se converter (3.4) para forma (3.2)-(3.3) usando o seguinte artifício. Seja

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad x_1(t) = z(t), \quad x_2(t) = \dot{z}(t) \quad \text{e} \quad u(t) = \ddot{z}(t). \quad (3.5)$$

Defina $f(x, t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, $g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ I_s \end{pmatrix}$ e $h(x) = H(x_1, x_2)$. Com esta escolha, as equações (3.2)-(3.3) e (3.4) são equivalentes.

3.1.1 Index de uma DAE

O index de uma DAE é uma forma de se medir grau de dificuldade de integração do sistema. Dada a DAE

$$H(z(t), \dot{z}(t)) = 0, \quad (3.6)$$

onde $z \in \mathbb{R}^n$, considere o vetor de derivadas

$$\begin{bmatrix} H(\dot{z}(t), z(t)) \\ H_{\dot{z}}(\dot{z}(t), z(t))\ddot{z} + H_z(\dot{z}(t), z(t))\dot{z} \\ \vdots \\ \frac{d^k}{dt^k} H(\dot{z}(t), z(t)) \end{bmatrix} = H_k(\dot{z}(t), z(t), w) = 0, \quad (3.7)$$

onde $w = (z^{(2)}, \dots, z^{(k+1)})$. O número mínimo de derivações de (3.6), representado pelo inteiro k , necessárias para que $\dot{z}(t)$ seja unicamente determinada por (z) e as equações (3.7), é denominado de index.

3.2 Descrição do método

Lembrando que está sendo considerado um sistema implícito completamente determinado e que isso quer dizer que $\dim(y) = \dim(u)$, e que as saídas do sistema

(3.2)-(3.3) possuem grau relativo $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_r)$. Tem-se assim, um caso particular em que as entradas do sistema implícito (2.32) são ausentes, correspondendo a uma DAE completamente determinada. Neste caso, $\{Y^{(\rho)}, \hat{x}\}$ será um sistema de coordenadas locais do espaço $\Sigma = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ (que possui coordenadas (x, u)). Nestas coordenadas a dinâmica do sistema explícito (2.1a)-(2.1b) é dada por (2.29)-(2.30).

Considerando estas condições, o método tem como proposta esquecer que $y_i^{(j)}$ é derivada de $y_i^{(j-1)}$, e considerar o vetor $Y^{(\rho)}$ como um vetor de variáveis independentes. Assim toma-se um $\gamma > 0$ e define-se o sistema auxiliar a seguir escrito nas coordenadas $(\hat{x}, Y^{(\rho)})$ do espaço $\Sigma = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$, fazendo o sistema (2.29)-(2.30) assumir a seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\gamma y_1 & \dot{y}_r &= -\gamma y_r \\ \vdots & & \vdots & \\ \dot{y}_r^{(\rho_1-1)} &= -\gamma y_1^{(\rho_1-1)} & \dot{y}_r^{(\rho_r-1)} &= -\gamma y_r^{(\rho_r-1)} \\ \dot{y}_r^{(\rho_1)} &= -\gamma y_1^{(\rho_1)} & y_r^{(\rho_r)} &= -\gamma y_r^{(\rho_r)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\dot{\hat{x}} = \theta(\hat{x}, Y^{(\rho)}). \quad (3.9)$$

Percebe-se em (3.8)-(3.9) o anulamento assintótico das saídas, assim como das restrições do sistema implícito, pois está claro que, por construção, a solução deste sistema auxiliar é tal $Y^{(\rho)}(t) = Y^{(\rho)}(t_0)e^{-\gamma(t-t_0)}$. Em particular $\lim_{t \rightarrow \infty} Y^{(\rho)} = 0$.

Note que (3.8)-(3.9) pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \theta(\hat{x}, Y^{(\rho)}), \\ \dot{Y}^{(\rho)} &= -\gamma Y^{(\rho)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Seja

$$\mu(x, u) = \begin{pmatrix} \theta(\hat{x}, Y^{(\rho)}) \\ -\gamma Y^{(\rho)} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

o campo associado à equação diferencial (3.10). Para implementar o método proposto, é suficiente reescrever o sistema (3.10) nas coordenadas originais (x, u) . Para isto, denote por $\psi(x, u) = (\hat{x}, Y^{(\rho)})$. Note que $\psi(x, u)$ é um difeomorfismo local (em torno de (x_0, u_0)), ou seja, uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável. Então a matriz

$$T(x, u) = \frac{\partial \psi}{\partial (x, u)} \quad (3.12)$$

é também inversível. Note também que

$$\dot{\hat{x}} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}(f(x) + g(x)u) = \theta(\hat{x}, Y^{\langle \rho \rangle}). \quad (3.13)$$

Considere a seguinte notação [16], seja $\psi(x, u)$ uma função definida em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, então

$$\langle d\psi, \tau \rangle = \frac{\partial \psi}{\partial(x, u)} \tau. \quad (3.14)$$

Note que, se $(x(t), u(t))$ é solução de (3.1) então pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dt} \psi(x(t), u(t)) = \frac{\partial \psi}{\partial(x, u)} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \frac{\partial \psi}{\partial(x, u)} \tau(x, u). \quad (3.15)$$

Agora defina o sistema explícito completamente determinado

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \tau(x, u), \quad (3.16)$$

onde $\tau(x, u)$ é tal que

$$\langle d\hat{x}, \tau \rangle = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}(f(x) + g(x)u), \quad (3.17)$$

$$\langle dY^{\langle \rho \rangle}, \tau \rangle = -\gamma Y^{\langle \rho \rangle}. \quad (3.18)$$

Em outras palavras, tem-se

$$T(x, u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \\ \frac{\partial Y^{\langle \rho \rangle}}{\partial(x, u)} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Assim é possível construir o campo τ de forma que

$$T(x, u) \tau(x, u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}(f(x) + g(x)u) \\ -\gamma Y^{\langle \rho \rangle} \end{pmatrix} = \mu(x, u), \quad (3.20)$$

onde $\mu(x, u)$ é definido por (3.11). De (3.20) pode-se obter o sistema explícito (3.16).

Note que o sistema explícito (3.16), com τ definido por (3.20) é equivalente ao sistema (3.8)-(3.9). Escreva

$$Y^{\langle \rho \rangle} = \begin{pmatrix} Y^{\langle \rho-1 \rangle} \\ y^{\langle \rho \rangle} \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Então note que $T(x, u)$ é da seguinte forma

$$T(x, u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x} & \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Sendo assim, observe que $T(x, u)$ pode ser calculado simbolicamente e a solução da equação linear (3.20) pode ser calculada pontualmente por algum método numérico, para cada ponto (x, u) desejado. A convergência das soluções de (3.1) para as soluções de (3.2)-(3.3) é garantida pelo teorema a seguir.

Teorema 1 (i) *Seja $\zeta(t) = (\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ uma solução de (3.1) com $\zeta(t) \in \Gamma$ (ver parágrafo da seção (2.1.1)). Então $\bar{x}(t) = \pi_x(\zeta(t))$ é solução de (3.2)-(3.3) com $u(t) = \bar{u}(t)$. Inversamente, se $\bar{x}(t)$ é uma solução de (3.2)-(3.3), então $\bar{x}(t)$ é igual a $\pi_x(\zeta(t))$ para alguma solução de (3.1) com $\zeta(t) \in \Gamma$.*

(ii) *Seja $\zeta(t) = (x(t), u(t))$, uma solução de (3.1) com condição inicial ζ_0 . Assuma que $\zeta(t)$ é bem definido para $t \in [t_0, t_1]$, então $\|Y^{(\rho)}(x, u)\| \leq e^{-\gamma t} \|Y^{(\rho)}(x, u)\|$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.*

(iii) *Seja $L \subset \Sigma - \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ um conjunto compacto. Seja $L_1 = \{\mu \in \Sigma \mid \text{dist}(\mu, L) < \epsilon_1\}$ para um dado $\epsilon_1 > 0$. Assuma que toda solução $\zeta(t_0)$ de (3.1) com condição inicial $\zeta(t_0) \in L_1$ é tal que $\zeta(t)$ é bem definido num conjunto compacto $R \subset \Sigma$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Então existem $\epsilon > 0$ tal que, se $\zeta(t)$, $t \in I = [t_0, t_f]$ seja solução de (3.1) com condições iniciais contidas em L_1 e $\|Y^{(\rho)}(t_0)\| < \epsilon$, então existem $k_1, k_2 > 0$ e uma solução $x(t)$ de (2.22), tal que $\|\pi_x(\zeta(t)) - x(t)\| \leq k_1 \|Y^{(\rho)}(t_0)\| e^{k_2(t-t_0)}$ para todo $t \in [t_0, t_f]$.*

As idéias da prova deste teorema podem ser encontradas em [7].

3.3 Calculando $\hat{x}$ numericamente

Sabe-se, da teoria do desacoplamento, que qualquer conjunto de funções $\hat{x}(x)$ de forma que o conjunto $\{d\hat{x}, dy^{\langle\rho-1\rangle}\}$ seja localmente independente será uma boa escolha para um sistema de coordenadas. Isto é equivalente a dizer que a matriz $T(x, u)$ é não singular.

Algumas vezes não é difícil encontrar $\hat{x}(x)$ usando manipulações simbólicas, como em alguns sistemas lineares. Porém, quando isto não é possível, pode-se tentar através de métodos numéricos a escolha de $\hat{x}(x)$ baseadas nas idéias a seguir descritas.

Pode-se mostrar que o campo $\tau(x, u)$ definido por (3.21) (que é equivalente ao sistema (3.20)) depende da escolha do conjunto de funções $\hat{x}(x)$. Considere a variedade Γ definida no espaço (x, u) por $Y^{\langle\rho\rangle} = 0$. A proposição seguinte mostra que $\tau(\bar{x}, \bar{u})$ não depende da escolha de $\hat{x}(x)$ para $(\bar{x}, \bar{u}) \in \Gamma$.

Proposição 2 *O campo τ definido por*

$$T(x, u)\tau(x, u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}(f(x(t)) + g(x(t))u(t)) \\ -\gamma Y^{\langle\rho\rangle} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

tem as seguintes propriedades que independem da escolha de $\hat{x}(x)$.

1. $\langle dY^{\langle\rho\rangle}, \tau \rangle = -\gamma Y^{\langle\rho\rangle}$;
2. Para um ponto $(\bar{x}, \bar{u})$ de Γ , $\tau(\bar{x}, \bar{u})$ não depende da escolha de $\hat{x}(x)$;
3. Para um ponto $(\bar{x}, \bar{u})$ de Γ ,

$$\dot{x} = \langle dx, \tau(\bar{x}, \bar{u}) \rangle = f(\bar{x}) + g(\bar{x})\bar{u}.$$

Demonstração: Note que $x \mapsto (Y^{\langle\rho-1\rangle}, \hat{x})$ é um difeomorfismo local. Seja

$$\begin{aligned} \Gamma : \quad \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) &= h(x(t)) = 0. \end{aligned}$$

Para um ponto $(\bar{x}, \bar{u}) \in \Gamma$ tem-se $Y^{(\rho)} = 0$. De $\dot{\hat{x}} = \theta(\hat{x}, Y^{(\rho)})$, segue-se que

$$\begin{aligned}\langle d\hat{x}, \tau(\bar{x}, \bar{u}) \rangle &= \theta(\bar{x}, \bar{u}) \\ &= \langle d\hat{x}, f(\bar{x}) + g(\bar{x})\bar{u} \rangle.\end{aligned}$$

Note também que

$$\begin{aligned}\langle dY^{(\rho-1)}, \tau(\bar{x}, \bar{u}) \rangle &= -\gamma Y^{(\rho-1)} \\ &= \langle dY^{(\rho-1)}, f(\bar{x}) + g(\bar{x})\bar{u} \rangle \\ &= \frac{dY^{(\rho-1)}}{dt} = 0,\end{aligned}$$

o que mostra (3), já que o $\text{span}\{dx\} = \text{span}\{d\hat{x}, dY^{(\rho-1)}\}$.

Como $(x, u) \mapsto (x, y^{(\rho)})$ é um difeomorfismo, e para cada ponto $(\bar{x}, \bar{u})$ de Γ tem-se (3), e de $\dot{y}_1^{(\rho_r)} = -\gamma \dot{y}_r^{(\rho_r)}$, segue-se que

$$\langle dy^{(\rho)}, \tau(\bar{x}, \bar{u}) \rangle = -\gamma y^{(\rho)} = 0,$$

demonstrando (2), já que o $\text{span}\{dx, du\} = \text{span}\{d\hat{x}, dy^{(\rho)}\}$. Note também que (1) é obtido por construção.

A proposição 2 sugere o seguinte algoritmo para calcular $\hat{x}(x)$ numericamente. Para um ponto $(\bar{x}, \bar{u})$ (não necessariamente sobre Γ), escolha uma matriz R de números reais tais que

$$\begin{pmatrix} R \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

seja não singular para $(\bar{x}, \bar{u})$.

Agora faça $\hat{x} = Rx$ (pontualmente em $(\bar{x}, \bar{u})$) e seja

$$T(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x} & \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Então encontre $\tau(\bar{x}, \bar{u})$ numericamente, resolvendo a seguinte equação linear

$$T(\bar{x}, \bar{u})\tau(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{pmatrix} R(f(\bar{x}) + g(\bar{x})u) \\ -\gamma Y^{\langle \rho \rangle} \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Pelo item 1 da proposição, esta construção assegura a convergência do sistema explícito

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \tau(x, u) \quad (3.27)$$

para o sistema implícito (2.32). Além disso, pelo item 2 da proposição, sobre o sistema implícito (2.32), o procedimento deste cálculo numérico é equivalente ao cálculo simbólico de $\hat{x}(x)$ apresentado na Seção 4.3.

3.4 DAEs variantes no tempo

Para estender o método para DAEs com variantes no tempo dadas por

$$\dot{y}(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t)u(t)), \quad (3.28)$$

$$y(t) = h(t, x(t)) = 0, \quad (3.29)$$

é suficiente aplicar o artifício padrão de incluir uma nova variável $t = x_0$ tal que $\dot{x}_0 = 1$ e aplicar a mesma técnica. Então, para DAEs completamente determinadas, obtém-se as equações

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} t \\ x \\ u \end{pmatrix} = \tau(t, x, u), \quad (3.30)$$

onde $\tau(t, x, u)$ é definido pela seguinte regra

$$T(t, x, u)\tau(t, x, u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}(f(t, x) + g(t, x)u) \\ -\gamma Y^{\langle \rho \rangle} \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

onde $T(t, x, u)$ é dado por

$$T(t, x, u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial t} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial t} & \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial t} & \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x} & \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Está claro que a equação diferencial (3.30) contém $\dot{t} = 1$, mas obviamente isto é indiferente para o esquema numérico, uma vez que o método numérico padrão pode integrar sistemas variantes no tempo.

3.5 Obtenção de condições iniciais compatíveis

Lembrando mais uma vez que considere o caso de DAEs completamente determinadas. Seja $\gamma > 0$ e considere o seguinte sistema modificado (onde s é uma variável independente de t , e x a derivação de x em relação a s).

$$\begin{aligned} \dot{t} &= -\gamma(t - t_0), \\ \dot{\hat{x}} &= -\gamma(\hat{x} - \hat{x}_0), \\ \dot{y}^{(\rho)} &= -\gamma Y^{(\rho)}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Note que (3.33) é equivalente ao sistema explícito (3.16) com $\tau(x, u)$ definido por

$$T(x, u)\tau(x, u) = -\gamma \begin{pmatrix} t - t_0 \\ \hat{x} - \hat{x}_0 \\ Y^{(\rho)} \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

onde $T(x, u)$ é dado por (3.32), obtendo-se o seguinte resultado.

Teorema 3 *Seja $V = (t - t_0)^2 + \|\hat{x} - \hat{x}_0\|^2 + \|Y^{(\rho)}\|^2$. Assuma que a região $V(x, u) \leq M$ é compacta e suponha que a condição inicial $(\bar{x}, \bar{u})$ do sistema é tal que $V(\bar{x}, \bar{u}) \leq M$. Então a solução do sistema converge para um ponto compatível de $\Gamma(t, x, u)$ tal que $t = t_0$ e $\hat{x} = \hat{x}_0$.*

Prova: Temos $\dot{V} = -2\gamma V$. Então o conjunto M é invariante, e M é compacto. Então a solução pode ser definida para todo $s \geq s_0$ e assim $\lim_{s \rightarrow \infty} V = 0$.

3.6 Comparando os resultados

A idéia desta seção é de aferir a precisão do método apresentado neste trabalho. Para isto é utilizado o modelo de um sistema de restrições mecânicas de posição x , o qual é testado em um método de solução de equações algébrico diferenciais, já consagrado, e também no método apresentado neste trabalho, e feita a comparação dos resultados obtidos nos dois métodos.

3.6.1 Descrição do modelo

Considere o seguinte sistema, não linear, de restrições mecânicas, extraído de um exemplo do código DASSL [12]

$$\begin{cases} M\ddot{x} + (Jy)^T v - F = 0 \\ y(x) = 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

onde M é a matriz massa, $y(x)$ o vetor de restrições, $v=(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$

o vetor variáveis algébricas do sistema, $F=(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7)$

o vetor de forças aplicadas ao sistema e Jy a matriz jacobiana das restrições.

Da mesma forma como apresentado na seção 1.2, para que este modelo assuma a mesma forma de (1.2a)-(1.2b), adotou-se $z_1=x_1$, $z_2=x_2$, $z_3=x_3$, $z_4=x_4$, $z_5=x_5$, $z_6=x_6$, $z_7=x_7$ e $z=(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7)$

A equação de primeira ordem associada ao sistema será denotada por $\dot{z} = f(z, v)$.

Então o sistema (3.33) será dado por

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} \dot{z}1 \\ \dot{z}2 \\ \dot{z}3 \\ \dot{z}4 \\ \dot{z}5 \\ \dot{z}6 \\ \dot{z}7 \\ M^{-1}F - M^{-1}JY^T v \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

3.6.2 Calculando condições iniciais compatíveis

A partir dos resultados propostos pelo teorema 3, gerou-se as seguintes condições iniciais compatíveis, apresentadas a seguir, para se obter as soluções do sistema convergindo para $\tau(x, u)$

z1	$-4.554377627180211e - 001$	z1	$-4.436669070351392e - 015$
z2	$3.141558361009398e + 000$	z2	$3.209261949721246e - 015$
z3	$1.115331129985546e + 000$	z3	$1.869661248016638e - 015$
z4	$-5.056486266012877e - 001$	z4	$2.721266077623345e - 020$
z5	$6.804152196739256e - 002$	z5	$-1.869692925577709e - 015$
z6	$5.056486266012878e - 001$	z6	$-3.214634333340373e - 019$
z7	$5.918244113931563e - 001$	z7	$-1.869770152260533e - 015$
v1	$-1.210749562359904e + 005$	v2	$5.930427595556430e + 004$
v3	$2.104130737797460e - 001$	v4	$4.493795532718201e - 001$
v5	$1.343049410001327e - 001$	v6	$2.625656214401446e - 001$

3.6.3 Análise dos resultados

O método utilizado como parâmetro de comparação é o DASSL [12], que é um código para solução de sistemas de equações algébrico diferenciais de index um. A partir das condições iniciais geradas e para um tempo $t = 0.009s$, tolerância de $1e - 9$, utilizados na simulação dos dois métodos, e para o método proposto neste trabalho um $\gamma = 0.1$, obteve-se os resultados apresentados a seguir.

3.6.4 Análise das restrições

Uma maneira de se avaliar a precisão do método, consiste em analisar os resultados obtidos para as restrições nos dois métodos, sendo daqui por diante o método proposto neste trabalho o método 1 e o DASSL o método 2. Lembrando que para as restrições o ideal é $y(x) = 0$. Mas por se tratar de um método numérico, são esperados valores próximos disso. Os gráficos a seguir auxiliam nesta comparação. Para cada restrição, tem-se um gráfico com a resposta dos dois métodos. Antes porém, apresenta-se uma tabela com os valores das restrições nos dois métodos ao final do tempo $t = 0.009s$.

Variável	Método 1	Método 2
y1	$-2.539225774089715e - 012$	$9.619289323414826E - 010$
y2	$2.295455492351550e - 012$	$-1.459184596069862E - 010$
y3	$-4.857239610522868e - 012$	$2.266522067251309E - 009$
y4	$-1.585159954686777e - 013$	$1.021988053212519E - 009$
y5	$-4.857243079969820e - 012$	$2.200143338348948E - 009$
y6	$-1.585329090225685e - 013$	$8.864696546262429E - 010$

Pelos dados desta tabela, nota-se que o método 1 apresentou resultados mais próximos de zero, da ordem de $(1e - 12)$ até $(1e - 13)$. Já o método 2, obteve valores da ordem de $(1e - 10)$. Este resultado indica que o método 1 possui precisão superior ao método 2. Nos gráficos a seguir, esta indicação pode ser melhor observada, neles e nos demais gráficos desta seção (linha cheia) representa os resultados obtidos pelo método 1 e (linha tracejada) os resultados obtidos pelo método 2.

Gráfico 5

Gráfico 6

Gráfico 7

Gráfico 8

Grafico 9

Grafico 10

3.6.5 Análise dos resultados

A tabela a seguir traz os resultados numéricos dos dois métodos, ao final de um tempo $t = 9e - 3s$.

Variável	Método 1	Método 2
z1	$-4.440653132500526E - 001$	$-4.468325234269567e - 001$
z2	3.141592604489843	$3.141558417840559e + 000$
z3	1.126730966222255	$1.123936414740758e + 000$
z4	$-5.056486138989796E - 001$	$-5.056486265998903e - 001$
z5	$7.944131183642733E - 002$	$7.664680672226330e - 002$
z6	$5.056486138129556E - 001$	$5.056486265998904e - 001$
z7	$6.032242058335007E - 001$	$6.004296961480552e - 001$

Os gráficos a seguir apresentam, de forma mais clara os resultados obtidos.

Gráfico 11

A expectativa inicial era a de se obter resultados semelhantes. Porém, como pode ser observado no gráfico 11, as curvas seguem trajetórias um pouco diferentes. A análise feita na seção anterior indica uma maior precisão dos resultados no método 1. Isto pelo fato, já mencionado de que, este método leva as restrições a valores bem mais próximos de zero se comparado com os valores do método 2. Por essa razão as respostas do método 1 mostram-se mais consistentes. É importante ressaltar que o método 1 foi testado na plataforma MATLAB enquanto o método 2 foi testado por um programa FORTRAN. Como as duas plataformas

diferentes implementam os cálculos de maneira diferente, os resultados de precisão encontrados podem refletir a implementação dos cálculos em precisão dupla. Uma observação análoga pode ser feita com relação ao tempo de execução. Sendo assim, mais comparações devem ser realizadas para que sejam tirados resultados mais conclusivos. Os gráficos apresentados a seguir são comparativos das outras variáveis, e que também mostram as mesmas características analisadas no gráfico 11.

Gráfico 12

Grafico 13

Grafico 14

Grafico 15

Gráfico 16

Gráfico 17

Conclusões

A proposta deste trabalho visava a apresentação de um método de integração numérica de equações diferenciais não lineares implícitas. Baseado numa abordagem geométrica, a proposta do método consiste que, sob certas condições, construir um sistema explícito cujas soluções convergem para as soluções do sistema original. Os resultados obtidos, em um dos exemplos apresentados, confirmou os resultados teóricos previstos. Já a comparação, com um método clássico de integração, tem indicado uma maior precisão dos resultados. O método apresenta ainda a vantagem de ser implementado em pacotes de programas matemáticos conhecidos. Pode-se citar também sua elevada precisão, analisada no capítulo anterior. Vale ainda ressaltar que o método é relativamente simples de ser utilizado. Porém como já mencionado é importante ressaltar que os métodos foram implementados em plataformas diferentes, e que implementam os cálculos de maneira diferente, portanto os resultados de precisão encontrados podem refletir a implementação dos cálculos em precisão dupla. Uma observação análoga pode ser feita com relação ao tempo de execução. Sendo assim, mais comparações devem ser realizadas para que sejam tirados resultados mais conclusivos.

Apêndice

Introdução

Este apêndice apresenta os códigos fonte, desenvolvidos no Matlab, dos arquivos construídos para o exemplo apresentado na seção 1.2. Convém mais uma vez lembrar ao leitor que outros programas matemáticos podem ser utilizados para a implementação do algoritmo.

A.1 Arquivos fonte do exemplo de aplicação do Capítulo 1 na versão $\hat{x}(x)$ fixo

A.1.1 Cálculo simbólico

Para o exemplo apresentado na Seção 1.2, foi desenvolvido o seguinte arquivo fonte para o cálculo simbólico da matriz $T(x, u)$ e de

$$\begin{pmatrix} R\dot{x} \\ -\gamma(Y^{(\rho)}) \end{pmatrix},$$

utilizadas na construção da equação que determina $\tau(x, u)$.

```
Nome: EX1_simblico
```

```
syms u1 u2 u gama z1 z2 z3 z4
```

```
M=[3 2;  
    2 4]
```

```
F=[z1*z1; z2*z2]+[2*z1;2*z2]*u
```

```
Y=[z1*z1+z2*z2-1]
```

```
z=[z1; z2]
```

```

zp=[z3; z4]
Z=[z; zp]
invM=inv(M)
f=[zp; invM*F]
Zu=[Z; u]
JY = jacobian(Y,Z)
Yp = JY*f
grau_Yp=jacobian(Yp,u)
JYp = jacobian(Yp,Z)
Ypp = JYp*f
grau_Ypp=jacobian(Ypp,u)
J=[JY; JYp]
x1chap=3*z1+2*z2 x2chap=3*z3+2*z4
Xchapeu=[x1chap; x2chap]
JXchapeu_Z=jacobian(Xchapeu,Z)
Xchapeup=JXchapeu_Z*f
JXchapeu_Zu=jacobian(Xchapeu,Zu)
JY= jacobian(Y,Zu)
JYp= jacobian(Yp,Zu)
JYpp= jacobian(Ypp,Zu)
T=[JXchapeu_Zu;
    JY;
    JYp;
    JYpp]

Ttau=[Xchapeup;
      -gama*Y;
      -gama*Yp;
      -gama*Ypp]

for i=1:5,
    for j=1:5,
        ii=num2str(i);

```

```

        jj=num2str(j);
        string = strcat('T(',ii,',',',jj,') =');
        disp(strcat(string,char(T(i,j)),',;'))
    end
end

disp(strcat('tau= ',char(Ttau(1)),',;')) for i=2:4,
    disp(strcat(char(Ttau(i)),',;'))
end disp(strcat(char(Ttau(5)),',;'))

YY=[Y;Yp] disp('YY=[') for i=1:2,
    disp(strcat(char(YY(i)),',;'))
end

```

A.1.2 Arquivo de entrada

O arquivo fonte de entrada foi montado a partir do resultado do cálculo simbólico da matriz $T(x, u)$ e de

$$\begin{pmatrix} R\dot{x} \\ -\gamma(Y^{\langle\rho\rangle}) \end{pmatrix}$$

Neste arquivo é realizado o cálculo numérico de $\tau(x, u)$, através da equação

$$T(x, u)\tau(x, u) = \begin{pmatrix} R\dot{x} \\ -\gamma(Y^{\langle\rho\rangle}) \end{pmatrix}.$$

```

Nome: EX1_entrada
function[dz]=exemplo1(z)
z1=z(1);
z2=z(2);
z3=z(3);
z4=z(4);
u=z(5);
gama=z(6);

T(1,1) =3;
T(1,2) =2;
T(1,3) =0;
T(1,4) =0;
T(1,5) =0;
T(2,1) =0;
T(2,2) =0;
T(2,3) =3;
T(2,4) =2;
T(2,5) =0;
T(3,1) =2*z1;
T(3,2)=2*z2;
T(3,3) =0;

```

```

T(3,4) =0;
T(3,5) =0;
T(4,1) =2*z3;
T(4,2) =2*z4;
T(4,3) =2*z1;
T(4,4) =2*z2;
T(4,5) =0;
T(5,1)=z1^2+2*u*z1-1/2*z2^2-u*z2+2*z1*(z1+u)+2*z2*(-1/2*z1-1/2*u);
T(5,2)=2*z1*(-1/2*z2-1/2*u)-1/2*z1^2-u*z1+3/4*z2^2+3/2*u*z2+
2*z2*(3/4*z2+3/4*u);
T(5,3) =4*z3;
T(5,4) =4*z4;
T(5,5)=2*z1*(z1-1/2*z2)+2*z2*(-1/2*z1+3/4*z2);

tau= [3*z3+2*z4; z1^2+2*u*z1; -gama*(z1^2+z2^2-1);
-gama*(2*z1*z3+2*z2*z4);
-gama*(2*z3^2+2*z4^2+2*z1*(1/2*z1^2+u*z1-1/4*z2^2-1/2*u*z2)+2*z2*
(-1/4*z1^2-1/2*u*z1+3/8*z2^2+3/4*u*z2))];

dz=T\tau;

```

A.1.3 Arquivo de saída

O arquivo fonte de saída é composto da saída do sistema e o resultado do cálculo simbólico de suas derivadas.

```

Nome: EX1_saida
function[out]=saida(z)
z1=z(1);
z2=z(2);
z3=z(3);
z4=z(4);
out(1) =z1^2+z2^2-1;
out(2) = 2*z1*z3+2*z2*z4;

```

A.2 Arquivos fonte do exemplo de aplicação do Capítulo 1 na versão $\hat{x}(x)$ numérico

A.2.1 Cálculo simbólico

O exemplo acima também foi apresentado numa versão onde a determinação de $\hat{x}(x)$ é feita de forma numérica conforme apresentada Seção 1.3 e cujos os arquivos fonte que sofreram alteração em relação à primeira versão são apresentados a seguir.


```

Nome: EX1_simblico_ adapt
syms u gama z1 z2 z3 z4
M=[3 2;
   2 4]
F=[z1*z1; z2*z2]+[2*z1;2*z2]*u
Y=[z1*z1+z2*z2-1]
z=[z1; z2]
zp=[z3; z4]
Z=[z; zp]
invM=inv(M)
f=[zp; invM*F]
Zu=[Z; u]
JY = jacobian(Y,Z)
Yp = JY*f
grau_Yp=jacobian(Yp,u)
JYp = jacobian(Yp,Z)
Ypp = JYp*f
grau_Ypp=jacobian(Ypp,u)
J=[JY; JYp]
JY= jacobian(Y,Zu)
JYp= jacobian(Yp,Zu)
JYpp= jacobian(Ypp,Zu)
Tbarra= [ JY;
          JYp;
          JYpp]
Ttaubarra= [-gama*Y;
             -gama*Yp;
             -gama*Ypp]
for i=1:3,
    for j=1:5,

```

```

        ii=num2str(i);
        jj=num2str(j);
        string = strcat('Tbarra(',ii,',',jj,') =');
        disp(strcat(string,char(Tbarra(i,j)),',;'))
    end
end

strcat('tauBarra=[') for i=1:2,
    disp(strcat(char(Ttaubarra(i)),',;'))
end disp(strcat(char(Ttaubarra(3)),',]'))

YY=[Y;Yp] disp('YY=[') for i=1:2,
    disp(strcat(char(YY(i)),',;'))
end

JYY=[JY;JYp] for i=1:2,
    for j=1:5,
        ii=num2str(i);
        jj=num2str(j);
        string = strcat('JYY(',ii,',',jj,') =');
        disp(strcat(string,char(JYY(i,j)),',;'))
    end
end
end

```

A.2.2 Arquivo de entrada para versão $\hat{x}(x)$ numérico

```

Nome: EX1_entrada
function[dz]=exemplo1(z)
z1=z(1);
z2=z(2);
z3=z(3);
z4=z(4);
u=z(5);
gama=z(6);

f =[
                                z3;
                                z4;
    1/2*z1^2+u*z1-1/4*z2^2-1/2*u*z2;
    -1/4*z1^2-1/2*u*z1+3/8*z2^2+3/4*u*z2]
Tbarra(1,1) =2*z1;
Tbarra(1,2) =2*z2;
Tbarra(1,3) =0; Tbarra(1,4) =0;
Tbarra(1,5) =0;
Tbarra(2,1) =2*z3;
Tbarra(2,2) =2*z4;
Tbarra(2,3) =2*z1;
Tbarra(2,4) =2*z2;
Tbarra(2,5) =0;
Tbarra(3,1)=z1^2+2*u*z1-1/2*z2^2-u*z2+2*z1*(z1+u)+
2*z2*(-1/2*z1-1/2*u);

```

```

Tbarra(3,2)=2*z1*(-1/2*z2-1/2*u)-1/2*z1^2-u*z1+3/4*z2^2+3/2*u*z2+
2*z2*(3/4*z2+3/4*u);
Tbarra(3,3) =4*z3;
Tbarra(3,4) =4*z4;
Tbarra(3,5) =2*z1*(z1-1/2*z2)+2*z2*(-1/2*z1+3/4*z2);
tauBarra=[
-gama*(z1^2+z2^2-1);
-gama*(2*z1*z3+2*z2*z4);
-gama*(2*z3^2+2*z4^2+2*z1*(1/2*z1^2+u*z1-1/4*z2^2-1/2*u*z2)+
2*z2*(-1/4*z1^2-1/2*u*z1+3/8*z2^2+3/4*u*z2))]
JYY(1,1) =2*z1;
JYY(1,2) =2*z2;
JYY(1,3) =0;
JYY(1,4) =0;
JYY(1,5) =0;
JYY(2,1) =2*z3;
JYY(2,2) =2*z4;
JYY(2,3) =2*z1;
JYY(2,4) =2*z2;
JYY(2,5) =0;

JY=JYY(1:2,1:4);

H=[JY]
[Q,R]=qr(H')
Q2=Q(:,3:4)
T1=[Q2' zeros(2,1)]
T=[T1;
   Tbarra]
tau=[T1(:,1:4)*f;
     tauBarra]
dz=T\tau;

```

A.2.3 Diagrama de simulação

Referências Bibliográficas

- [1] STRANG, G. *Linear algebra and its applications*, 2nd ed. New York: Academic Press, 1980.
- [2] NIJMEIJER, H.; SHAFT, A. J. VAN DER. *Nonlinear dynamical control systems*. New York: Springer-Verlag, 1990. xiii, 467 p.
- [3]] ISIDORI, A. *Nonlinear control systems*. 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 1995. xv, 549 p.
- [4] BYRNES, C. I.; ISIDORI, A. *Local stabilization of minimum-phase nonlinear systems*. Systems and Control Letters., Amsterdam, v. 2, n. 1, p. 9-17, 1988.
- [5] CAMPBELL, S. L.; GEAR, C. W. *The index of general nonlinear DAEs*. Numerische mathematik, Berlin, v. 72, n. 2, p. 173-196, 1995.
- [6] CAMPBELL, S. L.; MARSZALEK, W. *Mixed symbolic-numerical computations with general DAEs*. II. An applications case study. Numer. Algorithms, **19(1-4)**:85-94, 1998.
- [7] PEREIRA DA SILVA, P. S.; WATANABE, C. J. *Some geometric properties of differential-algebraic equations*. Article submitted, available in 2002.
- [8] CAMPBELL, S. L. *Singular Systems of Differential Equations*. Pitman, London, 1982.
- [9] CAMPBELL, S. L. *Descriptor systems in the 90s*. In Proc. 29th IEEE Conf. Dec. Control, pages 442-447, 1990.
- [10] DAI LIYI. *Singular Control Systems*. Springer-Verlag, 1989.
- [11] CAMPBELL, S. L.; ZHONG, Y. *Jacobian reuse in explicit integrators for higher index DAEs*. Appl. Numer. Math., **25(4)**:391-412, 1997.
- [12] ASCHER, M.; PETZOLD, L. R. *Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1998.

- [13] CAMPBELL, S. L; ZHONG, Y. *Jacobian reuse in explicit integrators for higher index DAEs*. Appl. Numer. Math., **25(4)**:391-412, 1997.
- [14] PEREIRA DA SILVA, P. S; CORREA FILHO. *Relative flatness and flatness of implicit systems*. SIAM J. Contr. Optimiz., 39:1929-1951, 2001.
- [15] PEREIRA DA SILVA, P. S.; WATANABE, C. J. *Nonlinear implicit systems and stable invariant manifolds*. In CDROM Proceedings of brazilian Automatic Control Conference - CBA 2002.
- [16] Warner, F. W. *Foundations of differentiable manifolds and Lie Groups*. Scott, Foresman and Company., Glenview, Illinois. 1971.