ALLAN LEÃO DANTAS

**OTIMIZAÇÃO MULTIPERÍODO POR
MÉDIA-VARIÂNCIA SEM POSIÇÕES A
DESCOBERTO EM ATIVOS DE RISCO**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica

São Paulo

2006

ALLAN LEÃO DANTAS

**OTIMIZAÇÃO MULTIPERÍODO POR
MÉDIA-VARIÂNCIA SEM POSIÇÕES A
DESCOBERTO EM ATIVOS DE RISCO**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica

Área de Concentração:
Engenharia de Sistemas

Orientador:
Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa

São Paulo

2006

*Este trabalho é dedicado aos meus pais,
Arlindo Alves Dantas e Elenícia Leão
Dantas, por todo amor e incentivo em-
pregados em minha criação.*

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa, pela disponibilidade, apoio, e contribuição para meu crescimento científico e intelectual.

À Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, pela oportunidade de realização do curso de mestrado.

Aos amigos Henrique Cezar Ferreira e Joailton Lima, pelas frutíferas discussões durante o curso de mestrado.

À minha noiva e mestranda, Andreza de Campos Vieira, pelo seu apoio e compreensão durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

E a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para meu desenvolvimento acadêmico e pessoal, meus sinceros agradecimentos.

Resumo

Inicialmente neste trabalho são apresentados os conceitos básicos de média e variância e como estes se aplicam na caracterização de um ativo ou carteira de investimento. Posteriormente são apresentadas as estratégias ótimas de investimento para o modelo de Markowitz sem posições a descoberto em ativos de risco, e sem tal restrição. Ainda neste trabalho é apresentada uma breve revisão do modelo de tempo contínuo para o problema de média-variância sem posições a descoberto em ativos de risco, e como objetivo principal do mesmo é proposto um modelo em tempo discreto multiperíodo a partir do modelo de tempo contínuo, o qual é implementado computacionalmente para o mercado de capitais brasileiro. O resultado obtido é comparado com a estratégia de período único do modelo de Markowitz sem posições a descoberto em ativos de risco, sendo este modelo aplicado sequencialmente no horizonte de tempo considerado para o modelo multiperíodo.

Abstract

Initially in this work are presented the basics concepts of mean and variance and how they are applied to quantify an asset or a portfolio. After this we present the optimal investment strategy of the Markowitz no-shorting constraints mean-variance portfolio selection in single period and the Markowitz optimal investment strategy without such constrain. Following this, we present a short review of the continuous-time dynamic model for the mean-variance portfolio selection with no-shorting constraints in risky assets problem. As the main objective of this work we propose a discrete time multiperiod model based on the continuous-time portfolio selection with no-shorting constraints in risky assets, that is applied to the Brazilian financial market. This result is compared with the investment strategy of the Markowitz no-shorting constraints mean-variance portfolio selection in single period applied sequentially in the multiperiod case.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivo	1
1.2	Justificativa	2
1.3	Estrutura da dissertação	4
2	Introdução à Média-Variância	5
2.1	Média e Variância de um Ativo	5
2.2	Média e Variância de uma Carteira	10
2.3	Curvas de Indiferença	11
2.4	Fronteira Eficiente	13
3	Modelos de Média-Variância Uniperíodo	17
3.1	Modelo de Markowitz	17
3.2	Modelo de Markowitz sem Posições a Descoberto em Ativos de Risco	19
3.3	Contribuições	21
3.3.1	Modelo Uniperíodo por Semi-Variância	21
3.3.2	Rastreamento de <i>Benchmark</i>	22
3.3.3	Funções Lineares de Predição	23
3.3.4	Múltiplos Períodos de Funções Utilidade Genéricas	24

3.3.5	Múltiplos Períodos por Média-Variância	26
3.3.6	Múltiplos Períodos por Média-Variância sem Posições a Des- coberto em Ativos de Risco	26
3.3.7	Múltiplos Períodos por Média-Variância com Restrições In- termediárias	27
3.3.8	Múltiplos Períodos com Custos Transacionais	28
4	Modelos de Média-Variância de Períodos Múltiplos	30
4.1	Modelo de Média-Variância de Tempo Contínuo sem Posições a Descoberto em Ativos de Risco	30
4.1.1	Definições	30
4.1.2	Critério de Alocação	32
4.1.3	Solução Analítica	33
4.2	Modelo Multiperíodo de Média-Variância sem Posições a Desco- berto em Ativos de Risco	34
4.2.1	Definições	34
4.2.2	Determinação de μ	37
4.2.3	Determinação de $G(k)$	40
4.2.4	Lei de Controle	41
5	Ensaio dos Modelos de Média-Variância	43
5.1	Validação do Modelo	43
5.1.1	ψ Estimado	44
5.1.2	ψ Aproximado	45
5.1.3	Cenário de Validação do Modelo	45
5.1.4	Simulações de Validação do Modelo	46

5.2	Fonte de Dados	48
5.3	Metodologia	48
5.4	Resultado e Análise dos Dados	51
6	Conclusões e Perspectivas	62
6.1	Conclusões	62
6.2	Perspectivas	63

Lista de Figuras

2.1	Curvas de Indiferença	12
2.2	Fronteira Eficiente	14
2.3	Identificação da melhor estratégia de alocação para um investidor considerando sua curva de indiferença e a fronteira eficiente do mercado	15
2.4	Fronteira Eficiente de um mercado com ativo livre de risco	15
5.1	Taxa anual de retorno do CDI no período simulado	49
5.2	Evolução do Índice Bovespa no período estudado	50
5.3	Evolução da riqueza ao longo do tempo com as estratégias de investimento sem posições a descoberto em ativos de risco e ψ aproximado para o cenário IBrX	52
5.4	Rentabilidade das estratégias de investimento sem posições a descoberto em ativos de risco e ψ aproximado para o cenário IBrX	52
5.5	Erro entre retorno esperado e riqueza do investidor para o modelo multiperíodo de horizonte de tempo de 4 semanas e ψ aproximado para o cenário IBrX	53
5.6	Estratégia de alocação para o modelo multiperíodo de horizonte de tempo de 4 semanas e ψ aproximado para o cenário IBrX	55

5.7	Retorno esperado e retorno realizado para o modelo multiperíodo de horizonte de tempo de 4 semanas e ψ aproximado para o cenário IBrX	55
5.8	Evolução da riqueza ao longo do tempo para as estratégias de investimento sem posições a descoberto em ativos de risco e ψ aproximado no cenário IEE	57
5.9	Erro entre retorno esperado e riqueza do investidor para o modelo multiperíodo de horizonte de tempo de 4 semanas e ψ aproximado para o cenário IEE	57
5.10	Estratégia de alocação para o modelo multiperíodo de horizonte de tempo de 4 semanas e ψ aproximado para o cenário IEE	58
5.11	Evolução da riqueza ao longo do tempo com as estratégias de investimento sem posições a descoberto em ativos de risco e ψ aproximado para o cenário IBOV	59
5.12	Erro entre retorno esperado e riqueza do investidor para o modelo multiperíodo de horizonte de tempo de 4 semanas e ψ aproximado para o cenário IBOV	60
5.13	Estratégia de alocação para o modelo multiperíodo de horizonte de tempo de 4 semanas e ψ aproximado para o cenário IBOV	60
5.14	Retorno esperado e retorno realizado para o modelo multiperíodo de horizonte de tempo de 4 semanas e ψ aproximado para o cenário IBOV	61

Lista de Tabelas

2.1	Retorno esperado do ativo PETR4 para diversos cenários	6
2.2	Histórico de retorno do ativo PETR4	7
2.3	Histórico de retorno do ativo com probabilidade crescente de ocorrência	8

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objetivo

A seleção criteriosa de oportunidades de investimento entre os inúmeros ativos disponíveis no mercado financeiro é o principal papel do administrador de fundos de investimento. A distribuição de investimentos realizada pelo administrador a partir desta seleção é o que caracteriza a composição de uma carteira de investimento. Devido ao grande número de ativos existentes e à sua característica aleatória de retorno, a introdução de métodos quantitativos e científicos para o gerenciamento do risco e retorno de uma carteira de investimento pode auxiliar o administrador em sua tomada de decisão.

A análise de média-variância permite a distribuição automática de ativos em uma carteira a partir do perfil de investimento especificado para a mesma. Esta teoria busca determinar a distribuição de ativos para obter o máximo retorno esperado dado um nível de risco pré-determinado pelo administrador, ou minimizar o risco quando estabelecido o retorno esperado desejado.

Neste trabalho, o objetivo é estudar a diferença de performance entre os modelos de média-variância uniperíodo e de períodos múltiplos sem a possibilidade de posições a descoberto nos ativos de risco em ambos os modelos. Esta proibição impede que um ativo de risco seja vendido sem que o investidor o possua, porém

não restringe o empréstimo financeiro à taxa de retorno do ativo livre de risco.

Um investidor posiciona-se no mercado de maneira descoberta quando o mesmo vende um ativo que não possui. Para tanto este investidor tem de emprestar o ativo objeto de sua posição a descoberto e vendê-lo no mercado. Este mecanismo é lucrativo para o investidor quando o preço do ativo diminui em relação ao valor negociado na venda, porém pode resultar em grandes perdas com a valorização de seu preço. Por este motivo muitas instituições financeiras e investidores individuais evitam posições a descoberto em ativos de risco em suas estratégias de investimento.

1.2 Justificativa

Para eliminar a emoção humana na tomada de decisões financeiras, e basear suas estratégias de investimento em indicadores claros e objetivos, fundos de investimento nacionais e internacionais acentuam cada vez mais a utilização de ferramentas quantitativas nas decisões de suas operações financeiras.

Um bom exemplo da utilização de modelos quantitativos na tomada de decisões é o fundo de investimento AXA Rosenberg¹. Este possui um patrimônio de R\$ 100 bilhões e opera exclusivamente com modelos quantitativos próprios no mercado financeiro.

Os modelos de média-variância de período simples e de períodos múltiplos sem posições a descoberto nos ativos de risco, objetivo de estudo deste trabalho, são modelos quantitativos que utilizam o risco da carteira como função objetivo a ser minimizada, ou o retorno esperado como função objetivo a ser maximizado.

A pesquisa de seleção de carteiras de investimento tem sua história iniciada pelo trabalho de Markowitz [14] com carteiras eficientes de média-variância em período único. Em seus trabalhos foram propostos métodos quantitativos e científicos para o gerenciamento do risco e retorno na análise de investimento.

¹Informação obtida no site <http://www.axarosenberg.com>.

Para tanto, o risco foi quantificado pela variância dos retornos dos ativos de um mercado, permitindo ao investidor escolher um conjunto de ativos que oferecesse o maior retorno a partir de determinado risco tolerado, ou obter o menor risco dado um retorno esperado para a carteira a ser formada.

Extensões ao trabalho de Markowitz foram feitas para modelos de período contínuo e multiperíodo. Trabalhos com o de Dumas e Luciano [7] e Mossin [17] consideraram maximizar a esperança da riqueza final para determinada função utilidade, $EU(V(T))$.

A dificuldade no tratamento da seleção de carteiras de média-variância em período contínuo ou multiperíodo é minimizar o termo $[EV(T)]^2$ resultado da variância da função objetivo. Apenas com o trabalho apresentado por Duan Li e Wan-Lung Ng [20] o modelo de média-variância de Markowitz pôde ser estendido a mais de um período. Na solução proposta, utilizou-se a estratégia de mascarar a função a ser minimizada em um problema auxiliar tratável em termos de programação dinâmica.

A partir dos resultados apresentados por Li e Wan-Lung [20] com modelos multiperíodo, Zhou e Li [27] desenvolveram em seu trabalho um modelo de tempo contínuo com otimalidade por média-variância. Uma variação deste modelo foi proposta por Li, Zhou, e Lim [13] com o modelo de média-variância de tempo contínuo sem posições a descoberto nos ativos de risco. Neste trabalho, o modelo de tempo contínuo apresentado por Li, Zhou, e Lim [13] foi adaptado para tempo discreto a fim de ser aplicado ao mercado brasileiro.

Observando a tendência mundial dos fundos de investimento em utilizar modelos quantitativos para o auxílio na tomada de decisões, a proposta de verificar a performance de um modelo multiperíodo sem posições a descoberto nos ativos de risco aplicado ao mercado brasileiro é amplamente justificável.

1.3 Estrutura da dissertação

Este trabalho foi organizado em seis capítulos. A seguir apresentamos uma breve descrição de cada um deles.

No Capítulo 1 são apresentados os objetivos do trabalho, as justificativas que levaram ao seu desenvolvimento e a metodologia empregada. Uma breve apresentação das principais publicações relacionadas ao tema da dissertação completa este capítulo.

No Capítulo 2 são apresentados os conceitos básicos de média-variância, a caracterização do risco de uma carteira de investimento, a curva de indiferença de um investidor, e a fronteira eficiente de um mercado financeiro.

No Capítulo 3 é apresentado o modelo de média-variância de Markowitz e sua variação com o modelo de média-variância uniperíodo sem posições a descoberto nos ativos de risco. Complementando este capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica das principais linhas de pesquisa desenvolvidas a partir do trabalho pioneiro de Markowitz.

No Capítulo 4 é apresentado o modelo de média-variância de período contínuo sem posições a descoberto nos ativos de risco. Posteriormente, é proposto um modelo de média-variância multiperíodo inspirado no modelo de período contínuo sem posições a descoberto nos ativos de risco.

No Capítulo 5, o modelo de média-variância de período único sem posições a descoberto em ativos de risco, apresentado no Capítulo 3, é comparado com o modelo de média-variância multiperíodo sem posições a descoberto em ativos de risco, apresentado no Capítulo 4, através da aplicação dos mesmos ao mercado de capitais brasileiro. A partir dos resultados obtidos, as performances dos modelos são comparadas entre os diversos cenários simulados.

Finalmente, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões acerca dos modelos estudados, a viabilidade de utilização do modelo multiperíodo proposto, e a indicação de novos aprimoramentos que podem ser aplicados a este modelo.

Capítulo 2

Introdução à Média-Variância

2.1 Média e Variância de um Ativo

A base científica utilizada nos modelos quantitativos de investimento frequentemente encontrados na literatura é a análise da média e variância de uma carteira de investimento. Como será visto a seguir, para o desenvolvimento deste tipo de análise, os mesmos conceitos são aplicados aos ativos financeiros que compõem estas carteiras.

A expectativa de retorno que um investidor possui quando aplica determinada quantia de recursos financeiros em um ativo durante determinado período de tempo é denominada média ou retorno médio do período.

O risco a que o investidor está submetido ao realizar um investimento a partir do retorno médio de um ativo pode ser quantificado pela variação dos retornos deste ativo com relação ao retorno esperado. Assim, um investidor deverá escolher suas alternativas de investimento considerando não apenas o retorno esperado mas também o risco associado à oportunidade de investimento.

O retorno esperado é obtido pela média dos possíveis retornos de um ativo financeiro multiplicado pela probabilidade de ocorrência destes retornos. Para considerar os possíveis retornos de um ativo, o investidor pode utilizar como estratégia arbitrar expectativas de retornos considerando o cenário político e econô-

Cenário (j)	Probabilidade (P_{PETR4j})	Retorno ($R_{PETR4j} - 1$)
1	25%	60%
2	50%	12%
3	25%	32%

Tabela 2.1: Retorno esperado do ativo PETR4 para diversos cenários

mico a que o ativo trabalhado está influenciado, ou considerar o histórico de retornos deste ativo. A alternativa usualmente utilizada para este cálculo, a qual foi empregada nas simulações do Capítulo 5, é considerar o histórico de retornos dos ativos.

Para ilustrar as possibilidades de cálculo do retorno médio de um ativo, vamos calcular o retorno médio do ativo financeiro PETR4. Este ativo é listado na BOVESPA e representa as ações preferenciais da Petrobrás. Tendo em vista que o investidor queira estimar o retorno esperado considerando a situação político-econômica a que a empresa está envolvida, o mesmo pode arbitrar que existe uma possibilidade de 25% de uma nova jazida de petróleo ser descoberta e a produção da empresa crescer substancialmente, resultando um retorno de 60% no ano. Outra consideração feita pelo investidor com relação à empresa foi que esta tem controle estatal e pode ser obrigada a manter os preços de seus produtos para conter a inflação no país. Neste caso o investidor atribuiu uma possibilidade de 50% para esta alternativa, com retorno associado de 12% no ano. Uma terceira alternativa para o futuro do ativo vislumbrado pelo investidor foi que o retorno da empresa deverá manter os ganhos dos anos anteriores com uma possibilidade de 25% de ocorrência, e neste caso o retorno do ativo seria de 32% no ano. Um quadro resumo dos cenários considerados pelo investidor pode ser observado na Tabela 2.1.

Assim, o retorno esperado para o ativo PETR4, $E(R_{PETR4})$, considerando os três cenários contemplados pelo investidor é dado pela Equação (2.1).

$$E(R_{PETR4}) = \sum_{j=1}^3 P_{PETR4j} \cdot R_{PETR4j}, \quad (2.1)$$

Referência (j)	Ano	Probabilidade (P_{PETR4j})	Retorno ($R_{PETR4j} - 1$)
1	2001	20%	-15%
2	2002	20%	-12%
3	2003	20%	48%
4	2004	20%	23%
5	2005	20%	32%

Tabela 2.2: Histórico de retorno do ativo PETR4

$$E(R_{PETR4}) = 0,25 \cdot 1,60 + 0,50 \cdot 1,12 + 0,25 \cdot 1,32,$$

$$E(R_{PETR4}) = 1,29.$$

Neste caso, o retorno esperado no ano para o ativo PETR4 seria de 29%.

Como mencionado, uma outra abordagem para o cálculo do retorno esperado de um ativo é considerar o retorno histórico do mesmo. Neste caso, o investidor não necessita arbitrar possibilidades de retorno para o ativo a partir de suas perspectivas político-econômicas. Para ilustrar esta abordagem é apresentado na Tabela 2.2 um histórico de retornos anuais para o ativo PETR4. Considerando iguais probabilidades de retorno, o método de cálculo apresentado na Equação (2.1) resulta em um retorno esperado de 15%,

$$E(R_{PETR4}) = \sum_{j=1}^5 P_{PETR4j} \cdot R_{PETR4j},$$

$$E(R_{PETR4}) = 0,20 \cdot 0,85 + 0,20 \cdot 0,88 + 0,20 \cdot 1,48 + 0,20 \cdot 1,23 + 0,20 \cdot 1,32,$$

$$E(R_{PETR4}) = 1,15.$$

Uma outra alternativa para o cálculo da esperança de retorno de um ativo seria considerar uma maior probabilidade de ocorrência para os retornos dos anos

Referência (j)	Ano	Probabilidade (P_{PETR4j})	Retorno ($R_{PETR4j} - 1$)
1	2001	10%	-15%
2	2002	15%	-12%
3	2003	20%	48%
4	2004	25%	23%
5	2005	30%	32%

Tabela 2.3: Histórico de retorno do ativo com probabilidade crescente de ocorrência

mais recentes e diminuir a probabilidade de ocorrência dos retornos dos anos mais antigos. Neste caso, considerando a Tabela 2.3 obteríamos um retorno esperado de 22%,

$$E(R_{PETR4}) = \sum_{j=1}^5 P_{PETR4j} \cdot R_{PETR4j},$$

$$E(R_{PETR4}) = 0,10 \cdot 0,85 + 0,15 \cdot 0,88 + 0,20 \cdot 1,48 + 0,25 \cdot 1,23 + 0,30 \cdot 1,32,$$

$$E(R_{PETR4}) = 1,22.$$

As diferenças obtidas pelos métodos de cálculo do retorno esperado de um ativo estão associadas às diferentes percepções de investidores com relação ao retorno futuro de um ativo. Apenas a realização do retorno do ativo estudado poderia apontar qual método de cálculo indicou melhor resultado.

Para que uma decisão de alocação seja tomada, o investidor necessita não apenas caracterizar os retornos esperados dos ativos trabalhados, mas também identificar o risco de cada alternativa de investimento.

Segundo Markowitz [14], a medida de risco mais eficiente para análise de investimentos em ativos financeiros é o *desvio-padrão*. Este indicador mostra o grau de concentração dos retornos considerados para o cálculo da média em torno

da própria média. Quanto menor o desvio-padrão, maior será a concentração de probabilidade em torno da média e conseqüentemente menor risco para o investidor. Por outro lado, quanto maior o desvio-padrão maior o risco ao qual o investidor está submetido. Isto porque o retorno esperado obtido terá uma representação mais fraca quanto maior for o desvio-padrão.

O desvio-padrão de um ativo, também conhecido como volatilidade, é igual à raiz quadrada da variância deste ativo. Para o cálculo da variância de um ativo, considera-se a média ponderada dos quadrados das diferenças entre os vários retornos utilizados para o cálculo da média e o retorno esperado encontrado, conforme Equação (2.2):

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^n P_{ij} \cdot (R_{ij} - E(R_i))^2, \quad (2.2)$$

onde, σ_i^2 é a variância do ativo i , P_{ij} é a probabilidade do j -ésimo retorno para o ativo i , $E(R_i)$ é a média do ativo i , e n é a quantidade de retornos considerados para o cálculo da esperança do ativo i .

O desvio-padrão do ativo i é dado pela Equação (2.3),

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}. \quad (2.3)$$

Utilizando os dados da Tabela 2.1, temos que a variância e o desvio-padrão do ativo PETR4 para o conjunto de cenários vislumbrados por um investidor podem ser dados por:

$$\sigma_{PETR4}^2 = 0,25 \cdot (1,6 - 1,29)^2 + 0,50 \cdot (1,12 - 1,29)^2 + 0,25 \cdot (1,32 - 1,29)^2,$$

$$\sigma_{PETR4}^2 = 0,0387,$$

$$\sigma_{PETR4} = 0,1967.$$

2.2 Média e Variância de uma Carteira

Para determinar a média e a variância de uma carteira devemos considerar não apenas o retorno do conjunto de ativos que compõem a carteira mas também a proporção do valor destes ativos com relação ao valor total da carteira.

O cálculo do retorno médio de uma carteira, μ_c , é dado pelo retorno médio dos ativos calculados individualmente, $E(R_i)$, ponderado pela sua participação na carteira, ω_i , conforme Equação (2.4).

$$\mu_c = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot E(R_i) = \omega' \cdot E(R), \quad (2.4)$$

onde,

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}, \quad E(R) = \begin{pmatrix} E(R_1) \\ \vdots \\ E(R_n) \end{pmatrix}.$$

Como ω_i representa a participação do i -ésimo ativo na carteira, temos que:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \quad \omega' \mathbf{e} = \omega_1 + \dots + \omega_n = 1, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

O cálculo da variância de uma carteira, σ_c^2 , é dado pela variância, covariância e percentual de participação dos ativos que constituem a carteira. A covariância é a medida estatística que relaciona duas variáveis aleatórias, medindo como as mesmas se movem simultaneamente.

A fórmula geral da variância de uma carteira é apresentada na Equação (2.5),

$$\sigma_c^2 = \sum_{j=1}^n \omega_j^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \omega_j \omega_k \sigma_{jk}, \quad (2.5)$$

onde σ_{jk} representa a covariância entre o i -ésimo ativo e o j -ésimo ativo da carteira. Permitindo que j seja igual a i a fórmula da variância de uma carteira, Equação (2.5), pode ser representada pela Equação (2.6) que segue:

$$\sigma_c^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \omega_j \omega_k \sigma_{jk}. \quad (2.6)$$

O somatório acima pode ainda ser representado pela notação matricial apresentada na Equação (2.7):

$$\sigma_c^2 = \omega' \Sigma \omega, \quad (2.7)$$

onde

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}.$$

2.3 Curvas de Indiferença

O conjunto de oportunidades de investimento com riscos e retornos distintos, e que representam ao investidor mesma relação custo benefício é o que caracteriza a formação de uma família de curvas de indiferença.

Cada família de curvas de indiferença é estabelecida pelo comportamento de um investidor em relação ao risco [24]. O princípio básico estabelecido para

Figura 2.1: Curvas de Indiferença

todas as famílias de curvas é que quanto maior o risco de uma oportunidade de investimento maior deve ser o retorno esperado para que o investidor incorra em tal risco.

No exemplo da Figura 2.1 os investimentos A , B , D e G são equivalentes do ponto de vista do investidor com curva de indiferença representada por E_3 . Nesta caso, um retorno esperado μ_A com risco σ_A é equivalente a um retorno esperado μ_B com risco σ_B , ou um retorno esperado μ_E com risco σ_G . Sendo indiferente para o investidor a escolha de um em relação aos outros.

O conjunto das curvas de indiferença $E_1, E_2, E_3, \dots, E_N$ de um mesmo investidor é o que caracteriza uma família de curvas de indiferença. Por questão de simplicidade foram apresentadas na Figura 2.1 um número finito de curvas de indiferença de uma mesma família.

Na situação em que um investidor tenha de selecionar uma curva de indiferença dado um risco pré-estabelecido, o mesmo deverá escolher a estratégia de investimento de maior retorno dentro das oportunidades existentes. Esta situação é exemplificada pelos investimento A , C e E da Figura 2.1. Selecionando um risco esperado σ_A , um investidor com curva de indiferença igual ao apresentado no exemplo escolheria a estratégia de investimento com retorno esperado μ_E para

aplicar seus recursos. Caso uma estratégia com tal retorno não estivesse disponível, o investidor escolheria a estratégia de retorno esperado μ_C . Caso ainda esta última também não estivesse disponível, o investidor escolheria a estratégia de retorno esperado μ_A .

Os modelos estudados neste trabalho buscam estabelecer estratégias de investimento com menor risco associado dado um retorno esperado previamente estabelecido. Tendo novamente como base a Figura 2.1, para um retorno esperado μ_E o modelo identificaria a estratégia de investimento disponível com menor risco, e no caso estudado, a estratégia E seria escolhida ao invés da estratégia F ou G . Porém caso as estratégias E e F não estivessem disponíveis, e nenhuma outra com risco inferior a σ_G , a estratégia de investimento G seria adotada pelo modelo.

2.4 Fronteira Eficiente

O conjunto de estratégias de investimento que ofereçam a máxima expectativa de retorno para diferentes valores de risco, e que apresentem o mínimo risco para diferentes expectativas de retorno é o que caracteriza uma fronteira eficiente.

Para um mercado constituído apenas de ativos de risco, as diferentes estratégias de investimento possíveis de serem configuradas podem ser mapeadas no plano risco-retorno, conforme Figura 2.2.

A área sombreada da figura contempla todas as combinações possíveis de risco e retorno esperados para o mercado hipotético citado. Não existe nesta situação nenhuma configuração de carteira que possibilite risco e retorno esperados fora da área em destaque, trata-se da característica do mercado em análise, independentemente do perfil do investidor.

A fronteira delimitada pelo segmento $\overline{AB}$ na Figura 2.2 é denominada de fronteira eficiente pois contempla o conjunto de estratégias ótimas disponíveis no mercado. Nesta fronteira a estratégia de investimento indicada pelo ponto B

Figura 2.2: Fronteira Eficiente

constitui a melhor alocação possível existente no mercado considerado para um risco σ_B . A fronteira delimitada pelo segmento $\overline{AC}$ não pode ser caracterizada como fronteira eficiente pois para qualquer ponto desta fronteira existe um outro ponto na fronteira delimitada pelo segmento $\overline{AB}$ que para um mesmo risco apresenta retorno esperado maior.

Os pontos D e E da Figura 2.2 encontram-se dentro da área sombreada, e representam estratégias de investimento que não configuram otimalidade com relação às oportunidades de investimento disponíveis no mercado. Para um risco σ_B as estratégias de investimento caracterizadas nestes pontos resultam em menor retorno do que a estratégia indicada no ponto B , de mesmo risco.

Através da junção da curva de indiferença de um investidor com a fronteira eficiente de um mercado é possível identificar o ponto de otimalidade de alocação de recurso para este investidor. Na Figura 2.3 podemos observar que as curvas de indiferença E_1 e E_2 não configuram oportunidades de investimento para o mercado analisado. Com relação à curva de indiferença E_3 , seria indiferente para o investidor a escolha entre as oportunidades de investimento B , D , e G , porém a estratégia que representa otimalidade entre risco e retorno para o investidor é a estratégia G localizada na fronteira eficiente do mercado.

Figura 2.3: Identificação da melhor estratégia de alocação para um investidor considerando sua curva de indiferença e a fronteira eficiente do mercado

A fronteira eficiente para um mercado constituído por um conjunto de ativos de risco e um ativo livre de risco pode ser visualizada na Figura 2.4. Para este tipo de mercado a fronteira eficiente é configurada pelo segmento de reta que parte do retorno do ativo livre de risco, r_f , e tangência a fronteira eficiente constituída apenas pelos ativos de risco do mercado, ponto B indicado na mesma figura.

A introdução de um ativo livre de risco no mercado resulta em significante

Figura 2.4: Fronteira Eficiente de um mercado com ativo livre de risco

ganho de oportunidades de investimento. Retornos maiores podem ser obtidos com mesma exposição ao risco quando comparado com um mercado constituído apenas de ativos de risco. Este caso pode ser ilustrado através da Figura 2.4, onde para um risco σ_D no mercado constituído apenas por ativos de risco a estratégia ótima de investimento seria a do ponto C , com retorno esperado μ_C , e para o mesmo mercado com um ativo livre de risco disponível a estratégia ótima de investimento seria a do ponto D , com retorno esperado μ_D , sendo $\mu_D > \mu_C$.

Considerando ainda o mercado apresentado na Figura 2.4, determinado investidor conseguiria um retorno r_f livre de risco alocando toda sua riqueza no ativo livre de risco, ou seja $w_0 = 1$. Para a estratégia de investimento apontada pelo ponto de tangência B , toda a riqueza do investidor é alocada nos ativos de risco, e neste caso $w_0 = 0$. As estratégias de investimento delimitadas pelo segmento $\overline{BD}$ indicam posicionamentos vendidos no ativo livre de risco, ou seja $w_0 < 0$. Para estas situações, o volume financeiro aplicado nos ativos de risco é maior do que a riqueza do investidor, sendo necessário emprestar do ativo livre de risco para compensar esta diferença.

Capítulo 3

Modelos de Média-Variância Uniperíodo

3.1 Modelo de Markowitz

O modelo de Markowitz apresentado em [14] desenvolve uma teoria de investimento de período único onde o investidor distribui sua riqueza entre os ativos disponíveis no mercado no instante de tempo inicial e ao final do período resgata todo o capital investido.

A estratégia de investimento indicada pelo modelo baseia-se em maximizar o retorno de uma carteira dado um nível de risco previamente especificado, ou minimizar o risco da carteira a ser formada dado um retorno esperado previamente selecionado.

A determinação da estratégia indicada pelo modelo é calculada utilizando-se a média e covariância entre os diversos ativos disponíveis no mercado.

Considere neste caso um mercado constituído por m ativos de risco e um ativo livre de risco. Busca-se determinar a carteira de menor volatilidade, σ_c , dado um retorno esperado para a carteira, μ_c , previamente estabelecido. Como apresentado anteriormente, a variância da carteira a ser minimizada pode ser caracterizada por $\sigma_c^2 = \omega' \Sigma \omega$. Assim, de acordo com o apresentado por Costa e

Assunção [3] o modelo a ser minimizado no problema proposto pode ser definido como:

$$\begin{aligned} \min \quad & \omega' \Sigma \omega, \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{cases} \omega' r + (1 - \omega' \mathbf{e}) r_f = \mu_c, \\ \omega \in R^n, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $\Sigma = [\sigma_{ij}]$, $r = [r_1, \dots, r_m]'$ os retornos dos ativos de risco, r_f o retorno do ativo livre de risco, e $\mathbf{e}$ o vetor m -dimensional formado por 1's em todas as componentes.

O lagrangeano para o problema de otimização acima pode ser apresentado como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\omega, \lambda) &= \omega' \Sigma \omega + \lambda(\mu_c - (\omega' r + (1 - \omega' \mathbf{e}) r_f)) \\ &= \omega' \Sigma \omega + \lambda(\mu_c - \omega'(r - r_f \mathbf{e}) - r_f). \end{aligned} \quad (3.2)$$

A estratégia de investimento nos ativos de risco, w , pode ser determinada através da solução da Equação (3.2) utilizando as condições de 1ª ordem. Estas condições resultam nas Equações (3.3) e (3.4) que seguem

$$\mathcal{L}_\omega(\omega, \lambda) = 2\Sigma\omega - \lambda(r - r_f \mathbf{e}) = 0, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{L}_\lambda(\omega, \lambda) = \omega'(r - r_f \mathbf{e}) - \mu_c + r_f = 0. \quad (3.4)$$

A partir da Equação (3.3) temos

$$\omega = \frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} (r - r_f \mathbf{e}) \quad (3.5)$$

e, substituindo (3.5) na Equação (3.4), tem-se

$$\frac{\lambda}{2}(r - r_f \mathbf{e})' \Sigma^{-1} (r - r_f \mathbf{e}) = \mu_c - r_f,$$

resultando em

$$\lambda = \frac{2(\mu_c - r_f)}{(r - r_f \mathbf{e})' \Sigma^{-1} (r - r_f \mathbf{e})},$$

que substituindo em (3.5) obtemos a estratégia ótima de investimento da Equação (3.6) para o cenário apresentado:

$$\omega = \frac{(\mu_c - r_f)}{(r - r_f \mathbf{e})' \Sigma^{-1} (r - r_f \mathbf{e})} \Sigma^{-1} (r - r_f \mathbf{e}). \quad (3.6)$$

3.2 Modelo de Markowitz sem Posições a Descoberto em Ativos de Risco

Uma estratégia de investimento uniperíodo como apresentada por Markowitz [14] pode ser estabelecida para uma política de alocação sem posições a descoberto em ativos de risco.

Considere neste caso um mercado constituído por m ativos de risco e um ativo livre de risco. Busca-se determinar a carteira de menor volatilidade, σ_c , dado um retorno esperado para a carteira, μ_c , previamente estabelecido. Como apresentado anteriormente, a variância da carteira a ser minimizada pode ser caracterizada por $\sigma_c^2 = \omega' \Sigma \omega$. Assim, de acordo com o apresentado por Costa e Assunção [3] o modelo a ser minimizado no problema proposto pode ser definido como:

$$\begin{aligned} \min \quad & \omega' \Sigma \omega, \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{cases} \omega' r + (1 - \omega' \mathbf{e}) r_f = \mu_c, \\ \omega \geq 0, \omega \in R^n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $\Sigma = [\sigma_{ij}]$, $r = [r_1, \dots, r_m]'$ os retornos dos ativos de risco, r_f o retorno do ativo livre de risco, e $\mathbf{e}$ o vetor m -dimensional formado por 1's em todas as componentes.

O lagrangeano para o problema de otimização acima pode ser apresentada como:

$$\mathcal{L}(\omega, \lambda, \nu) = \omega' \Sigma \omega + \lambda(\mu_c - (\omega' r + (1 - \omega' \mathbf{e})r_f) - \nu' \omega, \quad (3.8)$$

onde λ e ν são os multiplicadores de Lagrange para as restrições estabelecidas.

A estratégia de investimento nos ativos de risco, w , pode ser determinada através da solução da Equação (3.8) utilizando as condições de Kuhn-Tucker de 1ª ordem. Estas condições resultam nas Equações (3.9), (3.10), e (3.11).

$$\begin{bmatrix} \Sigma & -\frac{I}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \nu \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \lambda (r - r_f \mathbf{e}), \quad (3.9)$$

$$\nu_i \omega_i = 0, i = 1, \dots, m, \quad (3.10)$$

$$\omega_i \geq 0, i = 1, \dots, m. \quad (3.11)$$

Para que o modelo de Markowitz uniperíodo sem posições a descoberto em ativos de risco possa ser comparado com o modelo multiperíodo que será apresentado no Capítulo , a riqueza final esperada para este último, ϵ , teve de ser parametrizada como sendo a taxa de retorno esperada da carteira para o modelo uniperíodo, μ_c , composta no horizonte de tempo do modelo multiperíodo e multiplicada pela riqueza inicial do investidor, $\epsilon = \mu_c^T \cdot V(0)$.

3.3 Contribuições

Com a utilização da variância como medida de risco para caracterizar a incerteza de uma decisão financeira, Markowitz [14] abriu caminho para uma série de trabalhos relacionados ao gerenciamento do risco e retorno associados a uma carteira de investimento. Trabalhos posteriores relacionados ao assunto buscaram aprimorar o modelo originalmente proposto por Markowitz. Um bom exemplo disso é o modelo de Markowitz sem posições a descoberto nos ativos de risco apresentado na seção anterior.

Ao longo desta seção serão apresentados trabalhos que contribuíram para a evolução dos métodos quantitativos aplicáveis ao gerenciamento de carteiras de investimento. De uma certa maneira, grande parte destes modelos é resultado do aprimoramento do modelo de média-variância de Markowitz.

3.3.1 Modelo Uniperíodo por Semi-Variância

Uma alternativa à utilização da variância como medida de risco foi a aplicação da semi-variância como tal medida. De acordo com o apresentado por Nabholz [18], a função objetivo do problema de otimização por semi-variância pode ser definida por:

$$\theta \cdot \eta^-(c) + (1 - \theta) \cdot \eta^+(c), \quad (3.12)$$

onde

$$\begin{aligned} \eta^-(c) &= E((\min\{0, R_c - \mu_c\})^2), \\ \eta^+(c) &= E((\max\{0, R_c - \mu_c\})^2), \end{aligned}$$

e $\theta \in [0, 1]$, representa a aversão do investidor ao risco.

Para $\theta = \frac{1}{2}$ a função objetivo do modelo uniperíodo por semi-variância é equivalente à função objetivo do trabalho original de Markowitz para o caso

onde se deseja minimizar o risco de uma carteira a partir de um retorno esperado previamente indicado. Para este caso, temos que a função objetivo do modelo por semi-variância resulta em:

$$\frac{1}{2}(\eta^-(c) + \eta^+(c)) = \frac{1}{2}\sigma_c^2.$$

Maiores detalhes sobre modelos de otimização de carteira utilizando semi-variância podem ser encontrados nos trabalhos de Hanza e Janssen [12], Duarte [6], e Markowitz [15].

3.3.2 Rastreamento de *Benchmark*

O modelo de rastreamento de *benchmark* busca aproximar o retorno de uma carteira, composta por um conjunto de ativos financeiros, a determinado índice ou indicador de referência, conhecido como *benchmark*. Este pode ser entendido como uma medida de performance para um conjunto pré-definido de ativos. Dado o grande número de ativos financeiros que podem compor um determinado *benchmark*, faz-se necessária um estudo para decidir quais ativos e em que proporção os mesmos deverão ser combinados para melhor acompanhar a variação do índice de referência.

Para este modelo, a função objetivo é estruturada de modo a minimizar o erro de rastreamento entre o valor do retorno obtido pelo índice de referência e o retorno da carteira indicada pelo modelo. Tendo em vista as definições já apresentadas no Capítulo , considerando a composição da carteira de referência (*benchmark*) w_b , de retorno P_b , retorno esperado μ_b , e variância σ_b^2 , e considerando também a composição da carteira a ser administrada w , de retorno P , retorno esperado μ , e variância σ^2 , o erro entre o retorno da carteira administrada e o retorno da carteira de referência, P_e , pode ser definido como:

$$P_e = P - P_b = (w - w_b)'R.$$

O erro de rastreamento e sua variância podem ser dados por:

$$\begin{aligned}\mu_e &= \mu - \mu_b = (w - w_b)'E(R) \\ \sigma_e^2 &= (w - w_b)'\Sigma(w - w_b).\end{aligned}$$

Assim, o problema de otimização a ser solucionado para minimizar o erro de rastreamento, tendo em consideração a possibilidade de investimento em todos os ativos disponíveis no mercado, pode ser definido por:

$$\begin{aligned} \min \quad & (w - w_b)'E(R), \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{cases} (w - w_b)'\Sigma(w - w_b) = \sigma_e^2, \\ (w - w_b)'e = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Uma análise mais detalhada sobre algoritmos de otimização de rastreamento de *benchmark* pode ser encontrada nos trabalhos de Elton e Gruber [8], Roll [21], e Costa e Assunção [3].

3.3.3 Funções Lineares de Predição

Uma extensão ao trabalho de Markowitz foi proposto por L. Liu, P. Shenoy, e C. Shenoy [22] com a utilização de funções lineares de predição associadas ao modelo de seleção ótima de carteiras por média-variância. A predição linear estuda o comportamento dos preços dos ativos disponíveis no mercado a partir do conhecimento de fatores que os influenciam. A combinação do modelo de Markowitz com o modelo de predição linear resultou na possibilidade de realocação ótima de investimentos de acordo com a variação de indicadores que influenciam os ativos do mercado trabalhado.

Para um mercado constituído por ativos quaisquer, o modelo apresentado por L. Liu, P. Shenoy, e C. Shenoy [22] identifica o comportamento destes ativos a partir da variação de indicadores econômicos do mercado, tais como preço do ouro

ou a taxa de câmbio. Com este mapeamento, o modelo permite a alocação ótima dos ativos deste mercado de acordo com a expectativa de retorno e volatilidade do preço do ouro, câmbio, e demais indicadores considerados na predição linear.

3.3.4 Múltiplos Períodos de Funções Utilidade Genéricas

O modelo de otimização de carteiras uniperíodo, inicialmente proposto por Markowitz, foi estendido para o caso multiperíodo como apresentado por Mossin [17], Elton e Gruber [9], e Samuelson [23]. Em seus trabalhos estes modelos foram formados por funções utilidades implícitas ao problema, sendo destacada a utilização de programação dinâmica para a solução dos mesmos.

O trabalho apresentado por Elton e Gruber [9] busca otimizar a decisão de investimento e consumo da riqueza do investidor para um horizonte de múltiplos períodos, identificando também a validade da aplicação sequencial de modelos uniperíodo a partir das premissas configuradas para o modelo multiperíodo. No problema proposto, o investidor deve decidir quanto consumir e como alocar a riqueza restante em um conjunto de ativos disponíveis no mercado considerado, sendo a função utilidade de consumo genérica para o problema. Temos assim que a formulação geral da programação dinâmica para o problema multiperíodo pode ser descrita por:

$$\begin{aligned}
 & f(t, C(1), \dots, C(t-1), V(t) | \phi(t)) = \\
 & \max E[f(t+1, C(1), \dots, C(t), V(t+1) | \phi(t+1))], \\
 & \text{sujeito a } \begin{cases} V(t+1) = w'(t)(R(t) - r_f(t)\mathbf{e})V(t) + (V(t) - C(t))r_f(t) + y(t) \\ f(t, C(1), C(2), \dots, C(t-1), V(t) | \phi(t)) = \\ U(C(1), C(2), \dots, C(t-1), C(t) | \phi(t)), \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde $C(t)$ é o consumo da riqueza do investidor no instante de tempo t , $y(t)$ representa eventuais inserções financeiras na riqueza considerada feitas no instante de tempo t , $U[\cdot]$ é a função utilidade considerada, e $\phi(t)$ é o vetor que representa

o conjunto de informações disponíveis no mercado no momento em que a decisão de consumo $C(t)$ é feita.

O problema da Equação (3.14) objetiva maximizar a função utilidade em termos de consumo ótimo em cada instante de tempo, $C(t)$, e através da alocação ótima nos ativos disponíveis, $w(t)$. Assim, a solução do problema pode ser obtida aplicando-se repetidamente a função objetivo apresentada com a seleção ótima de investimento e consumo no instante de tempo t . Para qualquer consumo realizado entre o instante de tempo 1 até $t - 1$, e qualquer riqueza no instante de tempo t , a esperança da função utilidade pode ser maximizada.

Ainda no trabalho apresentado por Elton e Gruber [9] é considerada a solução recursiva do problema (3.14) para funções utilidades logarítmicas e exponenciais.

De forma semelhante ao apresentado por Elton e Gruber [9], Samuelson [23] propôs um outro tipo de formulação para o problema de otimalidade estocástica multiperíodo. Em seu trabalho são discutidos modelos de seleção de carteira e consumo ótimos para maximizar determinada função utilidade ao longo dos múltiplos períodos do horizonte de tempo considerado. Para a solução deste tipo de problema Samuelson faz uso da aplicação de programação dinâmica nos modelos propostos.

Segue abaixo um dos problemas de otimização considerados por Samuelson [23] para maximizar o consumo de um investidor ao longo do tempo:

$$\begin{aligned} \max \quad & E(\sum_{t=0}^{T-1} (1 + \rho)^{-t} U[C(t)]), \\ \text{sujeito a} \quad & \left\{ C(t) = V(t) - V(t+1)((1 - w'(t)\mathbf{e})r_f(t) + w'(t)R(t))^{-1}, \right. \end{aligned}$$

onde ρ é característico ao investidor e representa a taxa de desconto a ser aplicada na função utilidade, $U[.]$ é a função utilidade implícita ao modelo, e $C(t)$ é o consumo da riqueza do investidor no instante de tempo t .

3.3.5 Múltiplos Períodos por Média-Variância

Apenas com o trabalho de Li e Wan-Lung Ng [20] a utilização da variância como medida de risco pôde ser utilizada de forma analítica para horizontes de investimento com mais de um período. Neste trabalho utilizou-se a solução de um problema auxiliar para determinar a solução analítica do problema de média-variância para múltiplos períodos discretos.

O conceito associado a este tipo de modelo é especificar um retorno esperado mínimo para o instante final do período simulado objetivando-se minimizar o risco da carteira no instante final. Ou, especificar um risco máximo de variância para a carteira no instante final do período simulado objetivando-se maximizar o retorno da mesma no instante final do período considerado.

Com a solução analítica proposta por Li e Wan-Lung [20] para o modelo multiperíodo de alocação ótima de investimento, Zhou e Li [27] apresentaram o modelo de tempo contínuo para o problema de média-variância de múltiplos períodos. Para o caso contínuo, o problema proposto foi solucionado através da utilização do modelo de controle linear quadrático (LQ) de otimalidade estocástica.

3.3.6 Múltiplos Períodos por Média-Variância sem Posições a Descoberto em Ativos de Risco

A partir do trabalho de Zhou e Li [27] com modelos de tempo contínuo por média-variância, Li, Zhou, e Lim [13] aprimoraram este modelo adicionando restrições de posições a descoberto nos ativos de risco.

A consideração da restrição de posições a descoberto para o modelo de tempo contínuo limitou o empréstimo financeiro feito em ativos de risco ao longo de todo o horizonte de tempo simulado.

O problema proposto no trabalho de Li, Zhou, e Lim [13], bem como os principais resultados obtidos serão detalhados no Capítulo 4.

3.3.7 Múltiplos Períodos por Média-Variância com Restrições Intermediárias

Diferentemente dos modelos de múltiplos períodos que buscam otimizar uma carteira de investimento considerando o risco, retorno, ou função utilidade específica do instante de tempo final, tanto no critério de performance quanto nas restrições impostas aos modelos, o modelo de múltiplos períodos por média-variância com restrições intermediárias considera também os valores esperados de retorno e variância indicados pelo modelo em cada determinação de estratégia ao longo do período simulado.

O aprimoramento deste tipo de modelagem com relação ao modelo multiperíodo proposto por Li e Ng [20] é que valores intermediários de média e variância esperados para a carteira podem ser controlados através de restrições impostas ao modelo, evitando assim resultados indesejados para a carteira ao longo do período.

Assim, o problema de otimização a ser resolvido para o caso onde se deseja maximizar o retorno esperado do período simulado considerando restrições intermediárias de risco pode ser descrito por:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=1}^T \alpha(t) E(V(t)) \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{cases} \text{Var}(V(T)) \leq \sigma^2, t \in I_\sigma, \\ V(t) = (w'R + (1 - w'e)R_0)V(t-1) t = 1, \dots, T, \end{cases} \end{aligned}$$

onde $I_\sigma = \{\iota_1, \dots, \iota_{k_\sigma}\}$, $\iota_{k_\sigma} \leq T$, e $\alpha(t)$ é um número positivo que pondera $E(V(t))$ ao longo do tempo no problema de otimização.

Considerando este problema para o caso onde se deseja minimizar a variância da carteira ao longo do período considerado, restringindo valores mínimos para o retorno esperado da mesma temos:

$$\begin{array}{ll}
\min & \sum_{t=1}^T \alpha(t) \text{Var}(V(t)) \\
\text{sujeito a} & \left\{ \begin{array}{l} E(V(T)) \geq \epsilon, t \in I_\sigma, \\ V(t) = (w'R + (1 - w'e)R_0)V(t-1), \\ t = 1, \dots, T. \end{array} \right.
\end{array}$$

Maiores detalhes sobre o modelo de múltiplos períodos por média-variância com restrições intermediárias, e a solução dos problemas de otimização apresentados podem ser encontrados no trabalho de Nabholz [19].

3.3.8 Múltiplos Períodos com Custos Transacionais

Um melhor refinamento para os modelos multiperíodo é a consideração de custos transacionais na realocação de investimentos. Tais custos são inerentes ao processo de compra e venda de ativos financeiros e podem acarretar diferentes decisões de investimento na alocação ótima de investimento. Modelos que consideram este tipo de problema foram estudados Smith [25, 26], Chen, Jen, e Zionts [4], e Gulpinar, Rustem, e Settergren [11].

Os trabalhos apresentado por Smith [25, 26] consideram a utilização do modelo de Markowitz e do valor de mercado da carteira de investimento antes de realocação para determinar a nova distribuição de ativos da carteira. Em seus modelos, Smith não considera o aspecto multiperíodo na determinação de estratégias de investimento, acarretando uma visão míope em seus cenários.

Tendo por base o modelo multiperíodo proposto por Mossin [17], Chen, Jen, e Zionts [4] propuseram considerar custos transacionais em um aprimoramento ao trabalho de Smith. Assim, o problema de otimização multiperíodo a ser solucionado considerando custos transacionais pode ser descrito por:

$$\begin{aligned}
& \max \quad E_T(U(T)) = w'(T)r(T) - \lambda(w'(T)\Sigma(T)w(T)) \\
& \text{sujeito a} \quad \begin{cases} w(T), \phi(T), \varphi(T) \geq 0, \\ V^-(T-1)(\phi(T) - \varphi(T)) = V^+(T-1)w(T) - V^-(T-1)\beta(T), \\ V^+(T-1)w'(T)\mathbf{e} = V^-(T-1)(\beta'(T)\mathbf{e} - (\phi'(T)B + \varphi'(T)S)). \end{cases}
\end{aligned}$$

onde, λ representa a aversão do investidor ao risco, $V^-(T-1)$ representa a riqueza do investidor ao final do período $T-1$, $V^+(T-1)$ representa a riqueza do investidor após o novo posicionamento estratégico, $w(T) = (w_1(T), \dots, w_n(T))'$ representa o vetor de percentuais de alocação para os n ativos disponíveis no mercado no início do período a ser transcorrido, obtido com a determinação da nova estratégia de investimento. O vetor $\phi(T) = (\phi_1(T), \dots, \phi_n(T))'$ representa o incremento na alocação dos ativos entre a carteira original e a nova estratégia de investimento, $\varphi(T) = (\varphi_1(T), \dots, \varphi_n(T))'$ representa o vetor de decremento na alocação dos ativos entre a carteira original e a nova estratégia de investimento, e $\beta(T) = (\beta_1(T), \dots, \beta_n(T))'$ representa o vetor de percentuais de alocação antes da determinação da nova estratégia de investimento, ao final do período $T-1$. Os custos transacionais, considerados como fixos ao longo do tempo, são representados pelos vetores $B = (B_1, \dots, B_n)'$ e $S = (S_1, \dots, S_n)'$. Assim, para o k -ésimo ativo destes vetores temos os custos de compra e venda do ativo, respectivamente.

No próximo capítulo, os modelos de múltiplos períodos de otimização por média-variância e as soluções analíticas dos mesmos serão apresentadas em maiores detalhes.

Capítulo 4

Modelos de Média-Variância de Períodos Múltiplos

4.1 Modelo de Média-Variância de Tempo Contínuo sem Posições a Descoberto em Ativos de Risco

4.1.1 Definições

Ao longo deste trabalho será utilizada a seguinte notação. O espaço real m -dimensional de vetores será representado por $\mathbb{R}^m$, e $\mathbb{R}_+^m$ representará os vetores em $\mathbb{R}^m$ cujas componentes são todas positivas. Será conveniente definir o vetor m -dimensional $\mathbf{e}$ formado por 1's em todas as componentes. Representaremos por $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, \mathcal{F}(t))$ o espaço de probabilidade completo equipado com uma medida de probabilidade $\mathbb{P}$ e filtragem $\mathcal{F}(t)$, onde t pode tomar valores contínuos ou discretos, dependendo do modelo considerado. O valor esperado sob a medida de probabilidade $\mathbb{P}$ será representado por $E(\cdot)$. Para $A \in \mathcal{F}$, 1_A representará a função indicadora, isto é, $1_{\{\omega \in A\}} = 1$ se $\omega \in A$, zero caso contrário.

Considere um mercado de capitais com $m + 1$ ativos negociados continu-

amente em um horizonte de tempo $[0, T]$. Um dos ativos é livre de risco, e seu preço $S_0(t)$, $t \geq 0$, varia de acordo com a equação diferencial:

$$\begin{cases} dS_0(t) = r(t)S_0(t)dt, & t \in [0, T] \\ S_0(0) = 1, \end{cases}$$

onde $r(t)(>0)$ é a taxa livre de risco do ativo. Os outros m ativos com risco, $i = 1, \dots, m$, podem ter seus preços $S_i(t)$ modelados pela equação diferencial estocástica:

$$\begin{cases} dS_i(t) = S_i(t)\{b_i(t)dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(t)dw_j(t)\}, \\ t \in [0, T] \\ S_i(0) = s_i > 0, \end{cases}$$

onde $b_i(t)(>r(t))$ é a taxa de retorno do i -ésimo ativo, $b(t) = [b_1(t), b_2(t), \dots, b_m(t)]'$, $w_j(t)$ representa o movimento Browniano padrão, e por hipótese $\sigma(t) = [\sigma_{ij}(t)]$ possui inversa.

Um investidor auto-financiado, com investimento inicial $V_0 > 0$ aplicado no mercado de capitais definido anteriormente, pode ter sua riqueza ao longo do tempo, $V^u(t)$ com $t \in [0, T]$, modelada pela equação diferencial estocástica (4.1), de acordo com apresentado por Zhou e Li [27]:

$$\begin{cases} dV^u(t) = \{r(t)V^u(t) + \sum_{i=1}^m (b_i(t) - r(t))u_i(t)\}dt + \\ + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \sigma_{ij}(t)u_i(t)dw_j(t), \\ V(0) = V_0 > 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $u_i(t)$, uma variável aleatória $\mathcal{F}(t)$ -mensurável, representa o total da riqueza do investidor aplicado no i -ésimo ativo, com $i = 0, 1, \dots, m$, $u(t) = [u_0(t), \dots, u_m(t)]'$, e $u = \{u(s), 0 \leq s \leq T\}$, o conjunto de estratégias adotadas pelo investidor até o instante de tempo final T , as quais resultaram na riqueza $V^u(T)$ do mesmo. A restrição de posições a descoberto considerada para os ativos de

risco implica que as estratégias de investimento encontradas para estes ativos não poderão ser negativas, ou seja, $u_i(t) \geq 0$, $i = 1, \dots, m$. É importante perceber que esta proibição não será válida para o ativo livre de risco, $u_0(t) \in \mathbb{R}$. Denota-se por $\mathcal{U}$ o conjunto de estratégias u satisfazendo as condições mencionadas acima.

4.1.2 Critério de Alocação

A seleção ótima de carteira de média-variância em tempo contínuo busca determinar a distribuição entre os ativos ao longo do tempo de maneira a obter uma riqueza final que satisfaça $E(V(T)) = \epsilon$, e minimize a medida de risco da riqueza final, $Var(V(T))$.

$$\begin{aligned} Var(V(T)) &= E[V(T) - E(V(T))]^2 \\ &= E[V(T) - \epsilon]^2, \end{aligned}$$

onde ϵ é o retorno final esperado para a carteira especificado pelo investidor.

O problema de ótima alocação parametrizável por ϵ e sem posições a descoberto em ativos de risco pode, então, ser modelado por:

$$\begin{aligned} \min \quad & Var(V(T)) = E[V(T) - \epsilon]^2, \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{cases} E(V(T)) = \epsilon, \\ u \in \mathcal{U} \\ (V(\cdot), u(\cdot)) \text{ satisfazendo (4.1).} \end{cases} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Deve-se notar que para $\epsilon = V_0 e^{\int_0^T r(s)ds}$ tem-se 100% da carteira alocada no ativo livre de risco, correspondendo a $Var(V(T)) = 0$. O conjunto de pontos formado por $(Var(V(T)), \epsilon)$ quando ϵ varia no intervalo $[V_0 e^{\int_0^T r(s)ds}, +\infty)$ é denominado de fronteira eficiente, onde $Var(V(T))$ é a mínima variância final para a carteira de ganho igual a ϵ . Como mencionado anteriormente, o limite inferior apresentado para a riqueza final esperada está associado à aplicação de toda a riqueza do investidor no ativo livre de risco ao longo do horizonte de tempo.

4.1.3 Solução Analítica

Para a solução do problema de minimização apresentado na Equação (4.2), a restrição $E(V(T)) = \epsilon$ pode ser incorporada à função objetivo com a introdução do multiplicador de Lagrange $\mu \in \mathbb{R}$. Assim, este problema pode ser solucionado indiretamente através do problema de controle estocástico:

$$\begin{aligned} \min \quad & E\{[V(T) - \epsilon]^2 + 2\mu[E(V(T)) - \epsilon]\}, \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{cases} u \in \mathcal{U} \\ (V^u(\cdot), u(\cdot)) \text{ satisfazendo (4.1)}. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

A solução encontrada em [13] para o modelo de tempo contínuo foi obtida com a solução do problema linear quadrático (LQ) de otimalidade estocástica da Equação (4.3) através da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) correspondente. A solução do problema da Equação (4.3) é apresentada em [13], e o resultado final obtido é a estratégia ótima de alocação:

$$u(t, V^u(t)) = \begin{cases} -(\sigma(t)\sigma(t)')^{-1} \cdot [\bar{\pi}(t) + (b(t) - r(t)\mathbf{e}) \cdot \\ [V^u(t) - (\epsilon - \mu^*)e^{-\int_t^T r(s)ds}], \\ \quad \text{se } V^u(t) - (\epsilon - \mu^*)e^{-\int_t^T r(s)ds} \leq 0, \\ 0, \quad \text{se } V^u(t) - (\epsilon - \mu^*)e^{-\int_t^T r(s)ds} > 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

onde,

$$\mu^* = \frac{\epsilon - V_0 e^{\int_0^T r(s)ds}}{1 - e^{\int_0^T \|\bar{\theta}(s)\|^2 ds}}, \quad (4.5)$$

e $\bar{\pi}(t)$, $\bar{\theta}(t)$ são obtidos da seguinte forma:

$$\zeta(t) = \|\sigma(t)^{-1}(\pi(t) + b(t) - r(t)\mathbf{e})\|^2, \quad (4.6)$$

$$\bar{\pi}(t) = \arg_{\pi(t) \in \mathbb{R}_+^m} \min \zeta(t), \quad (4.7)$$

$$\bar{\theta}(t) = \sigma(t)^{-1}(\bar{\pi}(t) + b(t) - r(t)\mathbf{e}). \quad (4.8)$$

Para implementar o controle ótimo apresentado na Equação (4.4) inicialmente o investidor deve determinar o parâmetro $\bar{\pi}(t)$, e posteriormente o parâmetro μ^* da Equação (4.5), o qual pode ser interpretado como a “distância” que a riqueza inicial do investidor encontra-se da riqueza final esperada considerando o retorno dos ativos de risco sem a utilização de posições a descoberto.

4.2 Modelo Multiperíodo de Média-Variância sem Posições a Descoberto em Ativos de Risco

4.2.1 Definições

A dificuldade na utilização de um modelo de tempo contínuo na tomada de decisões de alocação em carteiras de investimento está relacionada a problemas operacionais como a manipulação contínua dos ativos e aos custos transacionais resultantes da frequência de realocação. Com base na estratégia de tempo contínuo sem posições a descoberto nos ativos de risco apresentada na Equação (4.4) é proposto um modelo equivalente em tempo discreto a ser aplicado ao mercado de capitais brasileiro. Conforme será visto mais adiante, a solução ótima do modelo a tempo discreto apresenta maior complexidade do que o modelo a tempo contínuo, o que nos leva a considerar soluções sub-ótimas.

Para o caso a tempo discreto a evolução do ativo livre de risco $S_0(t)$ satisfaz

$$\begin{cases} S_0(t+1) = r_f(t)S_0(t), & t \in [0, 1, \dots, T-1] \\ S_0(0) = 1, \end{cases}$$

e o vetor dos ativos com risco $S(t)$,

$$\begin{cases} S_i(t+1) = R_i(t)S_i(t), & t \in [0, 1, \dots, T-1] \\ S_i(0) = s_i > 0, \end{cases}$$

com, para $t = 0, 1, \dots, T - 1$, $R(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) & \dots & R_m(t) \end{pmatrix}'$, $R(t) = b(t) + \Sigma(t)^{1/2}w(t)$, onde $\{w(k); k = 0, \dots, T - 1\}$ representa uma seqüência de ruído branco e $b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) & \dots & b_m(t) \end{pmatrix}'$, $\Sigma(t) = [\sigma_{ij}(t)]$. Deve-se notar que $\Sigma(t)$, a matriz $m \times m$ de covariância dos retornos dos ativos, deve satisfazer $\Sigma(t) > 0$ e que $b_i(t) \geq r_f(t)$ para todo $t = 0, \dots, T - 1$.

Por conveniência, vamos definir também:

$$\begin{aligned} P(t) &= R(t) - r_f(t)\mathbf{e} \\ &= [b(t) - r_f(t)\mathbf{e}] + \Sigma(t)^{1/2}w(t), \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= E(P(t)P(t)') \\ &= [b(t) - r_f(t)\mathbf{e}][b(t) - r_f(t)\mathbf{e}]' + \Sigma(t). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Como anteriormente, uma política de investimento $u = \{u(0), \dots, u(T-1)\}$ é tal que $u(t) \geq 0$, é $\mathcal{F}(t)$ mensurável para cada t e fornece a cada instante t o valor financeiro $u_i(t)$ investido em cada um dos ativos de risco $S_i(t)$.

Assim, a riqueza do investidor ao longo do tempo no modelo discreto, $V^u(t)$, satisfaz:

$$V^u(t+1) = r_f(t)V^u(t) + P(t)'u(t). \tag{4.11}$$

Por simplicidade notacional vamos suprimir a partir de agora o superescrito u de $V^u(t)$, tendo em mente entretanto que essa dependência existe. Definimos $\ell(t)$ como $\ell(t) = \prod_{k=t}^{T-1} r_f(k)$, $\ell(T) = 1$, de modo que $\ell(t) = r_f(t)\ell(t+1)$. Inspirado no modelo a tempo contínuo, consideramos políticas de investimento com a mesma formação que em (4.4), ou seja,

$$u(t, V(t)) = \begin{cases} -(G(t)G(t)')^{-1} \cdot [\bar{\pi}(t) + (b(t) - r_f(t)\mathbf{e})] \cdot \\ [V(t) - \frac{1}{\ell(t)}(\epsilon - \mu)], \\ \quad \text{se } V(t) - \frac{1}{\ell(t)}(\epsilon - \mu) \leq 0, \\ 0, \quad \text{se } V(t) - \frac{1}{\ell(t)}(\epsilon - \mu) > 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

onde μ e a matriz quadrada $m \times m$ inversível $G(k)$ são os parâmetros que desejamos determinar.

Definem-se abaixo funções e parâmetros dependentes de μ e $G(k)$. Por simplicidade notacional essa dependência não será explicitada, mas deve-se ter em mente que ela existe. Inicialmente define-se

$$\zeta(t) = \|G(t)^{-1}(\pi(t) + b(t) - r_f(t)\mathbf{e})\|^2. \quad (4.13)$$

Os parâmetros $\bar{\pi}(t)$, $\bar{\theta}(t)$ são obtidos da seguinte forma:

$$\bar{\pi}(t) = \arg_{\pi(t) \in \mathbb{R}_+^m} \min \zeta(t), \quad (4.14)$$

$$\bar{\theta}(t) = G(t)^{-1}(\bar{\pi}(t) + b(t) - r_f(t)\mathbf{e}).$$

Conforme o Lema 3.1 de [13], tem-se que:

$$(G(t)')^{-1}\bar{\theta}(t) \geq 0, \text{ e} \quad (4.15)$$

$$\bar{\pi}(t)'(G(t)')^{-1}\bar{\theta}(t) = 0. \quad (4.16)$$

Para o desenvolvimento dos resultados das próximas subseções e seções, introduz-se a seguinte variável auxiliar $Z(t)$:

$$Z(t) = V(t) - \frac{1}{\ell(t)}(\epsilon - \mu). \quad (4.17)$$

De (4.11), (4.17), e lembrando que $\ell(k) = r_f(k)\ell(k+1)$, segue que

$$\begin{aligned}
Z(k+1) &= V(k+1) - \frac{1}{\ell(k+1)}(\epsilon - \mu) \\
&= r_f(k)Z(k) - P(k)'(G(k)')^{-1}\bar{\theta}(k)Z(k)1_{\{Z(k) \leq 0\}}, \tag{4.18}
\end{aligned}$$

onde $1_{\{Z(k) \leq 0\}}$ representa a função indicadora, isto é, $1_{\{Z(k) \leq 0\}} = 1$ se $Z(k) \leq 0$, e zero caso contrário.

4.2.2 Determinação de μ

Para a determinação de μ , deve-se lembrar que o valor esperado final da carteira deve ser ϵ , isto é, $E(V(T)) = \epsilon$. Dessa forma, segue de (4.17) que devemos ter $E(Z(T)) = \mu$. Como

$$\begin{aligned}
P(k) &= b(k) - r_f(k)\mathbf{e} + \Sigma(k)^{1/2}w(k) \\
&= \bar{\pi}(k) + b(k) - r_f(k)\mathbf{e} + \Sigma(k)^{1/2}w(k) - \bar{\pi}(k)
\end{aligned}$$

tem-se que

$$\begin{aligned}
P(k)'(G(k)')^{-1}\bar{\theta}(k) &= \|\bar{\theta}(k)\|^2 - \\
&\bar{\pi}(k)'(G(k)')^{-1}\bar{\theta}(k) + w(k)'\Sigma(k)^{1/2}(G(k)')^{-1}\bar{\theta}(k).
\end{aligned}$$

De (4.16) segue que

$$P(k)'(G(k)')^{-1}\bar{\theta}(k) = \|\bar{\theta}(k)\|^2 + w(k)'\Sigma(k)^{1/2}(G(k)')^{-1}\bar{\theta}(k). \tag{4.19}$$

De (4.18) e (4.19),

$$\begin{aligned}
Z(k+1) &= [r_f(k) - (\|\bar{\theta}(k)\|^2 + w(k)'\Sigma(k)^{1/2}(G(k)')^{-1}\bar{\theta}(k))1_{\{Z(k) \leq 0\}}]Z(k). \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Definimos os seguintes conjuntos para $k = 0, \dots, T-1$:

$$\Gamma(k) = \{w \in \mathbb{R}^m; r_f(k) - (\|\bar{\theta}(k)\|^2 + w(k)'\Sigma(k)^{1/2}(G(k)')^{-1}\bar{\theta}(k)) \geq 0\}, \quad (4.21)$$

e os parâmetros

$$\varrho(k) = E[\{r_f(k) - (\|\bar{\theta}(k)\|^2 + w(k)'\Sigma(k)^{1/2}(G(k)')^{-1}\bar{\theta}(k))\}1_{\{w(k) \in \Gamma(k)\}}]. \quad (4.22)$$

Segue de (4.20) e (4.21) que

$$1_{\{Z(k+1) \leq 0\}} = 1_{\{Z(k) \leq 0\}} 1_{\{w(k) \in \Gamma(k)\}}. \quad (4.23)$$

Iremos calcular recursivamente $E(Z(k))$. Para isso, necessitaremos também calcular $E(Z(k)1_{\{Z(k) \leq 0\}})$. Definimos $z(k) = E(Z(k))$ e $y(k) = E(Z(k)1_{\{Z(k) \leq 0\}})$. Temos de (4.20) e (4.23) que

$$\begin{aligned} Z(k+1)1_{\{Z(k+1) \leq 0\}} &= [r_f(k) - (\|\bar{\theta}(k)\|^2 + w(k)'\Sigma(k)^{1/2}(G(k)')^{-1}\bar{\theta}(k))] \times \\ &\quad Z(k)1_{\{w(k) \in \Gamma(k)\}} 1_{\{Z(k) \leq 0\}}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Logo de (4.20), (4.22), (4.24), e lembrando que $E(w(k)) = 0$ e $w(k)$ e $Z(k)$ são independentes, segue que

$$\begin{pmatrix} z(k+1) \\ y(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_f(k) & -\|\bar{\theta}(k)\|^2 \\ 0 & \varrho(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(k) \\ y(k) \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Definimos $A(k)$ a matriz 2 por 2 do sistema (4.25), $\mathcal{A} = \prod_{k=0}^{T-1} A(k)$, e

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Proposição 1 *Se*

$$\mu = \frac{\epsilon - V(0)\ell(0)}{1 - \frac{\ell(0)}{\psi}} \quad (4.27)$$

então $Z(0) \leq 0$ e $E(V(T)) = \epsilon$.

Prova: Conforme mencionado anteriormente, basta mostrar que $E(Z(T)) = \mu$. Inicialmente mostraremos que $\ell(0) > \psi$. Para isso vamos considerar a seqüência $\tilde{z}(k)$, $\tilde{y}(k)$ como em (4.25) com $\tilde{z}(0) = 1$ e $\tilde{y}(0) = 1$. Definimos também a seqüência auxiliar $\xi(k)$ dada por $\xi(k+1) = r_f(k)\xi(k)$, $\xi(0) = 1$. Vamos mostrar por indução que para todo k , $\tilde{y}(k) > 0$ e $\xi(k) \geq \tilde{z}(k)$ (para $k \geq 1$, $\xi(k) > \tilde{z}(k)$). Para $k = 0$ o resultado é imediato. Suponha que seja válido para k . Como $\varrho(k) \geq 0$ (veja (4.22)) é claro que $\tilde{y}(k+1) = \varrho(k)\tilde{y}(k) > 0$, e $\tilde{z}(k+1) = r_f(k)\tilde{z}(k) - \|\bar{\theta}(k)\|^2\tilde{y}(k) < r_f(k)\tilde{z}(k) \leq r_f(k)\xi(k) = \xi(k+1)$, mostrando o resultado por indução desejado. Com isso temos que $\xi(T) = \ell(0) > \tilde{z}(T) = \psi$, mostrando a primeira parte. Mostraremos agora que $Z(0) \leq 0$. Realmente de (4.27) segue que

$$\frac{\mu - \epsilon}{\ell(0)} = \left(\frac{\mu}{\psi}\right) - V(0). \quad (4.28)$$

De (4.17) e (4.28) segue que

$$Z(0) = V(0) + \frac{\mu - \epsilon}{\ell(0)} = \frac{\mu}{\psi} \quad (4.29)$$

e, após algumas manipulações, segue de (4.29) que

$$Z(0) = \frac{V(0) - \frac{\epsilon}{\ell(0)}}{1 - \frac{\psi}{\ell(0)}} \leq 0$$

pois como visto no início, $1 - \frac{\psi}{\ell(0)} > 0$ e por hipótese, $V(0) \leq \frac{\epsilon}{\ell(0)}$. Mostraremos agora que $E(Z(T)) = \mu$. Como $Z(0) \leq 0$ segue que $z(0) = Z(0)$, $y(0) = Z(0)$, e por recorrência da Equação (4.25), segue de (4.29) que $z(T) = \psi Z(0) = \frac{\mu}{\psi}\psi = \mu$, completando a prova da proposição. $\square$

Observação: Temos da Equação (4.25) que

$$\begin{aligned} E(Z(k+1)) &= (r_f(k) - \|\bar{\theta}(k)\|^2) E(Z(k)) \\ &\quad + \|\bar{\theta}(k)\|^2 E(Z(k)1_{\{Z(k)>0\}}). \end{aligned}$$

Portanto desprezando o último termo na equação acima, uma aproximação para ψ seria $\prod_{k=0}^{T-1} (r_f(k) - \|\bar{\theta}(k)\|^2)$.

4.2.3 Determinação de $G(k)$

Como mencionado anteriormente, o objetivo é minimizar a variância final da carteira, isto é, $Var(V(T))$. Como $E(V(T)) = \epsilon$ e $Var(V(T)) = E(V(T)^2) - E(V(T))^2 = E(V(T)^2) - \epsilon^2$, temos que minimizar $Var(V(T))$ é equivalente a minimizar $E(V(T)^2)$, que por sua vez é equivalente a minimizar $E(Z(T)^2)$. Como no caso da média $E(Z(k))$ visto na seção 4.2.2, uma fórmula recursiva para $E(Z(k)^2)$ envolveria 2 parcelas, $E(Z(k)^2)$ e $E(Z(k)^2 1_{\{Z(k) \leq 0\}})$, o que tornaria a minimização descrita acima muito complexa. Uma forma mais simples para determinar $G(k)$ seria obtê-lo de forma a minimizar para cada k o valor esperado condicional $E(Z(k+1)^2 | Z(k))$. Dessa forma temos o seguinte resultado.

Proposição 2 *Considerando a lei de controle dada por (4.12), temos que para cada $k = 0, 1, \dots, T-1$,*

$$G(k) = \frac{1}{r_f(k)^{1/2}} \Phi(k)^{1/2} \quad (4.30)$$

minimiza $E(Z(k+1)^2 | Z(k))$.

Prova: Da Equação (4.18), podemos escrever que

$$\begin{aligned} Z(k+1) &= r_f(k)Z(k) + P(k)'U(k)1_{\{Z(k) \leq 0\}} \\ &= r_f(k)Z(k)1_{\{Z(k) > 0\}} + (r_f(k)Z(k) + P(k)'U(k))1_{\{Z(k) \leq 0\}} \end{aligned}$$

onde $U(k) = -(G(k)')^{-1}\bar{\theta}(k)Z(k)1_{\{Z(k)\leq 0\}}$. Elevando ao quadrado e notando que $1_{\{Z(k)>0\}}1_{\{Z(k)\leq 0\}} = 0$ segue que

$$\begin{aligned} E(Z(k+1)^2|Z(k)) &= r_f(k)^2 Z(k)^2 + \\ &\{2r_f(k)[\bar{\pi}(k) + b(k) - r_f(k)\mathbf{e}]'U(k)Z(k) + U(k)'\Phi(k)U(k)\}1_{\{Z(k)\leq 0\}}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

pois de (4.16), $\bar{\pi}(k)'U(k) = 0$. Derivando (4.31) em relação à $U(k)$ e igualando a zero, tem-se que

$$U(k) = -r_f(k)\Phi(k)^{-1}[\bar{\pi}(k) + b(k) - r_f(k)\mathbf{e}]Z(k)1_{\{Z(k)\leq 0\}},$$

o que leva à escolha de $G(k)$ conforme (4.30). $\square$

4.2.4 Lei de Controle

Resumindo o controle para o modelo multiperíodo de média-variância sem posições a descoberto nos ativos de risco, para $t = 0, 1, \dots, T-1$, e dado por:

$$u(t, V(t)) = \begin{cases} -r_f(t)\Phi(t)^{-1} \cdot [\bar{\pi}(t) + b(t) - r_f(t)\mathbf{e}] \cdot \left[V(t) - \frac{1}{\ell(t)}(\epsilon - \mu) \right], \\ \quad \text{se } V(t) - \frac{1}{\ell(t)}(\epsilon - \mu) \leq 0, \\ 0, \text{ se } V(t) - \frac{1}{\ell(t)}(\epsilon - \mu) > 0, \end{cases} \quad (4.32)$$

onde μ é dado por (4.27), $\bar{\pi}(t)$ é obtido como em (4.7), e

$$\zeta(t) = \|r_f(t)^{1/2}\Phi(t)^{-1/2}(\pi(t) + b(t) - r_f(t)\mathbf{e})\|^2. \quad (4.33)$$

A Equação (4.32) pode ser decomposta em duas componentes como a seguir:

$$u(t) = -K(t)V(t) + \nu(t) \quad (4.34)$$

$$K(t) = r_f(t)\Phi(t)^{-1}[\bar{\pi}(t) + b(t) - r_f(t)\mathbf{e}] \quad (4.35)$$

$$\nu(t) = r_f(t)\Phi(t)^{-1}[\bar{\pi}(t) + b(t) - r_f(t)\mathbf{e}]\frac{(\epsilon - \mu)}{\ell(t)}. \quad (4.36)$$

A primeira, Equação (4.35), está associada à riqueza do investidor no instante de tempo em que se deseja calcular a estratégia de investimento. A outra parcela, Equação (4.36), corresponde a aversão do investidor ao risco, podendo ser calculada previamente à simulação do modelo. Para a utilização do modelo multi-período na determinação de estratégias de investimento, o investidor inicialmente deve determinar o parâmetro $\bar{\pi}(t)$ a partir das médias e covariâncias dos retornos dos ativos trabalhados. Segue de (4.15) que $r_f(t)\Phi(t)^{-1} \cdot [\bar{\pi}(t) + b(t) - r_f(t)\mathbf{e}] \geq 0$ e portanto $u(t) \geq 0$ para todo t conforme desejado.

Capítulo 5

Ensaio dos Modelos de Média-Variância

5.1 Validação do Modelo

De acordo com o desenvolvimento apresentado no Capítulo 4 para o modelo multiperíodo de média-variância sem posições a descoberto nos ativos de risco, a principal dificuldade identificada para a utilização do modelo foi o cálculo do parâmetro μ . A determinação deste parâmetro está associado ao cálculo de ψ , o qual depende da característica aleatória das variáveis envolvidas.

Foram consideradas para a implementação do modelo duas formas de cálculo para o parâmetro ψ . A primeira consiste em estimar este parâmetro através de cálculo numérico aplicado à Equação (5.2) apresentada anteriormente. A segunda forma de cálculo consiste em simular o modelo multiperíodo com a aproximação proposta no Capítulo 4.

A validação do modelo a ser aplicado ao mercado brasileiro objetiva identificar o modelo que apresenta um retorno esperado, simulado através de realizações do modelo, mais próximo ao retorno esperado indicado por um investidor.

5.1.1 ψ Estimado

Considerando o método de cálculo que estimativa o parâmetro ψ , tomemos inicialmente o sistema (5.1), onde a matriz 2×2 que segue pode ser representada por $A(k)$.

$$\begin{pmatrix} z(k+1) \\ y(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_f(k) & -\|\bar{\theta}(k)\|^2 \\ 0 & \varrho(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(k) \\ y(k) \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Sendo

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

e $\mathcal{A} = \prod_{k=0}^{T-1} A(k)$, através da Equação (5.1) temos:

$$\begin{pmatrix} z(T) \\ y(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_f(T-1) & -\|\bar{\theta}(T-1)\|^2 \\ 0 & \varrho(T-1) \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} r_f(0) & -\|\bar{\theta}(0)\|^2 \\ 0 & \varrho(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(0) \\ y(0) \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Pela Equação (5.3) verificamos que o cálculo de ψ independe dos valores de $z(0)$ e $y(0)$, porém está diretamente relacionado com o cálculo dos parâmetros $r_f(k)$, $\bar{\theta}(k)$ e $\varrho(k)$, $k = 0, \dots, T-1$.

O parâmetro $r_f(k)$ é igual ao retorno do ativo livre de risco no momento da determinação da estratégia de investimento. O parâmetro $\bar{\theta}(k)$ é determinístico e calculado pelos retornos e covariâncias dos ativos de risco e do retorno do ativo livre de risco, conforme Equação (4.14). O valor de $\varrho(k)$, considerado para a simulação do modelo multiperíodo com ψ estimado, foi calculado pela esperança apresentada na Equação (5.4) que segue:

$$\varrho(k) = E[\{r_f(k) - (\|\bar{\theta}(k)\|^2 + w(k)' \Sigma(k)^{1/2} (G(k)')^{-1} \bar{\theta}(k))\} 1_{\{w(k) \in \Gamma(k)\}}]. \quad (5.4)$$

Na determinação de cada estratégia a ser utilizada o valor de $\varrho(k)$, $k = 0, \dots, T$, foi estimado através do cálculo da Equação (5.4) com a média de 1000 ocorrências da equação que segue:

$$r_f(k) - (\|\bar{\theta}(k)\|^2 + w(k)' \Sigma(k)^{1/2} (G(k)')^{-1} \bar{\theta}(k)) \} 1_{\{w(k) \in \Gamma(k)\}},$$

onde $w(k)$ utilizado foi uma variável aleatória de distribuição gaussiana padrão.

Para cada $w(k)$ gerado, o valor de $r_f(k) - (\|\bar{\theta}(k)\|^2 + w(k)' \Sigma(k)^{1/2} (G(k)')^{-1} \bar{\theta}(k))$ era calculado, e caso este valor fosse maior que zero, era utilizado no cálculo da esperança apresentado na Equação (5.4).

5.1.2 ψ Aproximado

Para a validação do modelo com a utilização de um parâmetro ψ aproximado considerou-se a implementação da aproximação proposta no item 4.2.2, novamente apresentada na equação que segue:

$$\psi = \prod_{k=0}^{T-1} (r_f(k) - \|\bar{\theta}(k)\|^2).$$

Neste segundo método proposto, os parâmetros $r_f(k)$ e $\bar{\theta}(k)$, necessários para o cálculo de ψ , dependem exclusivamente do retorno do ativo livre de risco, e dos retornos e covariâncias dos ativos de risco, sendo calculados no momento da determinação da estratégia de investimento.

5.1.3 Cenário de Validação do Modelo

Para a escolha do método de cálculo do parâmetro ψ a ser utilizado na simulação aplicada ao mercado brasileiro, foi considerada a criação de um cenário simplificado onde buscou-se identificar o método de cálculo que resultasse em uma riqueza final esperada de valor mais próximo ao inicialmente escolhido por um

investidor. Para a obtenção da esperança do valor final da carteira considerou-se simulações de Monte Carlo, na qual cada horizonte de tempo simulado independia das simulações de mesmo horizonte de tempo anteriores.

O cenário simplificado proposto foi constituído por três ativos de risco e um ativo livre de risco, com retornos e covariâncias como seguem:

$$r_f = 1,04 ,$$

$$E(e_t) = \begin{pmatrix} 1,162 & 1,246 & 1,228 \end{pmatrix} ,$$

$$Cov(e_t) = \begin{pmatrix} 0,0146 & 0,0187 & 0,0145 \\ 0,0187 & 0,0854 & 0,0104 \\ 0,0145 & 0,0104 & 0,0289 \end{pmatrix} ,$$

onde r_f representa o retorno do ativo livre de risco, $E(e_t)$ o retorno esperado a cada período para os ativos de risco, e $Cov(e_t)$ a covariância entre os ativos de risco, com $t = 0, \dots, T - 1$. A riqueza final esperada, determinada por um investidor como sendo a desejada de ser alcançada, ao final de um horizonte de 4 períodos foi de \$10,1043, ou seja $E(x(4)) = 10,1043$.

5.1.4 Simulações de Validação do Modelo

A medida de comparação entre os modelos foi a média feita da riqueza final obtida com a realização de 100 iterações de um horizonte de investimento de 4 períodos. As iterações realizadas eram independentes umas das outras, sendo que a riqueza inicial do investidor no início de cada iteração era igual a \$1. O conjunto de valores da riqueza do investidor obtida ao final do quarto período de cada iteração foram utilizados no cálculo da esperança da riqueza final para os modelos considerados.

Com um horizonte de quatro períodos em cada iteração, e com a determinação da estratégia de investimento no início de cada período, a transição entre períodos era feita com a geração de uma realização de retornos dos ativos de risco através da utilização de uma variável aleatória de distribuição Gaussiana padrão, $w(t)$, como apresentado na Equação (5.5). Os retornos obtidos eram aplicados aos percentuais alocados em cada ativo, alterando o valor da riqueza do investidor ao final do período, conforme Equação (5.6),

$$\hat{e}_t = E(e_t) + Cov(e_t)^{1/2} \cdot w(t), \quad (5.5)$$

$$x_{t+1} = r_f \cdot (x_t - u_t' \cdot \mathbf{1}) + \hat{e}_t' \cdot u_t, \quad (5.6)$$

onde u_t representa o vetor de alocações financeiras nos ativos de risco disponíveis no mercado calculado pelo modelo considerado, e $\hat{e}_t$ os retornos gerados em uma realização dos ativos de risco.

A simulação do modelo multiperíodo implementada com o método de cálculo ψ estimado resultou uma esperança da riqueza final igual a \$16,30, ou seja $E(x(4)) = 16,30$, com variância do valor da riqueza final, $Var(x(4))$, igual a 21,98. Para a simulação implementada com o método de cálculo ψ aproximado a esperança da riqueza final obtida foi de \$10,79, ou seja $E(x(T)) = 10,79$. Com variância da riqueza final, $Var(x(T))$, igual a 3,15.

Dada o melhor resultado do valor da esperança da riqueza final obtida com o modelo de ψ aproximado na simulação com horizonte de tempo de 4 períodos, \$10,79, comparado com o valor da riqueza final esperada selecionada para o modelo, \$10,10, esta implementação foi escolhida a ser utilizada na simulação do modelo multiperíodo aplicado ao mercado brasileiro.

5.2 Fonte de Dados

Para a realização do trabalho empírico foram constituídos três cenários formados por ativos negociados na BOVESPA [2]. O primeiro cenário utilizado, denominado neste trabalho de IBrX, foi composto pelas ações Petrobrás PN (PETR4), Petrobrás ON (PETR3), Ambev PN (AMBV4), Banco Itaú PN (ITAU4), Bradesco PN (BBDC4), Vale do Rio Doce PNA (VALE5), Vale do Rio Doce ON (VALE3), Telemar PN (TNLP4), Embraer PN (EMBR4), e Brasil Telecom Participações PN (BRTP4).

O segundo cenário simulado, denominado neste trabalho de IEE, foi constituído por ações de algumas empresas pertencentes ao setor de energia elétrica. As ações selecionadas para compor este cenário foram Celesc PNB (CLSC6), Cemig PN (CMIG4), Cesp PN (CESP4), Copel PNB (CPLE6), Eletrobrás PNB (ELET6), Eletropaulo PN (ELPL4), Emae PN (EMAE4), Light ON (LIGH3), Tractabel ON (TBLE3), e Transmissão Paulista PN (TRPL4).

O terceiro cenário simulado, denominado neste trabalho de IBOV, foi constituído pelas ações formadoras dos cenários IBrX e IEE.

Em todos os cenários trabalhados, IBrX, IEE, e IBOV, a taxa de retorno utilizada para o ativo livre de risco foi a taxa do índice CDI vigente na data da realização da simulação, ajustada para o período simulado, semanas.

5.3 Metodologia

Para a simulação dos cenários IBrX, IEE, e IBOV foram obtidas as médias e covariâncias dos ativos considerados em cada cenário no período de 01/02/2004 à 31/01/2005. Nos três cenários fixou-se um retorno esperado para a carteira de 24,5% a.a., e retorno do ativo livre de risco como sendo a taxa do CDI no momento da determinação de cada estratégia de investimento. Esta escolha deu-se ao fato do modelo construído ter como premissa a existência de um ativo livre de risco disponível no mercado, neste caso a premissa é atendida desconsiderando

Figura 5.1: Taxa anual de retorno do CDI no período simulado

a volatilidade no retorno esperado do CDI, e assumindo como certo o retorno deste ativo no momento da escolha da estratégia.

O período de simulação dos cenários foi de 07/02/2005 à 06/02/2006, totalizando 53 semanas e 52 estratégias de investimento definidas para cada modelo. Após cada realização semanal dos cenários, os retornos obtidos para os ativos que constituíam estes cenários eram realimentados para um novo cálculo da média e covariância, substituindo o histórico de retornos mais antigos. Assim, a cada determinação de estratégia de alocação as médias e covariâncias utilizadas para a tomada de decisão compreendiam o histórico dos últimos 12 meses dos ativos trabalhados.

Na Figura 5.1 é apresentado o retorno anual do CDI ao longo do período simulado. A cada cálculo de estratégia, a taxa de retorno corrente deste ativo foi utilizado como sendo a taxa do ativo livre de risco do modelo.

Devido ao caráter discreto das simulações e objetivando uma frequência razoável de realocação, estabeleceu-se como sendo uma semana o intervalo entre a geração de estratégias pelos modelos uniperíodo e multiperíodo estudados. Para as simulações realizadas, a segunda-feira de cada semana foi escolhida como

Figura 5.2: Evolução do Índice Bovespa no período estudado

sendo o dia em que o investidor deveria reavaliar sua estratégia de investimento, fazendo-se necessário assim alocar a riqueza do investidor conforme as estratégias apresentadas pelos modelos.

Na Figura 5.2 é apresentada a evolução do Índice Bovespa ao longo das semanas analisadas e simuladas. Este índice é o mais importante indicador de desempenho médio das cotações do mercado de ações brasileiro, devendo-se ao fato de retratar o comportamento dos principais ativos negociados na BOVESPA. Destaca-se nesta figura a evolução ascendente do mercado de ações no período trabalhado e a queda de 8 semanas consecutivas no valor deste índice a partir da 6ª semana simulada.

Considerando o período de realocação dos ativos, semanas, o modelo uni-período de Markowitz sem posições a descoberto nos ativos de risco foi parametrizado com retornos semanais fixos iguais a 0,42% a.s., e retornos livres de risco iguais à taxa semanal do CDI disponível no mercado no momento da determinação da estratégia, conforme Figura 5.1 apresentada.

5.4 Resultado e Análise dos Dados

As simulações realizadas para os cenários IBrX, IEE, e IBOV resultaram nas Figuras 5.3, 5.8, e 5.11, respectivamente. Conforme mencionado anteriormente, a implementação considerada para o modelo multiperíodo na geração das estratégia de investimento foi a utilização do parâmetro ψ aproximado.

Nestas figuras são apresentadas as evoluções das riquezas de investidores ao longo das semanas considerando as estratégias indicadas pelos modelos de Markowitz sem posições a descoberto nos ativos de risco, multiperíodo sem posições a descoberto nos ativos de risco de horizontes de tempo iguais a 2, 4, 8 e 12 semanas.

Em todos os cenários trabalhados a riqueza do investidor teve seu valor inicial igual a \$1, e sua variação ao longo do tempo determinada pela variação dos preços dos ativos alocados pelo investidor de acordo com as estratégias apontadas pelos modelos.

Para a primeira simulação, cenário IBrX, podemos notar que para o modelo multiperíodo com horizonte de tempo de 2, 4, 8, e 12 semanas as estratégias encontradas foram similares ao longo do tempo. Para uma riqueza final esperada de 24,5%, escolhida no início da simulação, os retornos finais obtidos foram 26,10%, 27,01%, 28,61% e 28,02%, para os horizontes de tempo de 2, 4, 8, e 12 semanas, respectivamente.

Ainda com relação ao cenário IBrX, a estratégia de período único resultou em um retorno anual de 374%, porém com uma volatilidade de 2246% em seus retornos semanais. A volatilidade dos retornos semanais das carteiras com estratégia multiperíodo foram de 64,69%, 34,33%, 301,72%, e 103,82%, para as carteiras com horizontes de tempo iguais a 2, 4, 8, e 12 semanas, respectivamente.

As constatações de volatilidade dos retornos obtidos através das estratégias adotadas podem ser observados através da Figura 5.4. Pode ser notado claramente a maior variação dos retornos obtidos com as estratégias uniperíodo com relação ao retornos obtidos com as estratégias multiperíodo.

Figura 5.3: Evolução da riqueza ao longo do tempo com as estratégias de investimento sem posições a descoberto em ativos de risco e ψ aproximado para o cenário IBrX

Figura 5.4: Rentabilidade das estratégias de investimento sem posições a descoberto em ativos de risco e ψ aproximado para o cenário IBrX

Figura 5.5: Erro entre retorno esperado e riqueza do investidor para o modelo multiperíodo de horizonte de tempo de 4 semanas e ψ aproximado para o cenário IBrX

Considerando o modelo multiperíodo de horizonte de tempo igual a 4 semanas do cenário IBrX é apresentado na Figura 5.5 o erro percentual entre a riqueza esperada ao final de cada semana e a riqueza real conseguida pelo investidor seguindo as estratégias de investimento propostas pelo modelo. A riqueza esperada ao final de cada semanas foi calculada como sendo a riqueza esperada no final do período simulado, 1,2435, distribuída de forma composta para a obtenção de um retorno de 24,35% ao final de 52 semanas.

O erro negativo apontado na figura ocorre quando a riqueza atual do investidor supera a riqueza esperada para o instante de tempo considerado. Claramente pode-se notar pela figura a atuação do modelo multiperíodo na adoção de estratégias com maior rentabilidade quando a riqueza do investidor ficou abaixo do valor esperado, indicado na figura pelo erro positivo, ou até mesmo quando o valor da riqueza do investidor aproxima-se do valor esperado.

A diminuição crescente do erro apresentado na Figura 5.5 ocorrida quando toda riqueza do investidor estava alocada no ativo livre de risco está relacionada com a diferença entre a taxa semanal de retorno do ativo livre de risco e a taxa

semanal de crescimento do valor esperado. A taxa semanal do ativo livre de risco ao longo do período simulado variou de 0,34% a.s. à 0,30% a.s., enquanto a taxa de crescimento do valor esperado resultante da riqueza final esperada selecionada pelo investidor foi de 0,42% a.s.. Como a taxa do valor esperado foi maior do que a taxa de retorno do ativo livre de risco, o erro do valor da carteira diminuiu ao longo do tempo enquanto a riqueza do investidor estava integralmente alocada no ativo livre de risco.

A Figura 5.6 apresenta a estratégia de alocação indicada pelo modelo multiperíodo ao longo do tempo. Na maior parte do período simulado a alocação indicada pelo modelo foi a alocação de toda riqueza do investidor no ativo livre de risco. Esta indicação de alocação está de acordo com o esperado para os instantes de tempo onde a riqueza do investir era superior à riqueza esperada. Para estes casos a alocação de risco zero já garante que a riqueza do investidor continue acima do valor esperado desejado.

Através da Figura 5.6 podemos observar que ao longo de todo horizonte simulado para o cenário IBrX não houve em nenhum momento a posições a descoberto nos ativos de risco, validando a característica do modelo multiperíodo com relação a tal restrição.

Para comparar o retorno esperado pelo modelo multiperíodo sem posições a descoberto em ativos de risco, dada a estratégia apontada em cada instante de tempo, com o retorno realizado a partir de tal estratégia de alocação, a Figura 5.7 apresenta em azul a esperança e volatilidade esperadas pelo modelo a cada instante de tempo. A mesma figura apresenta em vermelho o retorno obtido pela estratégia apontada com a realização do cenário. Destaca-se no período simulado a estratégia indicada pelo modelo na 48ª semana. Para esta configuração de ativos o retorno esperado era de 0,62% e volatilidade igual a 1,17%. Com a realização dos retornos dos ativos para a semana, a estratégia adotada resultou em um retorno de 2,09%, corrigindo o erro positivo do valor da carteira com relação ao valor esperado.

Com relação aos retornos finais das carteiras do cenário IEE, podemos des-

Figura 5.6: Estratégia de alocação para o modelo multiperíodo de horizonte de tempo de 4 semanas e ψ aproximado para o cenário IBrX

Figura 5.7: Retorno esperado e retorno realizado para o modelo multiperíodo de horizonte de tempo de 4 semanas e ψ aproximado para o cenário IBrX

tacar os resultados obtidos pelas estratégias multiperíodo com horizontes de investimento iguais a 2, 8, e 12 semanas. Estas carteiras resultaram retornos anuais de 28,38%, 79,91%, e 24,16%, respectivamente. Para este cenário obtivemos um retorno final para o modelo de período único igual a -8,01%, com volatilidade de retorno no período igual a 1250%.

Nas simulações realizadas foram considerados falidos os investidores que obtivessem riqueza inferior a zero em algum momento ao longo do período simulado. Para os ensaios em que ocorreu falência, o investidor ficou fora do mercado e da adoção de novas estratégia de investimento a partir do ocorrido. Vale lembrar que uma das premissas para os modelos aqui simulados é que o investidor seja auto-financiado, não podendo injetar e nem retirar riqueza da carteira ao longo do tempo.

Para a simulação do modelo multiperíodo com horizonte de investimento de 4 semanas no cenário IEE, houve a falência do investidor na 9ª semana simulada. Nesta semana o modelo indicou um estratégia excessivamente vendida no ativo livre de risco, como pode ser observado na Figura 5.10.

A queda na riqueza das carteiras simuladas para o cenário IEE ocorrida na 9ª semana está de acordo com a queda observada para o Índice BOVESPA apresentado na Figura 5.2. Tal fato indica a forte correlação entre os ativos do cenário IEE e o Índice BOVESPA no período analisado.

Para o cenário IEE, as volatilidades das carteiras com estratégia multiperíodo de horizontes de investimento iguais a 2, 8, e 12 semanas foram de 91,26%, 594,03%, e 224,42%, respectivamente.

Na Figura 5.9 observamos para o cenário IEE, de simulação com horizonte de tempo de 4 semanas, o erro crescente na riqueza do investidor com relação ao que era esperado. A adoção da estratégia excessivamente vendida no ativo livre de risco ocorreu com um erro de 0,25%, indicado a alta sensibilidade do modelo para desvios positivos do valor esperado e a adoção de estratégias muito arriscadas para a correção destes desvios.

Figura 5.8: Evolução da riqueza ao longo do tempo para as estratégias de investimento sem posições a descoberto em ativos de risco e ψ aproximado no cenário IEE

Figura 5.9: Erro entre retorno esperado e riqueza do investidor para o modelo multiperíodo de horizonte de tempo de 4 semanas e ψ aproximado para o cenário IEE

Figura 5.10: Estratégia de alocação para o modelo multiperíodo de horizonte de tempo de 4 semanas e ψ aproximado para o cenário IEE

Considerando o mercado completo IBOV, constituído pelos ativos pertencentes aos cenários IBrX e IEE, foram obtidas as evoluções das riquezas dos investidores conforme apresentado na Figura 5.11.

O retorno da estratégia de alocação uniperíodo para o cenário IBOV foi de 76,45%. Para os modelos multiperíodo de horizonte de tempo 2, 4, 8 e 12 semanas os retornos obtidos foram de 26,10%, 26,07%, 38,77%, e 28,86%, respectivamente.

A volatilidade dos retornos conseguidos com a estratégia uniperíodo no cenário IBOV foi de 2577%. Para as estratégias multiperíodo de horizonte de tempo 2, 4, 8 e 12 semanas, as volatilidades obtidas foram de 64,72%, 31,32%, 309,41%, e 115,83%, respectivamente.

Na Figura 5.13 é apresentada as alocações feitas ao longo do tempo nos ativos disponíveis no mercado para o cenário IBOV. Mesmo com a disponibilidade de ativos dos cenários IBrX e IEE, as estratégias determinadas para o cenário IBOV apontaram preferencialmente alocações em ativos pertencentes ao cenário IBrX. Tal fato pode justificar a semelhança dos retornos finais obtidos para os cenários IBrX e IBOV.

Figura 5.11: Evolução da riqueza ao longo do tempo com as estratégias de investimento sem posições a descoberto em ativos de risco e ψ aproximado para o cenário IBOV

Com a disponibilidade de um maior número de oportunidade de investimento, o erro entre a riqueza esperada a cada instante de tempo e a riqueza alcançada pelo investidor, exibido na Figura 5.12 para o cenário IBOV, apresentou ligeira melhoria com relação ao erro obtido com a simulação do cenário IBrX, exibido na Figura 5.5. Para os instantes de tempo em que a riqueza do investidor estava abaixo do valor esperado, a riqueza obtida com o cenário IBOV esteve mais perto do valor esperado do que a riqueza obtida com o cenário IBrX. Este resultado indica a melhoria de performance do modelo multiperíodo com o aumento do número de oportunidades de investimento.

Outra observação que pode ser feita a partir do ensaio com o cenário completo, IBOV, é que mesmo com a existência de estratégias de investimento mais arriscadas, como as indicadas na simulação do cenário IEE, o modelo multiperíodo identificou no mercado completo um conjunto de oportunidades de investimento com retornos esperados que satisfaz o retorno final esperado pelo investidor, e que apresentou baixo nível de risco quando comparado ao cenário IEE.

Diferentemente do ocorrido para o cenário IEE de horizonte de tempo de 4

Figura 5.12: Erro entre retorno esperado e riqueza do investidor para o modelo multiperíodo de horizonte de tempo de 4 semanas e ψ aproximado para o cenário IBOV

semanas, a simulação do cenário IBOV de mesmo horizonte de tempo não resultou na falência do investidor.

Figura 5.13: Estratégia de alocação para o modelo multiperíodo de horizonte de tempo de 4 semanas e ψ aproximado para o cenário IBOV

Figura 5.14: Retorno esperado e retorno realizado para o modelo multiperíodo de horizonte de tempo de 4 semanas e ψ aproximado para o cenário IBOV

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

6.1 Conclusões

Apresentou-se nesse trabalho um modelo de investimento a tempo discreto multiperíodo por média variância sem posições a descoberto em ativos de risco, inspirado na solução obtida para o caso a tempo contínuo. Observamos que a solução para o caso a tempo discreto é mais complexa que o caso a tempo contínuo, o que nos forçou a considerar soluções sub-ótimas. Por outro lado qualquer aplicação prática do modelo exigiria uma formulação a tempo discreto, o que justifica estudar este caso. Para testar o modelo obtido foram realizadas simulações comparando o modelo desenvolvido com o modelo de Markowitz uniperíodo sem posições a descoberto nos ativos de risco aplicado sucessivamente no tempo para horizonte de investimento igual a 2, 4, 8, e 12 semanas.

Verificou-se que o modelo de Markowitz resulta em estratégias mais arriscadas para um mesmo ganho esperado, acarretando na maior volatilidade da carteira formada pelas estratégias deste modelo em comparação às carteiras formadas pelo modelo multiperíodo que não indicam posições excessivamente vendidas no ativo livre de risco.

Com os ensaios realizados para o modelo multiperíodo, constatou-se que o resultado final do modelo pode ser melhorado com o aumento do número de ativos

disponíveis no mercado, e que a implementação do modelo com o parâmetro ψ aproximado apresentou melhores resultados em comparação com a simulação do modelo implementado com o parâmetro ψ estimado.

Assim, o modelo multiperíodo mostrou-se uma ferramenta de resultados satisfatórios com relação à tomada de decisão para operações que restrinjam posições a descoberto em ativos de risco, sendo que posições excessivamente descobertas no ativo livre de risco indicadas pelo modelo devem ser cuidadosamente analisadas.

6.2 Perspectivas

Levando em consideração o modelo multiperíodo proposto neste trabalho e as recentes publicações no segmento de alocação de carteiras de investimento, notoriamente ainda existe espaço para novos desenvolvimentos relacionados à modelos multiperíodo sem posições a descoberto em ativos de risco. Algumas perspectivas de aperfeiçoamento ao modelo seriam:

- 1. Inclusão de restrições intermediárias [19].** As alocações excessivamente arriscadas indicadas pelo modelo multiperíodo de média-variância sem posições a descoberto em ativos de risco, conforme apresentado no Capítulo 5, poderiam ser controladas considerando a formulação apresentada por Nabholz [19], na qual é levado em consideração a utilização de restrições intermediárias de média e variância para a carteira objeto de otimização.
- 2. Inclusão de custos de transação [11].** Tendo em vista as diferentes alocações indicadas pelos modelos multiperíodo ao longo do tempo, os custos transacionais envolvidos podem ser significativos para a performance da carteira trabalhada, e nestes casos acarretando em diferentes decisões de investimento. Assim, a consideração de custos operacionais no modelo multiperíodo de média-variância sem posições a descoberto nos ativos de risco, conforme apresentado por Gulpinar, Rustem, e Settergren [11], tornaria o

modelo mais coerente com relação às práticas de mercado.

Referências Bibliográficas

- [1] BERNSTEIN, P.L.; DAMODARAN, A. **Administração de Investimentos**. Bookman, 2000. 423p.
- [2] BUENO, M.A.S. **Modelos Multi-Período de Média-Variância em carteiras de investimento**. São Paulo, 2002. 141p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- [3] COSTA, O.L.V.; ASSUNÇÃO, H.G.V. **Análise de Risco e Retorno em Investimentos Financeiros**. Editora Manole, 2004. 239p.
- [4] CHEN, A.H.Y.; JEN, F.C.; ZIONTS, S. The Optimal Porfolio Revision Policy. **Journal of Business**, n.1, p.51-61, 1971.
- [5] DANTAS, A.; COSTA, O.L.V. Otimização multiperíodo por média-variância com restrições de alavancagem em ativos de risco. **Congresso Brasileiro de Automática, XVI**, 2006, Salvador. **Anais...** Salvador: CBA, 2006, p.1399-1404.
- [6] DUARTE, A.M. Fast Computation of Efficient Portfolios. **The Journal of Risk**, n.4, p.71-94, 1999.
- [7] DUMAS, B.; LUCIANO, E. An Exact Solution to a Dynamic Portfolio Choice Problem under Transaction Costs. **J. Finance**, n.46, p.577-595, 1991.
- [8] ELTON, E. J.; GRUBER, M. J. **Modern Portfolio Theory and Investment Analysis**. John Wiley, New York, 1995.

- [9] ELTON, E. J.; GRUBER, M. J. The Multi-Period Consumption Investment Problem and Single Period Analysis. **Oxford Economic Paper**, v.26, n.2, p.298-301, 1974.
- [10] GOLL, T.; KALLSEN, J. Optimal portfolio for logarithmic utility. **Stochastic Processes and their Applications**, n.89, p.31-48, 2000.
- [11] GULPINAR, N.; RUSTEM, B.; SETTERGREN, R. **Multistage stochastic mean-variance portfolio analysis with transaction costs**. Innovations in Financial and Economic Networks, Edward Elgar Publishing, 2003.
- [12] HANZA, F.; JANSSEN, J. Portfolio optimization model using asymmetric risk function. **Proc.5th AFIR**, Brussels, Belgium, Vol III bis, p.3-32, 1995.
- [13] LI, X.; ZHOU, X.Y.; LIM, A.E.B. Dynamic mean-variance portfolio selection with no-shorting constraints. **SIAM J. Control Optim**, v.40, n.5, p.1540-1555, 2002.
- [14] MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. **J. Finance**, 7, p.77-91, 1952.
- [15] MARKOWITZ, H. **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments**. John Wiley, New York, 1959.
- [16] MATHWORKS, Matlab, the Language of Technical Computing, Version 6.0. Natick, MA: The Mathworks, Inc., 2000.
- [17] MOSSIN, J. Optimal multi-period portfolio policies. **J. Business**, n.41, p.215-229, 1968.
- [18] NABHOLZ, R.B. **Otimização Robusta de Carteiras utilizando Desigualdades Matriciais Lineares**. São Paulo, 2002. 66p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- [19] NABHOLZ, R.B. **Seleção Ótima de Ativos Multi-Período com Restrições Intermediárias Utilizando o Critério de Média-Variância**. São Paulo, 2006. 132p. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

- [20] NG, W.; LI, D. Optimal Dynamic Portfolio Selection: Multiperiod Mean-Variance Formulation. **Mathematical Finance**, v.10, n.3, p.387-406, 2000.
- [21] ROLL, R. A mean-variance analysis of tracking error. **The Journal of Portfolio Management**, 18, p.13-22, 1992.
- [22] LIU, L.; SHENOY, C.; SHENOY, P. **A linear belief function approach to portfolio evaluation**. Proceedings of the 19th Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-03), Morgan Kaufmann, San Francisco, CA, 2004, p.370-377.
- [23] SAMUELSON, P.A. Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming. **Review of Economics & Statistics**, n.51, p.239-46, 1969.
- [24] SECURATO, J.R. **Decisões Financeiras em Condições de Risco** . Atlas, 1996. 244p.
- [25] SMITH, K.V. A Transition Model for Portfolio Revision. **Journal of Finance**, n.22, p.425-39, 1967.
- [26] SMITH, K.V.; MOSSIN, J. Alternative Procedures for Revising Investment Portfolios. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v.3, n.4, p.371-403, 1968.
- [27] ZHOU, X.Y.; LI, D. Continuous-Time Mean-Variance Portfolio Selection: A Stochastic LQ Framework. **Applied Mathematics e Optimization**, v.42, p.19-33, 2000.