CARLOS NEHEMY MARMO

**SINCRONISMO EM REDES MESTRE-ESCRAVO DE
VIA ÚNICA: ESTRELA SIMPLES, CADEIA SIMPLES E MISTA**

**Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do
Título de Mestre em Engenharia.**

São Paulo

2003

CARLOS NEHEMY MARMO

**SINCRONISMO EM REDES MESTRE-ESCRAVO DE
VIA ÚNICA: ESTRELA SIMPLES, CADEIA SIMPLES E MISTA**

**Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do
Título de Mestre em Engenharia.**

**Área de Concentração:
Engenharia Elétrica**

**Orientador:
José Roberto Castilho Piqueira**

**São Paulo
2003**

Ao brilhante Professor Carlos Marmo, meu pai, que desde 1946 dedica a sua vida ao verdadeiro ensino.

Sua maior preocupação era ensinar o aluno como aprender e os professores como ensinar.

Para ele a realização sempre foi a chave da felicidade.

Tantos foram os anos, marcados com sua inabalável convicção, empenhando-se de um modo quase sobrenatural para exercer o seu gênio criativo, mantendo uma disciplina absoluta e, acima de tudo, muita, muita didática.

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas contribuíram direta ou indiretamente na elaboração deste trabalho. Peço desculpas se não menciono todas elas, já que há pouco espaço para isso. No entanto, um trabalho como este, não é resultado destes últimos dois anos, somente. Por isso, mesmo querendo ser mais sucinto, eu não poderia perder este espaço, único, para homenagear ou agradecer explicitamente algumas pessoas:

- Meus familiares e amigos, que sempre me apoiaram em tudo o que precisei. Agradeço especialmente ao meu pai, que é um verdadeiro ícone para mim, à minha mãe, que me presenteia todos os dias com seus ideais de bondade, integridade e justiça e à minha amada Elizete, com quem me casei há pouco tempo, mas que me compreende e me apóia como se me conhecesse há muitos anos. Não poderia deixar de agradecer as minhas irmãs, Eliane e Denise, os meus tios Tonho e Nicolau e meus sogros, Antonia e Antonio. Faço ainda, uma pequena homenagem à minha avó, Victória até no nome. Há mais de 92 anos se mantém alerta, moderna e otimista, e sempre dizendo: “o cérebro é tudo”.

- Os incentivadores permanentes da minha carreira técnico-científica: minha prima, a bióloga Neide S. de Mattos, sempre idealista, e o grande amigo, Salvador E. Giammusso, que não é somente um engenheiro reconhecidamente excepcional, mas um modelo de engenheiro para mim, desde que eu era pequeno.

- O prof. Dr. João Cyro André, que certa vez me incentivou muito com poucas palavras, devolvendo-me algo que tinha perdido. Entre elas, menciona uma inscrição do museu Guggenheim que se tornou inesquecível para mim: “permitamos a cada Homem que exerça a arte que conhece”.

- O prof. Dr. José R. C. Piqueira, meu orientador, que tenho profunda admiração e que tem contribuição decisiva na minha formação pessoal e profissional. Não conseguiria expressar por palavras um agradecimento adequado por tudo o que tem feito por mim. Agradeço pela sua confiança, apoio e pelas grandes oportunidades que tem me proporcionado.

- Os professores de pós-graduação da POLI – Elétrica, em especial o prof. Dr. Jaime J. da Cruz e o prof. Dr. Fuad Kassab Jr., sempre tão prestativos e cordiais.

- Os colegas de pós-graduação da POLI – Elétrica, especialmente Elisa Y. Takada, Fernando M. Orsatti, Santos Andrés C. Vargas, A. C. Rosso Jr e V. Figueira de Faria, pelo apoio e companheirismo.

Não poderia deixar de agradecer ao CNPq, pelo apoio financeiro à realização desta pesquisa, mesmo com todas as dificuldades pelas quais tem passado nosso país.

Concluindo essa seção de agradecimentos, gostaria de deixar algumas palavras de meu pai, em um de seus primeiros livros de Desenho, publicado em 1952: “agradeço aos bons professores que tive, porque me ensinaram o que fazer, e aos maus, o que não fazer”.

RESUMO

Neste trabalho, são estudados os problemas de sincronismo de fase nas redes mestre-escravo de via única (OWMS), nas topologias Estrela Simples, Cadeia Simples e mista, através da Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais, com ênfase no Teorema da Variedade Central.

Através da Teoria das Bifurcações, analisa-se o comportamento dinâmico das malhas de sincronismo de fase (PLL) de segunda ordem que compõem cada rede, frente às variações nos seus parâmetros constitutivos. São utilizadas duas funções de excitação muito comuns na prática: o degrau e a rampa de fase, aplicadas pelo nó mestre. Em cada caso, discute-se a existência e a estabilidade do estado síncrono.

A existência de pontos de equilíbrio não-hiperbólicos, não permite uma aproximação linear, e nesses casos é aplicado o Teorema da Variedade Central. Através dessa rigorosa técnica de simplificação de sistemas dinâmicos é possível fazer uma aproximação homeomórfica em torno desses pontos, preservando a orientação no espaço de fases. Desse modo, é possível determinar, localmente, suas estabilidades.

ABSTRACT

This work presents stability analysis of the synchronous state for three types of one-way master-slave time distribution network topologies: single star, single chain and both of them, mixed.

Using bifurcation theory, the dynamical behavior of second-order phase-locked loops employed to extract the synchronous state in each node is analyzed in function of the constitutive parameters.

Two usual inputs, the step and the ramp phase perturbations, are supposed to appear in the master node and, in each case, the existence and stability of the synchronous state are studied.

For parameter combinations resulting in non hyperbolic synchronous states, the linear approximation does not provide any information, even about the local behaviour of the system. In this case, the center manifold theorem permits the construction of an equivalent vector field representing the asymptotic behaviour of the original system in the neighborhood of these points. Thus, the local stability can be determined.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

1. Introdução	1
2. Técnicas de sincronização em redes	6
3. Modelagem e equacionamento de uma malha de sincronismo de fase	12
3.1 Esquema geral de um PLL de 2 ^a ordem	12
3.2 Equacionamento de um PLL da rede OWMS – Estrela Simples	14
3.3 Equacionamento de um PLL da rede OWMS – Cadeia Simples	19
3.4 Comparação dos sistemas dinâmicos que descrevem os PLLs das redes Estrela e Cadeia Simples	25
4. Estudo da estabilidade das redes OWMS – Estrela Simples	27
4.1 Entrada tipo degrau de fase	27
..... 4.1.1 Estudo da estabilidade de P_1	29
..... 4.1.2 Estudo da estabilidade de P_2	34
4.2 Entrada tipo rampa de fase	38
..... 4.2.1 Estudo da estabilidade de P	40
..... 4.2.2 Estudo da estabilidade de P_1 e P_2	45
5. Estudo da estabilidade das redes OWMS – Cadeia Simples	48
5.1 Simplificação das equações que descrevem um PLL da rede OWMS – Estrela Simples	48
5.2 Entrada tipo degrau de fase	51
5.3 Entrada tipo rampa de fase	52

6. Influência do grau de aproximação da construção das variedades centrais, nos retratos de fase e diagramas de bifurcação correspondentes	54
6.1 Entrada tipo degrau de fase: construção de novas variedades centrais em torno de P_1	54
6.2 Entrada tipo degrau de fase: construção de novas variedades centrais em torno de P_2	66
6.3 Entrada tipo rampa de fase: construção de novas variedades centrais em torno de P	76
7. Conclusões	83
APÊNDICE	87
Referências Bibliográficas	92

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Estratégias de distribuição de sinais de tempo.	7
Figura 2 - OWMS - Estrela Simples.	8
Figura 3 - OWMS - Cadeia Simples.	9
Figura 4 - TWMS - Estrela Dupla.	9
Figura 5 - TWMS - Cadeia Dupla.	10
Figura 6 - TWMS - Enlace Simples.	10
Figura 7 - TWMS - Enlace Duplo	11
Figura 8 - Diagrama em blocos simplificado de um PLL	12
Figura 9 - Diagrama em blocos do i -ésimo nó escravo de uma rede OWMS - Estrela Simples.....	14
Figura 10 - Diagrama em blocos do i -ésimo nó escravo de uma rede OWMS - Cadeia Simples.....	20
Figura 11 - Retrato de fases em P_1 , para $\mu_i > 0$	33
Figura 12 - Diagrama de bifurcação para P_1	34
Figura 13 - Retrato de fases em P_2 , para $\mu_i > 0$	37
Figura 14 - Diagrama de bifurcação para P_2	38

Figura 15 - Retrato de fases em P , para $\mu_i > 0$	43
Figura 16 - Diagrama de bifurcação para P	44
Figura 17 - Diagrama de bifurcação para P , P_1 e P_2	47
Figura 18 - Retrato de fases em P_1 , para $\mu_i > 0$ (primeira aproximação)	55
Figura 19 - Diagrama de bifurcação para P_1 (primeira aproximação)	56
Figura 20 - Diagrama de bifurcação para P_1 (segunda aproximação)	57
Figura 21 - Retrato de fases em P_1 , para $\mu_i > 0$ (terceira aproximação)	60
Figura 22 - Diagrama de bifurcação para P_1 (terceira aproximação)	61
Figura 23 - Diagrama de bifurcação para P_1 (quarta aproximação)	63
Figura 24 - Diagrama de bifurcação para P_1 (quinta aproximação)	65
Figura 25 - Retrato de fases em P_2 , para $\mu_i > 0$ (primeira aproximação)	66
Figura 26 - Diagrama de bifurcação para P_2 (primeira aproximação)	67

Figura 27 - Diagrama de bifurcação para P_2 (segunda aproximação)	68
Figura 28 - Retrato de fases em P_2 , para $\mu_i > 0$ (terceira aproximação)	71
Figura 29 - Diagrama de bifurcação para P_2 (terceira aproximação)	72
Figura 30 - Diagrama de bifurcação para P_2 (quarta aproximação)	74
Figura 31 - Diagrama de bifurcação para P_2 (quinta aproximação)	76
Figura 32 - Retrato de fases em P , para $\mu_i > 0$ (primeira aproximação)	77
Figura 33 - Diagrama de bifurcação para P (primeira aproximação)	78
Figura 34 - Retrato de fases em P , para $\mu_i > 0$ (segunda aproximação)	79

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O estudo dos sistemas dinâmicos tem se mostrado ao longo dos séculos como um dos capítulos mais importantes do desenvolvimento da ciência e da tecnologia. Desde os primeiros passos, no surgimento da Mecânica Clássica, houve vários estudiosos, com destaque para Henri Poincaré (1854-1912). Poincaré, desenvolveu técnicas geométricas e topológicas para o estudo qualitativo das equações diferenciais, que são especialmente úteis no caso das equações não-lineares. Essa abordagem permite obter conclusões qualitativas sobre a estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema, através da análise de aproximações assintóticas. Como desvantagem, perde-se parte das informações quantitativas sobre o comportamento transiente do sistema (Monteiro, 2002).

Dentre os inúmeros sistemas dinâmicos existentes, aqueles que estão associados a uma certa periodicidade, são chamados osciladores. Um evento é dito periódico quando se repete, sem alteração, cada vez que transcorre um intervalo de tempo determinado (Nussenzveig, 1981). Provavelmente, o oscilador mais importante para a ciência seja o próprio instrumento de medida do tempo, o relógio. Tanto é assim, que tem sido imenso o esforço para se construir equipamentos cada vez mais precisos. Talvez devido a essa relevância, tenha se tornado um símbolo de status, tais como os preciosos relógios de pêndulo, que ainda hoje enobrecem residências de alto padrão. Atualmente, os relógios têm presença quase obrigatória na vida humana, podendo-se citar, por exemplo, os relógios de pulso, que podem custar o mesmo que um doce ou até mesmo, o equivalente a um automóvel.

Historicamente, a medida do tempo foi ganhando cada vez mais importância: há cerca de 20 mil anos atrás, os caçadores da idade do gelo talhavam marcas em gravetos ou ossos para medir o tempo. Depois, os egípcios criaram as primeiras clepsidras e ampulhetas. A partir do século XV, os navegadores, que precisavam de relógios para fins de determinação da longitude, sofisticaram esse equipamento. Nos dias de hoje, os relógios mais modernos que existem são os relógios atômicos de

césio ou de rubídio, utilizados, por exemplo, em Sistemas de Posicionamento Global. Esses relógios têm uma importância tão grande, que o próprio segundo foi definido em 1967, por consenso internacional, como “a duração de 9.192.631.770 ciclos da radiação correspondente entre as duas camadas hiperfinas do átomo de césio 133 pulverizado”. Espera-se que a precisão desses relógios alcance 10^{-18} , em cerca de três anos. Só para se ter uma idéia do que isto representa, o atraso relativístico de um relógio, em termos de frequência, quando é conduzido por uma pessoa caminhando, é da ordem de 10^{-17} . Atualmente, a única desvantagem desses relógios é a sua durabilidade, cerca de 20 anos, ou seja, menor que a de um bom relógio de pulso. Esse fato pode restringir suas aplicações em determinados equipamentos espaciais (*Scientific American Brasil*, nº 5- 2002).

O estudo dos mecanismos de um relógio é por si próprio, tão fascinante quanto complexo. Entretanto, outros fenômenos igualmente interessantes, surgem quando se consideram vários osciladores como componentes de um sistema maior, ou seja, quando surge a necessidade de sincronizar as escalas de fase e frequência dos diversos nós que compõe uma certa rede. Apesar do estudo formal do sincronismo ter sido iniciado em 1665 com Huygens, o inventor do relógio de pêndulo, provavelmente a primeira vez que o Homem se deparou com o problema foi por ocasião da simples utilização de um relógio; como o único modo possível de se medir o tempo é através de comparações entre relógios diferentes, deve-se então decidir, através desses experimentos e de argumentos teóricos sobre as leis que governam o fenômeno periódico, qual relógio merece maior grau de confiança (Nussenzveig, 1981). É o que, por exemplo, acontece em Londres, quando os ingleses ajustam seu relógio ao Big-Ben, o que caracteriza um típico problema de sincronismo.

O estudo da teoria da distribuição de sinais de tempo é bastante interdisciplinar, uma vez que o modelo matemático utilizado numa análise pode ser estendido à outra, mesmo que seja em área diferente. Essa é, justamente, uma das grandes vantagens da abordagem matemática de um fenômeno. Dentre as inúmeras aplicações existentes, pode-se citar (Lindsey, 1985):

- Equipamentos eletrônicos que exijam controle automático de frequência, tais como os televisores.

- Sistemas de Posicionamento Global, para fins de navegação e rastreamento.
- Processos de demodulação de sinais analógicos e digitais.
- Estabelecimento de um sistema mundial de distribuição de sinais de tempo, propiciando as mais diversas aplicações, tais como aquelas relacionadas à coordenação de transportes ferroviários e marítimos.
- Sincronização de diversos relógios localizados em diferentes pontos de multiplexação em uma rede digital de comunicações.
- Controle e monitoração de desempenho em uma rede de controle de processos.
- Estabelecimento do sincronismo de um supercomputador constituído de múltiplos processadores.
- Modelagem de problemas relacionados ao sincronismo de osciladores na Biologia (Bear, Connors e Paradiso, 2002), com inúmeros exemplos, tais como aqueles estudados na Cronobiologia (Marques e Menna-Barreto, 1997).

Assim, o valor desse tipo de pesquisa reside não só nas suas aplicações em engenharia de controle e comunicações, mas também pelas contribuições à compreensão de outros fenômenos, tais como àqueles relacionados aos chamados ritmos biológicos, sejam eles sincronizados ou não.

Através das mais variadas estratégias de distribuição de sinais de tempo, configuram-se diversos tipos de redes, cada uma com suas características e aplicações específicas. O capítulo 2 apresenta resumidamente essas estratégias. Dentre elas, as redes mestre-escravo se destacam, por apresentarem baixo custo e facilidade de implementação. Desse modo, são amplamente empregadas, tornando-se bastante conhecidas nos meios técnico e comercial. As primeiras redes mestre-escravo propriamente ditas foram desenvolvidas no século XIX, para determinação da longitude nas navegações, e anos mais tarde, para o estabelecimento de um padrão uniforme de horários nas estações ferroviárias, tanto na Europa, quanto na América do Norte. Nesse contexto, destacam-se Siegmund Riefler, na Alemanha e, décadas depois, William Shortt, na Inglaterra. Esse último, desenvolveu vários projetos específicos para tais tarefas, sendo o primeiro deles, composto por dois relógios de pêndulo: um mestre, com precisão de um segundo por ano, e um escravo que a cada

30 segundos, era por ele controlado através de um sinal eletromagnético (*Scientific American Brasil*, nº 5 - 2002).

Dentre os diversos tipos de redes existentes e os problemas associados às respectivas configurações, este trabalho trata de avaliar, qualitativamente, o comportamento dinâmico de três topologias mestre-escravo em especial: OWMS - Estrela Simples, OWMS - Cadeia Simples e mista. Nelas, considera-se que o nó mestre é um oscilador extremamente preciso e independente, como por exemplo um relógio atômico. Os demais nós são malhas de sincronismo de fase (*Phase-Locked Loop* – PLL), que por serem controlados pelo mestre, são denominados escravos. A designação OWMS (*One-Way Master-Slave*), deve-se ao fato de que a transmissão de sinais de tempo, nestas redes mestre-escravo, ocorre num único sentido.

O primeiro artigo sobre PLLs foi publicado em 1932, por H. de Bellescize. A partir de 1943, data da sua primeira utilização comercial em aparelhos receptores de televisão, tornou-se um dispositivo eletrônico básico para aplicações que exigem controle automático de frequência. No presente texto, restringe-se a análise aos PLLs de segunda ordem, mais utilizados na prática, porque apresentam respostas transitórias razoáveis para entradas do tipo degrau, e para entradas tipo rampa não permitem o aparecimento de oscilações auto-sustentadas isoladas, ou seja, ciclos-limite (Viterbi, 1966; Gardner, 1979; Piqueira, 1997).

No capítulo 3, apresenta-se o equacionamento dos nós que constituem as duas redes consideradas. Costumeiramente, compara-se somente a fase do sinal local do nó escravo em questão, com a fase do sinal externo, proveniente do nó anterior. Neste trabalho, para uma descrição mais completa, também são comparadas as fases dos sinais locais do escravo e do mestre. Nesse modelo, o comportamento dinâmico de um nó fica descrito por um sistema autônomo, composto por duas equações diferenciais não-lineares, de segunda ordem.

No capítulo 4, são analisadas as condições de existência e estabilidade do sincronismo das redes OWMS – Estrela Simples, quando se aplicam duas funções de excitação que são bastante comuns na prática: o degrau e a rampa de fase. Reescrevendo-se o sistema obtido no capítulo 3 na forma de um sistema de equações no espaço de estados, obtém-se os pontos equilíbrio, no sentido de Lyapunov. Para pontos hiperbólicos, o Teorema de Hartman-Grobman garante a equivalência

topológica orbital entre o sistema original e o linearizado. Para pontos não-hiperbólicos, a aproximação linear falha, exigindo a aplicação de outros métodos. Dentre eles, optou-se neste trabalho, pelo Teorema da Variedade Central, que garante a existência de um homeomorfismo local, que preserva a orientação no espaço de fases. O cálculo da assim chamada variedade central, tangente ao subespaço central, é possibilitado pela aplicação dos teoremas de J. Carr (Monteiro, 2002; Fiedler-Ferrara e Prado, 1995). Através deles, pode-se avaliar, via Teoria de Bifurcações, as mudanças na estabilidade estrutural do sistema em torno dos pontos de equilíbrio considerados, levando-se em conta as possíveis combinações dos valores dos parâmetros do PLL (Wiggins, 1990; Guckenheimer e Holmes, 1983).

No capítulo 5, repete-se o procedimento do capítulo 4 para as redes OWMS – Cadeia Simples. As redes mistas não foram formalmente analisadas, uma vez que, dependendo do escravo considerado, as conclusões seriam idênticas às da OWMS Estrela ou Cadeia Simples, como será demonstrado ao longo deste texto. Entretanto, é importante ressaltar a sua importância, uma vez que são muito utilizadas na prática.

No capítulo 6, outras variedades centrais, com diferentes níveis de aproximação, são construídas para cada caso considerado nos capítulos 4 e 5, o que permite avaliar qualitativamente, as mudanças nos retratos de fase e nos diagramas de bifurcação correspondentes.

As conclusões mais gerais sobre o comportamento dinâmico das redes consideradas são obtidas no capítulo 7, que encerra este trabalho.

Após o capítulo 7, há ainda um apêndice, referente aos capítulos 4 e 5, que tem como objetivo elucidar uma parte do equacionamento, apresentado nesses mesmos capítulos.

CAPÍTULO 2

TÉCNICAS DE SINCRONIZAÇÃO EM REDES

Neste capítulo, são abordados alguns conceitos relativos às estratégias de distribuição de sinais de tempo, de modo a situar as redes estudadas em relação às demais existentes.

A finalidade de um sistema de distribuição de sinais de tempo é sincronizar escalas de fase e frequência de diversos osciladores distribuídos espacialmente. Diferentes arranjos resultam em redes com características particulares, proporcionando assim, as mais variadas aplicações.

Quando o sincronismo não é crítico para uma dada rede, são utilizados osciladores com pequenos desvios de frequência, que são ajustados manualmente e desse modo, não são necessários sinais de controle. Essas redes são chamadas plesiócronicas; têm como principais vantagens, o fato de serem facilmente implementáveis e de apresentarem maior robustez, caso ocorram falhas em algum de seus nós. Entretanto têm como desvantagens seu alto custo, caso se necessite de confiabilidade e precisão, e a necessidade, muitas vezes, de ajustes frequentes. Uma aplicação importante para as redes plesiócronicas se dá nos Sistemas de Posicionamento Global (GPS – *Global Positioning System*) que utilizam relógios atômicos de célio.(Lindsey, 1985)

Para aplicações em que o sincronismo é crítico para uma dada rede, o ajuste dos sinais de tempo é realizado através de sinais de controle. Essas redes são chamadas síncronicas. Para elas, existem duas estratégias básicas de sincronismo:

- Redes com nós mutuamente sincronizados: são aquelas em que todos os osciladores participam na determinação do estado síncrono. São mais complexas de serem implementadas, não há como evitar que os desvios de frequência (*drifts*) sofridos se evidenciem pela rede e podem ainda sincronizar numa frequência fora de especificação. Entretanto, uma vez que o controle do sincronismo é descentralizado, estão menos suscetíveis frente à falhas em alguns de seus osciladores. (Piqueira, 1997).

- Redes mestre-escravo: são aquelas em que a existência do estado síncrono se faz pela utilização de um oscilador extremamente preciso e confiável, que passa a ser chamado de mestre. Os demais osciladores são controlados por ele, sendo chamados escravos. Devido ao controle ser centralizado, qualquer falha no mestre pode acarretar em perda total do sincronismo da rede. Por esse motivo, sua aplicação para fins militares pode ser restrita. Entretanto, têm sua utilidade garantida em inúmeras outras aplicações; por serem de implementação mais simples, são amplamente utilizadas nas redes públicas de telecomunicações e são comumente usadas em aplicações de computação paralela e distribuída (Shao, Berman e Wolski, 2000), em robótica (Lee *et al.*, 1999) e em aplicações de multi-meios (Sohail e Raj, 1997).

Tanto num caso quanto no outro, é possível incluir-se técnicas de compensação de atraso, que não serão aqui discutidas.

Em seguida, um resumo das estratégias discutidas até agora é apresentado na figura 1 (Piqueira, 1997).

Fig. 1: Estratégias de distribuição de sinais de tempo.

As redes mestre-escravo podem ser conectadas de tal maneira que a transmissão dos sinais de tempo se dê em via única (OWMS - *One-Way Master-Slave*) ou em via dupla (TWMS - *Two-Way Master-Slave*).

Nas OWMS, o nó mestre tem sua própria base de tempo, que é independente dos demais. Todos os nós escravos têm sua base de tempo dependente de um único nó, seja ele o mestre ou outro escravo.

Nas TWMS, o mestre tem sua base de tempo própria, mas ajustável aos outros nós. Além disso, cada escravo pode ter sua base de tempo dependente de mais de um nó.

Pode-se ainda, classificá-las topologicamente (Piqueira,1997):

- OWMS - Estrela Simples: todos os nós escravos são controlados exclusivamente pelo mestre, uma vez que, estão direta e unicamente ligados a ele. O mestre tem sua própria base de tempo, que é independente dos demais.
- As redes OWMS – Estrela Simples serão objeto de estudo deste texto.

Fig. 2: OWMS - Estrela Simples.

- OWMS - Cadeia Simples: começando pelo mestre, todos os outros nós, escravos, são sucessivamente conectados. O mestre tem sua base de tempo

própria e independente dos demais. Cada escravo é controlado pelo nó que o antecede, seja este o mestre ou outro escravo.

As redes OWMS – Cadeia Simples serão objeto de estudo deste texto.

Fig. 3: OWMS - Cadeia Simples.

- TWMS - Estrela Dupla: é equivalente à Estrela Simples. Entretanto, apesar do mestre ter sua própria base de tempo, ela é ajustável à dos outros nós.
As redes TWMS – Estrela Dupla não serão objeto de estudo deste texto.

Fig. 4: TWMS - Estrela Dupla.

- TWMS - Cadeia Dupla: é equivalente à Cadeia Simples. Entretanto, cada nó pondera a sua base de tempo levando em consideração o nó anterior e o

seguinte. O mestre continua tendo a sua própria base de tempo, mas ajustável à do nó 2.

As redes TWMS – Cadeia Dupla não serão objeto de estudo deste texto.

Fig. 5: TWMS - Cadeia Dupla.

- TWMS - Enlace Simples: é semelhante à Cadeia Simples, entretanto o último nó escravo é conectado ao mestre. Dessa forma cada nó, incluindo o mestre, estabelece a sua base de tempo em função do nó que o antecede.

As redes TWMS – Enlace Simples não serão objeto de estudo deste texto.

Fig. 6: TWMS - Enlace Simples.

- TWMS - Enlace Duplo: é equivalente ao Enlace Simples, levando-se em consideração que todos os nós, sejam mestres ou escravos, ponderam sua base de tempo pelo nó seguinte e pelo anterior.

As redes TWMS – Enlace Duplo não serão objeto de estudo deste texto.

Fig. 7: TWMS - Enlace Duplo.

Observando as diferentes estratégias apresentadas, pode-se perceber que a menor complexidade topológica das redes OWMS é um dos principais motivos que fazem com que sejam mais utilizadas na prática. No capítulo seguinte, apresenta-se a modelagem e o equacionamento dos nós da Estrela e da Cadeia Simples, admitidos aqui, como sendo malhas de sincronismo de fase. Este estudo não será apresentado para as redes mistas, pois seria idêntico ao que será apresentado para as redes Estrela ou Cadeia Simples.

CAPÍTULO 3

MODELAGEM E EQUACIONAMENTO DE UMA MALHA DE SINCRONISMO DE FASE

Neste capítulo, apresenta-se uma revisão do esquema geral de uma malha de sincronismo de fase (*Phase-Locked Loop* - PLL) de 2ª ordem. Logo após, procede-se ao equacionamento dos nós constituintes das redes OWMS Estrela Simples e Cadeia Simples, que servirá como ponto de partida para o estudo da estabilidade das mesmas nos próximos capítulos.

3.1 ESQUEMA GERAL DE UM PLL DE 2ª ORDEM

Um PLL é um dispositivo eletrônico usado desde 1932, em aplicações que exigem controle automático de frequência. Sua configuração básica consiste de três elementos: um detector de fases (*Phase Detector* - PD), um filtro passa-baixas (*Low-Pass Filter* - LPF) e um oscilador controlado por tensão (*Voltage Controlled Oscillator* - VCO) (Piqueira, 1987). Eles são interligados numa malha fechada, conforme mostra o diagrama em blocos simplificado, da figura 8.

Fig. 8: Diagrama em blocos simplificado de um PLL

O sinal externo, que veio do nó anterior, tem uma forma do tipo periódica:

$$v_i(t) = V_i \cdot \sin \Phi_i(t) = V_i \cdot \sin [\omega_o \cdot t + \theta_i(t)] \quad (3.1)$$

O sinal local é gerado pelo VCO do nó em questão, e tem uma forma semelhante:

$$v_o(t) = V_o \cdot \cos \Phi_o(t) = V_o \cdot \cos [\omega_o \cdot t + \theta_o(t)] \quad (3.2)$$

Nas equações (3.1) e (3.2) considera-se que:

- V_i e V_o são as amplitudes máximas dos sinais (*input* e *output*), constantes positivas.
- ω_o é a frequência angular central, constante positiva e neste estudo, idêntica para todos os nós.
- θ_i e θ_o são as fases dos sinais (*input* e *output*), variáveis no tempo.

Deve observar que os sinais são semelhantes na forma, mas são descritos por funções diferentes, em quadratura, para que seja possível escrever o sinal $v_d(t)$ como a diferença das fases dos dois sinais de entrada do PD.

A cada instante, o PD compara a fase $\Phi_o(t)$ do sinal local com a fase $\Phi_i(t)$ do sinal externo. Esse elemento pode ser considerado, por simplicidade, um multiplicador de sinais. Assim sendo, pode-se escrever a sua saída $v_d(t)$, chamada na prática de erro de fase dinâmico, como:

$$v_d(t) = K_m \cdot v_i(t) \cdot v_o(t) \quad (3.3)$$

sendo K_m o fator de multiplicação do PD.

O sinal (3.3) é aplicado ao filtro passa-baixas (LPF) a fim de se eliminar os componentes de alta frequência. O LPF utilizado neste trabalho é linear, de 1ª ordem, do tipo “LAG” (Piqueira, 1987). Portanto, tem a seguinte função de transferência:

$$F(s) = \frac{b_0}{b_1 \cdot s + b_0} = \frac{1}{R \cdot C \cdot s + 1} \quad (3.4)$$

sendo R a resistência e C a capacitância do filtro.

A utilização do filtro de 1ª ordem corresponde, como se verá ao longo do equacionamento, a um PLL de 2ª ordem, de particular interesse para telecomunicações e controle (Piqueira, 1997; Garcia, 2000). Malhas de segunda ordem apresentam respostas transitórias razoáveis para entradas tipo degrau e não produzem erros de fase oscilantes ou caóticos para entradas tipo rampa (Bennaton e Piqueira, 1987; Green, 1983).

O sinal de controle $v_c(t)$ que sai do filtro alimenta o VCO e modifica a fase de $v_o(t)$ de acordo com a equação:

$$\frac{d\theta_o(t)}{dt} = K_o \cdot v_c(t) \quad (3.5)$$

sendo K_o o ganho do VCO.

Assim, a função da malha é anular a variação temporal da diferença de fase entre o sinal local e o externo.

3.2 EQUACIONAMENTO DE UM PLL DA REDE OWMS - ESTRELA SIMPLES

Nas redes OWMS do tipo Estrela Simples, todos os nós escravos estão direta e exclusivamente ligados ao mestre e dessa forma são controlados somente por ele. Desse modo, o equacionamento para qualquer nó se faz de modo idêntico.

Pode-se representar o PLL de qualquer i -ésimo ($i=2,3,...,n$) nó escravo da rede conforme o diagrama em blocos simplificado da figura 9.

Fig. 9: Diagrama em blocos do i -ésimo nó escravo de uma rede OWMS - Estrela Simples

O sinal externo sempre provém do nó 1, que é o mestre, e sofre um atraso de percurso τ_{1i} , a ser considerado (para $\forall t > \tau_{1i}$):

$$v_1(t - \tau_{1i}) = V_1 \cdot \text{sen } \Phi_1(t - \tau_{1i}) = V_1 \cdot \text{sen}[\omega_o \cdot (t - \tau_{1i}) + \theta_1(t - \tau_{1i})] \quad (3.6)$$

O sinal local é gerado pelo VCO do nó i , e tem forma semelhante:

$$v_i(t) = V_i \cdot \cos \Phi_i(t) = V_i \cdot \cos [\omega_o \cdot t + \theta_i(t)] \quad (3.7)$$

Levando-se em conta as mesmas considerações da subseção anterior, tem-se:

$$v_{d,i}(t) = K_{m,i} \cdot v_1(t - \tau_{1i}) \cdot v_i(t) \quad (3.8)$$

sendo $K_{m,i}$ o ganho do PD do i -ésimo nó escravo.

Substituindo (3.6) e (3.7) em (3.8) vem:

$$v_{d,i}(t) = K_{m,i} \cdot V_1 \cdot V_i \cdot \underbrace{\sin [\omega_o \cdot (t - \tau_{1i}) + \theta_1(t - \tau_{1i})]}_{\text{termo (a)}} \cdot \underbrace{\cos [\omega_o \cdot t + \theta_i(t)]}_{\text{termo (b)}} \quad (3.9)$$

Para maior simplicidade, desenvolve-se cada termo da equação (3.9) em separado, utilizando-se das seguintes relações trigonométricas:

$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{cases}, \text{ sendo } (\alpha, \beta) \in \Re \quad (3.10)$$

Iniciando pelo termo (a) da equação (3.9):

$$\begin{aligned} \sin[\omega_o \cdot (t - \tau_{1i}) + \theta_1(t - \tau_{1i})] &= \\ &= \sin[\omega_o \cdot (t - \tau_{1i})] \cdot \cos \theta_1(t - \tau_{1i}) + \cos[\omega_o \cdot (t - \tau_{1i})] \cdot \sin \theta_1(t - \tau_{1i}) = \\ &= \sin(\omega_o \cdot t) \cdot \cos(\omega_o \cdot \tau_{1i}) \cdot \cos \theta_1(t - \tau_{1i}) - \sin(\omega_o \cdot \tau_{1i}) \cdot \cos(\omega_o \cdot t) \cdot \cos \theta_1(t - \tau_{1i}) + \\ &\quad + \cos(\omega_o \cdot t) \cdot \cos(\omega_o \cdot \tau_{1i}) \cdot \sin \theta_1(t - \tau_{1i}) + \sin(\omega_o \cdot t) \cdot \sin(\omega_o \cdot \tau_{1i}) \cdot \sin \theta_1(t - \tau_{1i}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Em seguida, desenvolve-se o termo (b) da equação (3.9):

$$\cos[\omega_o \cdot t + \theta_i(t)] = \cos(\omega_o \cdot t) \cdot \cos(\theta_i(t)) - \sin(\omega_o \cdot t) \cdot \sin(\theta_i(t)) \quad (3.12)$$

Substituindo os termos (a) e (b), desenvolvidos em (3.11) e (3.12), na equação (3.9), inicia-se à sua simplificação, utilizando-se as mesmas relações trigonométricas em (3.10), e também pelas que seguem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2\alpha) \\ \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2\alpha) \end{array} \right. , \quad \text{sendo } \alpha \in \Re$$

(3.13)

Desse modo, tem-se:

$$\begin{aligned} v_{d,i}(t) = & K_{m,i} \cdot V_1 \cdot V_i \cdot \left\{ \frac{\sin(2\omega_o \cdot t)}{2} \cdot \cos(\omega_o \cdot \tau_{li}) \cdot \cos \theta_1(t - \tau_{li}) \cdot \cos \theta_i(t) - \right. \\ & - \sin^2(\omega_o \cdot t) \cdot \cos(\omega_o \cdot \tau_{li}) \cdot \cos \theta_1(t - \tau_{li}) \cdot \sin \theta_i(t) + \\ & + \frac{\sin(2\omega_o \cdot t)}{2} \cdot \sin(\omega_o \cdot \tau_{li}) \cdot \cos \theta_1(t - \tau_{li}) \cdot \sin \theta_i(t) - \\ & - \cos^2(\omega_o \cdot t) \cdot \sin(\omega_o \cdot \tau_{li}) \cdot \cos \theta_1(t - \tau_{li}) \cdot \cos \theta_i(t) - \\ & - \frac{\sin(2\omega_o \cdot t)}{2} \cdot \cos(\omega_o \cdot \tau_{li}) \cdot \sin \theta_1(t - \tau_{li}) \cdot \sin \theta_i(t) + \\ & + \cos^2(\omega_o \cdot t) \cdot \cos(\omega_o \cdot \tau_{li}) \cdot \sin \theta_1(t - \tau_{li}) \cdot \cos \theta_i(t) + \\ & + \frac{\sin(2\omega_o \cdot t)}{2} \cdot \sin(\omega_o \cdot \tau_{li}) \cdot \sin \theta_1(t - \tau_{li}) \cdot \cos \theta_i(t) - \\ & \left. - \sin^2(\omega_o \cdot t) \cdot \sin(\omega_o \cdot \tau_{li}) \cdot \sin \theta_1(t - \tau_{li}) \cdot \sin \theta_i(t) \right\} \end{aligned}$$

Simplificando a expressão acima:

$$\begin{aligned}
v_{d,i}(t) = & \frac{K_{m,i} \cdot V_1 \cdot V_i}{2} \cdot \left\{ \sin(2\omega_o \cdot t) \cdot \left[\cos(\omega_o \cdot \tau_{1i}) \cdot (\cos \theta_1(t - \tau_{1i}) \cdot \cos \theta_i(t) - \right. \right. \\
& - \sin \theta_1(t - \tau_{1i}) \cdot \sin \theta_i(t)) + \sin(\omega_o \cdot \tau_{1i}) \cdot (\cos \theta_1(t - \tau_{1i}) \cdot \sin \theta_i(t) + \\
& + \sin \theta_1(t - \tau_{1i}) \cdot \cos \theta_i(t)) \left. \right] + \\
& + \cos(2\omega_o \cdot t) \cdot \left[\cos(\omega_o \cdot \tau_{1i}) \cdot (\sin \theta_1(t - \tau_{1i}) \cdot \cos \theta_i(t) + \right. \\
& + \cos \theta_1(t - \tau_{1i}) \cdot \sin \theta_i(t)) - \sin(\omega_o \cdot \tau_{1i}) \cdot (\cos \theta_1(t - \tau_{1i}) \cdot \cos \theta_i(t) - \\
& - \sin \theta_1(t - \tau_{1i}) \cdot \sin \theta_i(t)) \left. \right] - \\
& - \sin(\omega_o \cdot \tau_{1i}) \cdot (\cos \theta_1(t - \tau_{1i}) \cdot \cos \theta_i(t) + \sin \theta_1(t - \tau_{1i}) \cdot \sin \theta_i(t)) + \\
& + \cos(\omega_o \cdot \tau_{1i}) \cdot (\sin \theta_1(t - \tau_{1i}) \cdot \cos \theta_i(t) - \cos \theta_1(t - \tau_{1i}) \cdot \sin \theta_i(t)) \left. \right\}
\end{aligned}$$

Tem-se ainda:

$$\begin{aligned}
v_{d,i}(t) = & \frac{K_{m,i} \cdot V_1 \cdot V_i}{2} \cdot \left\{ \sin(2\omega_o \cdot t) \cdot \cos[\omega_o \cdot \tau_{1i} - (\theta_1(t - \tau_{1i}) + \theta_i(t))] - \right. \\
& - \cos(2\omega_o \cdot t) \cdot \sin[\omega_o \cdot \tau_{1i} - (\theta_1(t - \tau_{1i}) + \theta_i(t))] + \\
& + \cos(\omega_o \cdot \tau_{1i}) \cdot \sin(\theta_1(t - \tau_{1i}) - \theta_i(t)) - \\
& - \sin(\omega_o \cdot \tau_{1i}) \cdot \cos(\theta_1(t - \tau_{1i}) - \theta_i(t)) \left. \right\}
\end{aligned}$$

Resultando finalmente em:

$$\begin{aligned}
v_{d,i}(t) = & \frac{K_{m,i} \cdot V_1 \cdot V_i}{2} \cdot \left\{ \underbrace{\sin(2\omega_o \cdot t - \omega_o \cdot \tau_{1i} + \theta_1(t - \tau_{1i}) + \theta_i(t))}_{\text{termo de frequência dupla}} + \right. \\
& + \sin(\theta_1(t - \tau_{1i}) - \theta_i(t) - \omega_o \cdot \tau_{1i}) \left. \right\}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Neste estudo, assume-se, como é comum na literatura, que o termo de frequência dupla será eliminado pelo LPF (Gardner, 1979). Estudos mais recentes (Piqueira, Monteiro, 2003) demonstram a validade desta conduta para ganhos relativamente

pequenos, sendo aplicável a este estudo, como se verá mais adiante. Então, desprezando-se o termo de frequência dupla, a expressão (3.14) pode ser apresentada na sua forma mais simples:

$$v_{d,i}(t) = \frac{K_{m,i} \cdot V_1 \cdot V_i}{2} \cdot \text{sen}(\theta_1(t - \tau_{1i}) - \theta_i(t) - \omega_o \cdot \tau_{1i}) \quad (3.15)$$

Tomando a relação entre a saída $v_{c,i}(t)$ e a entrada $v_{d,i}(t)$ do filtro:

$$F_i(s) = \frac{V_{c,i}(s)}{V_{d,i}(s)} = \frac{b_{0,i}}{b_{1,i} \cdot s + b_{0,i}} \quad (3.16)$$

Aplicando a inversa da Transformada de Laplace de (3.16), para condições iniciais nulas:

$$b_{1,i} \cdot \dot{v}_{c,i}(t) + b_{0,i} \cdot v_{c,i}(t) = b_{0,i} \cdot v_{d,i}(t) \quad (3.17)$$

Substituindo (3.5) e (3.15) em (3.17):

$$b_{1,i} \cdot \ddot{\theta}_i(t) + b_{0,i} \cdot \dot{\theta}_i(t) = b_{0,i} \cdot K_i \cdot \frac{K_{m,i} \cdot V_1 \cdot V_i}{2} \cdot \text{sen}(\theta_1(t - \tau_{1i}) - \theta_i(t) - \omega_o \cdot \tau_{1i}) \quad (3.18)$$

Denominando então, os dois parâmetros de ajuste do PLL:

$$\begin{cases} \mu_{1,i} \stackrel{\Delta}{=} \frac{b_{0,i}}{b_{1,i}} = \frac{1}{R \cdot C} \\ \mu_{2,i} \stackrel{\Delta}{=} K_i \cdot \frac{K_{m,i} \cdot V_1 \cdot V_i}{2} \end{cases} \quad (3.19)$$

Pode-se reescrever (3.18):

$$\ddot{\theta}_i(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\theta}_i(t) = \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \text{sen}(\theta_1(t - \tau_{1i}) - \theta_i(t) - \omega_o \cdot \tau_{1i}) \quad (3.20)$$

No estudo i-ésimo nó escravo, interessa verificar o sincronismo do oscilador em questão com o mestre. Entretanto, para que descrição do sincronismo do PLL se torne mais completa e precisa, propõem-se que dois erros de fase, $\varphi(t)$, sejam definidos, sendo $\varphi(t) \in [-\pi, \pi[$:

- O primeiro, $\varphi_{ii}(t)$, entre o sinal local e o externo do i-ésimo nó escravo, ou

$$\text{seja, } \varphi_{ii}(t) \stackrel{\Delta}{=} \Phi_1(t - \tau_{1i}) - \Phi_i(t). \quad (3.21)$$

- O segundo, $\varphi_{li}(t)$, entre o sinal local do i-ésimo nó escravo e o sinal local do mestre, ou seja, $\varphi_{li}(t) \stackrel{\Delta}{=} \Phi_1(t) - \Phi_i(t)$. (3.22)

De (3.21) e (3.22) decorre que:

$$\varphi_{ii}(t) = [\omega_o \cdot (t - \tau_{li}) + \theta_1(t - \tau_{li})] - [\omega_o \cdot t + \theta_i(t)] \quad (3.23)$$

$$\varphi_{li}(t) = [\omega_o \cdot t + \theta_1(t)] - [\omega_o \cdot t + \theta_i(t)] \quad (3.24)$$

Simplificando (3.23) e (3.24):

$$\varphi_{ii}(t) = \theta_1(t - \tau_{li}) - \theta_i(t) - \omega_o \cdot \tau_{li} \quad (3.25)$$

$$\varphi_{li}(t) = \theta_1(t) - \theta_i(t) \quad (3.26)$$

Derivando as equações (3.25) e (3.26) em relação ao tempo, são obtidos os respectivos erros de frequência:

$$\dot{\varphi}_{ii}(t) = \dot{\theta}_1(t - \tau_{li}) - \dot{\theta}_i(t) \quad (3.27)$$

$$\dot{\varphi}_{li}(t) = \dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_i(t) \quad (3.28)$$

Derivando novamente (3.27) e (3.28), obtém-se as acelerações dos erros de fase:

$$\ddot{\varphi}_{ii}(t) = \ddot{\theta}_1(t - \tau_{li}) - \ddot{\theta}_i(t) \quad (3.29)$$

$$\ddot{\varphi}_{li}(t) = \ddot{\theta}_1(t) - \ddot{\theta}_i(t) \quad (3.30)$$

Assim, utilizando as equações (3.25), (3.26), (3.27), (3.28), (3.29) e (3.30) em (3.20), obtém-se o par de equações que descreve a dinâmica de um nó i qualquer:

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{\varphi}_{ii}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\varphi}_{ii}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \sin(\varphi_{ii}(t)) = \ddot{\theta}_1(t - \tau_{li}) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\theta}_1(t - \tau_{li}) \\ \ddot{\varphi}_{li}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\varphi}_{li}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \sin(\varphi_{li}(t)) = \ddot{\theta}_1(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\theta}_1(t) \end{cases}} \quad (3.31)$$

O sistema (3.31) é constituído de um par de equações diferenciais ordinárias, não-lineares de 2ª ordem. Ele descreve a dinâmica de um PLL cujo sincronismo depende dos parâmetros do i-ésimo nó escravo, aqui representados por $\mu_{1,i}$ e $\mu_{2,i}$.

No próximo capítulo estuda-se a estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema, frente a variações dos valores desses parâmetros. Serão considerados a partir do mestre, dois tipos de entradas de fase que aparecem com muita frequência em telecomunicações e controle: o degrau e a rampa de fase.

Vale frisar que eventuais perturbações, tais como as originadas pelo envelhecimento do cristal, além do deslocamento Doppler de frequência, decorrente do movimento do mestre em relação aos escravos, não serão considerados aqui, tendo sido estudados por Piqueira (1997).

3.3 EQUACIONAMENTO DE UM PLL DA REDE OWMS CADEIA SIMPLES

Nas redes OWMS do tipo Cadeia Simples, o primeiro escravo está diretamente ligado ao mestre e todos os outros são sucessivamente ligados. Assim, o equacionamento para o segundo nó é idêntico ao já realizado para a rede OWMS - Estrela Simples. Para os escravos seguintes, o procedimento é análogo. Entretanto, alguns detalhes devem ser explicitados.

Pode-se representar o PLL de qualquer i -ésimo ($i=3,4,\dots,n$) nó escravo da rede, conforme o diagrama em blocos simplificado da figura 10.

Fig. 10: Diagrama em blocos do i -ésimo nó escravo de uma rede OWMS Cadeia Simples.

O sinal que sai do VCO do nó $i-1$ é representado por uma função do tipo co-seno, e o atraso de percurso que sofre até o nó i é $\tau_{(i-1)i}$ (para $\forall t > \tau_{(i-1)i}$). Assim:

$$v_{i-1}(t) = V_{i-1} \cdot \cos \Phi_{i-1}(t) \Rightarrow v_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) = V_{i-1} \cdot \cos \Phi_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \quad (3.32)$$

Entretanto, o sinal externo de um PLL deve ser do tipo seno, para ser comparado com o sinal local, que é do tipo co-seno.

Sabendo que:

$$\cos \alpha = \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.33)$$

Reescreve-se a equação (3.32):

$$v_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) = V_{i-1} \cdot \sin \left[\omega_o \cdot (t - \tau_{(i-1)i}) + \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) + \frac{\pi}{2} \right] \quad (3.34)$$

Logo, das equações (3.34) e (3.7), obtém-se o erro de fase dinâmico:

$$v_{d,i}(t) = K_{m,i} \cdot V_{i-1} \cdot V_i \cdot \underbrace{\text{sen} \left[\omega_o \cdot (t - \tau_{(i-1)i}) + \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) + \frac{\pi}{2} \right]}_{\text{termo (a)}} \cdot \underbrace{\cos \left[\omega_o \cdot t + \theta_i(t) \right]}_{\text{termo (b)}} \quad (3.35)$$

Utilizando-se das mesmas relações trigonométricas (3.10) da subseção anterior, pode-se desenvolver cada um dos termos de (3.35). Inicia-se pelo ao termo (a):

$$\begin{aligned} \text{sen} \left[\omega_o \cdot (t - \tau_{(i-1)i}) + \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) + \frac{\pi}{2} \right] &= \\ &= \text{sen}(\omega_o \cdot t - \omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \left(\theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) + \frac{\pi}{2} \right) + \\ &+ \text{sen} \left(\theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos(\omega_o \cdot t - \omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) = \\ &= \left\{ \left[\text{sen}(\omega_o \cdot t) \cdot \cos(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) - \text{sen}(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos(\omega_o \cdot t) \right] \cdot \left[-\text{sen} \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \right] + \right. \\ &+ \left[\cos \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \right] \cdot \left[\cos(\omega_o \cdot t) \cdot \cos(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) + \right. \\ &+ \left. \left. \text{sen}(\omega_o \cdot t) \cdot \text{sen}(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \right] \right\} = \\ &= -\text{sen}(\omega_o \cdot t) \cdot \cos(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen} \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) + \\ &+ \cos(\omega_o \cdot t) \cdot \text{sen}(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen} \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) + \\ &+ \cos(\omega_o \cdot t) \cdot \cos(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) + \\ &+ \text{sen}(\omega_o \cdot t) \cdot \text{sen}(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Desenvolve-se agora, o termo (b):

$$\cos[\omega_o \cdot t + \theta_i(t)] = \cos(\omega_o \cdot t) \cdot \cos(\theta_i(t)) - \text{sen}(\omega_o \cdot t) \cdot \text{sen}(\theta_i(t)) \quad (3.37)$$

Substituindo os termos (a) e (b), desenvolvidos em (3.36) e (3.37), na equação (3.35), pode-se simplificá-la, através das mesmas relações trigonométricas (3.10) e (3.13), utilizadas na subseção anterior:

$$\begin{aligned}
 v_{d,i}(t) = & K_{m,i} \cdot V_{i-1} \cdot V_i \cdot \left\{ -\frac{\text{sen}(2\omega_o \cdot t)}{2} \cdot \cos(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen} \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \theta_i(t) + \right. \\
 & + \text{sen}^2(\omega_o \cdot t) \cdot \cos(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen} \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen} \theta_i(t) - \\
 & - \frac{\text{sen}(2\omega_o \cdot t)}{2} \cdot \text{sen}(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen} \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen} \theta_i(t) + \\
 & + \cos^2(\omega_o \cdot t) \cdot \text{sen}(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen} \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \theta_i(t) - \\
 & - \frac{\text{sen}(2\omega_o \cdot t)}{2} \cdot \cos(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen} \theta_i(t) + \\
 & + \cos^2(\omega_o \cdot t) \cdot \cos(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \theta_i(t) + \\
 & + \frac{\text{sen}(2\omega_o \cdot t)}{2} \cdot \text{sen}(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \theta_i(t) - \\
 & \left. - \text{sen}^2(\omega_o \cdot t) \cdot \text{sen}(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen} \theta_i(t) \right\}
 \end{aligned}$$

Continuando:

$$\begin{aligned}
v_{d,i}(t) = & K_{m,i} \cdot V_{i-1} \cdot V_i \cdot \left\{ \frac{\text{sen}(2\omega_o \cdot t)}{2} \cdot \left[\text{sen}(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot (\cos \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \theta_i(t) - \right. \right. \\
& - \text{sen} \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen} \theta_i(t)) - \cos(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot (\text{sen} \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \theta_i(t) + \\
& + \cos \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen} \theta_i(t)) \Big] + \\
& + \text{sen}^2(\omega_o \cdot t) \cdot \left[\cos(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen} \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen} \theta_i(t) - \right. \\
& - \text{sen}(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen} \theta_i(t) \Big] + \\
& + \cos^2(\omega_o \cdot t) \cdot \left[\text{sen}(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen} \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \theta_i(t) + \right. \\
& + \cos(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \theta_i(t) \Big] \Big\}
\end{aligned}$$

Ainda:

$$\begin{aligned}
v_{d,i}(t) = & \frac{K_{m,i} \cdot V_{i-1} \cdot V_i}{2} \cdot \left\{ \text{sen}(2\omega_o \cdot t) \cdot \text{sen}[\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i} - (\theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) + \theta_i(t))] + \right. \\
& + \cos(2\omega_o \cdot t) \cdot \left[\cos(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot (\cos \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \theta_i(t) - \right. \\
& - \text{sen} \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen} \theta_i(t)) + \text{sen}(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot (\text{sen} \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \theta_i(t) + \\
& + \cos \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen} \theta_i(t)) \Big] + \\
& + \cos(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot (\cos \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \theta_i(t) + \text{sen} \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen} \theta_i(t)) + \\
& + \text{sen}(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot (\text{sen} \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos \theta_i(t) - \cos \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen} \theta_i(t)) \Big\}
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
v_{d,i}(t) = & \frac{K_{m,i} \cdot V_{i-1} \cdot V_i}{2} \cdot \left\{ \text{sen}(2\omega_o \cdot t) \cdot \text{sen}[\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i} - (\theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) + \theta_i(t))] + \right. \\
& + \cos(2\omega_o \cdot t) \cdot \cos[\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i} - (\theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) + \theta_i(t))] + \\
& + \cos(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot \cos(\theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) - \theta_i(t)) + \\
& \left. + \text{sen}(\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i}) \cdot \text{sen}(\theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) - \theta_i(t)) \right\}
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
v_{d,i}(t) = & \frac{K_{m,i} \cdot V_{i-1} \cdot V_i}{2} \cdot \left\{ \underbrace{\cos(2\omega_o \cdot t - \omega_o \cdot \tau_{(i-1)i} + \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) + \theta_i(t))}_{\text{termo de frequência dupla}} + \right. \\
& \left. + \cos[\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i} - (\theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) - \theta_i(t))] \right\} \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Novamente, o termo de frequência dupla de (3.38) é desprezado (Gardner, 1979; Piqueira, Monteiro, 2003):

$$v_{d,i}(t) = \frac{K_{m,i} \cdot V_{i-1} \cdot V_i}{2} \cdot \cos[\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i} - (\theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) - \theta_i(t))] \quad (3.39)$$

Transformando o co-seno em seno em (3.39), obtém-se a expressão do erro de fase dinâmico:

$$v_{d,i}(t) = \frac{K_{m,i} \cdot V_{i-1} \cdot V_i}{2} \cdot \text{sen}\left[\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i} - (\theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) - \theta_i(t)) + \frac{\pi}{2}\right] \quad (3.40)$$

Através de procedimento análogo ao da subseção anterior:

$$\ddot{\theta}_i(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\theta}_i(t) = \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \text{sen}\left[\omega_o \cdot \tau_{(i-1)i} - (\theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) - \theta_i(t)) + \frac{\pi}{2}\right] \quad (3.41)$$

Definindo os erros de fase:

$$\varphi_{ii}(t) = \overset{\Delta}{\Phi}_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) - \Phi_i(t) \quad (3.42)$$

$$\varphi_{li}(t) = \overset{\Delta}{\Phi}_1(t) - \Phi_i(t) \quad (3.43)$$

Obtém-se, desenvolvendo (3.42) e (3.43):

$$\begin{aligned}
\varphi_{ii}(t) = & \left[\omega_o \cdot (t - \tau_{(i-1)i}) + \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \right] - \left[\omega_o \cdot t + \theta_i(t) \right] \\
(3.44)
\end{aligned}$$

$$\varphi_{1i}(t) = \left[\omega_o \cdot t + \theta_1(t) \right] - \left[\omega_o \cdot t + \theta_i(t) \right]$$

(3.45)

Simplificando (3.44) e (3.45):

$$\varphi_{ii}(t) = \theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) - \theta_i(t) - \omega_o \cdot \tau_{(i-1)i} \quad (3.46)$$

$$\varphi_{1i}(t) = \theta_1(t) - \theta_i(t) \quad (3.47)$$

Pelas primeiras e segundas derivadas de (3.44) e (3.45) em relação ao tempo, obtém-se os erros de frequência e as acelerações dos erros de fase:

$$\dot{\varphi}_{ii}(t) = \dot{\theta}_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) - \dot{\theta}_i(t) \Rightarrow \ddot{\varphi}_{ii}(t) = \ddot{\theta}_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) - \ddot{\theta}_i(t) \quad (3.48)$$

$$\dot{\varphi}_{1i}(t) = \dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_i(t) \Rightarrow \ddot{\varphi}_{1i}(t) = \ddot{\theta}_1(t) - \ddot{\theta}_i(t) \quad (3.49)$$

Finalmente, pela utilização das equações (3.46), (3.47), (3.48) e (3.49) em (3.41), obtém-se o par de equações que descreve a dinâmica do PLL em questão:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\varphi}_{ii}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\varphi}_{ii}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{ii}(t)\right) = \ddot{\theta}_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\theta}_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \\ \ddot{\varphi}_{1i}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\varphi}_{1i}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{ii}(t)\right) = \ddot{\theta}_1(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\theta}_1(t) \end{array} \right. \quad (3.50)$$

Assim como na Estrela Simples, obteve-se um sistema constituído de um par de equações diferenciais ordinárias, não-lineares de 2^a ordem. Ele também descreve a dinâmica de um PLL cujo sincronismo depende dos parâmetros do i-ésimo nó escravo, aqui representados por $\mu_{1,i}$ e $\mu_{2,i}$. No próximo capítulo estuda-se a estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema, frente a variações dos valores desses parâmetros. Também serão aplicados a partir do mestre, o degrau e a rampa de fase, para a análise da dinâmica da rede.

Da mesma forma que anteriormente, os efeitos provocados por eventuais perturbações ou por efeito Doppler não serão considerados.

3.4 COMPARAÇÃO DOS SISTEMAS DINÂMICOS QUE DESCREVEM OS PLLs DAS REDES ESTRELA E CADEIA SIMPLES

Antes de se iniciar o próximo capítulo, é conveniente reapresentar os sistemas dinâmicos apresentados em (3.31) e (3.50), que por serem muito semelhantes, deve-se, então, ressaltar suas diferenças:

- Estrela Simples:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_{ii}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\varphi}_{ii}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \sin(\varphi_{ii}(t)) = \ddot{\theta}_1(t - \tau_{1i}) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\theta}_1(t - \tau_{1i}) \\ \ddot{\varphi}_{1i}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\varphi}_{1i}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \sin(\varphi_{ii}(t)) = \ddot{\theta}_1(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\theta}_1(t) \end{cases}$$

- Cadeia Simples:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_{ii}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\varphi}_{ii}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{ii}(t)\right) = \ddot{\theta}_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\theta}_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \\ \ddot{\varphi}_{1i}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\varphi}_{1i}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{ii}(t)\right) = \ddot{\theta}_1(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\theta}_1(t) \end{cases}$$

Como é possível observar, a única diferença significativa entre os dois sistemas, está nos termos que se referem às fases $\theta_1(t - \tau_{1i})$ e $\theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i})$, relativas ao sinal proveniente do nó anterior, que para a Estrela é o mestre e para a Cadeia, pode ser o mestre ou o escravo $i-1$. O fato de se conhecer à priori o sinal do mestre, mas não do escravo $i-1$, revela dificuldades no equacionamento da rede Cadeia Simples, fato que será discutido no capítulo 5.

CAPÍTULO 4

ESTUDO DA ESTABILIDADE DAS REDES OWMS – ESTRELA SIMPLES

Dando prosseguimento ao estudo, são analisadas as condições de existência e estabilidade do sincronismo das redes OWMS – Estrela Simples.

Primeiramente, são reescritas as equações que descrevem a dinâmica do i -ésimo PLL da rede, sob a forma de um sistema de equações no espaço de estados. Aplicam-se dois tipos de entradas que aparecem com muita frequência na prática: o degrau e a rampa de fase. Verifica-se então, através da Teoria de Sistemas Dinâmicos, a estabilidade dos pontos de equilíbrio encontrados. A existência de pontos não-hiperbólicos exige um tratamento diferenciado, via Teorema da Variedade Central, uma vez que a linearização das equações em torno dos mesmos não permite obter as conclusões desejadas. No final de cada subseção, são apresentados os diagramas de bifurcação correspondentes aos pontos estudados.

4.1 ENTRADA TIPO DEGRAU DE FASE

Para entradas $\theta_1(t)$, do tipo degrau de fase a partir do mestre, de qualquer amplitude, pode-se escrever:

$$\dot{\theta}_1(t) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta}_1(t) = 0 \quad (4.1)$$

e também, para $\forall t > \tau_{1i}$:

$$\dot{\theta}_1(t - \tau_{1i}) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta}_1(t - \tau_{1i}) = 0 \quad (4.2)$$

Substituindo as entradas (4.1) e (4.2) no sistema de equações que descreve a dinâmica do PLL (3.31), tem-se:

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_{ii}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\phi}_{ii}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \sin(\phi_{ii}(t)) = 0 \\ \ddot{\phi}_{li}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\phi}_{li}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \sin(\phi_{ii}(t)) = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Para simplificar o estudo da dinâmica do PLL frente a variações nos valores dos seus parâmetros, faz-se uma mudança de variável independente:

$$T = \mu_{1,i} \cdot t \quad (4.4)$$

Dessa forma, através da Regra da Cadeia:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dT} \cdot \frac{dT}{dt} \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dT^2} \cdot \left(\frac{dT}{dt}\right)^2 \quad (4.5)$$

Utilizando uma notação simplificada para (4.5):

$$\dot{\varphi}(t) = \varphi'(T) \cdot \mu_{1,i} \Rightarrow \ddot{\varphi}(t) = \varphi''(T) \cdot \mu_{1,i}^2 \quad (4.6)$$

Pela substituição das relações de (4.6) em (4.3), pode-se restringir a análise à variação de um único parâmetro, designado a partir de agora por: $\mu_i = \frac{\mu_{2,i}}{\mu_{1,i}}$. Logo:

$$\begin{cases} \varphi''_{ii}(T) + \varphi'_{ii}(T) + \mu_i \cdot \text{sen}(\varphi_{ii}(T)) = 0 \\ \varphi''_{li}(T) + \varphi'_{li}(T) + \mu_i \cdot \text{sen}(\varphi_{ii}(T)) = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Escolhendo convenientemente¹ as variáveis de estado, pode-se escrever o sistema de equações correspondentes a dinâmica do PLL em questão:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi'_{li} \\ x_2 = \varphi_{ii} \\ x_3 = \varphi'_{ii} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = -x_1 - \mu_i \cdot \text{sen } x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ x'_3 = -x_3 - \mu_i \cdot \text{sen } x_2 \end{cases} \quad (4.8)$$

Seus pontos de equilíbrio são obtidos pela definição: $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$. Dessa forma, tem-se:

¹ No apêndice, encontra-se a justificativa para esta escolha.

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - \mu_i \cdot \text{sen } x_2 = 0 \\ x_2' = x_3 = 0 \\ x_3' = -x_3 - \mu_i \cdot \text{sen } x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_3^* = 0 \Rightarrow \text{sen } x_2^* = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2^* = 0 \\ \text{ou} \\ x_2^* = -\pi \end{cases} \Rightarrow x_1^* = 0$$

Portanto, existem dois pontos de equilíbrio:

$$P_1 = (0,0,0) \text{ e } P_2 = (0,-\pi,0) \quad (4.9)$$

A estabilidade desses pontos será estudada em seguida.

4.1.1 ESTUDO DA ESTABILIDADE DE P_1

A análise qualitativa de um sistema dinâmico não-linear começa pela sua linearização em torno dos seus pontos de equilíbrio.

Primeiramente, calcula-se a matriz Jacobiana em P_1 , obtido em (4.9):

$$J_{P_1} = \begin{bmatrix} -1 & -\mu_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\mu_i & -1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Em seguida, é necessário resolver:

$$\det(J_{P_1} - \lambda \cdot I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & -\mu_i & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & -\mu_i & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.11)$$

O polinômio característico de (4.10) obtido de (4.11) é:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + (1 + \mu_i) \cdot \lambda + \mu_i = 0 \quad (4.12)$$

E assim, as raízes de (4.12) são os autovalores de (4.10), calculada em P_1 :

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\mu_i}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\mu_i}}{2} \quad (4.13)$$

Portanto, como se verifica, a estabilidade de P_1 depende de μ_i . Pela análise linear, quando a parte real de um autovalor é negativa (positiva), o autovetor correspondente determina uma direção estável (instável). Caso todos os autovalores tenham parte

real negativa, o ponto de equilíbrio é dito estável (assintoticamente), no sentido de Lyapunov. Então, basta que pelo menos um autovalor tenha parte real positiva, para que o ponto de equilíbrio seja instável. Em ambos os casos, o ponto de equilíbrio é denominado hiperbólico. Entretanto, se pelo menos um autovalor tiver parte real nula (ou mesmo for nulo), o ponto de equilíbrio é denominado não-hiperbólico, situação em que a análise linear falha na determinação da sua estabilidade.

Uma vez que $\lambda_1 = -1$, basta verificar os possíveis valores da parte real de λ_2 e λ_3 , concluindo-se que:

- para $\mu_i > 0 \Rightarrow \dim(E^s) = 3 \Rightarrow P_1$ é assintoticamente estável².
- para $\mu_i < 0 \Rightarrow \dim(E^s) = 2, \dim(E^u) = 1 \Rightarrow P_1$ é instável².
- para $\mu_i = 0 \Rightarrow \dim(E^s) = 2, \dim(E^c) = 1 \Rightarrow$ nada se pode afirmar a respeito da estabilidade de P_1 , considerando apenas a aproximação linear².

Então, para analisar o comportamento do sistema no subespaço central, será aplicado o Teorema da Variedade Central.

Uma vez que a estabilidade do sistema depende de μ_i , é conveniente incluir esse parâmetro como uma nova variável dependente. Com essa técnica, a dinâmica da rede fica descrita por:

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - \mu_i \cdot \sin x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = -x_3 - \mu_i \cdot \sin x_2 \end{cases} \quad e \quad \mu_i' = 0 \quad (4.14)$$

O teorema exige que o sistema (4.14) esteja na forma canônica de Jordan.

Primeiramente, é necessário fazer a expansão em série de Taylor da função seno, em torno de $x_2^* = 0$. Faz-se, então, como primeira aproximação³, $\sin(x_2) \approx x_2$.

O próximo passo consiste em calcular a nova matriz Jacobiana em P_1 :

² O símbolo $\dim(E)$ é utilizado para designar: *dimensão dos subespaços estável* (E^s), *instável* (E^u) e *central* (E^c), que vêm do inglês *stable*, *unstable* e *central* (Wiggins, 1990).

³ Outras aproximações, considerando-se termos de ordem superior, serão realizadas no capítulo 6.

$$J_{P_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

É importante notar que o termo $\mu_i \cdot x_2$ passa a ser não-linear.

Para maior simplicidade, a linha e a coluna correspondentes à variável μ_i , em (4.15), estão sendo omitidas, uma vez que a introdução de μ_i como variável não alterou a dinâmica do sistema.

Então, o sistema é reescrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu_i \cdot x_2 \\ 0 \\ -\mu_i \cdot x_2 \end{bmatrix} \quad ou \quad X' = J_{P_1} \cdot X + F \quad (4.16)$$

$$e \quad \mu'_i = 0$$

Os autovalores λ e os autovetores $\vec{m}$, correspondentes à (4.15), são:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \Rightarrow \vec{m}_{\lambda_1} = [0, -1, +1]^T \\ \lambda_2 = -1 \Rightarrow \vec{m}_{\lambda_2} = [+1, 0, 0]^T \\ \lambda_3 = 0 \Rightarrow \vec{m}_{\lambda_3} = [0, +1, 0]^T \end{cases} \quad (4.17)$$

Utilizando a base M , composta pelos autovetores $\vec{m}$ de J_{P_1} , define-se um novo conjunto de variáveis de estado $V=(v_1, v_2, v_3)$, de modo que:

$$X = M \cdot V \quad \Rightarrow \quad V = M^{-1} \cdot X$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Conforme requerido, o sistema (4.18) é reescrito na forma canônica de Jordan:

$$V' = \begin{bmatrix} M^{-1} \cdot J_{P_1} \cdot M \end{bmatrix} \cdot V + M^{-1} \cdot F$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu_i \cdot (-v_1 + v_3) \\ -\mu_i \cdot (-v_1 + v_3) \\ -\mu_i \cdot (-v_1 + v_3) \end{bmatrix} \quad e \quad \mu_i' = 0 \quad (4.19)$$

Então, de acordo com o Teorema da Variedade Central (Guckenheimer e Holmes, 1983; Wiggins, 1990; Monteiro, 2002), procura-se a variedade central W^c , que seja tangente em P_1 , ao subespaço central E^c . Ou seja:

$$W^c(0) = \left\{ (v_1, v_2, v_3, \mu_i) \in \mathfrak{R}^4 / v_1 = h_1(x, \mu_i), v_2 = h_2(x, \mu_i), v_3 = x, \right. \\ \left. h_j(0,0) = 0, Dh_j(0,0) = 0, j = 1,2 \right\} \quad (4.20)$$

para x e μ_i suficientemente pequenos.

Deve-se notar que a equação que descreve a dinâmica ao longo da variedade central não depende de $v_2 = h_2(x, \mu_i)$. Portanto, basta estimar $h_1(x, \mu_i)$. Como primeira tentativa⁴, utiliza-se polinômio formado por monômios do segundo grau:

$$h_1(x, \mu_i) = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x \cdot \mu_i + c_1 \cdot \mu_i^2, \quad (a_1, b_1, c_1) \in \mathfrak{R} \quad (4.21)$$

Pelo Teorema de Henry-Carr (Guckenheimer e Holmes, 1983; Wiggins, 1990; Monteiro, 2002), a variedade central deve satisfazer:

$$N(h(x, \mu_i)) = D_x h(x, \mu_i) [A \cdot x + f(x, h(x, \mu_i), \mu_i)] - B \cdot h(x, \mu_i) - g(x, h(x, \mu_i), \mu_i) = 0 \quad (4.22)$$

sendo em (4.19): A , a matriz dos autovalores com parte real nula, $f(x, h(x, \mu_i), \mu_i)$, a parte não linear correspondente, B , a matriz dos autovalores com parte real negativa e $g(x, h(x, \mu_i), \mu_i)$, a parte não linear correspondente.

Fazendo as substituições de (4.21) em (4.22):

$$\begin{aligned} & (2a_1 \cdot x + b_1 \cdot \mu_i) \cdot \left[0 + (-\mu_i) \cdot (-a_1 \cdot x^2 - b_1 \cdot x \cdot \mu_i - c_1 \cdot \mu_i^2 + x) \right] - \\ & - (-1) \cdot (a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x \cdot \mu_i + c_1 \cdot \mu_i^2) - (-\mu_i) \cdot (-a_1 \cdot x^2 - b_1 \cdot x \cdot \mu_i - c_1 \cdot \mu_i^2 + x) = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

⁴ Outras aproximações, considerando-se polinômios de ordem superior, serão realizadas no capítulo 6.

Pela resolução de (4.23) é possível obter, igualando os termos de igual potência, os coeficientes de $h_1(x, \mu_i)$:

$$\begin{cases} \mu_i^2 : & c_1 = 0 \\ \mu_i \cdot x : & 1 + b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = -1 \Rightarrow h_1(x, \mu_i) = -\mu_i \cdot x \\ x^2 : & a_1 = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

Substituindo (4.24) no sistema (4.19), e considerando-se as definições de (4.20):

$$x' = -\mu_i \cdot [-(-\mu_i \cdot x) + x] = -\mu_i^2 \cdot x - \mu_i \cdot x \quad (4.25)$$

Portanto, o campo de vetores restrito à variedade central, desprezando-se os termos de ordem superior, é dado por:

$$\begin{cases} x' = -\mu_i \cdot x \\ \mu_i' = 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

O retrato de fases correspondente à (4.26), ilustra para $\mu_i > 0$, a estabilidade do sistema:

Fig. 11: Retrato de fases em P_1 , para $\mu_i > 0$.

Nesse tipo de gráfico, o sentido das flechas indica a evolução temporal do sistema a partir de todas as condições iniciais definidas para (4.26).

Fazendo $x' = 0$ em (4.26), tem-se $x^* = 0$, ponto de equilíbrio. Verifica-se sua estabilidade derivando (4.26) em relação à x :

$$\frac{d(x')}{dx} = -\mu_i \quad (4.27)$$

Resultando em equilíbrio estável para $\mu_i > 0$ e equilíbrio instável para $\mu_i < 0$. O diagrama de bifurcação correspondente a essas conclusões, encontra-se na figura 12.

Fig. 12: Diagrama de bifurcação para P_1 .

Nesse tipo de diagrama, as flechas indicam a evolução temporal de $x(t)$, para um dado valor de μ_i e para uma dada condição inicial sobre a flecha.

4.1.2 ESTUDO DA ESTABILIDADE DE P_2

Analogamente ao caso anterior, inicia-se a análise pela linearização em torno de P_2 , obtido em (4.9). Desse modo, como primeiro passo, calcula-se a matriz Jacobiana em P_2 :

$$J_{P_2} = \begin{bmatrix} -1 & +\mu_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & +\mu_i & -1 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Em seguida, utiliza-se a relação:

$$\det(J_{P_2} - \lambda \cdot I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & +\mu_i & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & +\mu_i & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.29)$$

De (4.29) se obtém o polinômio característico de (4.28):

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + (1 - \mu_i) \cdot \lambda - \mu_i = 0 \quad (4.30)$$

E assim, as raízes de (4.30) são os autovalores de (4.28) calculada em P_2 :

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\mu_i}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\mu_i}}{2} \quad (4.31)$$

Como $\lambda_1 = -1$, basta então, verificar os possíveis valores da parte real de λ_2 e λ_3 . Levando-se em conta as mesmas observações da subseção anterior, conclui-se que:

- para $\mu_i < 0 \Rightarrow \dim(E^s) = 3$, portanto P_2 é assintoticamente estável.
- para $\mu_i > 0 \Rightarrow \dim(E^s) = 2, \dim(E^u) = 1$, portanto P_2 é instável.
- para $\mu_i = 0 \Rightarrow \dim(E^s) = 2, \dim(E^c) = 1$, nada se pode afirmar a respeito da estabilidade de P_2 , considerando apenas a aproximação linear.

Novamente, para analisar o comportamento do sistema no subespaço central será aplicado o Teorema da Variedade Central, incluindo-se o parâmetro μ_i como uma nova variável dependente.

A dinâmica do PLL em questão é definida pelo mesmo sistema de equações diferenciais autônomas:

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - \mu_i \cdot \text{sen } x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = -x_3 - \mu_i \cdot \text{sen } x_2 \end{cases} \quad e \quad \mu_i' = 0 \quad (4.32)$$

Para reescrever o sistema (4.32) na forma canônica de Jordan, é necessário, primeiramente, fazer a expansão em série de Taylor da função seno, em torno de $x_2^* = -\pi$. Faz-se, então, como primeira aproximação⁵, $\text{sen}(x_2) \approx -(x_2 + \pi)$.

O teorema exige ainda, que o ponto de equilíbrio esteja na origem. Fazendo $\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{x}_2 = x_2 + \pi$ e $\tilde{x}_3 = x_3$, obtém-se a translação do sistema (4.32) para a origem do sistema de coordenadas:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1' = -\tilde{x}_1 + \mu_i \cdot \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_2' = \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_3' = -\tilde{x}_3 + \mu_i \cdot \tilde{x}_2 \end{cases} \quad e \quad \mu_i' = 0 \quad (4.33)$$

Como a parte linear de (4.33) é exatamente igual a do sistema (4.16) em P_1 , seus autovalores e autovetores também são os mesmos. Desse modo, reescreve-se o sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1' \\ \tilde{x}_2' \\ \tilde{x}_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +\mu_i \cdot \tilde{x}_2 \\ 0 \\ +\mu_i \cdot \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \quad e \quad \mu_i' = 0 \quad (4.34)$$

Através da mesma base definida em (4.17) e (4.18) para P_1 , o sistema (4.34) é simplificado para forma canônica de Jordan:

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +\mu_i \cdot (-v_1 + v_3) \\ +\mu_i \cdot (-v_1 + v_3) \\ +\mu_i \cdot (-v_1 + v_3) \end{bmatrix} \quad e \quad \mu_i' = 0 \quad (4.35)$$

Então, do Teorema da Variedade Central (Guckenheimer e Holmes, 1983; Wiggins, 1990; Monteiro, 2002), procura-se:

⁵ Outras aproximações, considerando-se termos de ordem superior, serão realizadas no capítulo 6.

$$W^c(0) = \left\{ (v_1, v_2, v_3, \mu_i) \in \mathfrak{R}^4 / v_1 = h_1(x, \mu_i), v_2 = h_2(x, \mu_i), v_3 = x, \right. \\ \left. h_j(0,0) = 0, Dh_j(0,0) = 0, j = 1,2 \right\} \quad (4.36)$$

para x e μ_i suficientemente pequenos.

Assim como na subseção anterior, basta estimar $h_1(x, \mu_i)$. Como primeira tentativa⁶, utiliza-se um polinômio formado por monômios do segundo grau:

$$h_1(x, \mu_i) = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x \cdot \mu_i + c_1 \cdot \mu_i^2, \quad (a_1, b_1, c_1) \in \mathfrak{R} \quad (4.37)$$

Pelo Teorema de Henry-Carr (Guckenheimer e Holmes, 1983; Wiggins, 1990; Monteiro, 2002), a variedade central deve satisfazer a mesma relação de (4.20) ou seja:

$$N(h(x, \mu_i)) = 0 \quad (4.38)$$

Fazendo as substituições de (4.37) em (4.38):

$$\begin{aligned} & (2a_1 \cdot x + b_1 \cdot \mu_i) \cdot \left[0 + \mu_i \cdot (-a_1 \cdot x^2 - b_1 \cdot x \cdot \mu_i - c_1 \cdot \mu_i^2 + x) \right] - \\ & - (-1) \cdot (a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x \cdot \mu_i + c_1 \cdot \mu_i^2) - \mu_i \cdot (-a_1 \cdot x^2 - b_1 \cdot x \cdot \mu_i - c_1 \cdot \mu_i^2 + x) = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Pela resolução de (4.39) é possível obter, igualando os termos de igual potência, os coeficientes de $h_1(x, \mu_i)$:

$$\begin{cases} \mu_i^2 : & c_1 = 0 \\ \mu_i \cdot x : & -1 + b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = +1 \Rightarrow h_1(x, \mu_i) = +\mu_i \cdot x \\ x^2 : & a_1 = 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

Substituindo (4.40) no sistema (4.35) e considerando-se as definições de (4.36):

$$x' = +\mu_i \cdot (-\mu_i \cdot x + x) = -\mu_i^2 \cdot x + \mu_i \cdot x \quad (4.41)$$

Portanto, o campo de vetores restrito à variedade central, desprezando-se os termos de ordem superior, é dado por:

$$\begin{cases} x' = +\mu_i \cdot x \\ \mu_i' = 0 \end{cases} \quad (4.42)$$

⁶ Outras aproximações, considerando-se polinômios de ordem superior, serão realizadas no capítulo 6.

O retrato de fases correspondente, ilustra, para $\mu_i > 0$, a estabilidade do sistema:

Fig. 13: Retrato de fases em P_2 , para $\mu_i > 0$.

Fazendo $x' = 0$ em (4.42), tem-se $x^* = 0$, que é um ponto de equilíbrio. Verifica-se sua estabilidade derivando a equação (4.42) em relação à x :

$$\frac{d(x')}{dx} = +\mu_i \quad (4.43)$$

Resultando em equilíbrio estável para $\mu_i < 0$ e equilíbrio instável para $\mu_i > 0$. O diagrama de bifurcação correspondente a essas conclusões, encontra-se na figura 14.

Fig. 14: Diagrama de bifurcação para P_2 .

4.2 ENTRADA TIPO RAMPA DE FASE

Para entradas do tipo rampa de fase a partir do mestre, pode-se escrever, para $\forall t > \tau_{1i}$:

$$\theta_1(t) = \Omega \cdot t + \theta_0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta}_1(t) = \Omega \\ \dot{\theta}_1(t - \tau_{1i}) = \Omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1(t) = 0 \\ \ddot{\theta}_1(t - \tau_{1i}) = 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

Substituindo entradas de (4.44) no sistema de equações que descreve a dinâmica do PLL (3.31), tem-se:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_{ii}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\varphi}_{ii}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \sin(\varphi_{ii}(t)) = \mu_{1,i} \cdot \Omega \\ \ddot{\varphi}_{1i}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\varphi}_{1i}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \sin(\varphi_{ii}(t)) = \mu_{1,i} \cdot \Omega \end{cases} \quad (4.45)$$

Fazendo a mesma mudança de variável independente dos casos anteriores, em

que $T = \mu_{1,i} \cdot t$ e designando $\mu_i = \frac{\mu_{2,i}}{\mu_{1,i}}$ e $\overline{\Omega} = \frac{\Omega}{\mu_{1,i}}$, reescreve-se o sistema:

$$\begin{cases} \varphi_{ii}''(t) + \varphi_{ii}'(t) + \mu_i \cdot \text{sen}(\varphi_{ii}(t)) = \overline{\Omega} \\ \varphi_{li}''(t) + \varphi_{li}'(t) + \mu_i \cdot \text{sen}(\varphi_{ii}(t)) = \overline{\Omega} \end{cases} \quad (4.46)$$

Escolhendo convenientemente as variáveis de estado⁷, pode-se escrever o sistema de equações de (4.46) correspondentes à dinâmica do PLL em questão:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_{li}' \\ x_2 = \varphi_{ii} \\ x_3 = \varphi_{ii}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = \overline{\Omega} - x_1 - \mu_i \cdot \text{sen } x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = \overline{\Omega} - x_3 - \mu_i \cdot \text{sen } x_2 \end{cases} \quad (4.47)$$

Os pontos de equilíbrio de (4.47) são obtidos fazendo $\frac{d\bar{x}}{dt} = 0$:

$$\begin{cases} x_1' = \overline{\Omega} - x_1 - \mu_i \cdot \text{sen } x_2 = 0 \\ x_2' = x_3 = 0 \\ x_3' = \overline{\Omega} - x_3 - \mu_i \cdot \text{sen } x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_3^* = 0 \Rightarrow \text{sen } x_2^* = \frac{\overline{\Omega}}{\mu_i} \Rightarrow x_1^* = 0 \quad (4.48)$$

Portanto, à partir de (4.48), três situações são possíveis, de acordo com a relação entre $\overline{\Omega}$ e μ_i :

- $\overline{\Omega} > \mu_i \Rightarrow$ Não existem pontos de equilíbrio.
- $\overline{\Omega} = \mu_i \Rightarrow$ Existe um ponto de equilíbrio: $P = \left(0, +\frac{\pi}{2}, 0 \right)$
- $\overline{\Omega} < \mu_i \Rightarrow$ Existem dois pontos de equilíbrio, de modo que:

$$P_1 = \left(0, \arccos \left(+\sqrt{1 - \left(\frac{\overline{\Omega}}{\mu_i} \right)^2} \right), 0 \right) \text{ e } P_2 = \left(0, \arccos \left(-\sqrt{1 - \left(\frac{\overline{\Omega}}{\mu_i} \right)^2} \right), 0 \right)$$

A seguir, será feita a análise da estabilidade em torno desses pontos.

4.2.1 ESTUDO DA ESTABILIDADE DE P

⁷ No apêndice, encontra-se uma justificativa para esta escolha.

Quando se aplica uma rampa de fase, em que $\overline{\Omega} = \mu_i$, existe somente um ponto de equilíbrio: $P = \left(0, +\frac{\pi}{2}, 0 \right)$. O roteiro de análise é idêntico ao dos casos anteriores, começando-se pela linearização do sistema, em torno de P .

De início, calcula-se a matriz Jacobiana em P :

$$J_P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Utilizando-se a relação:

$$\det(J_P - \lambda \cdot I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.50)$$

Resulta, pela resolução de (4.50), no polinômio característico de (4.49):

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0 \quad (4.51)$$

As raízes de (4.51) são os autovalores de (4.49) calculada em P :

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 0 \quad (4.52)$$

Como existe um autovalor em (4.52) nulo, P é não-hiperbólico, independentemente do valor que o parâmetro possa assumir, e pela teoria linearizada, nada se pode afirmar a respeito da estabilidade de P .

Mais uma vez, para analisar o comportamento do sistema no subespaço central será aplicado o Teorema da Variedade Central.

A dinâmica do PLL em questão é definida pelo sistema de equações diferenciais autônomas:

$$\begin{cases} x'_1 = \overline{\Omega} - x_1 - \mu_i \cdot \text{sen } x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ x'_3 = \overline{\Omega} - x_3 - \mu_i \cdot \text{sen } x_2 \end{cases} \quad (4.53)$$

Para reescrever o sistema (4.53) na forma canônica de Jordan é necessário, primeiramente, fazer a expansão da função seno em série de Taylor, em torno de

$$x_2^* = \frac{\pi}{2}. \text{ Faz-se, então, como primeira aproximação}^8, \sin(x_2) \approx 1 - \frac{1}{2} \left(x_2 - \frac{\pi}{2} \right)^2.$$

O teorema exige ainda, que o ponto de equilíbrio esteja na origem. Fazendo

$$\tilde{x}_1 = x_1, \quad \tilde{x}_2 = x_2 - \frac{\pi}{2} \quad e \quad \tilde{x}_3 = x_3, \text{ tem-se o sistema (4.53) transladado para a}$$

origem do sistema de coordenadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}'_1 = \overline{\Omega} - \tilde{x}_1 - \mu_i + \frac{\mu_i}{2} \cdot \tilde{x}_2^2 \\ \tilde{x}'_2 = \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}'_3 = \overline{\Omega} - \tilde{x}_3 - \mu_i + \frac{\mu_i}{2} \cdot \tilde{x}_2^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} \overline{\Omega} = \mu_i \\ \Rightarrow \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}'_1 = -\tilde{x}_1 + \frac{\mu_i}{2} \cdot \tilde{x}_2^2 \\ \tilde{x}'_2 = \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}'_3 = -\tilde{x}_3 + \frac{\mu_i}{2} \cdot \tilde{x}_2^2 \end{array} \right. \quad (4.54)$$

Como a parte linear de (4.54) é idêntica à parte linear do sistema em (4.14), seus autovalores e autovetores também são os mesmos. Desse modo, reescreve-se (4.54) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}'_1 \\ \tilde{x}'_2 \\ \tilde{x}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +\frac{\mu_i}{2} \cdot \tilde{x}_2^2 \\ 0 \\ +\frac{\mu_i}{2} \cdot \tilde{x}_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Através da mesma base definida em (4.17) e (4.18), o sistema (4.55) é simplificado para a forma canônica de Jordan:

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +\frac{\mu_i}{2} \cdot (-v_1 + v_3)^2 \\ +\frac{\mu_i}{2} \cdot (-v_1 + v_3)^2 \\ +\frac{\mu_i}{2} \cdot (-v_1 + v_3)^2 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Então, do Teorema da Variedade Central (Guckenheimer e Holmes, 1983; Wiggins, 1990; Monteiro, 2002), procura-se:

⁸ Outras aproximações, considerando-se termos de ordem superior, serão realizadas no capítulo 6.

$$W^c(0) = \left\{ (v_1, v_2, v_3) \in \mathfrak{R}^3 / v_1 = h_1(x), v_2 = h_2(x), v_3 = x, \right. \\ \left. h_j(0) = 0, Dh_j(0) = 0, j = 1, 2 \right\} \quad (4.57)$$

para x suficientemente pequeno.

Note-se que, mais uma vez, a equação que rege a dinâmica ao longo da variedade central não depende de $v_2 = h_2(x)$. Portanto, basta estimar $h_1(x)$. Como primeira tentativa utiliza-se um polinômio de terceira ordem⁹:

$$h_1(x) = a_1 \cdot x^3 + b_1 \cdot x^2, \quad (a_1, b_1) \in \mathfrak{R} \quad (4.58)$$

Pelo Teorema de Henry-Carr (Guckenheimer e Holmes, 1983; Wiggins, 1990; Monteiro, 2002), a variedade central deve satisfazer:

$$N(h(x)) = D_x h(x) \left[A \cdot x + f(x, h(x)) \right] - B \cdot h(x) - g(x, h(x)) = 0 \quad (4.59)$$

sendo em (4.56): A , a matriz dos autovalores com parte real nula, $f(x, h(x))$, a parte não linear correspondente, B , a matriz dos autovalores com parte real negativa e $g(x, h(x))$, a parte não linear correspondente.

Substituindo (4.58) em (4.59):

$$\begin{aligned} (3a_1 \cdot x^2 + 2b_1 \cdot x) \cdot \left[0 + \frac{\mu_i}{2} \cdot (-a_1 \cdot x^3 - b_1 \cdot x^2 + x)^2 \right] - (-1) \cdot (a_1 \cdot x^3 + b_1 \cdot x^2) - \\ - \frac{\mu_i}{2} \cdot (-a_1 \cdot x^3 - b_1 \cdot x^2 + x)^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

Pela resolução de (4.60) é possível obter, igualando os termos de igual potência, os coeficientes de $h_1(x)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^3: \quad a + 2b \cdot \mu_i = 0 \\ x^2: \quad b - \frac{\mu_i}{2} = 0 \Rightarrow b = +\frac{\mu_i}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow a = -\mu_i^2 \Rightarrow h_1(x) = -\mu_i^2 \cdot x^3 + \frac{\mu_i}{2} \cdot x^2 \quad (4.61)$$

Substituindo (4.61) no sistema (4.56), considerando-se as definições de (4.59) e desprezando os termos $\mathcal{O}(x^4)$:

⁹ Outras aproximações, considerando-se polinômios de ordem superior, serão realizadas no capítulo 6.

$$x' = \frac{+\mu_i}{2} \cdot \left[- \left(-\mu_i^2 \cdot x^3 + \frac{\mu_i}{2} \cdot x^2 \right) + x \right]^2 = -\frac{\mu_i^2}{2} \cdot x^3 + \frac{\mu_i}{2} \cdot x^2 \quad (4.62)$$

Portanto, o campo de vetores, restrito à variedade central, é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -\frac{\mu_i^2}{2} \cdot x^3 + \frac{\mu_i}{2} \cdot x^2 \end{array} \right. \quad (4.63)$$

O retrato de fases correspondente, ilustra para $\mu_i > 0$, a estabilidade do sistema:

Fig. 15: Retrato de fases em P , para $\mu_i > 0$.

Fazendo $x' = 0$ em (4.63), obtém-se os pontos de equilíbrio:

$$x_1^* = 0 \quad \text{ou} \quad x_2^* = \frac{1}{\mu_i} \quad (4.64)$$

Derivando a equação (4.63) em relação à x , determina-se a estabilidade dos pontos x_1^* e x_2^* , obtidos em (4.64):

$$\frac{d(x')}{dx} = -\frac{3\mu_i^2}{2} \cdot x^2 + \mu_i \cdot x = \begin{cases} 0, & \text{para } x_1^* = 0 \Rightarrow \text{instável} \\ -\frac{1}{2}, & \text{para } x_2^* = \frac{1}{\mu_i} \Rightarrow \text{estável} \end{cases} \quad (4.65)$$

O diagrama de bifurcação correspondente a essas conclusões, encontra-se na figura 16.

Fig. 16: Diagrama de bifurcação para P

O diagrama de bifurcação da figura 16 tem que ser analisado com cuidado; de imediato, poderia parecer que o ponto P é estável, para qualquer valor de μ_i . Entretanto, apesar do ponto $x_2^* = \frac{1}{\mu_i}$ ser estável para qualquer valor de μ_i , esta variedade central tem validade restrita à pequenos valores de x . Desse modo, pode-se dizer que o ponto P é instável, ao menos localmente. No capítulo 6, a construção de outras variedades centrais para o ponto P , possibilitará um melhor entendimento da estabilidade deste ponto.

4.2.2 ESTUDO DA ESTABILIDADE DE P_1 e P_2

Quando se aplica uma rampa de fase em que $\bar{\Omega} < \mu_i$, dois pontos de equilíbrio

$$\text{s\~{a}o encontrados: } P_{1,2} = \left(0, \arccos\left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{\Omega}}{\mu_i}\right)^2}\right), 0 \right).$$

O roteiro de an\~{a}lise \'{e} id\~{e}ntico ao dos casos anteriores, come\~{c}ando pela lineariza\~{c}o do sistema em torno desses pontos.

De in\~{i}cio, calcula-se a matriz Jacobiana em $P_{1,2}$:

$$J_{P_{1,2}} = \begin{bmatrix} -1 & \mp \mu_i \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{\Omega}}{\mu_i}\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp \mu_i \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{\Omega}}{\mu_i}\right)^2} & -1 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Em seguida, utiliza-se (4.66) na rela\~{c}o:

$$\det(J_{P_{1,2}} - \lambda \cdot I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 - \lambda & \mp \mu_i \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{\Omega}}{\mu_i}\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & \mp \mu_i \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{\Omega}}{\mu_i}\right)^2} & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.67)$$

Resultando, ent\~{a}o, pela solu\~{c}o de (4.67), no polin\~{o}mio caracter\~{i}stico de (4.66):

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \left[1 \pm \mu_i \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{\Omega}}{\mu_i}\right)^2}\right] \cdot \lambda \pm \mu_i \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{\Omega}}{\mu_i}\right)^2} = 0 \quad (4.68)$$

As ra\~{i}zes de (4.68) s\~{a}o os autovalores de (4.66):

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 \mp 4\sqrt{\mu_i^2 - \bar{\Omega}^2}}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{-1 - \sqrt{1 \mp 4\sqrt{\mu_i^2 - \bar{\Omega}^2}}}{2} \quad (4.69)$$

A análise da estabilidade dos pontos P_1 e P_2 prossegue, verificando os sinais que as partes reais dos autovalores calculados podem assumir. Como $\lambda_1 = -1$, então basta verificar λ_2 e λ_3 .

Verificando-se a estabilidade de $P_1 = \left(0, \arccos\left(+\sqrt{1 - \left(\frac{\bar{\Omega}}{\mu_i}\right)^2} \right), 0 \right)$, pode-se

concluir que:

- $\mu_i^2 - \bar{\Omega}^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow P_1$ é assintoticamente estável.
- $\mu_i^2 - \bar{\Omega}^2 > \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3^*$ (complexos conjugados) e $\Re(\lambda_{2,3}) < 0 \Rightarrow P_1$ é assintoticamente estável.
- $\mu_i^2 - \bar{\Omega}^2 < \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow \lambda_2 \neq \lambda_3, \lambda_{2,3} \in \Re_- \Rightarrow P_1$ é assintoticamente estável.

Logo, P_1 é assintoticamente estável, para qualquer valor do parâmetro, lembrando que $\bar{\Omega} < \mu_i$.

Verificando então, a estabilidade de $P_2 = \left(0, \arccos\left(-\sqrt{1 - \left(\frac{\bar{\Omega}}{\mu_i}\right)^2} \right), 0 \right)$,

conclui-se que P_2 é instável, dado que $\lambda_2 \neq \lambda_3, \lambda_{2,3} \in \Re_+$, para qualquer valor do parâmetro, lembrando que $\bar{\Omega} < \mu_i$.

As conclusões obtidas acima, podem ser resumidas num diagrama de bifurcações do tipo sela-nó, conforme a figura 17 (Piqueira, 1987).

Fig.17: Diagrama de bifurcações de P , P_1 e P_2

O diagrama da figura 17, corresponde às seguintes conclusões:

- para $\bar{\Omega} < \mu_i$ existem dois pontos de equilíbrio, sendo um instável, representado pela linha tracejada e outro, estável, representado pela linha cheia.
- para $\bar{\Omega} > \mu_i$, não existem pontos de equilíbrio.
- para $\bar{\Omega} = \mu_i$ há uma bifurcação do tipo sela-nó, uma vez que um par de pontos de equilíbrio de estabilidades contrárias pode ser destruído (ou criado) pela variação do valor do parâmetro μ_i .

CAPÍTULO 5

ESTUDO DA ESTABILIDADE DAS REDES OWMS – CADEIA SIMPLES

Do mesmo modo que no capítulo anterior, são analisadas as condições de existência e estabilidade do sincronismo das redes OWMS – Cadeia Simples.

Inicialmente, adota-se uma hipótese que simplifica o sistema de equações que descreve a dinâmica do i -ésimo nó escravo do tipo de rede em questão. Em seguida, essas equações são reescritas na forma de um sistema de equações no espaço de estados. Aplicam-se o degrau e a rampa de fase, como entradas. Verifica-se então, através da Teoria de Sistemas Dinâmicos, a estabilidade dos pontos de equilíbrio encontrados. A análise da estabilidade de pontos não-hiperbólicos também é realizada via Teorema da Variedade Central. No final de cada subseção, são apresentados os diagramas de bifurcação correspondentes aos pontos estudados.

5.1 SIMPLIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES QUE DESCREVEM UM PLL DA REDE OWMS CADEIA SIMPLES

O sistema de equações que descreve a dinâmica de um nó escravo da rede OWMS – Cadeia Simples, apresenta dois sinais como entrada: o do mestre e o proveniente do nó anterior, que chega com atraso.

Como a única entrada conhecida de antemão é a do mestre, seria conveniente reescrever a primeira equação do sistema (3.50) do capítulo 3, de modo que as entradas a partir de qualquer escravo fiquem em função desse sinal.

Para isso, utiliza-se a aproximação $\Phi_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \approx \Phi_{i-1}(t) - \tau_{(i-1)i} \cdot \dot{\Phi}_{i-1}(t)$, que é substituída na relação (3.42), definida no capítulo 3:

$$\varphi_{ii}(t) = \Phi_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) - \Phi_i(t) = \left[\Phi_{i-1}(t) - \tau_{(i-1)i} \cdot \dot{\Phi}_{i-1}(t) \right] - \Phi_i(t) \quad (5.1)$$

Substituindo a expressão $\varphi_{1(i-1)}(t) = \Phi_1(t) - \Phi_{i-1}(t) \Rightarrow \Phi_{i-1}(t) = \varphi_{1(i-1)}(t) - \Phi_1(t)$

em (5.1), tem-se:

$$\varphi_{ii}(t) = \left[\Phi_1(t) - \varphi_{1(i-1)}(t) \right] - \tau_{(i-1)i} \cdot \left[\dot{\Phi}_1(t) - \dot{\varphi}_{1(i-1)}(t) \right] - \Phi_i(t) \quad (5.2)$$

Identificando $\varphi_{1i}(t) = \Phi_1(t) - \Phi_i(t)$ em (5.2), pode-se escrever:

$$\varphi_{ii}(t) = \varphi_{1i}(t) - \varphi_{1(i-1)}(t) + \tau_{(i-1)i} \cdot \dot{\varphi}_{1(i-1)}(t) - \tau_{(i-1)i} \cdot \dot{\Phi}_1(t) \quad (5.3)$$

Derivando (5.3) em relação ao tempo:

$$\dot{\varphi}_{ii}(t) = \dot{\varphi}_{1i}(t) - \dot{\varphi}_{1(i-1)}(t) + \tau_{(i-1)i} \cdot \ddot{\varphi}_{1(i-1)}(t) - \tau_{(i-1)i} \cdot \ddot{\Phi}_1(t) \quad (5.4)$$

Derivando (5.4) em relação ao tempo:

$$\ddot{\varphi}_{ii}(t) = \ddot{\varphi}_{1i}(t) - \ddot{\varphi}_{1(i-1)}(t) + \tau_{(i-1)i} \cdot \ddot{\ddot{\varphi}}_{1(i-1)}(t) - \tau_{(i-1)i} \cdot \ddot{\ddot{\Phi}}_1(t) \quad (5.5)$$

As equações (5.3), (5.4) e (5.5) podem ser substituídas na primeira equação do sistema (3.50) do capítulo 3, resultando:

$$\begin{aligned} & \left[\ddot{\varphi}_{1i}(t) - \ddot{\varphi}_{1(i-1)}(t) + \tau_{(i-1)i} \cdot \ddot{\ddot{\varphi}}_{1(i-1)}(t) - \tau_{(i-1)i} \cdot \ddot{\ddot{\Phi}}_1(t) \right] + \\ & + \mu_{1,i} \cdot \left[\dot{\varphi}_{1i}(t) - \dot{\varphi}_{1(i-1)}(t) + \tau_{(i-1)i} \cdot \ddot{\varphi}_{1(i-1)}(t) - \tau_{(i-1)i} \cdot \ddot{\Phi}_1(t) \right] + \\ & + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{ii}(t) \right) = \ddot{\theta}_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\theta}_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Observando (5.6), pode-se identificar os seguintes termos, que envolvem a fase do mestre e suas derivadas em relação ao tempo:

$$\Phi(t) = \omega_o \cdot t + \theta_i(t) \rightarrow \dot{\Phi}(t) = \omega_o + \dot{\theta}_i(t) \rightarrow \ddot{\Phi}(t) = \ddot{\theta}_i(t) \rightarrow \ddot{\ddot{\Phi}}(t) = \ddot{\ddot{\theta}}_i(t)$$

Assim, manipulando (5.6), tem-se:

$$\begin{aligned}
& \left[\ddot{\phi}_{1i}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\phi}_{1i}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{ii}(t) \right) \right] + \\
& + \left[-\ddot{\phi}_{1(i-1)}(t) + \tau_{(i-1)i} \cdot \ddot{\phi}_{1(i-1)}(t) - \tau_{(i-1)i} \cdot \ddot{\theta}_1(t) \right] + \\
& + \mu_{1,i} \cdot \left[-\dot{\phi}_{1(i-1)}(t) + \tau_{(i-1)i} \cdot \ddot{\phi}_{1(i-1)}(t) - \tau_{(i-1)i} \cdot \ddot{\theta}_1(t) \right] = \\
& = \ddot{\theta}_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\theta}_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i})
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Substituindo o primeiro termo entre colchetes de (5.7) pela segunda equação do sistema (3.50) do capítulo 3, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \left[\ddot{\theta}_1(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\theta}_1(t) \right] + \left[-\ddot{\phi}_{1(i-1)}(t) + \tau_{(i-1)i} \cdot \ddot{\phi}_{1(i-1)}(t) - \tau_{(i-1)i} \cdot \ddot{\theta}_1(t) \right] + \\
& + \mu_{1,i} \cdot \left[-\dot{\phi}_{1(i-1)}(t) + \tau_{(i-1)i} \cdot \ddot{\phi}_{1(i-1)}(t) - \tau_{(i-1)i} \cdot \ddot{\theta}_1(t) \right] = \\
& = \ddot{\theta}_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i}) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\theta}_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i})
\end{aligned} \tag{5.8}$$

A expressão (5.8) pode ser diretamente substituída na primeira equação do sistema (3.50) do capítulo 3, que é reescrito de uma forma aparentemente mais complexa:

$$\left\{ \begin{aligned} & \ddot{\phi}_{ii}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\phi}_{ii}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{ii}(t) \right) = \\ & = \left[1 - \mu_{1,i} \cdot \tau_{(i-1)i} \right] \cdot \ddot{\theta}_1(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\theta}_1(t) - \tau_{(i-1)i} \cdot \ddot{\theta}_1(t) + \\ & + \left[1 - \mu_{1,i} \cdot \tau_{(i-1)i} \right] \cdot \ddot{\phi}_{1(i-1)}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\phi}_{1(i-1)}(t) - \tau_{(i-1)i} \cdot \ddot{\phi}_{1(i-1)}(t) \\ & \ddot{\phi}_{1i}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\phi}_{1i}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{ii}(t) \right) = \ddot{\theta}_1(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\theta}_1(t) \end{aligned} \right. \tag{5.9}$$

Através do artifício utilizado, os termos derivados a partir da entrada de fase $\theta_{i-1}(t - \tau_{(i-1)i})$, que não é conhecida de antemão, foram substituídos por termos

relacionados com a entrada de fase $\theta_1(t)$ do mestre, que é um dado do problema. Em contrapartida, surgiram novos termos $\varphi_{1(i-1)}$, associados ao sincronismo entre o mestre e o escravo que antecede o i -ésimo nó escravo em questão, o que, de certo modo, era previsível. Como é importante que haja sincronismo da rede como um todo, parece razoável, neste instante, eliminá-los da equação, adotando a hipótese de que o nó $i-1$ já sincronizou:

$$\dot{\varphi}_{1(i-1)}(t) = 0, \quad \ddot{\varphi}_{1(i-1)}(t) = 0 \quad \text{e} \quad \ddot{\varphi}_{1(i-1)}(t) = 0$$

Desse modo, o sistema (5.9) fica bastante simplificado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\varphi}_{ii}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\varphi}_{ii}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{ii}(t)\right) = [1 - \mu_{1,i} \cdot \tau_{(i-1)i}] \cdot \ddot{\theta}_1(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\theta}_1(t) - \\ \quad - \tau_{(i-1)i} \cdot \ddot{\theta}_1(t) \\ \ddot{\varphi}_{1i}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\varphi}_{1i}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{ii}(t)\right) = \ddot{\theta}_1(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\theta}_1(t) \end{array} \right. \quad (5.10)$$

O sistema simplificado (5.10) apresenta, nesta análise, vantagens em relação ao sistema (3.50), fato que será comprovado em seguida. Outras conclusões pertinentes às simplificações aqui consideradas, podem ser encontradas no capítulo 7.

5.2 ENTRADA TIPO DEGRAU DE FASE

Para entradas do tipo degrau de fase, de qualquer amplitude, a partir do mestre, pode-se escrever, para $\forall t > \tau_{(i-1)i}$:

$$\dot{\theta}_1(t) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta}_1(t) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\theta}_1(t - \tau_{(i-1)i}) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta}_1(t - \tau_{(i-1)i}) = 0 \quad (5.11)$$

Substituindo as entradas de (5.11) no sistema (5.10) que descreve a dinâmica do PLL, tem-se:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_{ii}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\varphi}_{ii}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{ii}(t)\right) = 0 \\ \ddot{\varphi}_{li}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\varphi}_{li}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{ii}(t)\right) = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

Procedendo à mesma mudança de variável independente utilizada no capítulo anterior:

$$\begin{cases} \varphi_{ii}''(T) + \varphi_{ii}'(T) + \mu_i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{ii}(T)\right) = 0 \\ \varphi_{li}''(T) + \varphi_{li}'(T) + \mu_i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{ii}(T)\right) = 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

Escolhendo convenientemente as variáveis de estado¹⁰, pode-se escrever o sistema de equações (5.13), correspondentes à dinâmica do PLL em questão:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_{li}' \\ x_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_{ii} \\ x_3 = \varphi_{ii}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = -x_1 - \mu_i \cdot \sin x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = -x_3 - \mu_i \cdot \sin x_2 \end{cases} \quad (5.14)$$

O sistema (5.14) é idêntico ao que já foi estudado no capítulo anterior, para a Estrela Simples. Assim seus pontos de equilíbrio são os mesmos e têm a mesma estabilidade, já descrita.

5.3 ENTRADA TIPO RAMPA DE FASE

Para entradas do tipo rampa de fase a partir do mestre, pode-se escrever, para $\forall t > \tau_{(i-1)i}$:

¹⁰ No apêndice, encontra-se uma justificativa para esta escolha.

$$\theta_1(t) = \Omega \cdot t + \theta_0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta}_1(t) = \Omega \\ \dot{\theta}_1(t - \tau_{(i-1)i}) = \Omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1(t) = 0 \\ \ddot{\theta}_1(t - \tau_{(i-1)i}) = 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

Substituindo as entradas de (5.15) no sistema de equações (5.10), que descreve a dinâmica do PLL, tem-se:

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_{ii}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\phi}_{ii}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_{ii}(t)\right) = \mu_{1,i} \cdot \Omega \\ \ddot{\phi}_{li}(t) + \mu_{1,i} \cdot \dot{\phi}_{li}(t) + \mu_{1,i} \cdot \mu_{2,i} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_{ii}(t)\right) = \mu_{1,i} \cdot \Omega \end{cases} \quad (5.16)$$

Fazendo a mesma mudança de variável independente dos casos anteriores, em

que $T = \mu_{1,i} \cdot t$ e designando $\mu_i = \frac{\mu_{2,i}}{\mu_{1,i}}$ e $\overline{\Omega} = \frac{\Omega}{\mu_{1,i}}$, reescreve-se o sistema (5.16):

$$\begin{cases} \phi_{ii}''(t) + \phi_{ii}'(t) + \mu_i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_{ii}(t)\right) = \overline{\Omega} \\ \phi_{li}''(t) + \phi_{li}'(t) + \mu_i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_{ii}(t)\right) = \overline{\Omega} \end{cases} \quad (5.17)$$

Escolhendo convenientemente as variáveis de estado¹¹, pode-se escrever o sistema de equações (5.17), correspondentes a dinâmica do PLL em questão:

$$\begin{cases} x_1 = \phi_{li}' \\ x_2 = \frac{\pi}{2} - \phi_{ii} \\ x_3 = \phi_{ii}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = \overline{\Omega} - x_1 - \mu_i \cdot \sin x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = \overline{\Omega} - x_3 - \mu_i \cdot \sin x_2 \end{cases} \quad (5.18)$$

O sistema (5.18) também é idêntico ao que já foi estudado no capítulo anterior, para a Estrela Simples. Assim, seus pontos de equilíbrio são os mesmos e têm a mesma estabilidade, já descrita.

¹¹ No apêndice, encontra-se uma justificativa para esta escolha.

No próximo capítulo, novas variedades centrais são construídas, com diferentes níveis de aproximação, para os pontos de equilíbrio não-hiperbólicos obtidos nos capítulos anteriores.

CAPÍTULO 6

INFLUÊNCIA DO GRAU DE APROXIMAÇÃO DA CONSTRUÇÃO DAS VARIEDADES CENTRAIS, NOS RETRATOS DE FASE E DIAGRAMAS DE BIFURCAÇÃO CORRESPONDENTES

Neste capítulo, novas variedades centrais são apresentadas, para que se descreva, de modo mais preciso, o comportamento dinâmico dos sistemas dinâmicos considerados nos capítulos 4 e 5, na vizinhança dos pontos de equilíbrio não-hiperbólicos. Isso será feito, basicamente, de três modos:

- tomando mais termos na expansão da função seno, em série de Taylor.
- aumentando a ordem da aproximação polinomial, designada $h(x)$, utilizada na descrição da variedade central.
- considerando os termos de ordem superior do campo de vetores restrito à variedade central.

Pela combinação dos três modos acima descritos, diferentes graus de aproximação são obtidos, tanto para a entrada do tipo degrau, como para a entrada do tipo rampa de fase.

A partir disso, discute-se, qualitativamente, a influência dessas modificações nos retratos de fases e nos diagramas de bifurcação correspondentes, através de comparações com os que foram primeiramente obtidos.

Uma vez que o roteiro para a construção de variedades centrais já foi extensamente discutido no decorrer dos capítulos 4 e 5, algumas passagens e definições serão omitidas neste capítulo.

6.1 ENTRADA TIPO DEGRAU DE FASE: CONSTRUÇÃO DE NOVAS VARIEDADES CENTRAIS EM TORNO DE $P_1 = (0, 0, 0)$

Para que haja uma maior facilidade de comparação entre os diferentes retratos de fases e os diagramas de bifurcação obtidos, as diferentes aproximações serão apresentadas caso a caso:

- **CASO 1a:** $\sin(x_2) \approx x_2$ e

$$h_1(x, \mu_i) = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x \cdot \mu_i + c_1 \cdot \mu_i^2, \quad (a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}.$$

No estudo da estabilidade de $P_1 = (0, 0, 0)$ da subseção (4.1.1), obteve-se, à partir do polinômio $h_1(x, \mu_i) = -\mu_i \cdot x$, o seguinte campo de vetores restrito à variedade central:

$$\begin{cases} x' = -\mu_i \cdot x \\ \mu_i' = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

O retrato de fases construído a partir de (6.1) e o diagrama de bifurcação correspondente são reapresentados a seguir:

Fig. 18: Retrato de fases em P_1 , para $\mu_i > 0$ (primeira aproximação).

Fig. 19: Diagrama de bifurcação para P_1 (primeira aproximação).

Na subseção (4.1.1), desprezou-se o termo de terceira ordem $-\mu_i^2 \cdot x$, porque é superior à dos monômios que constituem $h_1(x, \mu_i)$, de segunda ordem. Caso esse termo também seja considerado, obtém-se um campo de vetores, restrito à variedade central, semelhante ao anterior:

$$\begin{cases} x' = -\mu_i \cdot x - \mu_i^2 \cdot x \\ \mu_i' = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Fazendo $x' = 0$, obtém-se o ponto de equilíbrio $x^* = 0$. Verifica-se sua estabilidade derivando (6.2) em relação à x , obtendo:

$$\frac{d(x')}{dx} = -\mu_i - \mu_i^2 \quad (6.3)$$

Como resultado, tem-se equilíbrio estável, se $\mu_i < -1$ ou $\mu_i > 0$, e equilíbrio instável, se $-1 < \mu_i < 0$.

O diagrama de bifurcação correspondente a essas conclusões, encontra-se na figura 20.

Fig. 20: Diagrama de bifurcação para P_1 (segunda aproximação).

É importante notar que, em relação ao diagrama anterior, ocorreram algumas mudanças de caráter global. Entretanto, a descrição da estabilidade não se alterou localmente.

- **CASO 1b:** $\text{sen}(x_2) \approx x_2$ e $h_1(x, \mu_i) = a_1 \cdot x^3 + b_1 \cdot x^2 \cdot \mu_i + c_1 \cdot x \cdot \mu_i^2 + d_1 \cdot \mu_i^3$,
 $(a_1, b_1, c_1, d_1) \in \mathfrak{R}$.

Considere-se agora, um novo polinômio $h_1(x, \mu_i)$, constituído por monômios de terceira ordem: $h_1(x, \mu_i) = a_1 \cdot x^3 + b_1 \cdot x^2 \cdot \mu_i + c_1 \cdot x \cdot \mu_i^2 + d_1 \cdot \mu_i^3$, sendo $(a_1, b_1, c_1, d_1) \in \mathfrak{R}$.

Repetindo o procedimento da subseção (4.1.1), obtém-se os valores dos coeficientes do polinômio considerado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_i^3 : d_1 = 0 \\ \mu_i^2 \cdot x : c_1 = 0 \\ \mu_i \cdot x^2 : b_1 = 0 \\ x^3 : a_1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow h_1(x, \mu_i) = 0 \quad (6.4)$$

Conclui-se então, que não há polinômio que satisfaça a expressão $N(h(x, \mu_i)) = 0$. Assim, a estabilidade do sistema dinâmico (4.8), em torno de P_1 , fica determinada pela sua aproximação tangencial, resultando no mesmo campo de vetores obtido anteriormente em (6.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -\mu_i \cdot x \\ \mu_i' = 0 \end{array} \right. \quad (6.5)$$

- **CASO 2a:** $\text{sen}(x_2) \approx x_2 - \frac{x_2^3}{6}$ e $h_1(x, \mu_i) = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x \cdot \mu_i + c_1 \cdot \mu_i^2$,
 $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}$.

Até o momento, somente se considerou a expansão de primeira ordem da função seno em torno de $x_2^* = 0$, que é dada por $\text{sen}(x_2) \approx x_2$. Considerando-se o próximo termo dessa expansão, tem-se $\text{sen}(x_2) \approx x_2 - \frac{x_2^3}{6}$. Desse modo, reescreve-se o sistema (4.8) na sua forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu \cdot x_2 + \frac{\mu \cdot x_2^3}{6} \\ 0 \\ -\mu \cdot x_2 + \frac{\mu \cdot x_2^3}{6} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad X' = J_{P_1} \cdot X + F \quad (6.6)$$

e $\mu_i' = 0$

Utilizando-se a mesma a base M , definida em (4.17) e (4.18), composta pelos autovetores de J_{P_1} , reescreve-se o sistema (6.6) na forma canônica de Jordan:

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu_i \cdot (-v_1 + v_3) + \frac{\mu_i}{6} \cdot (-v_1 + v_3)^3 \\ -\mu_i \cdot (-v_1 + v_3) + \frac{\mu_i}{6} \cdot (-v_1 + v_3)^3 \\ -\mu_i \cdot (-v_1 + v_3) + \frac{\mu_i}{6} \cdot (-v_1 + v_3)^3 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

e
 $\mu'_i = 0$

Levando-se em conta que a variedade central deve satisfazer a expressão $N(h(x, \mu_i)) = 0$, utiliza-se como primeira aproximação, o polinômio formado por monômios de segunda ordem $h_1(x, \mu_i) = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x \cdot \mu_i + c_1 \cdot \mu_i^2$, sendo $(a_1, b_1, c_1) \in \mathfrak{R}$.

Repetindo o procedimento da subseção (4.1.1), obtém-se os valores dos coeficientes do polinômio considerado:

$$\begin{cases} \mu_i^2 : & c_1 = 0 \\ \mu_i \cdot x : & 1 + b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = -1 \Rightarrow h_1(x, \mu_i) = -\mu_i \cdot x \\ x^2 : & a_1 = 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

Substituindo (6.8) no sistema (6.7), tem-se:

$$\begin{aligned} x' &= -\mu_i \cdot [-(-\mu_i \cdot x) + x] + \frac{\mu_i}{6} \cdot [-(-\mu_i \cdot x) + x]^3 \\ x' &= -\mu_i \cdot x - \mu_i^2 \cdot x + \frac{\mu_i \cdot x^3}{6} + \frac{\mu_i^2 \cdot x^3}{2} + \frac{\mu_i^3 \cdot x^3}{2} + \frac{\mu_i^4 \cdot x^3}{6} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Portanto, o campo de vetores restrito à variedade central, desprezando-se os termos de ordem superior, é idêntico ao (6.1), sendo dado por:

$$\begin{cases} x' = -\mu_i \cdot x \\ \mu'_i = 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

Entretanto, caso se considere o segundo termo na aproximação, que é $-\mu_i^2 \cdot x$, obtém-se um campo idêntico ao (6.2):

$$\begin{cases} x' = -\mu_i^2 \cdot x - \mu_i \cdot x \\ \mu_i' = 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

Então, levando-se em conta o terceiro termo, que é $+\frac{\mu_i \cdot x^3}{6}$, obtém-se um campo ligeiramente diferente:

$$\begin{cases} x' = -\mu_i^2 \cdot x - \mu_i \cdot x + \frac{\mu_i \cdot x^3}{6} \\ \mu_i' = 0 \end{cases} \quad (6.12)$$

O retrato de fases correspondente encontra-se na figura 21, abaixo:

Fig.21: Retrato de fases em P_1 , para $\mu_i > 0$ (terceira aproximação).

Fazendo $x' = 0$, tem-se os pontos de equilíbrio $x_1^* = 0$ e $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{6(1+\mu_i)}$.

Para verificação das suas estabilidades, deriva-se (6.12) em relação à x , obtendo:

$$\frac{d(x')}{dx} = -\mu_i - \mu_i^2 + \frac{\mu_i^2 \cdot x^2}{2} \quad (6.13)$$

Para $x_1^* = 0$, resulta em equilíbrio estável, se $\mu_i < -1$ ou $\mu_i > 0$, e equilíbrio instável, se $-1 < \mu_i < 0$.

Para $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{6(1+\mu_i)}$, resulta em equilíbrio instável, se $\mu_i > 0$, e equilíbrio estável, se $-1 < \mu_i < 0$.

O diagrama de bifurcação correspondente a essas conclusões, encontra-se na figura 22.

Fig. 22: Diagrama de bifurcação para P_1 (terceira aproximação).

Pode-se notar, mais uma vez, que a descrição da estabilidade não se alterou localmente, ocorrendo, apenas, mudanças de caráter global.

- **CASO 2b:** $\text{sen}(x_2) \approx x_2 - \frac{x_2^3}{6}$ e

$$h_1(x, \mu_i) = a_1 \cdot x^3 + b_1 \cdot x^2 \cdot \mu_i + c_1 \cdot x \cdot \mu_i^2 + d_1 \cdot \mu_i^3, \quad (a_1, b_1, c_1, d_1) \in \mathfrak{R}.$$

Considere-se agora, o polinômio $h_1(x, \mu_i)$, constituído por monômios do terceira ordem: $h_1(x, \mu_i) = a_1 \cdot x^3 + b_1 \cdot x^2 \cdot \mu_i + c_1 \cdot x \cdot \mu_i^2 + d_1 \cdot \mu_i^3$, sendo $(a_1, b_1, c_1, d_1) \in \mathfrak{R}$.

Repetindo o procedimento da subseção (4.1.1), obtém-se os valores dos coeficientes do polinômio considerado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_i^3 : d_1 = 0 \\ \mu_i^2 \cdot x : c_1 = 0 \\ \mu_i \cdot x^2 : b_1 = 0 \\ x^3 : a_1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow h_1(x, \mu_i) = 0 \quad (6.14)$$

Conclui-se então, que não há polinômio que satisfaça a expressão $N(h(x, \mu_i)) = 0$. Assim, a estabilidade do sistema (6.7) fica determinada pela sua aproximação tangencial, resultando num campo de vetores, restrito à variedade central, semelhante ao (6.12):

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -\mu_i \cdot x + \frac{\mu_i \cdot x^3}{6} \\ \mu_i' = 0 \end{array} \right. \quad (6.15)$$

Fazendo $x' = 0$, obtém-se os pontos de equilíbrio $x_1^* = 0$ e $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{6}$. Para verificação das suas estabilidades, deriva-se (6.15) em relação à x , obtendo:

$$\frac{d(x')}{dx} = -\mu_i + \frac{\mu_i \cdot x^2}{2} \quad (6.16)$$

Para $x_1^* = 0$, resulta em equilíbrio estável, se $\mu_i > 0$, e equilíbrio instável, se $\mu_i < 0$.

Para $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{6}$, resulta em equilíbrio instável, se $\mu_i > 0$, e equilíbrio estável, se $\mu_i < 0$.

O diagrama de bifurcação correspondente a essas conclusões, encontra-se na figura 23.

Fig. 23: Diagrama de bifurcação para P_1 (quarta aproximação).

Mais uma vez, as mudanças de caráter global não alteraram qualitativamente a descrição local da estabilidade.

- **CASO 2c:** $\text{sen}(x_2) \approx x_2 - \frac{x_2^3}{6}$ e

$$h_1(x, \mu_i) = a_1 \cdot x^4 + b_1 \cdot x^3 \cdot \mu_i + c_1 \cdot x^2 \cdot \mu_i^2 + d_1 \cdot x \cdot \mu_i^3 + e_1 \cdot \mu_i^4,$$

$$(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1) \in \mathfrak{R}.$$

Considere-se agora, o polinômio $h_1(x, \mu_i)$, constituído por monômios de quarta ordem: $h_1(x, \mu_i) = a_1 \cdot x^4 + b_1 \cdot x^3 \cdot \mu_i + c_1 \cdot x^2 \cdot \mu_i^2 + d_1 \cdot x \cdot \mu_i^3 + e_1 \cdot \mu_i^4$, sendo $(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1) \in \mathfrak{R}$.

Repetindo o procedimento da subseção (4.1.1), obtém-se os valores dos coeficientes do polinômio considerado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_i^4 : e_1 = 0 \\ \mu_i^3 \cdot x : d_1 = 0 \\ \mu_i^2 \cdot x^2 : c_1 = 0 \\ \mu_i \cdot x^3 : b_1 = +\frac{1}{6} \\ x^4 : a_1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow h_1(x, \mu_i) = +\frac{\mu_i}{6} \cdot x^3 \quad (6.17)$$

Substituindo (6.17) no sistema (6.7) tem-se:

$$\begin{aligned} x' &= -\mu_i \cdot \left[-\left(+\frac{\mu_i}{6} \cdot x^3 \right) + x \right] + \frac{\mu_i}{6} \cdot \left[-\left(+\frac{\mu_i}{6} \cdot x^3 \right) + x \right]^3 \\ x' &= -\mu_i \cdot x + \frac{\mu_i \cdot x^3}{6} + \frac{\mu_i^2 \cdot x^3}{6} - \frac{\mu_i^2 \cdot x^5}{12} + \frac{\mu_i^3 \cdot x^7}{72} - \frac{\mu_i^4 \cdot x^9}{1296} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Portanto o campo de vetores restrito à variedade central, desprezando-se os termos de ordem superior, é idêntico ao (6.15), sendo dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -\mu_i \cdot x + \frac{\mu_i \cdot x^3}{6} \\ \mu_i' = 0 \end{array} \right. \quad (6.19)$$

Entretanto, levando em conta o terceiro termo, que é $+\frac{\mu_i^2 \cdot x^3}{6}$, obtém-se um campo ligeiramente diferente:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -\mu_i \cdot x + \frac{\mu_i \cdot x^3}{6} + \frac{\mu_i^2 \cdot x^3}{6} \\ \mu_i' = 0 \end{array} \right. \quad (6.20)$$

Fazendo $x' = 0$, obtém-se os pontos de equilíbrio $x_1^* = 0$ e $x_{2,3}^* = \pm \sqrt{\frac{6}{1 + \mu_i}}$. Para

verificação das suas estabilidades, deriva-se (6.20) em relação à x , obtendo:

$$\frac{d(x')}{dx} = -\mu_i + \frac{\mu_i \cdot x^2}{2} + \frac{\mu_i^2 \cdot x^2}{2} \quad (6.21)$$

Para $x_1^* = 0$, resulta em equilíbrio estável, se $\mu_i > 0$, e equilíbrio instável, se $\mu_i < 0$.

Para $x_{2,3}^* = \pm \sqrt{\frac{6}{1+\mu_i}}$, resulta em equilíbrio instável, se $\mu_i > 0$, e equilíbrio estável, se $-1 < \mu_i < 0$.

O diagrama de bifurcação correspondente a essas conclusões, encontra-se na figura 24.

Fig. 24: Diagrama de bifurcação para P_1 (quinta aproximação).

Mais uma vez, as mudanças de caráter global, não alteraram localmente a descrição da estabilidade.

Através das cinco aproximações, apresentadas nas figuras 19, 20, 22, 23 e 24, pode-se observar mudanças qualitativas globais, mas não locais. Da primeira para a última, houve um aumento da correspondência com o sistema original, em torno do ponto de equilíbrio considerado. Entretanto, para a determinação da estabilidade dos pontos de equilíbrio, considerando-se pequenas variações nos valores do parâmetro μ , próximo de $\mu=0$, não é preciso considerar os termos de ordem superior, bastando então, estudar a aproximação mais simples, em cada caso.

6.2 ENTRADA TIPO DEGRAU DE FASE: CONSTRUÇÃO DE NOVAS VARIEDADES CENTRAIS EM TORNO DE $P_2=(0, -\pi, 0)$.

Novamente, para maior facilidade de comparação entre os retratos de fases e os diagramas de bifurcação, as diferentes aproximações serão divididas em casos:

- **CASO 1a:** $\sin(x_2) \approx -(x_2 + \pi)$ e $h_1(x, \mu_i) = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x \cdot \mu_i + c_1 \cdot \mu_i^2$,
 $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}$.

No estudo da estabilidade do ponto de equilíbrio $P_2 = (0, -\pi, 0)$, na subseção (4.1.2), obteve-se à partir do polinômio $h_1(x, \mu_i) = +\mu_i \cdot x$, o seguinte campo de vetores restrito à variedade central:

$$\begin{cases} x' = +\mu_i \cdot x \\ \mu_i' = 0 \end{cases} \quad (6.22)$$

O retrato de fases construído a partir desta expressão e o diagrama de bifurcação correspondente são rerepresentados a seguir:

Fig. 25: Retrato de fases em P_2 , para $\mu_i > 0$ (primeira aproximação).

Fig.26: Diagrama de bifurcação para P_2 (primeira aproximação).

Na ocasião, desprezou-se o termo $-\mu_i^2 \cdot x$, porque ele é de terceira ordem, ou seja, maior que a dos monômios que constituem o polinômio $h_1(x, \mu_i)$, que são de segunda ordem. Do mesmo modo que na subseção anterior, considera-se também esse termo, obtendo um campo de vetores, restrito à variedade central, semelhante ao (6.22):

$$\begin{cases} x' = +\mu_i \cdot x - \mu_i^2 \cdot x \\ \mu_i' = 0 \end{cases} \quad (6.23)$$

Fazendo $x' = 0$, tem-se o ponto de equilíbrio $x^* = 0$. Verifica-se sua estabilidade derivando (6.23) em relação à x :

$$\frac{d(x')}{dx} = +\mu_i - \mu_i^2 \quad (6.24)$$

Resultando em equilíbrio estável, se $\mu_i < 0$ ou $\mu_i > +1$, e equilíbrio instável, se $0 < \mu_i < +1$.

O diagrama de bifurcação correspondente a essas conclusões, encontra-se na figura 27.

Fig.27: Diagrama de bifurcação para P_2 (segunda aproximação).

Observe-se que, mais uma vez, a descrição local da estabilidade não se alterou.

- **CASO 1b:** $\sin(x_2) \approx -(x_2 + \pi)$ e

$$h_1(x, \mu_i) = a_1 \cdot x^3 + b_1 \cdot x^2 \cdot \mu_i + c_1 \cdot x \cdot \mu_i^2 + d_1 \cdot \mu_i^3, \quad (a_1, b_1, c_1, d_1) \in \mathfrak{R}.$$

Considere-se agora, um novo polinômio $h_1(x, \mu_i)$, constituído por monômios do terceira ordem: $h_1(x, \mu_i) = a_1 \cdot x^3 + b_1 \cdot x^2 \cdot \mu_i + c_1 \cdot x \cdot \mu_i^2 + d_1 \cdot \mu_i^3$, sendo $(a_1, b_1, c_1, d_1) \in \mathfrak{R}$.

Repetindo o procedimento das subseções (4.1.1) e (4.1.2), obtém-se os valores dos coeficientes do polinômio considerado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_i^3 : d_1 = 0 \\ \mu_i^2 \cdot x : c_1 = 0 \\ \mu_i \cdot x^2 : b_1 = 0 \\ x^3 : a_1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow h_1(x, \mu_i) = 0 \quad (6.25)$$

Conclui-se então, que não há polinômio que satisfaça a expressão $N(h(x, \mu_i)) = 0$. Assim, a estabilidade do sistema dinâmico (4.8) fica determinada pela sua aproximação tangencial, resultando no mesmo campo de vetores (6.22) obtido anteriormente:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = +\mu_i \cdot x \\ \mu_i' = 0 \end{array} \right. \quad (6.26)$$

- **CASO 2a:** $\sin(x_2) \approx -(x_2 + \pi) + \frac{(x_2 + \pi)^3}{6}$ e

$$h_1(x, \mu_i) = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x \cdot \mu_i + c_1 \cdot \mu_i^2, (a_1, b_1, c_1) \in \Re.$$

Considerando-se também o termo de terceira ordem da expansão da função seno em torno de $x_2^* = -\pi$, tem-se: $\sin(x_2) \approx -(x_2 + \pi) + \frac{(x_2 + \pi)^3}{6}$.

Desse modo, reescreve-se o sistema (4.8) na sua forma matricial, já transladado para a origem, ou seja, $\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{x}_2 = (x_2 + \pi)$ e $\tilde{x}_3 = x_3$:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1' \\ \tilde{x}_2' \\ \tilde{x}_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +\mu_i \cdot \tilde{x}_2 - \frac{\mu_i \cdot \tilde{x}_2^3}{6} \\ 0 \\ +\mu_i \cdot \tilde{x}_2 - \frac{\mu_i \cdot \tilde{x}_2^3}{6} \end{bmatrix} \quad ou \quad \tilde{X}' = J_{P_2} \cdot \tilde{X} + \tilde{F} \quad (6.27)$$

$$e \quad \mu_i' = 0$$

Utilizando-se a mesma a base M , definida em (4.17) e (4.18), composta pelos autovetores de J_{P_2} , reescreve-se o sistema (6.27) na forma canônica de Jordan:

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +\mu_i \cdot (-v_1 + v_3) - \frac{\mu_i}{6} \cdot (-v_1 + v_3)^3 \\ +\mu_i \cdot (-v_1 + v_3) - \frac{\mu_i}{6} \cdot (-v_1 + v_3)^3 \\ +\mu_i \cdot (-v_1 + v_3) - \frac{\mu_i}{6} \cdot (-v_1 + v_3)^3 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

e

$\mu'_i = 0$

Levando-se em conta que a variedade central deve satisfazer a expressão $N(h(x, \mu_i)) = 0$, utiliza-se numa primeira aproximação, o polinômio formado por monômios de segunda ordem: $h_1(x, \mu_i) = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x \cdot \mu_i + c_1 \cdot \mu_i^2$, sendo $(a_1, b_1, c_1) \in \mathfrak{R}$.

Repetindo o procedimento das subseções (4.1.1) e (4.1.2), obtém-se os valores dos coeficientes do polinômio considerado:

$$\begin{cases} \mu_i^2 : & c_1 = 0 \\ \mu_i \cdot x : & 1 - b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = +1 \Rightarrow h_1(x, \mu_i) = +\mu_i \cdot x \\ x^2 : & a_1 = 0 \end{cases} \quad (6.29)$$

Substituindo (6.29) no sistema (6.28) tem-se:

$$\begin{aligned} x' &= +\mu_i \cdot [-(+\mu_i \cdot x) + x] - \frac{\mu_i}{6} \cdot [-(+\mu_i \cdot x) + x]^3 \\ x' &= +\mu_i \cdot x - \mu_i^2 \cdot x - \frac{\mu_i \cdot x^3}{6} + \frac{\mu_i^2 \cdot x^3}{2} - \frac{\mu_i^3 \cdot x^3}{2} + \frac{\mu_i^4 \cdot x^3}{6} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Portanto, o campo de vetores, restrito à variedade central, desprezando-se os termos de ordem superior, é idêntico ao (6.22), sendo dado por:

$$\begin{cases} x' = +\mu_i \cdot x \\ \mu'_i = 0 \end{cases} \quad (6.31)$$

Caso se considere o segundo termo na aproximação, que é $-\mu_i^2 \cdot x$, obtém-se um campo idêntico ao (6.23):

$$\begin{cases} x' = +\mu_i \cdot x - \mu_i^2 \cdot x \\ \mu_i' = 0 \end{cases} \quad (6.31)$$

Entretanto, levando em conta o terceiro termo $-\frac{\mu_i \cdot x^3}{6}$, obtém-se um campo

ligeiramente diferente:

$$\begin{cases} x' = +\mu_i \cdot x - \mu_i^2 \cdot x - \frac{\mu_i \cdot x^3}{6} \\ \mu_i' = 0 \end{cases} \quad (6.32)$$

O retrato de fases correspondente encontra-se na figura 28, a seguir:

Fig.28: Retrato de fases em P_2 , para $\mu_i > 0$ (terceira aproximação).

Fazendo $x' = 0$, tem-se os pontos de equilíbrio $x_1^* = 0$ e $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{6(1-\mu_i)}$.

Para verificação das suas estabilidades, deriva-se (6.32) em relação à x , obtendo:

$$\frac{d(x')}{dx} = +\mu_i - \mu_i^2 - \frac{\mu_i^2 \cdot x^2}{2} \quad (6.33)$$

Para $x_1^* = 0$, resulta em equilíbrio estável, se $\mu_i < 0$ ou $\mu_i > 1$, e equilíbrio instável, se $0 < \mu_i < +1$.

Para $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{6(1-\mu_i)}$, resulta em equilíbrio instável, se $\mu_i < 0$ e equilíbrio estável, se $0 < \mu_i < +1$.

O diagrama de bifurcação correspondente a essas conclusões, encontra-se na figura 29.

Fig. 29: Diagrama de bifurcação para P_2 (terceira aproximação).

Pode-se notar, mais uma vez, que a descrição da estabilidade não se alterou localmente, ocorrendo, apenas, mudanças de caráter global..

- **CASO 2b:** $\sin(x_2) \approx -(x_2 + \pi) + \frac{(x_2 + \pi)^3}{6}$ e

$$h_1(x, \mu_i) = a_1 \cdot x^3 + b_1 \cdot x^2 \cdot \mu_i + c_1 \cdot x \cdot \mu_i^2 + d_1 \cdot \mu_i^3, \quad (a_1, b_1, c_1, d_1) \in \mathfrak{R}.$$

Considere-se agora, $h_1(x, \mu_i)$ formado por monômios de terceira ordem:

$$h_1(x, \mu_i) = a_1 \cdot x^3 + b_1 \cdot x^2 \cdot \mu_i + c_1 \cdot x \cdot \mu_i^2 + d_1 \cdot \mu_i^3, \text{ sendo } (a_1, b_1, c_1, d_1) \in \mathfrak{R}.$$

Os valores dos coeficientes do polinômio considerado são obtidos repetindo o procedimento da subseção (4.1.1) e (4.1.2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_i^3 : d_1 = 0 \\ \mu_i^2 \cdot x : c_1 = 0 \\ \mu_i \cdot x^2 : b_1 = 0 \\ x^3 : a_1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow h_1(x, \mu_i) = 0 \quad (6.34)$$

Conclui-se então que não há polinômio que satisfaça a expressão $N(h(x, \mu_i)) = 0$. Assim, a estabilidade do sistema (4.8) fica determinada pela sua aproximação tangencial, resultando no seguinte campo de vetores restrito à variedade central:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = +\mu_i \cdot x - \frac{\mu_i \cdot x^3}{6} \\ \mu_i' = 0 \end{array} \right. \quad (6.35)$$

Fazendo $x' = 0$, tem-se os pontos de equilíbrio $x_1^* = 0$ e $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{6}$. Para verificação das suas estabilidades, deriva-se (6.35) em relação à x , obtendo:

$$\frac{d(x')}{dx} = +\mu_i - \frac{\mu_i \cdot x^2}{2} \quad (6.36)$$

Para $x_1^* = 0$, resulta em equilíbrio estável, se $\mu_i < 0$, e equilíbrio instável, se $\mu_i > 0$.

Para $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{6}$, resulta em equilíbrio instável, se $\mu_i < 0$, e equilíbrio estável, se $\mu_i > 0$.

O diagrama de bifurcação correspondente a essas conclusões, encontra-se na figura 30.

Fig. 30: Diagrama de bifurcação para P_2 (quarta aproximação).

Mais uma vez, as mudanças de caráter global não alteraram qualitativamente a descrição da estabilidade, localmente.

- **CASO 2c:** $\sin(x_2) \approx -(x_2 + \pi) + \frac{(x_2 + \pi)^3}{6} e$

$$h_1(x, \mu_i) = a_1 \cdot x^4 + b_1 \cdot x^3 \cdot \mu_i + c_1 \cdot x^2 \cdot \mu_i^2 + d_1 \cdot x \cdot \mu_i^3 + e_1 \cdot \mu_i^4,$$

$$(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1) \in \mathfrak{R}.$$

Considere-se agora, $h_1(x, \mu_i)$ formado por monômios de quarta ordem:

$$h_1(x, \mu_i) = a_1 \cdot x^4 + b_1 \cdot x^3 \cdot \mu_i + c_1 \cdot x^2 \cdot \mu_i^2 + d_1 \cdot x \cdot \mu_i^3 + e_1 \cdot \mu_i^4, \text{ sendo}$$

$$(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1) \in \mathfrak{R}.$$

Repetindo o procedimento da subseção (4.1.1) e (4.1.2), obtém-se os valores dos coeficientes do polinômio considerado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_i^4 : e_1 = 0 \\ \mu_i^3 \cdot x : d_1 = 0 \\ \mu_i^2 \cdot x^2 : c_1 = 0 \\ \mu_i \cdot x^3 : b_1 = -\frac{1}{6} \\ x^4 : a_1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow h_1(x, \mu_i) = -\frac{\mu_i}{6} \cdot x^3 \quad (6.37)$$

Substituindo (6.37) no sistema (6.28) tem-se:

$$\begin{aligned} x' &= +\mu_i \cdot \left[-\left(-\frac{\mu_i}{6} \cdot x^3 \right) + x \right] - \frac{\mu_i}{6} \cdot \left[-\left(-\frac{\mu_i}{6} \cdot x^3 \right) + x \right]^3 \\ x' &= +\mu_i \cdot x - \frac{\mu_i \cdot x^3}{6} + \frac{\mu_i^2 \cdot x^3}{6} - \frac{\mu_i^2 \cdot x^5}{12} - \frac{\mu_i^3 \cdot x^7}{72} - \frac{\mu_i^4 \cdot x^9}{1296} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Portanto o campo de vetores, restrito à variedade central, desprezando-se os termos de ordem superior, é idêntico à (6.35), sendo dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = +\mu_i \cdot x - \frac{\mu_i \cdot x^3}{6} \\ \mu_i' = 0 \end{array} \right. \quad (6.39)$$

Entretanto, levando em conta o terceiro termo, que é $+\frac{\mu_i^2 \cdot x^3}{6}$, obtém-se um campo ligeiramente diferente:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = +\mu_i \cdot x - \frac{\mu_i \cdot x^3}{6} + \frac{\mu_i^2 \cdot x^3}{6} \\ \mu_i' = 0 \end{array} \right. \quad (6.40)$$

Fazendo $x' = 0$, tem-se os pontos de equilíbrio $x_1^* = 0$ e $x_{2,3}^* = \pm \sqrt{\frac{6}{1-\mu_i}}$. Para

verificação das suas estabilidades, deriva-se (6.40) em relação à x , obtendo:

$$\frac{d(x')}{dx} = +\mu_i - \frac{\mu_i \cdot x^2}{2} + \frac{\mu_i^2 \cdot x^2}{2} \quad (6.41)$$

Para $x_1^* = 0$, resulta em equilíbrio estável, se $\mu_i > 0$, e equilíbrio instável, se $\mu_i < 0$.

Para $x_{2,3}^* = \pm \sqrt{\frac{6}{1-\mu_i}}$, resulta em equilíbrio instável, se $\mu_i < 0$ e equilíbrio estável, se $0 < \mu_i < +1$.

O diagrama de bifurcação correspondente a essas conclusões, encontra-se na figura 31.

Fig. 31: Diagrama de bifurcação para P_2 (quinta aproximação).

Mais uma vez, as mudanças de caráter global, não alteraram qualitativamente a descrição da estabilidade, localmente.

Observando as cinco aproximações, apresentadas nas figuras 26, 27, 29, 30 e 31, pode-se obter as mesmas conclusões da subseção (6.1).

6.3 ENTRADA TIPO RAMPA DE FASE: CONSTRUÇÃO DE NOVAS VARIEDADES CENTRAIS EM TORNO DE $P=(0, +\pi/2, 0)$.

Mais uma vez, as diferentes aproximações serão divididas em casos, para maior facilidade de comparação entre os retratos de fases e os diagramas de bifurcação:

- **CASO 3a:** $\sin(x_2) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right)^2$ e $h_1(x) = a_1 \cdot x^3 + b_1 \cdot x^2$, $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}$.

No estudo da estabilidade do ponto de equilíbrio $P = \left(0, +\frac{\pi}{2}, 0\right)$, na subseção

(4.2.1), obteve-se à partir do polinômio $h_1(x) = -\mu_i^2 \cdot x^3 + \frac{\mu_i}{2} \cdot x^2$, o seguinte campo de vetores restrito à variedade central:

$$\begin{cases} x' = -\frac{\mu_i^2}{2} \cdot x^3 + \frac{\mu_i}{2} \cdot x^2 \end{cases} \quad (6.41)$$

O retrato de fases decorrente desta expressão e o diagrama de bifurcação correspondente são rerepresentados a seguir:

Fig.32: Retrato de fases em P , para $\mu_i > 0$ (primeira aproximação).

Fig. 33: Diagrama de bifurcação para P (primeira aproximação).

Na ocasião, desprezou-se os termos $\mathcal{O}(\geq x^4)$. Do mesmo modo que nas subseções anteriores, a análise prossegue, considerando-se também esses termos.

A seguir, apresenta-se o campo de vetores, restrito à variedade central, na sua forma completa:

$$\left\{ \begin{aligned} x' = & +\frac{\mu_i}{2} \cdot x^2 - \frac{\mu_i^2}{2} \cdot x^3 + \frac{9\mu_i^3}{8} \cdot x^4 - \frac{\mu_i^4}{2} \cdot x^5 + \frac{\mu_i^5}{2} \cdot x^6 \end{aligned} \right. \quad (6.42)$$

Como segunda aproximação, considere-se o terceiro termo de (6.42):

$$\left\{ \begin{aligned} x' = & +\frac{\mu_i}{2} \cdot x^2 - \frac{\mu_i^2}{2} \cdot x^3 + \frac{9\mu_i^3}{8} \cdot x^4 \end{aligned} \right. \quad (6.43)$$

Fazendo $x' = 0$, tem-se $x = 0$ ou $x = \frac{2 \pm 4\sqrt{-2}}{9\mu_i}$. Logo, só existe um ponto de

equilíbrio, $x^* = 0$, que é instável, conforme ilustra o retrato de fases correspondente, da figura 34:

Fig.34: Retrato de fases em P , para $\mu_i > 0$ (segunda aproximação).

É importante notar que, a descrição local da estabilidade, isto é, em torno do ponto de equilíbrio não foi afetada. Outro fato interessante é que o ponto estável $x_2^* = \frac{1}{\mu_i}$, que punha em dúvida as conclusões à respeito da estabilidade do ponto P , não existe mais, confirmando a sua irrelevância no estudo local da estabilidade de P .

Considerando agora o quarto termo de (6.42):

$$\left\{ \begin{aligned} x' = & +\frac{\mu_i}{2} \cdot x^2 - \frac{\mu_i^2}{2} \cdot x^3 + \frac{9\mu_i^3}{8} \cdot x^4 - \frac{\mu_i^4}{2} \cdot x^5 \end{aligned} \right. \quad (6.44)$$

O retrato de fases correspondente é qualitativamente semelhante ao apresentado na figura 32.

Fazendo $x' = 0$, tem-se $x = 0$ ou $x = \frac{2}{\mu_i}$ ou $x = \frac{1 \pm \sqrt{-31}}{8\mu_i}$. Logo, obtém-se dois pontos de equilíbrio, $x_1^* = 0$ ou $x_2^* = \frac{2}{\mu_i}$. Para verificação das suas estabilidades, deriva-se (6.42) em relação à x , obtendo:

$$\frac{d(x')}{dx} = +\mu_i \cdot x - \frac{3\mu_i^2}{2}x^2 + \frac{9\mu_i^3}{2}x^3 - \frac{5\mu_i^4}{2}x^4 = \begin{cases} 0, & \text{para } x_1^* = 0 \Rightarrow \text{instável} \\ -8, & \text{para } x_2^* = \frac{2}{\mu_i} \Rightarrow \text{estável} \end{cases} \quad (6.45)$$

O diagrama de bifurcação correspondente a essas conclusões é qualitativamente semelhante ao apresentado na figura 33.

- **CASO 3b:** $\sin(x_2) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right)^2$ e $h_1(x) = a_1 \cdot x^4 + b_1 \cdot x^3 + c_1 \cdot x^2$,
 $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}$.

Considere-se agora, o polinômio $h_1(x, \mu_i)$ de quarta ordem:
 $h_1(x) = a_1 \cdot x^4 + b_1 \cdot x^3 + c_1 \cdot x^2$, sendo $(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1) \in \mathbb{R}$.

Repetindo o procedimento da subseção (4.1.1), obtém-se os valores dos coeficientes do polinômio considerado:

$$\begin{cases} x^2: & c_1 = +\frac{\mu_i}{2} \\ x^3: & b_1 = -\mu_i^2 \\ x^4: & a_1 = +\frac{25\mu_i^3}{8} \end{cases} \Rightarrow h_1(x, \mu_i) = +\frac{25\mu_i^3}{8} \cdot x^4 - \mu_i^2 \cdot x^3 + \frac{\mu_i}{2} \cdot x^2 \quad (6.46)$$

Substituindo (6.46) no sistema (4.54) tem-se:

$$\begin{aligned} x' &= +\frac{\mu_i}{2} \cdot \left[-\left(+\frac{25\mu_i^3}{8} \cdot x^4 - \mu_i^2 \cdot x^3 + \frac{\mu_i}{2} \cdot x^2 \right) + x \right]^2 \\ x' &= +\frac{\mu_i}{2} \cdot x^2 - \frac{\mu_i^2}{2} \cdot x^3 + \frac{9\mu_i^3}{8} \cdot x^4 - \frac{29\mu_i^4}{8} \cdot x^5 + \frac{33\mu_i^5}{16} \cdot x^6 \\ &\quad - \frac{25\mu_i^6}{8} \cdot x^7 + \frac{625\mu_i^7}{1288} \cdot x^8 \end{aligned} \quad (6.47)$$

Portanto o campo de vetores, restrito à variedade central, desprezando-se os termos de ordem superior, é idêntico ao (6.43), sendo dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = +\frac{\mu_i}{2} \cdot x^2 - \frac{\mu_i^2}{2} \cdot x^3 + \frac{9\mu_i^3}{8} \cdot x^4 \end{array} \right. \quad (6.48)$$

A consideração dos termos de ordem superior, tais como, o termo de quinta ordem $-\frac{29\mu_i^4}{8} \cdot x^5$ conduz à aproximações qualitativamente semelhantes à (6.42).

- **CASO 3c:** $\sin(x_2) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right)^4$ e $h_1(x) = a_1 \cdot x^3 + b_1 \cdot x^2$,
 $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}$.

Considerando-se também o termo de quarta ordem da expansão da função seno em torno de $x_2 = \frac{\pi}{2}$, tem-se: $\sin(x_2) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right)^4$.

Desse modo, reescreve-se o sistema (4.8) na sua forma matricial, já transladado para a origem, ou seja, $\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{x}_2 = \left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right)$ e $\tilde{x}_3 = x_3$:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}'_1 \\ \tilde{x}'_2 \\ \tilde{x}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +\frac{\mu_i}{2} \cdot \tilde{x}_2 - \frac{\mu_i}{24} \cdot \tilde{x}_2^4 \\ 0 \\ +\frac{\mu_i}{2} \cdot \tilde{x}_2 - \frac{\mu_i}{24} \cdot \tilde{x}_2^4 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \tilde{X}' = J_p \cdot \tilde{X} + \tilde{F} \quad (6.49)$$

Utilizando-se a mesma base M , definida em (4.17) e (4.18), composta pelos autovetores de J_p , reescreve-se o sistema na forma canônica de Jordan:

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +\frac{\mu_i}{2} \cdot (-v_1 + v_3) - \frac{\mu_i}{24} \cdot (-v_1 + v_3)^4 \\ +\frac{\mu_i}{2} \cdot (-v_1 + v_3) - \frac{\mu_i}{24} \cdot (-v_1 + v_3)^4 \\ +\frac{\mu_i}{2} \cdot (-v_1 + v_3) - \frac{\mu_i}{24} \cdot (-v_1 + v_3)^4 \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

Levando-se em conta que a variedade central deve satisfazer a expressão $N(h(x)) = 0$, utiliza-se numa primeira aproximação, o polinômio de terceira ordem: $h_1(x) = a_1 \cdot x^3 + b_1 \cdot x^2$, sendo $(a_1, b_1) \in \mathfrak{R}$.

Repetindo o procedimento da subseção (4.2), obtém-se os valores dos coeficientes do polinômio considerado, idênticos aos obtidos para (6.41). Desse modo, pode-se escrever:

$$h_1(x, \mu_i) = -\mu_i^2 \cdot x^3 + \frac{\mu_i}{2} \cdot x^2 \quad (6.51)$$

Substituindo (6.51) no sistema (6.50) resulta:

$$\begin{aligned} x' = & +\frac{\mu_i}{2} \cdot \left[-\left(-\mu_i^2 \cdot x^3 + \frac{\mu_i}{2} \cdot x^2 \right) + x \right]^2 - \frac{\mu_i}{24} \cdot \left[-\left(-\mu_i^2 \cdot x^3 + \frac{\mu_i}{2} \cdot x^2 \right) + x \right]^4 \\ x' = & +\frac{\mu_i}{2} \cdot x^2 - \frac{\mu_i^2}{2} \cdot x^3 - \frac{\mu_i}{24} \cdot x^4 + \frac{9\mu_i^3}{8} \cdot x^4 + \frac{\mu_i^2}{12} \cdot x^5 - \frac{\mu_i^4}{2} \cdot x^5 - \\ & -\frac{11\mu_i^3}{48} \cdot x^6 + \frac{\mu_i^5}{2} \cdot x^6 + \frac{13\mu_i^4}{48} \cdot x^7 - \frac{145\mu_i^5}{384} \cdot x^8 + \frac{13\mu_i^6}{48} \cdot x^9 - \\ & -\frac{11\mu_i^7}{48} \cdot x^{10} + \frac{\mu_i^8}{12} \cdot x^{11} - \frac{\mu_i^9}{24} \cdot x^{12} \end{aligned} \quad (6.52)$$

O campo de vetores, restrito à variedade central, desprezando-se os termos de ordem superior é, portanto, idêntico à (6.41):

$$x' = +\frac{\mu_i}{2} \cdot x^2 - \frac{\mu_i^2}{2} \cdot x^3 \quad (6.53)$$

Caso sejam considerados outros termos em (6.52), os campos de vetores obtidos serão qualitativamente localmente semelhantes aos já obtidos até o momento. Entretanto, como se pode notar, a equação (6.52) torna-se bastante mais difícil de se analisar na medida em que se consideram esses termos.

Para todos os casos analisados neste capítulo, outras aproximações poderiam ser feitas. Entretanto, objetivou-se ressaltar aspectos dos diagramas de bifurcação que não se alteram, conforme se aumenta o grau de precisão dessas aproximações. Espera-se assim ter alcançado esse objetivo.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

O estudo do sincronismo das redes OWMS - Estrela Simples, OWMS - Cadeia Simples e mistas tem relevância garantida nas mais diversas aplicações, tanto em engenharia de comunicações e controle, quanto em biologia.

Estudos anteriores haviam limitado suas análises a aproximações lineares, sem estudar o comportamento dos sistemas dinâmicos em torno dos pontos de equilíbrio não-hiperbólicos. Nesta dissertação, graças a uma rigorosa técnica de aproximação denominada Teorema da Variedade Central, foi possível estender esses estudos. Entretanto, outras hipóteses foram aqui assumidas, tendo em vista os objetivos propostos:

- eventuais perturbações, originadas, por exemplo, pelo envelhecimento do cristal, não foram consideradas, bem como o deslocamento Doppler de frequência, decorrente do movimento do mestre em relação aos escravos. A influência dessas perturbações foi estudada por Piqueira (1997).

- desconsiderou-se a influência dos termos de frequência dupla, como é comum na literatura (Gardner, 1979; Piqueira, 1987). Num artigo recente, Piqueira e Monteiro (2003) demonstram a validade desta conduta para ganhos relativamente pequenos, sendo portanto aplicável a este estudo.

- dois erros de fase foram definidos, ao invés de somente um, como é realizado na abordagem tradicional; além de $\varphi_{ii}(t)$, entre o sinal local e o externo do i -ésimo nó escravo, define-se também $\varphi_{1i}(t)$, entre os sinais locais do i -ésimo nó escravo e do mestre.

- a escolha das variáveis de estado φ'_{1i} , φ_{ii} e φ'_{ii} , sem incluir φ_{1i} , como poderia parecer mais natural, mostrou-se bastante conveniente, uma vez que desse modo foi possível obter um sistema de equações no espaço de estados com uma dimensão menor (três), sem prejuízos à descrição do problema. No apêndice, encontra-se uma justificativa para essa conduta, originada durante o equacionamento, na análise desses sistemas.

- a mudança de variável independente trouxe uma redução da dimensão do espaço de parâmetros, que tradicionalmente é dois, para somente um, simplificando ainda mais o estudo.

Em cada rede existem características próprias que foram abordadas. Nas redes OWMS - Estrela Simples, cada escravo busca o sincronismo com o mestre de forma independente, tendo como única informação o sinal proveniente dele. Desse modo, basta estudar um nó para estabelecer as condições de sincronismo de toda a rede. O ajuste dos parâmetros de cada PLL, que levam ao sincronismo, é dado pelos diagramas de bifurcação.

Para a entrada degrau de fase, de qualquer amplitude, dois pontos de equilíbrio, correspondente ao terno de variáveis $(\varphi'_{li}, \varphi_{ii}, \varphi'_{ii})$, são obtidos: $P_1 = (0,0,0)$ e $P_2 = (0,-\pi,0)$. A aplicação do Teorema da Variedade Central determina a estabilidade na vizinhança desses pontos:

- P_1 é assintoticamente estável, para qualquer valor positivo do parâmetro μ .
- P_2 é instável, para qualquer valor positivo do parâmetro μ .

É importante ressaltar que, na prática, μ é sempre positivo; uma vez que K_o , K_m , V_i, V_o , R e C são constantes positivas, e portanto $\mu = K_o \cdot \frac{K_m \cdot V_i \cdot V_o}{2} \cdot R \cdot C > 0$.

Para a entrada rampa de fase, de declividade normalizada $\bar{\Omega}$, existem três possibilidades:

- se $\bar{\Omega} > \mu_i$, o valor da declividade é maior que o parâmetro, não existem pontos de equilíbrio e portanto, nunca se alcança o sincronismo.

- se $\bar{\Omega} = \mu_i$, existe um ponto de equilíbrio, instável, $P = \left(0, +\frac{\pi}{2}, 0 \right)$, correspondente ao terno de variáveis $(\varphi'_{li}, \varphi_{ii}, \varphi'_{ii})$.

- se $\bar{\Omega} < \mu_i$, existem dois pontos de equilíbrio, de modo que:

$$P_1 = \left(0, \arccos \left(+\sqrt{1 - \left(\frac{\bar{\Omega}}{\mu_i} \right)^2} \right), 0 \right) \text{ é assintoticamente estável}$$

e

$$P_2 = \left(0, \arccos \left(-\sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_i} \right)^2} \right), 0 \right) \text{ é instável,}$$

correspondente ao terno de variáveis $(\varphi'_{li}, \varphi_{ii}, \varphi'_{ii})$.

Nas redes OWMS Cadeia Simples, cada escravo busca o sincronismo com o mestre pela utilização do sinal que recebe, podendo ser do mestre ou de outro escravo. Portanto, é natural de se esperar que o comportamento dinâmico de um nó dependa do anterior. Neste trabalho, através de uma manipulação matemática conveniente, foi possível estudar um nó qualquer sem conhecer o sinal que ele recebe do nó anterior, mas somente aquele proveniente do mestre. Para isso, foi admitido que o nó anterior já havia sincronizado, simplificando-se a análise de tal modo que assim se tornou idêntica à realizada para a Estrela Simples.

O estudo das redes mistas não foi formalmente abordado. Uma vez escolhido um nó para análise, pode-se considerá-lo como sendo parte de uma Cadeia Simples ou Estrela Simples.

Em toda simplificação se tem por finalidade a solução objetiva de um problema, admitindo-se para isso, certas hipóteses. Em contrapartida, muitas vezes perde-se a oportunidade de se estudar um problema mais interessante. Desse modo, existem outras análises que completariam o estudo realizado até agora:

- Verificar se para um dado nó, existe um subconjunto de valores de μ , que ainda permite reter o estado síncrono, mesmo que um ou mais nós antecedentes tenham perdido o sincronismo ou mesmo não chegaram a sincronizar. Um estudo como esse seria importante, já que podem existir aplicações em que, mesmo perdendo o sincronismo da rede como um todo, ainda interessa manter o sincronismo do maior número possível de nós.

- Estabelecer as condições de sincronismo para outros desvios de fase, além do degrau e da rampa de fase, que não tenham segunda derivada em relação ao tempo nula. Para esses dois sinais, o atraso considerado entre os nós não teve nenhuma relevância para o sincronismo. Especificamente no caso da Cadeia Simples é interessante observar que, para um dado nó, o sincronismo poderia ser influenciado pelo atraso $\tau_{(i-1)i}$, independentemente do estado dos nós anteriores.

Esta dissertação é o resultado de uma pesquisa teórica, em que se utilizou a Teoria de Sistemas Dinâmicos, com ênfase no Teorema da Variedade Central para se analisar qualitativamente o comportamento dinâmico das redes OWMS.

O objetivo desta pesquisa foi contribuir para o estudo dos problemas relacionados à transmissão de sinais de tempo. Espera-se ter alcançado este objetivo.

Mais uma vez, registra-se um agradecimento ao CNPq, que financiou esta pesquisa.

APÊNDICE

JUSTIFICATIVA DA ESCOLHA DAS VARIÁVEIS DE ESTADO DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES NO ESPAÇO DE ESTADOS

Neste apêndice, justifica-se a escolha feita nos capítulos 4 e 5, por um conjunto de somente três variáveis de estado φ'_{li} , φ_{ii} e φ'_{ii} , na descrição dos sistemas dinâmicos apresentados nesses mesmos capítulos, uma vez que se desconsiderou a participação de φ_{li} naqueles equacionamentos.

Primeiramente, reapresenta-se o sistema dinâmico (4.8) que descreve a estabilidade do i -ésimo nó escravo para entradas do tipo degrau de fase, sendo que nesse momento, também se considera a variável de estado φ_{li} :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \varphi_{li} \\ x_1 = \varphi'_{li} \\ x_2 = \varphi_{ii} \\ x_3 = \varphi'_{ii} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = x_1 \\ x'_1 = -x_1 - \mu_i \cdot \text{sen } x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ x'_3 = -x_3 - \mu_i \cdot \text{sen } x_2 \end{array} \right. \quad (\text{a1})$$

Seus pontos de equilíbrio são obtidos pela definição: $\frac{d\bar{x}}{dt} = 0$. Dessa forma se obtém:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_0 = x_1 = 0 \\ x'_1 = -x_1 - \mu_i \cdot \text{sen } x_2 = 0 \\ x'_2 = x_3 = 0 \\ x'_3 = -x_3 - \mu_i \cdot \text{sen } x_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0^* = k, \quad k \in \mathfrak{R} \\ x_1^* = 0 \\ x_3^* = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{sen } x_2^* = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2^* = 0 \\ \text{ou} \\ x_2^* = -\pi \end{array} \right.$$

Portanto, existem dois pontos de equilíbrio:

$$P_1 = (k, 0, 0, 0) \text{ e } P_2 = (k, 0, -\pi, 0) \quad (\text{a2})$$

Também para entradas do tipo rampa de fase, poder-se-ia reescrever o sistema dinâmico (4.45), considerando-se, novamente, a variável de estado φ_{li} :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \varphi_{li} \\ x_1 = \varphi'_{li} \\ x_2 = \varphi_{ii} \\ x_3 = \varphi'_{ii} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = x_1 \\ x'_1 = \overline{\Omega} - x_1 - \mu_i \cdot \text{sen } x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ x'_3 = \overline{\Omega} - x_3 - \mu_i \cdot \text{sen } x_2 \end{array} \right. \quad (\text{a3})$$

Seus pontos de equilíbrio são obtidos pela definição $\frac{d\bar{x}}{dt} = 0$. Dessa forma se obtém:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_0 = x_1 = 0 \\ x'_1 = \overline{\Omega} - x_1 - \mu_i \cdot \text{sen } x_2 = 0 \\ x'_2 = x_3 = 0 \\ x'_3 = \overline{\Omega} - x_3 - \mu_i \cdot \text{sen } x_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0^* = k, \quad k \in \Re \\ x_1^* = 0 \\ x_3^* = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{sen } x_2^* = \frac{\overline{\Omega}}{\mu_i}$$

Portanto, existem três pontos de equilíbrio:

$$P = \left(k, 0, \frac{\pi}{2}, 0 \right) \text{ e } P_{1,2} = \left(k, 0, \arccos \left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{\overline{\Omega}}{\mu_i} \right)^2} \right), 0 \right)$$

(a4)

Para a análise da estabilidade, em torno dos pontos de equilíbrio obtidos para ambas as entradas, deve-se, primeiramente, calcular a matriz Jacobiana para esses pontos, resultando:

$$J_{\forall P} = \begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & A & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{a5})$$

sendo:

- Degrau: $A = \mp \mu_i$, para $P_{1,2}$.
- Rampa: $A = \mp \mu_i \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{\Omega}}{\mu_i}\right)^2}$, para P ($\bar{\Omega} = \mu_i$) ou para $P_{1,2}$ ($\bar{\Omega} < \mu_i$).

Os autovalores de (4.10) associados a esses pontos são:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4A}}{2}, \quad \lambda_4 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4A}}{2} \quad (\text{a6})$$

O teorema exige que os sistemas (a1) e (a3) estejam na forma canônica de Jordan.

$$\begin{bmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & A & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \\ 0 \\ B \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad X' = J_{\forall P} \cdot X + F \quad (\text{a7})$$

sendo:

- Degrau: $B = +\frac{\mu_i}{6} x_2^3$, para P_1 , caso em que: $\text{sen}(x_2) \approx x_2 - \frac{x_2^3}{6}$
- Degrau: $B = -\frac{\mu_i}{6} (x_2 + \pi)^3$, para P_2 , caso em que:

$$\text{sen}(x_2) \approx -(x_2 + \pi) + \frac{(x_2 + \pi)^3}{6}$$

- Rampa: $B = +\frac{\mu_i}{2} \left(x_2 - \arcsen \frac{\bar{\Omega}}{\mu_i} \right)^2$, para P e $P_{1,2}$, caso em que:

$$\text{sen}(x_2) \approx 1 - \frac{1}{2} \left(x_2 - \arcsen \frac{\bar{\Omega}}{\mu_i} \right)^2$$

Utilizando a base M , composta pelos autovetores de $J_{\forall P}$, define-se um novo conjunto de variáveis de estado $V=(v_0, v_1, v_2, v_3)$ de modo que:

$$X = M \cdot V \quad \Rightarrow \quad V = M^{-1} \cdot X$$

A inversa da matriz M pode ser escrita genericamente como segue:

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{+1} & 0 & \boxed{-1} \\ +1 & \boxed{+1} & -1 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & \frac{-A}{\sqrt{1+4A}} & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+4A}} \right) \\ 0 & 0 & \frac{+A}{\sqrt{1+4A}} & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+4A}} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{a8})$$

Assim, reescreve-se o sistema na forma canônica de Jordan:

$$V' = \left[M^{-1} \cdot J_p \cdot M \right] \cdot V + M^{-1} \cdot F$$

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ \boxed{v'_2} \\ v'_3 \\ v'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1-\sqrt{1+4A}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1-\sqrt{1+4A}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \boxed{v_2} \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \boxed{0} \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+4A}} \right) \tilde{B} \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+4A}} \right) \tilde{B} \end{bmatrix} \quad (\text{a9})$$

sendo $\tilde{B}$ o termo não linear que se obtém quando se utiliza as relações entre as variáveis de V e M em B , dadas pela matriz de mudança de base M , para cada caso. Este termo tem um tamanho considerável e sua introdução no texto seria uma complicação desnecessária.

A extração da linha e da coluna de zeros destacada em (a9), resulta num sistema idêntico àquele que se obteria, caso não fosse considerada a variável φ_{li} de início.

Neste ponto, mostra-se importante ressaltar três aspectos que certificam como correta a não consideração de φ_{li} no conjunto escolhido de variáveis de estado:

1. Primeiramente, φ_{li} não se encontra nos sistemas dinâmicos (3.31) e (3.50). Num primeiro instante, pode parecer intuitivo que a sua ausência

denuncia a independência da descrição dinâmica dos sistemas (3.31) e (3.50) em relação a essa variável.

2. Os pontos de equilíbrio obtidos neste apêndice, quando se considerou φ_{li} , assumiram, como coordenadas correspondentes à sua direção, valores constantes. Assim, em qualquer seção ortogonal, o diagrama de fases é idêntico.
3. Finalmente, quando se considera φ_{li} no equacionamento, surge uma equação sem dinâmica, $v'_2 = 0 \cdot v_2 + 0$, quando se obtém a forma canônica de Jordan (a9) dos sistemas. Esta equação não aparece, no caso de não se considerar φ_{li} como variável de estado.

Portanto, como se verifica, a inclusão de φ_{li} é irrelevante para a descrição da estabilidade dos sistemas dinâmicos apresentados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEAR, M. F.; CONNORS, B. W.; PARADISO, M. A.. **Neurociências: desvendando o sistema nervoso**. 2^a. ed.. Porto Alegre: Artmed, 2002.

BENNATON, J. F.; PIQUEIRA, J. R. C.; O teorema de Hopf, acoplado ao método do Lugar das Raízes, na Análise de Malhas de Sincronismo. In: **X CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL** – 59/65, Gramado - R. S., setembro de 1987.

DIRETRIZES PARA APRESENTAÇÃO DE DISSERTAÇÕES E TESES.

Serviço de Bibliotecas da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2001.

FIEDLER – FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. DO. **Caos: uma Introdução**. 2^a. ed.. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 1995.

GARCIA, P. A.. **Redes Simples de Malhas de Sincronismo de Fase: uma análise via Teoria de Sistemas Dinâmicos**. Dissertação (Mestrado). Engenharia Elétrica da Universidade Presbiteriana Mackenzie. São Paulo, 2000.

GARDNER, F. M.. **Phase Lock Techniques**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1979.

GREEN, D. N.. Lock-In, Tracking and Acquisition of ACG – Aided Phase-Locked Loops. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**. Vol. CAS-32, nº6, dezembro, 1983.

GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P.J.. **Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields**. New York: Springer-Verlag, 1983.

LEE, W. C.; LEE, J.; CHOI, D.; KIM, M.; LEE, C.. The distributed controller architecture for a masterarm and its application to teleoperation with force feedback. **Proceedings of IEEE – International Conference on Robotics & Automation, 213-218**. Detroit, Michigan - EUA, 1999.

LINDSEY, W. C.; GHAZVIVIAN, F.; HAGMANN, W. C.; DESSOUKY, K.. Network Synchronization. **Proceedings of IEEE, vol. 73, nº 10, 1445 - 1467**, Outubro, 1985.

MARMO, C. N.; FARIA, W. F. DE; PIQUEIRA, J. R. C.; MONTEIRO, L. H. A.. Sincronismo em Redes Mestre - Escravo: Comparação de Topologias. In: **XIV CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA**, Natal – RN, setembro de 2002.

MARQUES, N.; MENNA – BARRETO, L. (orgs.). **Cronobiologia: Princípios e Aplicações**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1997.

MONTEIRO, L. H. A.. **Sistemas Dinâmicos**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2002.

MONTEIRO, L. H. A., GARCIA, P. A., PIQUEIRA, J. R. C. Sincronismo em redes mestre-escravo com atraso. Aceito para a **Revista da Sociedade Brasileira de Automática**.

NUSSENZVEIG, H. M.. **Curso de Física Básica. 1 - Mecânica**. 2^a. ed.. Rio de Janeiro: Editora Edgard Blücher LTDA, 1981.

OGATA, K.. **Engenharia de Controle Moderno**. 3^a. ed.. Rio de Janeiro: Editora Prentice – Hall do Brasil LTDA, 1998.

PIQUEIRA, J. R. C.. **Aplicação da teoria qualitativa de equações diferenciais a problemas de sincronismo de fase**. Tese (Doutoramento). Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 1987.

PIQUEIRA, J. R. C.. **Uma contribuição ao estudo das redes com malhas de sincronismo de fase**. Tese (Livre - Docência). Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 1997.

PIQUEIRA, J. R. C.; MONTEIRO, L. H. A.. Considering second-harmonic terms in the operation of the phase detector for second order phase-locked loop. Aceito para **IEEE Transactions on Circuits and Systems I**.

PIQUEIRA, J. R. C.; ORSATTI, F. M.; MONTEIRO, L. H. A.. Computing with Phase Locked Loops: choosing gains and delays. **IEEE Transactions on Neural Networks**, vol.14, nº 1, janeiro, 2003.

SCIENTIFIC AMERICAN – BRASIL. As Múltiplas faces do Tempo. São Paulo, nº 5, outubro de 2002.

SHAO, G.; BERMAN, F.; WOLSKI, R.. Master/slave computing on the grid. **Proceedings of IEEE - 21st COMPSAC**, 2000.

SOHAIL, S.; RAJ, G.. Replication of multimedia data using master-slave Architecture. **Proceedings of IEEE - 21st COMPSAC**, 1997.

VITERBI, W. C.. **Principles of Coherent Communication**. New York: MC Graw - Hill, 1966.

WIGGINS, S.. **Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos**. New York: Springer-Verlag, 1990.