Rodolfo Misoczki

Identificação de sistemas através do método assintótico

São Paulo
2011

Rodolfo Misoczki

Identificação de sistemas através do método assintótico

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de Mestre em
Engenharia

São Paulo
2011

Rodolfo Misoczki

Identificação de sistemas através do método assintótico

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de Mestre em
Engenharia

Área de Concentração:
Engenharia de Sistemas

Orientador:
Prof. Dr. Claudio Garcia

São Paulo
2011

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 09 de dezembro de 2011.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Misoczki, Rodolfo

Identificação de sistemas através do método assintótico / R. Misoczki. – ed.rev. -- São Paulo, 2011.

120 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle.

1. Identificação de sistemas 2. Métodos assintóticos 3. Teoria assintótica 4. Sistemas SISO I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle II. t.

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado
à minha mãe Rozires, ao
meu irmão Rafael e à
minha querida esposa
Renata.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Prof. Claudio Garcia, por toda a atenção, paciência e apoio durante toda esta jornada até este momento.

Ao amigo Eng. Filipe Costa Pinto dos Reis Miranda, pelo grande incentivo no meu ingresso ao Mestrado e pelo apoio nos momentos mais decisivos.

Aos colegas do CETAI, Eng. Rodrigo Alvite Romano, Eng. Rodrigo Juliani e Eng. Vitor Alex Oliveira Alves pelo apoio científico.

À Petrobras por permitir e incentivar o desenvolvimento dos seus funcionários.

À minha família pela compreensão e estímulo.

RESUMO

A Identificação de Sistemas é uma das técnicas utilizadas para se obter a representação matemática de um sistema. Diversos métodos podem ser aplicados para se obter um modelo matemático através da identificação de sistemas, entre eles o método de identificação assintótico, também chamado de ASYM (Zhu, 1998).

Este trabalho propõe aplicar o método de identificação assintótico em sistemas SISO para a obtenção de modelo de sistemas ditos “caixa-preta” e avaliar o seu desempenho buscando também o melhor detalhamento do método. Os modelos obtidos foram avaliados de acordo com sua nota calculada através do método ASYM, através da comparação do índice de ajuste *fit* para autovalidação e validação cruzada e pela variância dos parâmetros dos modelos.

O método ASYM é exaustivamente testado para sua avaliação. Entre os testes realizados neste trabalho destacam-se dois experimentos tipo Monte-Carlo com mais de quinhentas identificações e a aplicação do método em uma planta real.

Os testes comprovaram a viabilidade da aplicação do método assintótico na identificação de sistemas SISO do tipo “caixa-preta” com excelente desempenho para estruturas ARMAX.

ABSTRACT

System Identification is one of the techniques used to obtain the mathematical representation of a system. Several methods can be applied to obtain a mathematical model by the system identification, including the asymptotic method, also called ASYM (Zhu, 1998).

This work proposes to apply the ASYM method for SISO systems identification, then obtain models of "black-box" systems called "black box" and evaluate its performance and show details of the method. The models obtained were evaluated according to their grade calculated using the ASYM method, by comparing the fit adjustment index, self-validation and cross validation and the variance of model parameters.

The asymptotic method has been extensively tested to be evaluated. Among the tests in this work, two stand out such Monte Carlo experiments with more than five hundred identifications and a real plant identification.

The tests proved the feasibility of applying the asymptotic method in the "black box" SISO systems identification with excellent performance for ARMAX structures.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1-1 – (a) e (b) Trocador de calor com depósitos em seus tubos. (c) e (d) Trocador de calor com depósitos em seu casco.	17
Figura 1-2 – Elenco de petróleo processado em uma refinaria ao longo de 8 semanas.....	18
Figura 2-1 – Diagrama de blocos do sistema da eq. (2-1) acrescido do controlador em malha fechada.....	25
Figura 3-1 – Fluxograma do método assintótico.	32
Figura 4-1 – Processo Åström & Eykhoff com controlador PI e perturbação	51
Figura 4-2 – (a) Sinal GBN utilizado na identificação. (b) Espectro de potência do sinal GBN.....	53
Figura 4-3 – Diagrama de blocos do modelo estimado.	54
Figura 4-4 – Função Custo para modelos ARX com ordem variando de 20 à 40	55
Figura 4-5 - Gráfico do índice ASYC em função da ordem do modelo de estrutura ARMAX	57
Figura 4-6 – Resposta em frequência, erro do modelo, limite superior do erro e nota	58
Figura 4-7 – Gráfico comparativo das respostas dos modelos avaliados	60
Figura 4-8 – Gráfico comparativo das respostas ampliadas dos modelos avaliados	61
Figura 5-1 – (a) Sinal PRBS utilizado na identificação. (b) Espectro de potência do sinal PRBS	67
Figura 5-2 – Distribuição da quantidade de modelos M_ARMAX_ASYC obtidos de acordo com n	79
Figura 5-3 – Distribuição da quantidade de modelos M_ARMAX_ASYC obtidos com notas A ou B e $fit \geq 50\%$ de acordo com n	79
Figura 5-4 – Distribuição da quantidade de modelos M_BJ_ASYC obtidos de acordo com n	80
Figura 5-5 – Distribuição da quantidade de modelos M_BJ_ASYC obtidos com notas A ou B e $fit \geq 50\%$ de acordo com n	81
Figura 5-6 – Notas dos modelos em função da relação sinal ruído.....	82
Figura 5-7 – Índices de ajustes fit médios em função da relação sinal ruído.	82

Figura 5-8 – Porcentagens dos modelos com nota "A" ou "B" em função da relação sinal ruído.....	83
Figura 5-9 – Distribuição da quantidade de modelos M_ARMAX_ASYNC obtidos de acordo com cada nota para 10 faixas de índices de ajuste <i>fit</i>	85
Figura 5-10 – Distribuição da quantidade de modelos M_BJ_ASYNC obtidos de acordo com cada nota para 10 faixas de índices de ajuste <i>fit</i>	86
Figura 6-1 – Melhoria obtida com a utilização do modelo da perturbação em função da SNR para o modelo M_ARMAX_ASYNC na validação da resposta ao degrau.	92
Figura 6-2 – Melhoria obtida com a utilização do modelo da perturbação em função da SNR para o modelo M_ARMAX_ASYNC na validação da resposta ao sinal aleatório.	92
Figura 6-3 – Melhoria obtida com a utilização do modelo da perturbação em função da SNR para o modelo M_BJ_ASYNC na validação da resposta ao degrau.	93
Figura 6-4 – Melhoria obtida com a utilização do modelo da perturbação em função da SNR para o modelo M_BJ_ASYNC na validação da resposta ao sinal aleatório.	93
Figura 7-1 – Fluxograma de engenharia simplificado do processo	98
Figura 7-2 – Dados de entrada e saída do sistema (240 amostras).....	102
Figura 7-3 – Espectro de potência do sinal de excitação utilizado na identificação	102
Figura 7-4 – Dados de entrada e saída do sistema (105 amostras).....	105
Figura 7-5 – Resposta dos modelos e do processo real na autovalidação.	106
Figura 7-6 – Resposta dos modelos estimados e do processo real na validação cruzada.	107
Figura A-1 – Diagrama em blocos.....	113

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Comparação do índice de ajuste <i>fit</i> para os modelos identificados.....	62
Tabela 5.1 - Conceitos e notas médias dos modelos avaliados.....	69
Tabela 5.2 - Resultados dos índices de ajuste <i>fit</i> para as quatro validações	72
Tabela 5.3 - Classificação dos modelos avaliados de acordo com a média dos índices de ajuste <i>fit</i> médios	73
Tabela 5.4 - Classificação dos modelos avaliados de acordo com o índice de ajuste <i>fit</i> médio para validação <i>ii</i>	74
Tabela 5.5 - Classificação dos modelos avaliados de acordo com a variância máxima apresentada entre os parâmetros do modelo estimado do processo.....	76
Tabela 5.6 - Classificação dos modelos avaliados de acordo com a capacidade de convergir em bons modelos	78
Tabela 5.7 - Conceitos, notas médias e média dos índices de ajuste <i>fit</i> médios dos modelos avaliados.....	84
Tabela 5.8 - Relação entre os modelos com conceitos D e índices de ajuste <i>fit</i> médios.....	86
Tabela 6.1 - Máxima variância dos parâmetros dos modelos M_ARMAX_ASYC.	94
Tabela 6.2 - Máxima variância dos parâmetros dos modelos M_BJ_ASYC.	95
Tabela 7.1 - Classificação dos modelos avaliados de acordo com sua nota	105
Tabela 7.2 - Classificação dos modelos avaliados de acordo com o índice de ajuste <i>fit</i>	106
Tabela 7.3 - Classificação dos modelos avaliados de acordo com o índice de ajuste <i>fit</i>	107

LISTA DE ABREVIATURA E SIGLAS

ARMAX	<i>AutoRegressive Moving Average with eXternal input</i>
ARX	<i>Auto Regressive with eXogenous variables</i>
ASYC	<i>ASYmptotic Criterion</i>
ASYM	<i>ASYmptotic Method</i>
BJ	Box-Jenkins
DEL	Diesel Extra Leve
FIR	<i>Finite Impulse Response</i>
GBN	<i>Generalized Binary Noise</i>
GLP DD	Gás Liquefeito de Petróleo de Destilação Direta
LTI	<i>Linear Time Invariant</i>
MIMO	<i>Multiple-Input Multiple-Output</i>
MPC	<i>Model Predictive Control</i>
Nafta DD	Nafta de Destilação Direta
OE	<i>Output Error</i>
PRBS	<i>Pseudo-Random Binary Sequence</i>
RAT	Resíduo ATmosférico
SISO	<i>Single-Input Single-Output</i>
SNR	<i>Signal to Noise Ratio</i>

SUMÁRIO

1	Introdução	15
1.1	Motivação	16
1.2	Objetivos	19
1.3	Contribuições	20
1.4	Estrutura da dissertação	20
2	Teoria Assintótica.....	23
2.1	Descrição da teoria assintótica	23
3	Método assintótico aplicado a sistemas SISO.....	31
3.1	Identificando através do método ASYM	33
3.1.1	Sinal de excitação ótimo	33
3.1.2	Estimação dos parâmetros do modelo de alta ordem	34
3.1.3	Redução do modelo de alta ordem	35
3.1.4	Seleção da ordem do modelo	46
3.1.5	Seleção do tempo morto	48
3.1.6	Validação do modelo através do limite superior do erro.....	48
3.1.7	Validação do modelo por meio de notas.....	49
4	Estudo de caso	51
4.1	Experimento de identificação ou teste de identificação.....	52
4.2	Seleção da ordem e da estrutura do modelo de alta ordem.....	53
4.3	Seleção da ordem e da estrutura do modelo de baixa ordem.....	55
4.4	Validação do modelo.....	58

5	Análise comparativa entre o método assintótico e modelos derivados da teoria assintótica	63
5.1	Estruturas avaliadas.....	64
5.1.1	Modelos obtidos a partir do modelo ARX de alta ordem	64
5.1.2	Modelos obtidos a partir dos dados de entrada e saída filtrados	65
5.1.3	Modelos obtidos com o método assintótico	65
5.2	Descrição dos testes	66
5.3	Resultados obtidos.....	68
5.3.1	Nota obtida através do método assintótico.....	68
5.3.2	Avaliação pelo índice de ajuste <i>fit</i>	70
5.3.3	Avaliação da consistência do modelo pela variância dos seus parâmetros.....	75
5.3.4	Avaliação da capacidade de convergência em bons modelos	77
5.3.5	Distribuição dos valores de <i>n</i> obtidos.....	79
5.3.6	Influência da relação sinal ruído	81
5.3.7	Análise comparativa entre as notas e os índices de ajuste <i>fit</i> obtidos	83
5.3.8	Análise comparativa entre o modelo M_ARMAX_ASYNC e o modelo M_BJ_ASYNC	87
5.3.9	Desempenho dos modelos obtidos através da teoria assintótica em relação aos modelos M_ARMAX_ASYNC e M_BJ_ASYNC	88
6	Avaliação do modelo da perturbação obtido através do método assintótico em simulação tipo Monte-Carlo	89
6.1	Dados utilizados na avaliação do modelo da perturbação	89
6.2	Resultados obtidos.....	91
6.2.1	Avaliação da melhoria	91
6.2.2	Avaliação da variância dos parâmetros do modelo da perturbação.....	94
7	Identificação de um processo real através do método assintótico... ..	96
7.1	Descrição da planta real.....	96
7.1.1	Malhas de controle do sistema	98

7.1.2	Sistema identificado	100
7.2	Descrição do teste de identificação.....	100
7.3	Dados de entrada e saída	101
7.4	Obtenção do modelo assintótico	103
7.5	Validação dos modelos assintóticos obtidos	104
7.5.1	Dados de entrada e saída utilizados na validação dos modelos	104
7.5.2	Resultados obtidos na validação dos modelos	105
8	Conclusões e sugestões de trabalhos futuros	108
8.1	Conclusões	108
8.2	Sugestões de trabalhos futuros.....	110
	Referências Bibliográficas	111
	Anexo A: Análise do espectro.....	113
	Anexo B: Modificando a ponderação da frequência através da pré-filtragem	115
	Apêndice A: Código fonte da rotina de identificação através do método assintótico para a estrutura ARMAX.	117

1 Introdução

O homem procura entender, explicar e representar sistemas físicos, físico-químicos, sociais e biológicos, entre outros, há muito tempo. Uma das maneiras de representar um sistema real para sua melhor compreensão é através de um modelo matemático. De posse deste modelo, pode-se entender melhor o comportamento do sistema real e utilizá-lo na solução de problemas. Uma das aplicações destes modelos matemáticos é predizer o comportamento do sistema em um momento posterior ao instante da análise.

A obtenção de um modelo matemático que represente um sistema real pode ser feita de três maneiras, segundo (Seborg, Edgar e Mellichamp, 1989). A primeira delas é a modelagem matemática aplicando as leis da física e outras leis já estabelecidas, obtendo assim um modelo teórico. A dificuldade para sua aplicação é a necessidade de ter grande conhecimento teórico acerca do sistema a ser modelado, o que em alguns casos, pode gerar grande dificuldade na obtenção do modelo. A segunda forma de obtenção é a chamada identificação de sistemas, em que dados observados parcialmente ou na sua totalidade são utilizados para a obtenção de um modelo matemático que descreva o sistema, chamado modelo empírico. A terceira forma é obtida quando parte do modelo originou-se da teoria e parte dos dados coletados. Neste caso, trata-se de um modelo semi-empírico.

Com a evolução computacional das últimas décadas a identificação de sistemas tem sido muito utilizada. A facilidade em armazenar dados e trabalhá-los para a obtenção de modelos matemáticos tem ajudado no desenvolvimento desta técnica.

Este trabalho aborda uma técnica específica utilizada na identificação de sistemas chamada de método assintótico ou simplesmente ASYM, apresentada em (Zhu, 1998).

1.1 Motivação

Independentemente do método utilizado na identificação de sistemas, (Zhu, 2001) afirma que quatro passos devem sempre ser executados:

1. Experimento de identificação ou teste de identificação;
2. Seleção da ordem e da estrutura do modelo;
3. Estimação dos parâmetros do modelo;
4. Validação do modelo.

Pode se dizer que o primeiro passo também é composto pelo projeto do teste de identificação, sendo esta uma etapa muito importante para o sucesso da identificação. Além disso, é possível haver uma sobreposição entre os passos 2 e 3, uma vez que o próprio método assintótico estima primeiramente os parâmetros de ordens variadas (em um intervalo previamente definido) para estruturas já definidas e só então seleciona a ordem do modelo mais adequada.

Neste trabalho, o método de identificação ASYM foi escolhido para ser aplicado na identificação de sistemas. Esta escolha se baseia na característica do método ASYM em realizar os quatro passos de identificação de maneira sistemática. Um método que possua esta facilidade pode ser aplicado e o seu desempenho pode ser avaliado através da comparação com modelos reidentificados de tempos em tempos de maneira sistemática e automática (sem a intervenção do engenheiro de controle preferencialmente).

A necessidade em reidentificar modelos ocorre do fato de que os processos podem sofrer degradações com o passar do tempo. No caso de uma planta industrial em que ao longo de uma campanha de produção os trocadores de calor comecem a perder eficiência em função do acúmulo de depósitos em seus internos, como apresentado na figura 1.1 (Souza, 2011) ou as válvulas de controle passem a apresentar “agarramento” em função do ressecamento da sua gaxeta. Nem sempre é possível retirar um equipamento de operação para realizar a sua manutenção sem a parada da planta industrial. Esta característica faz com que os modelos identificados não mais descrevam a planta ao longo do tempo e a reidentificação seja necessária.

(a)

(b)

(c)

(d)

Figura 1-1 – (a) e (b) Trocador de calor com depósitos em seus tubos. (c) e (d) Trocador de calor com depósitos em seu casco.

No caso da indústria do petróleo, a necessidade de reidentificar modelos pode ser ainda mais evidenciada pelo fato de que o elenco de petróleo processado pode variar muito entre uma semana e outra, conforme figura 1.2 (Oliveira, 2011). Esta variação implica em alterações nas quantidades e nas características dos produtos gerados, bem como no comportamento da planta industrial.

Figura 1-2 – Elenco de petróleo processado em uma refinaria ao longo de 8 semanas.

O método assintótico (Zhu,1998) foi idealizado para ser utilizado em identificações para MPC (controle preditivo baseado em modelo) de sistemas MIMO (do Inglês, *multiple-input multiple-output*). Considerando esta afirmação e também a vocação do método assintótico em resolver os quatro passos de uma identificação de maneira sistemática, conclui-se que este método pode ser utilizado juntamente com um MPC, onde o desempenho do modelo utilizado pelo MPC possa ser avaliado através de novas identificações sistemáticas e se necessário o modelo utilizado possa vir a ser substituído.

A substituição do modelo utilizado em um MPC (quando este modelo não mais representar o sistema real) por um modelo mais adequado trará certo ganho financeiro. No entanto, um processo de identificação sistemático acarretará em certo custo em função das perturbações geradas no processo. Equacionar a frequência em que se deve realizar os testes de identificação em relação ao ganho gerado pela utilização de um modelo mais adequado deve ser um desafio. A possibilidade de

utilizar o método em sistemas MIMO, em que a identificação do sistema possa ser feita excitando diversas entradas simultaneamente, é uma vantagem deste método por reduzir o tempo necessário do teste de identificação.

1.2 Objetivos

Este trabalho foi desenvolvido com o propósito de se atingir dois grandes objetivos. São eles:

- Implementar um algoritmo que identifique modelos para sistemas “caixa-preta” (são modelos que se deseja identificar, porém a ordem e a estrutura do modelo são desconhecidas de antemão) através do método assintótico;
- Avaliar o desempenho dos modelos obtidos através do método de identificação assintótico.

O método assintótico foi implementado neste trabalho para sistemas SISO (do Inglês, *single-input, single-output*). Este método foi utilizado na identificação do benchmark Åström, & Eykhoff (Åström & Eykhoff, 1971) e na identificação de um sistema real de uma refinaria de petróleo.

O método assintótico proposto por (Zhu,1998) apesar de mencionar que o modelo da perturbação pode ser obtido de forma semelhante a utilizada na obtenção do modelo do processo, não detalha esta passagem. Por isto, este trabalho também visa detalhar a maneira de se obter o modelo da perturbação e avaliar se o modelo obtido é bom o bastante para representar o sistema em questão.

O método assintótico é baseado na teoria assintótica e neste trabalho também foram observados e avaliados 16 modelos obtidos baseados na teoria assintótica e comparados a 2 modelos obtidos através do método assintótico. Esta comparação visa esclarecer se os modelos obtidos através da teoria assintótica de maneira mais simplificada que a utilizada no método assintótico são tão bons quanto os obtidos através do método ASYM. Em outras palavras, é feita uma análise da necessidade em se empregar o índice ASYC (do Inglês, *asymptotic criterion*) apresentado por (Zhu,1998) para a escolha da ordem do modelo caixa-preta.

Este trabalho também buscar avaliar se o critério de classificação dos modelos através de notas, em que quantifica o tamanho do erro do modelo obtido em relação ao ganho da resposta em frequência do mesmo modelo, apresenta resultados semelhantes com os obtidos através da autovalidação e da validação cruzada.

1.3 Contribuições

O estudo do método assintótico juntamente com a teoria assintótica permitiu detalhar a implementação do método ASYM, tanto para o modelo de processo quanto para o modelo de perturbação. Os passos para obtenção do modelo de processo são bem conhecidos e podem ser vistos em (Zhu, 2001). No entanto, os passos para obtenção do modelo de perturbação não são abordados na literatura existente de maneira detalhada.

O método assintótico propõe a utilização de notas para classificar e validar os modelos obtidos. Neste trabalho é feita uma análise comparativa entre as notas dadas através do método assintótico implementado e o índice de ajuste *fit* (índice utilizado para o cálculo do erro do modelo obtido em relação ao sistema real, que será detalhado no capítulo 4) obtido no processo de autovalidação e da validação cruzada.

Este trabalho também aplica o método assintótico na identificação de um modelo para uma planta real. Estes resultados são apresentados e servem de subsídios adicionais para a validação do método assintótico como método de identificação em sistemas reais.

1.4 Estrutura da dissertação

Neste trabalho o método assintótico é detalhado e avaliado para a identificação de sistemas SISO.

No capítulo 2 são apresentados ao leitor os fundamentos da teoria assintótica, base para o desenvolvimento do método ASYM.

De posse do conhecimento dos fundamentos da teoria assintótica, o capítulo 3 apresenta o método assintótico de forma extremamente detalhada para o caso SISO. Este capítulo reproduz parcialmente as informações do capítulo 6 de (Zhu, 2001), acrescentando detalhes para aplicação do método em malha aberta e malha fechada e mostrando também como obter o modelo da perturbação. Neste capítulo também é apresentada a validação do modelo através de notas que foi proposto por (Zhu, 1998). A função que minimizada pode ser utilizada para reduzir a ordem do modelo segundo (Wahlberg, 1989) é apresentada neste capítulo tanto para o modelo do processo quanto para o modelo da perturbação.

No capítulo 4, um estudo de caso é apresentado para que a aplicação do método ASYM fique exemplificada. Neste capítulo o método assintótico é comparado a modelos de estruturas ARMAX (do Inglês, *AutoRegressive Moving Average with eXternal input*) e BJ (Box-Jenkins) e também por modelos obtidos através do *software* TaiJi-Id. O objetivo deste capítulo é avaliar se o método assintótico implementado apresenta resultados semelhantes a um *software* comercial que já aplica os conceitos do método assintótico e comparar o desempenho dos métodos assintóticos em relação a modelos obtidos através da minimização do erro da equação para estruturas ARMAX e BJ.

No capítulo 5 o método ASYM é aplicado ao benchmark Åström & Eykhoff (Åström & Eykhoff, 1971) e, juntamente a dois modelos obtidos através do método assintótico, outros 16 modelos são avaliados através de um experimento de identificação tipo Monte-Carlo. Neste capítulo, diferentemente do capítulo anterior o que se deseja avaliar é o desempenho do método assintótico em relação a outras estruturas obtidas através da teoria assintótica, assim como determinar se o método assintótico apresenta melhores resultados para modelos de estrutura ARMAX ou BJ.

No capítulo 6 novamente o benchmark Åström & Eykhoff (Åström & Eykhoff, 1971) é utilizado em um novo experimento tipo Monte-Carlo. Desta vez, o objetivo é avaliar o desempenho do modelo da perturbação obtido através do método assintótico implementado. Como dito anteriormente, o detalhamento da maneira como se obter o modelo da perturbação não é apresentado por (Zhu, 2001), sendo detalhado no capítulo 3 deste trabalho. Desta forma, avaliar o processo de obtenção do modelo da perturbação é necessário.

No capítulo 7 o método assintótico é aplicado em um experimento para a identificação de um modelo para uma planta real. Os resultados obtidos neste experimento são apresentados neste capítulo.

As conclusões obtidas com este trabalho são apresentadas no oitavo capítulo.

O código utilizado na implementação do método ASYM, com o uso do *software* Matlab 7.9.0.529 (versão R2009b), é apresentado no Apêndice A.

2 Teoria Assintótica

A teoria assintótica para a identificação de modelos “caixa-preta” foi apresentada em (Ljung, 1985) e (Ljung & Yuan, 1985). Sua aplicação inicial deu-se na área de controle robusto e proporcionou o desenvolvimento do método de identificação em dois passos (*two-step approach*) por (Zhu, 1990), (Zhu & Backx, 1991) e (Zhu, Backx & Eykhoff, 1991). Baseado na teoria assintótica e no conhecimento do método em dois passos, Zhu apresentou em (Zhu 1998) o método assintótico, conhecido na literatura por sua abreviação, ASYM.

2.1 Descrição da teoria assintótica

Considere a necessidade de estimar uma função de transferência que represente um sistema dito “caixa-preta”, em que a ordem e a estrutura reais do sistema não sejam conhecidas de antemão. Uma das formas de se obter uma função de transferência para este caso é realizar uma identificação de tal forma que a ordem do modelo estimado tenda ao infinito. Para isto, o número de dados coletados também deve tender ao infinito.

Nas condições citadas acima, apresenta-se neste capítulo algumas propriedades assintóticas da função de transferência estimada, mais especificamente sua variância. A avaliação da convergência e da consistência da função de transferência estimada pode ser vista em (Ljung & Yuan, 1985).

Como conclusão da análise das propriedades assintóticas das funções de transferência estimadas tem-se dois pontos a serem destacados:

- A variância da função de transferência para uma dada faixa de frequências é assintoticamente proporcional à relação entre o ruído e o sinal de entrada multiplicada pela relação entre a ordem do modelo estimado e o número de dados coletados;

- A variância do modelo não está relacionada à estrutura do modelo. Com isto, pode-se utilizar um modelo de estrutura flexível de tal forma que a polarização do modelo seja minimizada.

Para melhor compreensão das propriedades assintóticas, será feita a análise dos parâmetros assintóticos de acordo com um sistema com estrutura bastante conhecida. As conclusões aqui apresentadas são detalhadas em (Ljung & Yuan, 1985) e (Ljung, 1985).

Considere inicialmente o caso SISO de um processo linear invariante no tempo ou LTI (do Inglês, *Linear Time Invariant*):

$$y(t) = G^0(q)u(t) + H^0(q)e(t) \quad (2-1)$$

em que:

$y(t)$ corresponde à saída do sistema em função do tempo;

$G^0(q)$ é a função de transferência do sistema real;

$u(t)$ corresponde à entrada do sistema em função do tempo;

$H^0(q)$ é a função de transferência do modelo perturbação;

$e(t)$ corresponde a um sinal tipo ruído branco com média zero e variância R .

O sinal resultante da aplicação $e(t)$ ao modelo da perturbação pode ser representado por:

$$v(t) = H^0(q)e(t) \quad (2-2)$$

em que:

$v(t)$ corresponde ao sinal de perturbação injetado ao sistema em função do tempo.

O sistema da eq. (2-1) acrescido de um controlador $C(q)$ em malha fechada pode ser representado pela figura 2-1:

Figura 2-1 – Diagrama de blocos do sistema da eq. (2-1) acrescido do controlador em malha fechada.

Trabalhando em tempo discreto e aplicando o conceito de operador de deslocamento q^{-k} , a função de transferência do modelo $G^0(q)$ e da perturbação $H^0(q)$ podem ser descritas como:

$$G^0(q) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k^0 \cdot q^{-k} \quad (2-3)$$

$$H^0(q) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k^0 \cdot q^{-k} \quad (2-4)$$

em que:

g_k^0 correspondem aos coeficientes da resposta ao impulso do processo real;

h_k^0 correspondem aos coeficientes da resposta ao impulso da perturbação real;

Para que o sistema da figura 2-1 seja identificado, os dados de entradas e saídas devem estar disponíveis. Estes dados são normalmente obtidos através de um teste de identificação, em que a entrada do sistema é excitada de maneira controlada e os dados de entrada e saída são armazenados. O conjunto dos dados coletados é representado por Z^N .

$$Z^N = \{y(1), u(1), \dots, y(N), u(N)\} \quad (2-5)$$

Independentemente do método de identificação utilizado, suponha que baseado em Z^N um modelo $\hat{G}_N^n(q)$ seja identificado.

$$\hat{G}_N^n(q) \quad (2-6)$$

em que n corresponde à ordem do modelo.

Na prática, os dados Z^N são compostos não apenas da resposta do processo real $G^0(e^{j\omega})$ a uma excitação, mas também da presença de perturbações. As perturbações podem ser causadas por diversos motivos, podendo-se destacar aquelas causadas pelo ruído de medição e por entradas desconhecidas ou não medidas do sistema.

Para se obter um modelo fiel ao processo real quando a ordem do sistema real é desconhecida, a teoria assintótica, afirma que é necessário coletar um número elevado de dados. Em teoria, N tende ao infinito e, nesta condição permite-se que a ordem do modelo n também tenda ao infinito. Com as duas afirmações anteriores, pode-se explicar a eq. (2-7). Além destas considerações, deve-se saber que n será sempre significativamente menor que N , explicando assim a eq. (2-8).

Para que tais afirmações sejam aplicadas na obtenção de um modelo, independentemente do valor de n é necessária a escolha de uma estrutura que possua solução única para qualquer valor de n e N . Então, são candidatas as estruturas FIR (do Inglês, *Finite Impulse Response*) e ARX (do Inglês, *Auto Regressive with eXogenous variables*).

$$n(N) \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad N \rightarrow \infty \quad (2-7)$$

$$\frac{n^2(N)}{N} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad N \rightarrow \infty \quad (2-8)$$

em que,

N corresponde ao número de dados coletados para a estimação dos parâmetros do modelo.

Aplicando o conceito apresentado nas eqs. (2-7) e (2-8), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \hat{G}_N^n(e^{i\omega}) \\ \hat{H}_N^n(e^{i\omega}) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} G^0(e^{i\omega}) \\ H^0(e^{i\omega}) \end{bmatrix} \quad \text{com probabilidade 1 quando } N \rightarrow \infty \quad (2-9)$$

$\hat{G}_N^n(e^{i\omega})$ corresponde à resposta em frequência da função de transferência estimada do processo;

$\hat{H}_N^n(e^{i\omega})$ corresponde à resposta em frequência da função de transferência estimada da perturbação;

$G^0(e^{i\omega})$ corresponde à resposta em frequência da função de transferência real do processo;

$H^0(e^{i\omega})$ corresponde à resposta em frequência da função de transferência real da perturbação.

Através da eq. (2-9), entende-se que um modelo estimado apresenta comportamento (resposta no domínio da frequência) tendendo ao do processo real quando N tende ao infinito.

Da teoria assintótica:

$$\sqrt{N} \begin{bmatrix} \hat{G}_N^n(e^{i\omega}) - E \hat{G}_N^n(e^{i\omega}) \\ \hat{H}_N^n(e^{i\omega}) - E \hat{H}_N^n(e^{i\omega}) \end{bmatrix} \rightarrow \text{AsN}(0, P_n(\omega)) \quad \text{quando } N \rightarrow \infty \quad (2-10)$$

Com a eq. (2-10), pode-se concluir que o erro do modelo para cada frequência segue uma distribuição assintoticamente normal com média zero e probabilidade $P_n(\omega)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} P_n(\omega) = \Phi_v(\omega) \Phi^{-1}(\omega) \quad (2-11)$$

em que,

$$\Phi(\omega) = \begin{bmatrix} \Phi_u(\omega) & \Phi_{eu}(\omega) \\ \Phi_{ue}(\omega) & R \end{bmatrix}; \quad (2-12)$$

$\Phi_u(\omega)$ corresponde ao espectro de potência do sinal de entrada;

$\Phi_{eu}(\omega)$ corresponde ao espectro de potência cruzado entre o sinal ruído branco gerador da perturbação e o sinal de entrada;

$\Phi_{ue}(\omega)$ corresponde ao espectro de potência cruzado entre o sinal de entrada e o sinal ruído branco gerador da perturbação;

R corresponde à variância do sinal ruído branco gerador da perturbação;

$$\Phi_v(\omega) = |H^0(e^{i\omega})|^2 R \quad (2-13)$$

$\Phi_v(\omega)$ corresponde ao espectro de potência da perturbação.

A partir das eqs. (2-11) a (2-13), pode-se obter a variância assintótica do modelo do processo:

$$\text{var}[\hat{G}_N^n(e^{i\omega})] \approx \frac{n}{N} \frac{\Phi_v(\omega) R}{\Phi_u(\omega) R - |\Phi_{ue}(\omega)|^2} \quad (2-14)$$

Considerando o caso em malha aberta, $\Phi_{ue}(\omega) = 0$, a eq. (2-14) passa a ser:

$$\text{var}[\hat{G}_N^n(e^{i\omega})] \approx \frac{n}{N} \frac{\Phi_v(\omega)}{\Phi_u(\omega)} \quad (2-15)$$

A eq. (2-15) permite concluir que a variância assintótica do modelo é proporcional à razão entre a ordem do modelo e o número de dados coletados, multiplicada pela razão entre o espectro de potência da perturbação e do sinal de

entrada para a operação em malha aberta. Esta conclusão, conforme será visto adiante é a base do método ASYM.

Na teoria assintótica, a variância assintótica do modelo da perturbação também é apresentada, sendo:

$$var[\hat{H}_N^n(e^{i\omega})] \approx \frac{n}{N} \frac{\Phi_v(\omega)\Phi_u(\omega)}{\Phi_u(\omega)R - |\Phi_{ue}(\omega)|^2} \quad (2-16)$$

A eq. (2-16) representa a variância do modelo da perturbação em malha fechada.

Caso seja considerado o sistema em malha aberta, a eq. (2-16) passa a ser:

$$var[\hat{H}_N^n(e^{i\omega})] \approx \frac{n}{N} \frac{\Phi_v(\omega)}{R} = \frac{n}{N} |H^0(e^{i\omega})|^2 \quad (2-17)$$

Para representar a equação da variância em função do sinal $r(t)$, que corresponde à referência do sistema e foi apresentado na figura 2-1, tem-se:

Função sensibilidade da saída:

$$S^0(q) = \frac{1}{1 + G^0(q)C(q)} \quad (2-18)$$

De acordo com a figura 2-1, sabe-se que:

$$u(t) = [r(t) - y(t)]C(q) \quad (2-19)$$

Portanto, aplicando-se a eq. (2-18) na eq. (2-19), tem-se:

$$u(t) = C(q)S^0(q)r(t) - C(q)S^0(q)H^0(q)e(t) \quad (2-20)$$

Consequentemente:

$$\Phi_u(\omega) = |C(e^{i\omega})|^2 |S^0(e^{i\omega})|^2 \Phi_r(\omega) + |C(e^{i\omega})|^2 |S^0(e^{i\omega})|^2 |H^0(e^{i\omega})|^2 R \quad (2-21)$$

$$\Phi_{ue}(\omega) = -C(e^{i\omega}) S^0(e^{i\omega}) H^0(e^{i\omega}) R \quad (2-22)$$

em que:

$\Phi_r(\omega)$ corresponde ao espectro de potência do sinal $r(t)$.

Aplicando as eqs. (2-21) e (2-22) na eq. (2-14), tem-se:

$$\text{var}[\hat{G}_N^n(e^{i\omega})] \approx \frac{n}{N} \frac{\Phi_v(\omega)}{|C(e^{i\omega})|^2 |S^0(e^{i\omega})|^2 \Phi_r(\omega)} \quad (2-23)$$

A eq. (2-23) permite concluir que a variância do modelo no caso de operação em malha fechada e com sinal de entrada $r(t)$ é proporcional a razão entre a ordem do modelo e número de dados coletados, multiplicada pela razão entre o espectro de potência da perturbação e do sinal de referência e inversamente proporcional ao quadrado da resposta em frequência da função de sensibilidade e da resposta em frequência da função de transferência do controlador.

Para o cálculo da variância assintótica do modelo da perturbação (malha fechada) com sinal de entrada $r(t)$ aplicam-se as eqs. (2-21) e (2-22) na eq. (2-16), obtendo-se:

$$\text{var}[\hat{H}_N^n(e^{i\omega})] \approx \frac{n}{N} \frac{\Phi_v(\omega) \Phi_r(\omega) + \Phi_v(\omega) |H^0(e^{i\omega})|^2 R}{\Phi_r(\omega) R} \quad (2-24)$$

3 Método assintótico aplicado a sistemas SISO

O método assintótico de identificação de sistemas, ou simplesmente ASYM, foi proposto por (Zhu, 1998). O seu objetivo foi desenvolver um método de identificação de sistemas SISO e MIMO que pudesse ser utilizado com MPCs.

Este método apresenta grande semelhança com o método em dois passos (*two-step approach*) desenvolvido por (Zhu, 1990), (Zhu & Backx, 1991) e (Zhu, Backx & Eykhoff, 1991). Boa parte do procedimento de obtenção de um modelo através do método assintótico também pode ser visto em (Zhu & Backx, 1993), em que os autores aplicam os mesmos conceitos utilizados no método ASYM para problemas de controle robusto.

O grande diferencial do método ASYM com relação aos demais métodos de identificação é a capacidade de identificar modelos “caixa-preta” de maneira sistemática, classificando-os através de notas que permitem avaliar se o modelo identificado apresenta desempenho satisfatório ou se há a necessidade de se repetir o teste de identificação.

Além das características citadas, o método ASYM já foi aplicado com sucesso para sistemas MIMO conforme pode ser visto em (Zhu, 1998).

Neste capítulo, é feita uma descrição detalhada do método assintótico para sistemas SISO. A utilização de sistemas SISO visa facilitar o entendimento, a implementação do método, a obtenção de resultados e sua interpretação.

Assim como outros métodos de identificação, o método ASYM deve ser executado em quatro passos (Zhu, 2001). A ordenação dos passos do método assintótico é diferente da proposta por (Zhu, 2001). Neste caso, a estimação dos parâmetros é realizada antes da seleção da ordem. No entanto, a estrutura do modelo é escolhida antes da estimação dos parâmetros, havendo assim uma sobreposição entre os passos 2 e 3.

1. Experimento de identificação ou teste de identificação;
2. Estimação dos parâmetros do modelo;
3. Seleção da ordem e da estrutura do modelo;
4. Validação do modelo.

Os passos do método ASYM podem ser mais bem entendidos através da figura 3-1.

Figura 3-1 – Fluxograma do método assintótico.

De forma bastante simplificada, o método ASYM consiste em identificar um sistema através de um modelo de alta ordem, obtendo assim um modelo com resposta em frequência muito próxima daquela do processo real. Na sequência, faz-se a redução da ordem do modelo buscando reduzir a alta variância em função da ordem elevada. Por fim, aplica-se o critério assintótico para encontrar o melhor modelo de ordem reduzida. De posse do melhor modelo é então realizada etapa de validação do modelo. Todos os passos descritos são baseados em conceitos resultantes da teoria assintótica.

3.1 Identificando através do método ASYM

Para melhor entendimento do processo de identificação através do método ASYM, considera-se para todos os exemplos deste capítulo que a figura 2-1 ilustra o sistema que se deseja identificar.

Uma consideração importante sobre este método é que o modelo de alta ordem obtido é utilizado durante todo o processo de identificação em substituição ao modelo real de malha aberta ou malha fechada dependendo do tipo de identificação desejada. Esta consideração faz-se necessária, pois não se dispõem do modelo real.

3.1.1 Sinal de excitação ótimo

Para a correta aplicação do método ASYM, deve-se considerar que para estimar um modelo de alta ordem é extremamente importante que o sinal de entrada seja persistentemente excitante para modelos de alta ordem, ou seja:

$$\Phi_r(\omega) > 0 \quad \text{para } -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (3-1)$$

em que $\Phi_r(\omega)$ corresponde ao espectro de potência do sinal de excitação utilizado na identificação do modelo de alta ordem.

3.1.2 Estimação dos parâmetros do modelo de alta ordem

A busca por um modelo de alta ordem deve-se ao conceito apresentado na eq. (2-9). Relembrando:

$$\begin{bmatrix} \hat{G}_N^n(e^{i\omega}) \\ \hat{H}_N^n(e^{i\omega}) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} G^0(e^{i\omega}) \\ H^0(e^{i\omega}) \end{bmatrix} \text{ com probabilidade 1 quando } N \rightarrow \infty \quad (3-2)$$

Portanto, um modelo de alta ordem apresenta resposta em frequência tendendo a resposta em frequência do modelo real quando $N \rightarrow \infty$.

As propriedades assintóticas da função de transferência de um modelo estimado independem da estrutura do modelo. Sendo assim, a escolha da estrutura deve considerar a capacidade de representar modelos de alta ordem e sua complexidade. A capacidade de representar modelos de alta ordem está relacionada à capacidade de se obter um modelo que convirja a um mínimo global para qualquer valor de n e N . Com base nestas informações, uma boa escolha para a estrutura do modelo está entre a estrutura ARX e a FIR.

Apesar das duas estruturas apresentarem as características necessárias para a sua utilização em um modelo de alta ordem, a estrutura ARX apresenta uma vantagem em relação a estrutura FIR. Esta vantagem está relacionada ao passo de redução da ordem do modelo de alta ordem que será apresentado no item seguinte (3.1.3) e faz parte do método ASYM. Neste passo, é apresentado um processo de redução de ordem exclusivo para estruturas ARX e, por este motivo, a estrutura FIR será descartada nesta análise deste ponto em diante.

Considera-se então um modelo de estrutura ARX para representar o modelo de alta ordem:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t) \quad (3-3)$$

Quando a expressão “alta ordem” é mencionada, não fica claro o valor que n deve assumir para ser considerado efetivamente de alta ordem. Esta informação também não é apresentada em (Zhu, 1998) ou em (Zhu, 2001). Porém, sabe-se que o método ASYM foi baseado no método em dois passos apresentado em (Zhu, 1990), (Zhu & Backx, 1991) e (Zhu, Backx & Eykhoff, 1991) e que este método sugere:

$$20 \leq n \leq 40 \quad (3-4)$$

Para fins práticos, a eq.(3-4) será considerada.

É importante observar que a utilização de modelos de alta ordem para representar sistemas de ordem menor ou ordem desconhecida não traz apenas benefícios, uma vez que a variância do modelo também aumenta em função da ordem.

3.1.3 Redução do modelo de alta ordem

Sabe-se que o modelo ARX estimado [atendendo a eq. (3-4)] para aplicações na indústria do petróleo possui ordem excessivamente maior que a ordem real do processo. Esta afirmação pode ser constatada nos resultados apontados por (Miranda, 2005). Sabe-se também (teoria assintótica) que a variância do modelo é proporcional à ordem do modelo. Por estas razões, pode-se concluir que a redução da ordem do modelo permite reduzir a variância do modelo, podendo vir a melhorá-lo.

A utilização de uma estrutura ARX para o modelo de alta ordem é uma necessidade quando o modelo da perturbação é desejado. Como a polarização de um modelo ARX tende a ser maior que a de um modelo ARMAX ou BJ (em função da sua pouca flexibilidade em comparação aos dois), é desejável que esta redução de ordem também reflita em uma alteração de estrutura de tal forma que sua polarização também seja reduzida.

Em (Wahlberg, 1989), o método da máxima verossimilhança assintótica é apresentado e se propõe uma maneira de reduzir a ordem de modelos ARX através da realização balanceada na ponderação da frequência. A idéia básica deste método consiste em filtrar o sinal de entrada e saída do modelo por um filtro que corresponda ao inverso da sua variância.

De forma mais objetiva, a função que deve ser minimizada para que o método da máxima verossimilhança assintótica seja aplicado corresponde à função da verossimilhança logarítmica negativa e é dada pela expressão abaixo quando os termos constantes são desconsiderados:

$$V = \int_0^{2\pi} |\hat{G}_N^n(e^{i\omega}) - \hat{G}^l(e^{i\omega})|^2 \frac{\Phi_u(\omega) \hat{R} - |\hat{\Phi}_{ue}(\omega)|^2}{\hat{\Phi}_v(\omega) \hat{R}} d\omega + \int_0^{2\pi} |\hat{H}_N^n(e^{i\omega}) - \hat{H}^l(e^{i\omega})|^2 \frac{\Phi_u(\omega) \hat{R} - |\hat{\Phi}_{ue}(\omega)|^2}{\hat{\Phi}_v(\omega) \Phi_u(\omega)} d\omega \quad (3-5)$$

em que:

$\hat{G}^l(e^{i\omega})$ corresponde à resposta em frequência do modelo estimado do processo com ordem reduzida;

$\hat{H}^l(e^{i\omega})$ corresponde à resposta em frequência do modelo estimado da perturbação com ordem reduzida;

$\hat{\Phi}_v(\omega)$ corresponde ao espectro de potência do sinal de perturbação estimado a partir do modelo com alta ordem;

$\hat{R}$ corresponde à variância estimada do sinal ruído branco gerador do sinal de perturbação utilizado no modelo de alta ordem;

$\hat{\Phi}_{ue}(\omega)$ corresponde ao espectro de potência cruzado estimado entre a perturbação e o sinal de entrada obtido através do modelo de alta ordem;

A indisponibilidade dos modelos reais faz com que a teoria assintótica seja aplicada para o cálculo de $\hat{\Phi}_v(\omega)$.

$$\hat{\Phi}_v(\omega) = |\hat{H}_N^n(e^{i\omega})|^2 \hat{R} \quad (3-6)$$

A eq. (3-5) pode ser separada em duas equações, sendo a primeira representando a parcela responsável por minimizar o erro do modelo do processo [eq. (3-7)] e a segunda por minimizar o erro do modelo da perturbação [eq. (3.8)]. A minimização da função da eq. (3-5) pode ser feita através da minimização separada das eqs. (3-7) e (3-8).

$$V_G = \int_0^{2\pi} |\hat{G}_N^n(e^{i\omega}) - \hat{G}^l(e^{i\omega})|^2 \frac{\Phi_u(\omega) \hat{R} - |\hat{\Phi}_{ue}(\omega)|^2}{\hat{\Phi}_v(\omega) \hat{R}} d\omega \quad (3-7)$$

$$V_H = \int_0^{2\pi} |\hat{H}_N^n(e^{i\omega}) - \hat{H}^l(e^{i\omega})|^2 \frac{\Phi_u(\omega) \hat{R} - |\hat{\Phi}_{ue}(\omega)|^2}{\hat{\Phi}_v(\omega) \Phi_u(\omega)} d\omega \quad (3-8)$$

Caso se considere o sinal de excitação $r(t)$ utilizado na identificação, a eq. (3-5) passa a ser:

$$V = \int_0^{2\pi} |\hat{G}_N^n(e^{i\omega}) - \hat{G}^l(e^{i\omega})|^2 \frac{|C(e^{i\omega})|^2 |\hat{S}_N^n(e^{i\omega})|^2 \Phi_r(\omega)}{\hat{\Phi}_v(\omega)} d\omega \quad (3-9)$$

$$+ \int_0^{2\pi} |\hat{H}_N^n(e^{i\omega}) - \hat{H}^l(e^{i\omega})|^2 \frac{\Phi_r(\omega) \hat{R}}{\hat{\Phi}_v(\omega) \Phi_r(\omega) + \hat{\Phi}_v(\omega) |\hat{H}_N^n(e^{i\omega})|^2 \hat{R}} d\omega$$

em que:

$\hat{S}_N^n(e^{i\omega})$ corresponde à resposta em frequência da função sensibilidade de saída estimada através do modelo de alta ordem do processo.

Para o caso em malha aberta, a eq. (3-5) passa a ser:

$$V = \int_0^{2\pi} |\hat{G}_N^n(e^{i\omega}) - \hat{G}^l(e^{i\omega})|^2 \frac{\Phi_u(\omega)}{|\hat{H}_N^n(e^{i\omega})|^2} d\omega \quad (3-10)$$

$$+ \hat{R} \int_0^{2\pi} |\hat{H}_N^n(e^{i\omega}) - \hat{H}^l(e^{i\omega})|^2 \frac{1}{|\hat{H}_N^n(e^{i\omega})|^2} d\omega$$

Para o caso em que se deseja identificar um sistema operando em malha fechada através de um modelo de processo e um de perturbação dispostos em malha aberta, a eq. (3-5) passa a ser:

$$V = \int_0^{2\pi} |\hat{G}_{NMF}^n(e^{i\omega}) - \hat{G}_{MF}^l(e^{i\omega})|^2 \frac{\Phi_r(\omega)}{|\hat{H}_{NMF}^n(e^{i\omega})|^2} d\omega + \hat{R} \int_0^{2\pi} |\hat{H}_{NMF}^n(e^{i\omega}) - \hat{H}_{MF}^l(e^{i\omega})|^2 \frac{1}{|\hat{H}_{NMF}^n(e^{i\omega})|^2} d\omega \quad (3-11)$$

em que:

$\hat{G}_{NMF}^n(e^{i\omega})$ corresponde à resposta em frequência do modelo estimado em malha aberta de alta ordem para o processo do sistema operando em malha fechada;

$\hat{H}_{NMF}^n(e^{i\omega})$ corresponde à resposta em frequência do modelo estimado em malha aberta de alta ordem para a perturbação do sistema operando em malha fechada;

$\hat{G}_{MF}^l(e^{i\omega})$ corresponde à resposta em frequência do modelo estimado em malha aberta de ordem reduzida para o processo do sistema operando em malha fechada;

$\hat{H}_{MF}^l(e^{i\omega})$ corresponde à resposta em frequência do modelo estimado em malha aberta de ordem reduzida para a perturbação do sistema operando em malha fechada;

$\Phi_r(\omega)$ corresponde ao espectro de potência do sinal de entrada do sistema operando em malha fechada;

$\hat{R}$ corresponde à variância estimada do sinal ruído branco gerador do sinal de perturbação utilizado no modelo de alta ordem;

Pode-se então concluir que o erro está sendo ponderado pelo inverso da variância do modelo (exceto pela relação entre a ordem do modelo e número de dados coletados).

Para a solução das eqs. (3-7) a (3-11) necessita-se de um algoritmo de minimização não-linear. Entretanto, em (Zhu,2001) é proposta uma maneira de

minimizar a eq. (3-10) através de um algoritmo do tipo OE (do Inglês, *Output Error*). A seguir, esta minimização é aplicada na eq. (3-10), que representa uma identificação malha aberta.

Primeiramente, será feita a minimização do termo referente ao modelo do processo:

$$V = \int_0^{2\pi} |\hat{G}_N^n(e^{i\omega}) - \hat{G}^l(e^{i\omega})|^2 \frac{\Phi_u(\omega)}{|\hat{H}_N^n(e^{i\omega})|^2} d\omega \quad (3-12)$$

Os dados de entrada utilizados na identificação do modelo de alta ordem devem ser coletados.

$$Z^N = \{y(1), u(1), \dots, y(N), u(N)\} \quad (3-13)$$

Filtrando $u(t)$ pelo inverso do modelo de perturbação (para maiores detalhes, vide anexo B):

$$u_f(t) = \frac{1}{\hat{H}_N^n(q)} u(t) = \hat{A}_N^n(q) u(t) \quad (3-14)$$

O sinal de saída filtrado é dado por:

$$y_f(t) = \frac{\hat{B}_N^n(q)}{\hat{A}_N^n(q)} u_f(t) = \hat{B}_N^n(q) u(t) \quad (3-15)$$

Caso seja considerado como sinal de entrada a ser utilizado na identificação o sinal $r(t)$, deve-se considerar:

$$r_f(t) = \frac{1}{\hat{H}_N^n(q)} C(q) \hat{S}_N^n(q) r(t) = \frac{C(q) \hat{A}_N^n(q)}{1 + C(q) \hat{G}_N^n(q)} r(t) \quad (3-16)$$

$$y_f(t) = \frac{\hat{B}_N^n(q)}{\hat{A}_N^n(q)} r_f(t) = \frac{C(q) \hat{B}_N^n(q)}{1 + C(q) \hat{G}_N^n(q)} r(t) \quad (3-17)$$

Caso seja considerado como sinal de entrada a ser utilizado na identificação o sinal $r(t)$ e seja desejado identificar o sistema operando em malha fechada através de um modelo de processo e de perturbação em malha aberta, deve-se considerar:

$$r_f(t) = \frac{1}{\hat{H}_{NMF}^n(q)} r(t) = \hat{A}_{NMF}^n(q) r(t) \quad (3-18)$$

$$y_f(t) = \frac{\hat{B}_{NMF}^n(q)}{\hat{A}_{NMF}^n(q)} r_f(t) = \hat{B}_{NMF}^n(q) r(t) \quad (3-19)$$

Através das eqs. (3-14) e (3-15), os seguintes dados de entrada e saída são obtidos:

$$Z_f = \{y_f(1), u_f(1), \dots, y_f(N), u_f(N)\} \quad (3-20)$$

Através das eqs. (3-16) e (3-17), os dados de entrada e saída obtidos, são:

$$Z_f = \{y_f(1), r_f(1), \dots, y_f(N), r_f(N)\} \quad (3-21)$$

Através das eqs. (3-18) e (3-19), os dados de entrada e saída obtidos, são:

$$Z_f = \{y_f(1), r_f(1), \dots, y_f(N), r_f(N)\} \quad (3-22)$$

O vetor de parâmetros do modelo reduzido é estimado utilizando o método do erro na saída (*OE – Output Error method*), que minimiza as seguintes funções custo (eqs. 3-23 e 3-25):

$$V_{OE}^N = \sum_{t=1}^N \{[\hat{G}_N^n(q) - \hat{G}^l(q)]u_f(t)\}^2 \quad (3-23)$$

A eq. (3-23) é utilizada na estimação do modelo através dos dados Z_f da eq. (3-20).

$$V_{OE}^N = \sum_{t=1}^N \{[\hat{G}_N^n(q) - \hat{G}^l(q)]r_f(t)\}^2 \quad (3-24)$$

A eq. (3-24) é utilizada na estimação do modelo através dos dados Z_f da eq. (3-21).

$$V_{OE}^N = \sum_{t=1}^N \{[\hat{G}_{NMF}^n(q) - \hat{G}_{MF}^l(q)]r_f(t)\}^2 \quad (3-25)$$

Deixando $N \rightarrow \infty$ e aplicando a identidade de Parseval na eq. (3-23), obtém-se a eq. (3-26):

$$V_{OE}^\infty = \int_0^{2\pi} |\hat{G}_N^n(e^{i\omega}) - \hat{G}^l(e^{i\omega})|^2 \frac{\Phi_u(\omega)}{|\hat{H}_N^n(e^{i\omega})|^2} d\omega \quad (3-26)$$

Deixando $N \rightarrow \infty$ e aplicando a identidade de Parseval na eq. (3-24), obtém-se a eq. (3-27):

$$V_{OE}^\infty = \int_0^{2\pi} |\hat{G}_N^n(e^{i\omega}) - \hat{G}^l(e^{i\omega})|^2 \frac{|C(e^{i\omega})|^2 |\hat{S}_N^n(e^{i\omega})|^2 \Phi_r(\omega)}{|\hat{H}_N^n(e^{i\omega})|^2} d\omega \quad (3-27)$$

Deixando $N \rightarrow \infty$ e aplicando a identidade de Parseval na eq. (3-23), obtém-se a eq. (3-26):

$$V_{OE}^{\infty} = \int_0^{2\pi} |\hat{G}_{NMF}^n(e^{i\omega}) - \hat{G}_{MF}^l(e^{i\omega})|^2 \frac{\Phi_r(\omega)}{|\hat{H}_{NMF}^n(e^{i\omega})|^2} d\omega \quad (3-28)$$

Observe que a eq. (3-26) é equivalente ao termo referente ao modelo do processo da função da verossimilhança logarítmica negativa apresentada pela eq. (3-5) quando sistema está em malha aberta. No caso da eq. (3-27) a afirmação também é verdadeira para o caso malha fechada quando o sinal $r(t)$ é utilizado como dado de entrada do sistema. E no caso da eq. (3-28) a afirmação permanece verdadeira para o caso do sistema operando em malha fechada e ser identificado o modelo em malha aberta.

De maneira semelhante ao realizado com o modelo do processo o modelo reduzido da perturbação pode ser estimado. Para isto, a função que dever ser minimizada corresponde ao termo do modelo da perturbação da eq. (3-10) e é apresentada em seguida.

$$V = \hat{R} \int_0^{2\pi} |\hat{H}_N^n(e^{i\omega}) - \hat{H}^l(e^{i\omega})|^2 \frac{1}{|\hat{H}_N^n(e^{i\omega})|^2} d\omega \quad (3-29)$$

Para a minimização da eq. (3-29) considere um sinal ruído branco com média zero e variância $\hat{R}$.

$$\{e(1), e(2), \dots, e(N)\} \quad (3-30)$$

Filtrando $e(t)$ pelo inverso do modelo de perturbação (para maiores detalhes, vide anexo B):

$$e_f(t) = \frac{1}{\hat{H}_N^n(q)} e(t) = \hat{A}_N^n(q) e(t) \quad (3-31)$$

O sinal de saída filtrado é dado por:

$$v_f(t) = \frac{1}{\hat{A}_N^n(q)} e_f(t) = e(t) \quad (3-32)$$

Caso seja considerado como sinal de entrada a ser utilizado na identificação o sinal $r(t)$, deve-se considerar:

$$r_f(t) = \frac{1}{\hat{H}_N^n(q)} \frac{r(t)}{r(t) + v(t)} = \frac{1}{\hat{H}_N^n(q)} \frac{r(t)}{r(t) + \frac{1}{\hat{A}_N^n(q)} e(t)} = \frac{1}{\hat{H}_N^n(q)} \frac{r(t)}{\hat{A}_N^n(q) r(t) + e(t)} \quad (3-33)$$

$$y_f(t) = \frac{1}{\hat{A}_N^n(q)} r_f(t) = \frac{r(t)}{\hat{A}_N^n(q) r(t) + e(t)} \quad (3-34)$$

Caso seja considerado como sinal de entrada a ser utilizado na identificação o sinal $r(t)$ e seja desejado identificar o sistema operando em malha fechada através de um modelo de processo e de perturbação em malha aberta, deve-se considerar:

$$e_f(t) = \frac{1}{\hat{H}_{NMF}^n(q)} e(t) = \hat{A}_{NMF}^n(q) e(t) \quad (3-35)$$

$$v_f(t) = \frac{1}{\hat{A}_{NMF}^n(q)} e_f(t) = e(t) \quad (3-36)$$

Através das eqs. (3-31) e (3-32), os seguintes dados de entrada e saída são obtidos:

$$Z_f = \{v_f(1), e_f(1), \dots, v_f(N), e_f(N)\} \quad (3-37)$$

Através das eqs. (3-33) e (3-34), os seguintes dados de entrada e saída são obtidos:

$$Z_f = \{y_f(1), r_f(1), \dots, y_f(N), r_f(N)\} \quad (3-38)$$

Através das eqs. (3-35) e (3-36), os seguintes dados de entrada e saída são obtidos:

$$Z_f = \{v_f(1), e_f(1), \dots, v_f(N), e_f(N)\} \quad (3-39)$$

O vetor de parâmetros do modelo reduzido é estimado utilizando o método do erro na saída (*OE – Output Error method*), que minimiza as seguintes funções custo (eqs. 3-40, 3-41 e 3-42):

$$V_{OE}^N = \hat{R} \sum_{t=1}^N \{[\hat{H}_N^n(q) - \hat{H}^l(q)]e_f(t)\}^2 \quad (3-40)$$

A eq. (3-40) é utilizada na estimação do modelo através dos dados Z_f da eq. (3-37).

$$V_{OE}^N = \hat{R} \sum_{t=1}^N \{[\hat{H}_N^n(q) - \hat{H}^l(q)]r_f(t)\}^2 \quad (3-41)$$

A eq. (3-41) é utilizada na estimação do modelo através dos dados Z_f da eq. (3-38).

$$V_{OE}^N = \hat{R} \sum_{t=1}^N \{[\hat{H}_{NMF}^n(q) - \hat{H}_{MF}^l(q)]e_f(t)\}^2 \quad (3-42)$$

A eq. (3-42) é utilizada na estimação do modelo através dos dados Z_f da eq. (3-39).

Deixando $N \rightarrow \infty$ e aplicando a identidade de Parseval na eq. (3-40), obtém-se a eq. (3-43):

$$V_{OE}^{\infty} = \hat{R} \int_0^{2\pi} |\hat{H}_N^n(e^{i\omega}) - \hat{H}^l(e^{i\omega})|^2 \frac{1}{|\hat{H}_N^n(e^{i\omega})|^2} d\omega \quad (3-43)$$

Deixando $N \rightarrow \infty$ e aplicando a identidade de Parseval na eq. (3-41), obtém-se a eq. (3-44):

$$V_{OE}^{\infty} = \hat{R} \int_0^{2\pi} |\hat{H}_N^n(e^{i\omega}) - \hat{H}^l(e^{i\omega})|^2 \frac{\Phi_r(\omega) \hat{R}}{|\hat{H}_N^n(e^{i\omega})|^2 \hat{R} \Phi_r(\omega) + |\hat{H}_N^n(e^{i\omega})|^2 \hat{R} |\hat{H}_N^n(e^{i\omega})|^2 \hat{R}} d\omega \quad (3-44)$$

Deixando $N \rightarrow \infty$ e aplicando a identidade de Parseval na eq. (3-42), obtém-se a eq. (3-45):

$$V_{OE}^{\infty} = \hat{R} \int_0^{2\pi} |\hat{H}_{NMF}^n(e^{i\omega}) - \hat{H}_{MF}^l(e^{i\omega})|^2 \frac{1}{|\hat{H}_{NMF}^n(e^{i\omega})|^2} d\omega \quad (3-45)$$

Observe que a eq. (3-43) é equivalente ao termo referente ao modelo da perturbação da função da verossimilhança logarítmica negativa apresentada pela eq. (3-5) quando sistema está em malha aberta. No caso da eq. (3-44) a afirmação também é verdadeira para o caso malha fechada quando o sinal $r(t)$ é utilizado como dado de entrada do sistema. Porém para este caso, os modelos estimados de alta ordem substituíram o espectro de potência da perturbação. E no caso da eq. (3-45) a afirmação permanece verdadeira para o caso do sistema operando em malha fechada e ser identificado o modelo em malha aberta.

De posse do conhecimento obtido, pode-se encontrar um modelo de ordem reduzida que permita maior flexibilidade. Portanto, escolhem-se como estruturas dos modelos de ordens reduzidas as estruturas ARMAX ou BJ, onde:

Estrutura ARMAX:

$$\hat{A}^l(q) y(t) = \hat{B}^l(q) u(t) + \hat{C}^l(q) e(t) \quad (3-46)$$

Estrutura BJ:

$$y(t) = \frac{\hat{B}^l(q)}{\hat{F}^l(q)} u(t) + \frac{\hat{C}^l(q)}{\hat{D}^l(q)} e(t) \quad (3-47)$$

A escolha da estrutura Box-Jenkins é baseada em (Zhu, 2001). No entanto, em (Zhu, 1998) é sugerido utilizar a estrutura ARMAX. Por este motivo, no capítulo cinco o desempenho das duas estruturas é avaliado. Como resultado desta avaliação, foi possível constatar que a estrutura ARMAX resulta em modelos com maior precisão que a estrutura BJ quando o método assintótico é aplicado. Além disso, a quantidade de identificações que convergiram em um bom modelo ARMAX é maior do que a observada para modelos BJ.

3.1.4 Seleção da ordem do modelo

O método ASYM propõe que a escolha da ordem do modelo seja baseada na comparação da variância do modelo ARX de alta ordem com a diferença entre a resposta em frequência desse modelo de alta ordem e o modelo de ordem reduzida.

Este método de seleção de ordem do modelo não busca encontrar um modelo com ordem igual ao processo real. Será escolhido como bom modelo, aquele que possuir uma ordem tal que a diferença entre as respostas em frequência do modelo de alta ordem e do modelo de ordem reduzida seja igual à variância do modelo de alta ordem.

O índice utilizado para a escolha da ordem do modelo no método ASYM é chamado de ASYC, que corresponde à tradução do termo critério assintótico.

O índice ASYC para uma identificação em malha fechada pode ser calculado através da expressão:

$$ASYC = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|\hat{G}_N^n(e^{i\omega}) - \hat{G}^l(e^{i\omega})\|^2 - \frac{n}{N} \frac{\hat{\Phi}_v(\omega) \hat{R}}{\Phi_u(\omega) \hat{R} - |\hat{\Phi}_{ue}(\omega)|^2} d\omega \quad (3-48)$$

Considerando como sinal de entrada o sinal de referência $r(t)$, a eq. (3-48) passa a ser:

$$ASYC = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|\hat{G}_N^n(e^{i\omega}) - \hat{G}^l(e^{i\omega})\|^2 - \frac{n}{N} \frac{\hat{\Phi}_v(\omega)}{|C(e^{i\omega})|^2 |\hat{S}_N^n(e^{i\omega})|^2 \Phi_r(\omega)} | d\omega \quad (3-49)$$

Considerando o sistema em malha aberta, a eq. (3-48) passa a ser:

$$ASYC = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|\hat{G}_N^n(e^{i\omega}) - \hat{G}^l(e^{i\omega})\|^2 - \frac{n}{N} \frac{\hat{\Phi}_v(\omega)}{\Phi_u(\omega)} | d\omega \quad (3-50)$$

Considerando o sistema operando em malha fechada e que a identificação seja feita obtendo-se modelos em malha aberta, a eq. (3-48) passa a ser:

$$ASYC = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|\hat{G}_{NMF}^n(e^{i\omega}) - \hat{G}_{MF}^l(e^{i\omega})\|^2 - \frac{n}{N} \frac{\hat{\Phi}_{vMF}(\omega)}{\Phi_r(\omega)} | d\omega \quad (3-51)$$

Analisando-se as eqs. (3-48) a (3-51), pode-se concluir que o índice ASYC auxilia na escolha de um modelo de ordem reduzida, em que a diferença entre o modelo de alta ordem e o modelo reduzido subtraído da variância do modelo de alta ordem seja próxima de zero. De acordo com (Zhu,1998) o menor índice indica a melhor ordem do modelo reduzido e portanto, a ordem que deverá ser selecionada. Entretanto, neste trabalho, a escolha da ordem do modelo reduzido aplicou o critério assintótico proposto por (Zhu, 1998), porém não selecionou o menor índice, a escolha foi feita da seguinte forma:

1º - O índice ASYC é calculado para os modelos de ordem reduzida com n variando de 1 à 10;

2º - Os resultados dos índices ASYC são ordenados de forma decrescente;

3º - Compara-se o valor do primeiro resultado com o do segundo, caso a diferença seja menor que 5% o primeiro modelo é selecionado. Caso contrário segue-se ao próximo passo.

4º - Compara-se o valor do segundo resultado com o do terceiro, caso a diferença seja menor que 5% o segundo modelo é selecionado. Caso contrário repete-se este passo comparando o terceiro resultado com o quarto e assim sucessivamente se necessário.

3.1.5 Seleção do tempo morto

O método ASYM não contempla a seleção do tempo morto. Desta forma, conforme sugerido por (Kline, Street, Patwardhan & Bae, 2006) pode-se fazer uma busca exaustiva pelo tempo morto capaz de reduzir a função custo do modelo encontrado.

3.1.6 Validação do modelo através do limite superior do erro

O erro do modelo de alta ordem segue uma distribuição assintoticamente normal com variância apresentada nas eqs. (2-14), (2-15) e (2-23). Portanto, pode-se definir como limite superior do erro, três desvios padrão (3σ), resultando em:

$$|G^0(e^{i\omega}) - \hat{G}_N^n(e^{i\omega})| \leq 3 \sqrt{\frac{n}{N} \frac{\hat{\Phi}_v(\omega) \hat{R}}{\Phi_u(\omega) \hat{R} - |\hat{\Phi}_{ue}(\omega)|^2}} \text{ com probabilidade de 99,99 \%} \quad (3-52)$$

Se, ao invés de se avaliar o erro entre o processo real e o modelo de alta ordem, se avaliar o erro entre o processo real e o modelo reduzido, tem-se:

$$|G^0(e^{i\omega}) - \hat{G}^l(e^{i\omega})| \leq 3 \sqrt{\frac{n}{N} \frac{\hat{\Phi}_v(\omega) \hat{R}}{\Phi_u(\omega) \hat{R} - |\hat{\Phi}_{ue}(\omega)|^2}} \text{ com probabilidade maior que 99,99 \%} \quad (3-53)$$

Comparando as eqs. (3-52) e (3-53) pode-se concluir que a eq. (3-53) é mais restritiva que a (3-52). Desta forma, fazer a validação do modelo através da segunda equação torna a validação mais conservativa.

Em função de possibilidade de identificar o sistema em malha fechada utilizando o sinal $r(t)$ como referência ou de identificar o sistema em malha aberta ou de identificar o sistema operando em malha fechada através de modelos em malha aberta, a seguir são apresentados os cálculos do limite do erro superior para os três casos, respectivamente:

$$|G^0(e^{i\omega}) - \hat{G}^l(e^{i\omega})| \leq 3 \sqrt{\frac{n}{N} \frac{\hat{\Phi}_v(\omega)}{|C(e^{i\omega})|^2 |\hat{S}_N^n(e^{i\omega})|^2 \Phi_r(\omega)}}, \text{ com probabilidade maior que 99,99 \% } \quad (3-54)$$

$$|G^0(e^{i\omega}) - \hat{G}^l(e^{i\omega})| \leq 3 \sqrt{\frac{n}{N} \frac{\hat{\Phi}_v(\omega)}{\Phi_u(\omega)}}, \text{ com probabilidade maior que 99,99 \% } \quad (3-55)$$

$$|G_{MF}^0(e^{i\omega}) - \hat{G}_{MF}^l(e^{i\omega})| \leq 3 \sqrt{\frac{n}{N} \frac{\hat{\Phi}_{vMF}(\omega)}{\Phi_r(\omega)}}, \text{ com probabilidade maior que 99,99 \% } \quad (3-56)$$

3.1.7 Validação do modelo por meio de notas

De acordo com (Zhu, 1998), a validação do modelo também pode ser feita com base na comparação entre a magnitude do limite do erro e a resposta em frequência do modelo para baixas e médias frequências. Esta comparação pode gerar quatro classes de resultados, sendo:

Nota A: Corresponde a um modelo muito bom. É atribuída quando o limite do erro é inferior ou igual a 30% da magnitude da resposta em frequência entre as baixas e médias frequências;

Nota B: Corresponde a um modelo bom. É atribuída quando o limite do erro é maior que 30% e menor ou igual a 60% da magnitude da resposta em frequência entre as baixas e médias frequências;

Nota C: Corresponde a um modelo marginal. É atribuída quando o limite do erro é maior que 60% e menor ou igual a 90% da magnitude da resposta em frequência entre as baixas e médias frequências;

Nota D: Corresponde a um modelo pobre ou a inexistência de modelo. É atribuída quando o limite do erro é maior que 90% da magnitude da resposta em frequência entre as baixas e médias frequências;

Caso a nota atribuída seja **A** ou **B**, o modelo pode ser utilizado. Caso a nota seja **C** ou **D**, será necessária nova identificação. Conforme apresentado em (Zhu, 2001), esta conclusão é baseada em sua extensa experiência em projetos de identificação de sistemas.

4 Estudo de caso

O objetivo deste estudo de caso é o desenvolvimento do método ASYM e a análise dos resultados alcançados com tal ferramenta em comparação com o modelo obtido através do *software* TaiJi-Id ®. Utilizam-se um modelo ARMAX e BJ.

Para o estudo e desenvolvimento do método ASYM para sistemas SISO, foi escolhido um *benchmark* muito utilizado na literatura (Åström & Eykhoff, 1971).

Considere o modelo de processo:

$$G^0(q) = \frac{q^{-1} + 0.5q^{-2}}{1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}} \quad (4-1)$$

Com base no modelo descrito acima, foi projetada uma malha de controle PI (proporcional e integral) com perturbação aditiva na saída, apresentada por (Alves & Garcia, 2010). A inserção do controlador PI e da perturbação visa realizar a identificação com uma estrutura tão próxima quanto possível de uma condição real.

A figura 4-1 apresenta a malha de controle proposta por (Alves & Garcia, 2010):

Figura 4-1 – Processo Åström & Eykhoff com controlador PI e perturbação

em que:

$r(t)$ corresponde ao sinal de referência da malha de controle.

$u(t)$ corresponde à entrada do processo.

$y(t)$ corresponde à saída do processo.

$v(t)$ corresponde ao sinal de perturbação.

$e(t)$ é um sinal ruído branco com média zero e variância R .

$C(q)$ corresponde ao controlador PI.

$H^0(q)$ corresponde ao modelo real da perturbação.

Conhecendo o processo real, em seguida serão seguidos os quatro passos propostos por (Zhu, 2001) para a identificação de um sistema utilizando o método assintótico. Como o método assintótico apresenta uma sobreposição entre o passo dois e o passo três, os quatro passos são apresentados nos próximos quatro itens, porém de maneira sobreposta nos itens 4.2 e 4.3.

4.1 Experimento de identificação ou teste de identificação

Para que um bom modelo seja estimado, é fundamental que o teste de identificação seja bem projetado e executado. Esta afirmação consiste em determinar um sinal de excitação adequado (em função do uso destinado do modelo), o intervalo de amostragem e o tempo necessário de execução do teste.

Para a escolha de um bom sinal de excitação, foi identificada a necessidade de um sinal persistentemente excitante de ordem elevada. A priori, utilizou-se um gerador de sinais GBN (*Generalized Binary Noise*) implementado por (Alves & Garcia, 2010).

O tempo do experimento foi determinado em função do tempo de acomodação do processo, que apresentou $t_s = 45$. Segundo (Zhu, 2001), o tempo do experimento deve estar entre 6 a 18 vezes o tempo de acomodação. Para este estudo, adotou-se oito vezes o tempo de acomodação.

Quanto ao sinal GBN, sabe-se que este sinal é persistentemente excitante de ordem elevada. Por esta razão, este sinal foi o escolhido. Apresenta-se na figura 4-2 o sinal de excitação utilizado na identificação e seu espectro de potência.

Figura 4-2 – (a) Sinal GBN utilizado na identificação. (b) Espectro de potência do sinal GBN

4.2 Seleção da ordem e da estrutura do modelo de alta ordem

Primeiramente, a estrutura do modelo é selecionada.

Como dito anteriormente, a estrutura do modelo independe das propriedades assintóticas da função de transferência estimada. Porém, conforme estabelecido na seção 3.1.2 a estrutura ARX é a mais adequada sendo a estrutura selecionada.

A figura 4-3 apresenta a estrutura estimada que represente o sistema real.

Figura 4-3 – Diagrama de blocos do modelo estimado.

O método ASYM apresentado em (Zhu, 1998) e em diversos outros artigos não explicita a ordem que deve ser utilizada para o modelo de alta ordem. No entanto, caso se recorra a (Zhu, Backx & Eykhoff, 1991), pode-se verificar que para o método em dois passos é sugerido um modelo de ordem n , tal que, $20 \leq n \leq 40$. Como o método em dois passos foi a base do método ASYM, escolheu-se n , tal que $20 \leq n \leq 40$.

De acordo com (Zhu, 2001) o modelo de alta ordem pode ser estimado com base nos métodos de erro de predição. Para a estimação dos parâmetros, foi utilizado o *software* Matlab 7.9.0.529 (versão R2009b).

Com base nos dados de entrada e saída do sistema, $r(t)$ e $y(t)$ respectivamente, o sistema é identificado para estrutura ARX de ordem entre 20 a 40. A escolha do melhor modelo de alta ordem foi baseada no parâmetro *LossFunction* fornecido pelo Matlab. Neste caso, o modelo que apresentou menor valor do parâmetro *LossFunction* foi o escolhido.

Como era de se esperar e pode-se comprovar através da figura 4-4, o melhor modelo é aquele com ordem mais elevada. De acordo com (Gustavsson, 1972) o comportamento apresentado na figura 4-4 é um comportamento típico para a função custo de modelos estimados através do método dos mínimos quadrados em função da ordem utilizada.

Figura 4-4 – Função Custo para modelos ARX com ordem variando de 20 à 40

Portanto, para a identificação realizada, o melhor modelo possui ordem 40.

Neste ponto, cabe enfatizar que utilizar a minimização do quadrado do erro de predição como parâmetro para selecionar o modelo de alta ordem de estrutura ARX é idêntico a considerar o melhor modelo aquele de maior ordem. Portanto a busca pela ordem do modelo de alta ordem pode ser suprimida e sempre considerar o modelo de ordem 40.

4.3 Seleção da ordem e da estrutura do modelo de baixa ordem

De acordo com a teoria assintótica, a variância do modelo é proporcional à ordem desse modelo. Desta forma, fica claro que a redução da ordem é capaz de reduzir a variância. É baseado neste conceito que a redução de ordem do modelo é realizada.

Quanto à estrutura, uma estrutura ARMAX ou BJ passa a ser mais interessante que a estrutura do modelo de alta ordem ARX, pois a flexibilidade do modelo aumenta, podendo melhorar a precisão do modelo reduzido em comparação a um modelo reduzido de estrutura ARX.

Quanto à ordem do modelo reduzido, de acordo com o método ASYM, a função que deve ser minimizada para a estimação dos parâmetros do modelo para o caso do sistema operando em malha fechada e modelo identificado operar em malha aberta, corresponde :

$$V_{OE}^{\infty} = \int_0^{2\pi} |\hat{G}_{NMF}^n(e^{i\omega}) - \hat{G}_{MF}^l(e^{i\omega})|^2 \frac{\Phi_r(\omega)}{|\hat{H}_{NMF}^n(e^{i\omega})|^2} d\omega \quad (4-2)$$

No entanto, (4-2) necessita de um algoritmo de minimização de função não linear. É proposto por (Zhu, 2001) a minimização da seguinte função:

$$V_{OE}^N = \sum_{t=1}^N \{[\hat{G}_{NMF}^n(q) - \hat{G}_{MF}^l(q)] r_f(t)\}^2 \quad (4-3)$$

em que:

$$r_f(t) = \frac{1}{\hat{H}_{NMF}^n(q)} r(t) = \hat{A}_{NMF}^n(q) r(t) \quad (4-4)$$

Para o modelo da perturbação, a função que deve ser minimizada para a estimação dos parâmetros é apresentada na eq.(4-5).

$$V_{OE}^{\infty} = \hat{R} \int_0^{2\pi} |\hat{H}_{NMF}^n(e^{i\omega}) - \hat{H}_{MF}^l(e^{i\omega})|^2 \frac{1}{|\hat{H}_{NMF}^n(e^{i\omega})|^2} d\omega \quad (4-5)$$

Da mesma forma como foi realizado com o modelo do processo, faz-se com o modelo da perturbação.

$$V_{OE}^N = \hat{R} \sum_{t=1}^N \{[\hat{H}_{NMF}^n(q) - \hat{H}_{MF}^l(q)] e_f(t)\}^2 \quad (4-6)$$

em que:

$$e_f(t) = \frac{1}{\hat{H}_{NMF}^n(q)} e(t) = \hat{A}_{NMF}^n(q) e(t) \quad (4-7)$$

$e(t)$ corresponde a sinal ruído branco com média zero e variância $\hat{R}$.

A minimização das eqs. (4-3) e (4-6) foi realizada através do Matlab.

Foram estimados os parâmetros para modelos ARMAX de ordem 1 a 10. Cada modelo recebeu uma nota de acordo com o critério ASYC apresentado na eq. (4-8).

$$ASYC = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \hat{G}_{NMF}^n(e^{i\omega}) - \hat{G}_{MF}^l(e^{i\omega}) \right|^2 - \frac{n}{N} \frac{\Phi_{vMF}^{\wedge}(\omega)}{\Phi_r(\omega)} d\omega \quad (4-8)$$

Na figura 4-5, é apresentada a variação do parâmetro ASYC de acordo com a ordem do modelo. Por inspeção, pode-se verificar que o modelo mais adequado é de terceira ordem.

Figura 4-5 - Gráfico do índice ASYC em função da ordem do modelo de estrutura ARMAX

4.4 Validação do modelo

A validação do modelo proposta por (Zhu, 1998) pode ser realizada de duas maneiras.

A primeira consiste em avaliar o limite superior de erro do modelo em função da frequência, respeitando o seguinte parâmetro limite (baseado na teoria assintótica):

$$|G_{MF}^0(e^{i\omega}) - \hat{G}_{MF}^l(e^{i\omega})| \leq 3 \sqrt{\frac{n}{N} \frac{\Phi_{vMF}(\omega)}{\Phi_r(\omega)}} , \text{ com probabilidade maior que 99.9\%} \quad (4-9)$$

Durante a seleção da ordem do modelo reduzido, a validação do modelo estimado foi feita em função da eq. (4-9). No estudo de caso apresentado, o erro encontrado foi inferior ao limite superior do erro para a faixa de frequência avaliada. A faixa de frequência avaliada corresponde a $1 \times 10^{-3} (\text{rad/s}) \leq \omega \leq 3,14 (\text{rad/s})$.

A segunda maneira de validar o modelo é através da atribuição de notas, conforme apresentado em 3.1.7.

Para o estudo de caso, apresenta-se a figura 4-6, em que a resposta em frequência e o erro são apresentados. A nota atribuída ao modelo foi A. O valor da relação entre o limite do erro e o ganho da resposta em frequência corresponde a 27,05%, justificando a nota A.

Figura 4-6 – Resposta em frequência, erro do modelo, limite superior do erro e nota

Uma terceira maneira de se avaliar o desempenho do modelo obtido é através da validação cruzada. A validação cruzada consiste em excitar a planta real e o modelo estimado com um mesmo sinal (diferente daquele empregado na identificação) e comparar as duas saídas. Neste caso, o sinal de entrada foi uma composição de degraus positivos e negativos com amplitude de 0,5 durante 120 segundos.

Além do modelo ARMAX obtido através do método ASYM, mais quatro modelos são avaliados e comparados. O objetivo desta comparação é verificar o desempenho do modelo ARMAX obtido através do método assintótico em relação a modelos obtidos através de estimadores dos mínimos quadrados, a modelo obtidos através de *software* comercial que aplica o método assintótico e ao modelo de estrutura ARX de alta ordem, são eles:

Modelo ASYM: Modelo com estrutura ARMAX estimado no estudo de caso aplicando o método assintótico.

Modelo TaiJi-Id ®: Modelo estimado pelo *software* Taiji-Id versão 3.4. Este *software* estima parâmetros utilizando o método assintótico e fornece um modelo de ordem reduzida de acordo com o método ASYM, o modelo estimado foi convertido em um modelo de ordem 3. Esta conversão deve-se a versão do *software* disponível, que só disponibiliza modelos convertidos de ordem 1, 2 e 3.

Modelo ARMAX: Modelo com estrutura ARMAX estimado com parâmetros $n_a=3$, $n_b=3$, $n_c=3$ e $n_k=1$, correspondentes às ordens reais do modelo do processo.

Modelo BJ: Modelo com estrutura BJ estimado com parâmetros $n_b=3$, $n_c=3$, $n_d=5$, $n_f=3$ e $n_k=1$.

Modelo ARX alta ordem: Modelo com estrutura ARX estimado no estudo de caso aplicando o método assintótico até a obtenção do modelo de alta ordem.

Para fins de comparação, foi dada uma nota para cada modelo. Esta nota corresponde ao índice de ajuste *fit*, que corresponde a eq. (4-10) e está disponível no Matlab através do comando *compare*:

$$fit(\%) = 100 \cdot \left(1 - \frac{\|\hat{y}(t) - y(t)\|}{\|y(t) - \bar{y}\|} \right) \quad (4-10)$$

em que:

$\hat{y}(t)$ corresponde à saída do modelo identificado.

$y(t)$ corresponde à saída do sistema real.

$\bar{y}$ corresponde ao valor médio da saída do sistema real.

Na figura 4-7 são apresentadas as respostas dos modelos avaliados ao sinal de entrada utilizado na validação cruzada.

Figura 4-7 – Gráfico comparativo das respostas dos modelos avaliados

Aplicando uma aproximação na figura 4-7, pode-se ver na figura 4-8 os detalhes das respostas a uma onda quadrada dos modelos citados.

Figura 4-8 – Gráfico comparativo das respostas ampliadas dos modelos avaliados

A tabela 4-1 apresenta uma comparação entre os diversos modelos identificados com sinais de excitação distintos e sem perturbação. Ao todo, nove sinais diferentes foram utilizados para identificar os modelos. Basicamente, os sinais utilizados para a excitação do sistema durante a identificação tiveram sua amplitude variada entre 0,03, 0,01 e 0,003 e quanto ao tempo médio de chaveamento (t_{ch}) do sinal GBN de variando entre 15,00, 35,63 e 56,25 segundos.

Tabela 4.1 - Comparação do índice de ajuste *fit* para os modelos identificados

Sinal de excitação	ASYM <i>fit</i> (%)	TaiJi-Id® <i>fit</i> (%)	ARMAX <i>fit</i> (%)	BJ <i>fit</i> (%)	ARX alta ordem <i>fit</i> (%)
Amplitude = 0,03 $t_{ch} = 15,00s$	94,23	94,14	94,22	94,27	94,14
Amplitude = 0,01 $t_{ch} = 15,00s$	91,72	93,08	94,32	81,61	93,59
Amplitude = 0,003 $t_{ch} = 15,00s$	89,69	84,67	93,36	60,43	89,79
Amplitude = 0,03 $t_{ch} = 35,63s$	93,78	94,07	93,95	93,81	93,29
Amplitude = 0,01 $t_{ch} = 35,63s$	92,25	93,49	92,90	92,95	89,24
Amplitude = 0,003 $t_{ch} = 35,63s$	84,58	89,53	86,24	85,67	71,92
Amplitude = 0,03 $t_{ch} = 56,25s$	94,28	94,30	94,19	94,21	93,89
Amplitude = 0,01 $t_{ch} = 56,25s$	93,52	93,82	93,88	93,83	92,55
Amplitude = 0,003 $t_{ch} = 56,25s$	85,82	86,36	83,29	79,72	83,05

Através da tabela 4-1, pode-se concluir que o método ASYM atendeu as expectativas, pois, sem saber de antemão a ordem e a estrutura do modelo foi capaz de apresentar uma resposta a um sinal composto por degraus sequenciais satisfatória para todos os casos em relação aos resultados obtidos por modelos estimados utilizando a ordem real do processo.

5 Análise comparativa entre o método assintótico e modelos derivados da teoria assintótica

Este capítulo busca avaliar de maneira comparativa o desempenho dos modelos obtidos através do método assintótico e modelos obtidos aplicando o conhecimento da teoria assintótica.

Esta avaliação se mostrou necessária, pois modelos obtidos através do método assintótico apesar de apresentarem bons resultados para a identificação de sistemas ditos caixa-preta também apresentam em muitas identificações ordens maiores que o esperado. Modelos de ordens 1, 2 e 3 podem representar de maneira satisfatória a maioria dos sistemas utilizados em MPC. No entanto, o método assintótico escolhe ordens 5, 6, 7 e 8 para seus modelo com grande frequência.

Sabendo-se desta característica na seleção de ordem do método assintótico, 16 modelos identificados baseados na teoria assintótica e ou no método assintótico foram avaliados e comparados com dois modelos obtidos exclusivamente através do método assintótico.

Esta avaliação também se mostrou importante para avaliar comparativamente o desempenho entre os modelos obtidos através do método assintótico de estrutura ARMAX com a estrutura BJ.

Os modelos identificados foram avaliados sob 3 perspectivas: nota (proposta no método assintótico), validação cruzada aplicando o índice de ajuste *fit* e variância dos parâmetros apresentada por cada modelo.

O método assintótico implementado foi avaliado através da capacidade de convergir em bons modelos, na capacidade do critério assintótico em escolher ordens que gerem bons modelos e quanto à influência da relação sinal ruído para a identificação através do método ASYM.

5.1 Estruturas avaliadas

Os 18 modelos identificados foram obtidos por métodos de identificação distintos e por este motivo podem ser divididos em três classes de modelos: *i)* Modelos obtidos a partir do modelo ARX de alta ordem; *ii)* Modelos obtidos a partir dos dados de entrada e saída filtrados; *iii)* Modelos obtidos através do método assintótico.

Em seguida as classes são apresentadas assim como a forma de obtenção de cada modelo.

5.1.1 Modelos obtidos a partir do modelo ARX de alta ordem

O modelo ARX de alta ordem obtido a partir dos dados coletados foi reduzido para modelos de ordem 1, 2 e 3 através do comando “balred”. Este comando impõe que a estrutura do modelo reduzido seja ARMAX. Portanto, os modelos obtidos tiveram sua estrutura alterada de ARX para ARMAX.

Os três novos modelos recebem os nomes:

M_ARX_HIGH_B1: Modelo reduzido para ordem 1 de estrutura ARMAX;

M_ARX_HIGH_B2: Modelo reduzido para ordem 2 de estrutura ARMAX;

M_ARX_HIGH_B3: Modelo reduzido para ordem 3 de estrutura ARMAX.

O modelo ARX de alta ordem recebe o nome:

M_ARX_HIGH: Modelo de alta ordem de estrutura ARX.

O comando “balred” do MatLab® realiza a redução de ordem de um modelo através de técnicas de balanceamento. Seu funcionamento é semelhante a técnica apresentada em (Wahlberg, 1989).

5.1.2 Modelos obtidos a partir dos dados de entrada e saída filtrados

Após a identificação do modelo de alta ordem, os dados coletados são filtrados pelo inverso do modelo da perturbação. Este passo faz parte da obtenção dos dados que serão utilizados para estimar os modelos de ordem reduzida aplicando os conceitos apresentados em (Wahlberg, 1989) e detalhado em 3.1.3 para uma identificação em malha aberta. Os novos dados gerados são utilizados para identificação de modelos de ordem 1, 2 e 3 de estruturas ARMAX e BJ.

Os seis novos modelos recebem os nomes:

M_ARMAX_ZF_B1: Modelo com ordem 1 de estrutura ARMAX;

M_ARMAX_ZF_B2: Modelo com ordem 2 de estrutura ARMAX;

M_ARMAX_ZF_B3: Modelo com ordem 3 de estrutura ARMAX;

M_BJ_ZF_B1: Modelo com ordem 1 de estrutura BJ;

M_BJ_ZF_B2: Modelo com ordem 2 de estrutura BJ;

M_BJ_ZF_B3: Modelo com ordem 3 de estrutura BJ;

5.1.3 Modelos obtidos com o método assintótico

Através do método assintótico foram obtidos dois modelos, um de estrutura ARMAX e outro de estrutura BJ. Estes modelos recebem os nomes:

M_ARMAX_ASYNC: Modelo reduzido de acordo com o ASYC e de estrutura ARMAX;

M_BJ_ASYNC: Modelo reduzido de acordo com o ASYC e de estrutura BJ;

A partir do modelo de estrutura ARMAX é feita sua redução através do comando *balred* de forma a obter três novos modelos ARMAX de ordens 1, 2 e 3.

Assim como com o modelo ARMAX, o modelo BJ é reduzido através do comando *balred* de forma a obter três novos modelos de ordens 1, 2 e 3. Neste caso, os modelos deixam de ser BJ e passam a ser ARMAX em função da utilização do comando *balred*.

Os seis novos modelos recebem os nomes:

M_ARMAX_ASYNC_B1: Modelo reduzido para ordem 1 de estrutura ARMAX;

M_ARMAX_ASYNC_B2: Modelo reduzido para ordem 2 de estrutura ARMAX;

M_ARMAX_ASYNC_B3: Modelo reduzido para ordem 3 de estrutura ARMAX;

M_BJ_ASYNC_B1: Modelo reduzido para ordem 1 de estrutura ARMAX;

M_BJ_ASYNC_B2: Modelo reduzido para ordem 2 de estrutura ARMAX;

M_BJ_ASYNC_B3: Modelo reduzido para ordem 3 de estrutura ARMAX;

5.2 Descrição dos testes

Todos os testes realizados utilizaram o sistema apresentado na figura 4.1.

O objetivo desta identificação é obter um modelo de processo e de perturbação que forneça a relação entre o sinal de entrada $r(t)$ e o sinal de saída $y(t)$. Nestas condições, fica claro que apesar do sistema trabalhar em malha fechada, esta identificação trata-se de um problema de identificação em malha aberta. O desejo em se obter um modelo do processo como um todo (malha fechada) e não somente do processo real (malha aberta) deve-se a intenção de aplicar o modelo obtido em um MPC.

Para avaliar o desempenho dos dezoito modelos encontrados foi aplicado o método Monte-Carlo com a realização de 504 experimentos de identificação e validação. Os mais de quinhentos experimentos foram separados em sete grupos de 72 identificações e validações. Os experimentos de identificação de cada grupo têm em comum a faixa da relação sinal ruído (SNR) utilizada, sendo:

Grupo 1 : Foi utilizada $7\text{dB} \leq SNR < 8\text{dB}$.

Grupo 2 : Foi utilizada $8\text{dB} \leq SNR < 9\text{dB}$.

Grupo 3 : Foi utilizada $9\text{dB} \leq SNR < 10\text{dB}$.

Grupo 4 : Foi utilizada $10\text{dB} \leq SNR < 11\text{dB}$.

Grupo 5 : Foi utilizada $11\text{dB} \leq SNR < 12\text{dB}$.

Grupo 6 : Foi utilizada $12\text{dB} \leq SNR < 13\text{dB}$.

Grupo 7 : Foi utilizada $13\text{dB} \leq SNR < 14\text{dB}$.

As faixas de relação sinal ruído escolhidas devem-se a uma avaliação preliminar que mostrou que identificações realizadas com relação sinal ruído inferior a 7 dB apresentavam muitos modelos com notas C e D (critério apresentado em 3.1.7). Por outro lado, com relação sinal ruído acima de 14dB, ocorrem modelos majoritariamente com notas A ou B.

O sinal utilizado na identificação foi um sinal periódico tipo PRBS (do Inglês, *Pseudo-Random Binary Signal*) e sua amplitude foi ajustada para atender a SNR desejada. A semente utilizada para gerar o sinal PRBS aplicado ao sistema durante a identificação e a utilizada para gerar o sinal ruído branco aplicado ao modelo da perturbação real foram geradas aleatoriamente. A figura 5-1 apresenta como exemplo, um dos sinais utilizados durante o experimento Monte-Carlo.

Figura 5-1 – (a) Sinal PRBS utilizado na identificação. (b) Espectro de potência do sinal PRBS

Todos os testes foram realizados com o ajuste do ganho DC do modelo do processo. Este ajuste, em uma avaliação preliminar, apresentou melhora no resultado em torno de 0,2% em relação às notas médias e de 1,2% em relação ao índice de ajuste *fit* médio obtido através da validação cruzada. O ajuste de ganho

DC consiste em ajustar o ganho dos modelos em regime estacionário em relação ao ganho do modelo ARX de alta ordem.

5.3 Resultados obtidos

Nas tabelas apresentadas em seguida serão destacadas em fundo cinza os dados dos modelos M_ARMAX_ASYC e M_BJ_ASYC por se tratarem dos modelos de maior interesse neste estudo.

5.3.1 Nota obtida através do método assintótico

Todos os modelos foram classificados de acordo com o a nota calculada pelo método assintótico. A seguir, são apresentadas as notas médias de cada modelo. Por se tratar de um experimento com 504 resultados, a aplicação da média entre os resultados foi necessária para permitir uma avaliação.

A maioria dos modelos apresentou nota média B. Isto mostra que a identificação de sistemas através dos princípios da teoria assintótica é capaz de apresentar modelos com boas notas.

Tabela 5.1 - Conceitos e notas médias dos modelos avaliados

Classificação	Modelo	Conceito médio	Nota média (%)
1	M_ARMAX_ASYC_B3	B	35,66
2	M_BJ_ASYC_B3	B	36,73
3	M_BJ_ZF_B1	B	39,40
4	M_ARX_HIGH	B	39,60
5	M_BJ_ASYC	B	40,64
6	M_ARMAX_ASYC	B	41,33
7	M_ARX_HIGH_B3	B	42,21
8	M_BJ_ASYC_B1	B	42,68
9	M_BJ_ASYC_B2	B	43,34
10	M_ARX_HIGH_B2	B	44,26
11	M_ARMAX_ASYC_B2	B	44,44
12	M_ARX_HIGH_B1	B	44,65
13	M_ARMAX_ASYC_B1	B	45,60
14	M_ARMAX_ZF_B3	B	48,53
15	M_BJ_ZF_B3	B	53,36
16	M_BJ_ZF_B2	B	59,43
17	M_ARMAX_ZF_B2	C	60,76
18	M_ARMAX_ZF_B1	D	120,42

A tabela 5-1 também mostra que os modelos obtidos a partir dos dados de entrada e saída filtrados pelo inverso do modelo da perturbação de alta ordem (5.1.2) apresentaram as piores notas, exceto pelo modelo M_BJ_ZF_B1. Este resultado evidencia que a aplicação do critério assintótico ASYC na escolha da ordem dos modelos traz melhorias quando os modelos são avaliados de acordo com a nota proposta pelo método ASYM. Os únicos modelos que apresentaram boas notas e não aplicaram o critério ASYC para a seleção do modelo da baixa ordem foram os modelos obtidos a partir do modelo M_ARX_HIGH.

Os modelos M_BJ_ASYC e M_ARMAX_ASYC apresentaram bons resultados, ficando respectivamente nas posições cinco e seis da classificação geral. No entanto, de maneira surpreendente, o modelo M_ARX_HIGH apresentou conceito ligeiramente superior aos modelos M_BJ_ASYC e M_ARMAX_ASYC. A

surpresa neste resultado deve-se a afirmação apresentada em (Zhu, 2001), em que é mencionada que a redução de ordem pode trazer uma melhora no erro do modelo por reduzir a variância do modelo de ordem reduzida em relação ao modelo de alta ordem. Para este caso ficou evidente que a redução de ordem não trouxe a melhora no erro do modelo.

Os modelos M_ARMAX_ASYC_B3, M_BJ_ASYC_B3 e M_BJ_ZF_B1 apresentaram excelentes resultados. Apesar dos resultados, os modelos M_ARMAX_ASYC_B3 e M_BJ_ASYC_B3 são derivados dos modelos M_ARMAX_ASYC e M_BJ_ASYC respectivamente e nem sempre estes modelos apresentam ordem igual ou superior a três. Por este motivo, os modelos M_ARMAX_ASYC_B3 e M_BJ_ASYC_B3 foram obtidos apenas em 64,3% e 48,8% dos experimentos respectivamente o que prejudica a avaliação geral.

5.3.2 Avaliação pelo índice de ajuste *fit*

Todos os modelos foram classificados de acordo com o índice de ajuste *fit*. Por se tratar de um experimento com 504 resultados para cada modelo, a média entre os resultados obtidos foi aplicada. O índice de ajuste *fit* médio foi calculado conforme a eq. (5-1).

$$fit(\%) = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^N [\hat{y}(j, t) - y(j, t)]^2}}{\sqrt{\sum_{t=1}^N [y(j, t) - \bar{y}(j)]^2}} \right) \quad (5-1)$$

em que,

j corresponde ao índice do experimento Monte-Carlo e varia de 1 a $M = 504$;

t corresponde ao tempo de cada experimento e varia de 0 a $N = 360$.

$\hat{y}(j, t)$ corresponde à saída do modelo estimado em função de j e t .

$y(j, t)$ corresponde à saída do processo real em função de j e t .

$\bar{y}(j)$ corresponde à saída média do processo real em função de j .

O índice de ajuste *fit* médio foi calculado para quatro validações cruzadas de cada modelo, sendo elas:

- i) Validação cruzada da resposta ao degrau sem o modelo de perturbação: Nesta validação, a resposta ao degrau foi avaliada para cada modelo de processo sem utilizar o modelo da perturbação (degrau de amplitude 0,5);
- ii) Validação cruzada da resposta ao degrau com o modelo de perturbação: Nesta validação, a resposta ao degrau foi avaliada para cada modelo de processo com o uso do modelo da perturbação no processo real e no modelo estimado (degrau de amplitude 0,5 e sinal ruído branco utilizado no modelo da perturbação com média zero e variância de acordo com *SNR* desejado);
- iii) Validação cruzada da resposta ao sinal aleatório sem o modelo de perturbação: Nesta validação, a resposta a um sinal aleatório (ruído branco com média zero e variância $2,5 \times 10^{-3}$) foi avaliada para cada modelo de processo sem o uso do modelo da perturbação;
- iv) Validação cruzada da resposta ao sinal aleatório com o modelo de perturbação: Nesta validação, a resposta a um sinal aleatório (ruído branco com média zero e variância $2,5 \times 10^{-3}$) foi avaliada para cada modelo de processo com o uso do modelo da perturbação no processo real e no modelo estimado (o sinal ruído branco utilizado no modelo da perturbação apresenta média zero e variância de acordo com *SNR* desejado);

A tabela 5-2 apresenta os resultados das quatro validações para cada modelo. Nesta tabela a ordem em que os modelos são apresentados não reflete qualquer classificação.

Tabela 5.2 - Resultados dos índices de ajuste *fit* para as quatro validações

Modelo	i) - Resposta ao degrau sem o modelo da perturbação (%)	ii) - Resposta ao degrau com o modelo da perturbação (%)	iii) - Resposta ao sinal aleatório sem o modelo da perturbação (%)	iv) - Resposta ao sinal aleatório com o modelo da perturbação (%)
M_ARX_HIGH	82,96	82,93	79,40	77,89
M_ARX_HIGH_B1	81,52	81,39	69,60	65,06
M_ARX_HIGH_B2	82,12	81,98	70,67	65,87
M_ARX_HIGH_B3	83,06	82,92	78,38	72,30
M_ARMAX_ASYNC	79,26	79,09	67,33	61,90
M_ARMAX_ASYNC_B1	78,77	78,62	63,06	58,78
M_ARMAX_ASYNC_B2	78,59	78,44	60,89	56,95
M_ARMAX_ASYNC_B3	77,52	77,33	71,45	64,98
M_BJ_ASYNC	73,32	73,22	51,77	47,64
M_BJ_ASYNC_B1	71,94	71,84	43,74	40,84
M_BJ_ASYNC_B2	76,67	76,56	53,25	49,61
M_BJ_ASYNC_B3	76,93	76,79	70,30	64,05
M_ARMAX_ZF_B1	36,77	36,76	27,28	25,62
M_ARMAX_ZF_B2	68,80	68,73	62,58	58,81
M_ARMAX_ZF_B3	80,52	80,35	75,62	68,94
M_BJ_ZF_B1	42,31	-5,11E+15	20,12	-1,61E+23
M_BJ_ZF_B2	66,92	55,10	60,30	-9552,13
M_BJ_ZF_B3	52,13	52,15	61,73	55,66

A tabela 5-2 fornece dados para o cálculo da média dos índices de ajuste *fit* médio entre as quatro validações realizadas. Os resultados são apresentados em ordem de classificação na tabela 5-3.

Tabela 5.3 - Classificação dos modelos avaliados de acordo com a média dos índices de ajuste *fit* médios

Classificação	Modelo	<i>fit</i> médio (%)
1	M_ARX_HIGH	80,79
2	M_ARX_HIGH_B3	79,17
3	M_ARMAX_ZF_B3	76,36
4	M_ARX_HIGH_B2	75,16
5	M_ARX_HIGH_B1	74,39
6	M_ARMAX_ASYC_B3	72,82
7	M_BJ_ASYC_B3	72,01
8	M_ARMAX_ASYC	71,90
9	M_ARMAX_ASYC_B1	69,81
10	M_ARMAX_ASYC_B2	68,72
11	M_ARMAX_ZF_B2	64,73
12	M_BJ_ASYC_B2	64,02
13	M_BJ_ASYC	61,49
14	M_BJ_ASYC_B1	57,09
15	M_BJ_ZF_B3	55,41
16	M_ARMAX_ZF_B1	31,61
17	M_BJ_ZF_B2	-2342,45
18	M_BJ_ZF_B1	-4,05E+22

Os resultados apresentados na tabela 5-3 mostram que na média os modelos obtidos a partir do modelo M_ARX_HIGH apresentaram índice de ajuste *fit* médio superiores aos demais, exceto pelo modelo M_ARMAX_ZF_B3. Também é possível constatar que os modelos de estrutura ARMAX apresentaram resultados superiores aos modelos de estrutura BJ quando comparados os modelos de mesma classe. Para esta avaliação os modelos obtidos através dos dados de entrada e saída

filtrados pelo inverso do modelo da perturbação não apresentaram bons resultados, assim como no critério de notas.

O índice de ajuste *fit* médio calculado entre as quatro validações cruzadas mostrou um resultado global do comportamento dos modelos quando o sistema é excitado por diferentes sinais. A tabela 5-4 apresenta os índices de ajuste *fit* médio apenas da validação *ii*. A atenção especial a esta validação deve-se ao fato de que além de levar em consideração o modelo da perturbação, utiliza-se degrau, sinal este muito semelhante aos sinais que o modelo obtido estará sujeito quando aplicado em uma planta industrial.

Tabela 5.4 - Classificação dos modelos avaliados de acordo com o índice de ajuste *fit* médio para validação *ii*

Classificação	Modelo	<i>fit</i> médio (%)
1	M_ARX_HIGH_B3	83,06
2	M_ARX_HIGH	82,96
3	M_ARX_HIGH_B2	82,12
4	M_ARX_HIGH_B1	81,52
5	M_ARMAX_ZF_B3	80,52
6	M_ARMAX_ASYNC	79,26
7	M_ARMAX_ASYNC_B1	78,77
8	M_ARMAX_ASYNC_B2	78,59
9	M_ARMAX_ASYNC_B3	77,52
10	M_BJ_ASYNC_B3	76,93
11	M_BJ_ASYNC_B2	76,67
12	M_BJ_ASYNC	73,32
13	M_BJ_ASYNC_B1	71,94
14	M_ARMAX_ZF_B2	68,80
15	M_BJ_ZF_B2	66,92
16	M_BJ_ZF_B3	52,13
17	M_BJ_ZF_B1	42,31
18	M_ARMAX_ZF_B1	36,77

A tabela 5-4 apresenta um resultado muito interessante quando se avalia a classificação de cada modelo em relação a sua classe apresentada em 5.1. Pode-se notar claramente que os modelos obtidos através do modelo M_ARX_HIGH, assim como o próprio modelo M_ARX_HIGH apresentaram os melhores resultados. Dando sequência a classificação, ficaram os modelos obtidos através do método assintótico e pela redução da ordem dos modelos M_ARMAX_ASYC e M_BJ_ASYC. Por fim, novamente aparecem os modelos obtidos através dos dados de entrada e saída filtrados pelo inverso do modelo da perturbação.

5.3.3 Avaliação da consistência do modelo pela variância dos seus parâmetros

Nesta seção, avalia-se a consistência na obtenção de modelos através de métodos semelhantes que geram modelos de ordens diversas. Esta característica dificulta a análise do valor médio dos parâmetros e da sua variância. Por isto, nesta seção é feita apenas a análise da variância média entre todos os parâmetros de cada modelo do processo e de cada modelo de perturbação. Para melhor compreensão dos resultados, também são apresentados os valores da maior variância entre todos os parâmetros de cada modelo.

Os modelos aqui avaliados são aqueles que obtiveram notas A ou B e índice de ajuste *fit* para as validações cruzadas *ii* e *iv* maiores que 50%. Esta seleção visa remover da avaliação os modelos estimados que não apresentem resultados minimamente satisfatórios.

Um ponto a ser observado é que o método assintótico não busca um modelo idêntico ao processo real ou com a mesma ordem, mas sim um modelo de ordem reduzida que possua uma variância menor ou igual a variância apresentada por um modelo de alta ordem identificado anteriormente. Por esta razão, não faz sentido comparar os parâmetros dos modelos obtidos com os parâmetros do processo real.

No caso dos modelos M_ARMAX_ASYC a avaliação da variância dos parâmetros foi realizada para os modelos de ordens 2, 3 e 4, que são as ordens mais freqüentes.

No caso dos modelos M_BJ_ASYNC a avaliação da variância dos parâmetros deveria ser realizada para os modelos de ordens 1, 2 e 3, que são as ordens mais freqüentes. No entanto, os modelos de ordem 1 foram descartados desta análise pois em sua maioria apresentaram notas diferentes de A e B ou índice de ajuste *fit* inferior a 50%. Nestas condições, são avaliados os modelos de ordens 2, 3 e 4.

Tabela 5.5 - Classificação dos modelos avaliados de acordo com a variância máxima apresentada entre os parâmetros do modelo estimado do processo

Classificação	Modelo	Variância média de $\hat{G}'(q)$	Variância máxima de $\hat{G}'(q)$	Variância média de $\hat{H}'(q)$	Variância máxima de $\hat{H}'(q)$
1	M_BJ_ASYNC*	0,0006	0,0017	0,2668	0,6800
2	M_ARMAX_ASYNC*	0,0008	0,0023	0,0046	0,0134
3	M_ARMAX_ZF_B2	0,0010	0,0030	0,0044	0,0131
4	M_BJ_ZF_B2	0,0012	0,0034	0,2829	0,6602
5	M_BJ_ASYNC_B1	0,0050	0,0123	0,0030	0,0091
6	M_ARMAX_ASYNC_B1	0,0067	0,0164	0,0029	0,0077
7	M_ARX_HIGH_B1	0,0085	0,0199	0,0308	0,1187
8	M_ARX_HIGH_B3	0,0549	0,1808	0,1011	0,2906
9	M_ARX_HIGH_B2	0,0701	0,1958	0,0984	0,1958
10	M_ARMAX_ASYNC_B3	0,0402	0,1969	0,0820	0,2092
11	M_ARMAX_ASYNC**	0,0527	0,2339	0,0951	0,2462
12	M_BJ_ASYNC_B2	0,0861	0,2601	0,1691	0,2861
13	M_ARMAX_ASYNC_B2	0,0872	0,2652	0,1522	0,2652
14	M_BJ_ASYNC**	0,0789	0,3518	0,8270	1,7525
15	M_BJ_ASYNC***	0,0823	0,3637	0,8026	1,6138
16	M_ARMAX_ASYNC***	0,1049	0,4510	0,1935	0,4769
17	M_BJ_ASYNC_B3	0,1648	0,6365	0,3296	0,6885
18	M_ARX_HIGH	0,0004	0,9977	0,0455	0,9976

* Modelos de ordem 2;

** Modelos de ordem 3;

*** Modelos de ordem 4.

Analisando a tabela 5-5 é possível perceber que o valor da maior variância dos parâmetros dos modelos de processo tende a aumentar em função da ordem.

Como se pode ver, os modelos melhor classificados são aqueles de menor ordem e o modelo de pior classificação é o modelo M_ARX_HIGH que possui ordem 40.

De maneira geral, é possível verificar através da tabela 5-5 que a máxima variância apresentada pelos modelos é satisfatória. Os valores da variância média entre os parâmetros dos modelos reforça esta afirmação, pois, apesar de alguns modelos apresentarem valores consideravelmente altos para máxima variância, como é o caso do modelo M_BJ_ASYC_B3 o valor da variância média é baixo.

Nesta análise vale destacar o desempenho dos modelos M_BJ_ASYC e M_BJ_ARMAX de ordem 2 que apresentaram os melhores resultados.

5.3.4 Avaliação da capacidade de convergência em bons modelos

Os dezoito modelos foram classificados de acordo com a capacidade de cada algoritmo em obter um modelo com conceito A ou B. Entende-se de acordo com (Zhu, 1998) que modelos com notas “A” ou “B” são modelos bons o suficiente para serem aplicados na prática.

Também foi avaliada a porcentagem de modelos válidos, ou seja, a porcentagem dos modelos que não obtiveram conceitos extremamente ruins. Para esta análise, foram considerados modelos válidos apenas aqueles que apresentaram nota de acordo com o método assintótico inferior a 200%. Para reforçar o conceito, um modelo recebe nota D quando o limite do erro é maior que 90% da magnitude da resposta em frequência entre as baixas e médias frequências do modelo estimado.

Tabela 5.6 - Classificação dos modelos avaliados de acordo com a capacidade de convergir em bons modelos

Classificação	Modelo	Modelos com conceito "A" ou "B" (%)	Modelos válidos (%)
1	M_ARX_HIGH	88,43%	99,80%
2	M_ARMAX_ASYC	85,09%	99,80%
3	M_ARX_HIGH_B3	84,84%	99,80%
4	M_BJ_ASYC	84,36%	98,20%
5	M_ARMAX_ASYC_B2	83,11%	99,60%
6	M_ARX_HIGH_B2	80,86%	99,80%
7	M_ARMAX_ASYC_B1	80,71%	99,60%
8	M_ARX_HIGH_B1	78,68%	93,60%
9	M_BJ_ASYC_B1	80,21%	100,00%
10	M_ARMAX_ZF_B3	73,72%	100,00%
11	M_BJ_ZF_B3	67,08%	99,40%
12	M_BJ_ZF_B2	57,30%	71,40%
13	M_ARMAX_ZF_B2	58,35%	64,20%
14	M_BJ_ZF_B1	64,46%	68,00%
15	M_BJ_ASYC_B2	60,04%	94,80%
16	M_ARMAX_ASYC_B3	60,85%	96,60%
17	M_BJ_ASYC_B3	45,52%	47,60%
18	M_ARMAX_ZF_B1	1,00%	4,40%

A tabela 5-6 apresenta com o melhor desempenho o modelo de alta ordem M_ARX_HIGH, seguido pelo modelo M_ARMAX_ASYC, M_ARX_HIGH_B3 e M_BJ_ASYC. Esta classificação inicial mostra que o método assintótico é capaz de gerar modelos que apresentem boas notas na grande maioria das identificações. Esta é uma característica muito positiva para a constatação do bom desempenho deste método.

5.3.5 Distribuição dos valores de n obtidos

O critério ASYC é utilizado para a seleção da ordem do modelo estimado de ordem reduzida. Este critério foi utilizado para determinar a ordem dos modelos M_ARMAX_ASYC e M_BJ_ASYC. Considerando apenas o método assintótico, são feitas as considerações com relação à distribuição da quantidade de modelos obtidos de acordo com os valores das ordens n .

Para os modelos M_ARMAX_ASYC as figuras 5-2 e 5-3 são apresentadas.

Figura 5-2 – Distribuição da quantidade de modelos M_ARMAX_ASYC obtidos de acordo com n

Figura 5-3 – Distribuição da quantidade de modelos M_ARMAX_ASYC obtidos com notas A ou B e $fit \geq 50\%$ de acordo com n

Através da figura 5-2 é possível verificar que as ordens selecionadas pelo critério ASYC para modelos M_ARMAX_ASYC apresentaram uma distribuição coerente com a ordem real do processo em malha fechada. O modelo real do processo apresenta ordem igual a três.

Analisando a figura 5-3 é possível constatar que os modelos que obtiveram notas A ou B de acordo com o método assintótico e índice de ajuste $fit \geq 50\%$ para modelos M_ARMAX_ASYC também apresentam uma distribuição coerente com a ordem real do modelo do processo.

Comparando a figura 5-2 com a 5-3 a informação mais preciosa a ser percebida é a semelhança que as duas figuras apresentam. Esta característica mostra que as ordens escolhidas através do critério assintótico ou ASYC resultam em modelos com conceitos A ou B para a estrutura ARMAX.

Para o modelo M_BJ_ASYC são apresentadas as figuras 5-4 e 5-5.

Figura 5-4 – Distribuição da quantidade de modelos M_BJ_ASYC obtidos de acordo com n

Figura 5-5 – Distribuição da quantidade de modelos M_BJ_ASYC obtidos com notas A ou B e $fit \geq 50\%$ de acordo com n

Através da figura 5-4 é possível verificar que as ordens selecionadas através do critério ASYC para modelos M_BJ_ASYC apresentaram uma distribuição que revela uma tendência em selecionar modelos de menor ordem.

Analisando a figura 5-5 é possível constatar que os modelos que obtiveram notas A ou B de acordo com o método assintótico e índice de ajuste $fit \geq 50\%$ para modelos M_BJ_ASYC apresentam uma distribuição coerente com a ordem real do modelo do processo.

Comparando a figura 5-4 com a 5-5 pode-se constatar que a utilização do critério assintótico para a seleção da ordem do modelo de ordem reduzida de estrutura BJ não reflete na escolha de modelos com boas notas.

5.3.6 Influência da relação sinal ruído

Durante um experimento de identificação a relação entre o sinal de entrada e o ruído presente no sinal de saída possui grande relevância no desempenho dos modelos obtidos. Na obtenção de modelo através do método assintótico esta característica ficou bastante evidente.

Nos gráficos a seguir são apresentadas as variações da nota (figura 5-6), as variações do índice de ajuste *fit* médio (figura 5-7) e as variações das porcentagens de modelos obtidos com notas “A” ou “B” (figura 5-8).

Figura 5-6 – Notas dos modelos em função da relação sinal ruído.

Figura 5-7 – Índices de ajustes *fit* médios em função da relação sinal ruído.

Figura 5-8 – Porcentagens dos modelos com nota "A" ou "B" em função da relação sinal ruído.

A análise dos gráficos das figuras 5-6, 5-7 e 5-8 mostra que a relação sinal ruído nas identificações através do método assintótico é de grande relevância e esta variável deve ser considerada para a obtenção de um bom modelo quando este método é aplicado.

Na figura 5-8 é possível constatar que as identificações com relação sinal ruído maiores que 11dB apresentaram modelos com notas A ou B em mais que 95% dos testes.

5.3.7 Análise comparativa entre as notas e os índices de ajuste *fit* obtidos

O método assintótico propõe a utilização de notas para a validação dos modelos obtidos. Este critério de validação é avaliado nesta seção.

O critério de notas é dado através da relação entre o limite do erro do modelo (calculado pela variância do modelo de alta ordem) e o ganho da resposta em frequência (entre as baixas e médias frequências) do modelo estimado. No caso do índice de ajuste *fit*, avalia-se o erro quadrático médio entre a saída do modelo estimado e a saída do processo real, em relação ao erro quadrático médio entre a saída do processo real e seu valor médio.

Nota-se que as duas avaliações são realizadas de maneiras bastante distintas. Enquanto o índice de ajuste *fit* é calculado por meio de uma validação cruzada, o critério de notas é dado com base na comparação entre dois modelos estimados, sendo um de alta ordem e outro de ordem reduzida.

Nesta seção é discutida a comparação dos resultados que ambas apresentaram durante o experimento Monte-Carlo.

A primeira análise compara os resultados médios apresentados na tabela 5-1 com a tabela 5-3, apresentando-os na tabela 5-7 (ordenados da melhor nota para a pior nota).

Tabela 5.7 - Conceitos, notas médias e média dos índices de ajuste *fit* médios dos modelos avaliados

Modelo	Conceito médio	Nota média (%)	<i>fit</i> médio (%)
M_ARMAX_ASYNC_B3	B	35,66	72,82
M_BJ_ASYNC_B3	B	36,73	72,01
M_BJ_ZF_B1	B	39,4	-4,05E+22
M_ARX_HIGH	B	39,6	80,79
M_BJ_ASYNC	B	40,64	61,49
M_ARMAX_ASYNC	B	41,33	71,90
M_ARX_HIGH_B3	B	42,21	79,17
M_BJ_ASYNC_B1	B	42,68	57,09
M_BJ_ASYNC_B2	B	43,34	64,02
M_ARX_HIGH_B2	B	44,26	75,16
M_ARMAX_ASYNC_B2	B	44,44	68,72
M_ARX_HIGH_B1	B	44,65	74,39
M_ARMAX_ASYNC_B1	B	45,6	69,81
M_ARMAX_ZF_B3	B	48,53	76,36
M_BJ_ZF_B3	B	53,36	55,41
M_BJ_ZF_B2	B	59,43	-2342,45
M_ARMAX_ZF_B2	C	60,76	64,73
M_ARMAX_ZF_B1	D	120,42	31,61

A tabela 5-7 mostra não existir uma relação clara entre a nota obtida através do método assintótico e a média dos índices de ajuste *fit* médios.

No experimento Monte-Carlo, para cada um dos dezoito modelos avaliados foram calculados quatro índices de ajuste *fit* médio e uma nota conforme o método assintótico. Em função da grande quantidade de dados, as próximas comparações dos resultados serão feitas entre os modelos M_ARMAX_ASYC e M_ARMAX_BJ considerando o critério de notas e o índice de ajuste *fit* médio para a validação *ii* apresentada 5.3.2.

Na figura 5-9 é apresentada a distribuição de modelos M_ARMAX_ASYC obtidos com notas A, B, C e D para 11 faixas de índices de ajuste *fit* médio para a validação *ii*.

Figura 5-9 – Distribuição da quantidade de modelos M_ARMAX_ASYC obtidos de acordo com cada nota para 10 faixas de índices de ajuste *fit*.

A figura 5-9 apresenta resultado para modelos com nota D que deve ser desconsiderado em função da pequena quantidade de modelos encontrados. Para modelos com notas A, B e C é possível verificar que não existe qualquer relação entre estes conceitos e a faixa de índice de ajuste *fit*, pois os três conceitos apresentaram distribuição semelhante. O que deve ser destacado é que apesar de não existir relação entre a nota e o índice de ajuste *fit* é possível perceber que a maioria dos modelos obtidos apresentaram índices de ajuste *fit* na faixa de 80 à 90% e notas A ou B, evidenciando a capacidade do algoritmo para estrutura ARMAX em obter bons modelos.

Na figura 5-10 é apresentada a distribuição de modelos M_BJ_ASYNC obtidos com notas A, B, C e D para 10 faixas de índices de ajuste *fit* médio para a validação *ii*.

Figura 5-10 – Distribuição da quantidade de modelos M_BJ_ASYNC obtidos de acordo com cada nota para 10 faixas de índices de ajuste *fit*.

A figura 5-10 apresenta resultado para modelos com nota D que deve ser desconsiderado em função da pequena quantidade de modelos encontrados, assim como realizado para os modelos M_ARMAX_ASYNC. Para modelos com notas A, B e C é possível verificar que também não existe qualquer relação entre estes conceitos e a faixa de índice de ajuste *fit*, pois os três conceitos apresentaram distribuição semelhante. O que se pode perceber é que apesar de não existir relação entre a nota e o índice de ajuste *fit* é possível verificar que a maioria dos modelos obtidos apresentaram índices de ajuste *fit* na faixa de 60 à 100% e notas A ou B.

Apesar da comparação entre a nota obtida através do método assintótico não estar relacionada diretamente aos resultados apontados pelas validações utilizando o índice de ajuste *fit*, foi possível constatar que o critério de notas pode ser utilizado para descartar modelos ruins. Esta afirmação pode ser entendida através da tabela 5-8.

Tabela 5.8 - Relação entre os modelos com conceitos D e índices de ajuste *fit* médios

Modelo	Conceito	Nota média (%)	<i>fit</i> médio (%)
M_BJ_ASYNC	D	66545,89	36,31
M_ARMAX_ASYNC	D	109,62	66,90

5.3.8 Análise comparativa entre o modelo M_ARMAX_ASYNC e o modelo M_BJ_ASYNC

Após um grande número de experimentos e a avaliação dos seus dados gerados é possível constatar que o desempenho do modelo M_ARMAX_ASYNC foi superior ao modelo M_BJ_ASYNC.

Esta conclusão deve-se aos seguintes pontos:

O modelo M_ARMAX_ASYNC obteve nota média apresentada na tabela 5-1 muito próxima a nota obtida pelo modelo M_BJ_ASYNC, porém inferior;

O modelo M_ARMAX_ASYNC obteve valores de índices de ajuste *fit* médio superior aos do modelo M_BJ_ASYNC nas quatro validações apresentadas em 5.3.2 com grande diferença;

A avaliação da variância máxima e média do modelo estimado do processo mostrou desempenho muito semelhante entre os modelos M_ARMAX_ASYNC e M_BJ_ASYNC;

A avaliação da capacidade de cada algoritmo em convergir em bons modelos também apresentou resultado semelhante entre os dois modelos, sendo que ambos se destacaram por bom desempenho;

Na avaliação da capacidade do critério de seleção da ordem do modelo de ordem reduzida a aplicação do ASYC se deu com maior sucesso para modelos M_ARMAX_ASYNC. Os modelos M_BJ_ASYNC não apresentaram bons resultados;

Na avaliação dos resultados dos dois algoritmos em função da relação sinal ruído utilizada no processo de identificação os dois modelos apresentaram resultados semelhantes e coerentes.

Com base nestas considerações, verifica-se que o algoritmo do método assintótico para obtenção de modelos de estrutura ARMAX foi mais bem sucedido que o algoritmo de estrutura BJ.

5.3.9 Desempenho dos modelos obtidos através da teoria assintótica em relação aos modelos M_ARMAX_ASYC e M_BJ_ASYC

Os experimentos realizados permitiram verificar que algumas estruturas se destacaram entre aquelas obtidas através da teoria assintótica. As estruturas que mais chamaram a atenção foram as obtidas através da redução da ordem do modelo M_ARX_HIGH através do comando *balred*. Estas estruturas foram apresentadas em 5.1.1.

Para comprovar o destaque, podem-se citar alguns pontos, sendo eles:

Excelente desempenho dos modelos M_ARX_HIGH_B1, M_ARX_HIGH_B2 e M_ARX_HIGH_B3 nas validações cruzadas apresentadas em 5.2.2;

Bons resultados quando avaliada a máxima variância dos modelos estimados do processo;

Bons resultados quando avaliada a capacidade de convergir em bons modelos.

Estas considerações permitem dizer que os modelos M_ARX_HIGH_B1, M_ARX_HIGH_B2 e M_ARX_HIGH_B3 podem ser utilizados em substituição dos modelos M_ARMAX_ASYC ou M_BJ_ASYC sempre que se souber que a ordem real do processo apresenta $n_a=1$ e $n_b=1$, ou $n_a=2$ e $n_b=2$ ou $n_a=3$ e $n_b=3$. Caso a ordem do processo seja desconhecida, o modelo M_ARMAX_ASYC será mais adequado. O uso do modelo M_BJ_ASYC não é aconselhável de acordo com as considerações expostas em 5.3.9.

6 Avaliação do modelo da perturbação obtido através do método assintótico em simulação tipo Monte-Carlo

Neste capítulo, o desempenho do modelo da perturbação obtido através do método assintótico é avaliado. O objetivo desta avaliação é verificar se o modelo da perturbação obtido por meio da implementação do método assintótico traz ganhos e quantificar este ganho através da redução do erro na saída do sistema.

A consistência do algoritmo também é avaliada com base na verificação da variância dos parâmetros do modelo da perturbação.

Em função destes objetivos, somente serão avaliados os modelos M_ARMAX_ASYC e M_BJ_ASYC. Também foram descartadas destas avaliações os modelos que obtiveram notas C ou D e também aqueles que apresentaram índice de ajuste *fit* menor que 50% para uma das validações.

6.1 Dados utilizados na avaliação do modelo da perturbação

Para avaliar o modelo da perturbação uma nova identificação tipo Monte-Carlo foi realizada. Para este caso, novamente, todos os testes realizados utilizaram sistema apresentado na figura 4.1.

Os critérios utilizados no experimento Monte-Carlo do capítulo 5 são também aplicados neste capítulo, exceto por uma diferença. O índice de ajuste *fit* médio foi calculado para seis validações cruzadas de cada modelo: as quatro primeiras são repetições das validações apresentadas em 5.3.2 e as duas restantes são discutidas na sequência.

- i) Validação cruzada da resposta ao degrau sem o modelo de perturbação: Nesta validação, a resposta ao degrau foi avaliada para cada modelo de processo sem utilizar o modelo da perturbação (degrau de amplitude 0,5);
- ii) Validação cruzada da resposta ao degrau com o modelo de perturbação: Nesta validação, a resposta ao degrau foi avaliada para cada modelo de processo com o uso do modelo da perturbação no processo real e no

modelo estimado (degrau de amplitude 0,5 e sinal ruído branco utilizado no modelo da perturbação com média zero e variância de acordo com *SNR* desejado);

- iii) Validação cruzada da resposta ao sinal aleatório sem o modelo de perturbação: Nesta validação, a resposta a um sinal aleatório (ruído branco com média zero e variância $2,5 \times 10^{-3}$) foi avaliada para cada modelo de processo sem o uso do modelo da perturbação;
- iv) Validação cruzada da resposta ao sinal aleatório com o modelo de perturbação: Nesta validação, a resposta a um sinal aleatório (ruído branco com média zero e variância $2,5 \times 10^{-3}$) foi avaliada para cada modelo de processo com o uso do modelo da perturbação no processo real e no modelo estimado (o sinal ruído branco utilizado no modelo da perturbação apresenta média zero e variância de acordo com *SNR* desejado);
- v) Validação cruzada da resposta ao degrau sem o modelo de perturbação: Nesta validação, a resposta ao degrau foi avaliada para cada modelo estimado sem utilizar o modelo da perturbação. No entanto, o processo real foi simulado com perturbação (degrau de amplitude 0,5 e sinal ruído branco utilizado no modelo da perturbação com média zero e variância de acordo com *SNR* desejado);
- vi) Validação cruzada da resposta ao sinal aleatório sem o modelo de perturbação: Nesta validação, a resposta a um sinal aleatório (ruído branco com média zero e variância $2,5 \times 10^{-3}$) foi avaliada para cada modelo estimado sem o uso do modelo da perturbação. No entanto, o processo real foi simulado com perturbação (o sinal ruído branco utilizado no modelo da perturbação apresenta média zero e variância de acordo com *SNR* desejado).

Os dois novos cálculos do índice de ajuste *fit* têm o objetivo de permitir duas comparações. A primeira sendo entre os resultados da validação *ii* (que representa a resposta ao degrau com perturbação) com os resultados da validação *v* (que representa a resposta ao degrau sem o modelo estimado da perturbação, mas com perturbação no sistema real). A segunda compara os resultados da validação *iv* (que

representa a resposta ao sinal aleatório com perturbação) com os resultados da validação v_i (que representa a resposta ao sinal aleatório sem o modelo estimado da perturbação, mas com perturbação no sistema real).

6.2 Resultados obtidos

Os resultados obtidos são apresentados em duas perspectivas: quantificando o ganho que a utilização do modelo da perturbação traz para a saída estimada do sistema quando comparada com a saída estimada sem o modelo de perturbação; utilizando a avaliação da variância dos parâmetros do modelo da perturbação estimado.

6.2.1 Avaliação da melhoria

No caso do modelo M_ARMAX_ASYC a melhoria pode ser verificada através das figuras 6-1 e 6-2, que apresentam o resultado trazido com a utilização do modelo da perturbação para os modelos M_ARMAX_ASYC em função da relação sinal ruído utilizada nos experimentos de validação com resposta ao degrau e ao sinal aleatório respectivamente.

Figura 6-1 – Melhoria obtida com a utilização do modelo da perturbação em função da SNR para o modelo M_ARMAX_ASYNC na validação da resposta ao degrau.

Figura 6-2 – Melhoria obtida com a utilização do modelo da perturbação em função da SNR para o modelo M_ARMAX_ASYNC na validação da resposta ao sinal aleatório.

Analisando as figuras 6-1 e 6-2 pode-se concluir que o ganho trazido pela utilização do modelo da perturbação não é significativo. Porém, ele existe e para o caso da validação ao sinal aleatório pode-se dizer que é consistente. Ou seja, é mantido positivo independente do valor da SNR. Caso seja avaliado o ganho médio, calculado independente da SNR, teremos, para a figura 6-1 0,0002% e no caso da figura 6-2, 0,0210%.

Assim como realizada com o modelo M_ARMAX_ASYNC a mesma avaliação é apresentada para o modelo M_BJ_ASYNC. Neste caso a melhoria pode ser verificada através das figuras 6-3 e 6-4. Elas apresentam o resultado obtido com a utilização do modelo da perturbação para os modelos M_BJ_ASYNC em função da relação sinal ruído utilizada na validação com resposta ao degrau e ao sinal aleatório, respectivamente.

Figura 6-3 – Melhoria obtida com a utilização do modelo da perturbação em função da SNR para o modelo M_BJ_ASYNC na validação da resposta ao degrau.

Figura 6-4 – Melhoria obtida com a utilização do modelo da perturbação em função da SNR para o modelo M_BJ_ASYNC na validação da resposta ao sinal aleatório.

Analisando as figuras 6-3 e 6-4 pode-se concluir que a melhoria trazida pela utilização do modelo da perturbação também não é significativa para o algoritmo M_BJ_ASYNC. Porém, ela existe e para o caso da validação ao sinal aleatório pode-se dizer que é consistente. Ou seja, é mantida positiva independente do valor da SNR. Caso seja avaliado a melhoria média, calculado independente da SNR teremos, para a figura 6-3 0,0004% e no caso da figura 6-4, 0,0249%.

6.2.2 Avaliação da variância dos parâmetros do modelo da perturbação

Nesta subseção, os modelos da perturbação estimados pelos algoritmos M_ARMAX_ASYNC e M_BJ_ASYNC são avaliados de acordo com a variância dos parâmetros dos modelos.

A tabela 6.1 apresenta os resultados da máxima variância dos modelos estimados do processo e da perturbação para o algoritmo M_ARMAX_ASYNC. Adotaram-se ordens 2, 3 e 4 (encontradas com maior frequência).

Tabela 6.1 - Máxima variância dos parâmetros dos modelos M_ARMAX_ASYNC.

Modelo	Ordem <i>n</i>	Variância máxima de $\hat{G}^l(q)$	Variância máxima de $\hat{H}^l(q)$
M_ARMAX_ASYNC	2	0,0029	0,0104
M_ARMAX_ASYNC	3	0,2263	0,2467
M_ARMAX_ASYNC	4	0,4687	0,5164

A tabela 6.2 apresenta os resultados da máxima variância dos modelos estimados do processo e da perturbação para o algoritmo M_BJ_ASYC. Novamente adotam-se ordens 2, 3 e 4 (encontradas com maior frequência).

Tabela 6.2 - Máxima variância dos parâmetros dos modelos M_BJ_ASYC.

Modelo	Ordem <i>n</i>	Variância máxima de $\hat{G}^l(q)$	Variância máxima de $\hat{H}^l(q)$
M_BJ_ASYC	2	0,0022	0,8150
M_BJ_ASYC	3	0,5971	1,3077
M_BJ_ASYC	4	0,8781	1,7465

Analisando as tabelas 6.1 e 6.2, pode-se ver que os modelos M_ARMAX_ASYC apresentaram valor de máxima variância dos parâmetros menor que os modelos M_BJ_ASYC. Também é possível constatar que os valores de máxima variância do modelo estimado do processo para o caso M_ARMAX_ASYC foram muito próximos aos dos modelos estimado da perturbação. No caso dos modelos M_BJ_ASYC, o modelo estimado da perturbação apresentou valor de máxima variância muito superior ao modelo estimado do processo.

Com os dados das tabelas 6-1 e 6-2 pode-se constatar uma maior consistência na obtenção de modelo através do algoritmo M_ARMAX_ASYC.

7 Identificação de um processo real através do método assintótico

Neste capítulo o método assintótico de identificação é aplicado em uma planta real e seu desempenho é avaliado.

A planta utilizada faz parte da unidade de destilação da Refinaria de Capuava, uma refinaria de petróleo da empresa Petrobras S.A.

A Refinaria de Capuava está localizada na cidade de Mauá, região metropolitana da cidade de São Paulo, Brasil. Esta região é um grande polo consumidor de derivados do petróleo, e um dos seus objetivos é atender a demanda local destes derivados.

Os dados utilizados nesta identificação fazem parte de um conjunto de dados histórico da Refinaria de Capuava e foram coletados no ano de 2009 durante um experimento de identificação real.

7.1 Descrição da planta real

A unidade de destilação em questão é responsável por separar o gás liquefeito de petróleo de destilação direta (GLP DD), a nafta de destilação direta (Nafta DD), o diesel extra leve (DEL) e o cru reduzido (fração mais pesada do petróleo utilizado como carga da unidade de destilação atmosférica) do petróleo através de uma torre de pré-vaporização, que promove a expansão rápida da carga de forma a facilitar a separação dos seus componentes.

O GLP DD é enviado para a secção de tratamento e compõe a produção de GLP da refinaria.

A Nafta DD é utilizada na refinaria como carga da unidade de solventes.

O DEL é incorporado à produção de diesel da refinaria e então encaminhado para outras refinarias da Petrobras onde é feito o seu hidrotratamento (reação catalítica com a injeção de hidrogênio) para a redução do teor de enxofre ou é vendido como diesel interior (diesel com concentração de enxofre maior que o diesel

metropolitano), produto que não pode ser comercializado nos grandes centros urbanos (por este motivo tem o nome “interior”).

O cru reduzido é aquecido no forno atmosférico e enviado para a torre de destilação atmosférica, onde é separado nas frações de: Nafta pesada, Diesel, Querosene e RAT (resíduo atmosférico).

A Nafta pesada é incorporada à produção de gasolina da refinaria.

O Diesel e o Querosene compõem a produção de Diesel da refinaria juntamente com o DEL.

O RAT é utilizado como carga da unidade de craqueamento catalítico fluidizado e é craqueado com o intuito de converter moléculas grandes em menores. Assim, obtém-se gás de refinaria, gás liquefeito de petróleo (GLP), nafta craqueada, óleo leve de reciclo e óleo decantado.

Para a correta operação da torre de pré-vaporização é necessário que a pressão da coluna e a temperatura de topo da coluna estejam sob controle e que a vazão de vapor para a coluna esteja adequada à característica da carga (maior ou menor teor de produtos leves, como GLP, Nafta DD e DEL).

O processo que será identificado faz parte do sistema de topo, juntamente com a injeção de vapor no fundo da coluna.

Na figura 7.1 é apresentado parte do fluxograma de engenharia simplificado desta coluna.

Figura 7-1 – Fluxograma de engenharia simplificado do processo

De acordo com a figura 7-1, tem-se:

T-01 corresponde à torre ou coluna de pré-vaporização;

R-01 corresponde ao resfriador de topo da T-01;

V-01 corresponde ao vaso de condensação de topo da T-01;

B-01 corresponde à bomba de refluxo de topo da T-01 e de retirada de Nafta DD para unidade de solventes.

7.1.1 Malhas de controle do sistema

As malhas de controle apresentadas na figura 7-1, são:

Malha 01: A temperatura de saída dos gases do topo da T-01 é medida e transmitida para o sistema de controle pelo elemento TT-01. Esta temperatura é controlada pelo TIC-01 que recebe o *set-point* do MPC da unidade ou do operador e atua através de sua saída ajustando o *set-point* do FIC-01. O FIC -01 é o controlador

de vazão de refluxo de topo da T-01. O refluxo de topo da T-01 é Nafta DD resfriada do V-01 e quanto maior sua vazão, menor será a temperatura de topo da T-01.

Malha 02: Os gases de topo da T-01 são resfriados e condensados pelo R-01 e acumulados no vaso V-01. O hidrocarboneto líquido acumulado no V-01 corresponde a Nafta DD que é utilizada como refluxo de topo da coluna e enviada para unidade de solventes. O nível do V-01 é medido e transmitido para o sistema de controle pelo elemento LT-02. Este nível é controlado pelo LIC-02 que recebe o *set-point* do operador da unidade e atua sua saída ajustando o *set-point* do FIC-02. OFIC-02 é o controlador de vazão de nafta para tanque. Caso o nível do V-01 fique maior que o *set-point* desejado a FV-02 tenderá a abrir em função da atuação do LIC-02 e do FIC-02. Caso o nível fique abaixo do *set-point* a FV-02 tenderá a fechar.

Malha 03: O ponto final de ebulição da Nafta DD pode ser controlado através da injeção de maior ou menor quantidade de vapor no fundo da coluna. A malha 03 é responsável por esta ação. A vazão de vapor é transmitida para o sistema de controle através do elemento FT-03. Esta vazão é controlada pelo FIC-03 que atua na válvula FV-03. O *set-point* do FIC-03 pode ser dado pelo operador ou pelo MPC da unidade.

Após detalhar as malhas de controle é necessário estabelecer a relação existente entre estas malhas.

Em caso de elevação do *set-point* do TIC-01 a coluna T-01 irá trabalhar com temperatura de topo mais elevada, fazendo com que o nível do V-01 também se eleve e, conseqüentemente, a produção de Nafta DD para unidade de solventes também aumentará. O inverso desta relação também é verdadeiro.

Em caso de elevação do *set-point* do FIC-03 a coluna irá trabalhar com maior vazão de vapor, refletindo na elevação do ponto final de ebulição da Nafta DD, aumentando assim a produção Nafta DD para a unidade de solventes. O inverso desta relação também é verdadeiro.

7.1.2 Sistema identificado

O objetivo desta identificação é obter um modelo matemático que forneça o comportamento da vazão de Nafta DD para unidade de solventes em função da vazão de vapor de fundo da coluna.

Nestas condições, e considerando esta uma identificação SISO, tem-se:

Entrada do sistema: FIC-03.SP

Saída do sistema: FIC-02.SP

Considera-se que o modelo identificado será utilizado em um MPC. Desta forma, o MPC atuará no *set-point* do FIC-03 com o intuito de produzir mais ou menos nafta para a unidade de solventes. Esta, por sua vez é medida e controlada através do FIC-02.

Como descrito, foram utilizados os valores de *set-point* ao invés dos valores das variáveis de processo medidas. isto se deve ao desejo de se obter um modelo para uso no MPC que contemple, além do processo, o modelo do controlador FIC-03. No caso do FIC-02, a utilização do *set-point* auxilia na obtenção do modelo, pois faz com que o erro de medição seja desprezado. Entretanto, esta escolha implica em um novo erro no modelo referente a capacidade do controlador FIC-02 em ajustar a vazão de nafta de acordo com seu *set-point*. Este erro pode ser considerado desprezível se o controlador FIC-02 estiver com uma sintonia adequada e a válvula FV-02 estiver bom estado de funcionamento (sem agarramento, por exemplo).

7.2 Descrição do teste de identificação

O primeiro passo para a identificação é o projeto do teste. Para o seu desenvolvimento foi realizada uma reunião com o engenheiro de acompanhamento de otimização da unidade, com o técnico de operação responsável pela unidade e pelo engenheiro de controle responsável pela identificação.

Na reunião inicial são definidos: o tempo de duração do teste, máxima variação que poderá ser utilizada durante a identificação e outras restrições. Para este caso foram observados:

- Tempo de duração do experimento: 5 horas e 45 minutos
- Máxima variação permitida no sinal de excitação: 0,3 t/h no *set-point* da vazão de vapor da T-01;
- Outras restrições: para o caso em questão ficou determinado que, na presença de distúrbios no diferencial de pressão dos recheios da coluna o teste deveria ser imediatamente interrompido em função do risco de produzir nafta fora de especificação.

O tipo de sinal de excitação utilizado é definido pelo engenheiro de controle. Para este caso, utilizou-se um sinal tipo onda quadrada com variação na amplitude e no período do sinal ao longo do tempo.

A coleta dos dados iniciou-se 60 minutos antes do início do teste para registrar o estado estacionário do sistema e foi concluída 40 minutos após o último degrau aplicado ao processo para que a resposta deste estímulo também fosse considerada. Os dados coletados foram divididos em dois grupos:

- Grupo 01: Dados de identificação. Correspondem aos dados coletados nas 4 primeiras horas do experimento, totalizando 240 amostras dos dados de entrada e saída.
- Grupo 02: Dados de validação. Correspondem aos dados coletados nos últimos instantes do teste e apresentam duração de 1 hora e 45 minutos, totalizando 105 amostras dos dados de entrada e saída.

Todas as amostras foram feitas com intervalo de amostragem de 1 minuto.

7.3 Dados de entrada e saída

Na figura 7-2 são apresentados graficamente os dados de entrada e saída do sistema, colhidos durante o processo de identificação.

Figura 7-2 – Dados de entrada e saída do sistema (240 amostras)

Na figura 7-3 é apresentado o espectro de potência do sinal de entrada em função da frequência.

Figura 7-3 – Espectro de potência do sinal de excitação utilizado na identificação

Na figura 7-3, é possível notar que o sinal utilizado apresenta baixa potência para frequências acima de 1 rad/s.

7.4 Obtenção do modelo assintótico

De posse dos dados de entrada e saída, estima-se o modelo por meio do método assintótico. O código empregado para esta tarefa é apresentado no Apêndice A deste documento.

O modelo obtido é com estrutura :

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)} u(t) + \frac{C(q)}{A(q)} e(t) \quad (7-1)$$

em que,

$y(t)$ corresponde ao sinal de saída;

$u(t)$ corresponde ao sinal de entrada;

$e(t)$ corresponde ao sinal tipo ruído branco com média zero e variância R ;

$\frac{B(q)}{A(q)}$ corresponde ao modelo identificado do processo;

$\frac{C(q)}{A(q)}$ corresponde ao modelo identificado da perturbação.

O modelo obtido é:

$$y(t) = \frac{0.1586 q^{-1}}{1 - 0.8464 q^{-1}} u(t) + \frac{1 - 0.8588 q^{-1}}{1 - 0.8464 q^{-1}} e(t) \quad (7-2)$$

Como intuito de complementar a avaliação da identificação através do método assintótico, um modelo BJ também foi identificado aplicando o método ASYM:

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)} u(t) + \frac{C(q)}{D(q)} e(t) \quad (7-3)$$

em que,

$y(t)$ corresponde ao sinal de saída;

$u(t)$ corresponde ao sinal de entrada;

$e(t)$ corresponde ao sinal tipo ruído branco com média zero e variância R ;

$\frac{B(q)}{F(q)}$ corresponde ao modelo identificado do processo;

$\frac{C(q)}{D(q)}$ corresponde ao modelo identificado da perturbação;

O modelo obtido é:

$$y(t) = \frac{0.1588 q^{-1}}{1 - 0.8461 q^{-1}} u(t) + \frac{1 - 0.7931 q^{-1}}{1 - 0.7771 q^{-1}} e(t) \quad (7-4)$$

7.5 Validação dos modelos assintóticos obtidos

A validação dos modelos foi realizada através da aplicação do conceito de notas proposto por Zhu em (Zhu, 1998) e através da avaliação do índice de ajuste *fit* para a autovalidação e validação cruzada.

7.5.1 Dados de entrada e saída utilizados na validação dos modelos

A figura 7-2 apresentou os dados de entrada e saída do sistema que foram utilizados no processo de identificação. Estes mesmos dados também foram utilizados no processo de autovalidação.

Para o caso da validação cruzada, os dados de entrada e saída utilizados são apresentados na figura 7-4.

Figura 7-4 – Dados de entrada e saída do sistema (105 amostras)

7.5.2 Resultados obtidos na validação dos modelos

O conceito de notas proposto pelo método ASYM resulta na classificação:

Tabela 7.1 - Classificação dos modelos avaliados de acordo com sua nota

Classificação	Modelo	Conceito	Valor da nota (%)
1	BJ	A	8,59
2	ARMAX	A	8,58

Observa-se que os dois modelos apresentaram excelentes resultados.

Após aplicar o sinal de entrada apresentado na figura 7-2 e calcular o índice de ajuste *fit*, os modelos foram classificados de acordo com os resultados obtidos na autovalidação:

Tabela 7.2 - Classificação dos modelos avaliados de acordo com o índice de ajuste *fit*

Classificação	Modelo	<i>fit</i> (%)
1	ARMAX	79,048
2	BJ	79,042

Observa-se que os dois modelos apresentaram bons resultados.

A figura 7-5 apresenta a resposta dos modelos ao sinal de excitação apresentado na figura 7-2.

Figura 7-5 – Resposta dos modelos e do processo real na autovalidação.

Após aplicar o sinal de entrada apresentado na figura 7-4 e calcular o índice de ajuste *fit*, os modelos foram classificados de acordo com os resultados obtidos na validação cruzada:

Tabela 7.3 - Classificação dos modelos avaliados de acordo com o índice de ajuste *fit*

Classificação	Modelo	fit (%)
1	BJ	75,412
2	ARMAX	75,406

Observa-se que os dois modelos apresentaram bons resultados.

A figura 7-6 apresenta a resposta dos modelos ao sinal de excitação visto na figura 7-4.

Figura 7-6 – Resposta dos modelos estimados e do processo real na validação cruzada.

Os resultados obtidos através do critério de notas, da autovalidação e da validação cruzada evidenciam a capacidade em se estimar um bom modelo de processo e de perturbação através do método assintótico. Também comprovam na prática os resultados apresentados no capítulo 5 e 6 em que dados de plantas simuladas foram utilizadas para o estudo do método.

Na identificação proposta neste capítulo os modelos BJ e ARMAX são praticamente idênticos.

8 Conclusões e sugestões de trabalhos futuros

8.1 Conclusões

Este trabalho permitiu detalhar e apresentar o método de identificação assintótico, também conhecido pela sigla ASYM, utilizado na identificação de sistemas em malha aberta e malha fechada (estimando o modelo do processo e da perturbação).

Os modelos obtidos através deste método foram comparados com modelos obtidos através da minimização do erro da equação, impondo para estes modelos a ordem real do modelo do processo. Desta avaliação, foi possível concluir que o método assintótico apresenta bons resultados mesmo quando comparado a identificações em que se utilizou a ordem real do processo. Esta avaliação forneceu o subsídio necessário para dar sequência a este trabalho.

Além da comparação com estruturas obtidas a partir da minimização do erro da equação, o método assintótico implementado foi comparado com modelos estimados através do *software* TaiJi-Id versão 3.4 (que também aplica o método assintótico para a obtenção de modelos). Desta avaliação, foi possível verificar que o modelo obtido através do *software* TaiJi-Id apresentou desempenho similar ao modelo implementado neste trabalho.

A estrutura que se deve buscar quando o método assintótico é implementado também foi avaliada. Para esta análise considerou-se as estruturas ARMAX e BJ. Esta escolha deve-se aos comentários apresentados por (Zhu,1998) e (Zhu, 2001), que mencionam a utilização destas duas estruturas. Como resultado desta análise, foi possível constatar que os modelos de estrutura ARMAX apresentaram resultados mais consistentes que os modelos de estrutura BJ, de forma que a utilização da estrutura ARMAX seja a mais aconselhada.

Os modelos de estrutura ARMAX e BJ obtidos através do método assintótico foram comparados com modelos de diversas estruturas (16 modelos) obtidos a partir do princípio da teoria assintótica. Esta comparação teve como principal objetivo avaliar a possibilidade de descartar a seleção do modelo de ordem reduzida através

do critério assintótico (ASYC) e utilizar ordens fixas para os modelos de ordens reduzidas. Desta análise, foi possível verificar que, em caso do conhecimento prévio da ordem aproximada do modelo de processo real, os modelos apresentados em 5.1.1 (modelos de estruturas ARX) podem ser utilizados com excelentes desempenhos. Caso a ordem do modelo real de processo seja desconhecida é, sugerido a utilização do critério assintótico para a escolha do melhor modelo de ordem reduzida da estrutura ARMAX, utilizando assim o método assintótico.

O método assintótico foi avaliado com relação à sua capacidade em se obter bons modelos estimados. Desta avaliação foi possível constatar que modelos tanto de estrutura ARMAX quanto BJ apresentaram grande capacidade em convergir em bons modelos. No caso dos modelos de estrutura ARMAX, além de convergir em bons modelos, esta estrutura apresentou forte tendência em se obter um modelo estimado de processo de mesma ordem do modelo real de processo.

Neste trabalho foi dada uma atenção especial ao modelo de perturbação estimado pelo método assintótico implementado. Esta atenção deve-se ao fato das referências bibliográficas utilizadas não apresentarem de forma detalhada como o modelo de perturbação deve ser obtido através deste método. Nestas condições, este trabalho detalhou como o modelo de perturbação foi obtido e avaliou este modelo. Da avaliação realizada foi possível constatar que o ganho apresentado na utilização do modelo de perturbação é muito pequeno. No entanto, o ganho existe e tem forte tendência de ser positivo. A variância dos parâmetros do modelo de perturbação foi analisada de forma que foi possível perceber que a variância dos parâmetros aumenta conforme a ordem do modelo obtido também aumenta. Os modelos de baixa ordens (2 e 3) apresentaram uma variância pequena. No entanto modelos de ordens maiores apresentaram variância nos parâmetros elevadas.

O método assintótico também foi aplicado em uma planta industrial. Nesta avaliação, foi possível evidenciar de forma bastante clara a capacidade do método em obter um bom modelo.

Após discorrer sobre diversos pontos é possível concluir que o método de identificação assintótico é uma boa ferramenta para obtenção de modelos de sistemas ditos “caixa-preta”, em que se desconhece de antemão a ordem real do sistema.

8.2 Sugestões de trabalhos futuros

Neste trabalho o método assintótico foi implementado para sistemas SISO. Como sugestão de trabalho futuro entendo ser de grande interesse aproveitar a capacidade iterativa de implementação do método assintótico e aplicá-lo em sistemas MIMO de forma que a identificação seja feita automaticamente de tempos em tempos e que o modelo novo seja comparado com o modelo anterior e permita a sua substituição em tempo real.

Referências Bibliográficas

- ALVES, V. A. O.; GARCIA, C. . Extensions and innovations in two-step closed-loop system identification. In: 9th Portuguese Conference on Automatic Control CONTROLO-2010, 2010, Coimbra - Portugal. Anais do 9th Portuguese Conference on Automatic Control CONTROLO-2010, 2010.
- ÅSTRÖM, K.; EYKHOFF, P. . System identification - a survey. Automatica , Vol. 7, pp. 123-162, 1971.
- EYKHOFF, P. . System Identification: Parameter and State Estimation. New York: John Wiley & Sons, 1974.
- GARCIA, C. . Identificação de Sistemas. Escola Politécnica da USP - Dept. de Engenharia de Telecomunicações e Controle - Laboratório de Automação e Controle. São Paulo, Brasil, 2008.
- GUSTAVSSON, I. . Comparison of different methods for identification of industrial processes. Automatica ,Vol. 8, pp. 127-142, 1972.
- GUSTAVSSON, I. . Survey of applications of identification in chemical and physical process. Automatica , Vol. 11 (1), pp. 3-24, 1975.
- KLINE, S.; STREET, R.; PATWARDHAN, R. S.; BAE, A. . Closed loop identification for multivariable model predictive controller on a catalytic gasoline splitter. Matrikon Inc., 2006.
- LJUNG, L. . Asymptotic Variance Expressions for Identified Black-Box Transfer Function Models. IEEE Transactions on Automatic Control, VOL AC-30 Nº 9 , pp. 834-845, 1985.
- LJUNG, L. . System identification: Theory for the user. New Jersey: Prentice Hall PTR, 1999.
- LJUNG, L.; YUAN, Z. . Asymptotic Properties of Black-Box Identification of Transfer Functions. IEEE Transactions on Automatic Control, VOL AC-30, Nº 6 , pp. 514-530, 1985.
- MIRANDA, F.C.P.R.M. . Identificação de sistemas em malha fechada usando controlador preditivo multivariável: um caso industrial. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2005.
- OLIVEIRA, M. R.; Re: Dados da carga da refinaria. [mensagem pessoal]. Mensagem recebida por : <rodolfo_misoczki@yahoo.com.br> em 25 de nov.2011.

- SEBORG, D.; EDGAR, T.F.; MELLICHAMP, D. A. . Process Dynamics and Control. Singapore: John Wiley & Sons, 1989.
- SOUZA, M. G. A.; Re: Utilização de fotos da RECAP/IE em dissertação de mestrado. [mensagem pessoal]. Mensagem recebida por : <rodolfo_misoczki@yahoo.com.br> em 29 de nov.2011.
- WAHLBERG, B. . Model Reduction of high-order estimated models: the asymptotic ML approach. Int. J. Control , 49 (1), pp. 169-192, 1989.
- ZHU, Y. C. . BLACK-BOX Identification of MIMO transfer functions: Asymptotic properties of prediction error models. The Netherlands: Eindhoven University of Technology, 1987.
- ZHU, Y. C. . Identification and Control of MIMO Industrial Processes: An integration Approach. Dr. Dissertation . The Netherlands: Dept. EE, Eindhoven University of Technology, 1990.
- ZHU, Y. C.; BACKX, A. . MIMO Process Identification for controller design: tests signals, nominal model and error bounds. Preprints of the 9th IFAC/IFORS Symposium on identification and System Parameter Estimation , pp. 1202-1207, 1991.
- ZHU, Y. C.; BACKX, A.; EYKHOFF, P. . Multivariable process identification based on frequency domain measures. Proceedings of 30th IEEE Conference on Decision and Control , pp. 303-308, 1991.
- ZHU, Y.; BACKX, T. . Identification of multivariable industrial process for simulation, diagnosis and control. London: Springer-Verlag, 1993.
- ZHU, Y. . Multivariable process identification for MPC: the asymptotic method and its applications. J. Proc. Cont. Vol 8, Nº 2 , 8 (2), pp. 101-115, 1998.
- ZHU, Y. . Multivariable System Identification for Process Control. Eindhoven: Elsevier Science & Technology Books, 2001.

Anexo A: Análise do espectro

Para facilitar o entendimento da teoria assintótica e do método ASYM, a seguir serão apresentados alguns conceitos básicos sobre análise de espectro de sinais.

Seja $w(t)$ um processo estocástico estacionário que é aplicado a um filtro estável $G(q)$. Como saída, tem-se um segundo sinal estocástico estacionário $y(t)$ (Eykhoﬀ, 1974).

Figura A-1 – Diagrama em blocos

A auto-correlação do sinal de entrada $w(t)$ pode ser definida por:

$$R_w(\tau) = Ew(t)w(t-\tau) \quad (\text{A-1})$$

em que E corresponde à expectância.

O espectro de potência de $w(t)$ é dado por:

$$\Phi_w(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_w(\tau) e^{-i\tau\omega} \quad (\text{A-2})$$

A função de correlação cruzada entre $w(t)$ e um segundo sinal estocástico estacionário $x(t)$ é dada por:

$$R_{wx}(\tau) = Ew(t)x(t-\tau) \quad (\text{A-3})$$

De acordo com a figura A-1, também se pode dizer que:

$$\Phi_y(\omega) = |G(e^{i\omega})|^2 \Phi_w(\omega) \quad (\text{A-4})$$

$$\Phi_{yw}(\omega) = G(e^{i\omega}) \Phi_w(\omega) \quad (\text{A-5})$$

Para um conjunto de dados $w(t) = \{w(1), \dots, w(N)\}$ finito, a expectância da eq. (A-1) pode ser substituída por:

$$\hat{R}_w(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N w(t) w(t-\tau) \quad (\text{A-6})$$

Da mesma forma o espectro de potência pode ser calculado por:

$$\hat{\Phi}_w(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \hat{R}_w(\tau) e^{-i\tau\omega} \quad (\text{A-7})$$

Suponha agora um sinal $z(t)$ gerado por um sinal $e(t)$ (ruído branco com média zero e variância R) após passar por um filtro estável $H(q)$.

$$z(t) = H(q)e(t) \quad (\text{A-8})$$

Pode-se dizer que:

$$\Phi_z(\omega) = |H(e^{i\omega})|^2 R \quad (\text{A-9})$$

Anexo B: Modificando a ponderação da frequência através da pré-filtragem

Em função da não-linearidade de alguns sistemas, este anexo se propõe a apresentar uma maneira de solucionar problemas de minimização de funções não-lineares através da pré-filtragem de sinal para a obtenção de uma ponderação de frequência desejada.

Para exemplificar este estudo, considere a função custo dos mínimos quadrados no domínio da frequência:

$$V_{LS} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| G^0(e^{i\omega}) - \frac{B(e^{i\omega})}{A(e^{i\omega})} \right|^2 |A(e^{i\omega})|^2 \Phi_u(\omega) d\omega + \int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{i\omega})|^2 \Phi_v(\omega) d\omega \quad (\text{B-1})$$

Percebe-se que na eq. (B-1) o erro é ponderado por $|A(e^{i\omega})|^2 \Phi_u(\omega)$.

Suponha que o objetivo seja de eliminar o efeito de $|A(e^{i\omega})|^2$ no método dos mínimos quadrados. Então, uma das formas de se obter esta condição é pré-filtrando os dados de entrada e saída:

$$u_f(t) = L(q)u(t) \quad (\text{B-2})$$

$$y_f(t) = L(q)y(t) \quad (\text{B-3})$$

De posse das eqs. (B-2) e (B-3) e aplicando-as na equação dos mínimos quadrados, tem-se:

$$V_{LS} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| G^0(e^{i\omega}) - \frac{B(e^{i\omega})}{A(e^{i\omega})} \right|^2 |L(e^{i\omega})|^2 |A(e^{i\omega})|^2 \Phi_u(\omega) d\omega + \int_{-\pi}^{\pi} |L(e^{i\omega})|^2 |A(e^{i\omega})|^2 \Phi_v(\omega) d\omega \quad (\text{B-4})$$

Para obter o cancelamento de $|A(e^{i\omega})|^2$ basta que:

$$|L(e^{i\omega})|^2 = \frac{1}{|A(e^{i\omega})|^2} \quad (\text{B-5})$$

Sabe-se que $|A(e^{i\omega})|^2$ é desconhecido. Porém, isto pode ser resolvido através de um procedimento iterativo, desde que o processo seja estável.

Se o processo iterativo convergir, tem-se como função que minimiza o erro dos mínimos quadrados a seguinte equação:

$$V_{LS} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| G^0(e^{i\omega}) - \frac{B(e^{i\omega})}{A(e^{i\omega})} \right|^2 \Phi_u(\omega) d\omega + \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_v(\omega) d\omega \quad (\text{B-6})$$

Apêndice A: Código fonte da rotina de identificação através do método assintótico para a estrutura ARMAX.

Função Asym_SISO:

```
% Função para identificação de sistemas SISO via Método Assintótico (Zhu)
% ** Autores:
% Claudio Garcia, Rodolfo Misoczki, Rodrigo Juliani e Vitor Alex Oliveira
Alves.
% ** Parâmetros de entrada
% y - vetor que armazena o sinal de saída do sistema sob estudo
% u - vetor que armazena o sinal de entrada do sistema sob estudo
% T - período de amostragem adotado na coleta de dados
% MA_MF - Operação da malha:
%         'MA' para malha aberta em relação ao MPC e fechada em relação a
%         malha de controle regulatória
%         'MF' para malha fechada com MPC
% delay - estimativa do tempo morto associado ao processo

% ** Parâmetro de saída
% Modelo_ASYM - Modelo do tipo idmodel associado ao processo sob estudo
% Nota - valor que representa o erro no domínio da frequência do modelo de
% ordem reduzida em relação ao modelo de alta ordem.
% Conceito - Grade de notas para a classificação do modelo de ordem
% reduzida. Esta grade varia de A à D.

function [Modelo_ASYM, Nota, Conceito] = Asym_SISO(y,u,T,delay,Tsim)

%% Identificação do modelo ARX de alta ordem
% Define-se alta ordem modelo de ordem 40;
alta_ordem = 40;
Z = iddata(y,u,T);
ARX_high = arx(Z,[alta_ordem alta_ordem delay]);
[Ahigh,Bhigh] = polydata(ARX_high);
yARX_high = filter(Bhigh,Ahigh,u);

ARX_HIGH = ARX_high;
% Geração do sinal de perturbação presente no experimento
vhigh = y - yARX_high;
% Ruído "branco" gerador das perturbações - resíduo do erro de equação
ehigh = filter(Ahigh,1,vhigh);

%% Método Assintótico - Redução da ordem do modelo
% Estimação dos parâmetros dos modelos de processo, ordem reduzida (1-10)
% Filtragem dos sinais de entrada e saída utilizando o modelo ARX
uf_G = filter(Ahigh,1,u);
yf_G = filter(Bhigh,1,u); % Este comando equivale a filter(Bhigh,Ahigh,uf)
% Geração do vetor de dados filtrados a ser utilizado na redução de ordem
% do modelo do processo;
Zf_G = iddata(yf_G,uf_G,T);

% Geração do vetor de dados filtrados a ser utilizado na redução de ordem
% do modelo do processo;
Desvio_Padrazo_Pert_H = std(ehigh);
```

```

semente_pert_H = 1982; % Nos testes Monte-Carlo, esta linha foi substituída
% por semente_pert_H = 1982*montecarlo, onde a variável montecarlo varia de
% 1 a 500;

stream=RandStream('mt19937ar','RandnAlg','Ziggurat','Seed',
semente_pert_H);
perturbacao = 0 + Desvio_Padiao_Pert_H.*randn(stream,361,1);
uf_H = filter(Ahigh,1,perturbacao);
yf_H = filter(1,Ahigh,uf_H);
yf_completo = yf_G + yf_H;

% Conjunto de dados com a entrada filtrada de G e saída sendo a soma da
% saída do processo com saída da perturbação quando excitada por sinal
% ruído branco com média zero e variância idêntica a ehhigh.

Zf_completo = iddata(yf_completo,uf_G,T);

% Modelos ARMAX para o processo
Mod_ASYM_ARMAX = cell(10,1);
ASYC_ARMAX =cell(10,2);

% Modelos ARMAX para o processo de ordem 1 à 10.
for i = 1:10
    Mod_ASYM_ARMAX{i} = armax(Zf_completo,[i i i delay]);
end

%% Geração dos espectros de potência para o processo de seleção de ordem
% Cálculo do espectro de potência do sinal de excitação u(t)
% Vetor de frequências
N0 = 500; w = logspace(-4,pi,N0); janela = 999;
N = length(y);

% Cálculo do vetor espectro de potência do sinal de entrada u(t)
phi_u = pwelch(u,[],[],w);

% Cálculo do espectro de potência da perturbação vhigh(t)
phi_vhigh = pwelch(vhigh,[],[],w);

%% Determinação da variância do erro do modelo de alta ordem para o caso
% Malha Aberta. O caso Malha Fechada não foi abordado na prática.

var_high = alta_ordem/N*(phi_vhigh./phi_u);

%% Cálculo do critério ASYC e seleção da ordem do modelo do processo
% Resposta em frequência do modelo ARX de alta ordem
Freq_ARX_high = Resp_Freq(w,ARX_high)';
% Resposta em frequência dos modelos ARMAX de baixa ordem (1-10)
Freq_Mod_ASYM_ARMAX = cell(10,1);
Dif_freq_G_ARMAX = cell(10,1);
ASYC_ARMAX = zeros(10,1);

% Cálculo do critério ASYC
for i=1:10

```

```

Freq_Mod_ASYM_ARMAX{i} = Resp_Freq(w,Mod_ASYM_ARMAX{i}');

% Diferença entre as respostas em frequência: alta ordem vs. baixa
ordem
Dif_freq_G_ARMAX{i} = abs(Freq_ARX_high - Freq_Mod_ASYM_ARMAX{i});
%ASYC_ARMAX(i) = sum(abs(Dif_freq_G_ARMAX{i}).^2 - var_high'));
ASYC_ARMAX_welch(i) = sum(abs(Dif_freq_G_ARMAX{i}).^2 -
var_high_welch'));
%ASYC_ARMAX_spa(i) = sum(abs(Dif_freq_G_ARMAX{i}).^2 - var_high_spa));

end

% Seleção da ordem do modelo do processo
% ASYC normalizado. A normalização do índice ASYC não é necessária de
% acordo com Zhu (1998), porém facilita a localização do menor índice.

ASYC_norm_ARMAX_welch = 100*(ASYC_ARMAX_welch-
min(ASYC_ARMAX_welch))/(max(ASYC_ARMAX_welch)-min(ASYC_ARMAX_welch));

% Estimativa da ordem usando definição para ASYC.
% A seleção de ordem através do critério ASYC de acordo com (Zhu, 1998)
% pede para que seja escolhido o modelo com menor valor do índice. No
% entanto, foi implementado uma seleção que leve em consideração a queda do
% índice quando a ordem é elevada. Portanto, além de levar em consideração
% o índice ASYC, a seleção foi implementada da seguinte maneira.
% 1-) Ordena-se os modelos de acordo com o valor do índice ASYC de maneira
% decrescente. Normalmente isto reflete que os modelos são ordenados do de
% menor ordem para o de maior;
% 2-) Compara-se o valor do primeiro com o segundo, caso a diferença seja
% menor que 5% o primeiro modelo é selecionado, caso contrário segue-se ao
% próximo passo.
% 3-) Compara-se o valor do segundo com o terceiro, caso a diferença seja
% menor que 5% o segundo modelo é selecionado, caso contrário repete-se
% este passo até ser verificado o modelo com o menor índice (normalmente o
% de maior ordem).
% Desta maneira é feita uma ponderação entre o índice ASYC e o ganho obtido
% com a elevação da ordem.

[ASYC_norm_ARMAX_sort indices_ARMAX] =
sort(ASYC_norm_ARMAX_welch,2,'ascend');
nao_parei = true(1); % Flag de decisão para controle do laço while
delta = 0; % Inicialização da faixa de tolerância para seleção de
% ordem (parcimônia)
cont = 1; % Contador de controle de execução do laço while
cand = 1; % Registra o número de modelos candidatos
lim = 5; % Valor limite para faixa de tolerância
max_ordem = 10;
while (cont < max_ordem) && (nao_parei)
    delta = ASYC_norm_ARMAX_sort(cont+1) - ASYC_norm_ARMAX_sort(1);
    if delta <= lim
        cand = cand + 1;
    else nao_parei = false(1);
    end
    cont = cont + 1;
end
order_ARMAX_welch = min(indices_ARMAX(1:cand));

```

```

ASYM_SISO_ARMAX = Mod_ASYM_ARMAX{order_ARMAX_welch}

%% Ajuste de Ganho DC. Este passo não é explícito por (Zhu, 1998), no
% entanto, traz benefício para o modelo encontrado e foi implementado. Este
% passo melhorou o desempenho dos modelos avaliados quando realizada a
% validação cruzada com sinal de excitação tipo degrau.

% Calcula-se o ganho DC do modelo de alta ordem;
GAIN_ARX_HO = dcgain(tf(ARX_HIGH));

% Calcula-se o ganho DC do modelo de ordem reduzida;
GAIN_ASYM_SISO_ARMAX = dcgain(tf(ASYM_SISO_ARMAX));

% O ganho DC do modelo de ordem reduzida é ajustado para que fique igual ao
% do modelo de alta ordem.
G_relacao_ganho = GAIN_ARX_HO/GAIN_ASYM_SISO_ARMAX;
ASYM_SISO_ARMAX.B = ASYM_SISO_ARMAX.B*G_relacao_ganho;

% Calcula-se neste passo a nota do modelo de acordo com as grades
estabelecidas por (Zhu,1998).

Freq_Modelo = Resp_Freq(w,Modelo)';
% Erro (em frequência) entre o modelo ARX de alta ordem e o modelo
identificado
Dif_freq = abs(Freq_ARX_high - Freq_Modelo);
% Limite superior de erro em frequência
upper_error = 3*sqrt(var_high);
% Graduação do modelo identificado
queda = 20*log10(abs(Freq_Modelo(1)))-3;
i = 1;
while (20*log10(abs(Freq_Modelo(i))) >= queda)&&(i<length(Freq_Modelo))
    i = i+1;
end

% Atribuição da nota ao modelo
Nota = 100*max(real(upper_error(1:i)./abs(Freq_Modelo(1:i)'')));

if Nota <= 30
    Conceito = 'A';
elseif (30 < Nota)&&(Nota <= 60)
    Conceito = 'B';
elseif (60 < Nota)&&(Nota <= 90)
    Conceito = 'C';
elseif 90 < Nota
    Conceito = 'D';
end

% **FIM**

```