ALEXANDRE DE OLIVEIRA

Controle Ótimo de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos e Ruídos Multiplicativos sob o Critério de Média Variância ao Longo do Tempo

Tese apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de
Doutor em Engenharia

São Paulo

2011

ALEXANDRE DE OLIVEIRA

Controle Ótimo de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos e Ruídos Multiplicativos sob o Critério de Média Variância ao Longo do Tempo

Tese apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de
Doutor em Engenharia

Área de Concentração:
Engenharia de Sistemas

Orientador: Prof. Dr.
Oswaldo Luiz do Valle Costa

São Paulo
2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Oliveira, Alexandre
Controle ótimo de sistemas lineares com saltos Markovianos e ruídos multiplicativos sob critério de média variância ao longo do tempo / A. Oliveira. -- São Paulo, 2011.
156 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle.

1. Sistemas lineares (Otimização) 2. Controle ótimo 3. Sistemas discretos 4. Controle estocástico 5. Administração de carteiras I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Computação e Sistemas Digitais II. t.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Oswaldo L.V. Costa, pela contribuição inestimável, pela infinita compreensão, pelos ensinamentos e por ser um grande exemplo de dedicação e excelência acadêmica.

À minha esposa Kátia, por seu amor e apoio incondicional mesmo nos momentos mais difíceis.

Aos meus filhos Rafael e Leonardo, pelo tempo que deixamos de estar juntos.

Aos meus pais, José Alberto e Adelaide, pelo apoio e compreensão de minha ausência e à minha avó, Maria por sua torcida inabalável.

Aos meus sogros, Antônio e Sônia, pela constante força e confiança que sempre depositaram em mim.

Aos amigos Afonso de Campos Pinto e Pedro Savadovski, pelo incentivo que me deram para trilhar o árduo caminho de um Doutorado.

A Marco Antônio e a José Luís Vicente, por terem tornado possível minha dedicação a esta empreitada e a toda equipe da MVAR Soluções e Serviços Ltda. pela compreensão de minha ausência.

E a Deus, pela saúde que me deu e por ter colocado em meu caminho todas estas pessoas, dentre muitas outras, sem as quais não teria tido a energia necessária para cumprir com este objetivo.

Resumo

Oliveira, A. **Controle Ótimo de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos e Ruídos Multiplicativos sob o Critério de Média Variância ao Longo do Tempo.** 2011. XXXf. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

Este estudo considera o modelo de controle ótimo estocástico sob um critério de média-variância para sistemas lineares a tempo discreto sujeitos a saltos markovianos e ruídos multiplicativos sob dois critérios. Inicialmente, consideramos como critério de desempenho a minimização multiperíodo de uma combinação entre a média e a variância da saída do sistema sem restrições. Em seguida, consideramos o critério de minimização multiperíodo da variância da saída do sistema ao longo do tempo com restrições sobre o valor esperado mínimo. Condições necessárias e suficientes explícitas para a existência de um controle ótimo são determinadas generalizando resultados anteriores existentes na literatura. O controle ótimo é escrito como uma realimentação de estado adicionado de um termo constante. Esta solução é obtida através de um conjunto de equações generalizadas a diferenças de Riccati interconectadas com um conjunto de equações lineares recursivas. Como aplicação, apresentamos alguns exemplos numéricos práticos para um problema de seleção de portfólio multiperíodo com mudança de regime, incluindo uma estratégia de ALM (*Asset and Liability Management*). Neste problema, deseja-se obter a melhor alocação de portfólio de forma a otimizar seu desempenho entre risco e retorno em cada passo de tempo até o final do horizonte de investimento e sob um dos dois critérios citados acima.

Palavras-chave: controle ótimo estocástico, controle por média-variância, saltos markovianos, ruídos multiplicativos, otimização multiperíodo.

Abstract

Oliveira, A. **Optimal Control of Linear Systems with Markov Jumps and Multiplicative Noises under a Multiperiod Mean-Variance Criterion.** 2011. XXXf. Thesis - Ph.D. - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

In this work we consider the stochastic optimal control problem of discrete-time linear systems subject to Markov jumps and multiplicative noise under two criterions. First, we consider an unconstrained multiperiod mean-variance trade-off performance criterion. In the sequence, we consider a multiperiod minimum variance criterion subject to constraints on the minimum expected output along the time. We present explicit necessary and sufficient conditions for the existence of an optimal control strategy for the problems, generalizing previous results in the literature. The optimal control law is written as a state feedback added with a deterministic sequence. This solution is derived from a set of coupled generalized Riccati difference equations interconnected with a set of coupled linear recursive equations. As an application, we present some practical numerical examples on a multiperiod portfolio selection problem with regime switching, including an *Asset and Liability Management* strategy. In this problem it is desired to find the best portfolio allocation in order to optimize its risk-return performance in every time step along the investment horizon, under one of the two criterions stated above.

Keywords: stochastic optimal control, mean-variance trade-off control, Markov jump systems, multiplicative noise, multiperiod optimization.

Lista de Figuras

6.1 Série do IBOVESPA 81
6.2 Ajuste dos Retornos à Distribuição Normal 82
6.3 Ajuste dos Retornos à Distribuição de t-Student 82
6.4 Ajuste dos Retornos à EVT 83
6.5 Distribuição de Retornos do IBOVESPA 84
6.6 Portfólio com Ativos de Risco: Valor Esperado do Portfólio 90
6.7 Portfólio com Ativos de Risco: Risco Estimado do Portfólio 91
6.8 Portfólio com Ativos de Risco: Desempenho Ajustado ao Risco 91
6.9 Portfólio com Ativos de Risco: Desempenho Comparativo Entre Modelos 92
6.10 Portfólio com Ativos de Risco: Alocação com Otimização Terminal 93
6.11 Portfólio com Ativos de Risco: Alocação com Otimização Multiperíodo 93
6.12 Portfólio com Ativo Livre de Risco e um *Benchmark*: Valor Esperado Líquido do Portfólio 95
6.13 Portfólio com Ativo Livre de Risco e um *Benchmark*: Risco Estimado do Portfólio 96
6.14 Portfólio com Ativo Livre de Risco e um *Benchmark*: Dispersão da Simulação . 96
6.15 Portfólio com Ativo Livre de Risco e um *Benchmark*: Desempenho Ajustado ao Risco 97
6.16 Portfólio com Ativo Livre de Risco e um *Benchmark*: Desempenho Comparativo 97
6.17 Portfólio com Ativo Livre de Risco e um *Benchmark*: Alocação Terminal 98
6.18 Portfólio com Ativo Livre de Risco e um *Benchmark*: Alocação Multiperíodo . . 99
6.19 ALM: Valor Esperado do Portfólio Aberto 100
6.20 ALM: Valor Esperado do Portfólio Consolidado 101
6.21 ALM: Risco Estimado do Portfólio 102
6.22 ALM: Desempenho Ajustado ao Risco 102

6.23 ALM: Alocação com Otimização Terminal 103
6.24 ALM: Alocação com Otimização Multiperíodo 103

Lista de Tabelas

6.1 Lista de Ativos 78
6.2 Caracterização de Estados de Mercado 84
6.3 Matriz de Classificação de Estados 85
6.4 Matriz de Transição de Estados 85
6.5 Retornos Esperados 86
6.6 Matriz de Covariâncias para o Modo 1 87
6.7 Matriz de Covariâncias para o Modo 2 87
6.8 Matriz de Covariâncias para o Modo 3 87
6.9 Matriz de Covariâncias para o Modo 4 88
6.10 Matriz de Covariâncias para o Modo 5 88

C.1 Ajuste da Distribuição Normal aos Retornos 136
C.2 Ajuste da Distribuição t-Student aos Retornos 136
C.3 Ajuste da Distribuição EVT aos Retornos 137
C.4 Portfólio com Ativos de Risco: Resultados da Otimização 137
C.5 Portfólio com Ativos de Risco: Alocação com Otimização Terminal 138
C.6 Portfólio com Ativos de Risco: Alocação com Otimização Multiperíodo 139
C.7 Portfólio com Ativo Livre de Risco mais *Benchmark*: Resultados da Otimização 140
C.8 Portfólio com Ativo Livre de Risco mais *Benchmark*: Alocação com Otimização Terminal 141
C.9 Portfólio com Ativo Livre de Risco mais *Benchmark*: Alocação com Otimização Multiperíodo 142
C.10 ALM para Fundo de Pensão: Resultados da Otimização 143
C.11 ALM para Fundo de Pensão: Alocação com Otimização Terminal 144
C.12 ALM para Fundo de Pensão: Alocação com Otimização Multiperíodo 145

Sumário

Lista de Figuras ii

Lista de Tabelas iii

1 Introdução 1

1.1 Objetivo 1

1.2 Motivação 2

1.3 Estrutura 2

2 Revisão da Literatura 3

2.1 Finanças 4

2.1.1 Evolução Histórica 4

2.1.2 O Problema de Seleção de Portfólio 12

2.2 Teoria de Controle Moderno e o Controle Ótimo 15

2.2.1 Evolução Histórica 15

2.2.2 Aspectos Relevantes 17

2.2.3 Evolução de Trabalhos 20

2.2.4 Contribuição 31

3 Problema de Controle Ótimo Multiperíodo 33

3.1 Notações e Definições 34

3.2 O Sistema Linear com Saltos Markovianos e Ruídos Multiplicativos 35

3.3 Apresentação do Problema 39

3.3.1 Problema $PU(\nu, \xi)$ 40

3.3.2 Problema $PC(\nu, \epsilon)$ 40

3.4 O Problema Auxiliar $A(\lambda, \nu)$ 41

4 Solução dos Problemas **42**

4.1 Proposições Auxiliares 43

4.2 Resultados Intermediários 44

4.3 Resultados Principais 47

4.3.1 Lei de Controle Ótimo do Problema Auxiliar 47

4.3.2 Lei de Controle Ótimo 47

4.3.3 Resultados Auxiliares 51

4.3.4 Solução para o Problema $PU(\nu, \xi)$ 53

4.3.5 Solução para o Problema $PC(\nu, \epsilon)$ 54

4.4 Comentários Finais 56

5 Modelos de Otimização de Portfólios de Investimentos **57**

5.1 Modelo de Otimização para um Portfólio com Ativos de Risco 59

5.2 Modelo de Otimização para um Portfólio com Ativos de Risco e um *Benchmark* 64

5.3 Modelo de ALM para Fundos de Pensão 70

5.4 Conclusões 75

6 Exemplos Numéricos **77**

6.1 Estimação dos Parâmetros de Entrada do Modelo 77

6.1.1 Séries Temporais 78

6.1.2 Modos de Operação do Mercado 79

6.1.3 Estimação dos Retornos Esperados 86

6.1.4 Estimação das Covariâncias 87

6.2 Resultados Numéricos das Simulações 89

6.2.1 Simulação de um Portfólio com Ativos de Risco 89

6.2.2 Simulação de um Portfólio com Ativo Livre de Risco e um *Benchmark* . 94

6.2.3 Simulação de ALM para Fundo de Pensão 99

6.3 Comentários Gerais 104

7 Conclusão **105**

7.1 Trabalhos Futuros 106

A Demonstração de Proposições **110**

A.1 Proposição 1 110

A.2 Proposição 2 112
A.3 Proposição 3 113
A.4 Proposição 4 116
A.5 Proposição 5 121
A.6 Proposição 6 122
A.7 Proposição 7 124
A.8 Proposição 8 128
A.9 Proposição 9 130
A.10 Proposição 10 131

B Demonstração dos Teoremas 132

B.1 Teorema 1 132
B.2 Teorema 2 134
B.3 Teorema 3 135

C Resultados Numéricos 136

C.1 Séries Temporais 136
C.2 Resultados das Simulações 137
C.2.1 Simulação de um Portfólio com Ativos de Risco 137
C.2.2 Simulação de um Portfólio com Ativo Livre de Risco e um *Benchmark* . 140
C.2.3 Simulação de ALM para Fundo de Pensão 143

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objetivo

O objetivo do presente estudo é apresentar um modelo de controle ótimo estocástico sob um critério de média-variância para sistemas lineares a tempo discreto sujeitos a saltos Markovianos e ruídos multiplicativos.

Recentemente, a literatura sobre sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos e/ou ruídos multiplicativos tem recebido grande atenção. Este tipo de modelo tem encontrado muitas aplicações de engenharia em áreas como fissão nuclear e transferência de calor. Em finanças, sua aplicação tem sido em otimização de portfólios, e muitos resultados relacionados com o controle destes sistemas têm sido derivados. Como teremos oportunidade de verificar, a introdução de saltos markovianos e ruídos multiplicativos nas variáveis de estado e/ou controle possibilitam uma modelagem mais adequada para problemas de elevada complexidade.

A estratégia de controle ótimo é derivada a partir de um conjunto de equações de diferenças de Riccati e alguns parâmetros obtidos de algumas equações recursivas. Estes resultados generalizam o caso escalar de média-variância final ótima com mudança de regime Markoviano, otimizando os passos intermediários até o final do horizonte de tempo do problema de investimento.

1.2 Motivação

Nesta tese, a motivação para o estudo deste problema é a sua aplicação à otimização intertemporal de portfólios de investimentos.

Em particular, o problema de seleção de portfólio de investimentos em horizontes longos de tempo, como é o caso de fundos de previdência, é essencialmente um problema de alocação multiperíodo. Além das incertezas associadas às variáveis de mercado necessárias ao apreçamento dos ativos que compõem a carteira, por conta de flutuações de curto prazo devido à volatilidade do mercado mais as mudanças estruturais nos chamados fundamentos econômicos, temos o passivo, que possui um perfil muito peculiar.

Mais especificamente, a necessidade de se considerar a dinâmica do passivo se deve a dois aspectos: possuir um período de aquisição de direitos através de contribuições periódicas e, a partir de um certo momento, o contribuinte passa a usufruir da renda sobre o capital resultante de suas contribuições tipicamente até o fim da vida. Há ainda planos que permitem inclusive a reversão do benefício à pensão. Por este motivo, a expectativa de vida constitui-se em um fator de extrema importância para um processo de otimização de tão longo prazo. Desta forma, a aplicação de um modelo de otimização multiperíodo, com as características descritas acima, é adequada ao problema em questão.

1.3 Estrutura

A presente tese está estruturada de maneira a apresentar uma revisão literária percorrendo rapidamente a evolução histórica da Teoria de Finanças e da Teoria de Controle, bem como os trabalhos realizados a este respeito. Nos dois capítulos subsequentes, desenvolvemos os resultados teóricos principais. Em seguida, apresentamos resultados numéricos de forma a mostrar como os vários parâmetros influem no modelo. Na segunda metade do trabalho, desenvolvemos o problema de otimização para um fundo de pensão através da gestão de ativos e passivos, mais conhecido por *Asset and Liability Management* ou *ALM*. No último capítulo, são feitas as considerações finais comentando os resultados e sinalizando possíveis trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

Como o objetivo proposto consiste em apresentar uma solução para um problema de finanças utilizando conceitos e teorias desenvolvidas originalmente para aplicações em engenharia, não seria adequado fazermos uma revisão exclusivamente de um ou outro assunto. Embora seja um fato inegável que o ponto central do trabalho seja a aplicação das técnicas de controle para resolver um problema de otimização multiperíodo de um portfólio de investimentos, é razoável que façamos uma revisão geral da disciplina de finanças com o objetivo de contextualizar a relevância prática do problema que desenvolveremos ao longo desta tese.

Assim, na primeira parte fazemos uma breve revisão dos trabalhos mais relevantes que formam o corpo de conhecimentos que definem a Teoria Moderna de Finanças. Naturalmente, seria inviável ambicionarmos fazer uma revisão de todas as vertentes e ramificações que esta ciência tem desenvolvido ao logo de mais de seis décadas com uma enorme quantidade de contribuições. Por este motivo, nos centramos naquelas mais marcantes que, de certa forma, pode-se dizer que compõem os pilares de sustentação e que têm influenciado em todas as demais contribuições dentro desta disciplina.

Na segunda parte, abordamos a teoria de controle. Indo de um enfoque mais geral para outro mais específico, partimos de uma descrição da evolução histórica da discplina onde fica claro que sua grande vocação desde sempre tem sido a de resolver problemas eminentemente práticos. Em seguida, comentamos alguns conceitos centrais que serão utilizados ao longo desta tese e que entendemos ser útil na descrição da evolução dos trabalhos. Este tópico está subdividido de forma a abordar primeiramente as contribuições recentes mais relevantes do ponto de vista teórico em torno da linha do presente trabalho e, depois, as con-

tribuições mais relevantes do ponto de vista de aplicação essencialmente em finanças e, em particular, em otimização de portfólios de investimentos.

2.1 Finanças

Na sequência, apresentamos de forma sucinta os avanços mais relevantes que impulsionaram o desenvolvimento da chamada Teoria Moderna de Finanças. O objetivo é duplo: apresentar sua evolução histórica, bem como sua origem e a evolução dos problema com os quais nos propomos a trabalhar.

2.1.1 Evolução Histórica

Embora, ao menos em parte, a história da humanidade possa ser contada através de sua relação com a riqueza, seja com propósito de sustento ou sobrevivência, seja com o objetivo de acúmulo, curiosamente a disciplina de finanças, compreendida por um corpo de conceitos e teorias específicas, é muito mais recente. Não que o homem não tivesse a preocupação e o interesse em explicar as relações de troca entre os agentes. Mas tal fato ocorreu sobretudo com o desenvolvimento da chamada Teoria Econômica em que autores como em [62] estabelecem como marco as ideias de Adam Smith do século XVIII. No entanto, ao longo destes mais de dois séculos de estudos econômicos, o enfoque tem sido em explicar a natureza do capitalismo através de suas características mais relevantes como fatores que determinam o volume de produção, a distribuição da riqueza e da renda, entre outros.

Por outro lado, é consenso que a Teoria Moderna de Finanças tem com Harry M. Markowitz em [75] seu trabalho inicial. Isto não significa, porém, que antes deste trabalho absolutamente nada de significativo tenha sido produzido. De fato, bem no início do século XX, na tese de doutorado de Louis Bachelier em [7], temos a inédita tentativa de se explicar o comportamento dos preços das ações na Bolsa de Valores francesa. Para alcançar este propósito, o jovem matemático Louis Bachelier propõe uma abordagem heurística denominada passeio aleatório do qual, segundo Feller [49], quando levado ao limite infinitesimal de tempo, temos o processo de Wiener ou Movimento Browniano[1], bem como outros processos difusivos.

[1] Ainda, segundo Feller, o trabalho de Bachelier inspirou A. Kolmogorov a desenvolver os fundamentos formais do processo de Markov.

Contudo, duas hipóteses feitas na definição do passeio aleatório merecem registro: a variação dos preços de um passo para outro de tempo independe das variações anteriores e segue uma distribuição normal. Veremos mais à frente que estas hipóteses exerceram grande influência em trabalhos posteriores mais de 60 anos à frente.

Outro exemplo, no mesmo sentido anterior a Markowitz, é o trabalho de John von Neumann, que pode ser visto em [90] onde o autor sustenta que as pessoas, enquanto agentes econômicos que tomam decisões, não são isolados uns dos outros. De acordo com seu exemplo, não são como Robinson Crusoe vivendo e tomando decisões de forma isolada e independente das decisões dos demais indivíduos. Ao contrário, em sua Teoria do Jogos, as decisões de cada indivíduo afetam as dos demais. Portanto, para um indivíduo maximizar sua satisfação é preciso que a faça em termos do valor esperado de sua função utilidade que, por sua vez, embute aversão ou tolerância ao risco. A questão central é que o indivíduo procura maximizar o valor esperado, uma vez que, devido à interação entre os agentes, os possíveis resultados deixam de ser determinísticos, passando a carregar a incerteza de sua realização efetiva.

Contudo, é apenas em [75] que pela primeira vez é apresentada uma abordagem objetiva e consistente para o problema de seleção de um portfólio de investimentos, em que os conceitos de risco e retorno são trabalhados pela primeira vez de forma a mostrar uma relação matemática explícita entre os mesmos. Sua construção início considerando-se que um investidor utiliza como medida de referência para tomada de decisão de investimento o retorno que, por sua vez, está associado a um horizonte de tempo. Markowitz observa que o processo de decisão de investimento envolve a expectativa com relação ao retorno de forma prospectiva, porém, por se tratar de uma decisão no momento presente, o retorno esperado deve ser descontado para refletir seu adequado valor no tempo. Por outro lado, também observa que devido ao fato de a natureza da decisão envolver o futuro, a incerteza sobre o verdadeiro resultado a ser realizado é retratada pela variância dos retornos. Assim, Markowitz conclui que o processo de investimento, que implica a determinação de um portfólio de ativos, visa sempre maximizar o retorno esperado, em termos presentes, em função da sua variância ou risco associado.

Por se tratar de um portfólio de investimentos, Markowitz observa que o risco do conjunto de ativos que o compõem, considerado através da variância dos retornos, não é apenas resultado de um somatório simples dos riscos individuais, mas depende também de suas correlações. A partir deste ponto, decorre que o risco de um portfólio tende a cair com o número de ativos envolvidos, evidenciando o efeito de diversificação. Assumindo-se que racionalmente um investidor deve sempre buscar um portfólio com o maior retorno esperado para um determinado nível de risco, Markowitz estabelece o conceito de curvas com mesmo retorno esperado e curvas de mesma variância, a partir das quais introduz o conceito de portfólios eficientes. De acordo com sua teoria, estes são os portfólios que possuem o melhor retorno esperado possível para um determinado nível de risco.

Posteriormente, em [76], esse modelo de média-variância, estático de um período, é explicado de forma mais detalhada, apresentando uma solução para se determinar conjuntos de portfólios eficientes pelo método simplex de otimização, além de introduzir os conceitos de utilidade ao problema de seleção de portfólio. Com estes dois trabalhos, Markowitz estabeleceu uma série de conceitos considerados fundamentais na disciplina de finanças. Por exemplo, o fato indissociável de que somente é possível buscar níveis de retornos superiores incorrendo-se em riscos incrementais ou de que é possível maximizar o retorno para dado patamar de risco e que este pode ser, até um certo ponto, reduzido através da diversificação. Mais adiante, em [77], Markowitz implementa detalhadamente os modelos de seleção de portfólio mais gerais considerando-se inclusive funções utilidade não quadráticas e algorítimos para cálculo de fronteira eficiente que caracteriza o lugar geométrico dos portfólios eficientes.

Dada sua relevância, em termos de aplicação, ao presente trabalho, apresentamos a seguir alguns de seus resultados básicos extraídos de [26]. Para maiores detalhes, além desta referência, recomendamos [76], [77] e [47]. Considere uma carteira com retorno P composta por n ativos com retornos $R_1, \ldots, R_n$, retorno esperado $r_1, \ldots, r_n$ e matriz de covariância Σ. Investe-se uma proporção ω_i no ativo com retorno R_i de modo que

$$P = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1. \tag{2.1}$$

Introduz-se seguinte notação vetorial

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = E(R) = \begin{pmatrix} E(R_1) \\ \vdots \\ E(R_n) \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = cov(R) = E((R-r)(R-r)').$$

Segue que a média do retorno P, denotada por μ, é dada por

$$\mu = E(P) = E(\omega' R) = \omega' E(R) = \omega' r$$

e a variância de P, denotada por σ^2, é dada por

$$\sigma^2 = \omega' \Sigma \omega.$$

Deseja-se resolver o seguinte problema de otimização. Para um dado valor μ de rentabilidade desejada, temos:

$$\begin{aligned} & \min \ \omega' \Sigma \omega \\ \text{sujeito a: } & \omega' r = \mu, \\ & \omega' e = 1, \ \ \omega \in I\!R^n. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Assume-se que $\Sigma > 0$ e que r não é múltiplo de e $(r \neq ae)$. Definem-se as seguintes variáveis:

$$\alpha = e' \Sigma^{-1} e,$$

$$\gamma = r' \Sigma^{-1} r,$$

$$\psi = e' \Sigma^{-1} r,$$

$$\delta = \alpha\gamma - \psi^2.$$

Assim, demonstra-se[2] que a solução para o problema de média-variância (2.2) é dada por $\omega = h\mu + g$ em que h e g, não dependentes de μ, são dados por

$$h = \frac{\alpha}{\delta}\Sigma^{-1}r - \frac{\psi}{\delta}\Sigma^{-1}e,$$
$$g = \frac{\gamma}{\delta}\Sigma^{-1}e - \frac{\psi}{\delta}\Sigma^{-1}r.$$

Os portfólios eficientes de Markowitz, no entanto, consideram apenas ativos de risco, ou seja, seus retornos embutem uma incerteza. A partir deste trabalho pioneiro, outros autores começam a analisar as implicações da existência de um ativo dito livre de risco para a determinação de um portfólio eficiente. Em contraposição aos demais ativos, este se caracteriza por possuir variância nula e ser descorrelacionado dos demais ativos. A rentabilidade esperada para este caso, em condições de equilíbrio, deve ser tal que remunere o investidor ao postergar o consumo do presente para o futuro, além de refletir a expectativa de crescimento de longo prazo da economia.

Desta forma, o ativo livre de risco tem um papel central na Teoria de Apreçamento de Ativos (APT) ao possibilitar o apreçamento relativo dos ativos de investimento em relação a um referencial comum. Por exemplo em [103], após a análise econômica sobre a taxa de juros considerando aversão ao risco e preferência de liquidez, Tobin considera a situação em que um investidor cria um portfólio como uma combinação linear entre o ativo livre de risco (caixa) e os portfólios eficientes contidos na fronteira eficiente de Markowitz. Com base no perfil de risco e preferência de liquidez, Tobin segmenta o problema de seleção de portfólio em duas etapas: a primeira de investimento ou alocação nos moldes de uma otimização de Markowitz; a segunda, de financiamento compreendendo uma combinação dos portfólios eficientes com o ativo livre de risco, considerando a aversão ou tolerância ao risco do investidor. Em outras palavras, após o investidor escolher o portfólio com ativos de risco pertecente à fronteira eficiente de Markowitz, ele define quanto de sua riqueza será alocada entre este portfólio e o ativo livre de risco. Esse processo é normalmente referenciado na literatura como Teorema da Separação de Fundos.

Como decorrência ou ampliação deste trabalho de Tobin, Sharpe desenvolve em [97] um dos estudos mais importantes em finanças. Incialmente, ele amplia o conceito restrito de ativo livre de risco de Tobin para considerar ativos financeiros que possibilitem retorno esperado

[2] Ver a demonstração em [26], p. 20.

positivo e variância nula. Sharpe afirma que este retorno esperado equivale à taxa de juros *pura* a qual pode ser entendida como uma remuneração equivalente à taxa de crescimento de longo prazo da economia mais um prêmio de liquidez. Assim, a combinação linear de portfólios apresentada em Tobin passa a considerar este novo conceito de ativo livre de risco.

A partir desta formulação, Sharpe denomina a reta tangente à fronteira eficiente de *Capital Market Line* (*CML*), na qual todos investidores racionais querem investir. Isto se deve ao fato de que, como os portfólios pertencentes à *CML* dominam os demais possíveis portfólios, esta é a fronteira eficiente de todo o mercado, e o portfólio de Markowitz pertencente à *CML* é denominado de portfólio de mercado. O ponto desta linha em que um investidor prefere estar depende de seu perfil de risco. Se for um investidor com aversão ao risco, deve emprestar parte de seus recursos à taxa livre de risco e o restante deve aplicar no portfólio de mercado. Caso tenha disposição ao risco, o investidor poderá alavancar sua posição tomando recursos à taxa livre de risco e aplicar no portfólio de mercado.

Portanto, o problema original (2.2) de seleção de portfólio apenas com ativos de risco, transforma-se no problema a seguir quando da presença de um ativo livre de risco. Como no caso anterior, temos que ω representa o vetor de pesos de ativos de risco. Com a ressalva que neste caso o somatório de seus elementos não precisa valer 1, pois introduzimos um ativo livre de risco, cujo retorno será dado por r_f. Considerando $r \neq r_f e$, temos o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\min\ \omega'\Sigma\omega \\ \text{sujeito a: }\ &\omega' r + (1-\omega' e) r_f = \mu, \\ &\omega \in I\!R^n. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Neste caso, demonstra-se[3] que a solução para o problema de média-variância (2.3) é dada por

$$\omega = \frac{(\mu - r_f)}{(r - r_f e)'\Sigma^{-1}(r - r_f e)}\Sigma^{-1}(r - r_f e).$$

A partir desta nova fronteira eficiente, Sharpe observa que o mercado oferece remunerações associadas a dois componentes distintos de preços: preço do tempo, o qual está associado ao ativo livre de risco, e preço de risco, o qual oferece um retorno esperado adicional

[3]Ver a demonstração em [26], p. 32.

por unidade de risco. Assim, Sharpe propõe um modelo capaz de explicar o preço dos ativos em equilíbrio de mercado considerando que apenas o risco não diversificável ou sistemático deve estar contemplado no preço de risco. O risco sistemático, por sua vez, é estimado a partir de uma regressão unifatorial entre o excesso de retorno de mercado e o excesso de retorno do ativo. Em outras palavras, estima-se quanto do retorno de um ativo pode ser explicado pelo retorno do portfólio de mercado. Este tipo de modelo, em conjunto com trabalhos de [73] e [88], é denominado em finanças de *Capital Asset Princing Model* ou *CAPM* e forma a base conceitual para se estimar preços de ações, bem como o custo de capital para uma empresa.

Contemporâneo ao trabalho de Tobin, Modigliani e Miller apresentam o que pode ser considerado o primeiro e mais influente trabalho em finanças corporativas onde analisam o custo de capital de uma empresa frente à sua estrutura de capital. Em [84] e [86], argumentam que o custo de capital total ao qual uma empresa está sujeita independe de sua estrutura de capital, ou seja, da sua composição entre passivos de terceiros e capital próprio, uma vez que o valor de uma empresa está diretamente relacionado com o risco de seu negócio. Na sequência, em [85] os autores apresentam a Teoria da Irrelevância dos Dividendos. Já era consenso entre analistas que os retornos em ações derivam de ganhos de capital e recebimento de dividendos. No entanto, acreditava-se que o valor de uma empresa e, consequentemente, de sua ação também dependia dos dividendos pagos. Com este trabalho, Modigliani e Miller mostram que o pagamento de dividendos, por ter um efeito de reduzir os recursos disponíveis à empresa, reduz o valor da ação no mesmo montante, não contribuindo para criação de valor para o acionista. Daí a irrelavância dos dividendos para determinar o valor da ação de uma empresa e seu custo de capital.

Em paralelo ao desenvolvimento dos conceitos propostos por Sharpe-Lintner-Mossin no *CAPM*, Eugene Fama desenvolve um estudo pioneiro em sua tese de doutorado, com a orientação de Benoit Mandelbrot, sobre o comportamento dos preços das ações, o qual pode ser visto em [48]. Mais especificamente, Fama desenvolve uma série de testes empíricos sobre o modelo de passeio aleatório, desenvolvido originalmente por Louis Bachelier no começo do século XX, com o propósito de atestar sua validade. Assim, o autor conclui que o modelo encontra forte suporte empírico. Como consequência deste resultado, surge a Hipótese de Mercado Eficiente (*EMH*) através da qual argumenta-se que quanto mais eficiente for um

mercado, mais rapidamente reagirá a novas informações e, portanto, menos correlacionados no tempo são os preços. Logo, menos passível de se prever o futuro com base em padrões passados, invalidando procedimentos comumente aplicados pelos chamados grafistas, que se baseiam na identificação de padrões evolutivos nos preços dos ativos para tentar prever seu comportamento futuro. Em outras palavras, *EMH* explica por que bater o mercado é uma tarefa das mais difíceis. Portanto, baseando-se nas hipóteses da racionalidade dos investidores e no papel da informação nos mercados, a *EMH* dá suporte a algumas das premissas mais fundamentais utilizadas nos modelos de finanças desde Markowitz até os tempos atuais.

Com base na Hipótese de Mercado Eficiente de Fama e nos conceitos de mercados livres de arbitragem e de portfólio replicante, Fischer Black e Myron Scholes em [15] e, paralelamente, Robert Merton em [80] desenvolvem o modelo analítico de apreçamento de opções europeias que desempenham um papel fundamental no mercado de opções em todo o mundo. Assim, vemos que em pouco mais de 20 anos foram construídos os pilares ou conceitos básicos da Teoria Moderna de Finanças a partir dos quais muitos outros trabalhos têm sido realizados. Por exemplo, no apreçamento de opções e derivativos em geral, processos numéricos mais sofisticados como árvores recombinantes, não recombinantes ou Monte Carlo.

Na linha do *CAPM*, temos modelos multifatoriais. Estudos de eficiência de mercados é um assunto ainda não resolvido definitivamente até os dias de hoje. Igualmente, acontece com os problemas de seleção de portfólios, sobretudo por conta da necessidade de se buscar soluções que consideram a característica intertemporal do problema, uma vez que a maioria das questões críticas nesta área encontra-se em segmentos de mercado como Seguro e Previdência, que requerem a construção de portfólios geradores de renda para seus participantes em horizontes de investimento que podem se estender por décadas. De fato, este é o campo prático de finanças onde o presente trabalho encontra sua aplicação mais relevante.

Por este motivo, faremos na próxima subseção, uma rápida revisão dos principais trabalhos realizados nesta área a partir do trabalho original de Markowitz. Na seção posterior, complementaremos esta questão abordando trabalhos aplicados a este mesmo tema, porém, que se utilizam de um ferramental matemático análogo ao que aplicaremos em nossa abordagem.

2.1.2 O Problema de Seleção de Portfólio

Como pudemos ver na seção anterior, a partir de seu trabalho original em [75], Markowitz estabelece os fundamentos para o que é conhecido atualmente como Teoria Moderna de Portfólio ou *MPT*. Em seu trabalho, mostra que o problema de seleção de ativos deve ser considerado do ponto de vista de portfólio, e não de maneira individualizada. Também mostra que investidores racionais definem seus portfólios com base no retorno esperado frente ao risco retratado pela variância dos retornos. Assim, a partir da covariância entre os retornos, o efeito de diversificação surge como um dos fundamentos mais relevantes para as finanças. Subsequentemente, em [76] e [77], Markowitz oferece mais detalhes da abordagem de seleção de portfólio por média-variância aprofundando alguns conceitos do trabalho original e apresentando algoritmos numéricos para sua solução. Algumas extensões e outros detalhes podem ser vistos, por exemplo, em [47] e [81], entre outros estudos.

A partir deste trabalho, várias vertentes começam a surgir. Como normalmente ocorre em muitos ramos da pesquisa, a grande maioria identifica limitações na abordagem original e propõe refinamentos. Exemplos de trabalhos neste sentido podem ser vistos em [67], [22] e [82] e nas suas referências. A questão essencial reside no fato de que as estimações de portfólios são muito sensíveis aos parâmetros de entrada, prejudicando a robustez da estimativa. Mais especificamente, o problema reside nos retornos esperados e suas variâncias, os quais normalmente são estimados a partir de séries históricas e, de acordo com [12] e [14], podem representar alocações extremas, expondo o investidor a riscos indesejados.

Assim, Jorion em [67] propõe um método de simulação que explicitamente mede o erro de estimação. Já em [22], Chopra e Ziemba argumentam que o impacto de erros de estimação para a distribuição de retornos é cerca de dez vezes mais relevante do que os erros de estimação nas variâncias e covariâncias. Entre estes dois últimos parâmetros, argumentam que as variâncias são cerca de duas vezes mais relevantes, mas que estas estimativas de erros são bastante sensíveis ao perfil de tolerância a risco do investidor. Assim, propõem metodologias de estimação para estes parâmetros cujo propósito é evitar excessivos erros na estimação de alocação. Por outro lado, Michaud em [82] propõe uma abordagem heurística via reamostragem pelo método de *bootstrapping*. Basicamente, o método consiste em realizar uma simulação de Monte Carlo para obter um grande número de amostras, a partir da distribuição de retornos históricos, considerando os parâmetros amostrais como sendo os da

população. Assim, uma fronteira eficiente é calculada para cada amostra sendo obtida uma fronteira média final.

Embora a reamostragem ofereça uma melhora em relação aos métodos anteriores, ainda não é satisfatória, uma vez que pode ser demonstrado que uma média de máximos gera um resultado de alocação subótimo. Assim, surgem outras abordagens para estimar os parâmetros do modelo, tais como *shrinkage estimators* em [63] ou estimação bayesiana em [50], entre outros. De fato, Jorion em [65] e [66] e Larsen e Resnick em [68] mostram que a abordagem por *shrinkage estimators* geram portfólios com composições ótimas mais estáveis ao longo do tempo. Na abordagem bayesiana, além da redução da sensibilidade dos resultados, é possível combinar informações de diferentes fontes. Na verdade, o conhecido modelo de Black-Litterman apresentado nos trabalhos [12], [13] e [14] é considerada a mais bem-sucedida aplicação da metodologia bayesiana ao problema de seleção de portfólio. De acordo com Svetlozar *et al.* [92], tal fato se deve à possibilidade de gestores de portfólio especificarem cenários sobre os retornos esperados dos ativos que desejam, e caso nenhum cenário de retornos esperados seja expresso para determinados ativos, estes são centrados nos retornos esperados de equilíbrio através da aplicação do *CAPM*.

Um outro refinamento proposto na literatura pode ser visto em Sharpe e Tint [98], no qual os autores estendem o modelo de média-variância para considerar passivos. Desta forma, buscam minimizar a variância dos retornos do superávit, definido como a diferença entre ativos e passivos, sujeito a determinado retorno médio do mesmo. Como consequência, a política ótima passa a depender da covariância de retornos entre as duas pontas. Em decorrência deste modelo, os autores observam que a tendência do investidor é aceitar um retorno esperado menor nos ativos que apresentam maior covariância entre ativos e passivos.

No entanto, conforme mencionamos anteriormente, um problema da formulação original está no fato de ser uma otimização estática para um único período, não permitindo que sejam realizadas alocações dinâmicas através de políticas de otimização que considerem vários passos de tempo, ou seja, que considerem a otimização de forma intertemporal. Dada a relevância desta questão, vários foram os estudos de modelos para transformar a abordagem em multiperíodo. Mossin em [89] pode ser considerado um dos primeiros a propor um modelo de otimização intertemporal, levando em conta uma função utilidade exponencial, retornos descorrelacionados no tempo e sem aplicações e resgates, para o investidor maximizar sua

riqueza ao final do horizonte de investimento. Mossin também mostra que uma função utilidade exponencial é ótima para um investidor em multiperíodo, uma vez que, por possuir um coeficiente de aversão ao risco constante, ou seja, dita isoelástica, a alocação é a mesma em todos os períodos. Hakansson, por outro lado, estende o trabalho de Mossin em [52], [53] e [54] para considerar funções utilidades logarítmicas que permitem tornar renda uma variável aleatória, bem como adicionar a incerteza sobre o tempo de vida do indivíduo.

Paralelamente a Mossin, Samuelson em [95] e Merton em [78] propõem modelos de otimização consumo-investimento multiperíodos maximizando uma função utilidade exponencial. No caso de Samuelson, é implementada uma otimização utilizando programação estocástica dinâmica sobre um modelo discreto no tempo, enquanto em Merton temos um modelo em tempo contínuo. Vale ainda notar que este trabalho de Merton é parte integrante de sua tese de doutorado [79], na qual aplica a Teoria de Controle à otimização de uma decisão intertemporal de consumo-investimento.

Desta forma, podemos ver que o problema de seleção de portfólio começa a cruzar o caminho da Teoria de Controle Moderno, o qual abordamos na próxima seção, sendo uma de suas partes especificamente dedicadas a apresentar a evolução de trabalhos aplicados à otimização multiperíodo de portfólios de investimento.

2.2 Teoria de Controle Moderno e o Controle Ótimo

Tendo em vista o exposto acima sobre o problema de finanças, vamos nesta seção abordar a evolução da Teoria de Controle Moderno e o Controle Ótimo. Incialmente, contextualizamos sua evolução a partir de uma perspectiva histórica, mostrando sua relevância para a resolução de problemas essencialmente práticos. Em seguida, argumentamos que, por se tratar de uma disciplina aplicada e ao mesmo tempo suficientemente geral, sua aplicação tem se disseminado por outros ramos do conhecimento humano além das fronteiras da engenharia, alcançando áreas como medicina, economia e finanças.

Com o propósito de apresentar uma solução para um problema em finanças, apresentamos alguns aspectos ou características relevantes, tais como o conceito do regulador linear quadrático e tipos relevantes de sistemas lineares a tempo discreto, incluindo conceitos de saltos markovianos e ruídos multiplicativos. Por fim, apresentamos as linhas de trabalho que têm sido desenvolvidas neste segmento e a contribuição que o presente trabalho pretende oferecer.

2.2.1 Evolução Histórica

Ao longo da história da humanidade, vemos que os avanços científicos e tecnológicos não ocorrem de maneira uniforme ou linear no tempo. Pelo contrário, vêm em ondas que se concentram em determinados momentos, viabilizando novas realizações pelo homem capazes de transformar definitivamente a sociedade, constituindo-se, em algumas ocasiões, em verdadeiros divisores de água no curso da história.

Alguns dos exemplos de avanços tecnológicos e científicos com poder de transformação vêm desde a Antiguidade com a utilização de aparelhos simples para a marcação do tempo como a clepsidra, até o invento do relógio mecânico na Idade Média, passando por máquinas a vapor no século XVIII, e até motores de combustão interna, pilotos automáticos e amplificadores eletrônicos já no início do século XX.

Segundo Hendricks, Jannerup e Sorensen [58], no entanto, um fator decisivo para o êxito destes e outros inventos foi a utilização do controle de realimentação ou controle automático. Por exemplo, a clepsidra somente teve sua precisão na marcação do tempo melhorada com o invento de um regulador baseado em uma boia. O relógio mecânico somente pôde se

tornar mais preciso e confiável a partir da utilização do regulador do escape. Aquecedores a vapor se difundiram a partir da utilização da válvula de segurança para controle de pressão. Motores de combustão a diesel se tornaram viáveis com a criação do regulador de pressão de combustível.

De acordo com Bernstein [9], a relevância dos reguladores sempre foi obscurecida por grandes inventos como os citados acima. No entanto, o autor ressalta que o controle automático teve um papel crucial nas grandes ondas de desenvolvimento tecnológico e científico, como a Revolução Industrial, a Era da Aviação, a Era Espacial e a Era de Eletrônica. Por este motivo, termina por concluir que o controle automático realizado através de reguladores como o escape, o regulador de velocidade, o elerão, o giroscópio e o amplificador se constituem em um *"fio invisível na história da tecnologia"*.

No entanto, em [58] os autores observam que, de forma geral, até o evento da Segunda Guerra Mundial o progresso nesta área foi conquistado mais através de inventos criativos do que através de uma teoria sólida. Assim mesmo, este período é marcado sobretudo pela criação de uma teoria para explicar e resolver o problema da instabilidade dos sistemas de controle. Neste caso, Alexandr Lyapunov propôs um critério geral de estabilidade para sistemas não lineares, assim como condições sob as quais o método de linearização, estudado havia algum tempo, fornece uma avaliação correta da estabilidade do sistema.

Ainda no final do século XIX, temos a descoberta da eletricidade em 1880 com Thomas Edison e a identificação do elétron em 1897 por Thompson. Assim, no início do século XX temos o começo da Era da Eletrônica com a invenção do diodo retificador termoiônico (1904 - John Flemming) e o triodo amplificador termoiônico (1906 - Lee de Forest). Estes inventos permitiram a criação de amplificadores de radiofrequência com realimentação positiva (1912 - Edwin Armstrong) e negativa (1927 - Harold Black). O crescente uso de amplificadores em receptores de radiofrequência levou à necessidade de se analisar a estabilidade de tais sistemas, o que fez com que Harry Nyquist desenvolvesse a análise de função de transferência (1940), resultando na derivação do critério de estabilidade de Nyquist e Hendrik Bode aos gráficos de magnitude e frequência de fase.

A partir do desenvolvimento dos conceitos de função de transferência, diagramas de blocos e métodos no domínio das frequências, Albert Hall e Norbert Wiener desenvolvem métodos no domínio das frequências para resolver problemas de ruídos em radares. Em 1942, Wiener baseia-se em modelos estocásticos para dar origem ao filtro de Wiener. Após a Se-

gunda Guerra Mundial, os conceitos e os métodos desenvolvidos até então foram ampliados e aprofundados de forma a melhorar o desempenho dos sistemas. Tais fatos permitiram sua aplicação comercial generalizada em controladores eletrônicos, pneumáticos e hidráulicos.

Com o início da Era Espacial, o problema de controle balístico se tornou um desafio natural, tanto para o lançamento de um foguete quanto de um míssil. Formulado através de um conjunto de equações diferenciais não lineares, inicia-se a abordagem de espaço de estados. Assim, os fenômenos físicos envolvidos no problema passam a ser tratados por um conjunto de equações que, quando linearizadas, dão origem a um sistema de Entrada Múltipla e Saída Múltipla (MIMO em inglês), em contraposição aos sistemas Entrada Única e Saída Única (SISO em inglês). Esta abordagem, ainda conforme em [58], possibilita o tratamento de sistemas MIMO de maneira natural e permite uma conveniente formulação matricial.

No entanto, em função do elevado número de variáveis de estado e de controle que tais sistemas possuem, torna-se necessário otimizar a resposta do sistema, por exemplo, minimizando algum indicador de erro ou desvio em relação à resposta esperada para cada possível estado. Assim, Richard Bellman aplica a programação dinâmica para o controle ótimo de sistemas a tempo discreto em 1957. Em 1960 e 1961, Rudolf Kalman apresenta um controle ótimo para sistemas a tempo discreto, equações para o regulador linear quadrático (LQR), filtragem ótima e uma teoria de estimação para sistemas a tempo discreto e o filtro de Kalman para tempo contínuo, encontrando aplicação imediata nos programas aeroespaciais.

Desta forma, podemos ver que o controle ótimo de sistemas é um assunto multidisciplinar por natureza, uma vez que surgiu da própria necessidade do homem em buscar soluções para problemas essencialmente práticos ao longo da história. Assim, não é de se estranhar o fato de vermos sua aplicação de forma crescente na solução de problemas em finanças.

2.2.2 Aspectos Relevantes

Neste contexto de aplicação em problemas de finanças, Costa e Okimura [31] afirmam que surgiram estudos com enfoque em sistemas lineares estocásticos com dinâmica linear e custo quadrático, ou seja, a utilização do regulador LQR. De fato, Bertsekas [11] afirma que se trata de uma formulação popular de um problema de regulação onde a função de custo quadrática é uma alternativa interessante por penalizar fortemente grandes desvios em detrimento dos pequenos desvios.

Ainda em [11], demonstra-se que sistemas lineares a tempo discreto e sujeitos a ruídos aleatórios independentes com média nula e variância finita, como o exemplificado abaixo são passíveis de ser resolvidos a partir de um funcional de custo quadrático

$$\begin{aligned} &x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + w(k), \\ &k = 0, 1, \ldots, T-1 \end{aligned}$$

em que $x(k)$ é denominada de variável de estado do sistema no instante k, $u(k)$ denota o controle do sistema e $w(k)$ o ruído. As matrizes $A(k)$ e $B(k)$ possuem as dimensões apropriadas. Este sistema apresenta um comportamento estocástico no tempo em função da presença do ruído. Uma aplicação comum deste tipo de sistema pode ser visto em [11] para controle de estoques.

Uma outra classe, dentro do grupo acima, é constituída pelos sistemas sujeitos à mudança aleatória de regime ou com saltos markovianos como o apresentado abaixo

$$\begin{aligned} &x(k+1) = A_{\theta(k)}(k)x(k) + B_{\theta(k)}(k)u(k), \\ &y(k) = C_{\theta(k)}(k)x(k) + D_{\theta(k)}(k)u(k), \\ &x(0) = x_0,\ \theta(0) = \theta_0, k = 0, 1, \ldots, T-1, \end{aligned}$$

em que x_0 refere-se ao estado inicial do sistema, $y(k)$ é a saída do sistema no instante k e as matrizes $A_{\theta(k)}$, $B_{\theta(k)}$, $C_{\theta(k)}$ e $D_{\theta(k)}$ são matrizes reais não estocásticas com as dimensões apropriadas, porém dependentes do estado de regime ou modo de operação associado ao parâmetro $\theta(k)$. Embora este sistema não possua uma variável de ruído explícita, como no caso anterior, ainda assim apresentará um comportamento estocástico em função da incerteza relacionada ao regime em que o sistema está operando em cada passo de tempo.

Ainda de acordo com [31], este tipo de sistema encontra aplicações em sistemas aeronáuticos, robóticos, receptores térmicos solares, modelos macroeconômicos, em finanças, entre outros. Para este último caso, pode ser consultado em Costa e Araujo [25].

Uma variante importante e mais geral da classe de modelos acima são os chamados modelos com ruídos multiplicativos na variável de estado e na de controle, sendo sua forma geral como descrita abaixo

$$\begin{aligned} x(k+1) =& \Big(\bar{A}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon^x} \widetilde{A}_{\theta(k),s}(k) w_s^x(k)\Big) x(k) + \Big(\bar{B}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon^u} \widetilde{B}_{\theta(k),s}(k) w_s^u(k)\Big) u(k), \\ & y(k) = C_{\theta(k)}(k) x(k) + D_{\theta(k)}(k) u(k), \\ & x(0) = x_0,\ \theta(0) = \theta_0, k = 0, 1, \ldots, T-1 \end{aligned}$$

em que, da mesma forma que no modelo anterior, x_0 refere-se ao estado inicial do sistema, $y(k)$ é a saída do sistema no instante k e as matrizes $\bar{A}_{\theta(k)}$, $\widetilde{A}_{\theta(k),s}$, $\bar{B}_{\theta(k)}$, $\widetilde{B}_{\theta(k),s}$, $C_{\theta(k)}$ e $D_{\theta(k)}$ são matrizes reais não estocásticas com as dimensões apropriadas, dependentes do modo de operação associado ao parâmetro $\theta(k)$.

Note que este sistema possui variáveis de ruído explícitas $\{w_s^x(k); s = 1, \ldots \varepsilon^x, k = 0, 1, \ldots, T-1\}$ e $\{w_s^u(k); s = 1, \ldots \varepsilon^u, k = 0, 1, \ldots, T-1\}$ em que ambas possuem média nula e variância unitária. Claramente, este sistema apresenta um comportamento estocástico, seja em função da incerteza relacionada ao regime em que está operando em cada passo de tempo, seja em relação ao ruído associado às variáveis de estado e controle. Aplicações deste tipo de abordagem têm recebido maior atenção nos últimos anos em virtude de sua maior generalidade. Assim, pode-se encontrar aplicações tanto em engenharia quanto em finanças, bem como em fissão nuclear e transferência de calor, modelagem de populações, estudos imunológicos e otimização de portfólios em finanças. Em particular, para este último caso, destacamos os trabalhos em [31], [32] e [33].

Por último, vale a pena comentar a questão do efeito da mudança de regime em função do modo de operação do sistema. Como falamos anteriormente, este efeito é capturado através do parâmetro $\theta(k)$ o qual pode assumir em cada passo de tempo um entre N modos possíveis. Em outras palavras, trata-se de uma Cadeia de Markov. Por exemplo, em nosso caso a utilizaremos para definir quantos estados de mercado desejamos associar aos parâmetros de risco e retorno para cada ativo em cada passo de tempo, bem como a probabilidade de migrar de um estado para outro.

Com isto, o sistema se comporta de maneira linear entre passos de tempo, mas pode ter seu regime alterado em cada passo em função das probabilidades de transição associadas e o estado atual do sistema. Note ainda que, pelo fato de ser considerado um processo

markoviano, a eventual transição de estado no próximo passo depende somente do estado atual do sistema, não importando quais foram os modos de operação percorridos até o passo atual. Um maior detalhamento sobre Cadeias de Markov pode ser encontrado em Dragan, Morozan e Stoica [44].

2.2.3 Evolução de Trabalhos

Recentemente, a literatura sobre sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos e/ou ruídos multiplicativos tem recebido grande atenção. Este tipo de modelo tem encontrado muitas aplicações tanto em engenharia quanto em finanças, bem como em fissão nuclear e transferência de calor, modelagem de populações, estudos imunológicos e otimização de portfólios em finanças, e muitos resultados relacionados com o controle destes sistemas têm sido derivados.

Alguns exemplos de aplicações em outras áreas podem ser encontrados em Sura *et al.* [102] e em Stoica e Yaesh [101]. No primeiro caso, os autores desenvolvem um modelo estocástico em tempo discreto com ruídos multiplicativos para prever o comportamento climático. No segundo, os autores desenvolvem uma versão não simétrica de redes de Hopfield sujeita a ruídos multiplicativos e saltos markovianos. Possíveis aplicações, segundo os autores, são encontradas em problemas relacionados ao estudo da coordenação motora humana via um laço de realimentação visual.

No entanto, para termos uma visão em perspectiva da evolução dos trabalhos em otimização de sistemas lineares e de sua aplicação em finanças, apresentamos a seguir uma breve revisão dos principais trabalhos. Inicialmente, apresentamos a evolução de um ponto de vista da contribuição teórica. Nela veremos, por exemplo, de que forma tem sido a evolução de questões como estabilidade e observabilidade para sistemas lineares estocásticos.

Também veremos a aplicação de controle ótimo neste contexto, bem como com a introdução de saltos markovianos e/ou ruídos multiplicativos nas variáveis de estado e controle. Devido ao fato de, como já mencionamos, ser esta uma ciência essencialmente aplicada à resolução de problemas práticos, veremos como esta evolução teórica tem se refletido na aplicação em problemas de finanças em geral e, sobretudo, em problemas de otimização de portfólio que é o nosso propósito.

Contribuições Teóricas

Do ponto de vista da evolução de trabalhos teóricos, temos que em Chen, Li e Zhou [21] os autores consideram a otimização de controladores LQR. Eles afirmam que a hipótese de que a matriz de peso de controle deve ser positiva definida é uma herança dos casos determinísticos. No entanto, para o caso estocástico os autores demonstram que alguns problemas de LQR com matriz de peso de controle indefinida e, em particular negativa, ainda podem ser bem-postos devido à natureza estocástica dos sistemas. Mais especificamente, quando o termo de difusão na equação de estado é dependente do controle. Os autores apresentam o problema através de um exemplo simples em uma dimensão, considerando o seguinte problema LQR determinístico

$$\text{minimizar } : J = \int_0^1 \frac{1}{2}\Big[x^2(t) + r(t)u^2(t)\Big]dt + \frac{1}{2}x^2(1)$$

$$\text{sujeito a } : \begin{cases} dx(t) = 0, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

em que com $r(t) < 0$ o problema não é bem-posto, pois, $J = \int_0^1 \frac{1}{2}r(t)u^2(t)dt \to -\infty$ quando $|u(t)| \to +\infty$. Considerando a versão estocástica temos

$$\text{minimizar } : J = E\Big\{\int_0^1 \frac{1}{2}\Big[x^2(t) + r(t)u^2(t)\Big]dt + \frac{1}{2}x^2(1)\Big\}$$

$$\text{sujeito a } : \begin{cases} dx(t) = u(t)dW(t), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Considerando $x(t) = \int_0^t u(s)dW(s)$ no funcional de custo, obtem-se

$$J = \frac{1}{2}E\int_0^1 \Big[r(t) + (2-t)\Big]u^2(t)dt$$

tornando o problema bem-posto com o controle ótimo $u^*(t) = 0$.

Seguindo esta mesma linha, em Lim e Zhou [72] é estudado o problema estocástico LQR completamente observado com restrições quadráticas. Condições suficientes são estabelecidas para que o problema seja considerado bem-posto. De fato, os autores mostram que o problema aparente de não convexidade pode se transfomar em um problema convexo em virtude de a incerteza ser dependente do controle. Desta forma, os autores derivam o controle ótimo de forma explícita a partir da teoria de dualidade.

Em [87], Moore, Zhou e Lim apresentam um estudo sobre modelos LQG parcialmente observados, em que o termo estocástico depende tanto do controle quanto do estado. Uma estimativa subótima de estado para controladores lineares realimentados é apresentada em função de uma linearização. Estes modelos linearizados incluem termos bilineares no ruído de estado e controle. Os controladores são calculados resolvendo-se uma equação de Riccati generalizada discreta no tempo.

Em [4], Ait Rami e Zhou analisam o problema LQ de controle estocástico ótimo com horizonte de tempo infinito, em que o termo de difusão também depende das variáveis de estado e controle. Neste caso, é permitido que as matrizes de pesos para o controle e para o estado sejam indefinidas, levando a um problema LQ indefinido que ainda assim é considerado bem-posto em função da incerteza associada ao controle. Desta forma, o problema leva a uma equação algébrica estocástica de Riccati (SARE). Para analisar esta equação estocástica de Riccati do ponto de vista analítico e computacional, os autores introduzem as desigualdades de matrizes lineares (LMI). Através desta análise, os autores derivam uma condição verificável suficiente para avaliar se o problema LQ original está bem-posto, assim como uma condição necessária para seu controle ótimo. Com isto, de acordo com os autores, este trabalho representa a primeira tentativa de aplicar LMI para resolver problemas LQ estocásticos indefinidos.

Nos trabalhos subsequentes [3] e [2], os autores consideram um problema LQ estocástico com a possibilidade de matrizes de pesos indefinidas para o estado, o controle e da função custo. O objetivo é identificar uma equação do tipo Riccati cuja solução seja equivalente à solução do problema LQ estocástico indefinido considerado. Para isto, os autores introduzem um novo tipo de equação diferencial de Riccati denominada equação diferencial generalizada de Riccati, a qual fornece uma solução completa para o problema considerado. Adicionalmente, através da solução desta equação generalizada de Riccati, os autores mostram como podem ser identificados os controles ótimos para malha aberta e fechada. Para a solução desta equação generalizada de Riccati, os autores introduzem uma condição LMI necessária e suficiente para este objetivo. Desta forma, o trabalho estende a teoria LQ padrão para modelos com ruídos multiplicativos e aditivos no estado, no controle e com pesos quadráticos. Estes modelos, argumentam os autores, fornecem boas aproximações para sistemas estocásticos não lineares que surgem naturalmente em áreas como finanças.

Por último, em [106], Wu e Zhou demonstram que a solução para um problema de controle estocástico LQ, com horizonte infinito de tempo e matrizes de pesos indefinidas para as variáveis de estado e controle, é equivalente à existência de uma solução de estabilização estática para uma equação algébrica de Riccati generalizada (GARE). De fato, um dos objetivos do trabalho é aprimorar os resultados contidos nos trabalhos acima. Especificamente, é demonstrado neste trabalho que a solução do problema LQ é necessária e suficiente para a existência de uma solução de estabilização estática para a GARE. Além disto, qualquer controle ótimo é representado como a soma de uma parte não homogênea e outra de uma realimentação linear de estados.

Uma outra alternativa é abordada em Zhu [115], em que é apresentada uma aproximação por equações diferenciais ordinárias lineares convencionais para as equações estocásticas de Riccati aplicadas ao problema do regulador linear quadrático (LQR) estocástico.

Já uma outra linha é apresentada por Beghi e D'Alessandro [8], em que temos a derivação de uma lei de controle ótimo para sistemas estocásticos lineares discretos no tempo com critério de desempenho quadrático e ruído dependente do controle. A análise inclui o estudo de uma equação algébrica de Riccati generalizada em tempo discreto (GRDE) e o comportamento assintótico de sua solução para o sistema

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)G^i(t)v(t) + D(t)w(t),$$

onde $v(t)$ e $w(t)$ são ruídos brancos gaussianos independentes de $x(0)$ com o funcional de custo a ser minimizado dado por

$$J = \frac{1}{2}E\Big[\sum_{t=0}^{N-1}(x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)x(t)) + x^T(N)Mx(N)\Big].$$

As soluções de equilíbrio são obtidas de uma GRAE dada por

$$P = A^TPA - A^TPB[R + B^TPB + \Omega(P)]^{-1}B^TPA + C^TC.$$

Assim, os autores consideram o controle ótimo para sistemas estocásticos lineares a tempo discreto com ruído dependente do controle e critério de desempenho quadrático.

Questões referentes à estabilização, observabilidade e detectabilidade de sistemas estocásticos lineares discretos no tempo são abordadas nos trabalhos realizados em [16], [42], [43], [110] e [112]. Em Boukas e Liu [16], os autores consideram os problemas de estabilidade e estabilização de sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos singulares em tempo

contínuo. São fornecidas condições suficientes para que o sistema seja estocasticamente estável utilizando-se uma abordagem de LMI. Desta forma, são analisados dois modelos de controladores: um com restrições e outro com a hipótese de que a matriz de realimentação possui posto de coluna completo.

A estabilidade em termos exponenciais é considerada em Dragan e Morozan [42]. Os autores a definem através de um critério de média quadrática exponencial para uma classe de sistemas lineares estocásticos discretos no tempo sujeitos a ruídos aleatórios independentes e com saltos markovianos. Também é considerado o caso em que os coeficientes do sistema dependem do estado anterior da cadeia de estados markovianos. Na verdade, a estabilidade exponencial é considerada sob a ótica de três definições que nem sempre são equivalentes, segundo os autores.

Uma definição é feita em termos da estabilidade exponencial da evolução definida por uma sequência de operadores lineares positivos sobre um espaço ordenado de Hilbert. Assim, é permitido que se caracterize a estabilidade exponencial baseada na existência de algumas funções quadráticas de Lyapunov. As outras definições são dadas em termos de tipos diferentes de comportamento exponencial da trajetória dos sistemas.

Logo em seguida, em [43], os mesmos autores abordam o problema da observabilidade e detectabilidade estocásticas para a mesma classe de sistemas lineares. A definição dos autores para a observabilidade estocástica estende para esta classe de sistemas a definição da observabilidade uniforme de um sistema linear determinístico variante e discreto no tempo. Menos restrita que as definições introduzidas em trabalhos anteriores, a definição para observabilidade introduzida não implica sempre detectabilidade estocástica, como seria esperado, sendo esta questão apresentada através de alguns exemplos.

Mais recentemente, em [110], é estudado por Zhang e Boukas o problema de estabilidade e estabilização para uma classe de sistemas lineares discretos e contínuos no tempo sujeitos a saltos markovianos com probabilidades de transição parcialmente desconhecidas. Como sistemas com probabilidades de transição completamente conhecidos ou desconhecidos são dois casos especiais do sistema considerado, este sistema é considerado mais geral sob este aspecto. Além disto, neste trabalho os autores argumentam que, em contraste com outros estudos sobre probabilidades de transição incertas, o conceito proposto de probabilidades parcialmente desconhecidas não requer nenhum conhecimento dos elementos desconheci-

dos. As condições suficientes para a estabilidade estocástica são derivadas via formulação de LMI. Já em [112], os autores estão interessados no mesmo problema, porém adicionando atrasos variantes no tempo.

Como podemos ver, a consideração de mudanças de regime via saltos markovianos é uma questão que vem sendo trabalhada de forma crescente não apenas para efeito de análise de observabilidade e estabilidade de sistemas lineares estocásticos. Exemplos de estudos específicos para sistemas lineares estocásticos com saltos markovianos podem ser vistos em [71], [46], [28], [29], [30], [112], [111], [91], [59] e [27]. De fato em [71], Li, Zhou e Ait Rami estudam um problema de controle LQ estocástico com saltos markovianos em seus parâmetros. Em contraste com o caso determinístico, as matrizes associadas ao controle e ao estado podem ser indefinidas. Os autores mostram que quando a cadeia de Markov é conhecida e invariante no tempo, o problema LQ estocástico indefinido é equivalente a um sistema de equações algébricas generalizadas conjuntas de Riccati (GCARE) que envolvem restrições de igualdades e desigualdades. Para analisar estas equações são utilizadas LMIs que resolvem as GCAREs por programação semidefinida.

Em [28], Costa e Paulo consideram o controle ótimo sob um critério de desempenho formado por uma combinação linear de uma parte quadrática e uma parte linear nas variáveis de estado e controle. Já em [29], os autores consideram a existência de soluções estabilizantes máxima e em média quadrática para um conjunto de equações do tipo GCARE como em [71], sempre levando em conta sistemas lineares discretos no tempo com ruídos multiplicativos no controle e no estado, sujeitos a saltos markovianos. As matrizes de pesos para o estado e o controle são permitidas que sejam indefinidas. No primeiro trabalho, os autores apresentam condições necessárias e suficientes sob as quais o problema é bem-posto e uma solução de realimentação de estado pode ser derivada a partir de um conjunto de equações generalizadas a diferenças de Riccati (GCRDEs) interconectadas com um conjunto de equações recursivas lineares. No segundo trabalho, é apresentada uma condição suficiente sob a qual existe uma solução máxima e se estabelece uma condição necessária e suficiente com a qual há uma solução estabilizante para o conjunto de equações algébricas generalizadas de Riccati (GCAREs).

Mais recentemente em [111], Zhang e Boukas estudam o problema de filtragem H_∞ para uma classe de sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos com probabilidades de tran-

sição parcialmente desconhecidas. Em [91], Primbs e Sung desenvolvem uma abordagem de Controle Preditivo de Modelo, do inglês *Model Predictive Control*, para resolver o problema de estabilizar um sistema linear estocástico com ruídos multiplicativos no estado e no controle e sujeito a restrições. Os autores mostram que através de programação semidefinida podem ser realizadas otimizações *on-line* relativamente tratáveis, indicando ser possível implementações em tempo real. Já para Zhang, Hou e Ma, em [59], o objetivo é resolver o problema de controle de horizonte finito H_2/H_∞ para sistemas lineares discretos no tempo sujeitos a saltos markovianos e ruídos multiplicativos. Por último, em [27], Costa e Benites obtêm um estimador linear de mínima média quadrática (LMMSE) para a mesma classe de sistema linear dos casos anteriores. No entanto, assume-se que a cadeia de Markov não está disponível. Assim, o estimador, que é um tipo de filtro de Kalman, é obtido utilizando-se argumentos geométricos e pode ser convenientemente implementado em forma de recorrência.

Contribuições Aplicadas às Finanças

Do ponto de vista de aplicações da Teoria de Controle Moderno em finanças, verificamos que um aspecto que tem recentemente recebido grande atenção relaciona-se com o problema de otimização de média-variância multiperíodo. Otimização de média-variância para portfólios de investimento constitui-se um problema clássico em finanças introduzido por Markowitz [76] o qual estabeleceu os fundamentos da Teoria Moderna de Portfólio e que comentamos mais detidamente na seção inicial deste capítulo. Contudo, o objetivo central da otimização de portfólio em finanças é especificamente maximizar o retorno esperado para um dado nível de risco, minimizar o risco esperado para um dado nível de retorno esperado ou minimizar um compromisso entre variância e o retorno esperado de um portfólio.

Atualmente, há uma vasta literatura sobre este assunto, com algumas extensões, conforme pode ser visto, por exemplo, em [56], [96], [23], [47], [77], [60], [61], [93], [100] e [107] entre outros. Em Hanson [56], temos um trabalho com foco em controle de processos estocásticos com difusões em saltos em tempo contínuo. Mais especificamente, o autor mantém sua atenção no controle de sistemas estocásticos em tempo contínuo sujeitos a saltos markovianos apresentando aplicações em problemas de finanças, tais como apreçamento de opções e otimização de portfólio sujeito a saltos, entre outros pontos. Em Sarychev *et al.* [96], temos um compêndio de trabalhos recentes que oferece uma visão do crescente entre-

laçamento da Teoria de Controle e Finanças apresentando trabalhos que vão desde apreçamento de opções, passando por otimização de portfólio e chegando a aplicações em risco operacional. Em Cornuejols e Tütüncü [23], temos uma das primeiras obras especificamente dedicadas a apresentar de forma estruturada como modelos de otimização, tais como programação linear, quadrática, dinâmica ou estocástica e otimização robusta, podem ser aplicados em problemas de finanças.

Por sua vez em Elton *et al.* [47], temos uma das referências mais completas sobre Teoria Moderna de Portfólio, além dos trabalhos originais de Markowitz, Tobin, Sharpe e Lintner, entre outros. Além das questões conceituais acerca da teoria de portfólio, apresenta de forma concisa, porém suficientemente detalhada, o modelo para cálculo de fronteira e portfólio eficientes. No entanto, em Markowitz e Todd [77] pode ser encontrado o trabalho mais completo e detalhado acerca da implementação do modelo geral de média-variância de Markowitz através do método simplex de programação linear.

Em uma linha alternativa à otimização de portfólios pode ser vista em [61] e [60] onde os autores apresentam um algoritmo minimax como uma ferramenta para a otimização de estratégias de *hedging* de opções que buscam minimizar seu erro de cobertura considerando custos de transação. Já em Rustem, Becker e Marty [93] temos uma aplicação de estratégia do tipo min-max robusta como uma extensão da abordagem de média-variância de Markowitz.

No trabalho apresentado em Steinbach [100], temos o desenvolvimento de uma abordagem de média-variância multiperíodo baseada em cenários. O autor descreve a relação entre a função objetivo e as restrições para vários modelos de um período incluindo modelos de semivariância. Estes resultados são então utilizados como blocos de construção no desenvolvimento e análise do modelo proposto.

Em [107], Cui, Li e Wang consideram o problema de seleção de portfólio por média-variância dinâmica e argumentam que esta formulação não satisfaz o princípio de otimalidade de Programação Dinâmica por ocorrer um fenômeno de inconsistência temporal. Observam que os investidores podem ter incentivos para se desviar da política de otimização por média-variância previamente estabelecida sob determinadas circunstâncias. De fato, demonstram que os investidores se comportam irracionalmente com respeito à política de alocação ótima previamente estabelecida quando sua riqueza ultrapassa determinado valor durante o processo de investimento.

A versão multiperíodo deste problema tem sido estudada recentemente tanto na versão contínua quanto na discreta. No primeiro caso, o problema aplicado de Markowitz foi estudado em [113] por Zhou e Li utilizando uma teoria quadrática linear estocástica desenvolvida com o objetivo de intoduzir uma abordagem geral ao estudo de otimização de média-variância de um portfólio. Baseando-se na teoria geral para o problema LQ estocástico de [21], Chen, Li e Zhou derivam políticas eficientes em forma fechada ou analítica em conjunto com uma expressão explícita para a fronteira eficiente. Em particular, o problema de otimização desenvolvido refere-se à maximização da riqueza terminal do investidor, minimizando sua variância terminal. A dificuldade na solução decorre do fato de que a variância possui um termo quadrático para o retorno esperado com coeficientes variantes no tempo. A solução adotada baseia-se na abordagem sugerida por Ng e Li em [70], em que consiste em embutir o problema original, não tratável por técnicas de programação dinâmica, dentro de um problema auxiliar. Na sequência, mostra-se que este problema auxiliar otimiza um problema LQ estocástico, o qual pode ser explicitamente resolvido pela teoria linear quadrática.

De fato, o caso da versão discreta do problema de alocação foi estudado em [70]. Mais especificamente, é considerada uma solução analítica ótima para uma formulação multiperíodo do modelo de Markowitz. Em particular, os autores derivam políticas eficientes em forma fechada ou analítica em conjunto com uma expressão explícita para a fronteira eficiente. Assim, este trabalho pode ser considerado uma generalização do modelo de Markowitz para o caso multiperíodo.

Mais adiante, esta abordagem foi generalizada por Zhu, Li e Wang em [116] para incluir o controle do risco de falência utilizando-se uma abordagem dual por Lagrange, permitindo, assim obter uma solução analítica para a política de portfólio ótimo. Já em [24], Costa e Nabholz propõem uma solução para otimizar o portfólio considerando o caso com restrições intermediárias. De fato, o objetivo é generalizar os resultados de Ng e Li [70] para o caso em que as variâncias e valores esperados intermediários do portfólio também sejam considerados no critério de desempenho e/ou restrições do problema. Outra generalização de [70] pode ser vista em Leippold, Trojani e Vanini [69], em que é considerado um portfólio com passivos.

Em Zheng e Ma [51] e em Wu e Li [105] é considerada a incerteza no tempo de investimento. Em Calafiore [18] é proposta uma abordagem alternativa através de programação quadrática convexa no lugar da programação estocástica para problemas com muitos ativos

e passos de tempo. Em [99], Sadjadi, Seyedhosseini e Hanssanlou apresentam uma abordagem de programação *fuzzy* linear capaz de determinar a alocação de investimentos em cada passo de tempo. Em [45], por sua vez, Çelikyurt e Özeckici apresentam um modelo discreto no tempo de otimização de portfólio multiperíodo, em que a evolução do mercado, compreendido por um conjunto de fatores socioeconômicos que afetam os retornos dos ativos, é descrita por uma cadeia de Markov.

Por outro lado, Çanakoglu e Özeckici [6] consideram um problema de seleção de portfólio baseado no conceito econômico de utilidade, representado pela classe de funções utilidade do tipo HARA (*Hyperbolic Absolute Risk Aversion*) por ser uma das mais gerais e mais utilizadas na prática devido às suas propriedades, e seus parâmetros mudam de acordo com um mercado markoviano que não pode ser perfeitamente observado, caracterizando a informação imperfeita presente na maioria dos mercados. De fato, os autores utilizam um modelo de cadeia de Markov escondida para descrever a relação entre uma parte do mercado, composta por investidores que dispõem de informações observáveis para tomada de decisão, e um outro grupo que não dispõe de informações diretamente observáveis.

Uma outra abordagem é proposta por Dombrovskii e Gerasimov em [37] e [38]. No primeiro trabalho, os autores propõem um modelo dinâmico para o portfólio de investimento no espaço de estados. De fato, o portfólio é descrito por uma rede estocástica dinâmica com critério quadrático para rastrear um portfólio definido pelo investidor. No segundo trabalho, os autores generalizam os resultados anteriores considerando o caso de volatilidade estocástica em lugar de um modelo de volatilidade homocedástica no tempo, como é o caso do modelo de Black-Sholes utilizado originalmente para modelar a evolução dos preços dos ativos de risco. Desta forma, os autores argumentam que o modelo se aproxima mais da realidade do mercado, uma vez que a variação dos preços dos ativos no mercado financeiro não é constante no tempo.

Finalmente, Dombrovskii, Gal'perin e Fedosov [36] consideram que os preços dos ativos de risco seguem equações estocásticas contendo perturbações regulares correspondentes às oscilações dos preços de ações, como função de eventos regulares que ocorrem no mercado financeiro, e perturbações em forma de pulsos aleatórios no tempo descrevendo eventos raros e extremos. Adicionalmente, os parâmetros das equações variam em função de mudanças de regime de mercado modeladas por uma cadeia de Markov discreta.

Na sequência, em [39], Dombrovskii e Lyashenko partem para a otimização dinâmica de portfólios de investimento, considerando sistemas discretos no tempo com controle LQ estocástico e ruídos multiplicativos no estado e no controle. A solução do problema é derivada sob a forma de matrizes inter-relacionadas para um controlador estático e um dinâmico. Seguindo esta abordagem, em [34] é considerada a tarefa de gestão de um porfólio com custos transacionais com restrições. O problema é proposto considerando o método de controle preditivo de modelo (MPC) para resolver o problema de controle dinâmico com restrições. A partir destes resultados, em [41] Dombrovskii *et al.* obtêm equações que otimizam um modelo de controle preditivo para malha aberta e fechada e estabelece uma estratégia de controle preditivo com respeito às restrições explícitas sobre as variáveis de controle. Os resultados obtidos são aplicados ao controle de um portfólio cujos ativos possuem volatilidades estocásticas.

Enquanto neste trabalho os autores oferecem um método de obtenção de estratégias para um modelo de controle preditivo para sistemas discretos com ruídos multiplicativos e parâmetros aleatórios representando uma sequência de variáveis aleatórias independentes, em [35] os autores propõem parâmetros dependentes cuja dinâmica é descrita por uma equação de autorregressão multidimensional. Já em [40], Dombrovskii e Ob"edko consideram que os parâmetros do modelo de controle preditivo dependem de saltos markovianos e com a possibilidade de considerar restrições explícitas no controle.

Seguindo a abordagem de otimização de sistemas lineares discretos no tempo, em [108] e [114], Zhou e Yin apresentam uma seleção de portfólio de Markowitz com mudança de regime, o qual é resolvido por um problema de controle auxiliar indefinido LQ de um sistema linear com salto markoviano e ruídos multiplicativos. Sob um outro ponto de vista, em [17], [5] e [19] os autores consideram o problema de alocação de média-variância multiperíodo em tempo discreto para o caso em que os parâmetros estão sujeitos a saltos markovianos seguindo uma abordagem muito parecida com a de [70]. Deve-se ressaltar que, nestes casos, somente os valores finais de média e variância do portfólio são considerados, o que simplifica consideravelmente o problema.

O caso em que se consideram valores intermediários para a média e a variância do portfólio é abordado em Zhu, Li e Wang [116] para o caso sem saltos e em [104], [25], [105] para o caso em que o mercado está sujeito a saltos markovianos e em [31], [32] e [33], incluindo-se

ruídos multiplicativos. Em particular, a abordagem desenvolvida em [32] e [33], que contém os resultados da primeira parte desta tese, generaliza a abordagem apresentada em Costa e Okimura [31], uma vez que desenvolve um modelo que determina uma estratégia de otimização para o portfólio considerando as restições intermediárias em todos os passos de tempo até o vencimento da estratégia, enquanto que em [31] o modelo otimiza apenas o risco e retorno terminais.

2.2.4 Contribuição

Do exposto na seção anterior, vemos que os resultados previamente obtidos na literatura internacional consideram ou apenas o caso escalar ou apenas com restrições na média e variância final. Neste trabalho, genera- lizamos as abordagens anteriores para o caso multidimensional, por admitir a consideração da otimização não apenas do lado dos ativos, mas também dos passivos, e com restrições em todos os instantes de tempo. São considerados dois critérios de desempenho. O primeiro é composto de uma combinação linear sem restrições ao longo do tempo para um compromisso entre risco e retorno da saída do sistema. No segundo critério é composto por uma minimização de uma combinação linear das variâncias ao longo do tempo sob algumas restrições do valor mínimo da saída do sistema.

A estratégia de controle ótimo é derivada a partir de um conjunto de equações generalizadas a diferenças de Riccati e de alguns parâmetros obtidos de algumas equações recursivas. Especificamente, estes resultados generalizam o caso escalar de média-variância obtido em [17], [5] e [19] com saltos markovianos, em [70] para o caso sem saltos e, adicionalmente, estende os resultados de [31], que considera o caso multidimensional aplicado apenas para a otimização da média-variância final.

Como já comentado, consideramos o caso no qual o compromisso de risco retorno intermediário de uma saída de um sistema em tempo discreto com saltos markovianos e ruídos multiplicativos são considerados na função custo, o que dificulta ainda mais a solução do problema. Adicionalmente, são derivadas condições explícitas necessárias e suficientes para a otimalidade da estratégia de controle.

De forma geral, a sequência do trabalho está estruturada da seguinte forma: no próximo capítulo apresentamos o problema de controle ótimo multiperíodo com as notações e definições que serão consideradas na derivação do modelo. Apresentamos o sistema linear es-

tocástico que utilizaremos ao longo do trabalho conceituando cada um de seus parâmetros. Por fim, apresentamos os problemas de otimização que pretendemos resolver, bem como o problema auxiliar que precisaremos utilizar, conforme os trabalhos citados anteriormente. No capítulo seguinte, derivamos as soluções para os problemas de otimização considerados para, em seguida, apresentarmos as aplicações numéricas dos mesmos.

Capítulo 3

Problema de Controle Ótimo Multiperíodo

Dado que nosso objetivo central é apresentar um modelo de otimização multiperíodo aplicado a sistemas lineares em tempo discreto, sujeitos a saltos markovianos e ruídos multiplicativos, iniciamos o desenvolvimento do modelo apresentando neste capítulo os elementos básicos que servirão de suporte para a solução final.

Primeiramente, estabelecemos um conjunto de notações e definições que servirão de base para todo o desenvolvimento do trabalho. Na sequência, apresentamos o problema de otimização e especificamos as formulações que utilizaremos. Posteriormente, apresentamos dois resultados auxiliares em forma de proposições que servirão de base para o desenvolvimento do Teorema 1, que estabelece a lei de controle ótimo para o problema auxiliar $A(\lambda, \nu)$, apresentado na última seção do capítulo.

Como veremos, a importância deste problema $A(\lambda, \nu)$ se deve ao fato de não ser possível obter uma solução direta dos problemas de otimização por programação dinâmica, uma vez que, a presença de um termo não linear do valor esperado da saída impossibilita sua solução direta. Assim, este problema auxiliar viabiliza a solução apresentada no capítulo seguinte. Com o propósito de ilustrar a aplicação prática do modelo desenvolvido, apresentamos nos capítulos posteriores esta aplicação ao modelo ao problema de seleção de portfólio de investimentos.

3.1 Notações e Definições

Conforme mencionado, iniciamos estabalecendo um conjunto de notações e definições. Ao longo do trabalho, o espaço euclidiano n-dimensional será representado por $\mathbb{R}^n$ e o espaço linear de todas as matrizes reais $m \times n$ por $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, com $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n) := \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Utilizamos a notação padrão para $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, $A \geq 0$ ($A > 0$ respectivamente) para denotar que a matriz A é positiva semidefinida (positiva definida) e $tr(A)$ para representar o traço de A. A imagem e o espaço nulo de uma matriz $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ será representado respectivamente por $\mathrm{Im}(A)$ e $\mathrm{Ker}(A)$ e A' representará a matriz transposta de A.

Relembramos que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(A')^{\perp}$, onde $\mathcal{X}^{\perp}$ representa o complemento ortogonal de um subespaço linear $\mathcal{X}$. O produto de Kronecker entre duas matrizes A e B será representado por $A \otimes B$. A matriz identidade, de dimensão apropriada para o contexto em que aparece, será representada por I.

Denotamos por $\mathbb{H}^{n,m}$ o espaço linear formado pelas matrizes N-sequenciais reais $V = (V_1, ..., V_N)$ com $V_i \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $i = 1, \ldots, N$ e, por simplicidade, faça $\mathbb{H}^n := \mathbb{H}^{n,n}$.

Dizemos que $V = (V_1, \ldots, V_N) \in \mathbb{H}^{n+}$ se $V \in \mathbb{H}^n$ e para cada $i = 1, \ldots, N$, $V_i \geq 0$. O espaço linear limitado de todos operadores de $\mathbb{H}^n$ para $\mathbb{H}^m$ será representado por $\mathbb{B}(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^m)$ e, em particular, $\mathbb{B}(\mathbb{H}^n) := \mathbb{B}(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^n)$.

Para um conjunto S definimos 1_S como a função indicadora usual, isto é:

$$1_S(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in S \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para uma sequência de matrizes quadradas n dimensionais $A(0), \ldots, A(t)$, usamos a seguinte notação:

$$\prod_{\ell=s}^{t} A(\ell) = \begin{cases} \text{A(t)} \ldots \text{A(s)} & \text{para } t \geq s \\ I & \text{para } t < s \end{cases}$$

Para uma matriz $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, a inversa generalizada de A (ou inversa Moore-Penrose de A) é definida como uma única matriz $A^{\dagger} \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, tal que[1]

[1] Ver [94], p. 12-13.

i) $AA^{\dagger}A = A$;

ii) $A^{\dagger}AA^{\dagger} = A^{\dagger}$;

iii) $(AA^{\dagger})' = AA^{\dagger}$;

iv) $(A^{\dagger}A)' = A^{\dagger}A$.

O operador valor esperado será representado por $E(.)$.

3.2 O Sistema Linear com Saltos Markovianos e Ruídos Multiplicativos

Como argumentamos no capítulo anterior, sistemas lineares com saltos markovianos e ruídos multiplicativos constituem uma grande classe de sistemas de estudos em controle ótimo. Suas aplicações ocorrem em várias áreas do conhecimento. Particularmente em finanças, sua aplicação está na otimização de carteiras de investimentos.

Por este motivo, analisaremos o problema de otimização de média-variância considerando o seguinte sistema linear com saltos markovianos e ruídos multiplicativos em um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathbf{P}, \mathcal{F})$:

$$\begin{aligned} x(k+1) =& \Big(\bar{A}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon^x} \widetilde{A}_{\theta(k),s}(k) w_s^x(k)\Big) x(k) + \Big(\bar{B}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon^u} \widetilde{B}_{\theta(k),s}(k) w_s^u(k)\Big) u(k), \\ & x(0) = x_0,\ \theta(0) = \theta_0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

Com a seguinte saída escalar do sistema (3.1):

$$y(t) = L_{\theta(t)}(t) x(t) \tag{3.2}$$

em que

- O parâmetro $\theta(k)$ denota uma cadeia de Markov variante no tempo assumindo valores em $\{1, ..., N\}$ com matriz de probabilidade de transição $\mathbb{P}(k) = [p_{ij}(k)]$.

  De forma geral, este parâmetro está associado com os possíveis estados ou modos nos quais o sistema linear acima pode operar ao longo do tempo. Assim, pode-se ver que

os elementos $p_{ij}(k)$ contidos em $\mathbb{P}(k)$ determinam a probabilidade de o sistema mudar de regime de um passo de tempo para outro. Portanto, o sistema (3.1) tenderá a evoluir no tempo transitando pelos diferentes estados de acordo os valores das probabilidades $p_{ij}(k)$. Assim, dizemos que o sistema pode saltar de um modo para outro fazendo com que a equação (3.1) acima seja estocástica em relação aos estados ou modos de operação.

Deve-se notar que um caso particular para $\mathbb{P}(k)$ é quando temos uma matriz diagonal, ou seja, a matriz $\mathbb{P}(k)$ equivale à matriz identidade. Neste caso, uma vez que o sistema (3.1) se encontra em determinado estado $\theta(k)$, permanecerá indefinidamente neste mesmo estado.

No caso de aplicação deste modelo em finanças para otimização de carteira de investimentos, este parâmetro $\theta(k)$ tem por função representar os possíveis estados que o mercado pode assumir. Por exemplo, em um modelo que possui um mercado que pode operar em baixa, alta ou neutralidade, a cadeia de Markov possui três estados possíveis. Consequentemente, o parâmetro $\mathbb{P}(k)$ será uma matriz de transição entre estes três estados. Mais especificamente, seus elementos $p_{ij}(k)$ representam a probabilidade de mudar para qualquer um dos possíveis estados no momento seguinte $k+1$, condicionado ao estado em que o sistema se encontra no momento k. Estes possíveis estados de mercado muitas vezes são chamados por *modos de operação do mercado*.

A introdução de cadeias de Markov para modelar os modos de mercado não é inédita, como pudemos ver no capítulo anterior, mas pode-se dizer que é relativamente recente. Ter a possibilidade de introduzir mudanças abruptas de regime de mercado em modelos de otimização de carteiras é sem dúvida uma questão importante que possui dois aspectos: um referente ao mercado ou exógeno ao modelo e outro do próprio modelo. Quanto ao primeiro aspecto, vemos que a volatilidade dos mercados tem sido recorrente. Não a volatilidade normal que todo mercado apresenta mesmo em normalidade de operação, mas aquela que surge no prenúncio das crises financeiras cada vez mais frequentes e que se estendem por longos períodos de tempo, podendo contagiar outros mercados, inclusive fazendo com que ativos de várias classes depreciem substancialmente neste período. Na maioria dos casos, porém, as crises são precedidadas de longos e fortes períodos de crescimento econômico em que os ativos têm seus preços sobrevaloriza-

dos e com volatilidade de curto prazo bastante baixa. A combinação destes períodos dá origem ao conhecido fenômeno de heterocedasticidade da volatilidade dos mercados. Um grande tema de debate ainda nos dias atuais, mas que parece estar longe de um consenso[2].

O segundo aspecto, muito relevante em problemas de finanças, refere-se ao horizonte de tempo aplicável. Modelos com horizonte de tempo curto apresentam menor relevância com relação a questões de mudança de regime de mercado. Isto se deve ao fato de que a incerteza a ser avaliada considera a informação do passado recente, o qual deve ter uma influência bem maior sobre seus resultados. Bons exemplos neste sentido são modelos de risco de mercado que em geral procuram prever situações adversas em horizontes que vão tipicamente de um a dez dias. Modelos de otimização de alocação de capital podem possuir horizontes bem mais amplos, podendo alcançar décadas. Em situações como estas, avaliar as incertezas futuras dando ênfase apenas às informações do passado recente pode gerar resultados muito distorcidos, podendo invalidar qualquer tomada de decisão. Neste caso, é preciso considerar um espectro mais amplo de possibilidades para o mercado, resgatando situações que evidentemente têm probabilidade de ocorrer novamente, mas que não aparecem há algum tempo.

- As condições iniciais θ_0 e x_0 são assumidas serem independentes de $\{w_s^x(k)\}$ e $\{w_s^u(k)\}$, com x_0 um vetor aleatório n-dimensional com segundos momentos finitos.

- Os ruídos multiplicativos $\{w_s^x(k); s = 1, \ldots \varepsilon^x, k = 0, 1, \ldots, T-1\}$ e $\{w_s^u(k); s = 1, \ldots \varepsilon^u, k = 0, 1, \ldots, T-1\}$ são ambos variáveis aleatórias com média nula e variância unitária e $E(w_i^x(k)w_j^x(k)) = 0$, $E(w_i^u(k)w_j^u(k)) = 0$, para todo k e $i \neq j$, e independente da cadeia de Markov $\{\theta(k)\}$. O coeficiente de correlação mútua entre $w_{s_1}^x(k)$ e $w_{s_2}^u(k)$ é representado por $E(w_{s_1}^x(k)w_{s_2}^u(k)) = \rho_{s_1,s_2}(k)$. Sem perda de generalidade, assumimos que $\varepsilon = \varepsilon^x = \varepsilon^u$.

  De acordo com sua própria notação e o sistema (3.1) mostra, os ruídos $w_s^x(k)$ e $w_s^u(k)$ estão associados ao estado x e ao controle u do sistema, respectivamente, mostrando que ambas as variáveis estão sujeitas a incertezas em seus valores em cada passo de tempo k, independentemente dos modos de operação do mercado. Note que os

[2]Por exemplo, veja [74].

vetores x e u possuem dimensão dependente do número de variáveis de estado a serem controladas pelo sistema.

Por sua vez, no caso da aplicação deste sistema em finanças, o qual apresentaremos nos capítulos seguintes, veremos que estas variáveis de estado serão formadas pelos ativos que compõem o portfólio além de eventuais referências como índices de mercado ou evolução do passivo, conforme o problema.

- Temos para cada $k = 0, 1, \ldots, T-1$ e $s = 1, \ldots, \varepsilon$:

  i) $\bar{A}(k) = (\bar{A}_1(k), \ldots, \bar{A}_N(k)) \in \mathbb{H}^n$;

  ii) $\widetilde{A}_s(k) = (\widetilde{A}_{s,1}(k), \ldots, \widetilde{A}_{s,N}(k)) \in \mathbb{H}^n$;

  iii) $\bar{B}(k) = (\bar{B}_1(k), \ldots, \bar{B}_N(k)) \in \mathbb{H}^{m,n}$;

  iv) $\widetilde{B}_s(k) = (\widetilde{B}_{s,1}(k), \ldots, \widetilde{B}_{s,N}(k)) \in \mathbb{H}^{m,n}$;

  v) $L(t) \in \mathbb{H}^{n,1}$.

  Neste modelo, $\bar{A}(k)$ representa as matrizes que fornecem a dinâmica da evolução do valor esperado para as variáveis de estado no passo seguinte e em cada modo de operação. Nesta mesma linha, $\widetilde{A}_s(k)$ representa as matrizes que fornecem as respectivas incertezas, representadas pelo desvio padrão, associadas aos elementos contidos em $\bar{A}(k)$. Em $\bar{B}(k)$, temos a representação das matrizes que fornecem a dinâmica da evolução para o valor esperado das variáveis de controle em relação à variável de estado de referência, enquanto $\widetilde{B}_s(k)$ contempla as respectivas incertezas marginais em termos de desvio padrão.

  No caso da aplicação deste sistema em otimização de portfólio, $\bar{A}(k)$ contém o conjunto de matrizes de retornos esperados do ativo de referência em cada passo de tempo k e cada modo de operação de mercado. As matrizes contidas em $\widetilde{A}_s(k)$, por sua vez, possuem as respectivas volatilidades. As matrizes $\bar{B}(k)$ contemplam o excesso de retorno dos demais ativos frente ao ativo de referência e em $\widetilde{B}_s(k)$ temos os respectivos excessos de volatilidade.

- Quanto a $L_{\theta(t)}(t)$, pode ser um escalar ou um vetor, dependendo do problema em questão. Sua função é fundamentalmente relacionar o vetor de espaço de estados do

sistema com sua saída. Em otimização de portfólio, geralmente é reduzido a um escalar unitário quando se está otimizando uma carteira de investimentos apenas considerando-se seus ativos. No entanto, quando a saída do sistema depende de um benchmark ou trata-se de um modelo de ALM para um fundo de pensão, este parâmetro passa a ser um vetor, como veremos em capítulos à frente.

- Fazemos $\mu_i(0) = E(x_0 1_{\{\theta_0=i\}})$, $\mu(0) \in \mathbb{R}^{Nn}$ com $\mu(0)' = (\mu_1(0) \ \cdots \ \mu_N(0))$, e $Q_i(0) = E(x(0)x(0)'1_{\{\theta_0=i\}})$, $Q(0) = (Q_1(0), \ldots, Q_N(0)) \in \mathbb{H}^{n+}$.

- Fazemos $\pi_i(k) = P(\theta(k) = i)$ e $\pi(k)' = \Big(\pi_1(k), \quad \ldots \quad , \pi_N(k)\Big)$. Ou seja, o vetor $\pi(k)$ contém as probabilidades de a cadeia estar em cada um dos N estados no passo k.

- Seja $\mathcal{F}_t$ o σ-campo gerado por $\{(\theta(s), x(s)); s = 0, \ldots, \tau\}$, e escreva $\mathbb{U}(\tau) = \{u_\tau = (u(\tau), \ldots, u(T-1)); u(k)$ é um vetor aleatório m-dimensional com segundos momentos finitos, $\mathcal{F}_k$-mensurável para cada $k = \tau, \ldots, T-1\}$.

- Por simplicidade, escrevemos $\mathbb{U} = \mathbb{U}(0)$. O superescrito ^{u} indicará que a lei de controle u está sendo aplicada em (3.1), (3.2).

3.3 Apresentação do Problema

Em problemas de otimização de carteiras de investimento, em particular de otimização de média-variância, há três formulações usualmente utilizadas, conforme em Meucci [81]:

i) maximizar o retorno esperado para determinado nível de risco;

ii) minimizar o risco esperado para determinado nível de retorno;

iii) minimizar um compromisso entre risco e retorno esperado da carteira.

Como apresentado no capítulo anterior, generalizamos para o caso multidimensional e com restrições em todos os passos de tempo até o instante final para os casos ii e iii. Sob este ponto de vista, trabalharemos com dois critérios:

1. composto de uma combinação linear sem restrições ao longo do tempo para um compromisso entre risco e retorno da saída do sistema o qual denominaremos de problema $PU\,(\nu, \xi)$;

2. composto por uma minimização de uma combinação linear das variâncias ao longo do tempo sob algumas restrições do valor mínimo da saída do sistema, denominado de problema $PC\left(\nu,\epsilon\right)$.

Na sequência detalhamos estes dois casos.

3.3.1 Problema $PU\left(\nu,\xi\right)$

Correspondente à descrição do objetivo (iii) acima, trata-se em essência de um problema de média-variância sem restrições que consideraremos representado por $PU\left(\nu,\xi\right)$ e definido como:

$$PU\left(\nu,\xi\right):\ \min_{u\in\mathbb{U}}\sum_{t=1}^{T}\Big(\nu(t)Var\left(y^{u}\left(t\right)\right)-\xi(t)E\left(y^{u}\left(t\right)\right)\Big) \tag{3.3}$$

em que os vetores:

1. $\nu'=(\nu(1),\ldots,\nu(T))\geq 0$ e
2. $\xi'=(\xi(1),\ldots,\xi(T))\geq 0$

são parâmetros de entrada para este problema e podem ser entendidos como sendo coeficientes de aversão ao risco, dada uma relação de preferência entre a saída esperada e o nível de risco associado para qualquer instante t desde o primeiro momento até o vencimento T. Em outras palavras, os vetores ν' e ξ' definem conjuntamente, em cada instante de tempo, o peso relativo entre o valor esperado e a incerteza associada à saída $y^{u}\left(t\right)$, podendo exigir que uma estratégia $u\in\mathbb{U}$ dê maior ênfase à incerteza ou ao valor esperado da saída, conforme o caso.

3.3.2 Problema $PC\left(\nu,\epsilon\right)$

Correspondente à descrição do objetivo (ii) acima, consideraremos o problema de média-variância com restrições, representado por $PU\left(\nu,\xi\right)$,

$$\begin{aligned} PC\left(\nu,\epsilon\right):\ &\min_{u\in\mathbb{U}}\sum_{t=1}^{T}\Big(\nu(t)Var\left(y^{u}\left(t\right)\right)\Big)\\ \text{sujeito a}\ :\ &E\left(y^{u}\left(t\right)\right)\geq\epsilon(t),\quad t=1,\ldots,T, \end{aligned} \tag{3.4}$$

em que o vetor $\epsilon' = (\epsilon(1), \ldots, \epsilon(T)) \geq 0$ representa o valor esperado mínimo para a saída do sistema. Este tipo de formulação é útil sobretudo para a otimização de portfólios que buscam uma rentabilidade mínima tipicamente obtida de alguma referência de mercado ou *benchmark* a ser batido.

Ao longo do próximo capítulo, vamos desenvolver a solução para o problema $PU\,(\nu, \xi)$ e da solução deste problema obteremos uma solução para o problema $PC\,(\nu, \epsilon)$. Adicionalmente, apresentaremos condições necessárias e suficientes para a existência de um controle ótimo para estes problemas generalizando resultados anteriores na literatura.

3.4 O Problema Auxiliar $A\,(\lambda, \nu)$

Deve-se notar que o problema $PU\,(\nu, \xi)$ envolve uma função não linear do termo do valor esperado em $Var(y^u(t)) = E(y^u(t)^2) - E(y^u(t))^2$, impedindo de ser resolvido diretamente por programação dinâmica. Por esta razão, resolvemos o problema auxiliar representado por $A\,(\lambda, \nu)$, adotando um procedimento similar ao que foi usado em [70] e [116] considerando o problema auxiliar $A\,(\lambda, \nu)$, em que $\lambda = (\lambda(1), \ldots, \lambda(T))$:

$$A\,(\lambda, \nu) : \ \min_{u \in \mathbb{U}} E \left\{ \sum_{t=1}^{T} \left(\nu(t) y^u\,(t)^2 - \lambda(t) y^u\,(t) \right) \right\}. \tag{3.5}$$

Para o problema $A\,(\lambda, \nu)$ os parâmetros de entrada são λ e ν.

Assim, o primeiro grande objetivo do próximo capítulo será determinar uma lei de controle ótimo $u(k)$ através do Teorema 1. Em seguida, através da Hipótese H e da Proposição 5, mostramos que o parâmetro λ a ser obtido através do Teorema 2, não altera a lei de controle ótimo $u(k)$ obtida anteriormente e que este λ, em função de ξ e ν, é a solução para $PU\,(\nu, \xi)$. De posse da solução para este problema, derivamos a solução do problema $PC\,(\nu, \epsilon)$ através do Teorema 3.

Capítulo 4

Solução dos Problemas

Neste capítulo, desenvolvemos a solução para os dois problemas: $PU(\nu, \xi)$, que otimiza uma combinação entre a variância e o valor esperado da saída do sistema ao longo do tempo sem restrições, e $PC(\nu, \epsilon)$, que minimiza a variância de saída ao longo do tempo com restrições sobre o valor esperado. Também apresentamos explicitamente condições necessárias e suficientes para a existência de um controle ótimo para estes problemas generalizando resultados anteriores na literatura. Resolvemos o problema $PU(\nu, \xi)$ e a partir de sua solução resolvemos o problema $PC(\nu, \epsilon)$.

Como afirmamos anteriormente, o problema $PU(\nu, \xi)$ depende de um termo não linear do valor esperado da variável de saída por conta da variância. Portanto, este problema não pode ser resolvido diretamente por programação dinâmica. Por esta razão, adotamos um procedimento similar ao que foi usado em [70] e [116] considerando o problema auxiliar $A(\lambda, \nu)$, conforme apresentamos no capítulo anterior. A solução para este problema é obtida através do Teorema 1 apresentado na primeira parte deste capítulo. Neste caso, o parâmetro λ está implícito nesta lei de controle ótimo e, portanto, é parte integrante da solução do problema $A(\lambda, \nu)$.

De posse deste resultado, desenvolvemos na segunda parte do capítulo as soluções para os problemas $PU(\nu, \xi)$ e $PC(\nu, \epsilon)$. Para alcançarmos este objetivo, mostramos através da Hipótese H e da Proposição 5 como este λ associa a solução do problema $PU(\nu, \xi)$ à lei de controle ótimo do problema auxiliar $A(\lambda, \nu)$. Através das Proposições 8 e 9, obtemos as condições necessárias à existência de uma estratégia de controle ótimo para o problema $PU(\nu, \xi)$. Baseado nestas condições, determinamos no Teorema 2 o λ que, aplicado à lei

de controle ótimo do problema $A(\lambda, \nu)$, gera a estratégia de controle ótimo para o problema $PU(\nu, \xi)$. Na sequência, mostramos através da Proposição 10 que uma estratégia de controle pertencente ao conjunto de soluções ótimas do problema $PU(\nu, \xi)$ e sujeita à $E(y^u(t)) = \epsilon(t)$ é a solução ótima para o problema $PC(\nu, \epsilon)$. No Teorema 3, temos a respectiva condição suficiente e a derivação explícita de sua solução. Em seguida, generalizamos este problema para uma formulação em Programação Quadrática.

4.1 Proposições Auxiliares

Para alcançarmos o objetivo de derivarmos uma lei de controle ótimo para o problema auxiliar $A(\lambda, \nu)$ através do Teorema 1, apresentamos preliminarmente duas proposições nesta seção. A primeira refere-se ao complemento de Schur utilizado em Álgebra Linear. A segunda proposição apresenta um resultado importante sobre a relação entre os espaços nulos de duas matrizes.

A primeira destas proposições será útil para obtermos o resultado da Proposição 3, a qual, em conjunto com a Proposição 2, contribuirá para obtermos o resultado da Proposição 4, que é a base do resultado do Teorema 1 de onde temos a lei de controle ótimo do problema auxiliar $A(\lambda, \nu)$.

Proposição 1. *Considere $Y \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ e $M \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^m)$ com $Y \geq 0$ e $M \geq 0$. Seja A e B matrizes estocásticas (isto é, cada elemento da matriz é uma variável aleatória) em $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathbb{B}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ respectivamente. Então:*

- $E(A'YA) - E(A'YB)\Big(E(B'YB + M)\Big)^{\dagger} E(B'YA) \geq 0$ *e*
- $E(A'YB) = E(A'YB)\Big(E(B'YB) + M\Big)^{\dagger}\Big(E(B'YB) + M\Big)$.

Proposição 2. *Para $G = G' \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ e $H \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ segue que $H(I - GG^{\dagger}) = 0$ se e somente se $\mathrm{Ker}(G) \subseteq \mathrm{Ker}(H)$.*

4.2 Resultados Intermediários

Considerando-se os resultados contidos nas proposições anteriores, apresentamos a Proposição 3, que fornece um resultado útil para o desenvolvimento da Proposição 4, a qual fornece o resultado central do Teorema 1 que estabelece a lei de controle ótimo do problema auxiliar $A(\lambda, \nu)$.

Antes, definimos os seguintes problemas para o problema auxiliar (3.5), em que $k \in \{0, \ldots, T-1\}$:

$$J(x(k), \theta(k), k) = \min_{u_k \in \mathbb{U}(k)} E\left\{ \sum_{t=k}^{T} \Big(\nu(t) y^{u_k}(t)^2 - \lambda(t) y^{u_k}(t) \Big) \Big| \mathcal{F}_k \right\}.$$

Note que estes problemas $J(x(k), \theta(k), k)$ são resolvidos recursivamente do final para o começo através do chamado método *backward*, ou seja, iniciamos com $k = T$ e voltamos até o instante inicial. Nesta situação, a solução encontrada para estes problemas será a mesma do problema auxiliar $A(\lambda, \nu)$. Este fato é importante porque apresentaremos uma solução para o problema auxiliar $A(\lambda, \nu)$ no Teorema 1 baseada na solução dos problemas $J(x(k), \theta(k), k)$.

Para resolver o problema (3.5), utilizaremos a equação de otimalidade de Bellman, escrita em termos dos operadores definidos na sequência.

Considerando-se que $k = 0, \ldots, T-1$, $X \in \mathbb{H}^n$, $V \in \mathbb{H}^{n,1}$, $\gamma \in \mathbb{H}^1$, e $i = 1, \ldots, N$, os seguintes operadores $\mathcal{E}(k,.) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n)$, $\mathcal{A}(k,.) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n)$, $\mathcal{G}(k,.) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^{n,m})$, $\mathcal{R}(k,.) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^m)$, e os operadores não lineares $\mathcal{K}(k,.)$, $\mathcal{P}(k,.)$ serão úteis, para $X \in \mathbb{H}^n$ e $i = 1, \ldots, N$

$$\mathcal{E}_i(k,X) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(k)X_j, \tag{4.1}$$

$$\mathcal{A}_i(k,X) = \bar{A}_i(k)'\mathcal{E}_i(k,X)\bar{A}_i(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{A}_{i,s}(k)'\mathcal{E}_i(k,X)\widetilde{A}_{i,s}(k), \tag{4.2}$$

$$\mathcal{G}_i(k,X) = \Big(\bar{A}_i(k)'\mathcal{E}_i(k,X)\bar{B}_i(k) + \sum_{s_1=1}^{\varepsilon}\sum_{s_2=1}^{\varepsilon}[\rho_{s_1,s_2}(k)\widetilde{A}_{i,s_1}(k)'\mathcal{E}_i(k,X)\widetilde{B}_{i,s_2}(k)]\Big)', \tag{4.3}$$

$$\mathcal{R}_i(k,X) = \bar{B}_i(k)'\mathcal{E}_i(k,X)\bar{B}_i(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{B}_{i,s}(k)'\mathcal{E}_i(k,X)\widetilde{B}_{i,s}(k), \tag{4.4}$$

$$\mathcal{K}_i(k,X) = \mathcal{R}_i(k,X)^{\dagger}\mathcal{G}_i(k,X), \tag{4.5}$$

$$\mathcal{P}_i(k,X) = \mathcal{A}_i(k,X) - \mathcal{G}_i(k,X)'\mathcal{R}_i(k,X)^{\dagger}\mathcal{G}_i(k,X) + \nu(k)L_i(k)'L_i(k). \tag{4.6}$$

O operador em (4.1) representa o valor esperado de $X_{\theta(k+1)}$ condicionado à $\theta(k) = i$. Ao mesmo tempo, o operador em (4.2) pode ser entendido como sendo $E(A(k)'X_{\theta(k+1)}A(k)|\mathcal{F}_k)$, em que $A(k) = \bar{A}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon^x} \widetilde{A}_{\theta(k),s}(k)w_s^x(k)$. O operador em (4.3) pode ser interpretado como sendo $E(B(k)'X_{\theta(k+1)}A(k)|\mathcal{F}_k)$, em que $B(k) = \bar{B}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon^u} \widetilde{B}_{\theta(k),s}(k)w_s^u(k)$. Já o operador em (4.4) pode ser visto como sendo $E(B(k)'X_{\theta(k+1)}B(k)|\mathcal{F}_k)$. Por último, o operador em (4.5) é associado ao ganho de realimentação do controle ótimo e o operador em (4.6) se relaciona com as equações de diferenças de Riccati generalizadas acopladas.

Também definimos os seguintes operadores não-lineares $\mathcal{V}(k,.,.)$, $\mathcal{D}(k,.,.,.)$ e $\mathcal{H}(k,.) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^{n,1},\mathbb{H}^{n,m})$. Para $X \in \mathbb{H}^n$, $V \in \mathbb{H}^{n,1}$, $\gamma \in \mathbb{H}^1$, e $i = 1,\ldots,N$:

$$\mathcal{V}_i(k,X,V) = \mathcal{E}_i(k,V)\Big(\bar{A}_i(k) - \bar{B}_i(k)\mathcal{K}_i(k,X)\Big) + \lambda(k)L_i(k), \tag{4.7}$$

$$\mathcal{D}_i(k,X,V,\gamma) = \mathcal{E}_i(k,\gamma) - \frac{1}{4}\mathcal{E}_i(k,V)\bar{B}_i(k)\mathcal{R}_i(k,X)^{\dagger}\bar{B}_i(k)'\mathcal{E}_i(k,V)', \tag{4.8}$$

$$\mathcal{H}_i(k,V) = \bar{B}_i(k)'\mathcal{E}_i(k,V)'. \tag{4.9}$$

Estes operadores (4.7), (4.8) e (4.9) estão relacionados com a presença do termo linear na função custo do problema (3.5).

Na sequência, utilizaremos a equação de otimalidade de Bellman, escrita em função dos resultados das proposições auxiliares a seguir.

Proposição 3. *Se* $P = (P_1, \ldots, P_N) \in \mathbb{H}^{n+}$ *e* $V = (V_1, \ldots, V_N) \in \mathbb{H}^{n,1}$ *então* $\mathcal{P}(k, P) \in \mathbb{H}^{n+}$ *e*

$$\mathcal{G}_i(k, P)' = \mathcal{G}_i(k, P)'\mathcal{R}_i(k, P)^{\dagger}\mathcal{R}_i(k, P). \tag{4.10}$$

Proposição 4. *Se* $P = (P_1, \ldots, P_N) \in \mathbb{H}^{n+}$*,* $V = (V_1, \ldots, V_N) \in \mathbb{H}^{n,1}$*,* $\gamma \in \mathbb{H}^1$ *e para cada* $i = 1, \ldots, N$*,*

$$\mathcal{H}_i(k, V) \in \mathrm{Im}(\mathcal{R}_i(k, P)) \tag{4.11}$$

então para qualquer $u_k \in \mathbb{U}(k)$*,*

$$\begin{aligned}
&E\Big(\nu(k)y(k)^2 - \lambda(k)y(k) + x(k+1)'P_{\theta(k+1)}x(k+1) - V_{\theta(k+1)}x(k+1) + \gamma_{\theta(k+1)}|\mathcal{F}_k\Big) = \\
&x(k)'\mathcal{P}_{\theta(k)}(k, P)x(k) + \Big(u(k) + a_{\theta(k)}(x(k))\Big)'\mathcal{R}_{\theta(k)}(k, P)\Big(u(k) + a_{\theta(k)}(x(k))\Big) \\
&- \mathcal{V}_{\theta(k)}(k, P, V)x(k) + \mathcal{D}_{\theta(k)}(k, P, V, \gamma),
\end{aligned} \tag{4.12}$$

em que para $i = 1, \ldots, N$*,*

$$a_i(x) = \mathcal{R}_i(k, P)^{\dagger}\Big(\mathcal{G}_i(k, P)x - \frac{1}{2}\mathcal{H}_i(k, V)\Big). \tag{4.13}$$

Definimos as seguintes sequências para $k = T, T-1, \ldots, 0$ que serão úteis na sequência

$$P(k) = \mathcal{P}(k, P(k+1)), \;\; P(T) = \nu(T)(L_1'L_1, \ldots, L_N'L_N), \tag{4.14}$$

$$V(k) = \mathcal{V}(k, P(k+1), V(k+1)), \;\; V(T) = \lambda(T)(L_1, \ldots, L_N), \tag{4.15}$$

$$\gamma(k) = \mathcal{D}(k, P(k+1), V(k+1), \gamma(k+1)), \;\; \gamma(T) = 0. \tag{4.16}$$

Em (4.14) temos uma sequência que corresponde ao conjunto de equações de Riccati de diferenças generalizadas acopladas, enquanto a sequência em (4.15) e (4.16) estão associadas à presença dos termos lineares contidos em (3.5). Em resumo, as Proposições 1, 2 e 3 forneceram resultados importantes de Álgebra Linear para derivarmos a Proposição 4, cujos resultados servem de base para o Teorema 1, a seguir, que fornece a solução do problema auxiliar $A\,(\lambda, \nu)$, base da solução para o problema $PU\,(\nu, \xi)$.

4.3 Resultados Principais

Conforme dito anteriormente, o problema $PU\,(\nu, \xi)$ depende de um termo não linear do valor esperado da variável de saída por conta da variância. Portanto, este problema não pode ser resolvido diretamente por programação dinâmica e, por esta razão, adotamos um procedimento similar ao que foi usado em [70] e [116], considerando o problema auxiliar $A\,(\lambda, \nu)$, conforme apresentamos no capítulo anterior.

A solução para este problema é obtida através do Teorema 1, apresentado a seguir. Neste caso, o parâmetro λ está implícito nesta lei e, portanto, é parte integrante da solução deste problema. De forma simplificada, este teorema aplica a equação de Bellman em conjunto com os resultados obtidos na Proposição 4 e os problemas $J\,(x\,(k)\,, \theta\,(k)\,, k)$ definidos anteriormente dependentes de cada passo de tempo $k \in \{0, \ldots, T-1\}$.

4.3.1 Lei de Controle Ótimo do Problema Auxiliar

Da Proposição 4 temos o seguinte teorema, o qual fornece a solução para o problema auxiliar $A\,(\lambda, \nu)$.

Teorema 1. *Se para cada* $k = 0, 1, \ldots, T-1$*,*

$$\mathcal{H}_i(k, V(k+1)) \in \mathrm{Im}(\mathcal{R}_i(k, P(k+1))), \tag{4.17}$$

então as funções valores $J(x(k), \theta(k), k)$ *do problema (3.5) são dados por*

$$J(x(k), \theta(k), k) = x(k)' P_{\theta(k)}(k) x(k) - V_{\theta(k)}(k) x(k) + \gamma_{\theta(k)}(k), \tag{4.18}$$

e uma lei de controle ótimo é obtida com

$$u(k) = -\mathcal{R}_{\theta(k)}(k, P(k+1))^{\dagger} \Big(\mathcal{G}_{\theta(k)}(k, P(k+1)) x(k) - \frac{1}{2} \mathcal{H}_{\theta(k)}(k, V(k+1)) \Big). \tag{4.19}$$

4.3.2 Lei de Controle Ótimo

De posse dos resultados obtidos até o momento, buscaremos as soluções para os problemas $PU\,(\nu, \xi)$ e $PC\,(\nu, \epsilon)$. Do teorema anterior, temos uma lei de controle ótimo para o problema auxiliar $A\,(\lambda, \nu)$. No entanto, esta solução não apresenta de forma explícita uma lei para o parâmetro λ. Assim, antes de obter a solução para os problemas principais, necessitamos

estabelecer uma relação explícita entre λ e o teorema anterior. Mais do que isto, precisamos dissociar λ desta lei de controle com o objetivo de preservar todos os resultados obtidos até o momento e, ao mesmo tempo, utilizar este λ para determinar as soluções para os problemas $PU\,(\nu,\xi)$ e $PC\,(\nu,\epsilon)$. Tal fato será possível considerando a Hipótese H e a Proposição 5 apresentada na sequência.

De posse deste resultado, cumpriremos com o objetivo desta seção, que é o de estudar os problemas (3.3) e (3.4). Os resultados principais são apresentados nos Teoremas 2 e 3, nos quais apresentamos condições explícitas para a existência de uma estratégia de controle ótimo para os problemas $PU\,(\nu,\xi)$ e $PC\,(\nu,\epsilon)$. Antes, porém, apresentamos as seguintes definições, para $i = 1,\ldots,N$, úteis nos desenvolvimentos seguintes:

$$
\begin{aligned}
K_i(k) &= \mathcal{K}_i(k, P(k+1)),\\
U_i(k) &= \mathcal{R}_i(k, P(k+1))^{\dagger}\mathcal{H}_i(k, V(k+1)),\\
A_i^{cl}(k) &= \bar{A}_i(k) - \bar{B}_i(k)K_i(k),\\
\mathbb{A}(k) &= \begin{pmatrix} p_{11}(k)A_1^{cl}(k) & \ldots & p_{N1}(k)A_N^{cl}(k)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{1N}(k)A_1^{cl}(k) & \ldots & p_{NN}(k)A_N^{cl}(k)\end{pmatrix},\\
\mathbb{V}(k) &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N}\pi_i(k)p_{i1}(k)\bar{B}_i(k)U_i(k)\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{N}\pi_i(k)p_{iN}(k)\bar{B}_i(k)U_i(k)\end{pmatrix},\\
\mathbb{L}(k) &= \begin{pmatrix} L_1(k) & \ldots & L_N(k)\end{pmatrix},\\
\mathbb{D}(k) &= \begin{pmatrix} \pi_1(k)\bar{B}_1(k)\mathcal{R}_1(k,P(k+1))^{\dagger}\bar{B}_1(k)' & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & \pi_N(k)\bar{B}_N(k)\mathcal{R}_N(k,P(k+1))^{\dagger}\bar{B}_N(k)'\end{pmatrix} \geq 0\\
\mathbb{Z}(k) &= \Big(\mathbb{P}\otimes I\Big)'\mathbb{D}(k)\Big(\mathbb{P}\otimes I\Big) \geq 0
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
a(k) =& \mathbb{L}(k)\left(\prod_{\ell=0}^{k-1}\mathbb{A}(\ell)\right)\mu(0),\ a' = (a(1),\ldots,a(T)),\\
g(i,j) =& \mathbb{L}(i)\left(\prod_{\ell=j}^{i-1}\mathbb{A}(\ell)\right)\mathbb{Z}(j-1)^{1/2},\ 1\leq j\leq i,\ i=1,\ldots,T,\\
b(i,j) =& \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{j-1} g(i,t+1)g(j,t+1)',\ 1\leq j\leq i,\ i=1,\ldots,T,\\
\widetilde{b}(i,j) =& \begin{cases} b(i,j) & i\geq j \\ b(j,i) & i<j \end{cases},\\
c =& \sum_{i=1}^{N} tr(P_i(0)Q_i(0)),\\
d =& \sum_{i=1}^{N} V_i(0)\mu_i(0),\\
e =& \sum_{i=1}^{N} \pi_i(0)\gamma_i(0).
\end{aligned}
$$

Para apresentarmos a Hipótese H e a Proposição 5, necessitamos considerar alguns resultados que auxiliam em seu desenvolvimento. Assim, considerando $i = 1,\ldots,N$, $k = 0,\ldots,T-1$, definimos $\mathbb{P}_i(k) = \begin{pmatrix} p_{i1}(k) & \ldots & p_{iN}(k)\end{pmatrix}$ e da relação (4.6) temos

$$
\mathcal{E}_i(k,V(k+1)) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(k)V_j(k+1) = p_{i1}V_1(k+1)+\ldots+p_{iN}V_N(k+1).
$$

Portanto,

$$
\mathcal{E}_i(k,V(k+1))' = p_{i1}V_1(k+1)'+\ldots+p_{iN}V_N(k+1)' = \Big[\mathbb{P}_i(k)\otimes I\Big]\begin{pmatrix} V_1(k+1)' \\ \vdots \\ V_N(k+1)' \end{pmatrix}.
$$

Assim, definimos o vetor $\mathcal{T}(k)\in\mathbb{R}^{Nn}$ como segue:

$$
\mathcal{T}(k) = \begin{pmatrix} V_1(k)' \\ \vdots \\ V_N(k)' \end{pmatrix}.
$$

Logo,

$$
\mathcal{E}_i(k,V(k+1))' = \Big[\mathbb{P}_i(k)\otimes I\Big]\mathcal{T}(k+1).
$$

E, aplicando esta relação em (4.9), temos

$$\mathcal{H}_i(k, V(k+1)) = \bar{B}_i(k)'\Big[\mathbb{P}_i(k) \otimes I\Big]\mathcal{T}(k+1).$$

Com relação a $\mathcal{T}(k)$, partindo de (4.15), podemos ver que

$$\begin{aligned} V_i(k) &= \mathcal{V}_i(k, P(k+1), V(k+1)) \\ &= \mathcal{E}_i(k, V(k+1))\Big(\bar{A}_i(k) - \bar{B}_i(k)\mathcal{K}_i(k, P(k+1))\Big) + \lambda(k)L_i(k). \end{aligned}$$

Das definições do início desta seção, pode-se ver facilmente que

$$\begin{aligned} V_i(k) &= \mathcal{V}_i(k, P(k+1), V(k+1)) = \mathcal{E}_i(k, V(k+1))A_i^{cl}(k) + \lambda(k)L_i(k) \\ V_i(k) &= p_{i1}A_i^{cl}(k)V_1(k+1) + \ldots + p_{iN}A_i^{cl}(k)V_N(k+1) + \lambda(k)L_i(k) \\ V_i(k) &= \begin{pmatrix} V_1(k+1) & \ldots & V_N(k+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{i1}A_i^{cl}(k) \\ \vdots \\ p_{iN}A_i^{cl}(k) \end{pmatrix} + \lambda(k)L_i(k) \\ V_i(k) &= \begin{pmatrix} V_1(k+1) & \ldots & V_N(k+1) \end{pmatrix} \mathbb{A}_i(k) + \lambda(k)L_i(k). \end{aligned}$$

Logo,

$$V_i(k)' = \mathbb{A}_i(k)'\mathcal{T}(k+1) + \lambda(k)L_i(k)'.$$

E, da definição de $\mathcal{T}(k)$, temos que $\mathcal{T}(k) = \mathbb{A}(k)'\mathcal{T}(k+1) + \lambda(k)\mathbb{L}(k)'$, sendo que $\mathcal{T}(T) = \lambda(T)\mathbb{L}(T)'$ e estabelecendo que $\lambda(0) = 0$, obtemos de forma recursiva que

$$\mathcal{T}(t) = \sum_{j=t}^{T} \lambda(j)\Big(\prod_{\ell=j-1}^{t} \mathbb{A}(\ell)'\Big)\mathbb{L}(j)'. \tag{4.20}$$

Definindo $H_i(k) \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^{T-k}, \mathbb{R}^m)$ como segue

$$H_i(k) = \bar{B}_i(k)(\mathbb{P}_i(k) \otimes I)\left(\mathbb{L}(k+1)' \quad \ldots \quad \left(\prod_{\ell=T-1}^{k+1} \mathbb{A}(\ell)'\right)\mathbb{L}(T)'\right), \tag{4.21}$$

faremos a seguinte hipótese ao longo da seção.

Hipótese H: Para cada $i = 1, \ldots, N$, $k = 0, \ldots, T-1$

$$H_i(k) \in \mathrm{Im}(\mathcal{R}_i(k, P(k+1))). \tag{4.22}$$

Note que esta hipótese não depende de λ, uma vez que não é função de $V(k+1)$, como é o caso de $\mathcal{H}_i(k, V(k+1))$ do Teorema 1. Com isto, podemos encontrar uma solução para λ que

determinará o controle ótimo $u(k)^\lambda$ de forma independente dos resultados daquele teorema e dos operadores definidos em (4.6), (4.8), (4.14), (4.15) e (4.16).

O resultado a seguir é importante porque mostra como $H_i(k)$, que independe de λ, se relaciona com $\mathcal{H}_i(k, V(k+1))$ do teorema anterior, que, por sua vez, depende implicitamente de λ.

Proposição 5. *Se $H_i(k) \in \mathrm{Im}(\mathcal{R}_i(k, P(k+1)))$ for válida, então,*

$$\mathcal{H}_i(k, V(k+1)) \in \mathrm{Im}(\mathcal{R}_i(k, P(k+1)))$$

é satisfeita para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}^T$.

4.3.3 Resultados Auxiliares

De posse destes resultados, vamos determinar uma solução para o problema $PU\,(\nu, \xi)$ em função deste λ. Para este objetivo, definimos na sequência uma fórmula para os parâmetros d e e, apresentados na próxima proposição, como função explícita de λ. Em seguida, apresentamos uma fórmula explícita para $E(y^u(T))$ e $\sum_{t=1}^{T} \nu(t) Var(y^u(t))$ em termos do vetor λ e $a(t)$, $\widetilde{b}(i,j)$ e c quando a estratégia de controle (4.19) é aplicada ao sistema (3.1). Estes resultados serão importantes para determinar a função custo dos problemas de otimização considerados.

Por último, apresentamos a Proposição 8, na qual temos a condição suficiente para a existência de uma estratégia de controle ótimo $u \in \Pi\,(PU\,(\nu, \xi))$. Desta forma, sob a Hipótese H e dos resultados apresentados nas Proposições 5, 6, 7 e 8, apresentaremos na, próxima seção, o Teorema 2, que contém a solução $\lambda(\nu, \xi)$ que gera o controle ótimo u^λ para o problema $PU\,(\nu, \xi)$. Sempre lembrando que as demonstrações encontram-se nos respectivos apêndices.

Proposição 6. *As seguintes identidades são válidas:*

$$d = \sum_{i=1}^{T} \lambda(i) a(i),$$

$$e = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{T} \sum_{j=1}^{T} \lambda(i) \lambda(j) \widetilde{b}(i,j).$$

Apresentamos a seguir uma fórmula explícita para $E(y^u(T))$ e $\sum_{t=1}^{T} \nu(t)Var(y^u(t))$ em termos do vetor λ e $a(t)$, $\widetilde{b}(i,j)$, c quando a estratégia de controle (4.19) é aplicada ao sistema (3.1).

Proposição 7. *Se a estratégia de controle (4.19) é aplicada ao sistema (3.1), então*

$$E(y^u(t)) = a(t) + \sum_{s=1}^{T} \lambda(s)\widetilde{b}(t,s). \tag{4.23}$$

Mais ainda, sob a hipótese H,

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{T} \nu(t)Var(y^u(t)) = c - \sum_{t=1}^{T} \lambda(t)a(t) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{T}\sum_{i=1}^{T} \lambda(i)\lambda(j)\widetilde{b}(i,j) + \\ \sum_{t=1}^{T} \Big\{\lambda(t) - \nu(t)\Big(a(t) + \sum_{s=1}^{T} \lambda(s)\widetilde{b}(t,s)\Big)\Big\}\Big(a(t) + \sum_{s=1}^{T} \lambda(s)\widetilde{b}(t,s)\Big).\end{aligned} \tag{4.24}$$

Com isto, apresentamos a Proposição 8, na qual temos a condição suficiente para a existência de uma estratégia de controle ótimo $u \in \Pi\left(PU\left(\nu,\xi\right)\right)$.
Seja $\Pi\left(PU\left(\nu,\xi\right)\right)$ e $\Pi\left(A\left(\lambda,\nu\right)\right)$ denotam, respectivamente, o conjunto de soluções ótimas para os problemas $PU\left(\nu,\xi\right)$ e $A\left(\lambda,\nu\right)$. Obtemos a seguir, sob a hipótese H, uma condição suficiente para a existência de uma estratégia de controle ótimo $u \in \Pi\left(PU\left(\nu,\xi\right)\right)$. Assim, definimos o conjunto de estratégias de controle $\mathcal{U}^*$ como segue. Dizemos que $u^\lambda \in \mathbb{U}^*$ se puder ser escrita como

$$u^\lambda(k) = -\mathcal{R}_{\theta(k)}(k, P(k+1))^\dagger\Big(\mathcal{G}_{\theta(k)}(k, P(k+1))x(k) - \frac{1}{2}\mathcal{H}_{\theta(k)}(k, V(k+1))\Big), \tag{4.25}$$

para algum vetor $\lambda' = (\lambda(1), \ldots, \lambda(T))$. Sob a hipótese H e a Proposição 5, temos do Teorema 1 que $u^\lambda \in \Pi\left(A\left(\lambda,\nu\right)\right)$. Definimos para qualquer $u \in \mathbb{U}$ o custo $\mathcal{C}(u)$ como

$$\mathcal{C}(u) = \sum_{t=1}^{T} \Big(\nu(t)Var(y^u(t)) - \xi(t)E(y^u(t))\Big). \tag{4.26}$$

Proposição 8. *Suponha que a hipótese H seja válida. Para qualquer $u \in \mathbb{U}$, tomando $\lambda(t) = \xi(t) + 2\nu(t)E(y^u(t))$, $\lambda' = (\lambda(1), \ldots, \lambda(T))$, temos que $u^\lambda \in \mathbb{U}^*$ satisfaz*

$$\mathcal{C}(u^\lambda) \leq \mathcal{C}(u). \tag{4.27}$$

Ainda mais que $u^\lambda \in \mathbb{U}^*$ é tal que $\mathcal{C}(u^\lambda) = \min_{u^\varsigma \in \mathbb{U}^*} \mathcal{C}(u^\varsigma)$ então $u^\lambda \in \Pi\left(PU\left(\nu,\xi\right)\right)$.

Em outras palavras, o problema $PU\,(\nu,\xi)$, definido em (3.3), busca uma estratégia $u^\lambda \in \mathbb{U}^*$ que minimiza seu custo, como explicitado em 4.26. Como, sob a hipótese H e a Proposição 5 anteriores, conseguimos dissociar λ de $\mathcal{H}_i(k, V(k+1))$ do Teorema 1, podemos determinar uma estratégia que seja solução para o problema $PU\,(\nu,\xi)$ ou, em outras palavras, determinar um $u^\lambda \in \Pi\,(PU\,(\nu,\xi))$ e simultaneamente satisfazer as condições do Teorema 1 para o problema auxiliar $A\,(\lambda,\nu)$. A proposição 8 acima mostra que com $\lambda(t) = \xi(t) + 2\nu(t)E(y^u(t))$ temos o menor custo possível para o problema $PU\,(\nu,\xi)$.

4.3.4 Solução para o Problema $PU\,(\nu,\xi)$

O próximo teorema fornece condições necessárias e suficientes para a existência de uma estratégia de controle ótimo para o problema $PU\,(\nu,\xi)$ sob a hipótese H, sendo este o primeiro resultado principal.

Para isso introduzimos

$$\widetilde{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} \widetilde{b}(1,1) & \dots & \widetilde{b}(1,T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{b}(T,1) & \dots & \widetilde{b}(T,T) \end{pmatrix}, \ \Gamma = \begin{pmatrix} \nu(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \nu(T) \end{pmatrix}. \tag{4.28}$$

Note que $\widetilde{\mathbb{B}} = \widetilde{\mathbb{B}}'$, pois $\widetilde{b}(i,j) = \widetilde{b}(j,i)$ e, portanto, $\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}} = (\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}})'$. Antes ainda considere o resultado auxiliar na proposição a seguir

Proposição 9. *Se a Hipótese H é válida então* $\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}} \geq 0$.

Assim, o primeiro resultado central é dado pelo Teorema 2 a seguir.

Teorema 2. *Suponha que a hipótese H seja válida. Se* $\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}} > 0$*, então uma estratégia de controle ótimo* u^λ *para o problema* $PU\,(\nu,\xi)$ *é dada por (4.25) com*

$$\lambda = (I - 2\Gamma\widetilde{\mathbb{B}})^{-1}(\xi + 2\Gamma a), \tag{4.29}$$

e neste caso

$$\mathcal{C}(u^\lambda) = c - (\Gamma a + \xi)'a - \frac{1}{2}(\xi + 2\Gamma a)'(\widetilde{\mathbb{B}}^{-1} - 2\Gamma)^{-1}(\xi + 2\Gamma a). \tag{4.30}$$

Por outro lado, se existe uma estratégia de controle ótimo $u \in \mathbb{U}$ *para o problema* $PU\,(\nu,\xi)$*, então* $\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}} \geq 0$ *e* u^λ *como em (4.25) é uma estratégia de controle ótimo para o problema* $PU\,(\nu,\xi)$ *em que* λ *satisfaz*

$$(\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}})\lambda = \widetilde{\mathbb{B}}(\xi + 2\Gamma a). \tag{4.31}$$

4.3.5 Solução para o Problema $PC\left(\nu,\epsilon\right)$

Consideramos agora o problema $PC\left(\nu,\epsilon\right)$. Caso tenhamos um $u^* \in \Pi\left(PU\left(\nu,\xi\right)\right)$ que respeite $E(y^{u^*}(t)) = \epsilon(t)$ para $t = 1,\ldots,T$, então este u^* será a solução ótima para o problema $PC\left(\nu,\epsilon\right)$. Este fato é apresentado na Proposição 10 a seguir e a respectiva condição suficiente e a derivação explícita da solução são apresentadas no Teorema 3 na sequência.

Proposição 10. *Suponha que $u^* \in \Pi\left(PU\left(\nu,\xi\right)\right)$ é tal que $E(y^{u^*}(t)) = \epsilon(t)$ para $t = 1,\ldots,T$. Então u^* é uma solução ótima para o problema $PC\left(\nu,\epsilon\right)$.*

Temos a seguinte condição suficiente e uma derivação explícita para o problema $PC\left(\nu,\epsilon\right)$, que corresponde ao segundo resultado principal.

Teorema 3. *Suponha que a hipótese H seja válida e que $\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}} > 0$. Seja*

$$\xi = (\widetilde{\mathbb{B}}^{-1} - 2\Gamma)\epsilon - \widetilde{\mathbb{B}}^{-1}a. \tag{4.32}$$

Se $\xi \geq 0$ então a estratégia de controle ótimo u^λ para o problema $PC\left(\nu,\epsilon\right)$ é dada como em (4.25) com λ como em (4.29) e ξ como em (4.32).

Sob a hipótese H e considerando estratégias de controle como em (4.25), podemos formular uma versão geral para o problema $PC\left(\nu,\epsilon\right)$. De fato, para uma estratégia de controle $u^\lambda \in \mathbb{U}^*$ e definindo que $(y_T^{u^\lambda})' = \begin{pmatrix} y^{u^\lambda}(1) & \cdots & y^{u^\lambda}(T) \end{pmatrix}$, uma primeira versão para o problema $PC\left(\nu,\epsilon\right)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} PC\left(\nu,\epsilon\right) : \min\nolimits_{u^\lambda \in \mathbb{U}^*} & \sum_{t=1}^{T} \nu(t) Var(y^{u^\lambda}(t)) \\ \text{sujeito a } : & A_{eq} E(y_T^{u^\lambda}) = b_{eq}, \\ & A_{inq} E(y_T^{u^\lambda}) \geq b_{inq}, \;\; t = 1,\ldots,T, \end{aligned} \tag{4.33}$$

em que A_{eq}, A_{inq}, b_{eq}, b_{inq} são as novas matrizes e vetores indicando que as restrições necessárias para o problema $PC\left(\nu,\epsilon\right)$ são $A_{eq} = 0$, $A_{inq} = I$, $b_{eq} = 0$, $b_{inq} = \epsilon(t)$. Assim, pode-se ver que este problema reflete exatamente a formulação apresentada em (3.4), em que a restrição é dada por $E\left(y^u\left(t\right)\right) \geq \epsilon(t)$.

Por outro lado, de (4.23) e (A.33), este novo problema pode ser reescrito como um problema de programação quadrática da seguinte forma:

$$\begin{aligned} PC\,(\nu,\epsilon) : & \min_{\lambda\in\mathbb{R}^T} \frac{1}{2}\lambda'\big(\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}}\big)\lambda - 2a'\Gamma\widetilde{\mathbb{B}}\lambda \\ \text{sujeito a } : & A_{eq}\widetilde{\mathbb{B}}\lambda = b_{eq} - A_{eq}a, \\ & A_{inq}\widetilde{\mathbb{B}}\lambda \geq b_{inq} - A_{inq}a, \;\; t = 1,\ldots,T, \end{aligned} \tag{4.34}$$

em que as matrizes e vetores A_{eq}, A_{inq}, b_{eq}, b_{inq} assumem as formas: $A_{eq} = 0$, $A_{inq} = I$, $b_{eq} = 0$, $b_{inq} = \epsilon$.

A vantagem da formulação contida em (4.34) em relação à (4.33) é que, em função dos resultados desenvolvidos nas seções anteriores, podemos simplificar o problema de otimização. Este fato ocorre porque, ao se determinar a estratégia de controle ótimo $u^\lambda \in \mathbb{U}^*$ em função de um $\lambda \in \mathbb{R}^T$, trocamos um problema de otimização baseado no somatório das variâncias da saída $y^{u^\lambda}(t)$, com restrições sobre seu valor esperado em cada passo de tempo, por outro problema em formulação matricial cuja solução λ determina a estratégia de controle ótimo u^λ.

De forma análoga ao caso do Teorema 2, no qual concluímos que a existência de uma estratégia de controle ótimo u^λ ocorre por conta de $\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}} > 0$, para o problema de otimização em (4.34) o custo é também uma função convexa em $\lambda \in \mathbb{R}^T$. Pois, a partir de seu custo, temos que

$$\nabla\mathcal{C}(u^\lambda) = (\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}})\lambda - 2a'\Gamma\widetilde{\mathbb{B}}, \;\; \nabla^2\mathcal{C}(u^\lambda) = \widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}} > 0.$$

Como no caso do Teorema (2), notamos que $\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}} > 0$ implica $\det(\widetilde{\mathbb{B}}) \neq 0$ e $\det(I - 2\Gamma\widetilde{\mathbb{B}}) \neq 0$. No que segue que as soluções ótimas de (4.34) são globais.

No entanto, um ponto importante a ser ressaltado para o problema em (4.34) refere-se ao fato de que a relação para ξ no Teorema 3 é válida somente quando $E\,(y^u\,(t)) = \epsilon(t)$, de onde decorre que $b_{inq} = \epsilon - a$. Contudo, para que este resultado do Teorema 3 não seja violado, é preciso que $\xi(t) \geq 0$, em decorrência do exposto na Proposição 10. Portanto, uma condição adicional deve ser incorporada ao problema (4.34) a partir de (4.29). Assim, impondo-se que $\xi(t) \geq 0$ em (4.29) chegamos a $(I - 2\Gamma\widetilde{\mathbb{B}})\lambda \geq 2\Gamma a$.

Desta forma, a formulação para as matrizes e os vetores anteriores passam a ser $A_{eq} = 0$, $A_{inq} = [\widetilde{\mathbb{B}}, I - \; 2\Gamma\widetilde{\mathbb{B}}]'$, $b_{eq} = 0$, $b_{inq} = [\epsilon - a, 2\Gamma a]'$, estabelecendo a formulação geral para o problema $PC\,(\nu,\epsilon)$ sob a forma de um problema de Programação Quadrática.

4.4 Comentários Finais

Consideramos o problema de controle ótimo por média-variância para sistemas lineares a tempo discreto com saltos markovianos e ruídos multiplicativos. O critério de desempenho considerado foi o de minimizar ao longo do tempo uma combinação entre a média e a variância da saída do sistema e minimizar a variância da saída do sistema ao longo do tempo com restrições sobre o valor esperado mínimo. Condições necessárias e suficientes explícitas para a existência de um controle ótimo foram determinadas generalizando resultados anteriores existentes na literatura. O controle ótimo é escrito como uma realimentação de estado adicionado de um termo constante (equação (4.19)). Esta solução é obtida através de um conjunto de equações generalizadas a diferenças de Riccati (4.14) interconectadas com um conjunto de equações lineares recursivas (4.15).

Capítulo 5

Modelos de Otimização de Portfólios de Investimentos

O problema de otimização multiperíodo apresentado nos capítulos anteriores é passível de ser aplicado para vários propósitos, como já comentamos no capítulo 2. No entanto, sua aplicação na otimização de portfólio de investimentos é de grande interesse. De fato, o problema de seleção de portfólio é um tema que desde o trabalho orignal de Markowitz vem sendo estudado.

Em sua formulação original, vimos que este problema foi resolvido através de Programação Quadrática para um único período à frente. Portanto, o investidor necessita tomar decisões da alocação de recursos, atendendo às suas exigências de risco e retorno, incorporando todas informações disponíveis bem como suas expectativas acerca da rentabilidade futura dos ativos considerados no momento inicial. Por alocação entende-se o valor comprado ou vendido de cada ativo componente do portfólio de investimentos, seja em termos absolutos ou em termos relativos ao valor do patrimônio corrente.

Por outro lado, investimentos com horizonte de tempo mais longos requerem que esta otimização seja realizada de forma dinâmica no tempo para permitir que o investidor incorpore novas informações e expectativas a fim de continuar perseguindo seu objetivo de retorno para um dado risco. Em outras palavras, é necessário ter a flexibilidade de permitir que o investidor revise sua alocação e faça o rebalanceamento do portfólio em função das circunstâncias em que se encontra em dado momento. Pudemos ver no capítulo 2 que alguns trabalhos consideram esta questão de alguma forma.

Neste trabalho, porém, generalizamos as abordagens anteriores para o caso multidimensional, por admitir a consideração da otimização não apenas da ponta ativa como também da passiva, e com restrições em todos os instantes de tempo. Além disto, consideramos uma dinâmica evolutiva para as variáveis de estado e controle sujeitas a incertezas por conta de sua associação com ruídos multiplicativos e condicionadas ao modo de operação ou estado em que o mercado se encontra.

De modo a apresentar a aplicação do modelo a situações práticas de relevância para qualquer investidor, desenvolvemos nas seções seguintes as formulações para os problemas de otimização de portfólios de investimentos sob a ótica do modelo apresentado anteriormente. A princípio, desenvolvemos a formulação para um problema de otimização para um portfólio apenas com ativos de risco. Além de ser o problema mais largamente apresentado na literatura, tem aplicação em portfólios que possuem objetivo de retornos absolutos. No segundo caso, formulamos o problema para um portfólio com ativos de risco e um *benchmark* contra o qual se deseja medir desempenho do portfólio.

Tipicamente, fundos de investimentos que possuem alguma restrição ou objetivo de rastrear seu retorno em relação a um índice constitui um exemplo prático deste problema. Na terceira seção veremos o caso de quando, adicionalmente ao caso anterior, consideramos um ativo livre de risco dentro da carteira. Por último, apresentamos uma formulação para um caso de ALM em que, além de um *benchmark*, podemos ter fluxos de entradas e saídas de recursos. Um exemplo de aplicação clássica deste exemplo é para Fundo de Pensão que possuem objetivos de investimentos de longo prazo frente a um indicador de referência, mas devem gerar riqueza ao longo do tempo de forma a honrar o passivo atuarial.

5.1 Modelo de Otimização para um Portfólio com Ativos de Risco

Nesta primeira formulação, consideramos um modelo em que queremos otimizar o valor de um portfólio frente ao seu risco sem considerarmos nenhuma referência externa como um índice de mercado. Portanto, buscamos otimizar os retornos absolutos decidindo em cada passo de tempo a melhor alocação de recursos entre seus ativos.

Consideramos um modelo com $m+1$ ativos de risco representados pelo vetor aleatório de preços $\bar{S}(t) \in \mathbb{R}^{m+1}$. Consequentemente, seus retornos são representados por $\bar{R}(t) \in \mathbb{R}^{m+1}$. Portanto, podemos escrever que

$$\bar{S}(t) = \Big(S_1(t), \ldots, S_{m+1}(t)\Big)', \tag{5.1}$$

$$\bar{R}(t) = \Big(R_1(t), \ldots, R_{m+1}(t)\Big)', \tag{5.2}$$

em que

$$R_i(t) = \frac{S_i(t+1)}{S_i(t)}. \tag{5.3}$$

Como anteriormente, $\{\theta\,(t)\,; t = 0, \ldots, T\}$ é uma cadeia de Markov com um número finito de estados discretos no tempo assumindo valores em $\{1, \ldots, N\}$. Este parâmetro $\theta\,(t)$ representará um estado de mercado para cada instante de tempo t definindo como os preços dos ativos evoluem até o final do horizonte de investimentos T.

Os vetores $\{w(t)' = (w_1(t), \ldots, w_{m+1}(t));\ t = 0, \ldots, T\}$ formam uma sequência de vetores aleatórios independentes de dimensão $(m+1)$ com média nula e matriz de covariâncias igual a matriz identidade e independentes dos estados de mercado.

Definimos os retornos dos ativos entre os passos t e $t+1$ da seguinte forma:

$$\bar{R}_{\theta(t)}(t) = [\bar{e} + \bar{\mu}_{\theta(t)}(t)] + \bar{\sigma}_{\theta(t)}(t)w(t), \tag{5.4}$$

em que $\bar{e} = [1, e]'$, sendo $e \in \mathbb{R}^m$ um vetor unitário. O vetor $\bar{\mu}_{\theta(t)}\,(t) \in \mathbb{R}^{m+1}$ contém os retornos esperados para cada ativo e $\bar{\sigma}_{\theta(t)}(t) \in \mathbb{R}^{m+1,m+1}$ é a matriz de correlações dos retornos dos ativos, ambos condicionados ao estado de mercado do instante t.

Por conveniência, decompomos $\bar{\mu}_{\theta(t)}\,(t)$ da seguinte forma:

$$\bar{\mu}_{\theta(t)}\,(t) = \begin{pmatrix} \mu_{\theta(t),1}(t) \\ \hat{\mu}_{\theta(t)}(t) \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

em que

$$\hat{\mu}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} \mu_{\theta(t),2}(t) \\ \vdots \\ \mu_{\theta(t),m+1}(t) \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

De forma análoga, podemos escrever $\bar{\sigma}_{\theta(t)}(t)$ da seguinte maneira

$$\bar{\sigma}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{\theta(t),1}(t) \\ \hat{\sigma}_{\theta(t)}(t) \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

em que

$$\sigma_{\theta(t),1}(t) = \Big(\sigma_{\theta(t),1,1}(t), \ldots, \sigma_{\theta(t),1,m+1}(t)\Big) \tag{5.8}$$

e

$$\hat{\sigma}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{\theta(t),2,1}(t) & \ldots & \sigma_{\theta(t),2,m+1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\theta(t),m+1,1}(t) & \ldots & \sigma_{\theta(t),m+1,m+1}(t) \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Como consequência desta decomposição, é fácil notar que o vetor de retornos dos ativos $\bar{R}_{\theta(t)}(t)$ pode ser escrito como

$$\bar{R}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} R_{\theta(t),1}(t) \\ \hat{R}_{\theta(t)}(t) \end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

em que

$$\hat{R}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} R_{\theta(t),2}(t) \\ \vdots \\ R_{\theta(t),m+1}(t) \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Com estas decomposições, temos o processo de retornos sobre os ativos convenientemente estruturado facilitando a determinação da dinâmica de evolução do valor do portfólio em cada passo de tempo e estado de mercado. Antes ainda, devemos definir a quantidade de riqueza alocada em cada um dos ativos a cada instante de tempo, condicionada ao estado de mercado em que o portfólio se encontra.

Assim, considere $U_i(t)$ como sendo a quantidade de riqueza alocada no i-ésimo ativo, nas condições acima, em que $i = 1, \ldots, m+1$. Definimos o vetor $U(t)$ como sendo

$$U(t) = \Big(U_1(t), \ldots, U_{m+1}(t)\Big)'. \tag{5.12}$$

Decompondo este vetor de forma análoga aos anteriores, temos

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ \hat{U}(t) \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

com

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} U_2(t) \\ \vdots \\ U_{m+1}(t) \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

Como decorrência, representamos por $X^U(t)$ o valor da carteira associada à estratégia de investimento U. Para simplificar a notação, omitiremos o índice U sempre que não prejudique o entendimento. Também considere que e representa um vetor unitário m-dimensional. Assim, temos que

$$X(t) = U_1(t) + \hat{U}(t)'e'. \tag{5.15}$$

Portanto, a riqueza alocada no ativo de referência será[1]

$$U_1(t) = X(t) - \hat{U}(t)'e'. \tag{5.16}$$

Considerando-se que o portfólio é autofinanciado, ou seja, em cada instante de tempo não há fluxos líquidos sendo aportados, o processo de riqueza é dado por

$$X(t+1) = R_{\theta(t),1}(t)U_1(t) + \hat{R}_{\theta(t)}(t)'\hat{U}(t). \tag{5.17}$$

Substituindo (5.16) em (5.17), temos

$$X(t+1) = R_{\theta(t),1}(t)X(t) + \hat{P}_{\theta(t)}(t)'\hat{U}(t), \tag{5.18}$$

em que

$$\hat{P}_{\theta(t)}(t) = \hat{R}_{\theta(t)}(t) - R_{\theta(t),1}(t)e'. \tag{5.19}$$

Considerando $\mathcal{F}_\tau$ o σ-campo gerado pelas variáveis aleatórias $\{(\theta(k), x(k)); k = 0, \ldots, \tau\}$, para cada k queremos encontrar a variável de controle $\hat{U}(k)$, $\mathcal{F}_k$-mensurável, de forma a

[1]Note que, por conveniência e sem perda de generalização, adotaremos sempre o primeiro ativo como sendo de referência, porém qualquer outro dos $m+1$ ativos poderiam assumir este papel. Mais adiante veremos a implicação da escolha deste ativo para a definição dos parâmetros do modelo.

minimizar um compromisso entre o valor esperado do portfólio e o respectivo risco associado, ou minimizar o risco sobre o valor do portfólio ao longo do tempo considerando que esteja restrito a determinada rentabilidade mínima. Em outras palavras, podemos aplicar o problema $PU\,(\nu, \xi)$ ou $PC\,(\nu, \epsilon)$.

Para colocar o problema na formulação apresentada para o modelo desenvolvido nos capítulos anteriores, considere que $x(t) = X(t)$ e $u(t) = \hat{U}(t)$ e de (5.18) temos

$$x(t+1) = R_{\theta(t),1}(t)x(t) + \hat{P}_{\theta(t)}(t)'u(t). \tag{5.20}$$

Considerando-se as relações (5.4) e (5.19), vemos que

$$R_{\theta(t),1}(t) = [(1 + \mu_{\theta(t),1}(t)) + \sigma_{\theta(t),1}(t)w(t)]x(t) + (\hat{R}_{\theta(t)}(t)' - R_{\theta(t),1}(t)e)'u(t). \tag{5.21}$$

Por outro lado, a relação (5.19) pode ser escrita como

$$\hat{P}_{\theta(t)}(t) = (\hat{\mu}_{\theta(t)}(t) - \mu_{\theta(t),1}(t)e') + (\hat{\sigma}_{\theta(t)}(t) - \sigma_{\theta(t),1}(t)w(t)e'). \tag{5.22}$$

Definindo-se que D^s são os elementos na s-ésima coluna de uma matriz D, pode-se mostrar que

$$\hat{P}_{\theta(t)}(t) = (\hat{\mu}_{\theta(t)}(t) - \mu_{\theta(t),1}(t)e') + \sum_{s=1}^{m+1}(\hat{\sigma}^s_{\theta(t)}(t) - \sigma^s_{\theta(t),1}(t)e')w^s(t). \tag{5.23}$$

No que decorre que

$$\begin{aligned} x(t+1) =& [(1 + \mu_{\theta(t),1}(t)) + \sum_{s=1}^{m+1} \sigma^s_{\theta(t),1}(t)w^s(t)]x(t) \\ &+ [(\hat{\mu}_{\theta(t)}(t) - \mu_{\theta(t),1}(t)e')' + \sum_{s=1}^{m+1}(\hat{\sigma}^s_{\theta(t)}(t) - \sigma^s_{\theta(t),1}(t)e')'w^s(t)]u(t). \end{aligned} \tag{5.24}$$

Então, para $s = 1, \ldots, m+1$, definimos que

$$\bar{A}_{\theta(t)}\,(t) = 1 + \mu_{\theta(t),1}(t),$$

$$\widetilde{A}_{\theta(t),s}(t) = \sigma^s_{\theta(t),1}(t),$$

$$\bar{B}_{\theta(t)}(t) = (\hat{\mu}_{\theta(t)}(t) - \mu_{\theta(t),1}(t)e')',$$

$$\widetilde{B}_{\theta(t),s}(t) = (\hat{\sigma}^s_{\theta(t)}(t) - \sigma^s_{\theta(t),1}(t)e')'.$$

Desta maneira, o problema pode ser escrito na forma de (3.1) e (3.2), ou seja,

$$\begin{aligned} x(t+1) =& \Big(\bar{A}_{\theta(t)}(t) + \sum_{s=1}^{m+1} \widetilde{A}_{\theta(t),s}(t) w^s(t)\Big) x(t) + \Big(\bar{B}_{\theta(t)}(t) + \sum_{s=1}^{m+1} \widetilde{B}_{\theta(t),s}(t) w^s(t)\Big) u(t), \\ & x(0) = \ x_0, \ \theta(0) = \theta_0, \\ & y(t) = L_{\theta(t)}(t) x(t), \\ & L_{\theta(t)}(t) = 1. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Assim, conseguimos aplicar as estratégias de otimização desenvolvidas nos capítulos anteriores. Note que, por termos adotado o primeiro ativo como sendo de referência, as matrizes $\bar{A}_{\theta(t)}(t)$, $\widetilde{A}_{\theta(t),s}(t)$, $\bar{B}_{\theta(t)}(t)$ e $\widetilde{B}_{\theta(t),s}(t)$ dependem explicitamente de seus parâmetros de retorno e risco. De forma geral, podemos ver que as matrizes $\bar{A}_{\theta(t)}(t)$ e $\widetilde{A}_{\theta(t),s}(t)$ consideram um processo difusivo para o ativo de referência correlacionado-o com os demais ativos. Para o caso das matrizes $\bar{B}_{\theta(t)}(t)$ e $\widetilde{B}_{\theta(t),s}(t)$, temos um processo para o excesso de retorno e risco para os demais ativos em relação ao ativo de referência.

Por último, vemos que o parâmetro $L_{\theta(t)}(t)$ é um escalar. Consequentemente, a saída $y(t)$ a ser otimizada reflete apenas o valor de um portfólio de ativos através dos quais as decisões de alocação ao longo do tempo, contidas nos vetores $u(t)$, serão executadas. Como veremos nos modelos subsequentes, este parâmetro $L_{\theta(t)}(t)$ passará a ser um vetor no lugar de um escalar.

5.2 Modelo de Otimização para um Portfólio com Ativos de Risco e um *Benchmark*

Nesta segunda formulação, consideramos um modelo em que queremos otimizar o valor de um portfólio frente ao seu risco em relação a uma referência externa como um índice de mercado. Assim, otimizamos os retornos relativos decidindo em cada passo de tempo a melhor alocação de recursos dos ativos componentes do portfólio em relação à evolução do respectivo *benchmark*.

Consideramos um modelo com $m+1$ ativos de risco, sendo o último o *benchmark*, e representados pelo vetor aleatório de preços $\bar{S}(t) \in \mathbb{R}^m$. Consequentemente, seus retornos são representados por $\bar{R}(t) \in \mathbb{R}^m$. Por outro lado, o *benchmark* será representado por $\bar{B}(t) \in \mathbb{R}$. Portanto, podemos escrever que

$$\bar{S}(t) = \Big(S_1(t), \ldots, S_m(t)\Big)', \tag{5.26}$$

$$\bar{R}(t) = \Big(R_1(t), \ldots, R_m(t)\Big)', \tag{5.27}$$

em que

$$R_i(t) = \frac{S_i(t+1)}{S_i(t)}, i = 1, \ldots, m \tag{5.28}$$

e para o *benchmark*, temos

$$R_{m+1}(t) = \frac{B(t+1)}{B(t)}. \tag{5.29}$$

Como anteriormente, $\{\theta\,(t)\,; t = 0, \ldots, T\}$ é uma cadeia de Markov com um número finito de estados discretos no tempo assumindo valores em $\{1, \ldots, N\}$. Este parâmetro $\theta\,(t)$ representará um estado de mercado para cada instante de tempo t definindo como os preços dos ativos evoluem até o final do horizonte de investimentos T.

Os vetores $\{w(t)' = (w_1(t), \ldots, w_{m+1}(t));\ t = 0, \ldots, T\}$ formam uma sequência de vetores aleatórios independentes de dimensão $(m+1)$ com média nula e matriz de covariâncias igual a matriz identidade e independentes dos estados de mercado.

Definimos os retornos dos ativos entre os passos t e $t+1$ da seguinte forma

$$\bar{R}_{\theta(t)}(t) = [\bar{e} + \bar{\mu}_{\theta(t)}(t)] + \bar{\sigma}_{\theta(t)}(t)w(t), \tag{5.30}$$

em que $\bar{e} = [1, e, 1]'$, sendo $e \in \mathbb{R}^m$ um vetor unitário. O vetor $\bar{\mu}_{\theta(t)}(t) \in \mathbb{R}^{m+1}$ contém os retornos esperados para cada ativo e $\bar{\sigma}_{\theta(t)}(t) \in \mathbb{R}^{m+1,m+1}$ é a matriz de correlações dos retornos dos ativos, ambos condicionados ao estado de mercado do instante t.

Por conveniência, decompomos $\bar{\mu}_{\theta(t)}(t)$ da seguinte forma

$$\bar{\mu}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} \mu_{\theta(t),1}(t) \\ \hat{\mu}_{\theta(t)}(t) \\ \mu_{\theta(t),m+1}(t) \end{pmatrix}, \tag{5.31}$$

em que

$$\hat{\mu}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} \mu_{\theta(t),2}(t) \\ \vdots \\ \mu_{\theta(t),m}(t) \end{pmatrix}. \tag{5.32}$$

De forma análoga, podemos escrever $\bar{\sigma}_{\theta(t)}(t)$ da seguinte maneira

$$\bar{\sigma}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{\theta(t),1}(t) \\ \hat{\sigma}_{\theta(t)}(t) \\ \sigma_{\theta(t),m+1}(t) \end{pmatrix}, \tag{5.33}$$

em que

$$\sigma_{\theta(t),1}(t) = \Big(\sigma_{\theta(t),1,1}(t), \ldots, \sigma_{\theta(t),1,m+1}(t)\Big), \tag{5.34}$$

$$\sigma_{\theta(t),m+1}(t) = \Big(\sigma_{\theta(t),m+1,1}(t), \ldots, \sigma_{\theta(t),m+1,m+1}(t)\Big) \tag{5.35}$$

e

$$\hat{\sigma}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{\theta(t),2,1}(t) & \ldots & \sigma_{\theta(t),2,m+1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\theta(t),m,1}(t) & \ldots & \sigma_{\theta(t),m,m+1}(t) \end{pmatrix}. \tag{5.36}$$

Como consequência desta decomposição, é fácil notar que o vetor de retornos dos ativos $\bar{R}_{\theta(t)}(t)$ pode ser escrito como

$$\bar{R}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} R_{\theta(t),1}(t) \\ \hat{R}_{\theta(t)}(t) \\ R_{\theta(t),m+1}(t) \end{pmatrix}, \tag{5.37}$$

em que

$$\hat{R}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} R_{\theta(t),2}(t) \\ \vdots \\ R_{\theta(t),m}(t) \end{pmatrix}. \tag{5.38}$$

Como no caso anterior, temos o processo de retornos sobre os ativos convenientemente estruturado facilitando a determinação da dinâmica de evolução para o valor do portfólio em cada passo de tempo e estado de mercado. Antes ainda, devemos definir a quantidade de riqueza alocada em cada um dos ativos a cada instante de tempo, condicionada ao estado de mercado em que o portfólio se encontra.

Assim, considere $U_i(t)$ como sendo a quantidade de riqueza alocada no i-ésimo ativo, nas condições acima, em que $i = 1, \ldots, m$. Definimos o vetor $U(t)$ como sendo

$$U(t) = \Big(U_1(t), \ldots, U_m(t)\Big)'. \tag{5.39}$$

Decompondo este vetor de forma análoga aos anteriores, temos

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ \hat{U}(t) \end{pmatrix} \tag{5.40}$$

com

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} U_2(t) \\ \vdots \\ U_m(t) \end{pmatrix}. \tag{5.41}$$

Como decorrência, representamos por $X^U(t)$ o valor da carteira associada à estratégia de investimento U. Para simplificar a notação, omitiremos o índice U sempre que não prejudique o entendimento. Também considere que e representa um vetor unitário m-1-dimensional.

De forma análoga ao caso anterior, temos que

$$X(t) = U_1(t) + \hat{U}(t)'e'. \tag{5.42}$$

Portanto, a riqueza alocada no ativo de referência será

$$U_1(t) = X(t) - \hat{U}(t)'e'. \tag{5.43}$$

Considerando-se que o portfólio é autofinanciado, ou seja em cada instante de tempo não há fluxos líquidos sendo aportados, o processo de riqueza é dado por

$$X(t+1) = R_{\theta(t),1}(t)U_1(t) + \hat{R}_{\theta(t)}(t)'\hat{U}(t). \tag{5.44}$$

Substituindo (5.43) em (5.44), temos

$$X(t+1) = R_{\theta(t),1}(t)X(t) + \hat{P}_{\theta(t)}(t)'\hat{U}(t), \tag{5.45}$$

em que

$$\hat{P}_{\theta(t)}(t) = \hat{R}_{\theta(t)}(t) - R_{\theta(t),1}(t)e'. \tag{5.46}$$

Considerando $\mathcal{F}_\tau$ o σ-campo gerado pelas variáveis aleatórias $\{(\theta(k), x(k)); k = 0, \ldots, \tau\}$, para cada k queremos encontrar a variável de controle $\hat{U}(k)$, $\mathcal{F}_k$-mensurável, de forma a aplicar o problema $PU\,(\nu, \xi)$ ou $PC\,(\nu, \epsilon)$, como no caso anterior.

Pode-se demonstrar a partir de (5.45) e (5.46) que, da mesma forma do modelo anterior, a variável de estado $X(t)$ será

$$\begin{aligned} X(t+1) =& [(1 + \mu_{\theta(t),1}(t)) + \sum_{s=1}^{m+1} \sigma^s_{\theta(t),1}(t)w^s(t)]X(t) \\ &+ [(\hat{\mu}_{\theta(t)}(t) - \mu_{\theta(t),1}(t)e')' + \sum_{s=1}^{m+1} (\hat{\sigma}^s_{\theta(t)}(t) - \sigma^s_{\theta(t),1}(t)e')'w^s(t)]\hat{U}(t). \end{aligned} \tag{5.47}$$

Adicionalmente, o processo de evolução do *benchmark* pode ser conseguido a partir de (5.29) e (5.30) para obtermos

$$B(t+1) = [(1 + \mu_{\theta(t),m+1}(t)) + \sum_{s=1}^{m+1} \sigma^s_{\theta(t),m+1}(t)w^s(t)]B(t). \tag{5.48}$$

Para colocar o problema na formulação apresentada para o modelo desenvolvido nos capítulos anteriores, considere que

$$x(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ B(t) \end{pmatrix}, \tag{5.49}$$

$$u(t) = \hat{U}(t). \tag{5.50}$$

Juntando-se (5.47), (5.48), (5.49) e (5.50), temos

$$\begin{pmatrix} X(t+1) \\ B(t+1) \end{pmatrix} = \Big[\begin{pmatrix} (1+\mu_{\theta(t),1}(t)) & 0 \\ 0 & (1+\mu_{\theta(t),m+1}(t)) \end{pmatrix} \tag{5.51}$$

$$+ \sum_{s=1}^{m+1} \begin{pmatrix} \sigma^s_{\theta(t),1}(t) & 0 \\ 0 & \sigma^s_{\theta(t),m+1}(t) \end{pmatrix} w^s(t) \Big] \begin{pmatrix} X(t) \\ B(t) \end{pmatrix}$$

$$+ \Big[\begin{pmatrix} (\hat{\mu}_{\theta(t)}(t) - \mu_{\theta(t),1}(t)e')' \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{s=1}^{m+1} \begin{pmatrix} (\hat{\sigma}^s_{\theta(t)}(t) - \sigma^s_{\theta(t),1}(t)e')' \\ 0 \end{pmatrix} w^s(t) \Big] \hat{U}(t). \tag{5.52}$$

Então, para $s = 1, \ldots, m+1$, definimos que

$$\bar{A}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} (1+\mu_{\theta(t),1}(t)) & 0 \\ 0 & (1+\mu_{\theta(t),m+1}(t)) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A}_{\theta(t),s}(t) = \begin{pmatrix} \sigma^s_{\theta(t),1}(t) & 0 \\ 0 & \sigma^s_{\theta(t),m+1}(t) \end{pmatrix},$$

$$\bar{B}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} (\hat{\mu}_{\theta(t)}(t) - \mu_{\theta(t),1}(t)e')' \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{B}_{\theta(t),s}(t) = \begin{pmatrix} (\hat{\sigma}^s_{\theta(t)}(t) - \sigma^s_{\theta(t),1}(t)e')' \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, o problema pode ser escrito na forma de (3.1) e (3.2), ou seja,

$$\begin{aligned} x(t+1) =& \Big(\bar{A}_{\theta(t)}(t) + \sum_{s=1}^{m+1} \widetilde{A}_{\theta(t),s}(t) w^s(t)\Big) x(t) + \Big(\bar{B}_{\theta(t)}(t) + \sum_{s=1}^{m+1} \widetilde{B}_{\theta(t),s}(t) w^s(t)\Big) u(t), \\ & x(0) = x_0, \ \theta(0) = \theta_0, \\ & y(t) = L_{\theta(t)}(t) x(t), \\ & L_{\theta(t)}(t) = [1 \ -1]. \end{aligned} \tag{5.53}$$

Assim, conseguimos aplicar as estratégias de otimização desenvolvidas nos capítulos anteriores. Note que, por termos adotado o primeiro ativo como sendo de referência, as matrizes $\bar{A}_{\theta(t)}(t)$, $\widetilde{A}_{\theta(t),s}(t)$, $\bar{B}_{\theta(t)}(t)$ e $\widetilde{B}_{\theta(t),s}(t)$ dependem explicitamente de seus parâmetros de retorno e risco. Adicionalmente ao caso anterior, vemos que neste modelo as matrizes $\bar{A}_{\theta(t)}(t)$

e $\widetilde{A}_{\theta(t),s}(t)$ possuem uma dimensão a mais para considerar a dinâmica do *benchmark*. Consequentemente, as matrizes $\bar{B}_{\theta(t)}(t)$ e $\widetilde{B}_{\theta(t),s}(t)$ possuem uma linha adicional contendo um vetor de zeros.

Por último, vemos que o parâmetro $L_{\theta(t)}(t)$ passa a ser um vetor com duas dimensões. Consequentemente, a saída $y(t)$ a ser otimizada reflete o valor de um portfólio de ativos em relação ao *benchmark*, ou seja, temos que $y(t) = X(t) - B(t)$.

Um caso particular e simples, porém muitas vezes de interesse prático, é quando consideramos o ativo de referência como sendo livre de risco. Neste caso, nenhuma das formulações expostas neste capítulo se alteram, bastando somente considerar sua correlação como sendo nula nas matrizes de correlações em relação a todos os demais ativos, ou seja, basta fazermos $\sigma_{\theta(t),1}(t) = 0$.

5.3 Modelo de ALM para Fundos de Pensão

Nesta última formulação, consideramos um modelo em que queremos otimizar o valor de um portfólio frente ao seu risco em relação a uma referência externa como um índice de mercado ou meta atuarial e considerando um processo estocástico para as aplicações e resgates líquidos de recursos. Assim, otimizamos os retornos em relação à meta atuarial decidindo em cada passo de tempo a melhor alocação de recursos dos ativos componentes do portfólio, considerando-se a dinâmica do fluxo de entradas e saídas de recursos.

Consideramos um modelo em que temos um ativo de referência, eventualmente livre de risco, e $m-1$ ativos de risco representados pelo vetor aleatório de preços $\bar{S}(t) \in \mathbb{R}^m$. Consequentemente, seus retornos são representados por $\bar{R}(t) \in \mathbb{R}^m$.

Assumiremos uma sequência de valores $\{D(t); t = 0, \ldots, T-1\}$ que pode representar um fluxo líquido de riqueza, ou seja, total de saques ou benefícios pagos descontado do total de aportes recebidos em cada passo de tempo. Também consideramos uma sequência de valores para o passivo $\{Y(t); t = 0, \ldots, T-1\}$ representando a valorização do patrimônio frente à rentabilidade mínima imposta pela meta atuarial a qual o portfólio está sujeito. Também consideramos as seguintes equações para a evolução de $S_i(t)$, $Y(t)$ e $D(t)$,

$$S_i(t+1) = R_{\theta(t),i}(t) S_i(t), \tag{5.54}$$

$$Y(t+1) = R_{\theta(t),m+1}(t) Y(t) - D(t), \tag{5.55}$$

$$D(t+1) = R_{\theta(t),m+2}(t) D(t). \tag{5.56}$$

Para os ativos, temos, como no modelo anterior

$$\bar{S}(t) = \Big(S_1(t), \ldots, S_m(t)\Big)', \tag{5.57}$$

$$\bar{R}(t) = \Big(R_1(t), \ldots, R_m(t)\Big)'. \tag{5.58}$$

Como para os casos anteriores, $\{\theta\,(t)\,; t = 0, \ldots, T\}$ é uma cadeia de Markov com um número finito de estados discretos no tempo assumindo valores em $\{1, \ldots, N\}$. Este parâmetro $\theta\,(t)$ representará um estado de mercado para cada instante de tempo t definindo como os preços dos ativos evoluem até o final do horizonte de investimentos T. Os vetores $\{w(t)' = (w_1(t), \ldots, w_{m+2}(t));\ t = 0, \ldots, T\}$ formam uma sequência de vetores aleatórios independentes de dimensão $(m+2)$, com média nula e matriz de covariâncias igual a matriz identidade e independentes dos estados de mercado.

Definimos os retornos dos ativos entre os passos t e $t+1$ da seguinte forma:

$$\bar{R}_{\theta(t)}(t) = [\bar{e} + \bar{\mu}_{\theta(t)}(t)] + \bar{\sigma}_{\theta(t)}(t)w(t), \tag{5.59}$$

em que $\bar{e} = [1, e, 1, 1]'$, sendo $e \in \mathbb{R}^{m-1}$ um vetor unitário. O vetor $\bar{\mu}_{\theta(t)}(t) \in \mathbb{R}^{m+2}$ contém os retornos esperados para cada ativo e $\bar{\sigma}_{\theta(t)}(t) \in \mathbb{R}^{m+2,m+2}$ é a matriz de correlações dos retornos dos ativos, ambos condicionados ao estado de mercado do instante t.

Seguindo a mesma abordagem dos outros casos, decompomos $\bar{\mu}_{\theta(t)}(t)$ da seguinte forma:

$$\bar{\mu}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} \mu_{\theta(t),1}(t) \\ \hat{\mu}_{\theta(t)}(t) \\ \mu_{\theta(t),m+1}(t) \\ \mu_{\theta(t),m+2}(t) \end{pmatrix}, \tag{5.60}$$

em que

$$\hat{\mu}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} \mu_{\theta(t),2}(t) \\ \mu_{\theta(t),m}(t) \end{pmatrix}. \tag{5.61}$$

De forma análoga, podemos escrever $\bar{\sigma}_{\theta(t)}(t)$ da seguinte maneira

$$\bar{\sigma}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{\theta(t),1}(t) \\ \hat{\sigma}_{\theta(t)}(t) \\ \sigma_{\theta(t),m+1}(t) \\ \sigma_{\theta(t),m+2}(t) \end{pmatrix}, \tag{5.62}$$

em que

$$\sigma_{\theta(t),1}(t) = \Big(\sigma_{\theta(t),1,1}(t), \ldots, \sigma_{\theta(t),1,m+2}(t)\Big), \tag{5.63}$$

$$\sigma_{\theta(t),m+1}(t) = \Big(\sigma_{\theta(t),m+1,1}(t), \ldots, \sigma_{\theta(t),m+1,m+2}(t)\Big), \tag{5.64}$$

$$\sigma_{\theta(t),m+2}(t) = \Big(\sigma_{\theta(t),m+2,1}(t), \ldots, \sigma_{\theta(t),m+2,m+2}(t)\Big) \tag{5.65}$$

e

$$\hat{\sigma}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{\theta(t),2,1}(t) & \ldots & \sigma_{\theta(t),2,m+2}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\theta(t),m,1}(t) & \ldots & \sigma_{\theta(t),m,m+2}(t) \end{pmatrix}. \tag{5.66}$$

Como consequência desta decomposição, vemos que o vetor de retornos dos ativos $\bar{R}_{\theta(t)}(t)$ pode ser escrito como

$$\bar{R}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} R_{\theta(t),1}(t) \\ \hat{R}_{\theta(t)}(t) \\ R_{\theta(t),m+1}(t) \\ R_{\theta(t),m+2}(t) \end{pmatrix}, \tag{5.67}$$

em que

$$\hat{R}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} R_{\theta(t),2}(t) \\ \vdots \\ R_{\theta(t),m}(t) \end{pmatrix}. \tag{5.68}$$

Como nos outros modelos, temos o processo de retornos convenientemente estruturado facilitando a determinação da dinâmica de evolução para o valor do portfólio em cada passo de tempo e estado de mercado. Antes ainda, devemos definir a quantidade de riqueza alocada em cada um dos ativos a cada instante de tempo, condicionada ao estado de mercado em que o portfólio se encontra.

Assim, considere $U_i(t)$ como sendo a quantidade de riqueza alocada no i-ésimo ativo, nas condições acima, em que $i = 1, \ldots, m$. Definimos o vetor $U(t)$ como sendo

$$U(t) = \Big(U_1(t), \ldots, U_m(t)\Big)'. \tag{5.69}$$

Decompondo este vetor de forma análoga aos anteriores, temos

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ \hat{U}(t) \end{pmatrix} \tag{5.70}$$

com

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} U_2(t) \\ \vdots \\ U_m(t) \end{pmatrix}. \tag{5.71}$$

Como decorrência, representamos por $X^U(t)$ o valor da carteira associada à estratégia de investimento U. Para simplificar a notação, omitiremos o índice U sempre que não prejudique o entendimento. Também considere que e representa um vetor unitário m-1-dimensional.

Considere que

$$X(t) - D(t) = U_1(t) + \hat{U}(t)'e'. \tag{5.72}$$

Portanto, a riqueza alocada no ativo de referência será

$$U_1(t) = X(t) - \hat{U}(t)'e' - D(t). \tag{5.73}$$

Como temos um portfólio autofinanciado, temos

$$X(t+1) = R_{\theta(t),1}(t)U_1(t) + \hat{R}_{\theta(t)}(t)'\hat{U}(t). \tag{5.74}$$

Substituindo (5.73) em (5.74), temos

$$X(t+1) = R_{\theta(t),1}(t)X(t) - R_{\theta(t),1}(t)D(t) + \hat{P}_{\theta(t)}(t)'\hat{U}(t), \tag{5.75}$$

em que

$$\hat{P}_{\theta(t)}(t) = \hat{R}_{\theta(t)}(t) - R_{\theta(t),1}(t)e'. \tag{5.76}$$

Considerando $\mathcal{F}_\tau$ o σ-campo gerado pelas variáveis aleatórias $\{(\theta(k), x(k)); k = 0, \ldots, \tau\}$, para cada k queremos encontrar a variável de controle $\hat{U}(k)$, $\mathcal{F}_k$-mensurável, de forma a aplicar o problema $PU\,(\nu, \xi)$ ou $PC\,(\nu, \epsilon)$, como anteriormente.

Assim, é fácil concluir que a variável de estado $X(t)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} X(t+1) =& [(1 + \mu_{\theta(t),1}(t)) + \sum_{s=1}^{m+2} \sigma^s_{\theta(t),1}(t)w^s(t)]X(t) \\ &- [(1 + \mu_{\theta(t),1}(t)) + \sum_{s=1}^{m+2} \sigma^s_{\theta(t),1}(t)w^s(t)]D(t) \\ &+ [(\hat{\mu}_{\theta(t)}(t) - \mu_{\theta(t),1}(t)e')' + \sum_{s=1}^{m+2} (\hat{\sigma}^s_{\theta(t)}(t) - \sigma^s_{\theta(t),1}(t)e')'w^s(t)]\hat{U}(t). \end{aligned} \tag{5.77}$$

De forma análoga, podemos ver a partir de (5.55) que o processo de evolução do passivo é

$$Y(t+1) = [(1 + \mu_{\theta(t),m+1}(t)) + \sum_{s=1}^{m+2} \sigma^s_{\theta(t),m+1}(t)w^s(t)]Y(t) - D(t). \tag{5.78}$$

Enquanto a partir de (5.56) vemos que o processo de evolução do fluxo líquido de recursos é

$$D(t+1) = [(1 + \mu_{\theta(t),m+2}(t)) + \sum_{s=1}^{m+2} \sigma^s_{\theta(t),m+2}(t)w^s(t)]D(t). \tag{5.79}$$

Para colocar o problema na formulação apresentada para o modelo desenvolvido nos capítulos anteriores, considere que

$$x(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ D(t) \end{pmatrix} \tag{5.80}$$

$$u(t) = \hat{U}(t). \tag{5.81}$$

Juntando-se (5.77), (5.78), (5.80) e (5.81), temos

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X(t+1) \\ Y(t+1) \\ D(t+1) \end{pmatrix} = \Bigg[& \begin{pmatrix} (1+\mu_{\theta(t),1}(t)) & 0 & -(1+\mu_{\theta(t),1}(t)) \\ 0 & (1+\mu_{\theta(t),m+1}(t)) & -1 \\ 0 & 0 & (1+\mu_{\theta(t),m+2}(t)) \end{pmatrix} \\
& + \sum_{s=1}^{m+2} \begin{pmatrix} \sigma^s_{\theta(t),1}(t) & 0 & -\sigma^s_{\theta(t),1}(t) \\ 0 & \sigma^s_{\theta(t),m+1}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^s_{\theta(t),m+2}(t) \end{pmatrix} w^s(t) \Bigg] \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ D(t) \end{pmatrix} \\
& + \Bigg[\begin{pmatrix} (\hat{\mu}_{\theta(t)}(t) - \mu_{\theta(t),1}(t)e')' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{s=1}^{m+2} \begin{pmatrix} (\hat{\sigma}^s_{\theta(t)}(t) - \sigma^s_{\theta(t),1}(t)e')' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} w^s(t) \Bigg] \hat{U}(t).
\end{aligned} \tag{5.82}$$

Então, para $s = 1, \ldots, m+2$, definimos que

$$\bar{A}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} (1+\mu_{\theta(t),1}(t)) & 0 & -(1+\mu_{\theta(t),1}(t)) \\ 0 & (1+\mu_{\theta(t),m+1}(t)) & -1 \\ 0 & 0 & (1+\mu_{\theta(t),m+2}(t)) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A}_{\theta(t),s}(t) = \begin{pmatrix} \sigma^s_{\theta(t),1}(t) & 0 & -\sigma^s_{\theta(t),1}(t) \\ 0 & \sigma^s_{\theta(t),m+1}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^s_{\theta(t),m+2}(t) \end{pmatrix},$$

$$\bar{B}_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} (\hat{\mu}_{\theta(t)}(t) - \mu_{\theta(t),1}(t)e')' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{B}_{\theta(t),s}(t) = \begin{pmatrix} (\hat{\sigma}^s_{\theta(t)}(t) - \sigma^s_{\theta(t),1}(t)e')' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, o problema pode ser escrito na forma de (3.1) e (3.2), ou seja,

$$\begin{aligned} x(t+1) =& \Big(\bar{A}_{\theta(t)}(t) + \sum_{s=1}^{m+2} \widetilde{A}_{\theta(t),s}(t)w^s(t)\Big)x(t) + \Big(\bar{B}_{\theta(t)}(t) + \sum_{s=1}^{m+2} \widetilde{B}_{\theta(t),s}(t)w^s(t)\Big)u(t), \\ & x(0) = \ x_0, \ \theta(0) = \theta_0, \\ & y(t) = L_{\theta(t)}(t)x(t), \\ & L_{\theta(t)}(t) = [1 \ -1 \ 0]. \end{aligned} \tag{5.83}$$

Assim, conseguimos aplicar as estratégias de otimização desenvolvidas nos capítulos anteriores. Note que, por termos adotado o primeiro ativo como sendo de referência, as matrizes $\bar{A}_{\theta(t)}(t)$, $\widetilde{A}_{\theta(t),s}(t)$, $\bar{B}_{\theta(t)}(t)$ e $\widetilde{B}_{\theta(t),s}(t)$ dependem explicitamente de seus parâmetros, como nos outros modelos desenvolvidos. Adicionalmente ao caso anterior, vemos que neste modelo as matrizes $\bar{A}_{\theta(t)}(t)$ e $\widetilde{A}_{\theta(t),s}(t)$ possuem uma dimensão a mais para considerar, além da dinâmica do passivo, a evolução dos fluxos de aplicações e resgates. Consequentemente, as matrizes $\bar{B}_{\theta(t)}(t)$ e $\widetilde{B}_{\theta(t),s}(t)$ possuem uma linha adicional contendo um vetor de zeros.

Por último, vemos que o parâmetro $L_{\theta(t)}(t)$ passa a ser um vetor com três dimensões para considerar cada uma das variáves de estados $X(t)$, $Y(t)$ e $D(t)$. Consequentemente, a saída $y(t)$ a ser otimizada reflete o valor de um portfólio de ativos em relação ao passivo, ou seja, temos que $y(t) = X(t) - Y(t)$ sendo que a variável $D(t)$ está refletida em $Y(t)$.

5.4 Conclusões

De acordo com o exposto nas seções anteriores, vemos que o modelo de otimização proposto neste trabalho é suficientemente geral a ponto de poder ser adaptado para diversos problemas de seleção de portfólio em finanças. Em particular, fica mais claro através destas formulações que, além de o modelo teórico apresentado tratar o caso estático de otimização para um único período como um caso particular, também permite considerar a otimização para várias dimensões. Mais concretamente, pode-se ver que o modelo possibilita fazer a otimização

desde um portfólio composto exclusivamente por ativos até, por exemplo, outro que considera a dinâmica do passivo incluindo fluxos de resgates e aplicações ao longo do tempo.

No próximo capítulo, vamos apresentar resultados numéricos decorrentes da aplicação deste modelo a situações práticas comparando seus resultados com o modelo de otimização terminal, ou seja, que visa otimizar o resultado apenas ao final do horizonte de investimentos. Com o objetivo de oferecer uma visão mais ampla de suas características, este modelo será aplicado inicialmente para um caso em que otimizamos um portfólio apenas com ativos. Na sequência, temos um exemplo de um portfólio que possui um índice de mercado de referência contra o qual procura uma relação risco retorno intertemporalmente superior. No terceiro e último caso, apresentamos um exemplo simples de ALM para fundos de pensão.

Capítulo 6

Exemplos Numéricos

Para que os exemplos numéricos deste capítulo estejam próximos da realidade, apresentamos inicialmente os dados de mercado que utilizamos para construir os parâmetros de entrada do modelo. Referimo-nos especificamente às matrizes que compõem o sistema linear das relações 3.1 e 3.2, além dos modos de operação do mercado e sua respectiva matriz de transição de estados. Como veremos, utilizamos alguns ativos de renda fixa e de renda variável, além de uma *commodity* e alguns indicadores de mercado e índices macroeconômicos.

Na sequência, apresentamos os resultados para três tipos de problemas de otimização de seleção de portfólio. No primeiro caso, temos uma carteira somente com ativos de risco. No segundo, temos o caso de otimização do desempenho de uma carteira relativa a um *benchmark* e, no terceiro caso, temos um problema de ALM ou *Asset and Liability Management* típico de fundos de pensão.

6.1 Estimação dos Parâmetros de Entrada do Modelo

Nosso objetivo nesta seção é apresentar os parâmetros utilizados para estimar as matrizes $\bar{A}_{\theta(t)}(t)$, $\widetilde{A}_{\theta(t)}(t)$, $\bar{B}_{\theta(t)}(t)$ e $\widetilde{B}_{\theta(t)}(t)$, além da matriz de transição de estados $\mathbb{P}(k)$. Essencialmente, os parâmetros a que nos referimos são o vetor de retornos esperados para cada ativo considerado, a matriz de covariâncias de retornos e os N estados de mercado contidos no parâmetro $\{\theta(k); k = 0, \ldots, T\}$ que representa a cadeia de Markov e que faz com que os dois primeiros parâmetros sejam expandidos para todos os estados considerados.

6.1.1 Séries Temporais

Para cobrir um espectro relativamente amplo de alternativas de alocação, consideramos ativos de renda fixa e de renda variável, além de uma *commodity* e alguns indicadores de mercado e índices macroeconômicos. Mais especificamente, temos os ativos da tabela abaixo:

Tipo	Segmento	Código	Descrição	Apelido
Índice	Macroeconômico	IPCA	Índice de Preços ao Consumidor	IPCA
Índice	Macroeconômico	IBGE	Variação da Taxa de Desemprego	IBGE
Índice	Renda Fixa	CDI	Certificado de Depósito Interbancário	CDI
Índice	Renda Fixa	IRFM	Índice de Renda Fixa	IRFM
Índice	Renda Variável	IBOV	Índice Bovespa	IBOV
Preço	Renda Variável	BBSA3	Banco do Brasil ON	BB
Preço	Renda Variável	ITUB4	Itaú Unibanco PN	ITAÚ
Preço	Renda Variável	CSNA3	Cia. Siderúrgica Nacional ON	CSN
Preço	Renda Variável	PETR4	Petrobras PN	PETROBRAS
Preço	Renda Variável	VALE5	Cia. Vale PNA	VALE
Preço	FX	FX SPOT	Taxa de Câmbio BRL\USD à vista	FX
Preço	Commodity	OZ10000	Ouro	OURO

Tabela 6.1: Lista de Ativos

O IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Amplo) coletado pelo IBGE em onze regiões metropolitanas desde 1980, é o índice de inflação oficial do Brasil, sendo utilizado para medição das metas inflacionárias pelo governo e reflete o custo de vida para famílias com renda mensal entre um e quarenta salários mínimos. Também do IBGE, a taxa de desemprego informada mensalmente pela Pesquisa Mensal de Emprego (PME), com base na População Economicamente Ativa (PEA), é determinada com base nas seis maiores regiões metropolitanas do país, que classifica como desempregados os indivíduos que não estão trabalhando, estão disponíveis e procuraram ativamente por trabalho nos trinta dias anteriores.

Certificado de Depósito Bancário (CDI) é a taxa de juros média diária do mercado interbancário, ou seja, oriunda da troca de recursos entre bancos. Por este motivo, pode ser considerada um dos principais indicadores do custo do dinheiro no mercado. Devido à sua alta liquidez e baixa volatilidade, é normalmente considerada pelo mercado como sendo a principal *proxy* para taxa livre de risco. Assim, levaremos em conta neste estudo o CDI como um ativo livre de risco. Já o IRFM é um índice elaborado pela ANBIMA (Associação Brasileira das Entidades dos Mercados de Capitais), que reflete a evolução, a preços de mercado, da carteira de títulos públicos federais prefixados. Mais especificamente, as Letras de Tesouro Nacional (LTN) e as Notas do Tesouro Nacional tipo F (NTN-F). Pertencente a uma família de índices de mercado, serve como referência ou *benchmark* para a indústria de gestão de

fundos de investimentos.

Na renda variável, temos o índice Bovespa. Largamente conhecido e utilizado, é o principal balizador do desempenho do mercado acionário brasileiro. Constituído em janeiro de 1968, trata-se de uma carteira teórica rebalanceada a cada quatro meses com base no volume negociado nos últimos doze meses. Atualmente é composto por 67 ações que representam cerca de 80% do volume transacionado. As cinco ações consideradas contribuem com mais de um quinto do IBOVESPA e são atualmente alguns dos ativos mais antigos no índice.

A taxa de câmbio real contra dólar à vista (FX SPOT) é o preço ou equivalência entre a moeda local corrente frente ao dólar, comumente utilizado como referência internacional do mercado de troca de moedas. Para o ouro, por sua vez, temos a cotação equivalente em reais para um grama do metal negociado no mercado internacional com base na onça troy ou $31,103478$ gramas.

Em termos de fonte de dados, utilizamos o IBGE para os índices macroeconômicos, Economatica para o IRFM e Ouro e para os demais a Bloomberg. Em termos de janela de tempo para construção das séries, utilizamos o intervalo de 2 de janeiro de 2001 até 7 de julho de 2011. Portanto, uma janela pouco maior que dez anos de observações diárias ou mensais, conforme o caso, passando por períodos desde estresse de mercado até forte crescimento. Apesar de parecer um detalhe sutil, veremos na sequência que para construir um modelo com maior granularidade de estados de mercado é necessário um volume adequado de dados sem os quais estimativas de retorno esperado e covariâncias podem ficar comprometidos para determinados estados.

Como estes parâmetros de retorno e risco dependem da caracterização dos estados de mercado, apresentamos inicialmente o método com o qual obtivemos estes estados e, na sequência, como estimamos estes parâmetros que constituem a base para a obtenção das matrizes $\bar{A}_{\theta(t)}(t)$, $\widetilde{A}_{\theta(t)}(t)$, $\bar{B}_{\theta(t)}(t)$ e $\widetilde{B}_{\theta(t)}(t)$.

6.1.2 Modos de Operação do Mercado

Para definir os modos de operação do mercado, utilizamos o IBOVESPA, cuja série de preços e retornos podem ser vistos na figura 6.1. Em azul, temos a evolução do índice no período. O índice que inicia em 15.425 pontos e, em média, valeu cerca de 36.900 pontos, é caracterizado por pelo menos dois regimes: o primeiro de volatilidade de curto prazo ou diária que confere

à série o padrão típico de ruído característico de séries financeiras; o segundo, de tendências de longo prazo, apresentando um crescimento acentuado de 2003 até meados de 2008 por conta do forte ingresso de capitais no país, bem como do crescimento da economia mundial e relativa estabilidade econômica do país. Neste período, o índice alcança seu máximo na série considerada, ultrapassando os 73.500 pontos depois de sair do mínimo de 8.500 pontos. Portanto, apesar da volatilidade de curto prazo do período, o IBOVESPA cresceu quase nove vezes, obtendo uma rentabilidade média de 30% ao ano neste período. Porém os efeitos da crise nos mercados externos, decorrentes do *subprime* nos Estados Unidos, fez com que o índice caísse para 34.100 pontos em seis meses, gerando uma rentabilidade anualizada negativa no período de aproximadamente 65%.

Estes fatos evidenciam que ao longo deste tempo é preciso identificar, de alguma forma, estes regimes de curto e longo prazo. Assim, pode-se diferenciar situações de mercado com relativa estabilidade, onde podemos ter retornos positivos ou negativos de baixa amplitude, porém com alta frequência, de movimentos mais fortes com retornos acentuados que podem representar realizações mais acentuadas após um período relativamente longo de crescimento e vice-versa. Além disto, dependendo do caso poderá ser possível separar movimentos ainda mais extremos que denotem estresses de mercado ou de crescimento atipicamente forte.

Algumas abordagens seriam possíveis para alcançar este objetivo. Por se tratar de uma análise sobre uma série temporal de preços, um caminho natural é buscar alguma solução através da aplicação de modelos econométricos. Uma alternativa mais simples, porém, seria como a adotada por Okimura em [31]. Contudo, utilizaremos os retornos logarítmicos médios semanais para um período de 12 semanas, ou seja, construímos uma série de retornos semanais, em base logarítmica, considerando a variação dos preços em uma janela de 12 semanas. Desta janela de 3 meses pretendemos obter uma série de retornos que não seja totalmente imune à volatilidade de curto prazo, mas que consiga evidenciar os movimentos de médio e longo prazo contidos no índice. Apenas como observação, considerar uma janela de 3 meses para estimar os retornos é aproximadamente equivalente ao método apresentado no Riskmetrics [1] para estimar volatilidades pelo método de média móvel ponderada exponencialmente ou, do inglês, *exponentially-weighted moving average* (EWMA).

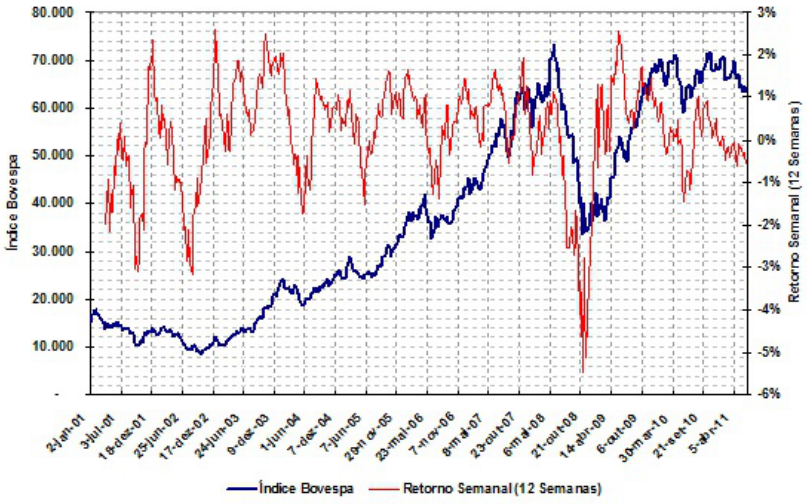

Figura 6.1: Evolução do IBOVESPA

Esta série de retornos também está representada na figura 6.1, em vermelho. Ao considerar um retorno médio de 12 semanas, vemos que a série de retornos apresenta certa inércia não ficando totalmente sujeita aos ruídos de curto prazo, ao mesmo tempo em que aparentemente evidencia os momentos de maiores quedas ou elevações de mercado. Em particular, vemos mais claramente épocas de maior estresse de mercado com quedas mais pronunciadas, como em 2001, por conta da crise da Argentina, em 2002, com o pré-Lula e a de 2008 que comentamos anteriormente. Também vemos que o período de relativa longa valorização possui alguns pontos de queda por realização de lucros. Em resumo, vemos que, apesar do crescimento do índice no longo prazo, há no curto, um risco elevado de grandes perdas, o que deve conferir à distribuição de retornos uma acentuada assimetria, denotando a possibilidade de grandes perdas ainda que com frequência menor que de ganhos.

Na figura 6.2 temos uma primeira tentativa para fazer um ajuste de distribuição ao histograma da série de retornos do índice. Experimentamos uma distribuição normal. Pela figura da esquerda, vemos aparentemente um ajuste relativamente aceitável na parte mais central dos dados, ficando prejudicado o ajuste para retornos muito negativos. Este fato fica mais evidente quando vemos esta mesma informação através do gráfico à direita, em que temos os dados empíricos em azul e em vermelho a distribuição estatística, sendo ambos representados quantil por quantil em uma escala logarítmica. Este gráfico é comumento conhecido na literatura estatística como *qqplot*. Quanto maior o ajuste da distribuição teórica aos dados, mais sobrepostos devem ficar. Assim, fica claro que mesmo para a parte central, a

distribuição normal não acomoda muito bem os dados, ficando muito pior nas caudas. Esta observação não deveria causar surpresa, uma vez que é senso comum que os retornos não seguem uma distribuição normal por conta de os eventos mais fortes de mercado demandarem distribuições com caudas mais grossas.

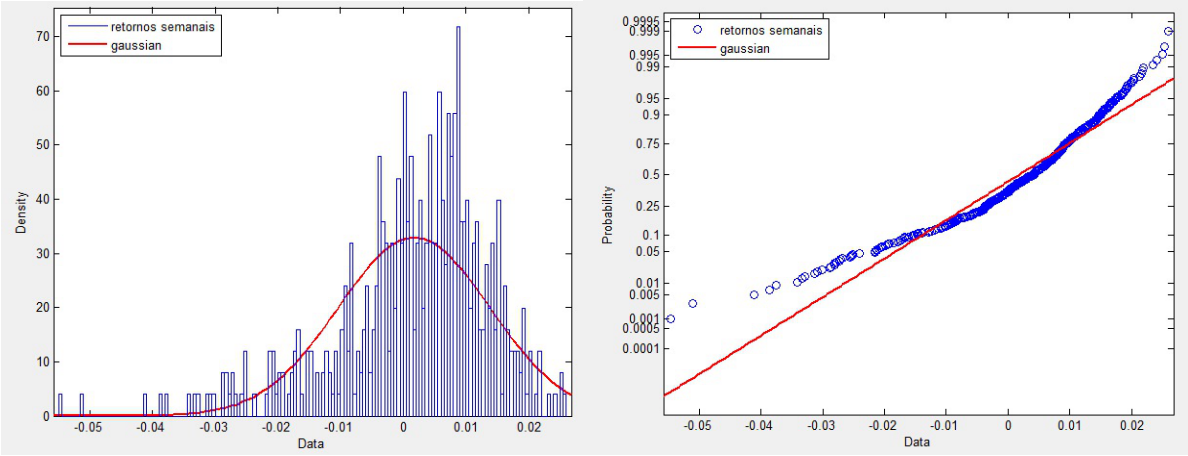

Figura 6.2: Ajuste da Distribuição Normal

Uma alternativa, então, seria a distribuição t-Student, conforme a figura 6.3. Por acomodar melhor eventos de cauda, vemos que os retornos negativos se aproximam mais da distribuição. Inclusive os retornos de maior frequência, são muito bem representados pela distribuição, mas ainda assim, não de forma plenamente satisfatória, uma vez que, retornos maiores ficam claramente fora do modelo.

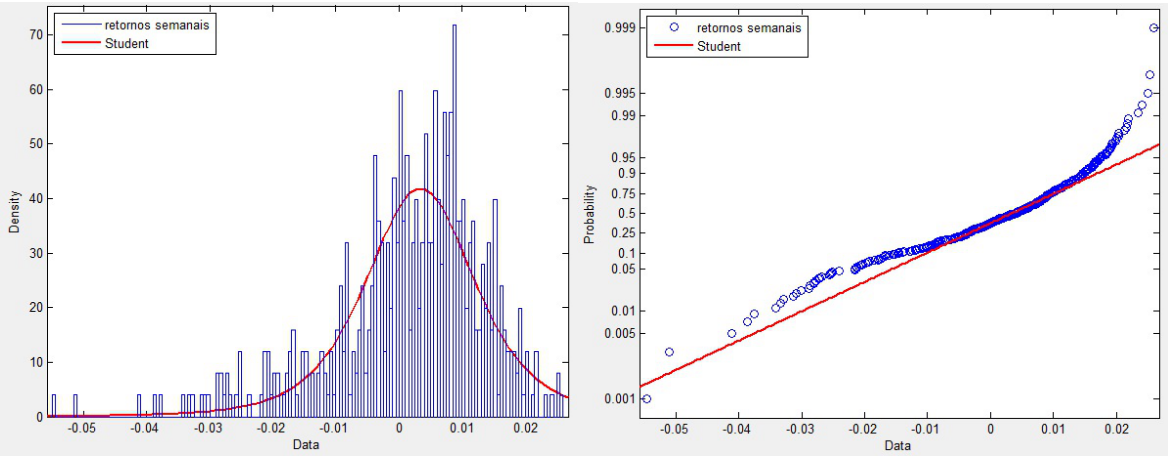

Figura 6.3: Ajuste da Distribuição de t-Student

A terceira alternativa que encontramos é ajustar uma distribuição de valores extremos como uma Weibull na figura 6.4. Apesar de normalmente este tipo de distribuição ser utilizado para modelar séries históricas de máximos ou mínimos, devido à distribuição empírica dos retornos, vemos claramente que ela acomoda melhor os dados. Este fato pode ser visto tanto pelos gráficos quanto pelos parâmetros estimados para os três casos e apresentados no anexo. Como o método de ajuste das distribuições foi o de Máxima Verossimilhança (MLE), pode-se ver que a verossimilhança (*log-likelihood*) calculada é crescente entre os modelos e, consequentemente, maior para este último caso.

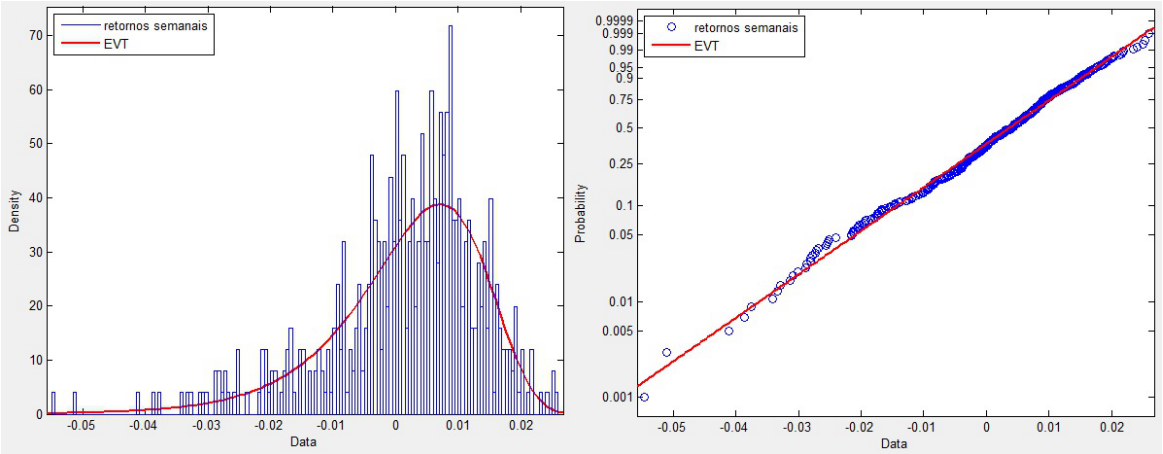

Figura 6.4: Ajuste à EVT

Uma vez ajustada a distribuição, fica mais clara a presença de cinco estados de mercado ilustrados na figura 6.5. Com base no primeiro e no segundo momentos da distribuição ajustada, padronizamos os retornos a fim de identificar de forma simples os pontos mais plausíveis de separação dos estados. Temos uma região central de estabilidade com retornos pequenos em torno do zero. Uma região acima, com retornos semanais positivos ao redor de 1%, caracterizando um mercado de alta e outro estado com retornos semanais ainda superiores, definindo um crescimento bastante forte que denominamos de *boom*. Do outro lado, temos um mercado com perdas semanais variando entre 1% e 2%, denotando um estado de baixa de mercado. O último estado possui retornos negativos ainda mais acentuados, caracterizando estresses de mercado.

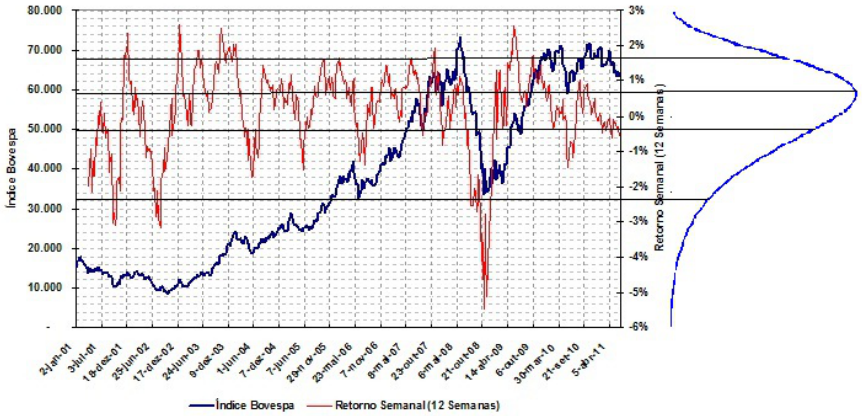

Figura 6.5: Evolução do IBOVESPA

Na tabela 6.2, podemos ver os detalhes da segmentação dos estados mais concretamente. Da série de 502 retornos semanais, vemos os intervalos de retornos semanais mínimo e máximo que caracterizam cada estado de mercado, bem como o número de observações da série de retornos classificadas em cada estado. Como era de se esperar, as maiores frequências de ocorrências encontram-se nos estados mais centrais. Estados de estresse ou de *boom* ocorrem em menor número. Adicionalmente, pode-se notar que *boons* de mercado ocorreram $1,6$ vezes mais do que estresses, denotando a tendência de crescimento. No entanto, a cauda da distrbuição de retornos na ponta negativa denota uma probabilidade não desprezível de elevada severidade nas perdas caso o mercado entre em momentos de estresse. Na última coluna, temos a frequência com que cada um destes estados ocorre.

		Intervalo de Retornos			
Estados	Descrição	Mínimo	Máximo	Ocorrências	Frequência
1	Estresse	inf	-2.6%	19	4%
2	Baixa	-2.6%	-0.2%	127	25%
3	Estabilidade	-0.2%	0.9%	224	45%
4	Alta	0.9%	1.7%	101	20%
5	Boom	1.7%	inf	31	6%

Tabela 6.2: Estados de Mercado

Como decorrência desta segmentação, temos na tabela 6.3 a matriz de classificação das ocorrências de transição de estados para a série de retornos em questão. Por exemplo, pode-se ver que das 224 ocasiões que tivemos retornos classificados no estado de mercado 3 (Estabilidade), em 25 delas passaram para o estado 2 (Baixa), em 171 permaneceram no estado 3, em 27 passaram para o estado 4 (Alta) e uma única vez passaram para o estado 5

(*Boom*). Note que embora tenhamos 502 observações de retornos, temos apenas 501 transições, porque, por construção, o retorno mais recente não tem informação sobre o estado seguinte.

Estados	1	2	3	4	5	Total
1	14	5	0	0	0	**19**
2	5	94	27	0	0	**126**
3	0	25	171	27	1	**224**
4	0	2	26	64	9	**101**
5	0	0	0	10	21	**31**
Total	**19**	**126**	**224**	**101**	**31**	**501**

Tabela 6.3: Matriz de Classificação de Estados

Com base nesta informação, estimamos a matriz de transições de estados da tabela 6.4, em que a soma de cada linha deve necessariamente totalizar 100% das observações classificadas naquele estado. Destas últimas duas tabelas, vemos que a principal tendência é de permanecer no mesmo estado no passo seguinte, uma vez que as maiores frequências estão na diagonal principal. Também pode-se ver que quanto mais longe desta diagonal, menor é a frequência demonstrando que saltos abruptos de dois ou mais estados são decrescentemente prováveis. Assim, a partir da teoria de Cadeias de Markov, a qual pode ser vista em maiores detalhes em [49], pode-se verificar que a distribuição limite para as probabilidade de estados gerada por esta matriz será equivalente às frequências contidas na última coluna da tabela 6.2.

Estados	1	2	3	4	5
1	73.7%	26.3%	0	0	0
2	4.0%	74.6%	21.4%	0	0
3	0	11.2%	76.3%	12.1%	0.4%
4	0	2.0%	25.7%	63.4%	8.9%
5	0	0	0	32.3%	67.7%

Tabela 6.4: Matriz de Transição de Estados

6.1.3 Estimação dos Retornos Esperados

Na tabela 6.5, temos os retornos esperados para cada ativo em cada estado de mercado, com base nos retornos históricos. Tendo-se em mente que o estado 5 reflete o mercado com maior crescimento e o estado 1 o mercado está em estresse, o comportamento qualitativo dos retornos está dentro do esperado do ponto de vista econômico. À medida que o mercado melhora, é possível ter um aumento da inflação, por conta do aquecimento da economia, fato confirmado pela queda na taxa de desemprego. Por outro lado, podemos ter uma elevação no CDI em decorrência da elevação na taxa SELIC como instrumento que o governo possui para conter a disparada da inflação. Consequentemente, títulos do governo prefixados aumentam a rentabilidade. Já o mercado de renda variável como um todo tende a perder fortemente em situações de mercado desfavoráveis, mas por outro lado se valorizam de forma exuberante em mercados otimistas. A taxa de câmbio reflete a situação comumente vivida pelo país nas últimas décadas. Em mercados otimistas, há um ingresso massivo de recursos de investidores estrangeiros para aplicar na Bolsa valorizando as ações e derrubando o câmbio em virtude da abundância da oferta de dólar no mercado. O raciocínio no sentido do estresse de mercado é exatamente o oposto. Por último, o ouro, que em situação de mercado otimista não sai do lugar, mas no estresse é um porto seguro para os investidores.

Ativos	1	2	3	4	5
IPCA	6.60%	6.39%	6.32%	6.69%	10.10%
IBGE	6.50%	11.73%	-2.63%	-16.18%	-10.84%
CDI	15.92%	15.32%	14.86%	15.18%	17.26%
IRFM	14.08%	18.72%	16.75%	17.25%	23.20%
IBOV	-90.90%	-27.06%	32.85%	71.99%	268.88%
BB	-94.54%	-26.82%	64.06%	84.33%	344.20%
ITAÚ	-87.46%	-6.45%	23.00%	69.35%	225.03%
CSN	-96.61%	-35.20%	88.24%	100.47%	140.88%
PETROBRAS	-95.41%	-10.42%	10.30%	118.59%	240.88%
VALE	-64.86%	-12.93%	45.00%	69.99%	88.19%
FX	324.12%	28.18%	-14.53%	-20.22%	-42.23%
OURO	229.14%	17.06%	3.57%	29.28%	0.18%

Tabela 6.5: Retornos Esperados Anualizados por Estado de Mercado

6.1.4 Estimação das Covariâncias

De forma análoga ao caso anterior, temos nas tabelas 6.6, 6.7, 6.8, 6.9 e 6.10 as respectivas matrizes de covariâncias entre os retornos dos vários ativos, em termos percentuais. Pode-se notar a elevação da volatilidade na situação de estresse de mercado em relação aos demais estados.

Ativos	CDI	IPCA	FX	BB	ITAÚ	CSN	PETROBRAS	VALE	IBOV	IRFM	IBGE	OURO
CDI	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
IPCA	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	-0.0003	0.0002	0.0001	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
FX	0.0000	0.0000	0.3738	-0.4055	-0.4903	-0.4763	-0.2267	-0.3046	-0.2831	-0.0129	-0.0032	0.3109
BB	0.0000	0.0001	-0.4055	1.3026	1.3618	0.8476	0.7935	0.7545	0.8068	0.0529	0.0263	-0.2474
ITAÚ	0.0000	-0.0003	-0.4903	1.3618	2.1100	0.8536	1.0631	0.9479	1.0311	0.0592	0.0138	-0.2595
CSN	0.0000	0.0002	-0.4763	0.8476	0.8536	1.1618	0.6063	0.6031	0.5730	0.0354	0.0142	-0.2907
PETROBRAS	0.0000	0.0001	-0.2267	0.7935	1.0631	0.6063	1.0942	0.7999	0.7312	0.0328	-0.0067	-0.0379
VALE	0.0000	0.0002	-0.3046	0.7545	0.9479	0.6031	0.7999	0.8155	0.6783	0.0263	-0.0165	-0.1534
IBOV	0.0000	0.0000	-0.2831	0.8068	1.0311	0.5730	0.7312	0.6783	0.7215	0.0335	0.0024	-0.1727
IRFM	0.0000	0.0000	-0.0129	0.0529	0.0592	0.0354	0.0328	0.0263	0.0335	0.0042	0.0024	-0.0052
IBGE	0.0000	0.0000	-0.0032	0.0263	0.0138	0.0142	-0.0067	-0.0165	0.0024	0.0024	0.0066	-0.0043
OURO	0.0000	0.0001	0.3109	-0.2474	-0.2595	-0.2907	-0.0379	-0.1534	-0.1727	-0.0052	-0.0043	0.3651

Tabela 6.6: Matriz de Covariâncias para o Modo 1

Ativos	CDI	IPCA	FX	BB	ITAÚ	CSN	PETROBRAS	VALE	IBOV	IRFM	IBGE	OURO
CDI	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
IPCA	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0002	-0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	-0.0001
FX	0.0000	0.0000	0.0675	-0.0752	-0.0766	-0.0600	-0.0530	-0.0072	-0.0603	-0.0036	0.0009	0.0476
BB	0.0000	0.0003	-0.0752	0.4505	0.2485	0.2146	0.1582	0.0883	0.1992	0.0096	0.0028	-0.0611
ITAÚ	0.0000	0.0002	-0.0766	0.2485	0.3618	0.1954	0.1866	0.1099	0.2061	0.0070	0.0094	-0.0529
CSN	0.0000	-0.0002	-0.0600	0.2146	0.1954	0.5037	0.2190	0.1995	0.2207	0.0043	-0.0059	0.0128
PETROBRAS	0.0000	0.0001	-0.0530	0.1582	0.1866	0.2190	0.3060	0.1290	0.1725	0.0057	0.0085	0.0088
VALE	0.0000	0.0000	-0.0072	0.0883	0.1099	0.1995	0.1290	0.2188	0.1109	-0.0002	0.0089	0.0350
IBOV	0.0000	0.0000	-0.0603	0.1992	0.2061	0.2207	0.1725	0.1109	0.1852	0.0059	0.0046	-0.0255
IRFM	0.0000	0.0000	-0.0036	0.0096	0.0070	0.0043	0.0057	-0.0002	0.0059	0.0014	-0.0003	-0.0032
IBGE	0.0000	0.0001	0.0009	0.0028	0.0094	-0.0059	0.0085	0.0089	0.0046	-0.0003	0.0161	0.0029
OURO	0.0000	-0.0001	0.0476	-0.0611	-0.0529	0.0128	0.0088	0.0350	-0.0255	-0.0032	0.0029	0.1129

Tabela 6.7: Matriz de Covariâncias para o Modo 2

Ativos	CDI	IPCA	FX	BB	ITAÚ	CSN	PETROBRAS	VALE	IBOV	IRFM	IBGE	OURO
CDI	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
IPCA	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0004	0.0001	0.0000	0.0001	0.0000	0.0001	-0.0001
FX	0.0000	0.0000	0.0343	-0.0341	-0.0311	-0.0381	-0.0346	-0.0246	-0.0332	-0.0009	-0.0034	0.0227
BB	0.0000	0.0001	-0.0341	0.2163	0.1079	0.0887	0.0585	0.0567	0.0833	0.0027	0.0016	-0.0273
ITAÚ	0.0000	0.0001	-0.0311	0.1079	0.1679	0.0889	0.0715	0.0806	0.0916	0.0018	0.0039	-0.0239
CSN	0.0000	0.0004	-0.0381	0.0887	0.0889	0.3210	0.1225	0.1382	0.1168	0.0030	0.0121	-0.0142
PETROBRAS	0.0000	0.0001	-0.0346	0.0585	0.0715	0.1225	0.1530	0.0968	0.0920	0.0017	0.0004	-0.0106
VALE	0.0000	0.0000	-0.0246	0.0567	0.0806	0.1382	0.0968	0.2101	0.0869	0.0009	0.0070	-0.0005
IBOV	0.0000	0.0001	-0.0332	0.0833	0.0916	0.1168	0.0920	0.0869	0.0984	0.0024	0.0033	-0.0185
IRFM	0.0000	0.0000	-0.0009	0.0027	0.0018	0.0030	0.0017	0.0009	0.0024	0.0005	0.0000	-0.0007
IBGE	0.0000	0.0001	-0.0034	0.0016	0.0039	0.0121	0.0004	0.0070	0.0033	0.0000	0.0162	-0.0014
OURO	0.0000	-0.0001	0.0227	-0.0273	-0.0239	-0.0142	-0.0106	-0.0005	-0.0185	-0.0007	-0.0014	0.0727

Tabela 6.8: Matriz de Covariâncias para o Modo 3

Ativos	CDI	IPCA	FX	BB	ITAÚ	CSN	PETROBRAS	VALE	IBOV	IRFM	IBGE	OURO
CDI	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
IPCA	0.0000	0.0000	0.0001	-0.0004	-0.0005	0.0000	-0.0002	-0.0003	-0.0001	0.0001	0.0002	0.0001
FX	0.0000	0.0001	0.0383	-0.0493	-0.0361	-0.0287	-0.0206	-0.0060	-0.0326	-0.0007	0.0036	0.0300
BB	0.0000	-0.0004	-0.0493	0.2861	0.0954	0.0440	0.0338	0.0608	0.0784	0.0007	-0.0033	-0.0409
ITAÚ	0.0000	-0.0005	-0.0361	0.0954	0.1867	0.1012	0.0777	0.0823	0.1026	-0.0002	-0.0105	-0.0160
CSN	0.0000	0.0000	-0.0287	0.0440	0.1012	0.2352	0.0693	0.0871	0.0847	0.0004	-0.0047	-0.0081
PETROBRAS	0.0000	-0.0002	-0.0206	0.0338	0.0777	0.0693	0.1609	0.0796	0.0888	-0.0001	-0.0071	0.0083
VALE	0.0000	-0.0003	-0.0060	0.0608	0.0823	0.0871	0.0796	0.1671	0.0785	-0.0008	-0.0057	0.0102
IBOV	0.0000	-0.0001	-0.0326	0.0784	0.1026	0.0847	0.0888	0.0785	0.1010	0.0006	-0.0073	-0.0117
IRFM	0.0000	0.0001	-0.0007	0.0007	-0.0002	0.0004	-0.0001	-0.0008	0.0006	0.0005	0.0011	-0.0002
IBGE	0.0000	0.0002	0.0036	-0.0033	-0.0105	-0.0047	-0.0071	-0.0057	-0.0073	0.0011	0.0227	0.0060
OURO	0.0000	0.0001	0.0300	-0.0409	-0.0160	-0.0081	0.0083	0.0102	-0.0117	-0.0002	0.0060	0.0858

Tabela 6.9: Matriz de Covariâncias para o Modo 4

Ativos	CDI	IPCA	FX	BB	ITAÚ	CSN	PETROBRAS	VALE	IBOV	IRFM	IBGE	OURO
CDI	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
IPCA	0.0000	0.0001	0.0004	0.0006	0.0003	0.0005	-0.0002	0.0001	0.0002	0.0001	0.0003	0.0002
FX	0.0000	0.0004	0.0573	-0.0533	-0.0492	-0.0112	-0.0344	0.0272	-0.0483	-0.0032	-0.0048	0.0397
BB	0.0000	0.0006	-0.0533	0.2110	0.0843	0.0857	0.0619	0.0000	0.0851	0.0031	-0.0027	-0.0235
ITAÚ	0.0000	0.0003	-0.0492	0.0843	0.2288	0.1108	0.0911	0.0614	0.1327	0.0057	0.0025	-0.0577
CSN	0.0000	0.0005	-0.0112	0.0857	0.1108	0.2769	0.0926	0.1072	0.1050	0.0027	-0.0009	-0.0237
PETROBRAS	0.0000	-0.0002	-0.0344	0.0619	0.0911	0.0926	0.1946	0.0802	0.0992	0.0051	0.0171	-0.0210
VALE	0.0000	0.0001	0.0272	0.0000	0.0614	0.1072	0.0802	0.2681	0.0274	-0.0023	-0.0295	0.0266
IBOV	0.0000	0.0002	-0.0483	0.0851	0.1327	0.1050	0.0992	0.0274	0.1285	0.0065	0.0086	-0.0453
IRFM	0.0000	0.0001	-0.0032	0.0031	0.0057	0.0027	0.0051	-0.0023	0.0065	0.0011	0.0016	-0.0016
IBGE	0.0000	0.0003	-0.0048	-0.0027	0.0025	-0.0009	0.0171	-0.0295	0.0086	0.0016	0.0224	-0.0049
OURO	0.0000	0.0002	0.0397	-0.0235	-0.0577	-0.0237	-0.0210	0.0266	-0.0453	-0.0016	-0.0049	0.0873

Tabela 6.10: Matriz de Covariâncias para o Modo 5

6.2 Resultados Numéricos das Simulações

Em função dos parâmetros estimados acima, podemos simular os modelos formulados no capítulo anterior estimando as matrizes $\bar{A}_{\theta(t)}(t)$, $\widetilde{A}_{\theta(t)}(t)$, $\bar{B}_{\theta(t)}(t)$ e $\widetilde{B}_{\theta(t)}(t)$, em conformidade com cada caso.

Nesta seção, apresentamos os resultados para três tipos de problemas de otimização de seleção de portfólio. No primeiro caso, temos uma carteira somente com ativos de risco. No segundo, temos o caso de otimização do desempenho de uma carteira relativa a um *benchmark*; e, no terceiro caso, temos um problema de ALM ou *Asset and Liability Management* típico de Fundos de Pensão.

Para efeitos de comparação de resultados, adotamos como referência o trabalho desenvolvido por O.L.V. Costa e R. Okimura em [31], por se tratar de um modelo bastante próximo do presente trabalho, diferindo essencialmente por ter como objetivo otimizar o custo apenas no término do horizonte de investimentos.

6.2.1 Simulação de um Portfólio com Ativos de Risco

Nesta primeira simulação, consideramos uma carteira composta pelas cinco ações contidas na tabela 6.1, ou seja, Banco do Brasil, Itaú, CSN, Petrobras e Vale, para um horizonte de investimento de 25 semanas. O objetivo é minimizar um compromisso entre risco e retorno, sem restrições. Assim, aplicamos o problema $PU(\nu, \xi)$. Para efeito de todas as simulações, sempre utilizaremos $\nu = 1$. Para todos os casos, fazemos uma simulação de Monte Carlo para 10 mil trajetórias distintas, com passo de tempo de uma semana. Partimos de um investimento inicial de uma unidade monetária e do estado de mercado de estabilidade. Ao todo consideramos os cinco estados obtidos na seção anterior. O detalhamento dos resultados podem ser encontrados nas tabelas em anexo.

O gráfico da figura 6.6 mostra o comportamento do valor esperado do portfólio obtido das 10 mil trajetórias simuladas desde a data de início do investimento até o final do horizonte de investimento. Vemos que, por se tratar de um problema de otimização sem restrições, o modelo que otimiza apenas o risco e retorno terminais gera um valor superior durante todo o tempo e de forma crescente. Isto se deve ao fato de que, como o modelo não necessita minimizar o custo em cada passo de tempo, tem uma liberdade muito maior para buscar

estratégias de alocação mais rentáveis, fazendo com que na média o valor da carteira tenda a ter um crescimento mais acentuado. Ao final do período de investimento, o valor esperado da carteira pelo modelo de otimização terminal chega a 2.39, enquanto para o multiperíodo chega a 2.08.

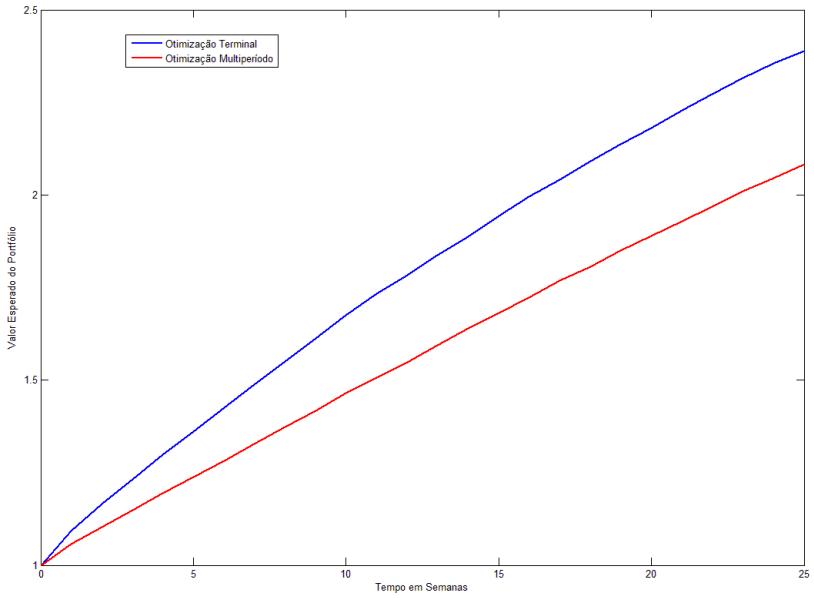

Figura 6.6: Valor Esperado do Portfólio

No entanto, vemos que este crescimento superior do valor do portfólio vem às custas de se expor a um maior risco[1] ou incerteza, tendo mais chances de sofrer perdas superiores ao modelo de otimização multiperíodo, conforme pode ser visto na figura 6.7.

De fato, se normalizarmos o valor esperado do portfólio em função do risco incorrido, fica fácil verificar que o desempenho passa a ser claramente favorável ao modelo que realiza a otimização multiperíodo. Este fato fica evidente através da figura 6.8. Nela vemos que a valor esperado do portfólio por unidade de risco, considerando-se a otimização multiperíodo, é bastante superior ao caso de otimização terminal.

[1] Mais especificamente, nos referimos ao desvio padrão dos valores simulados do portfólio em cada passo de tempo.

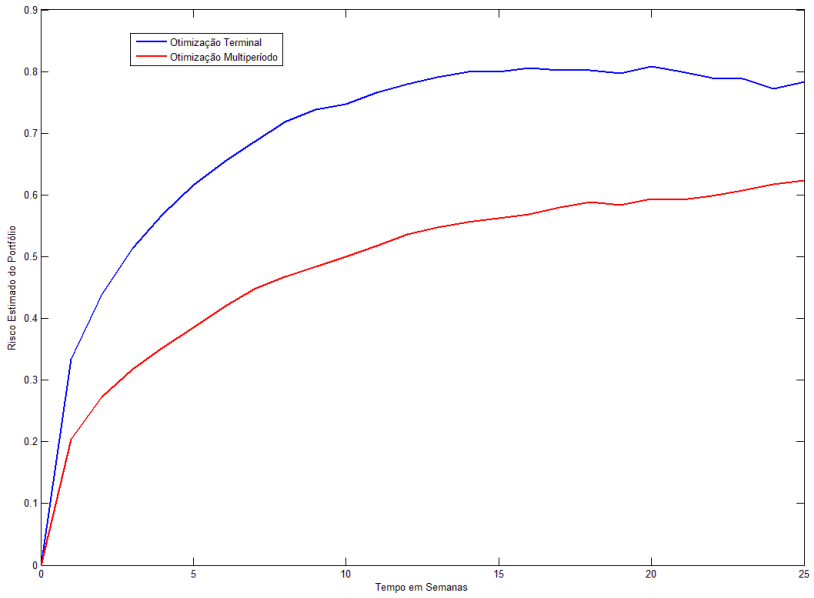

Figura 6.7: Risco Estimado do Portfólio

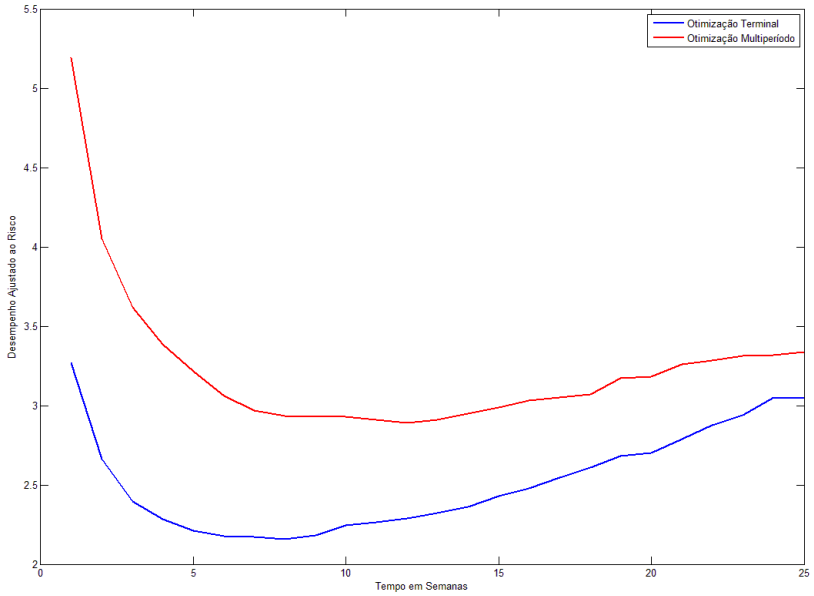

Figura 6.8: Desempenho Ajustado ao Risco

Uma maneira alternativa de avaliar este ponto pode ser visto através do gráfico da figura 6.9. Nele vemos a diferença percentual dos valores anteriores calculados para a otimização multiperíodo frente aos respectivos valores do caso de otimização terminal. Por exemplo, na

curva verde referente ao valor esperado do portfólio, pode se ver que os valores obtidos para o caso multiperíodo ficam abaixo do caso de otimização terminal, tipicamente entre 10% e 14%. Contudo, o risco é ainda menor, o que, neste caso, conta favoravelmente ao modelo de otimização multiperíodo. Neste caso, o risco fica abaixo entre, 20% e 40%. A combinação deste dois efeitos gera a curva em azul referente ao desempenho ajustado ao risco, que fica claramente favorável para o modelo multiperíodo, ficando em média 30% acima.

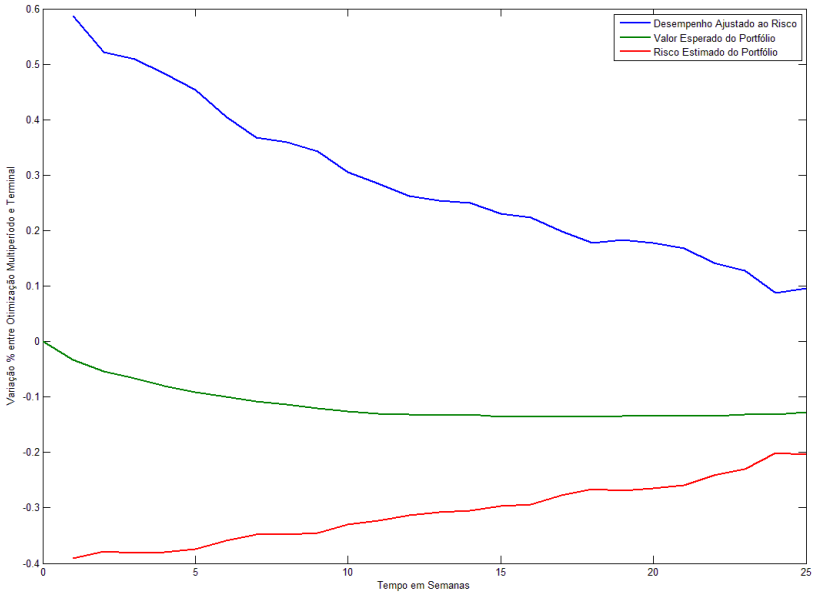

Figura 6.9: Desempenho Comparativo Entre Modelos

Nos gráficos 6.10 e 6.11, podemos ver a alocação em cada ativo em relação ao valor da carteira, para cada passo de tempo. Em termos gerais, os comportamentos são semelhantes, uma vez que tomam decisões de alocação em cada ativo de forma parecida diferindo a intensidade que se expõem a cada ativo. Por exemplo, enquanto na otimização multiperíodo o portfólio fica vendido em Petrobras cerca de 4 vezes o patrimônio, na otimização terminal fica 7 vezes. Em compensação, este último modelo inicia comprado quase 5 vezes seu patrimônio e no outro caso não chega a 3 vezes. De forma geral, pode-se verificar que o modelo de otimização terminal parte de alocação mais forte o que lhe rende um crescimento maior do patrimônio nos primeiros 3 meses e depois acaba convergindo para uma alocação próxima do modelo multiperíodo no resto do tempo.

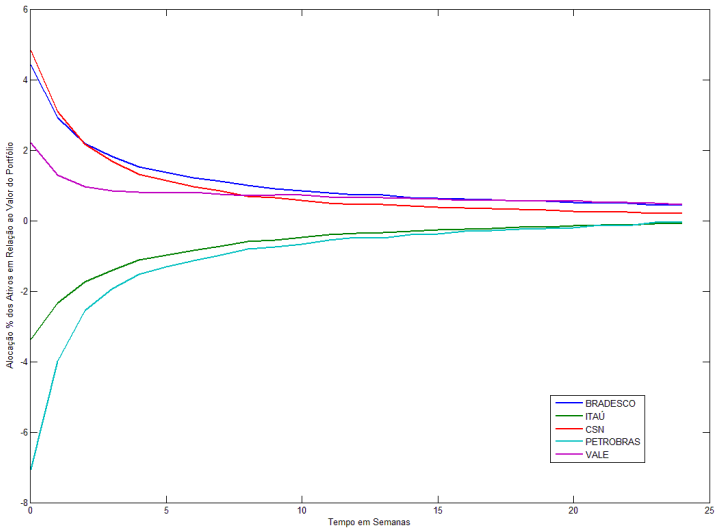

Figura 6.10: Alocação com Otimização Terminal

Com isso, vemos que utilizar uma estratégia de otimizar a cada passo de tempo ou apenas no final do horizonte de investimento é uma decisão que depende essencialmente do apetite de risco do investidor. Caso esteja disposto a correr mais risco para tentar alcançar retornos superiores, poderá fazer uso de um modelo de alocação com otimização terminal apenas. Caso contrário, o mais racional seria utilizar-se de um modelo de otimização multiperíodo.

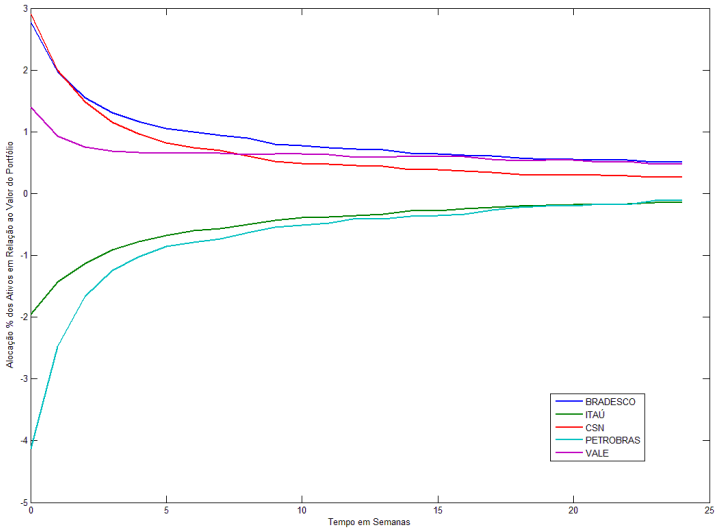

Figura 6.11: Alocação com Otimização Multiperíodo

6.2.2 Simulação de um Portfólio com Ativo Livre de Risco e um *Benchmark*

Neste problema, consideramos uma carteira composta pelos quatro ativos da tabela 6.1: CDI, FX, IBOV e IRFM e o IPCA como *benchmark* para um horizonte de investimento de 25 semanas. O objetivo é minimizar o risco sujeito a alcançar uma rentabilidade mínima. Assim, aplicamos o pro- blema $PC\,(\nu, \epsilon)$. Em particular, temos o caso de um modelo de otimização para um portfólio com ativos de risco e um *benchmark*. Neste caso, como $L_{\theta(t)}(t) = [1, -1]$, a saída é simplesmente o valor do portfólio ativo líquido do *benchmark* ou $y(t) = X(t) - B(t)$. Portanto, desejamos minimizar o erro de rastreamento ou *tracking error* do portfólio em relação ao IPCA, considerando um excesso de rentabilidade mínimo de 6% ao ano.

Apenas recordando que todos os demais critérios para a simulação são os mesmos do exemplo anterior, vemos da figura 6.12 o comportamento do valor esperado líquido do portfólio obtido das 10 mil trajetórias simuladas desde a data de início do investimento até o final do horizonte de investimento. Neste caso, temos uma reta de pontos verdes que representa a rentabilidade mínima exigida de 6% ao ano. Por se tratar de um problema de otimização com restrição intertemporal sobre este parâmetro de rentabilidade, vemos que no caso multiperíodo o modelo seleciona uma alocação de portfólio capaz de gerar um crescimento da carteira ativa acima do IPCA, de forma a superar, com folga, a rentabilidade mínima excedente de 6% ao ano requerida pelo investidor.

Já o caso do modelo de otimização terminal permance a maior parte do tempo abaixo do mínimo, porém no vencimento da estratégia o valor esperado líquido supera ligeiramente a rentabilidade mínima exigida. De fato, atinge uma rentabilidade de 6.2% ao ano acima do IPCA. No caso multiperíodo, por outro lado, a estratégia implementada atinge uma rentabilidade de 8.4% ao ano acima do IPCA. Portanto, resulta aproximadamente em um excesso de retorno de 2.2 pontos percentuais em relação ao retorno mínimo exigido acima do IPCA para a estratégia de otimização terminal. Em outras palavras, um investidor com $\$100$ no início do período terá ao final de um ano aproximadamente $\$106.65$ se apenas corrigir seu capital pelo IPCA, $\$113.09$ se adotar uma estratégia com otimização terminal e um valor esperado final de $\$115.35$ se adotar uma estratégia com otimização multiperíodo. Logo, esperaria ter um ganho adicional em torno de 17.3% acima do ganho esperado para o caso de otimização terminal.

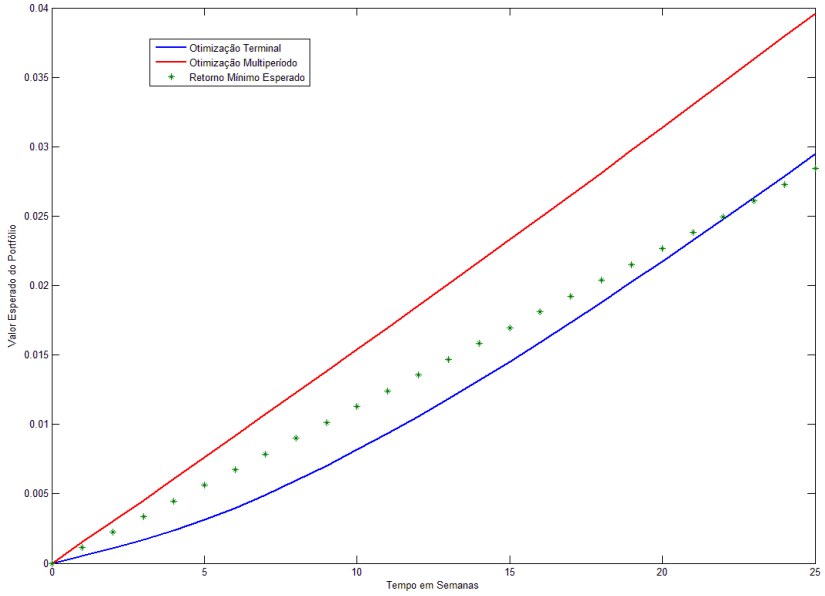

Figura 6.12: Valor Esperado Líquido do Portfólio

Mesmo não tendo um desempenho superior para o valor esperado líquido, a estratégia implementada pelo modelo de otimização terminal possui risco superior ao do modelo multiperíodo de acordo com figura 6.13. Para ilustrar esta questão, podemos ver na figura 6.14 os quantis de 5%, 25%, 50%, 75% e 95% da distribuição das trajetórias simuladas para a evolução da variável de saída $y(t)$. As curvas pontilhadas referem-se ao modelo multiperíodo, e o conjunto de linhas cheias refere-se à otimização terminal. É notória a diferença entre os dois casos. Enquanto para o modelo multiperíodo a dispersão de valores é razoavelmente estável, no caso de otimização terminal, a estratégia implementada gera maior dispersão nos valores simulados, sobretudo nos primeiros $3/4$ de tempo. Mesmo com a curva do quantil contendo os 5% dos casos mais favoráveis para a otimização terminal convergindo, ainda fica claramente descolada das demais curvas, o que acaba puxando o valor esperado líquido para alcançar o objetivo final, no entanto ainda com maior dispersão de valores e, consequentemente, maior risco.

A combinação destes efeitos pode ser vista na figura 6.15, que mostra que o valor líquido do portfólio ajustado por unidade de risco estimado é bastante favorável à estratégia implementada pelo modelo multiperíodo.

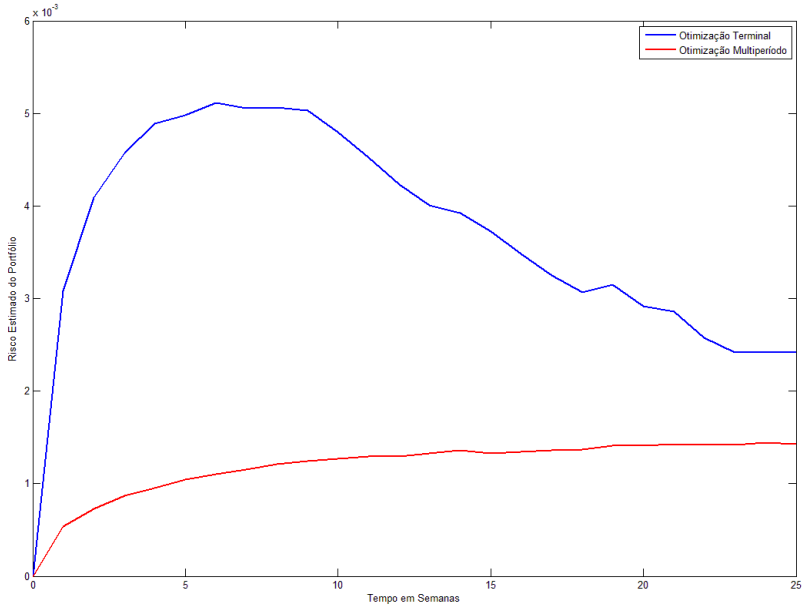

Figura 6.13: Risco Estimado do Portfólio

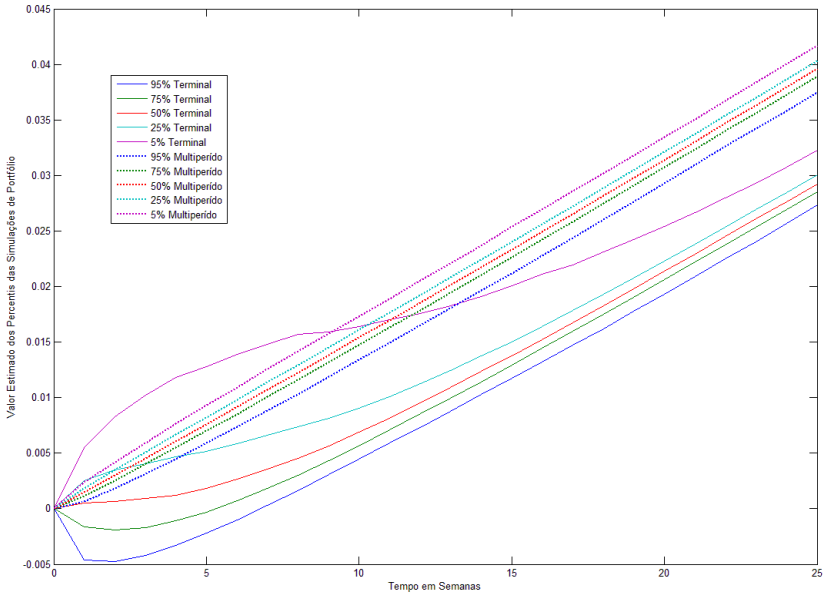

Figura 6.14: Dispersão da Simulação

Em termos de comparação conjunta destas medidas vemos na figura 6.16 que enquanto a estratégia implementada pelo modelo multiperíodo proporciona um valor esperado líquido no mínimo 34% superior e, em média, 87% superior, o risco é no mínimo 40% inferior, o que gera

um efeito combinado que faz com que o desempenho ajustado ao risco no caso multiperíodo seja em média 3 vezes superior.

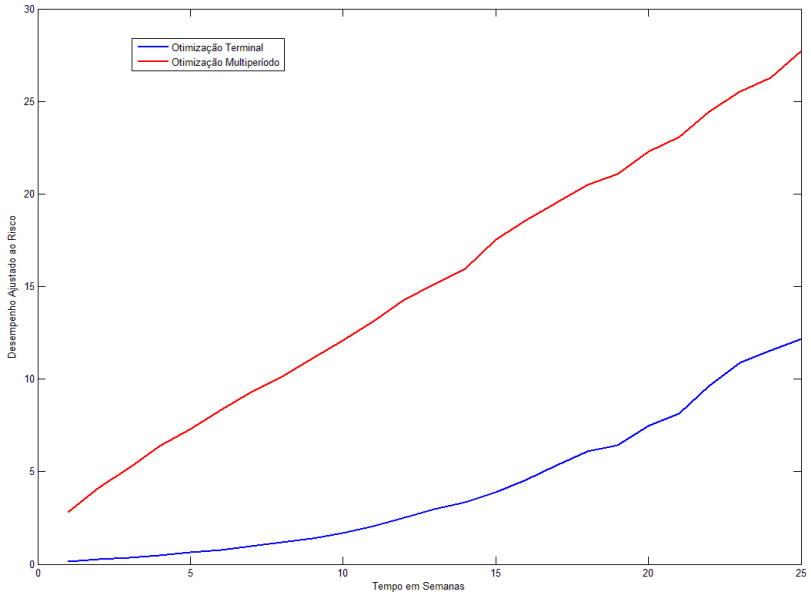

Figura 6.15: Desempenho Ajustado ao Risco

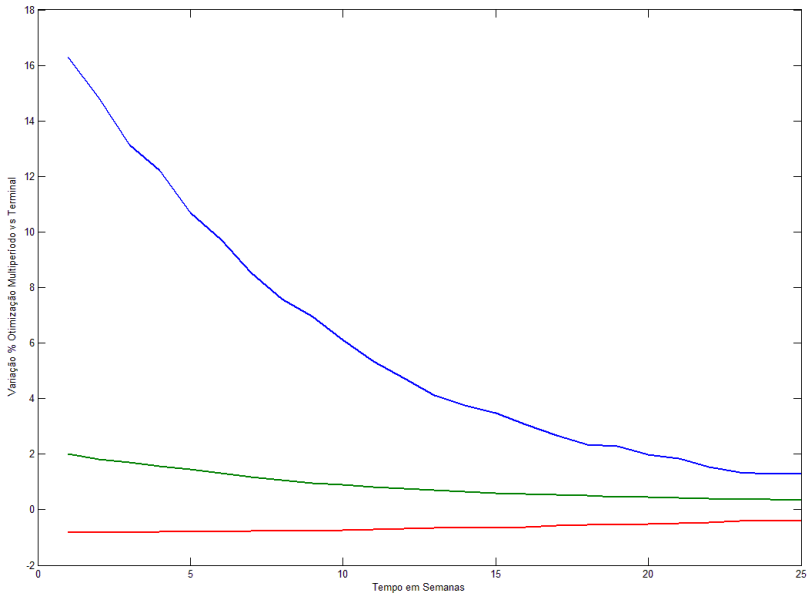

Figura 6.16: Desempenho Comparativo Entre Modelos

Detalhando ainda mais, podemos ver pelas figuras 6.17 e 6.18 a efetiva diferença das estratégias implementadas em cada caso. No modelo multiperíodo a estabilidade na alocação é clara. A carteira fica alocada cerca de 93% de seu patrimônio em CDI, que é livre de risco para efeito de nossos exemplos, e o restante em títulos públicos prefixados. pode-se ver pelos retornos estimados na seção anterior que a rentabilidade mínima acima do IPCA exigida no problema é praticamente alcançada pelo CDI.

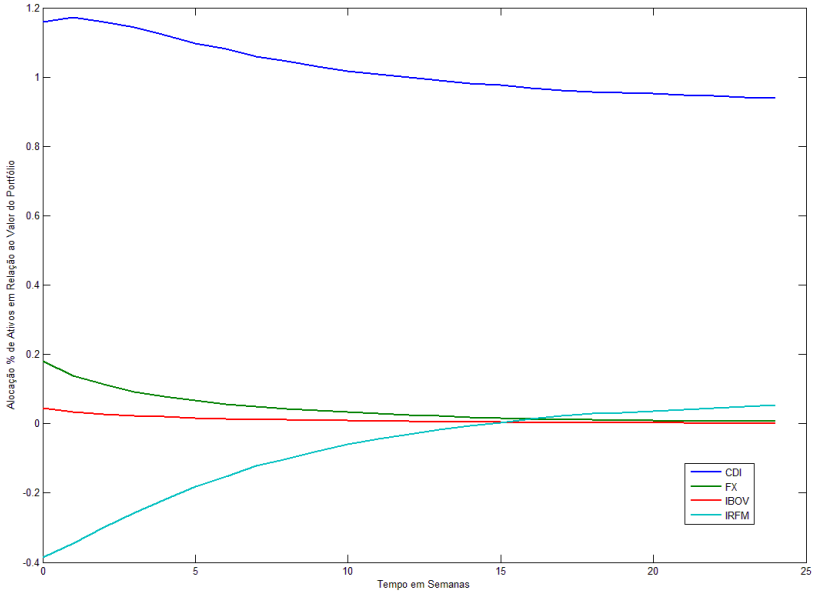

Figura 6.17: Alocação com Otimização Terminal

Já no caso do modelo de otimização terminal, temos que o modelo inicialmente busca uma estratégia alavancada arbitrando o CDI contra os títulos públicos prefixados e ficando levemente comprado em Bolsa e câmbio. Esta estratégia que, em algum grau, permance boa parte do tempo na carteira, é a responsável pelo risco mais elevado, mas que não acaba se traduzindo em um desempenho superior ao modelo com otimização multiperíodo para este horizonte de tempo.

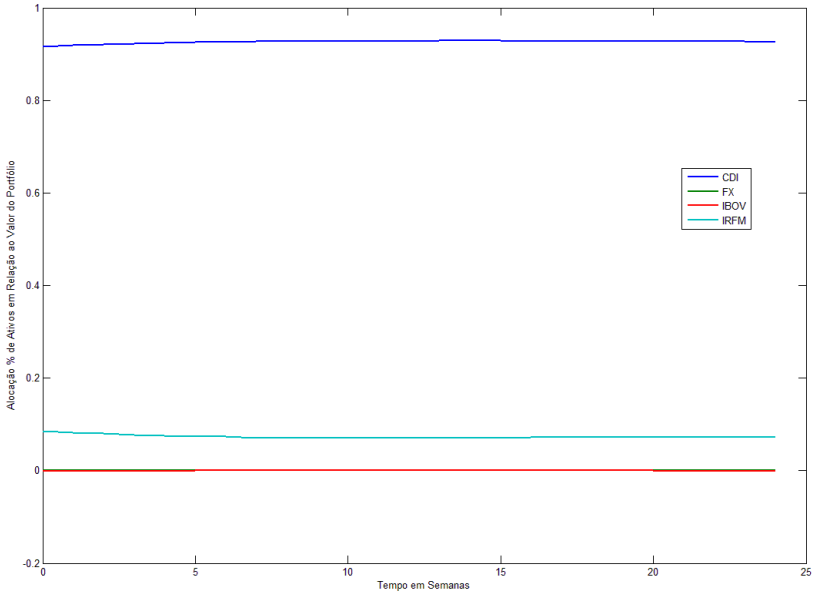

Figura 6.18: Alocação com Otimização Multiperíodo

6.2.3 Simulação de ALM para Fundo de Pensão

Para o caso de ALM, consideramos uma carteira $X(t)$ composta por cinco ativos: CDI, FX, IBOV, IRFM e Ouro. O passivo $Y(t)$ seguirá um processo determinado pelo IPCA, e a dinâmica de saques e resgates líquidos $D(t)$ será obtida da variação da taxa de desemprego do IBGE. Consideraremos um horizonte de investimento de um ano ou 52 semanas. O objetivo é minimizar o risco sujeito a alcançar uma rentabilidade mínima. Assim, aplicamos o problema $PC\,(\nu, \epsilon)$. Para este caso, como $L_{\theta(t)}(t) = [1, -1, 0]$, a saída será o valor do portfólio ativo líquido do crescimento do passivo em função do IPCA mais os fluxos líquidos de aplicações e resgates. Mais especificamente, teremos a variável de saída dada por $y(t) = X(t) - Y(t)$. Portanto, desejamos minimizar o erro de rastreamento do portfólio em relação ao passivo corrigido pelo IPCA e líquido das aplicações e resgates, considerando um excesso de rentabilidade mínima de 6% ao ano.

Todos os demais critérios para a simulação são os mesmos dos exemplos anteriores, à exceção do valor de partida do ativo que se inicia com 94% do valor do passivo e $D(0) = 0.0006$. Assim, o objetivo será de atingir um $E(y(t)) = X(t) - Y(t) \geq \epsilon = 6\%$ saindo de um valor $X(0) - Y(0) = -0.06$.

Nas figuras 6.19 e 6.20 temos o comportamento do valor esperado líquido do portfólio obtido das 10 mil trajetórias simuladas desde a data de início do investimento até o final do horizonte de investimento. No primeiro gráfico vemos a evolução dos valores esperados do passivo e da carteira ativa separadamente para a otimização multiperíodo e terminal. Uma diferença fundamental entre os dois modelos pode ser vista na evolução do valor esperado da carteira ativa nos dois casos. Enquanto na otimização terminal seu crescimento é paulatino, ultrapassando o valor do passivo em aproximadamente 4 meses, no caso multiperíodo o modelo busca uma estratégia que desde o primeiro passo de tempo gera um resultado que atende à restrição $E(y(t)) = X(t) - Y(t) \geq \epsilon = 6\%$. Como veremos mais adiante, para o modelo atender imediatamente a esta restrição acaba pagando o preço da elevação do risco.

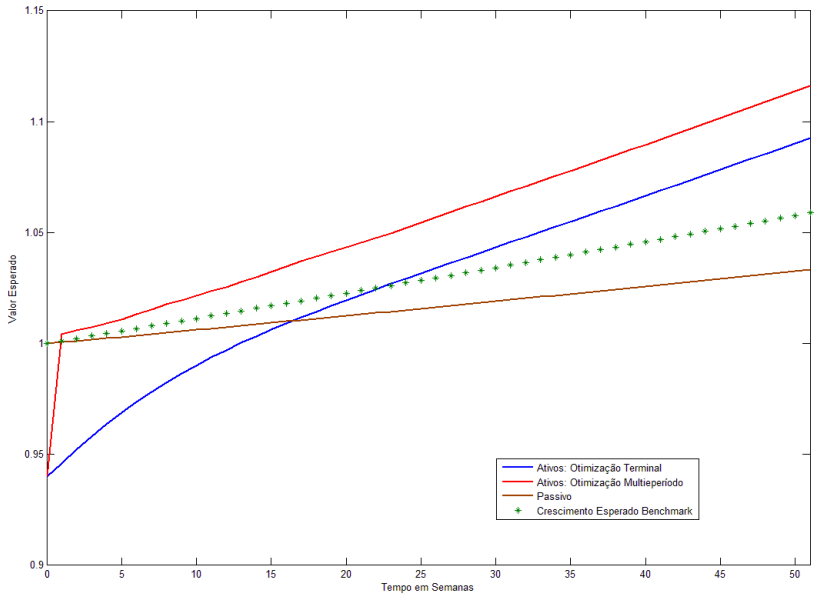

Figura 6.19: Valor Esperado do Portfólio Aberto

Já no gráfico da figura 6.20 podemos ver os resultados consolidados do valor esperado do portfólio líquido dos passivos. Assim, é possível avaliar o atendimento do objetivo de rentabilidade exigida frente ao risco para cada caso. A otimização terminal alcança o objetivo apenas no final do período, praticamente igualando o retorno mínimo exigido acima do IPCA. Mais especificamente, chega em 6.1% acima do IPCA. No caso multiperíodo, por outro lado, a estratégia implementada atinge uma rentabilidade de 8.5% ao ano acima do IPCA, ou seja, resulta aproximadamente em um excesso de retorno de 2.4 pontos percentuais ao ano

em relação ao retorno mínimo exigido acima do IPCA pela otimização terminal. Em outras palavras, um investidor com $\$100$ no início do período terá ao final de um ano aproximadamente $\$106.65$ se apenas corrigir seu capital pelo IPCA, $\$112.77$ se adotar uma estratégia com otimização terminal, e um valor esperado final de $\$115.14$ se adotar uma estratégia com otimização multiperíodo. Logo, esperaria ter um ganho adicional em torno de 18.6% acima do ganho esperado para o caso de otimização terminal.

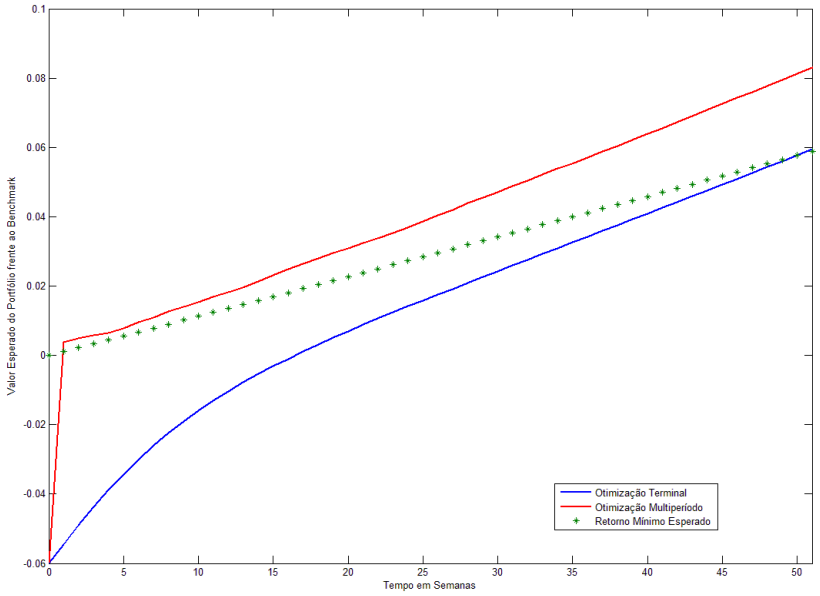

Figura 6.20: Valor Esperado do Portfólio Consolidado

Na figura 6.21, temos o risco para cada estratégia. Devido à necessidade que o modelo multiperíodo possui de encontrar uma alocação que atenda às condições de contorno do problema, ele gera um pico de risco no primeiro momento, convergindo ao longo do tempo para o mesmo patamar de risco do modelo de otimização terminal.

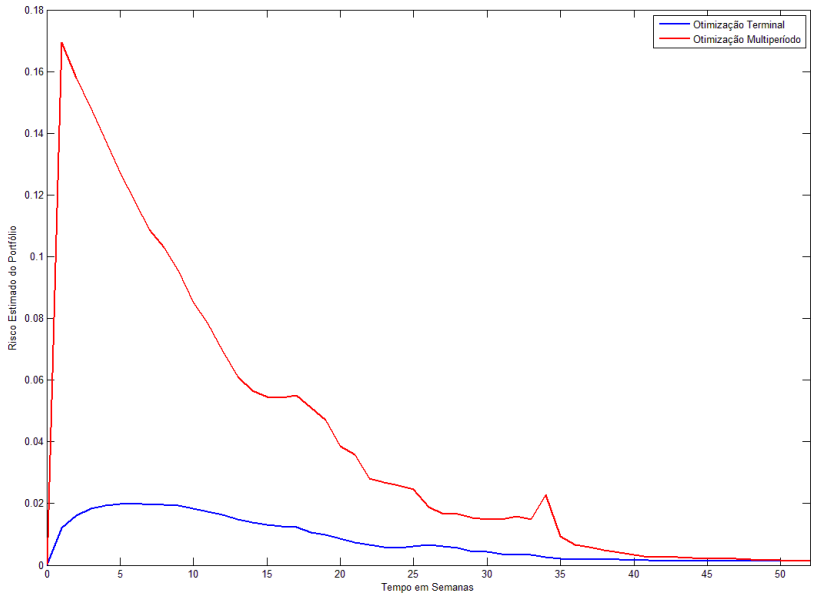

Figura 6.21: Risco Estimado do Portfólio

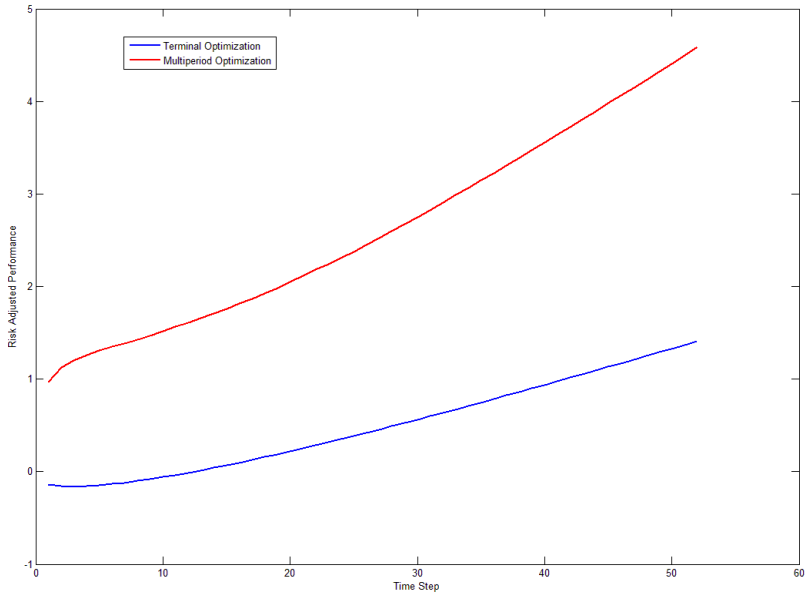

Figura 6.22: Desempenho Ajustado ao Risco

No entanto, vemos na figura 6.22 que o valor líquido esperado para a carteira ajustada ao risco é notoriamente favorável ao modelo multiperíodo.

Por último, nas figuras 6.23 e 6.24 temos a evolução das estratégias de alocação de cada modelo. Para o caso multiperíodo não apresentamos especificamente o primeiro passo por possuir valores muito elevados que distorcem a análise a partir do segundo passo.

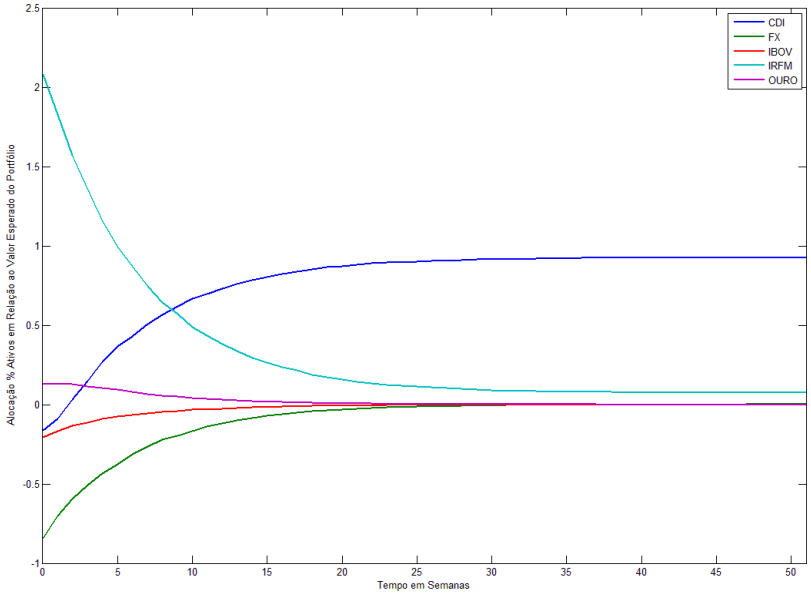

Figura 6.23: Alocação com Otimização Terminal

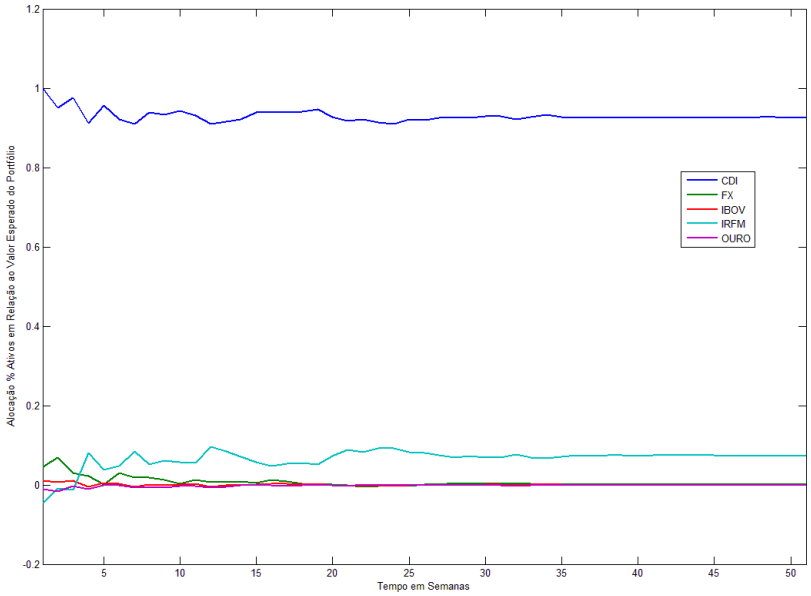

Figura 6.24: Alocação com Otimização Multiperíodo

Deste momento em diante, vemos na figura 6.24 uma alocação em CDI que oscila entre 90% e 95% do patrimônio da carteira. Em segundo lugar vemos a formação de uma posição comprada em títulos públicos prefixados e as demais posições vão para zero.

Já a figura 6.23 mostra uma alocação de seis meses para frente, bastante em linha com o caso multiperíodo. No entanto, notamos uma espécie de convergência assintótica com o passar do tempo, sendo que nos primeiros quatro meses há posições significativas em ativos com risco como Câmbio, Bolsa e Ouro. Assim, vemos que há uma diferença qualitativa nos riscos incorridos nos dois modelos.

Enquanto no modelo multiperíodo o elevado risco se deve à abrupta estratégia de alocação que o modelo procura realizar para atender imediatemente à condição de contorno da rentabilidade mínima, no caso de otimização terminal vemos que seu risco tem origem essencialmente na estratégia que monta com a carteira de ativos.

6.3 Comentários Gerais

Neste capítulo, procuramos ilustrar desde a estimação dos parâmetros para o modelo desenvolvido nos capítulos anteriores até a simulação de três situações de relevância prática. Além dos resultados intrínsecos a este modelo de otimização multiperíodo, também contrastamos seu desempenho com um modelo de otimização terminal apresentado em [31]. Vimos que, embora em alguns casos possa ser gerado um valor esperado para a evolução da variável de saída superior ao mesmo resultado oriundo de um modelo de otimização terminal, sua maior virtude está em ser mais consistente em buscar estratégias que ponderem de forma mais equilibrada a relação risco retorno ao longo do tempo, resultando em um desempenho ajustado ao risco mais equilibrado do que ao se otimizar apenas no vencimento da estratégia.

Capítulo 7

Conclusão

Neste trabalho, consideramos o problema de média-variância através do emprego de controle ótimo estocástico em sistemas lineares a tempo discreto com ruídos multiplicativos e saltos markovianos. Os critérios de desempenho considerados foram o de minimização de um compromisso entre a variância e a esperança da saída do sistema, e uma combinação linear da variância com restrição sobre o valor esperado da saída. Em todos os casos foram considerados critérios de otimização multiperíodo.

Foram apresentadas condições explícitas para a existência de uma estratégia de controle ótimo para os problemas acima e foi apresentada uma forma explícita para calculá-la em 4.19, generalizando resultados anteriores na literatura. Esta lei de controle ótimo é escrita com a realimentação da variável de estado adicionada a uma sequência determinística. Esta solução foi derivada a partir de um conjunto de equações recursivas generalizadas de diferenças de Riccati acopladas em 4.14 e interconectadas com um conjunto de equações lineares recursivas acopladas em 4.15.

Como exemplo de aplicação destes resultados, apresentamos três problemas de seleção de portfólio multiperíodo com mudança de regime. Neste tipo de problema, deseja-se encontrar a melhor alocação entre os ativos de uma carteira com o objetivo de minimizar a soma das variâncias do portfólio ao longo do tempo, observando que seu valor esperado em cada momento pelo menos alcance uma rentabilidade mínima ou, alternativamente, otimizar uma relação risco retorno sem restrições.

Para aplicar este tipo de problema ao modelo desenvolvido no trabalho, mostramos a maneira de fazer a formulação dos diversos casos, assim como estimar os parâmetros necessários para sua simulação numérica. Desta forma, apresentamos dois exemplos de aplicação para carteiras de investimento e uma para ALM em situações próximas da realidade do mercado brasileiro. A título de comparação de seus resultados, consideramos o modelo de otimização terminal apresentado em [31], por se tratar de um caso particular do presente modelo. Assim, pudemos ver que devido às restrições multiperíodo do presente modelo, este acaba buscando estratégias de alocação que apresentam um desempenho do valor esperado de sua saída ajustado ao risco superior ao modelo que considera a otimização somente no final do horizonte de tempo.

7.1 Trabalhos Futuros

Com vistas ao desenvolvimento futuro, podemos citar:

1. Maximizar o valor esperado da saída, restringindo-se sua variância em cada momento. Trata-se de uma terceira estratégia de relevância prática. É comum na gestão de investimentos buscar estratégias de alocação que ofereçam ao investidor o maior retorno possível, controlando-se o risco ao longo do tempo. No entanto, seria essencialmente necessário desenvolver uma formulação adequada para o valor esperado e o risco neste problema, nos mesmos moldes do que foi realizado na Proposição 7. Uma outra derivação neste mesmo sentido também pode ser a de considerar outras medidas de risco como critério de controle, como, por exemplo, *drawdown* máximo.

2. Restrição nas variáveis de controle. Pelas simulações realizadas, fica claro que seria um avanço fundamental para sua aplicação prática, uma vez que não é desejável termos no curto prazo decisões de alocação que permitam alavancagens excessivas na carteira, ainda mais as que permitem posições vendidas elevadas. Contudo, uma solução analítica que considere esta questão deve elevar ainda mais a complexidade do modelo. Ainda assim, julgamos ser um tópico de alta relevância prática e teórica, uma vez que não temos notícia de estudos que incorporem este tipo de restrição tanto em soluções analíticas quanto numéricas.

3. Extensão para considerar horizonte de tempo infinito. Por exemplo, problema de seleção de portfólio com prazo indefinido ou que pressupõe um modo perpétuo de funcionamento, típico de fundos de previdência aberto, onde ao mesmo tempo em que novos benefícios são concedidos, temos o ingresso de novos contribuintes, é um caso de aplicação prática de interesse.

4. Considerar o caso em que os parâmetros $\bar{A}_{\theta(t)}(t)$, $\widetilde{A}_{\theta(t)}(t)$, $\bar{B}_{\theta(t)}(t)$ e $\widetilde{B}_{\theta(t)}(t)$ possuem incertezas paramétricas, ou seja, além de as variáveis de estado e saída possuírem um comportamento estocástico em função dos ruídos multiplicativos e da mudança de regime através do processo markoviano de estados, os elementos que compõem estas matrizes também passariam a ser incertos. Este fato poderia ser de interesse, na medida em que se considere processos com horizonte de tempo mais elevado. Por exemplo, problemas de seleção de portfólio que considerem vários anos à frente poderiam considerar que os fatores de mercado possuem incertezas para descrever sua evolução ao longo do tempo.

5. Incorporar momentos de ordem superior. Praticantes e pesquisadores que já lidaram com dados de mercado sabem que a distribuição dos retornos dos ativos dificilmente segue um formato que se ajuste a uma distribuição gaussiana. Maiores detalhes podem ser vistos, por exemplo, em Mandelbrot [74] ou, mais recentemente, em Chao-lin [20] e Harvey *et al.* [57]. O fato de muitos modelos em finanças utilizam-se desta premissa é sobretudo pela facilidade do tratamento matemático, compreensão do modelo e estimação, segundo Jondeau *et al.* em [64]. Contudo, principalmente com as frequentes situações *fora da normalidade*, este tipo de premissa pode ser bastante perigosa, podendo levar a decisões de investimento incorretas devido à subestimação de eventos extremos. Assim, é de relevância prática e atual incorporar aos modelos de seleção de portfólio momentos de ordem superior como curtose e assimetria, os quais poderiam contribuir para tornar a distribuição do processo de riqueza ao longo do tempo mais próxima da realidade.

6. Risco de Insolvência. Basicamente são três questões: a primeira referente à incorporação do risco de crédito dos ativos em conjunto com o risco de mercado classicamente considerado nos problemas de seleção de portfólio. De fato, com as recorrentes crises financeiras é cada vez mais nítida a demanda por modelos capazes de integrar

abordagens que, até então, têm sido consideradas de forma separada. A segunda questão refere-se à consideração do controle de solvência, na linha proposta em [116], decorrente da possibilidade de determinadas alocações permitirem a ocorrência de valores negativos para o portfólio ao longo do horizonte de tempo considerado. A terceira questão refere-se ao controle de insolvência de um portfólio em virtude do descasamento entre a rentabilidade obtida ao longo do tempo, em função das alocações realizadas em cada estado de mercado, e as exigências em termos de resgates do passivo. Embora haja uma questão subjacente em termos do controle do risco de liquidez, nos referimos ao caso clássico de fundos de pensão, em que os investidores realizam aportes periódicos no fundo com vistas a adquirir o direito de fazer resgates no futuro de forma a complementar ou garantir sua renda em caso de aposentadoria. Em outras palavras, o fundo assume a obrigação de honrar os compromissos assumidos frente a seus cotistas no futuro e, caso esta situação não venha a ocorrer, o fundo poderá ser considerado insolvente frente a seus contribuintes.

7. Preferências entre risco e retorno. Sobretudo para problemas de alocação de recursos de longo prazo, é necessário que se considere modelos de utilidade esperada para estimar de forma explícita a dinâmica da aversão individual e absoluta ao risco. De acordo com Zenios e Ziemba [109], a escolha de uma sequência de funções utilidade para cada passo de tempo pode forçar a trajetória do processo de riqueza ao longo dos diferentes cenários do problema de otimização. Com este objetivo, diferentes tipos de funções utilidade podem ser aplicadas para desempenhar esta função com diferentes propriedades de risco, como, por exemplo, utilidade quadrática, logarítmica, potência ou exponencial, conforme pode ser visto, por exemplo, em Hakansson [55].

8. Passivo atuarial considerando tábuas de mortalidade para o problema de ALM. No caso apresentado, utilizamos um processo estocástico para representar o comportamento do passivo. No entanto, a principal característica deste tipo de problema é seu horizonte de investimento ser de muito longo prazo, podendo atravessar décadas ou gerações. Assim, é importante que o problema de seleção de portfólio neste caso considere o principal risco subjacente a este tipo de investimento: o descasamento entre retornos esperados, ajustados ao risco, para os diferentes ativos disponíveis para alocação frente às metas atuariais e a crescente expectativa de vida da população. Estes três fatores

são comumente apontados como a causa da insolvência da maioria dos planos de previdência, conforme pode ser visto em Bertocchi, Schwartz e Ziemba [10] e Micocci, Gregoriou e Masala [83]. Assim, seria de grande interesse prático que uma abordagem como a apresentada no presente trabalho fosse capaz de contemplar esta questão em sua formulação.

Apêndice A

Demonstração de Proposições

A.1 Proposição 1

Considere $Y \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ e $M \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^m)$ com $Y \geq 0$ e $M \geq 0$. Seja A e B matrizes estocásticas (isto é, cada elemento da matriz é uma variável aleatória) em $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathbb{B}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ respectivamente. Então:

- $E(A'YA) - E(A'YB)\Big(E(B'YB + M)\Big)^{\dagger} E(B'YA) \geq 0$ e
- $E(A'YB) = E(A'YB)\Big(E(B'YB) + M\Big)^{\dagger}\Big(E(B'YB) + M\Big)$.

Demonstração. De acordo com a Proposição 3 em [28], considere a seguinte matriz estocástica:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & YB \\ B'Y & R \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

em que $R = B'YB + M$.

A partir do complemento de Schur, temos que:

- $Q_{11} = Y \geqslant 0$;
- derivado das propriedades da inversa de Moore-Penrose onde $YY^{\dagger}Y = Y$, temos: $Q_{12} = YB = Q_{11}Q_{11}^{\dagger}Q_{12} = YY^{\dagger}YB$.

- Da mesma forma, temos:

  $Q_{22} - Q'_{12}Q_{11}^{\dagger}Q_{12} = R - B'YY^{\dagger}YB = R - B'YB = M \geqslant 0.$

  Assim,

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & YB \\ B'Y & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'YA & A'YB \\ B'YA & R \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Tomando-se o valor esperado, temos:

$$\begin{pmatrix} E(A'YA) & E(A'YB) \\ E(B'YA) & E(R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{Q}_{11} & \widetilde{Q}_{12} \\ \widetilde{Q}'_{12} & \widetilde{Q}_{22} \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Novamente, utilizando o complemento de Schur, temos

$$0 \leqslant \widetilde{Q}_{11} - \widetilde{Q}_{12}\widetilde{Q}_{22}^{\dagger}\widetilde{Q}'_{12} = E(A'YA) - E(A'YB)E(R)^{\dagger}E(B'YA)$$

demonstrando a primeira desigualdade.

Por outro lado, tomando-se

$$\widetilde{Q}_{12} = E(A'YB) = \widetilde{Q}_{12}\widetilde{Q}_{22}^{\dagger}\widetilde{Q}_{22} = E(A'YB)E(R)^{\dagger}E(R)$$

demonstramos a segunda relação. □

A.2 Proposição 2

Para $G = G' \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ e $H \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ segue que $H(I - GG^\dagger) = 0$ se e somente se $\mathrm{Ker}(G) \subseteq \mathrm{Ker}(H)$.

Demonstração. Conforme pode ser visto em maiores detalhes em [2], mostramos a implicação reversa utilizando decomposição de valor singular (SVD) da matriz G, de forma que

$$G = V \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V',$$

em que Σ é uma matriz diagonal não-singular e V é tal que $VV' = I$. Mais ainda, V é decomponível em $V = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}$ onde as colunas de V_2 formam uma base para $\mathrm{Ker}(G)$. Pode-se deduzir então que a inversa generalizada da matriz G, ou seja, $G^\dagger$ é dada por

$$G^\dagger = V \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V'.$$

Portanto, $H(I - GG^\dagger) = HV_2V_2'$, e como $GV_2 = 0$, temos que $HV_2 = 0$ completando a prova. □

A.3 Proposição 3

Se $P = (P_1, \ldots, P_N) \in \mathbb{H}^{n+}$ e $V = (V_1, \ldots, V_N) \in \mathbb{H}^{n,1}$, então $\mathcal{P}(k, P) \in \mathbb{H}^{n+}$ e

$$\mathcal{G}_i(k, P)' = \mathcal{G}_i(k, P)'\mathcal{R}_i(k, P)^{\dagger}\mathcal{R}_i(k, P). \tag{A.1}$$

Demonstração. O resultado segue da segunda relação da Proposição 1 após definir que

- $M = 0$;
- $A = \bar{A}_i(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{A}_{i,s}(k) w_s^x(k)$;
- $B = \bar{B}_i(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{B}_{i,s}(k) w_s^u(k)$;
- $Y = \mathcal{E}_i(k, P)$.

Assim, considerando as hipóteses feitas para $\{w_s^x(k)\}$ e $\{w_s^u(k)\}$ na seção de Notações e Definições e os operadores em (4.6), vemos que

$$E(A'YA) = E[(\bar{A}_i(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{A}_{i,s}(k) w_s^x(k))'\mathcal{E}_i(k, P)(\bar{A}_i(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{A}_{i,s}(k) w_s^x(k))] =$$

$$E[\bar{A}_i(k)'\mathcal{E}_i(k, P)\bar{A}_i(k) + \bar{A}_i(k)'\mathcal{E}_i(k, P) \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{A}_{i,s}(k) w_s^x(k) +$$

$$\sum_{s=1}^{\varepsilon} w_s^x(k)'\widetilde{A}_{i,s}(k)'\mathcal{E}_i(k, P)\bar{A}_i(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} w_s^x(k)'\widetilde{A}_{i,s}(k)'\mathcal{E}_i(k, P) \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{A}_{i,s}(k) w_s^x(k)] =$$

$$\bar{A}_i(k)'\mathcal{E}_i(k, P)\bar{A}_i(k) + \bar{A}_i(k)'\mathcal{E}_i(k, P) \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{A}_{i,s}(k) E[w_s^x(k)] +$$

$$\sum_{s=1}^{\varepsilon} E[w_s^x(k)']\widetilde{A}_{i,s}(k)'\mathcal{E}_i(k, P)\bar{A}_i(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{A}_{i,s}(k)'\mathcal{E}_i(k, P) \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{A}_{i,s}(k) E[w_s^x(k)' w_s^x(k)].$$

Portanto

$$E(A'YA) = \bar{A}_i(k)'\mathcal{E}_i(k, P)\bar{A}_i(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{A}_{i,s}(k)'\mathcal{E}_i(k, X)\widetilde{A}_{i,s}(k) = \mathcal{A}_i(k, P).$$

Para $E(A'YB)$, temos

$$E(A'YB) = E[(\bar{A}_i(k) + \sum_{s_1=1}^{\varepsilon} \widetilde{A}_{i,s_1}(k) w_{s_1}^x(k))' \mathcal{E}_i(k,P)(\bar{B}_i(k) + \sum_{s_2=1}^{\varepsilon} \widetilde{B}_{i,s_2}(k) w_{s_2}^u(k))] =$$

$$E[\bar{A}_i(k)' \mathcal{E}_i(k,P)\bar{B}_i(k) + \bar{A}_i(k)' \mathcal{E}_i(k,P) \sum_{s_2=1}^{\varepsilon} \widetilde{B}_{i,s_2}(k) w_{s_2}^u(k) +$$

$$\sum_{s_1=1}^{\varepsilon} w_{s_1}^x(k)' \widetilde{A}_{i,s_1}(k)' \mathcal{E}_i(k,P)\bar{B}_i(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} w_{s_1}^x(k)' \widetilde{A}_{i,s_1}(k)' \mathcal{E}_i(k,P) \sum_{s_2=1}^{\varepsilon} \widetilde{B}_{i,s_2}(k) w_{s_2}^u(k)] =$$

$$\bar{A}_i(k)' \mathcal{E}_i(k,P)\bar{B}_i(k) + \bar{A}_i(k)' \mathcal{E}_i(k,P) \sum_{s_2=1}^{\varepsilon} \widetilde{B}_{i,s_2}(k) E[w_{s_2}^u(k)] +$$

$$\sum_{s_1=1}^{\varepsilon} E[w_{s_1}^x(k)'] \widetilde{A}_{i,s_1}(k)' \mathcal{E}_i(k,P)\bar{B}_i(k) + \sum_{s_1=1}^{\varepsilon} \widetilde{A}_{i,s_1}(k)' \mathcal{E}_i(k,P) \sum_{s_2=1}^{\varepsilon} \widetilde{B}_{i,s_2}(k) E[w_{s_1}^x(k)' w_{s_2}^u(k)].$$

Portanto

$$\begin{aligned} E(A'YB) =& \bar{A}_i(k)' \mathcal{E}_i(k,P)\bar{B}_i(k) \\ &+ \sum_{s_1=1}^{\varepsilon} \sum_{s_2=1}^{\varepsilon} [\rho_{s_1,s_2}(k) \widetilde{A}_{i,s_1}(k)' \mathcal{E}_i(k,X) \widetilde{B}_{i,s_2}(k)] = \mathcal{G}_i(k,P)'. \end{aligned}$$

Para $E(B'YB)$, temos

$$E(B'YB) = E[(\bar{B}_i(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{B}_{i,s}(k) w_s^u(k))' \mathcal{E}_i(k,P)(\bar{B}_i(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{B}_{i,s}(k) w_s^u(k))] =$$

$$E[\bar{B}_i(k)' \mathcal{E}_i(k,P)\bar{B}_i(k) + \bar{B}_i(k)' \mathcal{E}_i(k,P) \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{B}_{i,s}(k) w_s^u(k) +$$

$$\sum_{s=1}^{\varepsilon} w_s^u(k)' \widetilde{B}_{i,s}(k)' \mathcal{E}_i(k,P)\bar{B}_i(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} w_s^u(k)' \widetilde{B}_{i,s}(k)' \mathcal{E}_i(k,P) \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{B}_{i,s}(k) w_s^u(k)] =$$

$$\bar{B}_i(k)' \mathcal{E}_i(k,P)\bar{B}_i(k) + \bar{B}_i(k)' \mathcal{E}_i(k,P) \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{B}_{i,s}(k) E[w_s^u(k)] +$$

$$\sum_{s=1}^{\varepsilon} E[w_s^u(k)'] \widetilde{B}_{i,s}(k)' \mathcal{E}_i(k,P)\bar{B}_i(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{B}_{i,s}(k)' \mathcal{E}_i(k,P) \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{B}_{i,s}(k) E[w_s^u(k)' w_s^u(k)].$$

Portanto

$$E(B'YB) = \bar{B}_i(k)' \mathcal{E}_i(k,P)\bar{B}_i(k) + \textstyle\sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{B}_{i,s}(k)' \mathcal{E}_i(k,X) \widetilde{B}_{i,s}(k) = \mathcal{R}_i(k,P).$$

Das relações acima, obtemos para $\mathcal{P}_i(k,P)$ a seguinte relação

$$\mathcal{P}_i(k,P) = \mathcal{A}_i(k,P) - \mathcal{G}_i(k,P)' \mathcal{R}_i(k,P)^{\dagger} \mathcal{G}_i(k,P) + \nu(k) L_i(k)' L_i(k) =$$

$$E(A'YA) - E(A'YB) E(B'YB)^{\dagger} E(A'YB)' + \nu(k) L_i(k)' L_i(k).$$

Adicionalmente, considerando-se da Proposição 1, com $M = 0$, que

$$E(A'YB) = E(A'YB)E(B'YB)^{\dagger}E(B'YB)$$

é fácil verificar que

$$\mathcal{G}_i(k,P)' = \mathcal{G}_i(k,P)'\mathcal{R}_i(k,P)^{\dagger}\mathcal{R}_i(k,P).$$

$\square$

A.4 Proposição 4

Se $P = (P_1, \ldots, P_N) \in \mathbb{H}^{n+}$, $V = (V_1, \ldots, V_N) \in \mathbb{H}^{n,1}$, $\gamma \in \mathbb{H}^1$ e para cada $i = 1, \ldots, N$,

$$\mathcal{H}_i(k, V) \in \mathrm{Im}(\mathcal{R}_i(k, P)), \tag{A.2}$$

então para qualquer $u_k \in \mathbb{U}(k)$,

$$\begin{aligned}
&E\Big(\nu(k)y(k)^2 - \lambda(k)y(k) + x(k+1)'P_{\theta(k+1)}x(k+1) - V_{\theta(k+1)}x(k+1) + \gamma_{\theta(k+1)}|\mathcal{F}_k\Big) = \\
&x(k)'\mathcal{P}_{\theta(k)}(k, P)x(k) + \Big(u(k) + a_{\theta(k)}(x(k))\Big)'\mathcal{R}_{\theta(k)}(k, P)\Big(u(k) + a_{\theta(k)}(x(k))\Big) \\
&- \mathcal{V}_{\theta(k)}(k, P, V)x(k) + \mathcal{D}_{\theta(k)}(k, P, V, \gamma),
\end{aligned} \tag{A.3}$$

em que para $i = 1, \ldots, N$,

$$a_i(x) = \mathcal{R}_i(k, P)^{\dagger}\Big(\mathcal{G}_i(k, P)x - \frac{1}{2}\mathcal{H}_i(k, V)\Big). \tag{A.4}$$

Demonstração. Partindo-se da equação (3.1), temos

$$\begin{aligned}
&x(k+1)'P_{\theta(k+1)}x(k+1) = \Big[\Big(x(k)'[\bar{A}_{\theta(k)}(k)' + \sum_{s=1}^{\varepsilon} w_s^x(k)'\widetilde{A}_{\theta(k),s}(k)']\Big) + \\
&\Big(u(k)'[\bar{B}_{\theta(k)}(k)' + \sum_{s=1}^{\varepsilon} w_s^u(k)'\widetilde{B}_{\theta(k),s}(k)']\Big)\Big]P_{\theta(k+1)}\Big[\Big([\bar{A}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{A}_{\theta(k),s}(k)w_s^x(k)]x(k)\Big) + \\
&\Big([\bar{B}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{B}_{\theta(k),s}(k)w_s^u(k)]u(k)\Big)\Big] = \Big(x(k)'[\bar{A}_{\theta(k)}(k)' + \sum_{s=1}^{\varepsilon} w_s^x(k)'\widetilde{A}_{\theta(k),s}(k)']\Big) \\
&P_{\theta(k+1)}\Big([\bar{A}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{A}_{\theta(k),s}(k)w_s^x(k)]x(k)\Big) + \Big(x(k)'[\bar{A}_{\theta(k)}(k)' + \sum_{s=1}^{\varepsilon} w_s^x(k)'\widetilde{A}_{\theta(k),s}(k)']\Big) \\
&P_{\theta(k+1)}\Big([\bar{B}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{B}_{\theta(k),s}(k)w_s^u(k)]u(k)\Big) + \Big(u(k)'[\bar{B}_{\theta(k)}(k)' + \sum_{s=1}^{\varepsilon} w_s^u(k)'\widetilde{B}_{\theta(k),s}(k)']\Big) \\
&P_{\theta(k+1)}\Big([\bar{A}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{A}_{\theta(k),s}(k)w_s^x(k)]x(k)\Big) + \Big(u(k)'[\bar{B}_{\theta(k)}(k)' + \sum_{s=1}^{\varepsilon} w_s^u(k)'\widetilde{B}_{\theta(k),s}(k)']\Big) \\
&P_{\theta(k+1)}\Big([\bar{B}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{B}_{\theta(k),s}(k)w_s^u(k)]u(k)\Big).
\end{aligned}$$

Considerando-se as hipóteses feitas para $\{w_s^x(k)\}$ e $\{w_s^u(k)\}$ na seção de Notações e Definições, o operador $\mathcal{E}_i(k, X)$ de (4.6) e por se tratar de um sistema markoviano, temos que

$$E\Big(P_{\theta(k+1)}|\mathcal{F}_k\Big) = E\Big(P_{\theta(k+1)}|\theta(k)\Big) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(k)P_j = \mathcal{E}_{\theta(k)}(k, P).$$

Portanto, o valor esperado da relação acima, condicionado ao estado atual $\theta(k)$ em que se encontra o mercado, é dado por

$$
\begin{aligned}
&E\Big(x(k+1)'P_{\theta(k+1)}x(k+1)|\mathcal{F}_k\Big) = \\
&x(k)'\Big(\bar{A}_{\theta(k)}(k)'\mathcal{E}_{\theta(k)}(k,P)\bar{A}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon}\widetilde{A}_{\theta(k),s}(k)'\mathcal{E}_{\theta(k)}(k,P)\widetilde{A}_{\theta(k),s}(k)\Big)x(k)+ \\
&2x(k)'\Big(\bar{A}_{\theta(k)}(k)'\mathcal{E}_{\theta(k)}(k,P)\bar{B}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s_1=1}^{\varepsilon}\sum_{s_2=1}^{\varepsilon}\rho_{s_1,s_2}(k)\widetilde{A}_{\theta(k),s_1}(k)'\mathcal{E}_{\theta(k)}(k,P)\widetilde{B}_{\theta(k),s_2}(k)\Big)u(k)+ \\
&u(k)'\Big(\bar{B}_{\theta(k)}(k)'\mathcal{E}_{\theta(k)}(k,P)\bar{B}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon}\widetilde{B}_{\theta(k),s}(k)'\mathcal{E}_{\theta(k)}(k,P)\widetilde{B}_{\theta(k),s}(k)\Big)u(k). \qquad \text{(A.5)}
\end{aligned}
$$

De forma análoga, temos que

$$
\begin{aligned}
&V_{\theta(k+1)}x(k+1) = \\
&V_{\theta(k+1)}\Big[(\bar{A}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon}\widetilde{A}_{\theta(k),s}(k)w_s^x(k))x(k) + (\bar{B}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon}\widetilde{B}_{\theta(k),s}(k)w_s^u(k))u(k)\Big].
\end{aligned}
$$

Também temos que

$$
E\Big(V_{\theta(k+1)}|\mathcal{F}_k\Big) = E\Big(V_{\theta(k+1)}|\theta(k)\Big) = \sum_{j=1}^{N}p_{ij}(k)V_j = \mathcal{E}_{\theta(k)}(k,V).
$$

Assim, o valor esperado desta relação acima, condicionado ao estado atual $\theta(k)$ em que se encontra o mercado, é dado por

$$
E\Big(V_{\theta(k+1)}x(k+1)|\mathcal{F}_k\Big) = \mathcal{E}_{\theta(k)}(k,V)\Big(\bar{A}_{\theta(k)}(k)x(k) + \bar{B}_{\theta(k)}(k)u(k)\Big). \qquad \text{(A.6)}
$$

Da mesma forma dos casos anteriores, pode-se facilmente mostrar que

$$
E\Big(\gamma_{\theta(k+1)}|\mathcal{F}_k\Big) = \mathcal{E}_{\theta(k)}(k,\gamma). \qquad \text{(A.7)}
$$

Note que nas equações (A.5), (A.6) e (A.7) utilizamos o fato de que, embora a σ-álgebra $\mathcal{F}_k$ seja maior que a σ-álgebra gerada pelas variáveis aleatórias $\theta(j), 0 \leq j \leq k$, ainda temos que $E[1_{\{\theta(k+1)=j\}}|\mathcal{F}_k] = p_{\theta(k)j}(k)$, considerando o Corolário 7.2 em [42]. Portanto, observando-se que, a partir da relação (3.2), o valor da variável de saída no passo k é conhecido em função do valor da variável de estado no mesmo passo, conclui-se que

- $y(k)^2 = y(k)'y(k) = x(k)'L(k)'L(k)x(k)$;
- $E\Big(y(k)|\mathcal{F}_k\Big) = y(k)$;
- $E\Big(y(k)^2|\mathcal{F}_k\Big) = y(k)^2$.

Considerando este fato em conjunto com as equações (A.5), (A.6) e (A.7) na relação (A.3), temos

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\nu(k)y(k)^2 - \lambda(k)y(k) + x(k+1)'P_{\theta(k+1)}x(k+1) - V_{\theta(k+1)}x(k+1) + \gamma_{\theta(k+1)}|\mathcal{F}_k\Big) = \\
&x(k)'L(k)'L(k)x(k) - \lambda(k)L_{\theta(k)}(k)x(k) + x(k)'\Big(\bar{A}_{\theta(k)}(k)'\mathcal{E}_{\theta(k)}(k,P)\bar{A}_{\theta(k)}(k) + \\
&\sum_{s=1}^{\varepsilon}\widetilde{A}_{\theta(k),s}(k)'\mathcal{E}_{\theta(k)}(k,P)\widetilde{A}_{\theta(k),s}(k)\Big)x(k) + 2x(k)'\Big(\bar{A}_{\theta(k)}(k)'\mathcal{E}_{\theta(k)}(k,P)\bar{B}_{\theta(k)}(k) + \\
&\sum_{s_1=1}^{\varepsilon}\sum_{s_2=1}^{\varepsilon}\rho_{s_1,s_2}(k)\widetilde{A}_{\theta(k),s_1}(k)'\mathcal{E}_{\theta(k)}(k,P)\widetilde{B}_{\theta(k),s_2}(k)\Big)u(k) + u(k)'\Big(\bar{B}_{\theta(k)}(k)'\mathcal{E}_{\theta(k)}(k,P)\bar{B}_{\theta(k)}(k) + \\
&\sum_{s=1}^{\varepsilon}\widetilde{B}_{\theta(k),s}(k)'\mathcal{E}_{\theta(k)}(k,P)\widetilde{B}_{\theta(k),s}(k)\Big)u(k) + \mathcal{E}_{\theta(k)}(k,V)\Big[\bar{A}_{\theta(k)}(k)x(k) + \bar{B}_{\theta(k)}(k)u(k)\Big] + \mathcal{E}_{\theta(k)}(k,\gamma).
\end{aligned}
$$

Rearranjando os termos e considerando os operadores em (4.6), chega-se facilmente ao seguinte resultado

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\nu(k)y(k)^2 - \lambda(k)y(k) + x(k+1)'P_{\theta(k+1)}x(k+1) - V_{\theta(k+1)}x(k+1) + \gamma_{\theta(k+1)}|\mathcal{F}_k\Big) = \\
&\Big\{x(k)'\Big(\mathcal{A}_{\theta(k)}(k,P) + \nu(k)L_{\theta(k)}(k)'L_{\theta(k)}(k)\Big)x(k) \\
&+ 2x(k)'\mathcal{G}_{\theta(k)}(k,P)'u(k) + u(k)'\mathcal{R}_{\theta(k)}(k,P)u(k)\Big\} \\
&- \Big\{\mathcal{E}_{\theta(k)}(k,V)\Big(\bar{A}_{\theta(k)}(k)x(k) + \bar{B}_{\theta(k)}(k)u(k)\Big) + \lambda(k)L_{\theta(k)}(k)x(k)\Big\} + \mathcal{E}_{\theta(k)}(k,\gamma). \qquad \text{(A.8)}
\end{aligned}
$$

Estabelecendo por simplicidade que $x(k) = x$, $u(k) = u$, $\theta(k) = i$, reorganizando os termos do lado direito de (A.8) e considerando apenas os termos independentes em u, obtemos uma $f(u)$, tal que

$$
f(u) = u'\mathcal{R}_i(k,P)u + 2\Big(x'\mathcal{G}_i(k,P)' - \frac{1}{2}\mathcal{E}_i(k,V)\bar{B}_i(k)\Big)u. \qquad \text{(A.9)}
$$

Como, por hipótese, $P \in \mathbb{H}^{n+}$, ou seja, é simétrica positiva semidefinida, temos que $\mathrm{Im}(\mathcal{R}_i(k,P)) = \mathrm{Im}(\mathcal{R}_i(k,P)^\dagger)$, e da seção de Notações e Definições, vemos que $\mathrm{Im}(\mathcal{R}_i(k,P)^\dagger)$ $= \mathrm{Ker}(\mathcal{R}_i(k,P)^\dagger)^\perp$.
Portanto, de (A.2) concluímos que $\mathcal{H}_i(k,V) \in \mathrm{Im}(\mathcal{R}_i(k,P)^\dagger)$, e assim $\mathrm{Ker}(\mathcal{R}_i(k,P)^\dagger) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathcal{H}_i(k,V)')$. Com isto, segue da Proposição 2 que

$$\mathcal{H}_i(k,V)' = \mathcal{H}_i(k,V)'\mathcal{R}_i(k,P)^\dagger\mathcal{R}_i(k,P). \tag{A.10}$$

Por outro lado, considerando-se o resultado da Proposição 3 em (A.9) temos

$$f(u) = u'\mathcal{R}_i(k,P)u + 2\Big(x'\mathcal{G}_i(k,P)'\mathcal{R}_i(k,P)^\dagger\mathcal{R}_i(k,P) - \frac{1}{2}\mathcal{E}_i(k,V)\bar{B}_i(k)\Big)u$$

Como, a partir dos operadores não lineares em (4.8), temos que $\mathcal{H}_i(k,V)' = \mathcal{E}_i(k,V)\bar{B}_i(k)$ e, considerando (A.10) aplicando-os na relação acima temos

$$\begin{aligned} f(u) = u'\mathcal{R}_i(k,P)u + 2\Big(x'\mathcal{G}_i(k,P)'\mathcal{R}_i(k,P)^\dagger\mathcal{R}_i(k,P) - \frac{1}{2}\mathcal{H}_i(k,V)'\mathcal{R}_i(k,P)^\dagger\mathcal{R}_i(k,P)\Big)u = \\ u'\mathcal{R}_i(k,P)u + 2\Big(x'\mathcal{G}_i(k,P)' - \frac{1}{2}\mathcal{H}_i(k,V)'\Big)\mathcal{R}_i(k,P)^\dagger\mathcal{R}_i(k,P)u. \end{aligned}$$

Chamando de $a_i(x)' = \Big(x'\mathcal{G}_i(k,P)' - \frac{1}{2}\mathcal{H}_i(k,V)'\Big)\mathcal{R}_i(k,P)^\dagger$ e aplicando na relação acima, é fácil verificar que

$$f(u) = (u + a_i(x))'\mathcal{R}_i(k,P)(u + a_i(x)) - a_i(x)'\mathcal{R}_i(k,P)a_i(x). \tag{A.11}$$

Note agora que utilizando a propriedade (ii) da inversa generalizada de forma a ter

$$\mathcal{R}_i(k,P)^\dagger\mathcal{R}_i(k,P)\mathcal{R}_i(k,P)^\dagger = \mathcal{R}_i(k,P)^\dagger,$$

chegamos facilmente em

$$-a(x)'\mathcal{R}_i(k,P)a(x) = -\Big(x'\mathcal{G}_i(k,P)'\mathcal{R}_i(k,P)^\dagger\mathcal{G}_i(k,P)x - \mathcal{E}_i(k,V)\bar{B}_i(k)\mathcal{R}_i(k,P)^\dagger\mathcal{G}_i(k,P)x+ \frac{1}{4}\mathcal{E}_i(k,V)\bar{B}_i(k)\mathcal{R}_i(k,P)^\dagger(\mathcal{E}_i(k,V)\bar{B}_i(k))'\Big). \tag{A.12}$$

Assim, temos que o resultado obtido na equação (A.8) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}
&x'(\mathcal{A}_i(k,P) + \nu(k)L_i(k)'L_i(k))x + 2x'\mathcal{G}_i(k,P)'u + u'\mathcal{R}_i(k,P)u + \mathcal{E}_i(k,\gamma)-\\
&[\mathcal{E}_i(k,V)(\bar{A}_i(k)x + \bar{B}_i(k)u) + \lambda(k)L_i(k)x] =\\
&x'(\mathcal{A}_i(k,P) + \nu(k)L_i(k)'L_i(k))x - [\mathcal{E}_i(k,V)\bar{A}_i(k) + \lambda(k)L_i(k)]x + \mathcal{E}_i(k,\gamma) + f(u) =\\
&x'(\mathcal{A}_i(k,P) + \nu(k)L_i(k)'L_i(k) - \mathcal{G}_i(k,P)'\mathcal{R}_i(k,P)^\dagger\mathcal{G}_i(k,P))x-\\
&[\mathcal{E}_i(k,V)(\bar{A}_i(k) - \bar{B}_i(k)\mathcal{R}_i(k,P)^\dagger\mathcal{G}_i(k,P)) + \lambda(k)L_i(k)]x+\\
&(u + a_i(x))'\mathcal{R}_i(k,P)(u + a_i(x)) + [\mathcal{E}_i(k,\gamma) - \frac{1}{4}\mathcal{E}_i(k,V)\bar{B}_i(k)\mathcal{R}_i(k,P)^\dagger(\mathcal{E}_i(k,V)\bar{B}_i(k))'] =\\
&x'\mathcal{P}_i(k,P)x - \mathcal{V}_i(k,P,V)x + \mathcal{D}_i(k,P,V,\gamma) + (u + a_i(x))'\mathcal{R}_i(k,P)(u + a_i(x)),
\end{aligned}$$

demonstrando (A.3) e completando a prova da proposição. □

A.5 Proposição 5

Se $H_i(k) \in \mathrm{Im}(\mathcal{R}_i(k, P(k+1)))$ for válida, então, $\mathcal{H}_i(k, V(k+1)) \in \mathrm{Im}(\mathcal{R}_i(k, P(k+1)))$ é satisfeita para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}^T$.

Demonstração. A partir de (4.20), podemos escrever que

$$\mathcal{T}(k+1) = \sum_{j=k+1}^{T} \lambda(j)\Big(\prod_{\ell=j-1}^{k+1} \mathbb{A}(\ell)'\Big)\mathbb{L}(j)'$$

$$\mathcal{T}(k+1) = \lambda(k+1)\mathbb{L}(k+1)' + \lambda(k+2)\Big(\prod_{\ell=k+1}^{k+1} \mathbb{A}(\ell)'\Big)\mathbb{L}(k+2)' + \ldots + \lambda(T)\Big(\prod_{\ell=T-1}^{k+1} \mathbb{A}(\ell)'\Big)\mathbb{L}(T)'$$

$$\mathcal{T}(k+1) = \begin{pmatrix} \mathbb{L}(k+1)' & \ldots & \Big(\prod_{\ell=T-1}^{k+1} \mathbb{A}(\ell)'\Big)\mathbb{L}(T)' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda(k+1) \\ \vdots \\ \lambda(T) \end{pmatrix},$$

Como temos

$$\mathcal{H}_i(k, V(k+1)) = \bar{B}_i(k)'\Big[\mathbb{P}_i(k) \otimes I\Big]\mathcal{T}(k+1)$$

$$\mathcal{H}_i(k, V(k+1)) = \bar{B}_i(k)'\Big[\mathbb{P}_i(k) \otimes I\Big] \begin{pmatrix} \mathbb{L}(k+1)' & \ldots & \Big(\prod_{\ell=T-1}^{k+1} \mathbb{A}(\ell)'\Big)\mathbb{L}(T)' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda(k+1) \\ \vdots \\ \lambda(T) \end{pmatrix},$$

e considerando $i = 1, \ldots, N$, $k = 0, \ldots, T-1$ e definindo $H_i(k) \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^{T-k}, \mathbb{R}^m)$ como segue

$$H_i(k) = \bar{B}_i(k)(\mathbb{P}_i(k) \otimes I)\begin{pmatrix} \mathbb{L}(k+1)' & \ldots & \Big(\prod_{\ell=T-1}^{k+1} \mathbb{A}(\ell)'\Big)\mathbb{L}(T)' \end{pmatrix}, \tag{A.13}$$

vemos que

$$\mathcal{H}_i(k, V(k+1)) = H_i(k) \begin{pmatrix} \lambda(k+1) \\ \vdots \\ \lambda(T) \end{pmatrix}. \tag{A.14}$$

Assim, se $H_i(k) \in \mathrm{Im}(\mathcal{R}_i(k, P(k+1)))$ for válida, então de (A.14) temos que $\mathcal{H}_i(k, V(k+1)) \in \mathrm{Im}(\mathcal{R}_i(k, P(k+1)))$, demonstrando o resultado. □

A.6 Proposição 6

As seguintes identidades são válidas:

$$d = \sum_{i=1}^{T} \lambda(i)a(i),$$
$$e = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{T}\sum_{j=1}^{T} \lambda(i)\lambda(j)\widetilde{b}(i,j).$$

Demonstração. De (4.20) temos que

$$d = \mu(0)'\mathcal{T}(0) = \mathcal{T}(0)'\mu(0) = \sum_{i=1}^{T} \lambda(i)\mathbb{L}(i)\Big(\prod_{k=0}^{i-1}\mathbb{A}(k)\Big)\mu(0) = \sum_{i=1}^{T}\lambda(i)a(i)$$

mostrando a primeira identidade. Para a segunda identidade $v(t) \in \mathbb{R}^N$, como

$$v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_N(t) \end{pmatrix}, \quad v_i(t) = \mathcal{H}_i(t, V(t+1))'\mathcal{R}_i(t, P(t+1))^{\dagger}\mathcal{H}_i(t, V(t+1)).$$

Escrevendo $\delta(t)' = \begin{pmatrix}\gamma_1(t) & \dots & \gamma_N(t)\end{pmatrix}$, temos que $\delta(t)$ satisfaz a seguinte equação recursiva (veja (4.8) e (4.16))

$$\delta(t) = \mathbb{P}(t)\delta(t+1) - \frac{1}{4}v(t), \;\; \delta(T) = 0.$$

Assim, temos que

$$\delta(T-k) = -\frac{1}{4}\sum_{\ell=1}^{k}\Big(\prod_{s=\ell+1}^{k}\mathbb{P}(T-s)\Big)v(T-\ell),$$

e em particular

$$\delta(0) = -\frac{1}{4}\sum_{\ell=1}^{T}\Big(\prod_{s=\ell+1}^{T}\mathbb{P}(T-s)\Big)v(T-\ell). \tag{A.15}$$

Lembrando que $\pi(k+1)' = \pi(k)'\mathbb{P}(k)$ segue que

$$\pi(k+1)' = \pi(0)'\prod_{\ell=k}^{0}\mathbb{P}(\ell). \tag{A.16}$$

Combinando as equações (A.15), (A.16) e da definição e temos que

$$\begin{aligned} e = \pi(0)'\delta(0) &= -\frac{1}{4}\sum_{\ell=1}^{T}\pi(0)'\Big(\prod_{s=\ell+1}^{T}\mathbb{P}(T-s)\Big)v(T-\ell) \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{\ell=1}^{T}\pi(0)'\Big(\prod_{s=T-\ell-1}^{0}\mathbb{P}(s)\Big)v(T-\ell) \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{\ell=1}^{T}\pi(T-\ell)'v(T-\ell) \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{T-1}\pi(k)'v(k). \end{aligned} \tag{A.17}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(k+1)'\mathbb{Z}(k)\mathcal{T}(k+1) &= \sum_{i=1}^{N}\pi_i(k)\mathcal{H}_i(k,V(k+1))'\mathcal{R}_i(k,P(k+1))^{\dagger}\mathcal{H}_i(k,V(k+1)) \\ &= \pi(k)'v(k) \end{aligned} \tag{A.18}$$

e de (4.20),

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(t+1)'\mathbb{Z}(t)\mathcal{T}(t+1) &= \Big(\sum_{j=t+1}^{T}\lambda(j)\Big(\prod_{k=j-1}^{t+1}\mathbb{A}(k)'\Big)\mathbb{L}(j)'\Big)'\mathbb{Z}(t)\Big(\sum_{j=t+1}^{T}\lambda(j)\Big(\prod_{k=j-1}^{t+1}\mathbb{A}(k)'\Big)\mathbb{L}(j)'\Big) \\ &= \sum_{i=t+1}^{T}\sum_{j=t+1}^{T}\lambda(i)\lambda(j)g(i,t+1)g(j,t+1)'. \end{aligned} \tag{A.19}$$

Finalmente, de (A.17), (A.18) e (A.19) segue que

$$\begin{aligned} e &= -\frac{1}{4}\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{i=t+1}^{T}\sum_{j=t+1}^{T}\lambda(i)\lambda(j)g(i,t+1)g(j,t+1)' \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{T}\Big\{\sum_{i=1}^{j}\lambda(i)\lambda(j)\sum_{t=0}^{i-1}g(i,t+1)g(j,t+1)' + \sum_{i=j+1}^{T}\lambda(i)\lambda(j)\sum_{t=0}^{j-1}g(i,t+1)g(j,t+1)'\Big\} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{T}\Big\{\sum_{i=1}^{j}\lambda(i)\lambda(j)b(j,i) + \sum_{i=j+1}^{T}\lambda(i)\lambda(j)b(i,j)\Big\} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{T}\sum_{i=1}^{T}\lambda(i)\lambda(j)\widetilde{b}(i,j), \end{aligned}$$

completando a prova. □

A.7 Proposição 7

Se a estratégia de controle (4.19) é aplicada ao sistema (3.1), então

$$E(y^u(t)) = a(t) + \sum_{s=1}^{T} \lambda(s)\widetilde{b}(t,s). \tag{A.20}$$

Mais ainda, sob a hipótese H,

$$\sum_{t=1}^{T} \nu(t)Var(y^u(t)) = c - \sum_{t=1}^{T} \lambda(t)a(t) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{T}\sum_{i=1}^{T} \lambda(i)\lambda(j)\widetilde{b}(i,j) + \sum_{t=1}^{T}\Big\{\lambda(t) - \nu(t)\Big(a(t) + \sum_{s=1}^{T}\lambda(s)\widetilde{b}(t,s)\Big)\Big\}\Big(a(t) + \sum_{s=1}^{T}\lambda(s)\widetilde{b}(t,s)\Big). \tag{A.21}$$

Demonstração. Aplicando a lei de controle (4.19) em (3.1) segue que

$$x^u(k+1) = \Big(\bar{A}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon^x} \widetilde{A}_{\theta(k),s}(k)w_s^x(k)\Big)x^u(k) + \Big(\bar{B}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon^u} \widetilde{B}_{\theta(k),s}(k)w_s^u(k)\Big) \Big[-\mathcal{R}_{\theta(k)}(k,P(k+1))^{\dagger}\Big(\mathcal{G}_{\theta(k)}(k,P(k+1))x^u(k) - \frac{1}{2}\mathcal{H}_{\theta(k)}(k,V(k+1))\Big)\Big].$$

Rearranjando os termos, temos

$$\begin{aligned} x^u(k+1) = &\Big(\bar{A}_{\theta(k)}(k) - \bar{B}_{\theta(k)}(k)\mathcal{R}_{\theta(k)}(k,P(k+1))^{\dagger}\mathcal{G}_{\theta(k)}(k,P(k+1))\Big)x^u(k) \\ &+ \Big(\sum_{s=1}^{\varepsilon^x} \widetilde{A}_{\theta(k),s}(k)w_s^x(k) - \sum_{s=1}^{\varepsilon^u} \widetilde{B}_{\theta(k),s}(k)w_s^u(k)\mathcal{R}_{\theta(k)}(k,P(k+1))^{\dagger}\mathcal{G}_{\theta(k)}(k,P(k+1))\Big)x^u(k) \\ &+ \frac{1}{2}\Big(\bar{B}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon^u} \widetilde{B}_{\theta(k),s}(k)w_s^u(k)\Big)\mathcal{R}_{\theta(k)}(k,P(k+1))^{\dagger}\mathcal{H}_{\theta(k)}(k,V(k+1)). \end{aligned} \tag{A.22}$$

Por fim, com as relações do início do capítulo, chegamos em

$$x^u(k+1) = \Big(A^{cl}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon}\Big(\widetilde{A}_{\theta(k),s}(k)w_s^x(k) - \widetilde{B}_{\theta(k),s}(k)K_{\theta(k)}(k)w_s^u(k)\Big)\Big)x^u(k) + \frac{1}{2}\Big(\bar{B}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \widetilde{B}_{\theta(k),s}(k)w_s^u(k)\Big)U_{\theta(k)}(k). \tag{A.23}$$

Definindo $z_i^u(k) = x^u(k)1_{\{\theta(t)=i\}}$, e $\mu_i(k) = E(z_i^u(k))$, $\mu(k)' = (\mu_1(k) \ \cdots \ \mu_N(k))$, temos que

$$\mu_j(k+1) = \boldsymbol{E}\Big(z_i^u(k+1)\Big) = \boldsymbol{E}\Big(x^u(k+1)1_{\{\theta(t)=i\}}\Big) = \boldsymbol{E}\Big(x^u(k+1)|\mathcal{F}_k\Big).$$

Considerando a relação em (A.23), temos

$$\mu_j(k+1) = E\Big[\Big(A^{cl}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon}\Big(\widetilde{A}_{\theta(k),s}(k)w^x_s(k) - \widetilde{B}_{\theta(k),s}(k)K_{\theta(k)}(k)w^u_s(k)\Big)\Big)x^u(k) + \\ \frac{1}{2}\Big(\bar{B}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon}\widetilde{B}_{\theta(k),s}(k)w^u_s(k)\Big)U_{\theta(k)}(k)|\mathcal{F}_k\Big].$$

Logo,

$$\mu_j(k+1) = \sum_{i=1}^{N} p_{ij}(k)A^{cl}_i(k)\mu_i(k) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_{ij}(k)\pi_i(k)\bar{B}_i(k)U_i(k),$$

ou, em outras palavras,

$$\mu(k+1) = \mathbb{A}(k)\mu(k) + \frac{1}{2}\mathbb{V}(k). \tag{A.24}$$

Iterando (A.24) a partir de $k = 1$, segue facilmente que

$$\mu(k) = \left(\prod_{\ell=0}^{k-1}\mathbb{A}(\ell)\right)\mu(0) + \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{k-1}\left(\prod_{\ell=t+1}^{k-1}\mathbb{A}(\ell)\right)\mathbb{V}(t). \tag{A.25}$$

De (A.25), temos que

$$E(y^u(t)) = E\Big(\sum_{i=1}^{N} L_i(t)z^u_i(t)\Big) = \sum_{i=1}^{N} L_i(t)E(z^u_i(t)) = \sum_{i=1}^{N} L_i(t)\mu_i(t) = \mathbb{L}(t)\mu(t) \\ = \mathbb{L}(t)\left(\prod_{\ell=0}^{t-1}\mathbb{A}(\ell)\right)\mu(0) + \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{t-1}\mathbb{L}(t)\left(\prod_{\ell=s+1}^{k-1}\mathbb{A}(\ell)\right)\mathbb{V}(s). \tag{A.26}$$

Lembrando que $\mathbb{V}(s) = \mathbb{Z}(s)\mathcal{T}(s+1)'$ e de (4.20) segue que

$$\mathbb{V}(s) = \sum_{j=s+1}^{T}\lambda(j)\mathbb{Z}(s)\Big(\prod_{k=j-1}^{s+1}\mathbb{A}(k)'\Big)\mathbb{L}(j)',$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{t-1}\mathbb{L}(t)\left(\prod_{\ell=s+1}^{k-1}\mathbb{A}(\ell)\right)\mathbb{V}(s) &= \sum_{s=0}^{t-1}\mathbb{L}(t)\left(\prod_{\ell=s+1}^{k-1}\mathbb{A}(\ell)\right)\sum_{j=s+1}^{T}\lambda(j)\mathbb{Z}(s)\Big(\prod_{k=j-1}^{s+1}\mathbb{A}(k)'\Big)\mathbb{L}(j)' \\
&= \sum_{s=0}^{t-1}\sum_{j=s+1}^{T}\lambda(j)\mathbb{L}(t)\left(\prod_{\ell=s+1}^{k-1}\mathbb{A}(\ell)\right)\mathbb{Z}(s)\Big(\prod_{k=j-1}^{s+1}\mathbb{A}(k)'\Big)\mathbb{L}(j)' \\
&= \sum_{s=0}^{t-1}\sum_{j=s+1}^{T}\lambda(j)g(t,s+1)g(j,s+1)' \\
&= \sum_{j=1}^{T}\sum_{s=0}^{t-1}\lambda(j)g(t,s+1)g(j,s+1)'1_{\{j\geq s+1\}} \\
&= \sum_{j=1}^{t-1}\lambda(j)\sum_{s=0}^{j-1}g(t,s+1)g(j,s+1)' + \sum_{j=t}^{T}\lambda(j)\sum_{s=0}^{t-1}g(t,s+1)g(j,s+1)' \\
&= 2\sum_{j=1}^{t-1}\lambda(j)b(t,j) + 2\sum_{j=t}^{T}\lambda(j)b(j,t) \\
&= 2\sum_{j=1}^{T}\lambda(j)\widetilde{b}(t,j). \qquad \text{(A.27)}
\end{aligned}$$

Combinando (A.26) com (A.27) segue (A.20).

Para mostrar (A.21), note que da hipótese H temos que (4.17) está satisfeita e, portanto, (4.18) também,

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{T}E(\nu(t)y^u(t)^2-\lambda(t)y^u(t)) &= E\left(x(0)'P_{\theta(0)}(0)x(0)-V_{\theta(0)}(0)x(0)+\gamma_{\theta(0)}(0)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N}tr\left(P_i(0)Q_i(0)\right)-\sum_{i=1}^{N}V_i(0)\mu_i(0)+\sum_{i=1}^{N}\pi_i(0)\gamma_i(0) \\
&= c-d+e. \qquad \text{(A.28)}
\end{aligned}$$

Logo, de (A.20), (A.28) e a Proposição 6 segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{T} \nu(t) Var(y^u(t)) &= \sum_{t=1}^{T} \nu(t)\Big(E(y^u(t)^2) - E(y^u(t))^2\Big) \\
&= \sum_{t=1}^{T}\Big\{\nu(t)E(y^u(t)^2) - \lambda(t)E(y^u(t)) + \lambda(t)E(y^u(t)) - \nu(t)E(y^u(t))^2\Big\} \\
&= \sum_{t=1}^{T}\Big\{\nu(t)E(y^u(t)^2) - \lambda(t)E(y^u(t))\Big\} + \sum_{t=1}^{T}\Big\{\lambda(t) - \nu(t)E(y^u(t))\Big\}E(y^u(t)) \\
&= c - d + e + \sum_{t=1}^{T}\Big\{\lambda(t) - \nu(t)E(y^u(t))\Big\}E(y^u(t)) \\
&= c - \sum_{i=1}^{T} \lambda(i)a(i) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{T}\sum_{j=1}^{T} \lambda(i)\lambda(j)\widetilde{b}(i,j) \\
&+ \sum_{i=1}^{T}\Big(\lambda(i) - \nu(i)\Big(a(i) + \sum_{s=1}^{T}\lambda(s)\widetilde{b}(i,s)\Big)\Big)\Big(a(i) + \sum_{s=1}^{T}\lambda(s)\widetilde{b}(i,s)\Big),
\end{aligned}$$

completando a prova. □

A.8 Proposição 8

Suponha que a hipótese H seja válida. Para qualquer $u \in \mathbb{U}$, tomando $\lambda(t) = \xi(t) + 2\nu(t)E(y^u(t))$, $\lambda' = (\lambda(1), \ldots, \lambda(T))$, temos que $u^\lambda \in \mathbb{U}^*$ satisfaz

$$\mathcal{C}(u^\lambda) \leq \mathcal{C}(u). \tag{A.29}$$

Ainda mais que $u^\lambda \in \mathbb{U}^*$ é tal que $\mathcal{C}(u^\lambda) = \min_{u^\varsigma \in \mathbb{U}^*} \mathcal{C}(u^\varsigma)$ então $u^\lambda \in \Pi\left(PU\left(\nu, \xi\right)\right)$.

Demonstração. Primeiro, mostraremos que (A.29) é válida. De fato, considere $\lambda(t) = \xi(t) + 2\nu(t)E(y^u(t))$ e defina u^λ como em (4.25). Do Teorema 1 e (4.19) temos que

$$E\Big(\sum_{t=1}^{T}\Big(\nu(t)y^{u^\lambda}(t)^2 - \lambda(t)y^{u^\lambda}(t)\Big)\Big) \leq E\Big(\sum_{t=1}^{T}\Big(\nu(t)y^u(t)^2 - \lambda(t)y^u(T)\Big)\Big). \tag{A.30}$$

Adicionalmente, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(u^\lambda) &= \sum_{t=1}^{T}\Big(E\Big(\nu(t)y^{u^\lambda}(t)^2 - \lambda(t)y^{u^\lambda}(t)\Big) - \nu(t)\Big\{E(y^{u^\lambda}(t))^2 - 2E(y^u(t))E(y^{u^\lambda}(t))\Big\}\Big)\\ &= \sum_{t=1}^{T}\Big(E\Big(\nu(t)y^{u^\lambda}(t)^2 - \lambda(t)y^{u^\lambda}(t)\Big) - \nu(t)\Big\{E(y^{u^\lambda}(t)) - E(y^u(t))\Big\}^2 + \nu(t)E(y^u(t))^2\Big),\end{aligned} \tag{A.31}$$

$$\mathcal{C}(u) = \sum_{t=1}^{T}\Big(E\Big(\nu(t)y^u(t)^2 - \lambda(t)y^u(t)\Big) + \nu(t)E(y^u(t))^2\Big). \tag{A.32}$$

De (A.30), (A.31) e (A.32), segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(u^\lambda) &\leq \mathcal{C}(u^\lambda) + \sum_{t=1}^{T}\Big(\nu(t)\Big\{E(y^{u^\lambda}(t)) - E(y^u(t))\Big\}^2\Big)\\ &= \sum_{t=1}^{T}\Big(E\Big(\nu(t)y^{u^\lambda}(t)^2 - \lambda(t)y^{u^\lambda}(t)\Big) + \nu(t)E(y^u(t))^2\Big)\\ &\leq \sum_{t=1}^{T}\Big(E\Big(\nu(t)y^u(t)^2 - \lambda(t)y^u(t)\Big) + \nu(t)E(y^u(t))^2\Big)\\ &= \mathcal{C}(u),\end{aligned}$$

mostrando (A.29).

Se $u^\lambda \in \mathbb{U}^*$ for tal que para qualquer $u^\varsigma \in \mathbb{U}^*$, temos que $\mathcal{C}(u^\lambda) \leq \mathcal{C}(u^\varsigma)$, então de (A.29), para qualquer $u \in \mathbb{U}$, podemos encontrar $\varsigma \in \mathbb{R}$ tal que $u^\varsigma \in \mathbb{U}^*$ e $\mathcal{C}(u^\varsigma) \leq \mathcal{C}(u)$, logo

$\mathcal{C}(u^\lambda) \leq \mathcal{C}(u^\varsigma) \leq \mathcal{C}(u)$, isto é, $\mathcal{C}(u^\lambda) \leq \min_{u\in\mathbb{U}} \mathcal{C}(u)$. Como $u^\lambda \in \mathbb{U}^* \subseteq \mathbb{U}$, segue que $\mathcal{C}(u^\lambda) \geq \min_{u\in\mathbb{U}} \mathcal{C}(u)$, e assim $\mathcal{C}(u^\lambda) = \min_{u\in\mathbb{U}} \mathcal{C}(u)$, mostrando que $u^\lambda \in \Pi\left(PU\left(\nu, \xi\right)\right)$, completando a prova. $\square$

A.9 Proposição 9

Se a Hipótese H é válida, então, $\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}} \geq 0$.

Demonstração. Da Proposição 7 e utilizando a notação de (4.28), podemos reescrever (4.24) como

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{t=1}^{T} \nu(t) Var(y^{u^\lambda}(t)) \\ &= c - a'\Gamma a - 2a'\Gamma\widetilde{\mathbb{B}}\lambda + \frac{1}{2}\lambda'\big(\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}}\big)\lambda. \end{aligned} \tag{A.33}$$

Um vez que esta desigualdade em (A.33) é válida para cada $\lambda \in \mathbb{R}^T$, devemos ter $\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}} \geq 0$. De fato, se houvesse um autovalor negativo $r < 0$ com um autovetor associado $v_r \neq 0 \in \mathbb{R}^T$, então, considerando $\lambda = \ell v_r$, com $\ell \in \mathbb{R}$, obteríamos de (A.33) que $\sum_{t=1}^{T} \nu(t) Var(y^{u^\lambda}(t)) = c - a'\Gamma a + \ell(\frac{1}{2}\ell r\|v_r\|^2 - 2a'\Gamma\widetilde{\mathbb{B}}v_r)$. Escolheríamos, então, $\bar{\ell} > 0$ tal que $c - a'\Gamma a + \bar{\ell}(\frac{1}{2}\bar{\ell} r\|v_r\|^2 - 2a'\Gamma\widetilde{\mathbb{B}}v_r) < 0$, contrariando a desigualdade (A.33). □

A.10 Proposição 10

Suponha que $u^* \in \Pi\left(PU\left(\nu,\xi\right)\right)$ é tal que $E(y^{u^*}(t)) = \epsilon(t)$ para $t = 1,\ldots,T$. Então u^* é uma solução ótima para o problema $PC\left(\nu,\epsilon\right)$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que podemos achar $u \in \mathbb{U}$ tal que $E(y^u(t)) \geq \epsilon(t)$ para $t = 1,\ldots,T$ e $\sum_{t=1}^{T}\Big(\nu(t)Var\left(y^u\left(t\right)\right)\Big) < \sum_{t=1}^{T}\Big(\nu(t)Var\left(y^{u^*}\left(t\right)\right)\Big)$. Então

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(u) &= \sum_{t=1}^{T}\Big(\nu(t)Var(y^u(t)) - \xi(t)E(y^u(t))\Big)\\
&\leq \sum_{t=1}^{T}\Big(\nu(t)Var(y^u(t)) - \xi(t)\epsilon(t)\Big)\\
&< \sum_{t=1}^{T}\Big(\nu(t)Var(y^{u^*}(t)) - \xi(t)\epsilon(t)\Big)\\
&\sum_{t=1}^{T}\Big(\nu(t)Var(y^{u^*}(t)) - \xi(t)E(y^{u^*}(t))\Big) = \mathcal{C}(u^*),
\end{aligned}$$

que é uma contradição com a otimalidade de u^*. □

Note que para termos $\sum_{t=1}^{T}\Big(\nu(t)Var(y^u(t)) - \xi(t)E(y^u(t))\Big) \leq \sum_{t=1}^{T}\Big(\nu(t)Var(y^u(t)) - \xi(t)\epsilon(t)\Big)$, é necessário que $\xi(t) \geq 0$, caso contrário a desigualdade não é verificada. Logo, u^* é uma solução ótima para o problema $PC\left(\nu,\epsilon\right)$ se, e somente se, $\xi(t) \geq 0$.

Apêndice B

Demonstração dos Teoremas

B.1 Teorema 1

Se para cada $k = 0, 1, \ldots, T-1$,

$$\mathcal{H}_i(k, V(k+1)) \in \mathrm{Im}(\mathcal{R}_i(k, P(k+1))), \tag{B.1}$$

então as funções valores $J(x(k), \theta(k), k)$ do problema (3.5) são dados por

$$J(x(k), \theta(k), k) = x(k)' P_{\theta(k)}(k) x(k) - V_{\theta(k)}(k) x(k) + \gamma_{\theta(k)}(k), \tag{B.2}$$

e uma lei de controle ótimo é obtida com

$$u(k) = -\mathcal{R}_{\theta(k)}(k, P(k+1))^{\dagger} \Big(\mathcal{G}_{\theta(k)}(k, P(k+1)) x(k) - \frac{1}{2} \mathcal{H}_{\theta(k)}(k, V(k+1)) \Big). \tag{B.3}$$

Demonstração. Para $k = T$ não há controle a ser considerado por estarmos no último passo da estratégia e não ser possível fazer nenhum tipo de rebalanceamento da carteira. Assim, segue de (4.18) e das definições (4.14), (4.15) e (4.16)

$$J(x(T), \theta(T), T) = \nu(T) x(T)' L'_{\theta(T)} L_{\theta(T)} x(T) - \lambda(T) L_{\theta(T)} x(T).$$

Suponha, a partir da hipótese de indução, que (B.2)-(B.3) atende para $k+1$. Também considere o custo de cada passo k dado por $\nu(k) y(k)^2 - \lambda(k) y(k)$. Da equação de Bellman

e (A.8), (A.3), temos que para $x(k) = x$, $\theta(k) = i$,

$$\begin{aligned}
J(x,i,k) &= \inf_{u\in\mathbb{R}^m}\Big\{E\Big(\nu(k)y(k)^2 - \lambda(k)y(k) + J(x(k+1),\theta(k+1),k+1)|\mathcal{F}_k\Big)\Big\} \\
&= \inf_{u\in\mathbb{R}^m}\Big\{E\Big(\nu(k)y(k)^2 - \lambda(k)y(k) + x(k+1)'P_{\theta(k+1)}(k+1)x(k+1) \\
&\quad - V_{\theta(k+1)}(k+1)x(k+1) + \gamma_{\theta(k+1)}(k+1)|\mathcal{F}_k\Big)\Big\} \\
&= x'\mathcal{P}_i(k,P(k+1))x - \mathcal{V}_i(k,P(k+1),V(k+1))x + \mathcal{D}_i(k,P,V,\gamma). \qquad \text{(B.4)}
\end{aligned}$$

Ou seja, partimos do passo final $k = T$ e retornamos no espaço discreto de tempo k resolvendo de forma recursiva o problema de otimização determinando o controle ótimo $u(k)$ que minimiza o custo envolvido em cada passo. Comparando o resultado obtido em (B.4) com o de (A.3), conclui-se que quando $u(k) = -a_{\theta(k)}(x(k))$ nesta última equação, temos o menor valor esperado possível para

$$\begin{aligned}
&E\Big(\nu(k)y(k)^2 - \lambda(k)y(k) + x(k+1)'P_{\theta(k+1)}x(k+1) - V_{\theta(k+1)}x(k+1) + \gamma_{\theta(k+1)}|\mathcal{F}_k\Big) = \\
&x(k)'\mathcal{P}_{\theta(k)}(k,P)x(k) + \Big(u(k) + a_{\theta(k)}(x(k))\Big)'\mathcal{R}_{\theta(k)}(k,P)\Big(u(k) + a_{\theta(k)}(x(k))\Big) \\
&- \mathcal{V}_{\theta(k)}(k,P,V)x(k) + \mathcal{D}_{\theta(k)}(k,P,V,\gamma).
\end{aligned}$$

Portanto, do valor de $a_{\theta(k)}(x(k))$, fornecido pela Proposição 4, obtemos a lei de controle ótimo

$$u(k) = -\mathcal{R}_{\theta(k)}(k,P(k+1))^{\dagger}\Big(\mathcal{G}_{\theta(k)}(k,P(k+1))x(k) - \frac{1}{2}\mathcal{H}_{\theta(k)}(k,V(k+1))\Big).$$

□

B.2 Teorema 2

Suponha que a hipótese H seja válida. Se $\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}} > 0$, então uma estratégia de controle ótimo u^λ para o problema $PU\,(\nu, \xi)$ é dada por (4.25) com

$$\lambda = (I - 2\Gamma\widetilde{\mathbb{B}})^{-1}(\xi + 2\Gamma a), \tag{B.5}$$

e neste caso

$$\mathcal{C}(u^\lambda) = c - (\Gamma a + \xi)'a - \frac{1}{2}(\xi + 2\Gamma a)'(\widetilde{\mathbb{B}}^{-1} - 2\Gamma)^{-1}(\xi + 2\Gamma a). \tag{B.6}$$

Por outro lado, se existe uma estratégia de controle ótimo $u \in \mathbb{U}$ para o problema $PU\,(\nu, \xi)$, então $\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}} \geq 0$ e u^λ como em (4.25) é uma estratégia de controle ótimo para o problema $PU\,(\nu, \xi)$, em que λ satisfaz

$$(\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}})\lambda = \widetilde{\mathbb{B}}(\xi + 2\Gamma a). \tag{B.7}$$

Demonstração. Da Proposição 5 se a Hipótese H for verificada, então para qualquer λ tem-se que (4.17) é válido para cada $k = 0, \ldots, T-1$. De acordo com (A.20) e (A.21) temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(u^\lambda) = c - \sum_{t=1}^{T} \lambda(t)a(t) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{T}\sum_{i=1}^{T} \lambda(i)\lambda(j)\widetilde{b}(i,j) + \\
\sum_{t=1}^{T}\Big\{\lambda(t) - \xi(t) - \nu(t)\Big(a(t) + \sum_{s=1}^{T}\lambda(s)\widetilde{b}(t,s)\Big)\Big\}\Big(a(t) + \sum_{s=1}^{T}\lambda(s)\widetilde{b}(t,s)\Big) \\
= \frac{1}{2}\lambda'(\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}})\lambda - (\widetilde{\mathbb{B}}(\xi + 2\Gamma a))'\lambda + c - (\Gamma a + \xi)'a.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Tomando o gradiente $\nabla\mathcal{C}(u^\lambda)$ e a matriz hessiana $\nabla^2\mathcal{C}(u^\lambda)$ de (B.8) segue que

$$\nabla\mathcal{C}(u^\lambda) = (\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}})\lambda - (\widetilde{\mathbb{B}}(\xi + 2\Gamma a)), \;\; \nabla^2\mathcal{C}(u^\lambda) = \widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}}.$$

Portanto, sob a hipótese que $\nabla^2\mathcal{C}(u^\lambda) = \widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}} > 0$ segue que o mínimo global de (B.8) é λ, tal que $\nabla\mathcal{C}(u^\lambda) = 0$, ou seja, $(\widetilde{\mathbb{B}}(I - 2\Gamma\widetilde{\mathbb{B}}))\lambda = \widetilde{\mathbb{B}}(\xi + 2\Gamma a)$. Notamos que $\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}} > 0$ implica que de $\det(\widetilde{\mathbb{B}}) \neq 0$ e $\det(I - 2\Gamma\widetilde{\mathbb{B}}) \neq 0$ obtemos (B.5). Substituindo (B.5) em (B.8) obtemos (B.6). Finalmente, da Proposição 8 temos que u^λ minimiza $\mathcal{C}(u)$ em $\mathbb{U}$. Por outro lado, se $u \in \Pi\,(PU\,(\nu, \xi))$, então escolhendo $\lambda(t) = \xi(t) + 2\nu(t)E(y^u(t))$, temos da Proposição 8 que $\lambda' = (\lambda(1), \ldots, \lambda(T))$ é o mínimo global de (B.8) e, portanto, $\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}} \geq 0$ e λ satisfaz (B.7). $\square$

B.3 Teorema 3

Suponha que a hipótese H seja válida e que $\widetilde{\mathbb{B}} - 2\widetilde{\mathbb{B}}\Gamma\widetilde{\mathbb{B}} > 0$. Seja

$$\xi = (\widetilde{\mathbb{B}}^{-1} - 2\Gamma)\epsilon - \widetilde{\mathbb{B}}^{-1}a. \tag{B.9}$$

Se $\xi \geq 0$, então a estratégia de controle ótimo u^{λ} para o problema $PC\,(\nu, \epsilon)$ é dada como em (4.25) com λ como em (B.5) e ξ como em (4.32).

Demonstração. De (A.20), $E(y^{u^{\lambda}}(t)) = \epsilon(t)$, $t = 1, \ldots, T$ é equivalente a $\epsilon = a + \widetilde{\mathbb{B}}\lambda$ e, portanto, $\lambda = \widetilde{\mathbb{B}}^{-1}(\epsilon - a)$. Substituindo este valor em (B.5), segue que (B.9) deve ser satisfeito. Logo, se $\xi \geq 0$, então da Proposição 10 temos o resultado desejado. □

Apêndice C

Resultados Numéricos

C.1 Séries Temporais

```
Distribution:    Normal
Log likelihood:  1503.3
Domain:          -Inf < y < Inf
Mean:            0.0017241
Variance:        0.000146994

Parameter  Estimate   Std. Err.
mu         0.0017241  0.000541125
sigma      0.0121241  0.000383206

Estimated covariance of parameter estimates:
       mu             sigma
mu     2.92816e-007   2.98785e-024
sigma  2.98785e-024   1.46847e-007
```

Tabela C.1: Resultado de Ajuste da Normal

```
Distribution:    t location-scale
Log likelihood:  1524.34
Domain:          -Inf < y < Inf
Mean:            0.00338126
Variance:        0.000158401

Parameter  Estimate    Std. Err.
mu         0.00338126  0.000504017
sigma      0.00896848  0.000533652
nu            4.06326     0.824367

Estimated covariance of parameter estimates:
       mu             sigma          nu
mu      2.54033e-007  -8.24041e-008  -0.000139077
sigma  -8.24041e-008   2.84785e-007   0.000312189
nu      -0.000139077   0.000312189       0.67958
```

Tabela C.2: Resultado de Ajuste da Student

```
Distribution:     Extreme value
Log likelihood:   1549.43
Domain:           -Inf < y < Inf
Mean:             0.00167667
Variance:         0.000147786

Parameter  Estimate    Std. Err.
mu         0.00714785  0.000445411
sigma      0.00947856  0.000325764

Estimated covariance of parameter estimates:
        mu              sigma
mu       1.98391e-007  -4.53976e-008
sigma   -4.53976e-008   1.06122e-007
```

Tabela C.3: Resultado de Ajuste da EVT

C.2 Resultados das Simulações

C.2.1 Simulação de um Portfólio com Ativos de Risco

Tempo	EY	EY mult	VarY	VarY mult	EG	EG mult
0	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	Inf	Inf
1	1.0920	1.0565	0.3338	0.2035	3.2711	5.1917
2	1.1664	1.1030	0.4383	0.2723	2.6614	4.0510
3	1.2317	1.1497	0.5138	0.3179	2.3971	3.6166
4	1.2990	1.1947	0.5691	0.3529	2.2824	3.3851
5	1.3617	1.2381	0.6154	0.3849	2.2126	3.2171
6	1.4245	1.2825	0.6538	0.4188	2.1787	3.0625
7	1.4889	1.3276	0.6861	0.4471	2.1701	2.9692
8	1.5502	1.3733	0.7180	0.4679	2.1592	2.9351
9	1.6130	1.4180	0.7388	0.4837	2.1834	2.9315
10	1.6757	1.4643	0.7467	0.4999	2.2441	2.9292
11	1.7334	1.5072	0.7654	0.5179	2.2647	2.9104
12	1.7837	1.5479	0.7798	0.5359	2.2873	2.8884
13	1.8373	1.5940	0.7907	0.5473	2.3236	2.9126
14	1.8876	1.6388	0.7999	0.5556	2.3598	2.9497
15	1.9431	1.6806	0.7998	0.5624	2.4295	2.9885
16	1.9945	1.7236	0.8054	0.5689	2.4765	3.0297
17	2.0413	1.7683	0.8016	0.5794	2.5466	3.0520
18	2.0904	1.8055	0.8019	0.5882	2.6069	3.0695
19	2.1364	1.8493	0.7972	0.5832	2.6798	3.1711
20	2.1814	1.8886	0.8077	0.5935	2.7007	3.1821
21	2.2287	1.9297	0.7995	0.5924	2.7876	3.2573
22	2.2728	1.9681	0.7896	0.5991	2.8783	3.2854
23	2.3156	2.0105	0.7882	0.6068	2.9378	3.3130
24	2.3552	2.0451	0.7722	0.6168	3.0498	3.3156
25	2.3880	2.0828	0.7836	0.6240	3.0473	3.3375

Tabela C.4: Resultados da Otimização

Tempo	BB	ITAU ON	CSN	PETROBRAS	VALE
0	4.4270	-3.3751	4.8195	-7.0658	2.1944
1	2.9279	-2.3449	3.1028	-3.9834	1.2975
2	2.1763	-1.7335	2.1590	-2.5607	0.9588
3	1.8070	-1.3996	1.6825	-1.9344	0.8445
4	1.5215	-1.1201	1.3125	-1.5179	0.8039
5	1.3690	-0.9765	1.1356	-1.3146	0.7865
6	1.2040	-0.8364	0.9583	-1.1341	0.8083
7	1.1081	-0.7222	0.8370	-0.9749	0.7520
8	0.9961	-0.6017	0.6875	-0.7988	0.7170
9	0.9085	-0.5480	0.6461	-0.7433	0.7368
10	0.8445	-0.4808	0.5802	-0.6708	0.7269
11	0.7787	-0.4051	0.4925	-0.5438	0.6776
12	0.7361	-0.3630	0.4540	-0.4830	0.6559
13	0.7227	-0.3390	0.4476	-0.4877	0.6564
14	0.6585	-0.3046	0.4083	-0.3959	0.6337
15	0.6403	-0.2671	0.3817	-0.3733	0.6184
16	0.6123	-0.2446	0.3568	-0.2956	0.5710
17	0.5872	-0.2233	0.3380	-0.2889	0.5870
18	0.5622	-0.1930	0.3127	-0.2425	0.5606
19	0.5558	-0.1824	0.3056	-0.2295	0.5505
20	0.5075	-0.1443	0.2641	-0.1991	0.5719
21	0.4883	-0.1232	0.2445	-0.1307	0.5212
22	0.4870	-0.1202	0.2507	-0.1393	0.5219
23	0.4455	-0.0815	0.1955	-0.0468	0.4873
24	0.4553	-0.0934	0.2150	-0.0289	0.4520

Tabela C.5: Alocação % sobre Valor do Portfólio com Otimização Terminal

Tempo	BB	ITAU ON	CSN	PETROBRAS	VALE
0	2.7691	-1.9514	2.9078	-4.1276	1.4020
1	1.9752	-1.4367	1.9995	-2.4716	0.9337
2	1.5575	-1.1287	1.4873	-1.6663	0.7503
3	1.3130	-0.9059	1.1518	-1.2488	0.6899
4	1.1639	-0.7739	0.9642	-1.0173	0.6631
5	1.0563	-0.6751	0.8207	-0.8515	0.6497
6	0.9966	-0.6056	0.7371	-0.7846	0.6565
7	0.9460	-0.5656	0.6943	-0.7327	0.6579
8	0.8926	-0.4987	0.6098	-0.6374	0.6337
9	0.8021	-0.4302	0.5243	-0.5435	0.6473
10	0.7743	-0.3916	0.4886	-0.5090	0.6377
11	0.7456	-0.3786	0.4810	-0.4759	0.6280
12	0.7184	-0.3533	0.4504	-0.4022	0.5867
13	0.7143	-0.3309	0.4409	-0.4135	0.5892
14	0.6584	-0.2789	0.3828	-0.3668	0.6045
15	0.6458	-0.2755	0.3883	-0.3541	0.5955
16	0.6153	-0.2475	0.3624	-0.3312	0.6010
17	0.6049	-0.2251	0.3394	-0.2732	0.5542
18	0.5768	-0.2061	0.3128	-0.2178	0.5344
19	0.5583	-0.1953	0.3012	-0.2055	0.5413
20	0.5490	-0.1838	0.2994	-0.2024	0.5378
21	0.5477	-0.1764	0.2932	-0.1722	0.5076
22	0.5378	-0.1652	0.2873	-0.1749	0.5150
23	0.5135	-0.1477	0.2650	-0.1091	0.4784
24	0.5061	-0.1479	0.2660	-0.1016	0.4774

Tabela C.6: Alocação % sobre Valor do Portfólio com Otimização Multiperíodo

C.2.2 Simulação de um Portfólio com Ativo Livre de Risco e um *Benchmark*

Tempo	EY	EY mult	VarY	VarY mult	EG	EG mult
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	NaN	NaN
1	0.0005	0.0015	0.0031	0.0005	0.1636	2.8277
2	0.0011	0.0030	0.0041	0.0007	0.2623	4.1522
3	0.0017	0.0045	0.0046	0.0009	0.3697	5.2223
4	0.0024	0.0061	0.0049	0.0010	0.4821	6.3688
5	0.0031	0.0076	0.0050	0.0010	0.6245	7.2990
6	0.0040	0.0092	0.0051	0.0011	0.7765	8.3275
7	0.0049	0.0107	0.0051	0.0012	0.9760	9.2941
8	0.0060	0.0123	0.0051	0.0012	1.1795	10.1249
9	0.0070	0.0138	0.0050	0.0012	1.4013	11.1428
10	0.0082	0.0154	0.0048	0.0013	1.7001	12.0975
11	0.0094	0.0170	0.0045	0.0013	2.0704	13.1095
12	0.0106	0.0185	0.0042	0.0013	2.5017	14.3112
13	0.0119	0.0201	0.0040	0.0013	2.9578	15.1269
14	0.0132	0.0217	0.0039	0.0014	3.3596	15.9475
15	0.0145	0.0233	0.0037	0.0013	3.9040	17.5361
16	0.0159	0.0249	0.0035	0.0013	4.5590	18.5713
17	0.0173	0.0265	0.0032	0.0014	5.3325	19.5313
18	0.0188	0.0281	0.0031	0.0014	6.1123	20.5020
19	0.0203	0.0297	0.0032	0.0014	6.4305	21.0598
20	0.0217	0.0314	0.0029	0.0014	7.4576	22.2733
21	0.0233	0.0330	0.0029	0.0014	8.1307	23.0696
22	0.0248	0.0346	0.0026	0.0014	9.6232	24.4601
23	0.0263	0.0363	0.0024	0.0014	10.8893	25.5239
24	0.0279	0.0379	0.0024	0.0014	11.5430	26.2581
25	0.0295	0.0396	0.0024	0.0014	12.1894	27.7214

Tabela C.7: Resultados da Otimização

Tempo	CDI	FX	IBOV	IRFM
0	1.1599	0.1808	0.0457	-0.3864
1	1.1724	0.1384	0.0348	-0.3456
2	1.1587	0.1128	0.0277	-0.2992
3	1.1429	0.0913	0.0232	-0.2574
4	1.1217	0.0773	0.0198	-0.2188
5	1.0972	0.0668	0.0171	-0.1811
6	1.0808	0.0564	0.0149	-0.1521
7	1.0590	0.0501	0.0123	-0.1214
8	1.0462	0.0437	0.0113	-0.1012
9	1.0310	0.0380	0.0097	-0.0787
10	1.0170	0.0339	0.0085	-0.0594
11	1.0071	0.0299	0.0075	-0.0444
12	0.9994	0.0250	0.0066	-0.0310
13	0.9900	0.0218	0.0059	-0.0177
14	0.9818	0.0194	0.0052	-0.0065
15	0.9771	0.0163	0.0048	0.0019
16	0.9671	0.0148	0.0038	0.0143
17	0.9621	0.0126	0.0032	0.0220
18	0.9571	0.0114	0.0027	0.0288
19	0.9555	0.0098	0.0025	0.0322
20	0.9535	0.0085	0.0024	0.0357
21	0.9487	0.0079	0.0021	0.0414
22	0.9461	0.0070	0.0016	0.0453
23	0.9421	0.0064	0.0010	0.0505
24	0.9395	0.0062	0.0008	0.0535

Tabela C.8: Alocação % sobre Valor do Portfólio com Otimização Terminal

Tempo	CDI	FX	IBOV	IRFM
0	0.9160	0.0006	-0.0013	0.0847
1	0.9185	0.0007	-0.0010	0.0818
2	0.9204	0.0006	-0.0007	0.0797
3	0.9226	0.0006	-0.0005	0.0772
4	0.9238	0.0007	-0.0003	0.0757
5	0.9253	0.0005	-0.0002	0.0743
6	0.9251	0.0011	-0.0001	0.0740
7	0.9281	0.0008	0.0001	0.0711
8	0.9270	0.0010	-0.0001	0.0721
9	0.9279	0.0011	0.0000	0.0710
10	0.9278	0.0008	0.0000	0.0714
11	0.9289	0.0007	0.0001	0.0704
12	0.9274	0.0009	0.0000	0.0718
13	0.9287	0.0008	0.0000	0.0705
14	0.9287	0.0010	0.0000	0.0702
15	0.9286	0.0007	0.0000	0.0707
16	0.9277	0.0007	-0.0001	0.0717
17	0.9276	0.0007	-0.0001	0.0718
18	0.9280	0.0003	-0.0002	0.0718
19	0.9275	0.0006	-0.0002	0.0721
20	0.9282	0.0006	-0.0002	0.0714
21	0.9280	0.0006	-0.0003	0.0717
22	0.9274	0.0009	-0.0003	0.0721
23	0.9281	0.0007	-0.0004	0.0717
24	0.9260	0.0010	-0.0005	0.0735

Tabela C.9: Alocação % sobre Valor do Portfólio com Otimização Multiperíodo

C.2.3 Simulação de ALM para Fundo de Pensão

Tempo	EY	EY mult	VarY	VarY mult	EG	EG mult
0	-0.0600	-0.0600	0.0000	0.0000	Inf	Inf
1	-0.0545	0.0038	0.0121	0.1694	-4.4865	0.0222
2	-0.0490	0.0049	0.0161	0.1580	-3.0490	0.0310
3	-0.0438	0.0057	0.0183	0.1481	-2.3945	0.0384
4	-0.0389	0.0065	0.0194	0.1378	-2.0051	0.0475
5	-0.0343	0.0078	0.0199	0.1273	-1.7245	0.0609
6	-0.0300	0.0095	0.0201	0.1179	-1.4912	0.0806
7	-0.0260	0.0109	0.0196	0.1087	-1.3224	0.1007
8	-0.0223	0.0127	0.0195	0.1031	-1.1443	0.1234
9	-0.0191	0.0140	0.0193	0.0952	-0.9913	0.1472
10	-0.0160	0.0154	0.0184	0.0853	-0.8690	0.1806
11	-0.0131	0.0170	0.0174	0.0782	-0.7524	0.2172
12	-0.0104	0.0181	0.0165	0.0695	-0.6307	0.2608
13	-0.0078	0.0196	0.0148	0.0609	-0.5275	0.3225
14	-0.0054	0.0213	0.0138	0.0565	-0.3908	0.3774
15	-0.0031	0.0230	0.0130	0.0546	-0.2382	0.4220
16	-0.0010	0.0249	0.0126	0.0543	-0.0774	0.4589
17	0.0011	0.0264	0.0123	0.0549	0.0898	0.4813
18	0.0031	0.0280	0.0105	0.0510	0.2987	0.5485
19	0.0051	0.0295	0.0098	0.0470	0.5187	0.6272
20	0.0070	0.0308	0.0086	0.0385	0.8122	0.7995
21	0.0089	0.0323	0.0073	0.0359	1.2158	0.9001
22	0.0107	0.0337	0.0066	0.0282	1.6218	1.1948
23	0.0125	0.0353	0.0058	0.0269	2.1395	1.3086
24	0.0142	0.0369	0.0057	0.0259	2.4823	1.4240
25	0.0158	0.0386	0.0061	0.0246	2.5759	1.5653
26	0.0175	0.0404	0.0067	0.0189	2.6213	2.1347
27	0.0192	0.0421	0.0060	0.0165	3.2067	2.5454
28	0.0209	0.0439	0.0057	0.0167	3.6918	2.6233
29	0.0226	0.0455	0.0043	0.0154	5.2357	2.9441
30	0.0243	0.0471	0.0043	0.0149	5.5901	3.1564
31	0.0260	0.0488	0.0036	0.0148	7.1531	3.3021
32	0.0276	0.0505	0.0035	0.0158	8.0023	3.2033
33	0.0293	0.0522	0.0034	0.0149	8.7168	3.4978
34	0.0309	0.0539	0.0026	0.0228	11.8972	2.3672
35	0.0326	0.0554	0.0022	0.0094	14.6806	5.8854
36	0.0343	0.0571	0.0019	0.0067	18.1152	8.5037
37	0.0359	0.0588	0.0019	0.0059	18.7694	9.9716
38	0.0376	0.0605	0.0018	0.0049	21.1698	12.2657
39	0.0392	0.0622	0.0019	0.0041	20.5492	15.2518
40	0.0409	0.0639	0.0016	0.0033	25.1193	19.4447
41	0.0425	0.0656	0.0015	0.0026	28.3800	24.8137
42	0.0442	0.0673	0.0015	0.0025	29.8139	26.4440
43	0.0459	0.0691	0.0015	0.0025	31.4481	27.5735
44	0.0475	0.0708	0.0015	0.0023	32.3653	30.6558
45	0.0492	0.0725	0.0015	0.0022	33.6418	33.5269
46	0.0509	0.0743	0.0015	0.0022	34.9500	33.9418
47	0.0526	0.0760	0.0015	0.0021	36.0857	37.0400
48	0.0543	0.0778	0.0014	0.0019	37.7070	41.2620
49	0.0560	0.0796	0.0014	0.0017	38.9550	47.8639
50	0.0577	0.0813	0.0014	0.0016	39.8982	51.9729
51	0.0595	0.0831	0.0013	0.0015	44.5009	56.3146

Tabela C.10: Resultados da Otimização

Tempo	CDI	FX	IBOV	IRFM	OURO
0	-0.1618	-0.8413	-0.2046	2.0814	0.1262
1	-0.0901	-0.7021	-0.1673	1.8277	0.1318
2	0.0325	-0.5958	-0.1359	1.5723	0.1269
3	0.1470	-0.5075	-0.1126	1.3573	0.1158
4	0.2673	-0.4362	-0.0919	1.1561	0.1047
5	0.3641	-0.3738	-0.0765	0.9934	0.0928
6	0.4310	-0.3138	-0.0672	0.8719	0.0780
7	0.5079	-0.2643	-0.0553	0.7442	0.0676
8	0.5673	-0.2227	-0.0470	0.6450	0.0573
9	0.6172	-0.1947	-0.0410	0.5685	0.0500
10	0.6652	-0.1653	-0.0334	0.4901	0.0436
11	0.6987	-0.1377	-0.0295	0.4324	0.0361
12	0.7299	-0.1173	-0.0258	0.3828	0.0304
13	0.7574	-0.0974	-0.0221	0.3365	0.0256
14	0.7864	-0.0834	-0.0182	0.2932	0.0220
15	0.8036	-0.0702	-0.0165	0.2653	0.0178
16	0.8223	-0.0624	-0.0137	0.2377	0.0161
17	0.8377	-0.0528	-0.0121	0.2146	0.0127
18	0.8526	-0.0428	-0.0095	0.1885	0.0113
19	0.8648	-0.0378	-0.0080	0.1712	0.0097
20	0.8720	-0.0306	-0.0075	0.1587	0.0074
21	0.8826	-0.0246	-0.0057	0.1413	0.0065
22	0.8890	-0.0210	-0.0049	0.1315	0.0055
23	0.8951	-0.0176	-0.0041	0.1221	0.0045
24	0.8969	-0.0147	-0.0039	0.1180	0.0038
25	0.8988	-0.0132	-0.0036	0.1145	0.0035
26	0.9029	-0.0118	-0.0032	0.1093	0.0028
27	0.9066	-0.0100	-0.0027	0.1037	0.0025
28	0.9102	-0.0087	-0.0022	0.0986	0.0021
29	0.9143	-0.0070	-0.0016	0.0925	0.0018
30	0.9154	-0.0054	-0.0016	0.0903	0.0013
31	0.9180	-0.0038	-0.0013	0.0864	0.0007
32	0.9168	-0.0035	-0.0014	0.0873	0.0008
33	0.9197	-0.0022	-0.0010	0.0831	0.0004
34	0.9207	-0.0023	-0.0009	0.0821	0.0004
35	0.9211	-0.0017	-0.0008	0.0810	0.0003
36	0.9229	-0.0011	-0.0007	0.0788	0.0001
37	0.9229	-0.0011	-0.0006	0.0786	0.0001
38	0.9232	-0.0005	-0.0007	0.0781	-0.0001
39	0.9243	-0.0005	-0.0005	0.0769	-0.0001
40	0.9246	-0.0005	-0.0005	0.0766	-0.0002
41	0.9247	0.0000	-0.0004	0.0758	-0.0002
42	0.9238	-0.0002	-0.0005	0.0771	-0.0002
43	0.9245	-0.0002	-0.0005	0.0764	-0.0002
44	0.9246	-0.0003	-0.0005	0.0764	-0.0001
45	0.9240	-0.0001	-0.0005	0.0768	-0.0001
46	0.9239	0.0000	-0.0005	0.0768	-0.0002
47	0.9241	0.0003	-0.0005	0.0763	-0.0003
48	0.9252	0.0004	-0.0005	0.0751	-0.0004
49	0.9237	0.0007	-0.0005	0.0766	-0.0004
50	0.9232	0.0010	-0.0006	0.0769	-0.0005
51	0.9235	0.0014	-0.0007	0.0765	-0.0007

Tabela C.11: Alocação % sobre Valor do Portfólio com Otimização Terminal

Tempo	CDI	FX	IBOV	IRFM	OURO
0	-14.0339	-11.6696	-2.8177	27.7515	1.7697
1	0.9989	0.0453	0.0110	-0.0450	-0.0103
2	0.9501	0.0680	0.0073	-0.0085	-0.0169
3	0.9748	0.0294	0.0104	-0.0121	-0.0025
4	0.9112	0.0232	-0.0050	0.0812	-0.0106
5	0.9569	0.0015	0.0048	0.0379	-0.0011
6	0.9207	0.0292	0.0032	0.0482	-0.0013
7	0.9091	0.0179	-0.0047	0.0853	-0.0076
8	0.9380	0.0179	0.0005	0.0505	-0.0070
9	0.9334	0.0119	-0.0006	0.0618	-0.0064
10	0.9426	0.0030	0.0005	0.0572	-0.0033
11	0.9318	0.0129	0.0020	0.0554	-0.0021
12	0.9092	0.0066	-0.0046	0.0962	-0.0074
13	0.9148	0.0076	-0.0019	0.0836	-0.0041
14	0.9212	0.0091	-0.0003	0.0712	-0.0011
15	0.9387	0.0040	0.0016	0.0572	-0.0015
16	0.9382	0.0122	0.0031	0.0478	-0.0013
17	0.9384	0.0089	0.0023	0.0526	-0.0022
18	0.9408	0.0028	0.0015	0.0558	-0.0009
19	0.9456	0.0005	0.0025	0.0523	-0.0009
20	0.9276	0.0008	-0.0001	0.0729	-0.0012
21	0.9178	-0.0005	-0.0028	0.0877	-0.0022
22	0.9216	-0.0049	-0.0006	0.0825	0.0014
23	0.9138	-0.0033	-0.0026	0.0930	-0.0010
24	0.9097	0.0005	-0.0021	0.0921	-0.0001
25	0.9211	-0.0036	-0.0009	0.0833	0.0001
26	0.9202	0.0007	-0.0013	0.0813	-0.0009
27	0.9259	0.0014	-0.0005	0.0740	-0.0009
28	0.9277	0.0039	0.0000	0.0697	-0.0013
29	0.9254	0.0029	-0.0001	0.0723	-0.0005
30	0.9288	0.0024	0.0005	0.0682	0.0001
31	0.9292	0.0037	0.0001	0.0681	-0.0011
32	0.9219	0.0053	-0.0011	0.0762	-0.0023
33	0.9277	0.0038	0.0001	0.0693	-0.0010
34	0.9326	0.0015	0.0006	0.0663	-0.0010
35	0.9274	0.0012	0.0001	0.0716	-0.0004
36	0.9256	0.0013	-0.0003	0.0740	-0.0006
37	0.9261	0.0013	-0.0003	0.0734	-0.0005
38	0.9251	0.0017	-0.0005	0.0745	-0.0007
39	0.9249	0.0015	-0.0005	0.0747	-0.0006
40	0.9264	0.0013	-0.0003	0.0732	-0.0006
41	0.9249	0.0012	-0.0005	0.0749	-0.0006
42	0.9259	0.0012	-0.0004	0.0739	-0.0005
43	0.9256	0.0009	-0.0005	0.0746	-0.0005
44	0.9256	0.0012	-0.0005	0.0742	-0.0005
45	0.9257	0.0011	-0.0005	0.0743	-0.0006
46	0.9262	0.0009	-0.0003	0.0736	-0.0004
47	0.9261	0.0011	-0.0005	0.0739	-0.0006
48	0.9264	0.0014	-0.0005	0.0732	-0.0006
49	0.9264	0.0015	-0.0004	0.0731	-0.0006
50	0.9262	0.0014	-0.0005	0.0735	-0.0007
51	0.9261	0.0017	-0.0006	0.0735	-0.0007

Tabela C.12: Alocação % sobre Valor do Portfólio com Otimização Multiperíodo

Referências Bibliográficas

[1] **RiskMetrics Technical Document**. New York, 4th. ed., 1993, Disponível em: <http://www.riskmetrics.com>.

[2] AIT RAMI, M.; CHEN, X.; ZHOU, X. Y. Discrete-Time Indefinite LQ Control with State and Control Dependent Noises. **Journal of Global Optimization**, 2002. p. 245-265, v. 23.

[3] AIT RAMI, M.; MOORE, J. B.; ZHOU, X. Y. Indefinite Stochastic Linear Quadratic Control and Generalized Differential Riccati Equation. **SIAM J. Control Optimization**, 2001. p. 1296-1311, v. 40.

[4] AIT RAMI, M.; ZHOU, X. Y. Linear Matrix Inequalities, Riccati Equations, and Indefinite Stochastic Linear Quadratic Controls. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2000. p. 1131-1143, v. 45.

[5] ÇANAKOGLU, E.; ÖZECKICI, S. Portfolio Selection in Stochastic Markets with HARA Utility Functions. **European Jornal of Operations Research**, 2010. p. 520-536, v. 201.

[6] ÇANAKOGLU, E.; ÖZECKICI, S. Portfolio Selection with Imperfect Information: a hidden Markov model. **Applied Stochastic Models in Business and Industry**, 2011. p. 95-114, v. 27.

[7] BACHELIER, L. Théorie de la Spéculation. **Annales Scientifiques de L'É.N.S**, 3e. série, 1900. p. 21-86, v. 17.

[8] BEGHI, A.; D'ALESSANDRO, D. Discrete-Time Optimal Control with Control-Dependent Noise and Generalized Riccati Difference Equations. **Automatica**, 1998. p. 1031-1034, v. 34.

[9] BERNSTEIN, D. S. Feedback Control: an invisible thread in the history of technology. **IEEE Control Systems Magazine**, 2002. p. 53-68, v. 22.

[10] BERTOCCHI, M.; SCHWARTZ, S. L.; ZIEMBA, W. T. **Optimizing the Aging, Retirement and Pensions Dilemma**. John Wiley and Sons, New York, 2010.

[11] BERTSEKAS, D. P. **Dynamic Programming and Optimal Control**. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 2005.

[12] BLACK, F.; LITTERMAN, R. Asset Allocation: combining investor views with market equilibrium. **Journal of Fixed Income**, 1991. p. 7-18, v. 1.

[13] BLACK, F.; LITTERMAN, R. Global Asset Allocation with Equities, Bonds and Currencies. **Financial Income Research, Goldman Sachs**, 1991.

[14] BLACK, F.; LITTERMAN, R. Global Portfolio Optimization. **Financial Analysts Journal**, 1992. p. 28-43, v. 48.

[15] BLACK, F.; SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. **The Journal of Political Economy**, 1973. p. 637-654, v. 81.

[16] BOUKAS, E. K.; LIU, Z. K. Delay-Dependent Stabilization of Singularly Perturbed Jump Linear Systems. **International Journal of Control**, 2004. p. 310-319, v. 77.

[17] CAKMAK, U.; ÖZECKICI, S. Portfolio Optimization in Stochastic Markets. **Mathematical Methods of Operations Research**, 2006. p. 151-168, v. 63.

[18] CALAFIORE, G. C. Multi-Period Portfolio Optimization with Linear Control Policies. **Automatica**, 2008. p. 2463-2473, v. 44.

[19] ÇELIKYURT, U.; ÖZECKICI, S. Multperiod Portfolio Optimization Models in Stochastic Markets Using the Mean-Varaince Approach. **European Jornal of Operations Research**, 2007. p. 186-202, v. 179.

[20] CHAO-LIN, H. The Effect of Higher Moments of Risky Asset Return on Portfolio Choice. **IEEE, International Conference on Management and Service Science MASS**, 2010. p. 1-42.

[21] CHEN, S.; LI, X.; ZHOU, X. Y. Stochastic Linear Quadratic Regulators with Indefinite Control Weight Costs. **SIAM J. Control Optimization**, 1998. p. 1685-1702, v. 36.

[22] CHOPRA, V. K.; ZIEMBA, W. T. The Effect of Errors in Means, Variances and Covariances on Optimal Portfolio Choice. **Journal of Portfolio Management**, 1993. p. 6-11, v. 19.

[23] CORNEJUOLS, G. and TÜTÜNCÜ, R. **Optimization Methods in Finance**. University Press Cambridge, New York, 2007.

[24] COSTA, O. L. V.; NABHOLZ, R. B. Multiperiod Mean-Variance Optimization with Intertemporal Restrictions. **Journal of Optimization Theory and Applications**, 2007. p. 257-274, v. 134.

[25] COSTA, O. L. V.; ARAUJO, M. V. A Generalized Multi-Period Mean-Variance Portfolio Optimization with Markov Switching Parameters. **Automatica**, 2008. p. 2487-2497, v. 44.

[26] COSTA, O. L. V.; ASSUNÇÃO, H.G.V. **Análise de Risco e Retorno de Investimentos Financeiros**. Manole, São Paulo, 2005.

[27] COSTA, O. L. V.; BENITES, G. R. A. M. Linear Minimum Mean Square Filter for Discrete-Time Linear Systems with Markov Jumps and Multiplicative Noises. **Automatica**, 2011. p. 466-476, v. 47.

[28] COSTA, O. L. V.; PAULO, W. L. Indefinite Quadratic with Linear Cost Optimal Control of Markovian Jump with Multiplicative Noise Systems. **Automatica**, 2007. p. 587–597, v. 43.

[29] COSTA, O. L. V.; PAULO, W. L. Generalized Coupled Algebraic Riccati Equations for Discrete-time Markov Jump with Multiplicative Noise Systems. **European Journal of Control**, 2008. p. 391-408, v. 14.

[30] COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; MARQUES, R. P. **Discrete-Time Markov Jump Linear Systems**. Springer-Verlag, 2005.

[31] COSTA, O. L. V.; OKIMURA, R. Discrete-Time Mean Variance Optimal Control of Linear Systems with Markovian Jumps and Multiplicative Noise. **International Journal of Control**, 2009. p. 256-267, v. 82.

[32] COSTA, O. L. V.; OLIVEIRA, A. Optimal Control Under a Mean Variance Criterion for Discrete-Time Linear Systems with Markovian Jumps and Multiplicative Noise. **49th IEEE Conference on Decision and Control**, 2010. p. 573-578.

[33] COSTA, O. L. V.; OLIVEIRA, A. Optimal Mean-Variance Control for Discrete-Time Linear Systems with Markovian Jumps and Multiplicative Noise. **Automatica**, *a ser publicado*.

[34] DOMBROVSKII, V. V.; DOMBROVSKII, D. V.; LYASHENKO, E. A. Investment Portfolio Optimization with Transaction Costs and Constraints Using Model Predictive Control. **IEEE Proceedings of the 8th. Russian-Korean International Symposium on Science and Technology**, 2004. p. 202-205, v. 3.

[35] DOMBROVSKII, V. V.; DOMBROVSKII, D. V.; LYASHENKO, E. A. Model Predictive Control of Systems with Random Dependent Parameters under Constraints and its Application to the Investment Portfolio Optimization. **Automatic and Remote Control**, 2006. p. 1927-1939, v. 67(12).

[36] DOMBROVSKII, V. V.; GAL'PERIN, V. A.; FEDOSOV, E. N. Dynamic Control of the Investment Portfolio in the Jump-Diffusion Financial Market with Regime Switching. **Automatic and Remote Control**, 2005. p. 837-850, v. 66(5).

[37] DOMBROVSKII, V. V.; GERASIMOV, E. S. Dynamic Network Model of Investment Control for Quadratic Risk Function. **Automatic and Remote Control**, 2002. p. 280-288, v. 63(2).

[38] DOMBROVSKII, V. V.; GERASIMOV, E. S. Dynamic Network Model of Managing Investment Portfolio Under Random Stepwise Changes in Volatilities of Financial Assets. **Automatic and Remote Control**, 2003. p. 1086-1093, v. 64(7).

[39] DOMBROVSKII, V. V.; LYASHENKO, E. A. A Linear Quadratic Control for Discrete Systems with Random Parameters and Multiplicative Noise and Its Application to Investment Portfolio Optimization. **Automatic and Remote Control**, 2003. p. 1558-1570, v. 64(10).

[40] DOMBROVSKII, V. V.; OB"EDKO, T. Y. Predictive Control of Systems with Markovian Jumps Under Constraints and Its Application to the Investment Portfolio Optimization. **Automatic and Remote Control**, 2011. p. 989-1003, v. 75(2).

[41] DOMBROVSKII, V. V.; DOMBROVSKII, D. V.; LYASHENKO, E. A. Predictive Control of Random-Parameter Systems with Multiplicative Noise: application to investment portfolio optimization. **Automatic and Remote Control**, 2005. p. 583-595, v. 63(4).

[42] DRAGAN, V.; MOROZAN, T. Mean Square Exponential Stability for Some Stochastic Linear Discrete-Time Systems. **European Journal of Control**, 2006. p. 1-23, v. 11.

[43] DRAGAN, V.; MOROZAN, T. Observability and Detectability of a Class of Discrete-Time Stochastic Linear Systems. **IMA Journal of Math. Control and Inf**, 2006. p. 371-394, v. 23.

[44] DRAGAN, V.; MOROZAN, T.; STOICA, A. **Mathematical Methods in Robust Control of Discrete-Time Linear Stochastic Systems**. Springer Science+Business Media, New York, 2010.

[45] ÇELIKYURT, U.; ÖZECKICI, S. Multiperiod Portfolio Optimization Models in Stochastic Markets Using the Mean-Variance Approach. **European Jornal of Operations Research**, 2007. p. 186-202, v. 179.

[46] ELLIOTT, R. J.; DUFOUR, F.; MALCOLM, W. P. State and Mode Estimation for Discrete-Time Jump Markov Systems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, 2005. p. 1081-1104, v. 44.

[47] ELTON, E. J.; GRUBER, M. J.; BROWN, S. J.; GOETZMANN, W. N. **Modern Portfolio Theory and Investment Analysis**. John Wiley and Sons, New York, 7th. ed., 1993.

[48] FAMA, E. F. The Behavior of Stock Market Prices. **The Journal of Business**, 1965. p. 34-105, v. 38(1).

[49] FELLER, W. An Introduction to Probability: theory and its applications. John Wiley and Sons, New York, 3rd ed., 1968, v. 1.

[50] FROST, P.; SAVARINO, J. An Empirical Bayes Approach to Efficient Portfolio Selection. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, 1986, p. 293-305, v. 21(3).

[51] ZHENG, H. Y.; MA, Y Q. Multi-Period Mean-Variance Model with Uncertain Exit Time. **3rd International Conference IEEE**, 2010, p. 43-46.

[52] HAKANSSON, N. H. Optimal Investment and Consumption Strategies Under Risk, an Uncertain Lifetime and Insurance. **International Economic Review**, 1969. p. 443-466, v. 10.

[53] HAKANSSON, N. H. Optimal Investment and Consumption Strategies Under for a Class of Utility Functions. **International Economic Review**, 1970. p. 587-607, v. 38.

[54] HAKANSSON, N. H. On Optimal Myopic Portfolio Policies, with and without Serial Correlation of Yields. **International Economic Review**, 1971. p. 324-334, v. 44.

[55] HAKANSSON, N. H. Convergence to Isolastic Utility and Policy in Multiperiod Portfolio Choice. **Journal of Financial Economics**, 1974. p. 2010-2024, v. 1.

[56] HANSON, N. H. Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions. **SIAM, Philadelphia**, 2007.

[57] HARVEY, C. R.; LIECHTY, J.; LIECHTY, M. W.; MUELLER, P. Portfolio Selection with Higher Moments. **Working Paper, Duke University**, 2010.

[58] HENDRICKS, E.; JANNERUP, O.; SORENSEN, P. H. **Linear Systems Control: deterministic and stochastic methods**. Springer-Verlag, Berlin , 2008.

[59] HOU, T.; ZHANG, W; MA, H. Finite Horizon H_2/H_∞ Control for Discrete-Time Stochastic Systems with Markovian Jumps and Multiplicative Noise. **Automatica**, 2010. p. 1185-1191, v. 55.

[60] HOWE, M. A.; RUSTEM, B. A Robust Hedging Algorithm. **Journal of Economic Dynamics and Control**, 1997. p. 1065-1092, v. 21.

[61] HOWE, M. A.; RUSTEM, B.; SELBY, M. J. P. Multi-Period Minimax Hedging Strategies. **European Journal of Operational Research**, 1996. p. 185-204, v. 93.

[62] HUNT, E. K.; LAUTZENHEISER, M. **History of Economic Thought: a critical perspective**. M.E. Sharpe, New York, 3rd. ed., 2011.

[63] JOBSON, J.; KORKIE, B.; RATTI, V. Improved Estimation for Markowitz Portfolios Using James-Stein Type Estimators. **Proceedings of the American Statistical Association**, Business and Economic Statistics Section, 1979.

[64] JONDEAU, E.; POON, S.; ROCKINGER, M. **Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions**. Springer, London, 2010.

[65] JORION, P. Bayes-Stein Estimation for Portfolio Analysis. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, 1986. p. 279-292, v. 21(3).

[66] JORION, P. Bayesian and CAPM Estimators of the Means: implications for portfolio selection. **Journal of Banking and Finance**, 1991. p. 717-727, v. 15(3).

[67] JORION, P. Portfolio Optimization in Practice. **Financial Analysts Journal**, 1992. p. 68-74, v. 1.

[68] LARSEN, G.; RESNICK, B. Parameter Estimation Techniques, Optimization Frequency, and Portfolio Return Enhancement. **Journal of Portfolio Management**, 2001. p. 27-34, v. 27(4).

[69] LEIPPOLD, M.; TROJANI, F.; VANINI, P. A Geometric Approach to Multiperiod Mean Variance Optimization of Assets and Liabilities. **Journal of Economic Dynamics and Control**, 2004. p. 1079-1113, v. 28.

[70] NG, W.; LI, D. Optimal Dynamic Portfolio Selection: multiperiod mean-variance formulation. **Mathematical Finance**, 2000, p. 387-406, v. 10(3).

[71] LI, X.; ZHOU, X. Y.; AIT RAMI, M. Indefinite Stochastic Linear Quadratic Control with Markovian Jumps in Infinite Time Horizon. **Journal of Global Optimization**, 2003, p. 149-175, v. 27.

[72] LIM, A.; ZHOU, X. Y. Stochastic Optimal LQR Control with Integral Quadratic Constraints and Indefinite Control Weights. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1999, p. 1359-1369, v. 44(7).

[73] LINTNER, J. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. **The Review of Economics and Statistics**, 1965, p. 13-37, v. 47.

[74] MANDELBROT, B. **The Misbehavior of the Markets**. Basic Books, New York, 2004.

[75] MARKOWITZ, H. M. Portfolio Selection. **Journal of Finance**, 1952, p. 77-91, v. 7(1).

[76] MARKOWITZ, H. M. **Portfolio Selection: efficient diversification of investments**. John Wiley and Sons, New York, 1959.

[77] MARKOWITZ, H. M.; TODD, G. P. **Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets**. John Wiley and Sons, New York, 2000.

[78] MERTON, R. C. Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: the continuous-time case. **The Review of Economics and Statistics**, 1969, p. 247-257, v. 51(3).

[79] MERTON, R. C. Analytical Optimal Control Theory as Applied to Stochastic and Non-Stochastic Economics. **Ph.D. Thesis Submitted at the Massachusetts Institute of Technology**, 1970.

[80] MERTON, R. C. Theory of Rational Option Pricing. **The Bell Journal of Economics and Management Science**, 1973, p. 141-183, v. 4(1).

[81] MEUCCI, A. **Risk and Asset Allocation**. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[82] MICHAUD, R.; MICHAUD, R. Estimation Error and Portfolio Optimization: a Resampling Solution. **Journal of Investment Management**, 2008, p. 8-28, v. 6(1).

[83] MICOCCI, M.; GREGORIOU, G. N.; MASALA, G. B. **Pension Fund Risk Management: financial and actuarial modeling**. Chapman and Hall, Florida, 2010.

[84] MODIGLIANI, F.; MILLER, M. H. The Cost of Capital, Corporation Finance and The Theory of Investment. **The American Economic Review**, 1958, p. 261-297, v. 48(3).

[85] MODIGLIANI, F.; MILLER, M. H. Dividend Policy, Growth, and the Valuation of Shares. **Journal of Business**, 1961, p. 411-433, v. 34(4).

[86] MODIGLIANI, F.; MILLER, M. H. Corporate Income Taxes and the Cost of Capital: a Correction. **The American Economic Review**, 1963, p. 433-443, v. 53(3).

[87] MOORE, J. B.; ZHOU, X. Y.; LIM, A. E. B. Discrete-Time LQG Controls with Control Dependent Noise. **Systems & Control Letters**, 1999. p. 199-206, v. 36.

[88] MOSSIN, J. Equilibrium in a Capital Asset Market. **Econometrica**, 1966. p. 768-783, v. 34(4).

[89] MOSSIN, J. Optimal Multiperiod Portfolio Policies. **The Journal of Business**, 1968. p. 215-229, v. 41(2).

[90] NEUMANN, J. V.; MORGENSTERN, O. **Theory of Games and Economic Behavior**. Princeton University Press, 1953. 3rd ed., 1953.

[91] PRIMBS, J. A.; SUNG, C. H. Stochastic Receding Horizon Control of Constrained Linear Systems with State and Control Multiplicative Noise. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2009. p. 221-230, v. 54(2).

[92] RACHEV, S. T.; HSU, J. S.; BAGASHEVA, B. S.; FABOZZI, F. J. **Bayesian Methods in Finance**. John Wiley and Sons, New York, 2008.

[93] RUSTEM, B.; BECKER, R. G.; MARTY, W. Robust Min-Max Portfolio Strategies for Rival Forecast and Risk Scenarios. **Journal of Economic Dynamics and Control**, 1995. p. 1591-1621, v. 24.

[94] SABERI, A.; SANNUTI, P.; CHEN, B. M. H_2**-Optimal Control**. Prentice-Hall, New York, 1995.

[95] SAMUELSON, P. A. Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming. **The Review of Economics Studies**, 1969. p. 239-246, v. 51.

[96] SARYCHEV, A.; SHIRYAEV, A.; GUERRA, M.; GROSSINHO, M. R. **Mathematical Control Theory and Finance**. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[97] SHARPE, W. F. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. **Journal of Finance**, 1964. p. 425-442, v. 19.

[98] SHARPE, W. F.; TINT, L. G. Liabilities: a new approach. **Journal of Finance**, 1990. p. 5-10, 25 v.

[99] SADJADI, S. J.; SEYEDHOSSEINI, S. M.; HASSANLOU, K. Fuzzy Multi-Period Portfolio Selection with Different Rates for Borrowing and Lending. **Applied Soft Computing**, 2011. p. 3821-3826, v. 11.

[100] STEINBACH, M. C. Markowitz Revisited: mean-variance models in financial portfolio analysis. **Siam Review**, 2001. p. 31-85, v. 43.

[101] STOICA, A.; YAESH, I. Stochastic Hopfield Networks with Multiplicative Noise and Jump Markov Parameters. **Math Reports**, University of Bucharest, 2007. p. 111-122, v. 9(1).

[102] SURA, P.; NEWMAN, M.; PENLAND, C.; SARDESHMUKH, P. Multiplicative Noise and Non-Gaussianity: a paradigm for atmosferic regimes?. **Journal of the Atmosferic Sciences**, 2004. p. 1391-1409, v. 62.

[103] TOBIN, T. Liquidity Preferences as Behavior Towards Risk. **The Review of Economics Studies**, 1958. p. 65-86, v. 25.

[104] WEI, S. Z.; YE, Z. X. Multiperiod Optimization Portfolio with Bankruptcy Conttrol in Stochastic Market. **Applied Mathematics and Computation**, 2007. p. 414-425, v. 186.

[105] WU, H.; LI, Z. Multi-Period Mean-Variance Portfolio Selection with Markov Regime Switching and Uncertain Time-Horizon. **JSSC**, Springer-Verlag , 2011. p. 140-155, v. 24.

[106] WU, H.; ZHOU, X. Y. Characterizing All Optimal Controls for an Indefinite Stochastic Linear Quadratic Control Problem. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2002. p. 1119-1122, v. 47.

[107] CUI, X.; LI, D.; WANG, S. Better than Dynamic Mean-Variance: time inconsistency and free cash-flow stream. **Mathematical Finance**, 2010. p. 1-33.

[108] ZHOU, X. Y.; YIN, G. Markowitz's Mean-Variance Portfolio Selection with Regime Switching: from discrete-time models to their continuous-time limits. **IEEE Trans. Automatic Control**, 2004, p. 349-360, v. 49.

[109] ZENIOS, S. A.; ZIEMBA, W. T. **Handbook of Asset and Liability Management**. Elsevier B.V., 2007., v. 2.

[110] ZHANG, L.; BOUKAS, E. Stability and Stabilization of Markovian Jump Linear Systems with Partly Unknow Transition Probabilities. **Automatica**, 2008, p. 463-468, v. 45.

[111] ZHANG, L.; BOUKAS, E. Mode-Dependent H_∞ Filtering for Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems with Partly Unknown Transition Probabilities. **Automatica**, 2009, p. 1462-1467, v. 45.

[112] ZHANG, L.; BOUKAS, E. Analisys and Synthesis of Markov Jump Linear Systems with Time-Varying Delays and Partially Known Transition Probabilities. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2008, p. 2458-2464, v. 53(10).

[113] ZHOU, X. Y.; LI, D. Continuous-Time Mean-Variance Portfolio Selection: a stochastic LQ framework. **Applied Mathematics and Optimization**, 2000, p. 19-33, v. 42.

[114] ZHOU, X. Y.; YIN, G. Markowitz's Mean-Variance Portfolio Selection with Regime Switching: a continuous-time model. **SIAM J. Control and Optimization**, 2003, p. 1466-1482, v. 42.

[115] ZHU, J. On Stochastic Riccati Equations for the Stochastic LQR Problem. **Systems & Control Letters**, 2005, p. 119-124, v. 54.

[116] ZHU, S. S.; LI, D.; WANG, S. Y. Risk Control Over Bankruptcy in Dynamic Portfolio Selection: a generalized mean variance formulation. **IEEE Trans. Autom. Control.**, 2004, p. 447-457, v. 49.