HECTOR BESSA SILVEIRA

FORMAS TRIANGULARES PARA SISTEMAS NÃO-LINEARES COM DUAS ENTRADAS E CONTROLE DE SISTEMAS SEM ARRASTO EM SU(n) COM APLICAÇÕES EM MECÂNICA QUÂNTICA

Tese apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para a obtenção do título de
Doutor em Engenharia

São Paulo
2010

HECTOR BESSA SILVEIRA

FORMAS TRIANGULARES PARA SISTEMAS NÃO-LINEARES COM DUAS ENTRADAS E CONTROLE DE SISTEMAS SEM ARRASTO EM SU(n) COM APLICAÇÕES EM MECÂNICA QUÂNTICA

Tese apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para a obtenção do título de
Doutor em Engenharia

Área de Concentração:
Engenharia de Sistemas

Orientador: Prof. Dr.
Paulo Sérgio Pereira da Silva

São Paulo
2010

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 12 de março de 2010.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Silveira, Hector Bessa
Formas triangulares para sistemas não lineares com duas entradas e controle de sistemas sem arrasto em SU(n) com aplicações em mecânica quântica / H.B. Silveira. -- ed.rev. -- São Paulo, 2010.
214p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle.

1. Sistemas não lineares 2. Controle geométrico 3. Sistemas diferenciais exteriores 4. Sistemas de controle 5. Sistema quântico I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departatmento de Engenharia de Telecomunicações e Controle II. t.

AGRADECIMENTOS

Minha mais profunda gratidão aos meus orientadores, Prof. Dr. Paulo Sérgio Pereira da Silva e Prof. Dr. Pierre Rouchon, por me aceitarem como aluno, por estarem constantemente presentes, por me guiarem com paciência e segurança, pela generosidade em ensinar e em remover minhas dúvidas, pelas incontáveis vezes em que passamos horas e horas conversando, discutindo e preenchendo todo o quadro com esboços de novas idéias (os rabiscos no quadro pareciam uma obra de arte!), pelo comprometimento em realizar estudos do mais alto nível acadêmico, pela gentileza e amizade, e por sempre me mostrarem o quanto ainda tenho que aprender quando eu, erroneamente, acho que sei alguma coisa. Sinto-me privilegiado por ser aluno de mestres como vocês. Muito obrigado!

À CAPES, pelo financiamento integral da presente tese e pela oportunidade em realizar um estágio de doutorado na França sob a orientação do Prof. Dr. Pierre Rouchon.

Aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Carlos José Braga Barros, Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli, Prof. Dr. Luiz Antônio Barrera San Martin e Prof. Dr. Carlos Corrêa Filho, pelas sugestões e comentários altamente enriquecedores.

À Universidade de São Paulo, pelo oferecimento de uma excelente formação acadêmica.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, por todo o suporte disponibilizado.

Gostaria de agradecer também aos professores do Laboratório de Automação e Controle e aos colegas da pós-graduação.

Ao Prof. Dr. Sebastião Gomes dos Santos Filho e ao Prof. Dr. José Jaime da Cruz, pela constante atenção e ajuda aos bolsistas da CAPES.

Ao Prof. Dr. Ivan Pontual Costa, por ter sugerido ótimos livros para o estudo de mecânica quântica.

Ao meu pai, Hamilton Medeiros Silveira, pelo companheirismo e por ter me ensinado como estudar.

Aos meus pais, Maria Lenise Bessa Silveira e Hamilton Medeiros Silveira, a minha irmã, Sheila Koettker Silveira, e ao meu irmão, Otávio Bessa Silveira, por todo o amor e carinho.

A minha esposa, Denise Pinheiro, e a Amélie, Jean Pierre e Charlotte, pelos momentos felizes que sempre passamos juntos.

Que este trabalho possa trazer
algum tipo de benefício para as pessoas.

RESUMO

A presente tese aborda dois problemas distintos e independentes: triangularização de sistemas não-lineares com duas entradas e controle de sistemas sem arrasto que evoluem no grupo especial unitário SU(n). Em relação ao primeiro, estabeleceu-se, através da generalização de resultados bem conhecidos, condições geométricas para que um sistema com duas entradas seja descrito por uma forma triangular específica após uma mudança de coordenadas e uma realimentação de estado estática regular. Para o segundo problema, desenvolveu-se uma estratégia de controle que força o estado do sistema a rastrear assintoticamente uma trajetória de referência periódica que passa por um estado objetivo arbitrário. O método de controle proposto utiliza os resultados de convergência de tipo-Lyapunov que foram estabelecidos pela presente pesquisa e que tiveram como inspiração uma versão periódica do princípio da invariância de LaSalle. Apresentou-se, ainda, os resultados de simulação obtidos com a aplicação da técnica de controle desenvolvida a um sistema quântico consistindo de duas partículas de spin-1/2, com o objetivo de gerar a porta lógica quântica C-NOT.

Palavras-chave: Sistemas não-lineares; Formas triangulares; Platitude diferencial; Teoria de controle geométrica; Sistemas diferenciais exteriores; Controle não-linear; Grupo especial unitário; Estabilidade de Lyapunov; Controle de sistemas quânticos; Porta lógica quântica C-NOT.

ABSTRACT

This thesis treats two distinct and independent problems: triangularization of nonlinear systems with two inputs and control of driftless systems which evolve on the special unitary group SU(n). Concerning the first, one has established, by means of the generalization of well-known results, geometric conditions for a system with two inputs to be described by a specific triangular form after a change of coordinates and a regular static state feedback. For the second problem, one has developed a control strategy that forces the state of the system to track in an asymptotic manner a periodic reference trajectory which passes by an arbitrary goal state. The proposed control method uses Lyapunov-like convergence results that were established in this research and which were inspired in a periodic version of LaSalle's invariance principle. Furthermore, one has shown the simulation results obtained from the application of the developed control technique to a quantum system consisting of two spin-1/2 particles, with the aim of generating the C-NOT quantum logic gate.

Keywords: Nonlinear systems; Triangular forms; Differential flatness; Geometric control theory; Exterior differential systems; Nonlinear control; Special unitary group; Lyapunov Stability; Control of quantum systems; C-NOT quantum logic gate.

Sumário

1 Introdução **1**

I Formas Triangulares para Sistemas Não-Lineares com Duas Entradas **16**

2 Fundamentos de Sistemas Diferenciais Exteriores **17**

2.1 Notações e convenções 18

2.2 Sistemas diferenciais exteriores 19

3 Formas Triangulares para Sistemas Não-Lineares com Duas Entradas **37**

3.1 Campos de vetores parametrizados e aumentados 40

3.2 Resultados conhecidos para sistemas sem arrasto 42

3.3 Condições necessárias e suficientes para sistemas com arrasto 47

3.4 Condições suficientes para sistemas planares com até cinco estados 67

3.4.1 Geometria diferencial de dimensão infinita 67

3.4.1.1 $\mathbb{R}^A$-variedades 67

3.4.1.2 Diffieties 68

3.4.1.3 Sistemas 69

3.4.1.4 Representações de estado e saídas 69

3.4.1.5 Sistemas associados a sistemas de controle 70

3.4.2 Resultado de triangularização 71

II Controle de Sistemas sem Arrasto em SU(n) com Aplicações em Mecânica Quântica **74**

4 Planejamento Periódico de Trajetórias para Sistemas sem Arrasto em SU(n) **75**

4.1 Notações 76
4.2 Definição do problema de controle 78
4.3 Solução do problema de controle 82
4.4 Aplicação em mecânica quântica 115

5 Considerações Finais 135

A Resultados de Geometria Diferencial 138

B Formalização dos Conceitos de Campo de Vetores Parametrizado e de Campo de Vetores Aumentado 146

C Demonstrações de Alguns Resultados Conhecidos da Teoria de Controle Geométrica 152
C.1 Prova da Proposição 3.4 153
C.2 Prova da Proposição 3.5 154
C.3 Prova do Teorema 3.7 155

D Proposições e Demonstração do Teorema 3.17 161

E Lemas Desenvolvidos para Demonstrar o Teorema 4.20 172

F Artigo "*A Triangular Form for Flat Nonlinear Systems with Two Controls and Five or Less States*" 181

G Artigo "*A Time-Periodic Lyapunov Approach for Motion Planning of Controllable Driftless Systems on SU*(n)" 188

Lista de Figuras

1.1 Problema de planejamento periódico de trajetórias. 8

4.1 Convergência da norma do erro de rastreamento $X_{rwa} - X_r$ para zero. . . . 126
4.2 Funções u_k^r e entradas u_k, $1 \leq k \leq 6$. 127
4.3 "Realimentações" $v_k = V(X_{rwa}^{\dagger} H_k X_r(t))$, $1 \leq k \leq 6$. 127
4.4 Norma do erro de rastreamento $X - X_r$. 128
4.5 Entradas u_x, u_y, u_z. 128
4.6 Convergência da norma do erro de rastreamento $X_{rwa}^{\alpha} - X_r^{\alpha}$ para zero. . . 129
4.7 Norma do erro de rastreamento $X^{\alpha} - X_r^{\alpha}$. 129
4.8 Norma do erro de rastreamento $X^{\alpha} - X_r^{\alpha}$ no intervalo [3750, 3775]. 130
4.9 Entradas u_x^{α}, u_y^{α}, u_z^{α}. 130
4.10 Entradas u_x^{α}, u_y^{α}, u_z^{α} no intervalo [1000, 1100]. 131
4.11 Norma do erro de aproximação $X^{\alpha} - X_{rwa}^{\alpha}$. 131
4.12 Norma do erro de aproximação $X^{\alpha} - X_{rwa}^{\alpha}$ no intervalo [1000, 1050]. 132
4.13 Funções $u_k^{\alpha r}$ e entradas u_k^{α}, $1 \leq k \leq 6$. 132
4.14 "Realimentações" $v_k^{\alpha} = V((X_{rwa}^{\alpha})^{\dagger} H_k X_r^{\alpha}(t))$, $1 \leq k \leq 6$. 133
4.15 Convergência da norma do erro de rastreamento $X_{rwa} - X_r$ para zero para o caso regular. 133
4.16 Funções u_k^r e entradas u_k para o caso regular, $1 \leq k \leq 6$. 134
4.17 "Realimentações" $v_k = V(X_{rwa}^{\dagger} H_k X_r(t))$ para o caso regular. 134

Capítulo 1

Introdução

A presente pesquisa de doutorado, financiada pela CAPES, é composta de duas partes. A primeira, que foi realizada principalmente no Laboratório de Automação e Controle (LAC) do Departamento de Telecomunicações e Controle (PTC) da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (USP), trata do problema de triangularização de sistemas de controle não-lineares com duas entradas. A segunda parte, desenvolvida majoritariamente no Centre Automatique et Systèmes (CAS)[1] na França sob a orientação do Prof. Dr. Pierre Rouchon durante um estágio de doutorado no exterior com bolsa de estudos da CAPES, aborda o problema de controlar sistemas sem arrasto que evoluem no grupo especial unitário SU(n). A motivação para o estudo de tal classe de sistemas de controle teve como origem suas importantes aplicações em sistemas quânticos. Ressaltamos, desde já, que apesar de ambas as partes estarem baseadas em teoria de controle geométrica, elas são, em princípio, independentes.

Neste trabalho, mostraremos os resultados obtidos sobre a existência de descrições triangulares para sistemas não-lineares com duas entradas (referentes à primeira parte) e apresentaremos as soluções encontradas para o problema de planejamento periódico de trajetórias para sistemas de controle sem arrasto em SU(n) (segunda parte). Exibiremos também os resultados de simulação obtidos na geração da porta lógica quântica C-NOT (*Controlled-NOT*) em um sistema quântico composto de duas partículas de spin-1/2, que é um sistema que evolui em SU(4). Observamos que a porta C-NOT é de fundamental importância na teoria de computação quântica [81], [54].

[1] Centre Automatique et Systèmes (CAS) da École Nationale Supérieure des Mines de Paris (ENSMP) (atualmente Mines ParisTech).

Enfatizamos, uma vez mais, que os resultados alcançados na segunda parte não estão relacionados com os resultados sobre formas triangulares da primeira, de modo que esses não foram utilizados no desenvolvimento daqueles.

A primeira parte da pesquisa está baseada na bem conhecida teoria de controle geométrica de dimensão finita (veja [41], [82], [105], [96], [46]), em sistemas diferenciais exteriores (veja [10], [105], [26], [130], [43]) e na teoria de controle geométrica de dimensão infinita desenvolvida mais recentemente em [29], [30], [94] e aprofundada em [87], [88], [20], [19], [90], [91]. Aplicações de sistemas diferenciais exteriores em problemas de controle podem ser vistas em [105], [76], [68], [69], [70], [121], [124], [84], [98], [85], [32], [86], por exemplo. Em relação à teoria de controle geométrica de dimensão infinita, merece ser destacada a referência [19] pela excelente exposição didática e ao mesmo tempo minuciosa, assim como por sua grande influência no desenvolvimento deste trabalho.

Vejamos então os resultados obtidos sobre descrições triangulares. Considere um sistema de controle não-linear com duas entradas dado por

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2, \tag{1.1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $n \geq 2$ e $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ é o controle. Em [76], são apresentadas condições geométricas necessárias e suficientes para que o sistema (1.1) com $f = 0$, ou seja, sem arrasto, seja descrito em torno de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pela seguinte *forma em cascata* (*chained form*)

$$\begin{array}{rcl} \dot{z}_1 & = & z_2 v_1 \\ \dot{z}_2 & = & z_3 v_1 \\ & \vdots & \\ \dot{z}_{n-3} & = & z_{n-2} v_1 \\ \dot{z}_{n-2} & = & z_{n-1} v_1 \\ \dot{z}_{n-1} & = & v_2 \\ \dot{z}_n & = & v_1, \end{array} \tag{1.2}$$

onde $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ é a nova entrada. Mais precisamente, foi provado em [76] que determinadas condições geométricas são atendidas em torno de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se e somente se existe uma mudança de coordenadas $z = \Psi(x)$ (difeomorfismo local) e uma realimentação de estado estática regular da forma $u = \beta(x)v$, com $\beta(x_0) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertível, ambas definidas em torno de x_0, tais que o sistema de controle (1.1) com $f = 0$ é descrito pela forma triangular (1.2) (veja o Teorema 3.7 do Capítulo 3, no qual o leitor notará também que a forma em cascata está diretamente relacionada com a Forma Normal de Goursat).

É importante ressaltar que diversos problemas de controle para sistemas descritos pela forma em cascata (1.2) foram tratados na literatura como, por exemplo, planejamento de trajetórias ([79], [105]), rastreamento de trajetórias ([45], [104], [13]), estabilização ([104], [115], [118]), linearização por realimentação dinâmica e platitude diferencial ([68]). O conceito de platitude diferencial será explicado mais adiante.

Fortemente inspirados no resultado supracitado de [76], e acrescentando ao mesmo algumas condições geométricas de modo a considerar o arrasto f no sistema (1.1), obtivemos condições geométricas necessárias e suficientes para que o sistema de controle (1.1) (com ou sem arrasto) seja descrito em torno de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pela seguinte forma triangular

$$\begin{array}{rcl} \dot{z}_1 & = & \phi_1(z_1, z_2, z_n) + z_2 v_1 \\ \dot{z}_2 & = & \phi_2(z_1, z_2, z_3, z_n) + z_3 v_1 \\ & \vdots & \\ \dot{z}_{n-3} & = & \phi_{n-3}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, z_n) + z_{n-2} v_1 \\ \dot{z}_{n-2} & = & \phi_{n-2}(z) + z_{n-1} v_1 \\ \dot{z}_{n-1} & = & v_2 \\ \dot{z}_n & = & v_1, \end{array} \tag{1.3}$$

onde $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ é a nova entrada. Em outras palavras, demonstramos que determinadas condições geométricas são atendidas em torno de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se e somente se existe uma mudança de coordenadas $z = \Psi(x)$ e uma realimentação de estado estática regular da forma $u = \alpha(x) + \beta(x)v$, com $\beta(x_0) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertível, ambas definidas em torno de x_0, tais que o sistema de controle (1.1) é descrito pela forma triangular (1.3) (veja o Teorema 3.10).

Além disso, baseados em [68] (veja o Teorema 3.8), que também considera (1.1) com $f = 0$ e apresenta condições suficientes para que a descrição (1.2) seja válida em torno de cada ponto de um conjunto aberto e denso, estabelecemos, por meio de um corolário imediato do Teorema 3.10 mencionado acima, condições geométricas suficientes para que em torno de cada ponto de um conjunto aberto e denso o sistema (1.1) seja descrito por (1.3) (veja o Corolário 3.12).

Portanto, devido ao fato de termos acrescentado condições geométricas nos resultados supracitados de [76] e [68] de modo a levar em conta o arrasto f no sistema (1.1), os teoremas que obtivemos podem ser vistos como generalizações destes trabalhos. Observamos que estes dois resultados são as contribuições principais da primeira parte da presente tese.

Diversos resultados importantes sobre sistemas de controle não-lineares descritos por formas triangulares específicas são encontrados na literatura [41], [42], [96], [105]. Ressaltamos que a bem conhecida forma normal é um exemplo de forma triangular de fundamental importância na teoria de controle não-linear. Em [65], é abordado o problema de planejamento de trajetórias para sistemas não-holonômicos sem arrasto com múltiplas entradas que podem ser descritos pela *forma triangular estrita* (*strict triangular form*). Condições para que tal descrição seja possível foram estabelecidas no trabalho [64].

Antes de apresentarmos o terceiro e último resultado obtido nesta pesquisa referente a formas triangulares, iremos descrever, baseado em [100], [30], [91], [92], [113], [60], uma propriedade de extrema importância na teoria de controle de sistemas não-lineares, a de platitude diferencial. O conceito de platitude diferencial foi introduzido na literatura de controle em [28] (veja também [30]). Um sistema de controle da forma

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1.4}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado e $u \in \mathbb{R}^m$ o controle, é *planar* quando existe uma saída $y = h(x, u) \in \mathbb{R}^m$, denominada de *saída planar*, tal que:

1. O estado e o controle podem ser determinados a partir de y e de um número finito de suas derivadas, ou seja,

$$x = A(y, \dot{y}, \ldots, y^{(q)}), \tag{1.5}$$
$$u = B(y, \dot{y}, \ldots, y^{(q)}), \tag{1.6}$$

   onde A e B são funções suaves (i.e. infinitamente diferenciáveis);

2. As diferenciais $dy_1, \ldots, dy_m, \ldots, dy_1^{(q)}, \ldots, dy_m^{(q)}$ são linearmente independentes em todos os pontos.

Isto significa que

$$x(t) = A(\overline{y}(t), \dot{\overline{y}}(t), \ldots, \overline{y}^{(q)}(t))$$

é a trajetória de (1.4) quando aplicamos a entrada

$$u(t) = B(\overline{y}(t), \dot{\overline{y}}(t), \ldots, \overline{y}^{(q)}(t)),$$

para $t \in \mathbb{R}_+$, onde $\overline{y}$: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação suave arbitrária.

Uma formalização geométrica do conceito de platitude diferencial será apresentada na Seção 3.4.1, que trata sobre geometria diferencial de dimensão infinita, seguindo a definição de [30], [87], [88], [20] [19], [91], [60], [67]. Veremos agora que a propriedade do sistema (1.4) ser planar está fortemente relacionada com o problema de planejamento de trajetórias, que consiste em encontrar uma entrada u: $[0,T] \to \mathbb{R}^m$ tal que a trajetória correspondente de (1.4) com condição inicial $x(0) = x_0$, satisfaz $x(T) = x_T$ no instante $t = T$, onde $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$ e $T > 0$ são arbitrários. Quando (1.4) é planar, obtemos a partir de (1.5) que

$$\begin{aligned} x_0 &= A(y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(q)}(0)), \\ x_T &= A(y(T), \dot{y}(T), \ldots, y^{(q)}(T)). \end{aligned}$$

Assim, ao determinarmos y: $[0,T] \to \mathbb{R}^m$ que satisfaz as condições de contorno $(y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(q)}(0))$ e $(y(T), \dot{y}(T), \ldots, y^{(q)}(T))$ por métodos algébricos ou numéricos, decorre de (1.6) que $u(t) = B(y(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(q)}(t))$, $t \in [0,T]$, soluciona este problema de controle de maneira trivial. É mostrado em [60] (veja também [113]) que as condições de contorno acima podem sempre ser interpoladas por métodos polinomiais. Desse modo, é de se esperar que todo sistema planar é localmente controlável (no sentido de [60]). Isto é de fato verdade, como é demonstrado em [60] (veja também [30]).

Acabamos de ver que, para um sistema planar, a solução para o problema de planejamento de trajetórias é relativamente trivial. Como pode ser visto em [60], [113], [67], os problemas de rastreamento de trajetórias e de rastreamento da saída planar também são facilmente tratados para sistemas planares. Além disso, estas referências reúnem diversas condições conhecidas na literatura para que o sistema (1.4) seja planar (veja também [66] e [86]), e apresentam, ainda, uma grande variedade de exemplos de sistemas elétricos, mecânicos e químicos que são planares.

Na forma em cascata (1.2), é fácil ver que $y = (z_1, z_n)$ é uma saída planar em torno dos pontos em que v_1 é diferente de zero. De fato, podemos determinar as aplicações suaves A e B em (1.5) e (1.6), respectivamente, em torno de tais pontos. Portanto, quando o sistema (1.1) com $f = 0$ pode ser descrito por (1.2) após uma mudança de coordenadas e uma realimentação de estado estática regular, o mesmo é planar em torno dos pontos correspondentes a v_1 não-nulo. Para o sistema triangular (1.3), não é difícil verificar através do Teorema da Função Implícita ou do Teorema 3.15 que $y = (z_1, z_n)$ é uma saída

planar em torno dos pontos que satisfazem

$$\begin{aligned} v_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial z_2}(z) &\neq 0, \\ &\vdots \\ v_1 + \frac{\partial \phi_{n-2}}{\partial z_{n-1}}(z) &\neq 0. \end{aligned}$$

Desse modo, se (1.1) é descrito por (1.3) após uma mudança de coordenadas e uma realimentação de estado estática regular, então (1.1) é um sistema planar em torno dos pontos que correspondem às condições de regularidade acima.

O terceiro e último resultado desenvolvido nesta pesquisa sobre descrições triangulares trata de sistemas planares da forma (1.1) com $2 \leq n \leq 5$ (veja o Teorema 3.17). Demonstramos, utilizando as ferramentas da teoria de controle geométrica de dimensão infinita e com base na interpretação geométrica do Algoritmo da Extensão Dinâmica (AED) feita em [88], [87], [19], [91] (veja também [20]), que se o sistema (1.1) com $2 \leq n \leq 5$ é planar, e a saída planar satisfaz algumas condições de regularidade, então existe uma mudança de coordenadas $z = \Psi(x)$ e uma realimentação de estado estática regular $u = \alpha(x) + \beta(x)v$, tais que (1.1) é descrito pela seguinte forma triangular

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + \phi_1(z_1, z_2, z_n)v_1, \\ \dot{z}_2 &= z_3 + \phi_2(z_1, z_2, z_3, z_n)v_1, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-3} &= z_{n-2} + \phi_{n-3}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, z_n)v_1, \\ \dot{z}_{n-2} &= z_{n-1} + \phi_{n-2}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, z_n)v_1, \\ \dot{z}_{n-1} &= v_2, \\ \dot{z}_n &= v_1 \end{aligned} \tag{1.7}$$

(note que (1.7) difere de (1.3)). Em particular, a saída $y = (z_1, z_n)$ é planar em torno dos pontos que satisfazem

$$\begin{aligned} 1 + v_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z_2}(z) &\neq 0, \\ &\vdots \\ 1 + v_1 \frac{\partial \phi_{n-3}}{\partial z_{n-2}}(z) &\neq 0. \end{aligned}$$

De fato, aplicando o Teorema da Função Implícita em cada uma das primeiras $n - 2$

equações da forma triangular (1.7), obtemos as aplicações suaves A e B em (1.5) e (1.6), respectivamente, em torno de tais pontos. Alternativamente, podemos utilizar o Teorema 3.15.

Todos os três resultados descritos acima são contribuições desta pesquisa referentes à primeira parte. O último deles (Teorema 3.17) foi publicado nos anais do simpósio "*3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control – SSSC*" com o artigo [111] (veja o Apêndice F).

Exporemos agora o conteúdo da segunda parte da presente pesquisa, que trata o problema de controlar sistemas sem arrasto que evoluem no grupo especial unitário $\mathrm{SU}(n)$. Antes de descrevermos de maneira precisa o problema de controle que abordaremos, relembramos que $X \in M^n$ é um elemento de $\mathrm{SU}(n)$ se e somente se $X^\dagger X = I$ e $\det(X) = 1$, onde $X^\dagger \in M^n$ é a matriz transposta conjugada de X e M^n é o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com elementos complexos. Além disso, $\mathfrak{su}(n)$, que é a álgebra de Lie associada a $\mathrm{SU}(n)$, é o conjunto formado pelas matrizes $X \in M^n$ tais que $X^\dagger + X = 0$ e $\mathrm{tr}(X) = 0$ (traço nulo).

Considere então o seguinte sistema de controle sem arrasto

$$\dot{X} = \sum_{k=1}^{m} u_k H_k X, \quad X(0) = I, \tag{1.8}$$

onde $X \in M^n$ é o estado, $H = \{H_1, \ldots, H_m\} \subset \mathfrak{su}(n)$, $u_k \in \mathbb{R}$ são os controles e I denota a matriz identidade de M^n. *O problema de planejamento periódico de trajetórias* para este sistema é formulado da seguinte maneira. Dado um estado objetivo $X_\infty \in \mathrm{SU}(n)$ e um número real $T > 0$, encontrar uma trajetória de referência periódica continuamente diferenciável $X_r\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(n)$ de período T, com $X_r(0) = X_\infty$, e determinar leis de controle contínuas por partes $u_k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $1 \le k \le m$, de modo que o erro de rastreamento entre a trajetória $X\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(n)$ de (1.8) e X_r convirja para zero quando $t \to \infty$, isto é,

$$\lim_{t\to\infty} (X(t) - X_r(t)) = 0. \tag{1.9}$$

Em particular, ($\ell \in \mathbb{N}$)

$$\lim_{\ell\to\infty} X(\ell T) = X_\infty. \tag{1.10}$$

Isto é ilustrado na Figura 1.1.

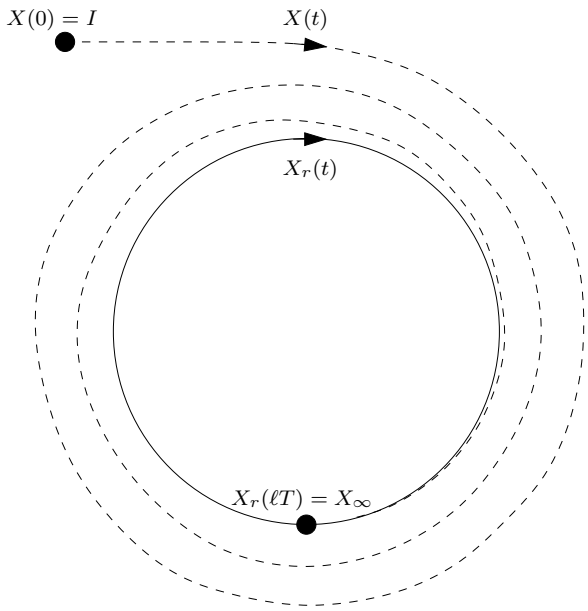

Figura 1.1: Problema de planejamento periódico de trajetórias.

O motivo pelo qual abordamos tal problema de controle é devido à existência de obstruções referentes à estabilização de sistemas não-holonômicos sem arrasto da forma

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{m} u_k f_k(x), \tag{1.11}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u_k \in \mathbb{R}$ são os controles e as aplicações f_k são suaves. Se $m < n$ e $f_1(0), \ldots, f_m(0)$ são linearmente independentes, então a origem do sistema (1.11) não pode ser estabilizada através de realimentações contínuas invariantes no tempo $u_k = u_k(x)$. Isto é provado em [93] com base na condição necessária estabelecida em [11]. É por esta razão que desejamos determinar entradas u_k que forcem o estado X de (1.8) a rastrear uma trajetória de referência periódica X_r que passa pelo estado objetivo X_∞.

Mostramos que, quando o sistema (1.8) é regular (no sentido da Definição 4.2 do Capítulo 4) ou p-controlável (no sentido da Definição 4.12), que é uma forma especial de controlabilidade[2] do sistema (1.8) em $\mathrm{SU}(n)$, o problema de planejamento periódico de trajetórias sempre tem solução. Observamos que os resultados do Método do Retorno de

[2]O sistema (1.8) é controlável em $\mathrm{SU}(n)$ quando, dado $X_f \in \mathrm{SU}(n)$, existem $t_f > 0$ e entradas constantes por partes $u_k\colon [0, t_f] \to \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq m$, tais que a solução correspondente $X\colon [0, t_f] \to \mathrm{SU}(n)$ de (1.8) satisfaz $X(t_f) = X_f$. Esta propriedade é equivalente a $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{su}(n)$, onde $\mathrm{Lie}(H)$ é álgebra de Lie gerada pelo conjunto H.

Coron, que foi desenvolvido em [16] (veja também [17], [18]), estabelecem que se (1.8) é controlável em SU(n), então o mesmo também é regular (veja o Teorema 4.4). Além disso, decorre de (1.10) que ao resolvermos o problema de controle formulado acima, estaremos encontrando entradas que conduzem o estado X de (1.8) até uma vizinhança arbitrariamente pequena do estado objetivo X_∞ em algum instante de tempo finito.

À grosso modo, com a especificação de uma trajetória de referência X_r adequada, utilizando a mudança de coordenadas variante no tempo

$$Z = Z(X,t) = X^\dagger X_r(t),$$

o qual corresponde ao erro de rastreamento no grupo SU(n), e definindo uma realimentação apropriada, determinamos um algoritmo que obtém, em um número finito de passos, leis de controle contínuas por partes $u_1, \ldots, u_m$ que asseguram (1.9) (veja o Teorema 4.23). O algoritmo está fundamentado nos resultados de convergência de tipo-Lyapunov que desenvolvemos nesta pesquisa, os quais foram inspirados na versão periódica do princípio da invariância de LaSalle apresentada em [125, Teorema 77, pág. 178] e no método de estabilização pela condição *ad* (*ad-condition*) de [47]. Em um certo sentido, utilizamos a parte real do traço do erro de rastreamento Z como uma função de tipo-Lyapunov, ou seja, $V(Z) = \Re(tr(Z))$. Como os resultados mencionados que estabelecemos não possuem convergência global, ou seja, existe uma região de convergência local, o propósito do algoritmo é garantir uma convergência global em (1.9) através de um número finito de translações à esquerda do erro rastreamento. Estas translações fazem com que sempre estejamos dentro da região de convergência a cada passo do algoritmo. Portanto, tudo se passa como se o algoritmo proposto contornasse as singularidades da função de tipo-Lyapunov $V(Z) = \Re(tr(Z))$. Observamos, ainda, que apesar de os resultados convergência de tipo-Lyapunov que desenvolvemos serem não-triviais, as suas demonstrações dependem basicamente de propriedades bem conhecidas de álgebra linear e de argumentos topológicos elementares em espaços de Banach. Mais precisamente, compacidade, continuidade e convergência de seqüências. Relembramos que SU(n) é um conjunto compacto no espaço de Banach real M^n (com a norma Euclidiana, por exemplo).

As referidas realimentações que definem as leis de controle contínuas por partes $u_1, \ldots, u_m$ são especificadas com base na hipótese de que o sistema (1.8) é regular ou p-controlável. Infelizmente, no primeiro caso, nem sempre seremos capazes de determinar estas realimentações de maneira explícita e analítica. Isto acontece, por exemplo, quando o sistema é controlável em SU(n). Conforme afirmado anteriormente, o Método

do Retorno de Coron implica que o sistema é regular. No entanto, o Método do Retorno garante apenas a existência das realimentações desejadas, sem fornecer expressões explícitas e analíticas para as mesmas. Foi com o objetivo de superar esta dificuldade, a qual pode impossibilitar a solução do problema de planejamento periódico de trajetórias em situações práticas, que introduzimos o conceito de p-controlável. Neste caso, ao contrário do caso regular, as realimentações que definem $u_1, \ldots, u_m$ são determinadas de modo explícito e analítico. Além disso, estabelecemos um critério algébrico para que o sistema (1.8) seja p-controlável (veja a Proposição 4.15).

Tanto os resultados de convergência de tipo-Lyapunov estabelecidos quanto o algoritmo desenvolvido são contribuições da segunda parte da presente pesquisa. Adiantamos, desde já, que, na realidade, determinamos leis de controle $u_k = u_k((T, X_\infty), X, t)$, para $1 \leq k \leq m$, que solucionam o problema de planejamento periódico de trajetórias. Estas leis de controle dependem do período T especificado, do estado objetivo X_∞ escolhido, do estado X do sistema de controle (4.1) e do tempo t. Por causa da dependência em relação ao par (T, X_∞), as leis de controle devem ser obtidas através da execução *off-line* do algoritmo. Quando o estado X não puder ser medido continuamente, as entradas contínuas por partes correspondentes $u_k(t) = u_k((T, X_\infty), X(t), t)$ precisam ser determinadas por integração numérica.

O problema de planejamento de trajetórias para sistemas sem arrasto da forma (1.8), do qual o problema de planejamento periódico de trajetórias que formulamos pode ser considerado como um caso mais geral, é tratado em [116] utilizando a teoria de controle ótimo, em [56] de maneira aproximada com base em técnicas de média (*averaging*) (veja também [102] para o caso de sistemas quânticos) e em [89] para um sistema quântico de um qubit (*quantum bit*), o qual evolui em SU(2), através de uma abordagem de platitude diferencial. Observamos que o qubit é o análogo quântico do bit usual da teoria de computação clássica. Além disso, no livro recentemente publicado [23] (veja também as referências nele citadas), é tratado o problema de encontrar entradas constantes por partes $u_1, \ldots, u_m \colon [0, t_f] \to \mathbb{R}$ que conduzem o estado de sistemas da forma (1.8) com arrasto a um estado final arbitrário $X_f \in \mathrm{SU}(n)$ em algum instante de tempo $t_f > 0$, com a utilização de decomposições do grupo de Lie $\mathrm{SU}(n)$. Nesta mesma referência, a qual também aborda o problema de atingir um dado estado final $X_f \in \mathrm{SU}(n)$ em tempo mínimo, é ressaltado que entradas constantes por partes podem excitar dinâmicas não-modeladas devido ao fato de as descontinuidades acarretarem em componentes de Fourier de alta freqüência e que, no caso específico de sistemas quânticos, podem gerar amplitudes de probabilidade não-nulas em níveis de energia que haviam sido desconsiderados na modelagem. Em relação à

estratégia de controle aqui desenvolvida, observamos que, dependendo do estado objetivo $X_\infty \in \mathrm{SU}(n)$ desejado, podemos encontrar entradas que são de fato contínuas, ao invés de contínuas por partes. Neste caso, decorre de (1.10) que as entradas contínuas obtidas conduzem o estado do sistema até uma vizinhança arbitrariamente pequena do estado objetivo X_∞ em algum instante de tempo finito e, além disso, evitam, à princípio, as dificuldades práticas decorrentes da utilização de entradas constantes por partes.

Aplicaremos a estratégia de controle proposta a um sistema quântico que consiste de duas partículas de spin-1/2 acopladas com interação de Heisenberg e controladas por um campo eletromagnético externo. A dedução do modelo que descreve sua dinâmica é explicada em detalhes no livro [23, Capítulos 2 e Seção 5.5]. Temos que a dinâmica do propagador (operador de evolução) do sistema quântico é dada por (1.8) com $n = 4$ e acrescida de um termo de arrasto do tipo H_0X. No entanto, é possível eliminarmos o arrasto após uma mudança de coordenadas (referencial de interação), a qual preserva as amplitudes de probabilidades do estado quântico, e uma aproximação (aproximação da onda girante (*rotating wave approximation – RWA*)), de modo que o sistema resultante seja dado por (1.8). Estas técnicas são bastante utilizadas em problemas quânticos. Como o sistema resultante é tanto regular quanto p-controlável, podemos resolver o problema de planejamento periódico de trajetórias para o mesmo. Mostraremos os resultados de simulação na geração da porta lógica quântica C-NOT, ou seja, escolheremos como estado objetivo X_∞ a matriz em $\mathrm{SU}(n)$ que corresponde à porta C-NOT. Observamos que a porta C-NOT é de fundamental importância na teoria de computação quântica [81], [54]. Ressaltamos, ainda, que o sistema quântico considerado se enquadra naturalmente em nosso problema de controle em malha-aberta, pois é uma conseqüência dos princípios da mecânica quântica que as equações que regem a dinâmica do sistema são válidas apenas enquanto o sistema permanece isolado de medições do seu estado. Mais precisamente, a medição causa um colapso no (redução do) estado do sistema [117]. Assim, técnicas de controle por realimentação de estado não podem ser aplicadas diretamente.

A solução que desenvolvemos para o problema de planejamento periódico de trajetórias para sistemas da forma (1.8) que são regulares, foi publicada nos anais do congresso "*48th IEEE Conference on Decision and Control – CDC*" com o artigo [112] (veja o Apêndice G). O referido trabalho apresenta também alguns resultados de simulação obtidos com a aplicação da estratégia de controle proposta no sistema quântico descrito acima.

Para o estudo de mecânica quântica, sugerimos como textos introdutórios [36], [33], [107], como textos mais avançados [117], [53], [3], [39], [109], [103], [71] (veja também a

referência clássica [14]), e como textos mais rigorosos do ponto de vista matemático [37], [4], [5], [120], [95], [106]. Em relação ao controle em malha-aberta de sistemas quânticos, recomendamos os recentes [23], [99], [51], [126] e as referências neles citadas. Observamos que o livro [23] aborda em profundidade muitas das técnicas de controle quântico em malha-aberta utilizadas na literatura como, por exemplo, controle ótimo, decomposições de SU(n) e métodos de controle de Lyapunov. A realimentação de estado em sistemas quânticos é tratada em [123], [8], [128], [129], [61], [44], [83]. No entanto, é necessário que o próprio controlador seja um sistema quântico, e a dinâmica do sistema resultante é modelada por equações diferenciais estocásticas quânticas. O problema de desacoplamento de perturbações em sistemas quânticos é abordado em [31]. Uma boa exposição sobre a teoria de computação quântica e informação quântica pode ser vista em [81], [54].

Iremos agora descrever a organização deste trabalho. Como a presente pesquisa é composta de duas partes independentes, este texto está divido de maneira correspondente: Parte I – Formas Triangulares para Sistemas Não-Lineares com Duas Entradas; e Parte II – Controle de Sistemas sem Arrasto em SU(n) com Aplicações em Mecânica Quântica. A primeira parte é composta pelos Capítulos 2 e 3, e, a segunda, consiste unicamente do Capítulo 4. Observamos que as duas partes podem ser lidas em qualquer ordem. Na seqüência, explicamos o conteúdo de cada capítulo.

O Capítulo 2 trata de fundamentos de sistemas diferenciais exteriores. O objetivo é apresentar, de maneira concisa e auto-contida, todas as ferramentas geométricas de dimensão finita necessárias para estabelecermos no Capítulo 3 os resultados referentes à triangularização de sistemas de controle não-lineares com duas entradas. Na Seção 2.1, fixamos as notações e convenções de geometria diferencial que serão adotadas em toda a Parte I. Reunimos na Seção 2.2 as definições de geometria diferencial e de sistemas diferenciais exteriores que são consideradas nos teoremas sobre descrições triangulares do Capítulo 3 como, por exemplo, os conceitos de distribuição, codistribuição, produto interior, ideal diferencial, sistema Pffafiano, espaço associado (ou espaço característico de Cauchy) e espaço de retração. Em relação a estas definições, exibiremos algumas de suas propriedades assim como certos teoremas que são considerados fundamentais em sistemas diferenciais exteriores e na teoria de controle geométrica como, por exemplo, a Forma Normal de Goursat. É importante observar que, como foi constatado que diversos resultados concernentes a sistemas diferenciais exteriores estão, infelizmente, espalhados pela literatura e são, por vezes, apresentados de maneira imprecisa, procuramos tornar toda a exposição da Seção 2.2 a mais auto-contida e precisa possível, tomando o cuidado, no entanto, para não sobrecarregá-la. Por esse motivo, uma parte considerável do con-

teúdo desta seção é bem conhecida pelo leitor com experiência em geometria diferencial. Neste caso, pode-se fazer apenas uma leitura diagonal para se familiarizar com a notação empregada. Além disso, pela mesma razão de completude, elaboramos no Apêndice A uma compilação de várias propriedades importantes sobre distribuições, codistribuições, colchete de Lie, derivada exterior e derivada de Lie que serão utilizadas no decorrer da Parte I.

No Capítulo 3, serão mostradas as contribuições desta pesquisa em relação à triangularização de sistemas de controle não-lineares com duas entradas. Inicialmente, na Seção 3.1, apresentamos os conceitos de campo de vetores parametrizado e de campo de vetores aumentado associados a um sistema de controle da forma (1.1), os quais são exigidos nas seções seguintes. Observamos que apesar de estas definições serem amplamente conhecidas na literatura de controle geométrico, as mesmas são, muitas vezes, aplicadas sem esclarecer os aspectos sutis que estão envolvidos. Por esta razão, exibimos no Apêndice B uma formalização detalhada destes dois conceitos.

Na Seção 3.2, mostraremos os teoremas bem conhecidos de [76] e de [68] mencionados anteriormente, que tratam da triangularização de sistemas de controle sem arrasto com duas entradas. Relembramos que o primeiro estabelece condições geométricas necessárias e suficientes para que (1.1) com $f = 0$ seja descrito em torno de um dado ponto pela forma triangular (1.2) (veja o Teorema 3.7). E, o segundo, estabelece condições suficientes para que esta descrição seja válida em torno de cada ponto de um conjunto aberto e denso (veja o Teorema 3.8). Exibiremos as demonstrações destes dois teoremas com o objetivo de tornar evidente a estreita relação entre os mesmos e a Forma Normal de Goursat exposta na Seção 2.2. O Apêndice C expõe a prova de alguns resultados conhecidos da teoria de controle geométrica.

Apresentaremos na Seção 3.3 as duas principais contribuições desta pesquisa referentes à Parte I, que correspondem ao Teorema 3.10 e ao Corolário 3.12. Mostraremos, ainda, um exemplo acadêmico com o objetivo de ilustrar a aplicação do Teorema 3.10. Estes resultados podem ser vistos como generalizações dos resultados de [76] e de [68], respectivamente. De fato, acrescentamos aos mesmos certas condições geométricas de modo considerar o arrasto f no sistema de controle (1.1). Com estas condições adicionais, o Teorema 3.10 estabelece condições geométricas necessárias e suficientes para que (1.1) (com ou sem arrasto) seja descrito em torno de um dado ponto pela forma triangular (1.3), enquanto que o Corolário 3.12 estabelece condições suficientes para que esta descrição seja possível em torno de cada ponto de um conjunto aberto e denso.

Na Seção 3.4, faremos, primeiramente, um breve resumo sobre a teoria de controle geométrica de dimensão infinita que nos referimos previamente. Com base nesta ferramenta, enunciaremos em seguida o Teorema 3.17, que estabelece que quando o sistema (1.1) com $2 \leq n \leq 5$ é planar, e a saída planar satisfaz algumas condições de regularidade, existe uma descrição triangular da forma (1.7) após uma mudança de coordenadas e uma realimentação regular. A demonstração deste resultado, que é a terceira e última contribuição da presente tese em relação à Parte I, é exibida no Apêndice D. O Apêndice F contém o artigo [111], que foi publicado nos anais do simpósio "*3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control – SSSC*". Este trabalho apresenta o Teorema 3.17.

O Capítulo 4, que corresponde à Parte II, descreve as soluções obtidas nesta pesquisa para o problema de planejamento periódico de trajetórias para sistemas de controle sem arrasto em $\mathrm{SU}(n)$ da forma (1.8). Na Seção 4.1, explicamos as notações que serão adotadas ao longo de todo o capítulo. Definiremos de maneira precisa o referido problema de controle na Seção 4.2, tomando o cuidado em esclarecer do modo mais elementar possível todos os aspectos envolvidos.

A solução que estabelecemos para o problema de planejamento periódico de trajetórias é construída progressivamente na Seção 4.3. Procuramos explicar em cada passo os argumentos que são necessários para continuarmos caminhando em direção a uma solução final para o problema de controle. Dessa maneira, a necessidade de introduzirmos os conceitos de regularidade e de p-controlabilidade para o sistema (1.8) é justificada. Apresentaremos também dois critérios algébricos: um determina quando que (1.8) é regular, enquanto que o outro estabelece quando que (1.8) é p-controlável. O primeiro critério é uma conseqüência do Método do Retorno de Coron e, o segundo, decorre basicamente da identidade de Jacobi. Com base no resultado de convergência de tipo-Lyapunov do Teorema 4.20, formularemos um algoritmo que determina as entradas desejadas em um número finito de passos. Apêndice E apresenta alguns lemas que desenvolvemos para demonstrarmos o Teorema 4.20. A solução que estabelecemos para o problema de controle é então sintetizada no Teorema 4.23, sob a hipótese de que o sistema é regular ou p-controlável. Ressaltamos que tanto o resultado de convergência de tipo-Lyapunov do Teorema 4.20 quanto o algoritmo desenvolvido são contribuições da presente pesquisa em relação à Parte II. O Apêndice G corresponde ao artigo [112], que foi publicado nos anais do congresso "*48th IEEE Conference on Decision and Control – CDC*". Observamos que o referido trabalho apresenta somente a solução proposta para o caso em que (1.8) é regular.

Exibiremos na Seção 4.4 os resultados de simulação obtidos com a aplicação da estraté-

gia de controle desenvolvida no sistema quântico formado por duas partículas de spin-1/2 que descrevemos anteriormente, com o objetivo de gerar a porta lógica quântica C–NOT.

Nas Considerações Finais, apresentaremos uma visão geral sobre os resultados estabelecidos nesta pesquisa e sugeriremos alguns assuntos a serem investigados futuramente.

Parte I

Formas Triangulares para Sistemas Não-Lineares com Duas Entradas

Capítulo 2

Fundamentos de Sistemas Diferenciais Exteriores

Este capítulo trata de fundamentos matemáticos de sistemas diferenciais exteriores. O objetivo da exposição que faremos aqui é reunirmos, de maneira precisa, concisa e auto-contida, todas as ferramentas geométricas de dimensão finita que serão exigidas no próximo capítulo, o qual apresenta os teoremas estabelecidos nesta pesquisa referentes à triangularização de sistemas de controle não-lineares com duas entradas. Primeiramente, na Seção 2.1, fixamos as notações e convenções de geometria diferencial que serão adotadas em toda a Parte I, ou seja, até o fim do Capítulo 3. Na Seção 2.2, apresentamos as definições de geometria diferencial e de sistemas diferenciais exteriores consideradas nos teoremas sobre descrições triangulares do Capítulo 3 como, por exemplo, os conceitos de distribuição, codistribuição, produto interior, ideal diferencial, sistema Pffafiano, espaço associado (ou espaço característico de Cauchy) e espaço de retração. Exibiremos também algumas de suas propriedades assim como certos teoremas que são considerados fundamentais em sistemas diferenciais exteriores e na teoria de controle geométrica, como o Teorema de Frobenius para sistemas Pffafianos, o Teorema de Pffaf e a Forma Normal de Goursat. Na maioria dos casos, apresentaremos demonstrações completas. Quando não o fizermos, indicaremos as referências nas quais o leitor poderá encontrá-las. Exibimos, ainda, dois exemplos que tornarão evidentes a parte computacional envolvida em certas definições e os aspectos sutis de alguns resultados. Conforme explicado na Introdução, uma parte considerável do conteúdo desta seção é bem conhecida pelo leitor com experiência em geometria diferencial. Se este for o caso, pode-se fazer apenas uma leitura diagonal para se familiarizar com a notação empregada. O Apêndice A exibe uma compilação de

uma série de propriedades sobre distribuições, codistribuições, colchete de Lie, derivada exterior e derivada de Lie que serão utilizadas ao longo da Parte I.

2.1 Notações e convenções

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}^{n\times n}$ o espaço vetorial real de dimensão n^2 das matrizes quadradas reais de ordem n e $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ o conjunto dos números naturais. O símbolo '$\circ$' é usado para denotar a composição de aplicações e '$|$' para a restrição de uma aplicação. Escrevemos $A = (a_{ij})$ para enfatizar que $a_{ij} \in \mathbb{R}$ são os elementos de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, então $A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ denota a sua matriz transposta. Chamamos de *função* uma aplicação de um conjunto em $\mathbb{R}$. Usaremos o termo *suave* para um objeto matemático como sinônimo de infinitamente diferenciável.

Salvo menção contrária, todas as definições e resultados apresentados na seqüência são encontrados em [6], [55], [58] e [130] (sugerimos também [74], [80], [127] e [25]).

Seja M uma variedade suave de dimensão finita[1] e $U \subset M$ um aberto em M. Denotamos o conjunto das funções suaves em U por $\mathcal{C}^\infty(U)$, o conjunto dos campos de vetores suaves em U por $\mathfrak{X}(U)$ e o conjunto das r-formas em U por $\Omega^r(U)$, para todo $r \in \mathbb{N}$. Se M possui dimensão $n \in \mathbb{N}$, então escrevemos $\dim(M) = n$. Observamos que, com as operações usuais de adição e de multiplicação, $\mathcal{C}^\infty(U)$ é um anel comutativo com elemento unidade e que $\mathfrak{X}(U)$, $\Omega^r(U)$ são $\mathcal{C}^\infty(U)$-módulos. À grosso modo, um $\mathcal{C}^\infty(U)$-módulo é definido pelos mesmos axiomas de um espaço vetorial real, exceto que os escalares são substituídos por funções suaves em U. Seja $\mathcal{A}$ um $\mathcal{C}^\infty(U)$-módulo. Dizemos que um subconjunto não-vazio $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ é um *submódulo* de $\mathcal{A}$ se $v_1 + v_2 \in \mathcal{B}$ e $\alpha v_3 \in \mathcal{B}$, para quaisquer $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{B}$, $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Note que $\mathcal{B}$ é de fato um $\mathcal{C}^\infty(U)$-módulo. Assim, os conceitos de $\mathcal{C}^\infty(U)$-módulos e submódulos podem ser vistos como generalizações dos conceitos de espaço vetorial real e de subespaço, respectivamente. As definições completas de anel, módulo e submódulo podem ser vistas em [12] e [59], por exemplo. Recomendamos também [25].

Dado $p \in M$, denotamos o conjuntos dos tensores alternados de ordem covariante r em T_pM (isto é, o conjunto dos funcionais reais r-lineares alternados em T_pM) por Ω^r_pM, onde T_pM é o espaço tangente à M em p. Relembramos que $\Omega^1_pM = T^*_pM$, onde T^*_pM

[1] Isto é, M é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável, localmente euclidiano e com uma estrutura diferenciável suave.

é o espaço cotangente à M em p, e que T_pM e T_p^*M são espaços vetoriais reais com $\dim(T_pM) = \dim(T_p^*M) = \dim(M)$. Temos então que o conjunto $\Omega_pM = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \Omega_p^r M$ (soma direta) equipado com o produto exterior '$\wedge$' é uma álgebra (sobre $\mathbb{R}$) graduada, associativa, anti-comutativa e com elemento neutro, denominada de *álgebra exterior* sobre T_pM, onde $\Omega_p^0 M = \mathbb{R}$ e $\Omega_p^r M = \{0\}$, para todo $r > \dim(M)$. Seja $\Omega(U) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \Omega^r(U)$ o conjunto das formas diferenciais exteriores em U, onde $\Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$ e $\Omega^r(U) = \{0\}$, para todo $r > \dim(M)$. Do mesmo modo, o produto exterior '$\wedge$' torna $\Omega(U)$ um álgebra (sobre $\mathbb{R}$) graduada, associativa, anti-comutativa e com elemento unidade, denominada de *álgebra exterior* em U. Dizemos que uma forma $\omega \in \Omega(U)$ é *homogênea* quando existe $0 \leq r \leq \dim(M)$ tal que $\omega \in \Omega^r(U)$. Relembramos que se $\omega \in \Omega^r(U)$, então $\omega_p \in \Omega_p^r M$, para todo $p \in U$.

Considere que $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ e $\omega \in \Omega(U)$. Então, $L_X f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ denota a derivada de Lie de f em relação ao campo de vetores suave X; $[X, Y] \in \mathfrak{X}(U)$ é o colchete de Lie de X e Y; $L_X\omega \in \Omega(U)$ é a derivada de Lie de ω em relação a X; e $d\omega \in \Omega(U)$ é a derivada exterior de ω. Os Teoremas A.1 e A.2 (veja o Apêndice A) apresentam as principais propriedades do colchete de Lie e da derivada exterior, respectivamente. Além disso, se $p \in U$, $\alpha_p \in \Omega_p^1 M = T_p^*M$ e $Z_p \in T_pM$, então $\langle \alpha_p, Z_p \rangle \triangleq \alpha_p(Z_p) \in \mathbb{R}$. Do mesmo modo, $\langle \omega, X \rangle_p \triangleq \langle \omega_p, X_p \rangle \in \mathbb{R}$ e $\langle \omega, X \rangle \triangleq \omega(X) \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Sejam $X^1, \ldots, X^r \in \mathfrak{X}(U)$ e $V \subset U$. Então, dado $q \in V$, $\{X^1, \ldots, X^r\}|_q$ denota $\{X_q^1, \ldots, X_q^r\}$ e, se $X_p^1, \ldots, X_p^r$ são vetores (linearmente) independentes, para todo $p \in V$, diremos simplesmente que $X^1, \ldots, X^r$ são independentes *em* V. Estas mesmas convenções serão adotadas também para 1-formas.

Suponha que $F\colon U \to N$ é uma aplicação suave, onde $U \subset M$ é aberto e N é uma variedade suave. Então, $F_*\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ denota a aplicação tangente (push-forward) de F em $p \in U$ e $F^*\colon T_{F(p)}^*N \to T_p^*M$ denota a aplicação cotangente (pull-back) de F em $F(p) \in N$.

2.2 Sistemas diferenciais exteriores

No Teorema 3.10 do Capítulo 3, são apresentadas condições geométricas necessárias e suficientes para que um sistema da forma (1.1) possa ser descrito pela forma triangular (1.3) em torno de um dado ponto. No entanto, nestas condições, estão envolvidos os conceitos de distribuição, codistribuição, anulador, espaço associado e espaço de retração da teoria de sistemas diferenciais exteriores. A referência clássica para o estudo de sistemas

diferenciais exteriores é [10]. Recomendamos também [105][2], [26], [130] e [43]. Para entendermos o que é o espaço associado, precisaremos, ainda, apresentar as definições de produto interior e de ideal algébrico homogêneo. Veremos que o produto interior está diretamente relacionado com a derivada de Lie e com o produto exterior. Começaremos então pelos três primeiros conceitos mencionados. Ao longo de todo este capítulo, M é uma variedade suave de dimensão finita.

Definição 2.1. *[12], [105], [41], [19] Seja $U \subset M$ um aberto. Um submódulo Δ de $\mathfrak{X}(U)$ é denominado de* distribuição *em U. Definimos, para todo $p \in U$, o seguinte subespaço vetorial de T_pM*

$$\Delta_p = \{X_p \in T_pM \mid X_p = Y_p, \text{ onde } Y \in \Delta\}.$$

Dizemos que $p \in U$ é um ponto regular *de Δ se existe uma vizinhança aberta $V \subset U$ de p tal que, para todo $q \in V$, $\dim(\Delta_q) = r$, onde $r \in \mathbb{N}$. Se todo $p \in U$ é um ponto regular de Δ, então Δ é denominada de* distribuição regular. *Dizemos que Δ é de* dimensão constante *se, para todo $p \in U$, $\dim(\Delta_p) = r$, onde $r \in \mathbb{N}$. Neste caso, usamos a notação $\dim(\Delta) = r$. Se $\Delta = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}(G)$, onde $G \subset \mathfrak{X}(U)$, então dizemos que Δ é a distribuição em U* gerada *por G. Denominaremos Δ de* involutiva *se $[X, Y] \in \Delta$, para todo $X, Y \in \Delta$.*

Dado um aberto $V \subset U$, definimos a seguinte distribuição em V

$$\Delta|V = span_{\mathcal{C}^\infty(V)}\{X \in \mathfrak{X}(V) \mid X = Y|V, \text{ onde } Y \in \Delta\}.$$

Observação 2.2. *Note que o conjunto $\{X \in \mathfrak{X}(V) \mid X = Y|V, \text{ com } Y \in \Delta\}$ não é necessariamente uma distribuição em V. Foi por este motivo que tornamos preciso o significado de $\Delta|V$.*

Para o leitor não familiarizado com a notação acima, é necessário esclarecer o que queremos dizer por $\text{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(G)$ de um subconjunto $G \subset \mathfrak{X}(U)$. Por definição, $\text{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(G)$ é o conjunto formado por todas as combinações lineares (finitas) de elementos de G com coeficientes em $\mathcal{C}^\infty(U)$. É claro que $\text{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(G)$ é um submódulo de $\mathfrak{X}(U)$. Obviamente, existem definições análogas quando $\mathfrak{X}(U)$ é substituído por $\Omega^1(U)$.

Definição 2.3. *[105], [68], [19] Seja $U \subset M$ um aberto. Um submódulo Λ de $\Omega^1(U)$ é denominado de* codistribuição *em U. Definimos, para todo $p \in U$, o seguinte subespaço*

[2]Este livro apresenta diversas aplicações importantes de sistemas diferenciais exteriores em teoria de controle não-linear. Veja também o artigo [121] para uma breve revisão sobre sistemas diferenciais exteriores.

vetorial de T_p^*M

$$\Lambda_p = \{\omega_p \in T_p^*M \mid \omega_p = \alpha_p, \ \textit{onde } \alpha \in \Lambda\}.$$

Os conceitos de ponto regular, codistribuição regular, codistribuição de dimensão constante *e codistribuição* gerada *por um subconjunto* $G \subset \Omega^1(U)$ *são definidos de maneira análoga aos de distribuição.*

Dado um aberto $V \subset U$*, definimos a seguinte codistribuição em* V

$$\Lambda|V = span_{\mathcal{C}^\infty(V)}\{\omega \in \Omega^1(V) \mid \omega = \alpha|V, \ \textit{onde } \alpha \in \Lambda\}.$$

Definição 2.4. *[105], [19] Seja* Δ *uma distribuição em* U *e* Λ *uma codistribuição em* U*, onde* $U \subset M$ *é aberto. Definimos a seguinte codistribuição em* U

$$\Delta^\perp = \{\omega \in \Omega^1(U) \mid \langle \omega, X\rangle = 0, \ \textit{para todo } X \in \Delta\},$$

denominada de codistribuição anuladora *de* Δ *ou, simplesmente,* anulador *de* Δ*, e a seguinte distribuição em* U

$$\Lambda^\perp = \{X \in \mathfrak{X}(U) \mid \langle \omega, X\rangle = 0, \ \textit{para todo } \omega \in \Lambda\},$$

denominada de distribuição anuladora *de* Λ *ou, simplesmente,* anulador *de* Λ*.*

Definição 2.5. *[105] Sejam* Δ_1, Δ_2 *distribuições em* U*, onde* $U \subset M$ *é aberto. Definimos as distribuições em* U

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \{X \in \mathfrak{X}(U) \mid X = X_1 + X_2, \ \textit{onde } X_1 \in \Delta_1, X_2 \in \Delta_2\},$$
$$[\Delta_1, \Delta_2] = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{X \in \mathfrak{X}(U) \mid X = [X_1, X_2], \ \textit{onde } X_1 \in \Delta_1, X_2 \in \Delta_2\}.$$

Observação 2.6. *É fácil ver que se* $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ *são distribuições em* U*, então*

$$\Delta_1 + [\Delta_2, \Delta_3] = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{X \in \mathfrak{X}(U) \mid X = X_1 + [X_2, X_3], \ \textit{onde } X_i \in \Delta_i, 1 \leq i \leq 3\}.$$

O Apêndice A exibe uma compilação de uma série de propriedades importantes sobre o colchete de Lie, derivada exterior, derivada de Lie e distribuições que serão amplamente utilizadas neste capítulo e no próximo. Ressaltamos que, apesar de existirem versões duais para codistribuições, isto é, resultados análogos, optamos por não apresentá-las para não sobrecarregar a exposição. É importante também destacar que, em relação a distribuições, as propriedades agrupadas no Apêndice A são freqüentemente aplicadas

na literatura sem qualquer menção aos detalhes técnicos envolvidos. Além disso, estes resultados deixam claro que a definição de distribuição aqui adotada, ou seja, como um submódulo, se comporta em torno de um ponto regular exatamente como a definição pontual de distribuição suave que é geralmente apresentada na literatura.

Definição 2.7. *[55], [105] Sejam $p \in M$ e $X_p \in T_pM$. O* produto interior *com X_p é a aplicação $i_{X_p}\colon \Omega_p^r M \to \Omega_p^{r-1} M$ definida por*

$$(i_{X_p}\omega_p)(Y_p^1, \ldots, Y_p^{r-1}) = \omega_p(X_p, Y_p^1, \ldots, Y_p^{r-1}),$$

para todo $Y_p^1, \ldots, Y_p^{r-1} \in T_pM$, onde $r \in \mathbb{N}$, $\Omega_p^{-1}M \triangleq \{0\}$ e $i_{X_p}\omega_p \triangleq 0$, para todo $\omega_p \in \Omega_p^0 M = \mathbb{R}$. Estendendo então esta definição por linearidade, obtemos a aplicação $i_{X_p}\colon \Omega_p M \to \Omega_p M$. Denotaremos também $i_{X_p}\omega_p$ por $X_p \lrcorner\, \omega_p$.

Teorema 2.8. *[55], [105] Sejam $p \in M$, $X_p, Y_p \in T_pM$, $\omega_p, \upsilon_p \in \Omega_p^r M$, $a, b \in \mathbb{R}$. Então:*

1. $(aX_p + bY_p) \lrcorner\, \omega_p = a(X_p \lrcorner\, \omega_p) + b(Y_p \lrcorner\, \omega_p)$;
2. $X_p \lrcorner\, (a\omega_p + b\upsilon_p) = a(X_p \lrcorner\, \omega_p) + b(X_p \lrcorner\, \upsilon_p)$;
3. $i_{X_p} \circ i_{X_p} = 0$;
4. i_{X_p} *é uma anti-derivação, isto é, se $\theta_p \in \Omega_p^r M$ e $\sigma_p \in \Omega_p^s M$, então*

$$X_p \lrcorner\, (\theta_p \wedge \sigma_p) = (X_p \lrcorner\, \theta_p) \wedge \sigma_p + (-1)^r \theta_p \wedge (X_p \lrcorner\, \sigma_p).$$

Observamos que a Definição 2.7 é um conceito pontual. A próxima definição considera o produto interior como uma aplicação de $\Omega(U)$ em $\Omega(U)$.

Definição 2.9. *[55], [105] Seja $X \in \mathfrak{X}(U)$, onde $U \subset M$ é aberto. O* produto interior *com X é a aplicação $i_X\colon \Omega(U) \to \Omega(U)$ definida por*

$$(i_X\omega)_p = X_p \lrcorner\, \omega_p,$$

para todo $\omega \in \Omega(U)$, $p \in U$. Denotaremos também $i_X\omega$ por $X \lrcorner\, \omega$.

O teorema seguinte mostra que o produto interior e a derivada exterior caracterizam completamente a derivada de Lie.

Teorema 2.10. *[55] Sejam $X \in \mathfrak{X}(U)$ e $\omega \in \Omega(U)$, onde $U \subset M$ é aberto. Então,*

$$L_X\omega = X \lrcorner\, (d\omega) + d(X \lrcorner\, \omega).$$

As principais propriedades da derivada de Lie estão reunidas na Proposição A.3 (veja o Apêndice A).

Definição 2.11. *[43], [130] Seja $U \subset M$ um aberto, com* $\dim(M) = n$. *Um subconjunto $I \subset \Omega(U)$ é denominado de* ideal algébrico homogêneo *em U se:*

1. *I é subespaço vetorial real de $\Omega(U)$;*
2. *Para todo $\beta \in \Omega(U)$ e todo $\alpha \in I$, tem-se que $\beta \wedge \alpha \in I$;*
3. *$I = \bigoplus_{r=0}^{n} I^r$, onde $I^r = I \cap \Omega^r(U)$. Portanto, se $\alpha = \sum_{r=0}^{n} \alpha^r \in I$, onde $\alpha^r \in \Omega^r(U)$, então $\alpha^r \in I^r \subset I$.*

Se, além disso, temos que $d\alpha \in I$, para todo $\alpha \in I$, então dizemos que I é um ideal diferencial *em U.*

Observação 2.12. *Note que a condição 3 é independente das condições 1 e 2. De fato, considere que $I \subset \Omega(U)$ é um conjunto que satisfaz as condições 1 e 2 da definição acima. Se $\alpha_1 + \alpha_2 \in I$, onde $\alpha_1 \in \Omega^1(U), \alpha_2 \in \Omega^2(U)$, não podemos concluir somente a partir das propriedades 1 e 2 que $\alpha_1, \alpha_2 \in I$.*

Definição 2.13. *Sejam $U, V \subset M$ conjuntos abertos com $V \subset U$. Suponha que I é um ideal algébrico homogêneo (respectivamente diferencial) em U. Definimos então o seguinte ideal algébrico homogêneo (resp. diferencial) em V*

$$I|V = \{\omega \in \Omega(V) \mid \omega = \sum_{i=1}^{k} \theta_i \wedge (\alpha_i|V), \text{ onde } \theta_i \in \Omega(V), \alpha_i \in I\},$$

onde $k = k(\omega)$ depende de ω. Para todo $p \in U$, definimos o conjunto

$$I_p = \{\omega_p \in \Omega_p M \mid \omega_p = \alpha_p, \text{ onde } \alpha \in I\}.$$

É fácil ver que $I|V$ é de fato um ideal algébrico homogêneo em V. Além disso, segue do Teorema A.2 que se I é um ideal diferencial em U, então $I|V$ é um ideal diferencial em V.

Observação 2.14. *Note que o conjunto $\{\omega \in \Omega(V) \mid \omega = \alpha|V, \text{ onde } \alpha \in I\}$ não é necessariamente uma ideal algébrico homogêneo em V.*

Proposição 2.15. *Sejam $U, V \subset M$ conjuntos abertos com $V \subset U$. Suponha que I é um ideal algébrico homogêneo em U. Então, para todo $p \in V$, temos que*

$$(I|V)_p = I_p.$$

Demonstração. Seja $p \in V \subset U$. É claro que $I_p \subset (I|V)_p$. Decorre então da demonstração da Proposição 2.16 dada abaixo que $(I|V)_p \subset I_p$. □

Proposição 2.16. *[130] Seja $U \subset M$ um aberto, com $\dim(M) = n$. Suponha que I é um ideal algébrico homogêneo em U. Então, para todo $p \in U$, o conjunto I_p tem as seguintes propriedades:*

1. *I_p é um subespaço vetorial real de $\Omega_p M$;*
2. *Para todo $\beta_p \in \Omega_p M$ e todo $\alpha_p \in I_p$, tem-se que $\beta_p \wedge \alpha_p \in I_p$;*
3. *$I_p = \bigoplus_{r=0}^{n} I_p^r$, onde $I_p^r = I_p \cap \Omega_p^r M$. Portanto, se $\alpha_p = \sum_{r=0}^{n} \alpha_p^r \in I_p$, onde $\alpha_p^r \in \Omega_p^r M$, então $\alpha_p^r \in I_p^r \subset I_p$.*

Em outras palavras, I_p é um ideal algébrico homogêneo de $\Omega_p M$, no sentido de [130] (compare com a Definição 2.11).

Demonstração. A primeira e a terceira propriedades são evidentes, pois I é um ideal algébrico homogêneo em U. O ponto crucial da demonstração da segunda propriedade é mostrar que, dados $p \in U$ e $\beta_p \in \Omega_p^r M$, existe $\overline{\beta} \in \Omega^r(U)$ tal que $\overline{\beta}_p = \beta_p$. Extensões como esta surgem freqüentemente em geometria diferencial e são construídas de maneira canônica[3] através da Proposição A.7. De fato, sejam $p \in U$ e $\beta_p \in \Omega_p^r M$. Existe então uma carta local $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ definida em uma vizinhança aberta $V \subset U$ de p tal que

$$\beta_p = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} a_{i_1 \ldots i_r} dx_p^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_p^{i_r},$$

onde $a_{i_1 \ldots i_r} \in \mathbb{R}$. Sabemos também que existe um conjunto compacto A em U tal que $p \in A \subset V$, onde a topologia de U é a topologia de subespaço. Portanto, a Proposição A.7 assegura que existe $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tal que $\sigma(p) = 1$ e $\operatorname{supp} \sigma \subset V$. Definimos $\overline{\beta}_q = \sigma(q) \sum_{i_1 < \cdots < i_r} a_{i_1 \ldots i_r} dx_q^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_q^{i_r}$, para $q \in V$, e $\overline{\beta}_q = 0$, para $q \in U - \operatorname{supp} \sigma$. Note que $\overline{\beta}_p = \beta_p$ e que $\overline{\beta}_q = 0$, para $q \in V \cap (U - \operatorname{supp} \sigma) = V - \operatorname{supp} \sigma$. Como

[3] Veja, por exemplo, [55, demonstração do Lema 4.5 e da Proposição 19.9].

$U - (V - \text{supp } \sigma) = (U - V) \cup \text{supp } \sigma$, temos que $V - \text{supp } \sigma$ é um aberto em U. Logo, $\overline{\beta} \in \Omega^r(U)$. □

Definição 2.17. *[105], [130], [43] Seja $U \subset M$ um aberto. Um conjunto Σ de formas diferenciais exteriores homogêneas de $\Omega(U)$ é denominado de* sistema diferencial exterior *em U ou, simplesmente,* sistema exterior *em U. Se $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \Omega^1(U)$, onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ são independentes em U, então dizemos que Σ é um* sistema Pfaffiano. *O ideal algébrico homogêneo* gerado *por um sistema exterior Σ é definido por*

$$I_\Sigma = \{\omega \in \Omega(U) \mid \omega = \sum_{i=1}^{k} \theta_i \wedge \beta_i, \text{ onde } \theta_i \in \Omega(U), \beta_i \in \Sigma\},$$

onde $k = k(\omega)$ depende de ω. Seja S_d o conjunto de todos os ideais diferenciais que contêm Σ. O ideal diferencial gerado *por Σ é definido por*

$$\mathcal{I}_\Sigma = \bigcap_{I \in S_d} I,$$

ou seja, $\mathcal{I}_\Sigma$ é o menor ideal diferencial que contém Σ.

Observe que I_Σ é de fato um ideal algébrico homogêneo em U, que $\mathcal{I}_\Sigma$ é realmente um ideal diferencial e que S_d é um conjunto não-vazio, pois $\Omega(U)$ é um ideal diferencial que contém Σ. Além disso, se I_Σ é um ideal diferencial, então $\mathcal{I}_\Sigma = I_\Sigma$. O próximo resultado nos mostra como construir e caracterizar $\mathcal{I}_\Sigma$.

Teorema 2.18. *[105], [130] Seja $U \subset M$ um aberto. Suponha que Σ é um sistema exterior em U. Definimos $\Sigma' = \Sigma \cup d\Sigma$, com $d\Sigma = \{\omega \in \Omega(U) \mid \omega = d\alpha, \text{ onde } \alpha \in \Sigma\}$. Então,*

$$\mathcal{I}_\Sigma = I_{\Sigma'}.$$

Demonstração. Como, por definição, $\Sigma' \subset \mathcal{I}_\Sigma$, temos que $I_{\Sigma'} \subset \mathcal{I}_\Sigma$. Decorre do Teorema A.2 que $I_{\Sigma'}$ é um ideal diferencial que contém Σ. Portanto, é imediato da definição de $\mathcal{I}_\Sigma$ que $\mathcal{I}_\Sigma \subset I_{\Sigma'}$. □

Definição 2.19. *[105] Seja I um ideal algébrico homogêneo em um aberto $U \subset M$. Dizemos que $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(U)$ são* equivalentes mod I *quando $\omega_1 - \omega_2 \in I$. Esta é uma relação de equivalência e é denotada por $\omega_1 \equiv \omega_2$ mod I. Se $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \Omega^1(U)$, denotaremos $\omega_1 \equiv \omega_2$ mod I_Σ simplesmente por $\omega_1 \equiv \omega_2$ mod $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.*

As definições acima nos permitem, finalmente, apresentar os conceitos de espaço associado e de espaço de retração.

Definição 2.20. *[130], [43], [105], [26] Seja $U \subset M$ um aberto. Suponha que I é um ideal algébrico homogêneo em U. Definimos o* espaço associado *ou* espaço característico de Cauchy *de I em $p \in U$ por*

$$A(I)_p = \{X_p \in T_pM \mid i_{X_p}(I_p) \subset I_p\},$$

e o espaço de retração *de I em $p \in U$ por*[4]

$$C(I)_p = (A(I)_p)^{\perp}.$$

Note que $A(I)_p$ é um subespaço vetorial de T_pM e que $C(I)_p$ é um subespaço vetorial de T_p^*M.

Proposição 2.21. *[130], [26], [43] Seja $U \subset M$ um aberto. Suponha que Λ é uma codistribuição em U e seja $\mathcal{I}_\Lambda$ o ideal diferencial gerado por Λ. Então, para todo $p \in U$,*

$$A(\mathcal{I}_\Lambda)_p = \{X_p \in T_pM \mid \langle \alpha_p, X_p\rangle = 0 \text{ e } X_p \lrcorner\, d\alpha_p \in \Lambda_p, \text{ para todo } \alpha \in \Lambda\}.$$

Em particular, se $\Lambda = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{\alpha^1, \ldots, \alpha^m\}$, então

$$A(\mathcal{I}_\Lambda)_p = \{X_p \in T_pM \mid \langle \alpha_p^i, X_p\rangle = 0 \text{ e } X_p \lrcorner\, d\alpha_p^i \in span_{\mathbb{R}}\{\alpha^1, \ldots, \alpha^m\}|_p, \text{ para } 1 \leq i \leq m\},$$

para todo $p \in U$. Além disso, dado um aberto $V \subset U$, temos que

$$A(\mathcal{I}_\Lambda)_p = A(\mathcal{I}_{\Lambda|V})_p,$$

para todo $p \in V$.

Demonstração. Primeiramente, observe que $(\mathcal{I}_\Lambda)^0 \triangleq \mathcal{I}_\Lambda \cap \Omega^0(U) = \mathcal{I}_\Lambda \cap \mathcal{C}^\infty(U) = \{0\}$ (veja a Definição 2.11). Assim, $(\mathcal{I}_\Lambda)_p^0 \triangleq (\mathcal{I}_\Lambda)_p \cap \Omega_p^0(U) = (\mathcal{I}_\Lambda)_p \cap \mathbb{R} = \{0\}$, para $p \in U$.

Seja $p \in U$ e considere o conjunto

$$B_p = \{X_p \in T_pM \mid \langle \alpha_p, X_p\rangle = 0 \text{ e } X_p \lrcorner\, d\alpha_p \in \Lambda_p, \text{ para todo } \alpha \in \Lambda\}.$$

[4] *Veja a Definição A.6.*

Suponha que $X_p \in A(\mathcal{I}_\Lambda)_p \subset T_pM$ e $\alpha \in \Lambda$. Então, $\alpha, d\alpha \in \mathcal{I}_\Lambda$ e $\alpha_p, d\alpha_p \in (\mathcal{I}_\Lambda)_p$. A Proposição 2.16 implica que $X_p \lrcorner\, \alpha_p = \langle \alpha_p, X_p \rangle \in (\mathcal{I}_\Lambda)^0_p$, ou seja, $\langle \alpha_p, X_p \rangle = 0$. Temos também que $X_p \lrcorner\, d\alpha_p = \omega_p \in (\mathcal{I}_\Lambda)_p$, onde $\omega = \sum_{i=1}^k b^i \alpha^i \in \mathcal{I}_\Lambda$, com $b^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ e $\alpha^i \in \Lambda$, de acordo com o Teorema 2.18. Logo, $X_p \lrcorner\, d\alpha_p \in \Lambda_p$. Portanto, $A(\mathcal{I}_\Lambda)_p \subset B_p$. Assuma então que $X_p \in B_p \subset T_pM$. Isto significa que $\langle \alpha_p, X_p \rangle = 0$ e $X_p \lrcorner\, d\alpha_p \in \Lambda_p \subset (\mathcal{I}_\Lambda)_p$, para todo $\alpha \in \Lambda$. Seja $\omega_p \in (\mathcal{I}_\Lambda)_p$. Pelo Teorema 2.18, temos que

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=0}^{n} (b^{ij} \wedge \alpha^i)_p + \sum_{k=1}^{r_2} \sum_{\ell=0}^{n} (c^{k\ell} \wedge d\alpha^k)_p,$$

com $\dim(M) = n$, $b^{ij} \in \Omega^{r_{ij}}(U)$, $c^{k\ell} \in \Omega^{r_{k\ell}}(U)$ e $\alpha^i, \alpha^k \in \Lambda$. Utilizando o Teorema 2.8, obtemos que

$$\begin{aligned} X_p \lrcorner\, \omega_p &= \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=0}^{n} X_p \lrcorner\, (b^{ij} \wedge \alpha^i)_p + \sum_{k=1}^{r_2} \sum_{\ell=0}^{n} X_p \lrcorner\, (c^{k\ell} \wedge d\alpha^k)_p \\ &= \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=0}^{n} (X_p \lrcorner\, b^{ij}_p) \wedge \alpha^i_p + (-1)^{m_{ij}} b^{ij}_p \wedge (X_p \lrcorner\, \alpha^i_p) \\ &+ \sum_{k=1}^{r_2} \sum_{\ell=0}^{n} (X_p \lrcorner\, c^{k\ell}_p) \wedge d\alpha^k_p + (-1)^{m_{k\ell}} c^{k\ell}_p \wedge (X_p \lrcorner\, d\alpha^k_p). \end{aligned}$$

Como $X_p \lrcorner\, \alpha^i_p = \langle \alpha^i_p, X_p \rangle = 0$ e $X_p \lrcorner\, d\alpha^k_p \in (\mathcal{I}_\Lambda)_p$, concluímos a partir da Proposição 2.16 que $X_p \lrcorner\, \omega_p \in (\mathcal{I}_\Lambda)_p$, ou seja, $X_p \in A(\mathcal{I}_\Lambda)_p$. Assim, $B_p \subset A(\mathcal{I}_\Lambda)_p$ e $A(\mathcal{I}_\Lambda)_p = B_p$.

Agora, suponha que $\Lambda = \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{\overline{\alpha}^1, \ldots, \overline{\alpha}^m\}$. Seja $X_p \in T_pM$ tal que $\langle \overline{\alpha}^i_p, X_p \rangle = 0$ e $X_p \lrcorner\, d\overline{\alpha}^i_p \in \Lambda_p \subset (\mathcal{I}_\Lambda)_p$, para $1 \leq i \leq m$. Considere que $\alpha = \sum_{j=1}^k b^j \overline{\alpha}^j \in \Lambda$, onde $b^j \in \mathcal{C}^\infty(U)$. É claro que $\langle \alpha_p, X_p \rangle = 0$. E, pelo Teorema A.2, temos que

$$d\alpha = \sum_{j=1}^{k} db^j \wedge \overline{\alpha}^j + b^j d\overline{\alpha}^j.$$

Desse modo, o Teorema 2.8 implica que

$$X_p \lrcorner\, d\alpha_p = \sum_{j=1}^{k} (X_p \lrcorner\, db^j_p)\overline{\alpha}^j_p - (X_p \lrcorner\, \overline{\alpha}^j_p) db^j_p + b^j_p (X_p \lrcorner\, d\overline{\alpha}^j_p).$$

Logo, $X_p \lrcorner\, d\alpha_p \in \Lambda_p$, pois $X_p \lrcorner\, \overline{\alpha}^j_p = \langle \overline{\alpha}^j_p, X_p \rangle = 0$.

Finalmente, considere que $V \subset U$ é um aberto, $p \in V$, $X_p \in A(\mathcal{I}_\Lambda)_p \subset T_pM$ e

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} b^j(\alpha^j|V) \in \Lambda|V,$$

onde $b^j \in \mathcal{C}^\infty(V)$ e $\alpha^j \in \Lambda$. Como $\langle \alpha_p^j, X_p \rangle = 0$, para $1 \leq j \leq k$, obtemos que $\langle \omega_p, X_p \rangle = 0$,

$$d\omega_p = \sum_{j=1}^{k} db_p^j \wedge \alpha_p^j + b^j(p) d\alpha_p^j,$$

$$X_p \lrcorner\, d\omega_p = \sum_{j=1}^{k} (X_p \lrcorner\, db_p^j)\alpha_p^j + b^j(p)(X_p \lrcorner\, d\alpha_p^j).$$

Mas, $(\Lambda|V)_p = \Lambda_p$, pela Proposição A.4. Desse modo, $X_p \in A(\mathcal{I}_{\Lambda|V})_p$. Suponha então que $X_p \in A(\mathcal{I}_{\Lambda|V})_p$ e $\omega \in \Lambda$. Portanto, $\omega|V \in \Lambda|V$ e $\langle \omega_p, X_p \rangle = \langle (\omega|V)_p, X_p \rangle = 0$. Logo, o Teorema A.2 implica que $d(\omega|V)_p = d\omega_p$ e $X_p \lrcorner\, d\omega_p = X_p \lrcorner\, d(\omega|V)_p \in (\Lambda|V)_p = \Lambda_p$. Assim, $X_p \in A(\mathcal{I}_\Lambda)_p$. □

Exemplo 2.22. *Seja $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ uma carta local de M definida em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Considere a 1-forma $\omega = -x^3 dx^1 + dx^2 - \phi dx^n \in \Omega^1(U)$, onde $\phi \in \mathcal{C}^\infty(U)$ é tal que $\phi = \phi(x^2, x^3, x^n)$, isto é, $\partial/\partial x_p^i(\phi) = 0$, para $i = 1, 4, \ldots, n-1$, e todo $p \in U$. Seja Λ a codistribuição em U gerada por ω e $\mathcal{I}_\Lambda$ o ideal diferencial gerado por Λ. Vamos agora determinar $A(\mathcal{I}_\Lambda)_p$, para todo $p \in U$. Considere que $p \in U$. De acordo com a Proposição 2.21, temos que*

$$A(\mathcal{I}_\Lambda)_p = \{X_p \in T_pM \mid \langle \omega_p, X_p \rangle = 0 \text{ e } X_p \lrcorner\, d\omega_p = c\omega_p, \text{ onde } c \in \mathbb{R}\}.$$

Observe que $A(\mathcal{I}_\Lambda)_p \subset (\Lambda_p)^\perp$ e que

$$\{\partial/\partial x^3, \ldots, \partial/\partial x^{n-1}, (\partial/\partial x^1 + x^3 \partial/\partial x^2), (\phi \partial/\partial x^2 + \partial/\partial x^n)\}|_p$$

é uma base $(\Lambda_p)^\perp$. Seja $X_p \in T_pM$. Utilizando o Teorema A.2, obtemos que

$$d\omega_p = (dx^1 \wedge dx^3 - \langle d\phi, \partial/\partial x^2 \rangle dx^2 \wedge dx^n - \langle d\phi, \partial/\partial x^3 \rangle dx^3 \wedge dx^n)_p,$$

e, com o Teorema 2.8, que

$$\begin{aligned} X_p \lrcorner\, d\omega_p = &- [\langle dx_p^3, X_p\rangle]dx_p^1 + [\langle d\phi_p, \partial/\partial x_p^2\rangle\langle dx_p^n, X_p\rangle]dx_p^2 \\ &+ [\langle d\phi_p, \partial/\partial x_p^3\rangle\langle dx_p^n, X_p\rangle + \langle dx_p^1, X_p\rangle]dx_p^3 \\ &- [\langle d\phi_p, \partial/\partial x_p^2\rangle\langle dx_p^2, X_p\rangle + \langle d\phi_p, \partial/\partial x_p^3\rangle\langle dx_p^3, X_p\rangle]dx_p^n. \end{aligned}$$

Portanto, dado $c \in \mathbb{R}$, temos que

$$X_p \lrcorner\, d\omega_p = c\omega_p = (-cx^3dx^1 + cdx^2 - c\phi dx^n)_p$$

se e somente se

$$\begin{aligned} \langle dx_p^3, X_p\rangle &= cx^3(p), \\ \langle d\phi_p, \partial/\partial x_p^2\rangle\langle dx_p^n, X_p\rangle &= c, \\ \langle d\phi_p, \partial/\partial x_p^3\rangle\langle dx_p^n, X_p\rangle + \langle dx_p^1, X_p\rangle &= 0, \\ \langle d\phi_p, \partial/\partial x_p^2\rangle\langle dx_p^2, X_p\rangle + \langle d\phi_p, \partial/\partial x_p^3\rangle\langle dx_p^3, X_p\rangle &= c\phi(p). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Suponha que $X_p \in A(\mathcal{I}_\Lambda)_p \subset (\Lambda_p)^\perp \subset T_pM$. Então,

$$X_p = a_3\partial/\partial x_p^3 + \cdots + a_{n-1}\partial/\partial x_p^{n-1} + b_1(\partial/\partial x^1 + x^3\partial/\partial x^2)_p + b_2(\phi\partial/\partial x^2 + \partial/\partial x^n)_p,$$

onde $a_3, \ldots, a_{n-1}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, e (2.1) implica que

$$\begin{aligned} c &= b_2\langle d\phi, \partial/\partial x^2\rangle_p, \\ b_1 &= -b_2\langle d\phi, \partial/\partial x^3\rangle_p, \\ a_3 &= cx^3(p) = b_2x^3(p)\langle d\phi, \partial/\partial x^2\rangle_p, \end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{R}$. Desse modo, $X_p \in span_{\mathbb{R}}(B_p)$, onde

$$B_p = \{\partial/\partial x^4, \ldots, \partial/\partial x^{n-1}, \alpha\}|_p \subset T_pM$$

com

$$\alpha = -[\langle d\phi, \partial/\partial x^3\rangle]\partial/\partial x^1 + [\phi - x^3\langle d\phi, \partial/\partial x^3\rangle]\partial/\partial x^2 + [x^3\langle d\phi, \partial/\partial x^2\rangle]\partial/\partial x^3 + \partial/\partial x^n.$$

Assim, $A(\mathcal{I}_\Lambda)_p \subset span_{\mathbb{R}}(B_p)$. *Agora, considere que*

$$X_p = a_4\partial/\partial x_p^4 + \cdots + a_{n-1}\partial/\partial x_p^{n-1} + b\alpha_p \in span_{\mathbb{R}}(B_p),$$

onde $a_4, \ldots, a_{n-1}, b \in \mathbb{R}$. *Observe que* $X_p \in (\Lambda_p)^\perp$, *pois* $\langle \omega_p, X_p\rangle = 0$. *Defina*

$$c \triangleq \langle d\phi_p, \partial/\partial x_p^2\rangle\langle dx_p^n, X_p\rangle = b\langle d\phi_p, \partial/\partial x_p^2\rangle \in \mathbb{R}.$$

É fácil verificar que (2.1) é satisfeita. Logo, $X_p \in A(\mathcal{I}_\Lambda)_p$ *e* $span_{\mathbb{R}}(B_p) = A(\mathcal{I}_\Lambda)_p$.

Como B_p *é linearmente independente e* $span_{\mathbb{R}}(B_p) = A(\mathcal{I}_\Lambda)_p$, *concluímos que* B_p *é uma base de* $A(\mathcal{I}_\Lambda)_p$. *Em particular,* $\dim(A(\mathcal{I}_\Lambda)_p) = n-3$, $\dim(C(\mathcal{I}_\Lambda)_p) = 3$ *e*

$$\widetilde{B}_p = \{\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}|_p \subset T_p^*M$$

é uma base de $C(\mathcal{I}_\Lambda)_p = (A(\mathcal{I}_\Lambda)_p)^\perp$, *onde*

$$\begin{aligned}
\gamma^1 &= dx^1 + [\langle d\phi, \partial/\partial x^3\rangle]dx^n,\\
\gamma^2 &= dx^2 - [\phi - x^3\langle d\phi, \partial/\partial x^3\rangle]dx^n,\\
\gamma^3 &= dx^3 - [x^3\langle d\phi, \partial/\partial x^2\rangle]dx^n.
\end{aligned}$$

Os próximos cinco teoremas que mostraremos na seqüência, como o Teorema de Frobenius para sistemas Pfaffianos, o Teorema de Pfaff e a Forma Normal de Goursat, são considerados fundamentais na teoria de sistemas diferenciais exteriores e na teoria de controle geométrica. Eles também evidenciam a relevância das definições descritas anteriormente nesta seção. Além disso, foi detectado que os mesmos estão espalhados pela literatura e são, às vezes, enunciados de maneira imprecisa. A Forma Normal de Goursat desempenha um papel fundamental na demonstração do Teorema 3.7 e do Teorema 3.8 da Seção 3.2 do Capítulo 3, que correspondem aos resultados bem conhecidos de triangularização de sistemas de controle sem arrasto com duas entradas obtidos por [76] e [68], respectivamente. Relembramos que nosso objetivo é generalizar estes dois teoremas de modo a considerar sistemas com arrasto. Isto será estabelecido na Seção 3.3.

Teorema 2.23 (Teorema de Frobenius para sistemas Pffafianos). *[105], [130], [43] Seja* $U \subset M$ *um aberto,* $\Sigma = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^m\} \subset \Omega^1(U)$ *um sistema Pfaffiano em* U *e* I_Σ *o ideal algébrico homogêneo gerado por* Σ. *Assuma que* I_Σ *é um ideal diferencial em* U. *Então, para todo* $p \in U$, *existe uma carta local* $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ *definida em uma*

vizinhança aberta $V \subset U$ de p tal que

$$I_\Sigma|V = I_{\Sigma|V} = I_\Theta,$$

onde $\Sigma|V = \{\alpha^1|V, \ldots, \alpha^m|V\} \subset \Omega^1(V)$ *e* $\Theta = \{dx^1, \ldots, dx^m\} \subset \Omega^1(V)$.

Demonstração. Seja Λ a codistribuição gerada pelo sistema Pfaffiano $\Sigma = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^m\}$ e $\Delta = \Lambda^\perp$ a distribuição anuladora de Λ. De acordo com a versão dual da Proposição A.11 para codistribuições, temos que $\Lambda = \Delta^\perp$. Como $\dim(\Lambda) = m \leq n$, segue da versão dual da Proposição A.8 e da Proposição A.5 que $\dim(\Delta) = n - m$ e que

$$\Lambda_p = (\Delta_p)^\perp = \mathrm{span}_\mathbb{R}\{\alpha^1, \ldots, \alpha^m\}|_p,$$

para todo $p \in U$. Por hipótese, I_Σ é um ideal diferencial em U e $\Sigma \subset \Lambda \subset I_\Sigma$. Temos então que, para $1 \leq i \leq m$,

$$d\alpha^i = \sum_{j=1}^m \gamma^{ij} \wedge \alpha^j,$$

onde $\gamma^{ij} \in \Omega^1(U)$. Desse modo, obtemos a partir da Proposição A.5 e das versões clássicas do Teorema de Frobenius[5] que, para todo $p \in U$, existe uma carta local $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ definida em uma vizinhança aberta $V \subset U$ de p tal que

$$\Delta_q = \mathrm{span}_\mathbb{R}\{\partial/\partial x^{m+1}, \ldots, \partial/\partial x^n\}|_q,$$

para todo $q \in V$. Logo, para todo $q \in V$,

$$\Lambda_q = (\Delta_q)^\perp = \mathrm{span}_\mathbb{R}\{dx^1, \ldots, dx^m\}|_q = \mathrm{span}_\mathbb{R}\{\alpha^1, \ldots, \alpha^m\}|_q.$$

Assim, temos que[6]

$$\Lambda|V = \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(V)}\{dx^1, \ldots, dx^m\}.$$

Portanto, concluímos que $I_\Sigma|V = I_{\Sigma|V} = I_{\Lambda|V} = I_\Theta$, onde $\Sigma|V = \{\alpha^1|V, \ldots, \alpha^m|V\}$, $\Theta = \{dx^1, \ldots, dx^m\} \subset \Omega^1(V)$. □

Teorema 2.24. *[26] Seja $U \subset M$ um aberto, $\Sigma = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^m\} \subset \Omega^1(U)$ um sistema Pfaffiano em U e $\mathcal{I}_\Sigma$ o ideal diferencial gerado por Σ. Considere o subconjunto $V \subset U$*

[5] Veja, por exemplo, [6, Teorema 8.3 do Capítulo 4 e Teorema 8.3 do Capítulo 5], [55, Lema 19.8 e Lema 19.10], [74, Teorema 2.21], [80, Teorema 2.11.11].

[6] Os detalhes da validade desta igualdade podem ser vistos na demonstração da Proposição A.9. Relembramos que $dx^1, \ldots, dx^m$ e $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$ são independentes em V e que $(\Lambda|V)_q = \Lambda_q$, para $q \in V$.

formado por todos os pontos $p \in U$ em que existe uma vizinhança aberta $W_p \subset U$ de p tal que $\dim(A(\mathcal{I}_\Sigma)_q) = r_p$*, para todo $q \in W_p$, onde $r_p \in \mathbb{N}$. Então, V é aberto e denso em U.*

Demonstração. Veja [26, pág. 101] e utilize a Proposição 2.21. □

O teorema dado a seguir estabelece condições para que o ideal diferencial $\mathcal{I}_\Sigma$ gerado por um sistema Pfaffiano $\Sigma \subset \Omega^1(U)$ seja localmente descrito por apenas $n - r$ variáveis em torno de $p \in U$, onde $\dim(M) = n$ e $\dim(A(\mathcal{I}_\Sigma)_p) = r$. Decorre então que, em algumas situações, tudo se passa como se determinados objetos geométricos de M pertencessem a uma variedade suave N de dimensão reduzida $\dim(N) = n - r$. Um caso como este será ilustrado logo mais adiante no Exemplo 2.28. Observamos também que, de acordo com o Teorema 2.24, a condição de regularidade exigida no teorema abaixo em relação à dimensão do espaço associado, é sempre satisfeita em torno de todos os pontos de um conjunto aberto e denso em U.

Teorema 2.25. *[26], [105], [130] Seja $U \subset M$ um aberto, $\Sigma = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^m\} \subset \Omega^1(U)$ um sistema Pfaffiano em U e $\mathcal{I}_\Sigma$ o ideal diferencial gerado por Σ. Suponha que $V \subset U$ é um conjunto aberto tal que* $\dim(A(\mathcal{I}_\Sigma)_p) = r$*, para todo $p \in V$, onde $r \in \mathbb{N}$. Então, para todo $p \in V$, existe uma carta local $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ definida em uma vizinhança aberta $W \subset V$ de p tal que*

$$\mathcal{I}_\Sigma|W = \mathcal{I}_\Theta,$$

onde $\Theta = \{\omega^1, \ldots, \omega^m\} \subset \Omega^1(W)$ e ω^i, $d\omega^i$ não dependem de $x^1, \ldots, x^r$, para $1 \leq i \leq m$. Mais precisamente, $\omega^i \in \Omega^1(W)$ e $d\omega^i \in \Omega^2(W)$ são tais que

$$\begin{aligned}
\omega^i_{\varphi^{-1}(x)} &= \sum_{j=r+1}^{n} b^{ij}(x^{r+1}, \ldots, x^n) dx^j_{\varphi^{-1}(x)}, \\
d\omega^i_{\varphi^{-1}(x)} &= \sum_{r+1 \leq j_1 < j_2 \leq n} c^{ij_1j_2}(x^{r+1}, \ldots, x^n) dx^{j_1}_{\varphi^{-1}(x)} \wedge dx^{j_2}_{\varphi^{-1}(x)},
\end{aligned}$$

para todo $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \varphi(W) \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq m$, onde $b^{ij}, c^{ij_1j_2} \in \mathcal{C}^\infty(\pi(\varphi(W)))$ e $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-r}$ é a projeção canônica definida por $\pi(x) = (x^{r+1}, \ldots, x^n)$, para todo $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Uma prova relativamente detalhada deste teorema está essencialmente contida em [26, págs. 103–104], onde certos resultados apresentados em [80, pág. 117 e demonstração da Proposição 2.11.7] são diretamente aplicados. Sugerimos também

a referência [130, pág. 30] para a demonstração de um resultado mais geral do que o estabelecido pelo teorema acima. □

Teorema 2.26 (Teorema de Pfaff). *[105], [130], [43] Seja $U \subset M$ um aberto e $\alpha \in \Omega^1(U)$. Suponha que existe uma vizinhança aberta $V \subset U$ de p tal que*

$$(d\alpha_p)^r \wedge \alpha_p \neq 0,$$
$$(d\alpha_p)^r \wedge d\alpha_p \wedge \alpha_p = 0,$$

para todo $p \in V$, onde $r \in \mathbb{N}$ e $(d\alpha_p)^r$ denota $d\alpha_p \wedge \cdots \wedge d\alpha_p$ (r vezes). Então, existe uma carta local $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ definida em uma vizinhança aberta $W \subset V$ de p tal que

$$span_{\mathcal{C}^\infty(W)}\{\alpha|W\} = span_{\mathcal{C}^\infty(W)}\{dx^1 + x^2dx^3 + \cdots + x^{2r}dx^{2r+1}\}.$$

Demonstração. A prova deste resultado está fortemente baseada no Teorema 2.23 e no Teorema 2.25. Os detalhes podem ser vistos em [105, Teorema 12.60] e [130, pág. 35]. □

Teorema 2.27 (Forma Normal de Goursat). *[105] Considere que $\Sigma = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^{n-2}\}$ é um sistema Pfaffiano em U, onde $U \subset M$ é aberto e $\dim(M) = n \geq 3$. Seja $\Lambda \subset \Omega^1(U)$ a codistribuição gerada por Σ e $p \in U$. Suponha que existe $\pi \in \Omega^1(U)$ tal que $\pi_p \notin (I_\Sigma)_p$ e que π satisfaz as* congruências de Goursat

$$d\alpha^j \equiv -\alpha^{j+1} \wedge \pi \ mod\ \alpha^1, \ldots, \alpha^j, \qquad para\ 1 \leq j \leq n-3,$$
$$d\alpha_p^{n-2} \notin (I_\Sigma)_p.$$

Então, existe uma carta local $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ definida em uma vizinhança aberta $V \subset U$ de p tal que

$$\Lambda|V = span_{\mathcal{C}^\infty(V)}\{dx^3 - x^2dx^1, dx^4 - x^3dx^1, \ldots, dx^n - x^{n-1}dx^1\}.$$

Demonstração. Veja [105, Teorema 12.66]. Observamos que a demonstração apresentada em [105] está fundamentada no Teorema de Pfaff dado acima. □

O exemplo dado a seguir, que foi inspirado em [68, demonstração do Teorema 7], o qual corresponde ao Teorema 3.8 da presente tese, descreve uma situação em que certos objetos geométricos de M podem ser tratados como se pertencessem a uma variedade suave N de dimensão reduzida $\dim(N) = n - r$, onde $\dim(M) = n$ e $1 \leq r \leq n - 1$.

Exemplo 2.28. *Seja $U \subset M$ uma vizinhança aberta de $p \in M$ e $\Sigma = \{\alpha\} \subset \Omega^1(U)$, com $\dim(M) = n \geq 3$. Assuma que $\dim(A(\mathcal{I}_\Sigma)_q) = n-3$ e $d\alpha_q \wedge \alpha_q \neq 0$, para todo $q \in U$. Observe que $\alpha_q \neq 0$, para todo $q \in U$. De acordo com o Teorema 2.25, existe uma carta local $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ definida em uma vizinhança aberta $W \subset U$ de p tal que*

$$span_{\mathcal{C}^\infty(W)}\{\alpha|W\} = span_{\mathcal{C}^\infty(W)}\{\omega\},$$

onde $\omega \in \Omega^1(W)$ satisfaz

$$\omega_{\varphi^{-1}(x)} = \sum_{j=n-2}^{n} b^j(x^{n-2}, x^{n-1}, x^n) dx^j_{\varphi^{-1}(x)},$$

para todo $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \varphi(W) \subset \mathbb{R}^n$, com $b^j \in \mathcal{C}^\infty(\pi(\varphi(W)))$ e $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ é a projeção canônica definida por $\pi(x) = (x^{n-2}, x^{n-1}, x^n)$, para todo $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. Note que $\pi(\varphi(W)) \subset \mathbb{R}^3$ é um aberto em $\mathbb{R}^3$. Assim, $\omega = \theta(\alpha|W)$, onde $\theta \in \mathcal{C}^\infty(W)$ e $\theta_p \neq 0$, para todo $p \in W$. O Teorema A.2 implica então que $d\omega_q \wedge \omega_q \neq 0$, para todo $q \in W$. Como ω depende apenas das 3 variáveis x^{n-2}, x^{n-1}, x^n, é natural esperarmos que $d\omega \wedge d\omega \wedge \omega = 0$, de modo que o Teorema de Pfaff (Teorema 2.26) possa ser aplicado, pois $\Omega^5(N) = \{0\}$ quando N é uma variedade suave com $\dim(N) = 3$. Isto é de fato verdade, como pode ser facilmente verificado de maneira computacional através do Teorema A.2. No entanto, optamos por mostrar uma maneira possivelmente mais elegante de se chegar a esta mesma conclusão.

Defina $\lambda = \pi \circ \varphi\colon W \to \overline{W}$, onde $\overline{W} = \pi(\varphi(W)) \subset \mathbb{R}^3$. Considere $\overline{W}$ com a estrutura usual de variedade suave e seja $\overline{\varphi} = (y^1, y^2, y^3)$ a carta global canônica de $\overline{W}$. Definimos

$$\overline{\omega} = \sum_{j=1}^{3} b^{n-3+j} dy^j \in \Omega^1(\overline{W}).$$

Seja $\lambda^*\colon \Omega(\overline{W}) \to \Omega(W)$ o homomorfismo injetivo entre álgebras exteriores induzido[7] pela submersão sobrejetiva λ. Por construção, temos que[8] $\lambda^*(\overline{\omega}) = \omega$. Além disso,

$$\lambda^*(d\overline{\omega} \wedge \overline{\omega}) = d\lambda^*(\overline{\omega}) \wedge \lambda^*(\overline{\omega}) = d\omega \wedge \omega,$$
$$\lambda^*(d\overline{\omega} \wedge d\overline{\omega} \wedge \overline{\omega}) = d\lambda^*(\overline{\omega}) \wedge d\lambda^*(\overline{\omega}) \wedge \lambda^*(\overline{\omega}) = d\omega \wedge d\omega \wedge \omega.$$

[7] *Para maiores detalhes sobre as propriedades de $\lambda^*\colon \Omega(\overline{W}) \to \Omega(W)$, veja [6] e [55], por exemplo.*

[8] *A igualdade $\lambda^*(\overline{\omega}) = \omega$ é uma conseqüência direta de resultados bem conhecidos em geometria diferencial. Veja, por exemplo, [6, Corolário 1.7 do Capítulo 5].*

Decorre do fato de λ *ser sobrejetiva que* $d\overline{\omega}_y \wedge \overline{\omega}_y \neq 0$*, para todo* $y \in \overline{W}$*. E, como* λ^* *é linear e* $d\overline{\omega} \wedge d\overline{\omega} \wedge \overline{\omega} \in \Omega^5(\overline{W}) = \{0\}$*, obtemos que* $d\omega \wedge d\omega \wedge \omega = 0$*. Em particular, segue do Teorema A.2 que* $d\alpha_q \wedge d\alpha_q \wedge \alpha_q = 0$*, para todo* $q \in W$*.*

Agora, como $d\omega \wedge d\omega \wedge \omega = 0$*, o Teorema de Pfaff estabelece que existe uma carta local* $\psi = (z^1, \ldots, z^n)$ *definida em uma vizinhança aberta* $P \subset W$ *de* p *tal que*

$$span_{\mathcal{C}^\infty(P)}\{\omega|P\} = span_{\mathcal{C}^\infty(P)}\{dz^1 + z^2 dz^3\}.$$

A Proposição A.4 implica então que

$$span_{\mathcal{C}^\infty(P)}\{\alpha|P\} = span_{\mathcal{C}^\infty(P)}\{dz^1 + z^2 dz^3\}.$$

No que se segue, explicaremos como podemos chegar a esta mesma conclusão caso o Teorema de Pfaff fosse válido apenas para variedades suaves M *com* $\dim(M) \leq 3$*. Relembramos que* $d\overline{\omega}_y \wedge \overline{\omega}_y \neq 0$ *e* $d\overline{\omega}_y \wedge d\overline{\omega}_y \wedge \overline{\omega}_y = 0$*, para todo* $y \in \overline{W}$*. Dessa maneira, o Teorema de Pfaff assegura que existe uma carta local* $\overline{\psi} = (\overline{z}^1, \overline{z}^2, \overline{z}^3)$ *definida em uma vizinhança aberta* $\overline{P} \subset \overline{W} \subset \mathbb{R}^3$ *de* $\lambda(p) \in \overline{W}$ *tal que*

$$span_{\mathcal{C}^\infty(\overline{P})}\{\overline{\omega}|\overline{P}\} = span_{\mathcal{C}^\infty(\overline{P})}\{d\overline{z}^1 + \overline{z}^2 d\overline{z}^3\}.$$

Considere a vizinhança aberta $P = \lambda^{-1}(\overline{P}) \subset W$ *de* p *e defina as funções suaves*

$$z^{n-3+i} \triangleq (\lambda|P)^*(\overline{z}^i) = \overline{z}^i \circ (\lambda|P) \in \mathcal{C}^\infty(P),$$

para $1 \leq i \leq 3$*, onde* $(\lambda|P)^*\colon \Omega(\overline{P}) \to \Omega(P)$ *é o homomorfismo entre álgebras exteriores induzido por* $\lambda|P$*. É claro que* $d\overline{z}^1, d\overline{z}^2, d\overline{z}^3$ *são linearmente independentes em* $\overline{P}$*. E, para todo* $1 \leq i \leq 3$ *e todo* $q \in P$*, temos que*

$$dz_q^{n-3+i} = d((\lambda|P)^*(\overline{z}^i))_q = ((\lambda|P)^*(d\overline{z}^i))_q = \lambda^*(d\overline{z}^i_{\lambda(q)}),$$

onde, no lado direito da última igualdade, λ^* *denota a aplicação cotangente (pull-back) de* λ *no ponto* $\lambda(q) \in \overline{P} \subset \mathbb{R}^3$*. Como* λ *é uma submersão, segue que* $\lambda^*|_{\lambda(q)}$ *é uma aplicação linear injetiva e, portanto,* dz^{n-2}, dz^{n-1}, dz^n *são linearmente independentes em* P*. Existem então* $dz^1, \ldots, dz^{n-3} \in \{dx^1, \ldots, dx^n\}$ *tais que* $dz^1, \ldots, dz^n$ *são linearmente independentes em* P *(restringindo* P *se necessário)*[9]*. Assim,* $\psi = (z^1, \ldots, z^n)$ *é uma carta*

[9] *Os detalhes deste argumento podem ser vistos na demonstração da Proposição A.5.*

local de M definida na vizinhança aberta $P \subset W \subset U$ de p (restringindo P se necessário). Defina

$$\gamma = (\lambda|P)^*(d\overline{z}^1 + \overline{z}^2 d\overline{z}^3) \in \Omega^1(P).$$

É fácil verificar que

$$\gamma = dz^{n-2} + z^{n-1}dz^n.$$

Por fim, observe que $(\lambda|P)^*(\overline{\omega}|\overline{P}) = \omega|P$ e $\overline{\omega}|\overline{P} = \overline{c}(d\overline{z}^1 + \overline{z}^2 d\overline{z}^3)$, onde $\overline{c} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{P})$. Logo, $(\lambda|P)^*(\overline{\omega}|\overline{P}) = c\gamma = \omega|P$, onde $c \triangleq (\lambda|P)^*(\overline{c}) = \overline{c} \circ (\lambda|P) \in \mathcal{C}^\infty(P)$. Mas, $\omega_q \neq 0$, para todo $q \in P \subset W$. Assim, $c(q) \neq 0$, para todo $q \in P$ e, desse modo, $1/c \in \mathcal{C}^\infty(P)$. Portanto, concluímos que

$$span_{\mathcal{C}^\infty(P)}\{\alpha|P\} = span_{\mathcal{C}^\infty(P)}\{\omega|P\} = span_{\mathcal{C}^\infty(P)}\{dz^{n-2} + z^{n-1}dz^n\}.$$

Na próximo capítulo, veremos em detalhes como que as ferramentas geométricas que apresentamos aqui são aplicadas em teoria de controle não-linear. Ficará evidente a grande importância que os conceitos e resultados de sistemas diferenciais exteriores possuem na solução de problemas de triangularização de sistemas de controle não-lineares com duas entradas.

Capítulo 3

Formas Triangulares para Sistemas Não-Lineares com Duas Entradas

Neste capítulo, apresentaremos as contribuições da presente pesquisa referentes à triangularização de sistemas de controle não-lineares com duas entradas. O principal resultado é a determinação de condições geométricas para que um sistema da forma

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2, \tag{3.1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $n \geq 2$ e $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ é o controle, seja descrito pela seguinte forma triangular

$$\begin{array}{rcl} \dot{z}_1 & = & \phi_1(z_1, z_2, z_n) + z_2 v_1 \\ \dot{z}_2 & = & \phi_2(z_1, z_2, z_3, z_n) + z_3 v_1 \\ & \vdots & \\ \dot{z}_{n-3} & = & \phi_{n-3}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, z_n) + z_{n-2} v_1 \\ \dot{z}_{n-2} & = & \phi_{n-2}(z) + z_{n-1} v_1 \\ \dot{z}_{n-1} & = & v_2 \\ \dot{z}_n & = & v_1, \end{array} \tag{3.2}$$

onde $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ é a nova entrada, após uma mudança de coordenadas $z = \Psi(x)$ e uma realimentação de estado estática regular $u = \alpha(x) + \beta(x)v$.

Começaremos, na Seção 3.1, definindo os conceitos de campo de vetores parametrizado e de campo de vetores aumentado associados a um sistema de controle da forma (3.1). Estas definições, juntamente com as ferramentas geométricas do capítulo anterior, são

exigidas nas duas seções subseqüentes. Observamos que apesar de estes dois conceitos serem amplamente conhecidos na literatura de controle geométrico, os mesmos são, por vezes, aplicados sem qualquer menção aos aspectos sutis envolvidos. Por este motivo, exibimos no Apêndice B uma formalização detalhada das definições de campo de vetores parametrizado e de campo de vetores aumentado.

Apresentaremos na Seção 3.2 os resultados bem conhecidos de [76] e de [68] sobre a triangularização de sistemas de controle (3.1) sem arrasto, ou seja, com $f = 0$. O primeiro, dado pelo Teorema 3.7, estabelece condições geométricas necessárias e suficientes para que o sistema de controle (3.1) sem arrasto seja descrito em torno de um dado ponto pela forma triangular (3.2) com $\phi_1 = \cdots = \phi_{n-2} = 0$, após uma mudança de coordenadas $z = \Psi(x)$ e uma realimentação de estado estática regular da forma $u = \beta(x)v$. E, o segundo, dado pelo Teorema 3.8, estabelece condições suficientes para que esta descrição seja válida em torno de cada ponto de um conjunto aberto e denso. Exibiremos as demonstrações destes dois teoremas com o objetivo de tornar evidente a estreita relação entre os mesmos e a Forma Normal de Goursat que foi mostrada na Seção 2.2. Observamos que as condições geométricas estabelecidas por [76] e [68] estão relacionadas com uma certa regularidade do flag de Lie e do flag derivado da distribuição gerada por g_1, g_2 em (3.1). O flag de Lie e o flag derivado serão definidos e mostraremos, ainda, algumas de suas propriedades geométricas conhecidas. A demonstração destas, assim como a prova do Teorema 3.7, serão expostas no Apêndice C.

Na Seção 3.3, desenvolveremos as duas principais contribuições desta pesquisa em relação à triangularização do sistema de controle com duas entradas (3.1) (com ou sem arrasto), que correspondem ao Teorema 3.10 e ao Corolário 3.12. Apresentaremos também um exemplo acadêmico com o objetivo de ilustrar a aplicação do Teorema 3.10. Estes resultados podem ser vistos como generalizações do Teorema 3.7 (estabelecido por [76]) e do Teorema 3.8 (estabelecido por [68]), respectivamente. De fato, acrescentamos a estes certas condições geométricas de modo considerar o arrasto f no sistema de controle (3.1). Com estas condições adicionais, o Teorema 3.10 estabelece condições necessárias e suficientes para que (3.1) seja descrito em torno de um dado ponto pela forma triangular (3.2), após uma mudança de coordenadas $z = \Psi(x)$ e uma realimentação de estado estática regular $u = \alpha(x) + \beta(x)v$, enquanto que o Corolário 3.12 estabelece condições suficientes para que esta descrição seja possível em torno de cada ponto de um conjunto aberto e denso. Adiantamos, desde já, que são de fato os resultados de [76] e [68] que garantem a existência da mudança de coordenadas $z = \Psi(x)$ e da matriz β em $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ que necessitamos para triangularizar o sistema de controle (3.1).

Na Seção 3.4, mostramos, primeiramente, um breve resumo sobre a teoria de controle geométrica de dimensão infinita. Com base nesta ferramenta, enunciaremos em seguida o Teorema 3.17, que estabelece que quando o sistema (3.1) com $2 \leq n \leq 5$ é planar, e a saída planar satisfaz algumas condições de regularidade, existe uma mudança de coordenadas e uma realimentação regular em que o sistema é descrito pela seguinte forma triangular

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 + \phi_1(z_1, z_2, z_n)v_1, \\
\dot{z}_2 &= z_3 + \phi_2(z_1, z_2, z_3, z_n)v_1, \\
&\vdots \\
\dot{z}_{n-3} &= z_{n-2} + \phi_{n-3}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, z_n)v_1, \\
\dot{z}_{n-2} &= z_{n-1} + \phi_{n-2}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, z_n)v_1, \\
\dot{z}_{n-1} &= v_2, \\
\dot{z}_n &= v_1
\end{aligned} \tag{3.3}$$

(note que (3.3) difere de (3.2)). Esta é a terceira e última contribuição da presente tese concernente à Parte I.

Faremos agora algumas convenções e simplificações a respeito da notação utilizada neste capítulo, a fim de tornar a exposição deste trabalho mais leve, clara e objetiva. Seja M uma variedade suave de dimensão finita e $U \subset M$ um aberto. Relembramos que se $X \in \mathfrak{X}(U)$ e $\varphi = (y^1, \ldots, y^n)$ é uma carta local de M definida em um aberto $V \subset U$, então

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} a^i(p)\partial/\partial y_p^i,$$

para $p \in V$, onde $a^i = L_{X|V}y^i = \langle dy^i, X|V\rangle \in \mathcal{C}^\infty(V)$. Logo, $a^i(p) = X_p(y^i) = \langle dy_p^i, X_p\rangle$, para todo $p \in V$, e

$$X_{\varphi^{-1}(y)} = \sum_{i=1}^{n} a^i(\varphi^{-1}(y))\partial/\partial y^i_{\varphi^{-1}(y)} = \sum_{i=1}^{n} X_i(y)\partial/\partial y^i_{\varphi^{-1}(y)},$$

onde $X_i(y) = a^i(\varphi^{-1}(y)) \in \mathbb{R}$, para $y \in \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$. Note que $X_i = a^i \circ \varphi^{-1}$ é um elemento de $\mathcal{C}^\infty(\varphi(V))$. Nos momentos em que não há possibilidade de confusão, abusaremos da notação, escrevendo $X(y) = (X_1(y), \ldots, X_n(y)) \in \mathbb{R}^n$, para todo $y \in \varphi(V)$. Denominamos $X(y) = (X_1(y), \ldots, X_n(y))$ de *expressão* do campo de vetores suave $X \in \mathfrak{X}(U)$ na carta local $\varphi = (y^1, \ldots, y^n)$. Além disso, definimos $\dot{y}^i = L_{X|V}y^i$ e $\dot{y} = (\dot{y}^1, \ldots, \dot{y}^n)$. Portanto, $\dot{y}(\varphi^{-1}(y)) = X(y) = (X_1(y), \ldots, X_n(y))$, para todo $y \in \varphi(V)$. Por abuso de notação, escreveremos simplesmente $\dot{y} = X(y) = (X_1(y), \ldots, X_n(y))$.

3.1 Campos de vetores parametrizados e aumentados

Observamos que as definições de campo de vetores parametrizado e de campo de vetores aumentando que apresentaremos nesta seção são necessárias nas duas seções subseqüentes. Como estes conceitos são bem conhecidos na literatura de controle, não seremos muito rigorosos do ponto de vista matemático nesta seção para não sobrecarregar a exposição. Optamos por reservar ao Apêndice B uma formalização detalhada destes dois conceitos.

Considere o sistema de controle com duas entradas (3.1)

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 = f(x) + g(x)u, \tag{3.4}$$

onde $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ é o estado, U é aberto, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ é o controle, $f, g_1, g_2 \colon U \to \mathbb{R}^n$ são aplicações suaves e $g = (g_1, g_2)$.

Equipamos $\mathbb{R}^n$ com a estrutura usual de variedade suave e seja $\phi = (x^1, \ldots, x^n)$ a carta local canônica de $\mathbb{R}^n$ definida em U, isto é, a aplicação identidade em U. Relembramos que φ é uma carta local de $\mathbb{R}^n$ definida no aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ se e somente se $\varphi \colon V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo local, ou seja, uma mudança de coordenadas. Naturalmente associado ao sistema de controle (3.4) está o *campo de vetores parametrizado* $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathfrak{X}(U)$ definido por

$$F_u = (f + g_1u_1 + g_2u_2)\partial/\partial x, \qquad \text{para todo } u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ou, mais precisamente,

$$F_u = \overline{f} + \overline{g}_1u_1 + \overline{g}_2u_2, \qquad \text{para todo } u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

onde

$$\overline{f} = \sum_{i=1}^{n} f^i\partial/\partial x^i, \quad \overline{g}_1 = \sum_{i=1}^{n} g_1^i\partial/\partial x^i, \quad \overline{g}_2 = \sum_{i=1}^{n} g_2^i\partial/\partial x^i,$$

com $f = (f^1, \ldots, f^n)$, $g_1 = (g_1^1, \ldots, g_1^n)$, $g_2 = (g_2^1, \ldots, g_2^n)$. De fato, a expressão de F_u na carta local $\phi = (x^1, \ldots, x^n)$ de $\mathbb{R}^n$ é dada por

$$F_u(x) = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2,$$

ou seja,

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2,$$

para todo $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Escreveremos $F = (\overline{f}, \overline{g}_1, \overline{g}_2)$ (tripla ordenada). Dessa maneira, dada uma carta local $\varphi = (y^1, \ldots, y^n)$ de $\mathbb{R}^n$ definida em um aberto $V \subset U$, quando dissermos que

$$\dot{y} = h(y, u)$$

é a *expressão* do sistema de controle (3.4) na carta local φ, queremos realmente dizer que

$$\dot{y} = h(y, u) = \overline{f}(y) + \overline{g}_1(y)u_1 + \overline{g}_2(y)u_2$$

é a expressão de F_u na carta local φ, para todo $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^n$.

Agora, considere a variedade produto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, com $\mathbb{R}$ munido da estrutura usual de variedade suave. Por abuso de notação, denotamos por t a carta global canônica de $\mathbb{R}$ (função identidade). Seja d/dt o campo de vetores suave usual em $\mathbb{R}$, isto é, $d/dt|_t(\alpha)$ é a derivada de função suave α no ponto $t \in \mathbb{R}$, onde α está definida em uma vizinhança aberta de $t \in \mathbb{R}$. Podemos então associar ao sistema de controle (3.4) o *campo de vetores aumentado* $F^a\colon \mathbb{R}^2 \to \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times U)$ definido, com notações óbvias, por

$$F^a_u = d/dt + (f + g_1u_1 + g_2u_2)\partial/\partial x = (d/dt + \overline{f}) + \overline{g}_1u_1 + \overline{g}_2u_2 \triangleq \overline{f}^a + \overline{g}^a_1u_1 + \overline{g}^a_2u_2,$$

para todo $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. De fato, a expressão de F^a_u na carta local (t, ϕ) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ é dada por

$$\begin{aligned} F^a_u(t, x) &= (1, f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2) = (1, F_u(x)) \\ &= (1, f(x)) + (0, g_1(x))u_1 + (0, g_2(x))u_2 \triangleq f^a(t, x) + g^a_1(t, x)u_1 + g^a_2(t, x)u_2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{t} &= 1 \\ \dot{x} &= f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2, \end{aligned}$$

para todo $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Escreveremos $F^a = (\overline{f}^a, \overline{g}^a_1, \overline{g}^a_2)$.

Observação 3.1. *Defina, para cada $k \in \mathbb{N}$, as seguintes distribuições*

$$\begin{aligned} G_0 &= span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{\overline{g}_1, \overline{g}_2\}, & G^a_0 &= span_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\times U)}\{\overline{g}^a_1, \overline{g}^a_2\}, \\ G_{k+1} &= G_k + [G_k, G_k] \supset G_k, & G^a_{k+1} &= G^a_k + [G^a_k, G^a_k] \supset G^a_k. \end{aligned}$$

Seja $\pi^2\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *a projeções canônica definida por* $\pi^2(t,p)=p$, *para* $(t,p)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. *Como* $\overline{g}_1^a, \overline{g}_2^a \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}\times U)$ *são* π_2*-relacionados com* $\overline{g}_1, \overline{g}_2 \in \mathfrak{X}(U)$, *respectivamente, é um resultado bem conhecido em teoria geométrica de controle que* $\pi_*^2|G_k^a(t,p)$ *é uma aplicação linear injetiva e que*

$$\pi_*^2(G_k^a(t,p)) = G_k(p),$$

para todo $k\in\mathbb{N}$, $(t,p)\in\mathbb{R}\times U$. *Em particular,* $\dim(G_k^a(t,p)) = \dim(G_k(p))$, *para* $k\in\mathbb{N}$, $(t,p)\in\mathbb{R}\times U$. *Além disso,*

$$\langle dt, X^a\rangle_{(t,p)} = X^a_{(t,p)}(t) = 0,$$

para todo $k\in\mathbb{N}$, $X^a\in G_k^a$, $(t,p)\in\mathbb{R}\times U$. *Para maiores detalhes, veja a Proposição B.1 do Apêndice B.*

Por simplicidade, em todo o restante deste capítulo, identificaremos as aplicações suaves f, g_1, g_2 do sistema de controle (3.4) com os campos de vetores suaves correspondentes $\overline{f}, \overline{g}_1, \overline{g}_2 \in \mathfrak{X}(U)$, respectivamente.

3.2 Resultados conhecidos para sistemas sem arrasto

Considere o seguinte sistema de controle com duas entradas

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 = f(x) + g(x)u, \tag{3.5}$$

onde $x\in U\subset\mathbb{R}^n$ é o estado, U é aberto, $n\geq 2$, $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$ é o controle, $f, g_1, g_2\colon U\to\mathbb{R}^n$ são aplicações suaves e $g=(g_1,g_2)$. Quando $f=0$, dizemos que (3.5) é um sistema *sem arrasto*.

O objetivo desta seção é apresentar os resultados bem conhecidos de [76] e de [68] referentes à triangularização de sistemas da forma (3.5) sem arrasto, após uma mudança de coordenadas e uma realimentação de estado estática regular. As condições geométricas estabelecidas nestes dois trabalhos estão relacionadas com uma certa regularidade do flag de Lie e do flag derivado da distribuição gerada pelos campos de vetores suaves g_1, g_2 em (3.5). No que se segue, definiremos de maneira precisa os conceitos de realimentação de estado estática regular, de flag de Lie e de flag derivado de uma distribuição. Mostraremos também algumas de suas propriedades geométricas que são amplamente utilizadas na teoria de controle.

Definição 3.2. *[82],[41] Considere o sistema de controle (3.5). Dizemos que $u = \alpha + \beta v$ é uma* realimentação de estado estática regular *definida no aberto $V \subset U$ se as aplicações $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$: $V \to \mathbb{R}^2$ e $\beta = (\beta_{ij})$: $V \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ são suaves e $\beta(x) = (\beta_{ij}(x)) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ é uma matriz invertível para todo $x \in V$, onde $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ é a nova entrada.*

A composição do sistema (3.5) com uma realimentação de estado estática regular $u = \alpha + \beta v$ definida em $V \subset U$, resulta no seguinte sistema de controle

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v \\ &= f(x) + \alpha_1(x)g_1(x) + \alpha_2(x)g_2(x) + (\beta_{11}(x)g_1(x) + \beta_{12}(x)g_2(x))v_1 \\ &\quad +(\beta_{21}(x)g_1(x) + \beta_{22}(x)g_2(x))v_2 \\ &\triangleq \widehat{f}(x) + \widehat{g}_1(x)v_1 + \widehat{g}_1(x)v_2 = \widehat{f}(x) + \widehat{g}(x)v, \end{aligned} \tag{3.6}$$

para todo $x \in V$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, onde $\widehat{g} = (\widehat{g}_1, \widehat{g}_2)$. O sistema (3.6) é também denominado de *sistema em malha-fechada*. Associamos então a (3.6) o campo de vetores parametrizado $\widehat{F} = (\widehat{f}, \widehat{g}_1, \widehat{g}_2)$, onde

$$\begin{aligned} \widehat{f} &= (f + g\alpha)|V = (f + \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)|V, \\ \widehat{g}_1 &= (\beta_{11} g_1 + \beta_{12} g_2)|V, \\ \widehat{g}_2 &= (\beta_{21} g_1 + \beta_{22} g_2)|V. \end{aligned}$$

Escrevemos também $\widehat{g} = (g\beta)|V$. Note que $\widehat{f}, \widehat{g}_1, \widehat{g}_2 \in \mathfrak{X}(V)$.

As distribuições introduzidas na definição abaixo possuem grande relevância na teoria de controle geométrica, como pode ser visto em [76], [68], [105], [75], [121], [84], [98], [85], [77], [78], [79], por exemplo.

Definição 3.3. *[84], [98], [85] Seja Δ uma distribuição em U, onde $U \subset M$ é aberto. Definimos, para cada $k \in \mathbb{N}$, as seguintes distribuições em U*

$$\begin{aligned} F_0 &= G_0 = \Delta, \\ F_{k+1} &= F_k + [F_k, F_0] \supset F_k, \\ G_{k+1} &= G_k + [G_k, G_k] \supset G_k \supset F_k. \end{aligned}$$

Denominamos a seqüência de distribuições (F_k) de flag de Lie *de Δ e a seqüência de distribuições (G_k) de* flag derivado *de Δ.*

As próximas duas proposições estabelecem uma definição alternativa de (F_k) e (G_k) para o caso em que $\Delta = \text{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{X_1, X_2\}$. É importante destacar que, apesar de estes resultados serem afirmados em [76], [75], [105], os mesmos são apresentados de uma maneira relativamente imprecisa e sem demonstração.

Proposição 3.4. *Seja (F_k) o flag de Lie da distribuição $\Delta = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{X_1, X_2\} \subset \mathfrak{X}(U)$, onde $U \subset M$ é aberto. Considere, para cada $k \in \mathbb{N}$, os conjuntos*

$$\begin{aligned} A_0 &= \{X_1, X_2\}, \\ A_{k+1} &= \{X \in \mathfrak{X}(U) \mid X = [Y_k, [Y_{k-1}, [\ldots, [Y_2, Y_1]\ldots]], \text{ onde } Y_1, \ldots, Y_k \in \{X_1, X_2\}\}. \end{aligned}$$

Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} F_0 &= \Delta = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}(A_0), \\ F_{k+1} &= span_{\mathcal{C}^\infty(U)}(\bigcup_{j=0}^{k+1} A_j) = F_k + span(A_{k+1}). \end{aligned}$$

Demonstração. Veja o Apêndice C. □

Proposição 3.5. *Seja (G_k) o flag derivado de $\Delta = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{X_1, X_2\} \subset \mathfrak{X}(U)$, onde $U \subset M$ é aberto. Considere, para cada $k \in \mathbb{N}$, os conjuntos*

$$\begin{aligned} B_0 &= \{X_1, X_2\}, \\ B_{k+1} &= \{X \in \mathfrak{X}(U) \mid X = [Y_1, Y_2], \text{ onde } Y_1, Y_2 \in \bigcup_{j=0}^{k} B_j\} \subset B_{k+2}. \end{aligned}$$

Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} G_0 &= \Delta = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_0), \\ G_{k+1} &= G_0 + span_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_{k+1}) = G_k + span_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_{k+1}). \end{aligned}$$

Demonstração. Veja o Apêndice C. □

Observação 3.6. *Considere a distribuição $\Delta = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{g_1, g_2\}$, onde g_1, g_2 são os campos de vetores suaves do sistema (3.5). É um resultado bem conhecido na teoria de controle geométrica que o flag de Lie (F_k) e o flag derivado (G_k) de Δ são* invariantes *por realimentação de estado estática regular. Mais precisamente, suponha que $u = \alpha + \beta v$ é uma realimentação de estado estática regular definida em $U \subset \mathbb{R}^n$. Defina a distribuição*

$\widehat{\Delta} = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{\widehat{g}_1, \widehat{g}_2\}$, onde $\widehat{g}_1, \widehat{g}_2$ são os campos de vetores suaves do sistema em malha-fechada (3.6). Seja $(\widehat{F}_k)$ o flag de Lie e $(\widehat{G}_k)$ o flag derivado de $\widehat{\Delta}$. Então, $F_k = \widehat{F}_k$ e $G_k = \widehat{G}_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Para maiores detalhes, veja a Proposição C.1 do Apêndice C.

Neste momento, podemos apresentar os resultados bem conhecidos de [76] e de [68] a respeito da triangularização de sistemas de controle (3.5) sem arrasto, ou seja, com $f = 0$. O leitor notará em suas demonstrações que a Forma Normal de Goursat do Teorema 2.27 desempenha um papel fundamental. Observamos, ainda, que utilizaremos o conceito de campo de vetores parametrizado que descrevemos na seção anterior na prova do teorema dado abaixo, o qual foi estabelecido por [76], com o objetivo de torná-la precisa do ponto de vista geométrico.

Teorema 3.7. *[76], [75], [105] Considere o sistema de controle (3.5) com $f = 0$. Defina $\Delta = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{g_1, g_2\}$ e $\Lambda = \Delta^\perp$. Seja (F_k) o flag de Lie e (G_k) o flag derivado de Δ. Dado $p \in U$, temos que as seguintes afirmações são equivalentes quando $n \geq 3$:*

1. *Para cada $0 \leq k \leq n-2$, $p \in U$ é um ponto regular de F_k, G_k com $\dim(F_k(p)) = \dim(G_k(p)) = 2 + k$;*

2. *Existe uma vizinhança aberta $V \subset U$ de p, uma 1-forma $\pi \in \Omega^1(V)$ e um sistema Pfaffiano $\Sigma = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^{n-2}\} \subset \Omega^1(V)$ em que $\dim(\Delta|V) = 2$,*

$$\begin{aligned} &\pi_p \notin (I_\Sigma)_p, \\ &\Lambda|V = span_{\mathcal{C}^\infty(V)}(\Sigma), \end{aligned}$$

   e as congruências de Goursat do Teorema 2.27 são satisfeitas para Σ, p, π, ou seja,

$$\begin{aligned} &d\alpha^j \equiv -\alpha^{j+1} \wedge \pi \ mod\ \alpha^1, \ldots, \alpha^j, \qquad para\ 1 \leq j \leq n-3, \\ &d\alpha_p^{n-2} \notin (I_\Sigma)_p; \end{aligned}$$

3. *Existe uma carta local $\psi = (y^1, \ldots, y^n)$ definida em uma vizinhança aberta $\widetilde{V} \subset U$ de p tal que $\dim(\Delta|\widetilde{V}) = 2$ e*

$$\Lambda|\widetilde{V} = span_{\mathcal{C}^\infty(\widetilde{V})}\{dy^2 - y^3 dy^1, \ldots, dy^{n-1} - y^n dy^1\};$$

4. *Existe uma carta local φ e uma realimentação de estado estática regular da forma $u = \beta v$, ambas definidas em uma vizinhança aberta $\widehat{V} \subset U$ de p, em que a expressão*

do sistema em malha-fechada resultante (3.6) na carta local $\varphi = (z^1, \ldots, z^n)$ *é dada pela* forma em cascata *(*chained form*)*

$$\begin{aligned} \dot{z}^1 &= z^2 v_1 \\ \dot{z}^2 &= z^3 v_1 \\ &\vdots \\ \dot{z}^{n-2} &= z^{n-1} v_1 \\ \dot{z}^{n-1} &= v^2 \\ \dot{z}^n &= v^1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Além disso, dado $p \in U$*, as afirmações* 1 *e* 4 *são equivalentes quando* $n = 2$*.*

Demonstração. Veja o Apêndice C. □

O próximo teorema é um resultado genérico de triangularização para sistemas de controle com duas entradas sem arrasto, que foi obtido por [68].

Teorema 3.8. *[68], [34], [75], [76] Considere o sistema de controle (3.5) com* $f = 0$*. Defina* $\Delta = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{g_1, g_2\}$*. Seja* (G_k) *o flag derivado da distribuição* Δ*. Suponha que* $\dim(G_k(q)) = 2 + k$*, para todo* $0 \leq k \leq n-2$ *e todo* $q \in D$*, onde* $D \subset U$ *é um conjunto aberto e denso em* U*. Então, existe um conjunto* $V \subset U$ *que é aberto e denso em* U *em que, para todo* $p \in V$*, existe uma carta local* φ *e uma realimentação de estado estática regular da forma* $u = \beta v$*, ambas definidas em uma vizinhança aberta* $W \subset V$ *de* p*, tais que a expressão do sistema em malha-fechada resultante (3.6) na carta local* $\varphi = (z^1, \ldots, z^n)$ *é dada pela forma em cascata*

$$\begin{aligned} \dot{z}^1 &= z^2 v_1 \\ \dot{z}^2 &= z^3 v_1 \\ &\vdots \\ \dot{z}^{n-2} &= z^{n-1} v_1 \\ \dot{z}^{n-1} &= v^2 \\ \dot{z}^n &= v^1. \end{aligned}$$

Em particular, para todo $p \in V \subset U$ *e todo* $0 \leq k \leq n-2$*,* p *é um ponto regular de* F_k, G_k *com* $\dim(F_k(p)) = \dim(G_k(p)) = 2 + k$*, onde* (F_k) *é o flag de Lie de* Δ*.*

Demonstração. Assuma que $n \geq 3$ e que $\dim(G_k(q)) = 2 + k$, para todo $0 \leq k \leq n-2$ e todo $q \in D$, onde $D \subset U$ é um conjunto aberto e denso em U. Considere a codistribuição anuladora $\Lambda = \Delta^\perp$ de $\Delta = \text{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{g_1, g_2\}$.

Com base em ferramentas geométricas semelhantes às apresentadas na Seção 2.2 sobre sistemas diferenciais exteriores, é mostrado em detalhes em [68, Teorema 7] que existe um conjunto $V \subset U$ que é aberto e denso em U tal que, para todo $p \in V$, p é um ponto regular de Δ com $\dim(\Delta_p) = 2$ e existe uma carta local $\psi = (y^1, \ldots, y^n)$ definida em uma vizinhança aberta $W \subset V$ de p em que

$$\Lambda|W = \operatorname{span}\{dy^2 - y^3 dy^1, \ldots, dy^{n-1} - y^n dy^1\}.$$

Portanto, basta aplicarmos o Teorema 3.7.

É importante destacar que o resultado de [68] descrito acima foi também observado e ressaltado por [34], conforme mencionado em [68], [75], [76]. □

Na seção seguinte, iremos, num certo sentido, generalizar os dois teoremas anteriores ao considerarmos sistemas de controle (3.5) com arrasto.

3.3 Condições necessárias e suficientes para sistemas com arrasto

Acabamos de ver na Seção 3.2 dois resultados bem conhecidos de triangularização de sistemas de controle com duas entradas sem arrasto. Nosso objetivo, neste momento, é acrescentar condições geométricas ao mesmos de modo a considerarmos o arrasto f em (3.5). Isto é estabelecido pelo Teorema 3.10 e pelo Corolário 3.12 apresentados mais adiante. O primeiro, determina condições necessárias e suficientes para que (3.5) seja descrito em torno de um dado ponto pela seguinte forma triangular

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \phi_1(z_1, z_2, z_n) + z_2 v_1 \\
\dot{z}_2 &= \phi_2(z_1, z_2, z_3, z_n) + z_3 v_1 \\
&\vdots \\
\dot{z}_{n-3} &= \phi_{n-3}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, z_n) + z_{n-2} v_1 \\
\dot{z}_{n-2} &= \phi_{n-2}(z) + z_{n-1} v_1 \\
\dot{z}_{n-1} &= v_2 \\
\dot{z}_n &= v_1,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

onde $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ é a nova entrada, após uma mudança de coordenadas $z = \Psi(x)$ e uma realimentação de estado estática regular $u = \alpha + \beta v$. O segundo, determina

condições suficientes para que esta descrição seja possível em torno de cada ponto de um conjunto aberto e denso. Portanto, podemos considerar que, num certo sentido, o Teorema 3.10 e o Corolário 3.12 generalizam o Teorema 3.7 e o Teorema 3.8 da seção anterior, respectivamente. Estes dois resultados são as principais contribuições desta tese em relação a formas triangulares para sistemas não-lineares com duas entradas (Parte I).

Observamos que as referidas condições geométricas adicionais que estabelecemos relacionam os três campos de vetores suaves f, g_1, g_2 em (3.5) com espaços de retração[1] determinados a partir do campo de vetores aumentado[2] $F^a = (f^a, g_1^a, g_2^a)$ associado ao sistema de controle (3.5). Além disso, o leitor notará nas demonstrações do Teorema 3.10 e do Corolário 3.12 que são de fato o Teorema 3.7 e o Teorema 3.8, respectivamente, que garantem a existência da mudança de coordenadas $z = \Psi(x)$ e da matriz β em $u = \alpha + \beta v$ que necessitamos para triangularizar o sistema de controle (3.5). Portanto, resta-nos encontrar α e mostrar que as funções $\phi_1, \ldots, \phi_{n-2}$ em (3.8) possuem a dependência triangular desejada em relação a $(z_1, \ldots, z_n)$.

Para demonstrarmos o Teorema 3.10, utilizaremos o resultado dado abaixo.

Lema 3.9. *Seja $U \subset M$ um aberto, com $\dim(M) = n \geq 3$, e $\mathbb{R} \times M$ a variedade produto, com $\mathbb{R}$ munido da estrutura usual de variedade suave. Por abuso de notação, denotamos por t a carta global canônica de $\mathbb{R}$ (função identidade). Assuma que $\varphi = (z^1, \ldots, z^n)$ é uma carta local de M definida em U e seja (t, φ) a carta local correspondente de $\mathbb{R} \times M$ definida em $\mathbb{R} \times U$. Considere as seguintes codistribuições em $\mathbb{R} \times U$*

$$\Lambda^k = span_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\times U)}\{dt, dz^1 - z^2 dz^n, dz^2 - z^3 dz^n, \ldots, dz^{n-2-k} - z^{n-1-k} dz^n\},$$

para cada $1 \leq k \leq n-3$. Então,

$$C^k_{(t,p)} = span_{\mathbb{R}}\{dt, dz^1, \ldots, dz^{n-1-k}, dz^n\}|_{(t,p)}$$

para todo $(t, p) \in \mathbb{R} \times U$ e cada $1 \leq k \leq n-3$, onde $C^k_{(t,p)} \triangleq C(\mathcal{I}_{\Lambda^k})_{(t,p)}$ é o espaço de retração do ideal diferencial gerado por Λ^k em $(t, p) \in \mathbb{R} \times U$.

Demonstração. Sejam $q \in \mathbb{R} \times U$, $1 \leq k \leq n-3$. Considere, para $1 \leq i \leq n-2-k$, as

[1] Relembre a Definição 2.20 da Seção 2.2.
[2] Relembramos que este conceito foi apresentado na Seção 3.1.

seguintes 1-formas em $\Omega^1(\mathbb{R} \times U)$

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= dt, \\ \alpha^i &= dz^i - z^{i+1} dz^n. \end{aligned}$$

Decorre do Teorema 2.21 que

$$\begin{aligned} A_q^k = \{ X_q \in T_q(\mathbb{R} \times M) \mid \langle \alpha_q^i, X_q \rangle = 0 \text{ e } X_q \lrcorner\, d\alpha_q^i \text{ é um elemento de} \\ \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\alpha^0, \ldots, \alpha^{n-2-k}\}|_q, \text{ para todo } 0 \leq i \leq n-2-k \}. \end{aligned}$$

onde $A_q^k \triangleq A(\mathcal{I}_{\Lambda^k})_q$. Note que $\Lambda^k = \operatorname{span}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\times U)}\{\alpha^0, \ldots, \alpha^{n-2-k}\}$, $\dim(\Lambda^k) = n-1-k$ e $A_q^k \subset (\Lambda_q^k)^\perp$. Além do mais,

$$R_q = \{\partial/\partial z^{n-1-k}, \ldots, \partial/\partial z^{n-1}, \alpha\}|_q \subset T_q(\mathbb{R} \times M) \tag{3.9}$$

é uma base de $(\Lambda_q^k)^\perp$, onde

$$\alpha = z^2 \partial/\partial z^1 + \cdots + z^{n-1-k} \partial/\partial z^{n-2-k} + \partial/\partial z^n.$$

Seja $X_q \in T_q(\mathbb{R} \times M)$. O Teorema A.2 implica que

$$\begin{aligned} d\alpha_0 &= 0, \\ d\alpha^i &= -dz^{i+1} \wedge dz^n, \end{aligned}$$

e o Teorema 2.8 que

$$\begin{aligned} X_q \lrcorner\, d\alpha_q^0 &= 0, \\ X_q \lrcorner\, d\alpha_q^i &= \langle dz_q^n, X_q \rangle dz_q^{i+1} - \langle dz_q^{i+1}, X_q \rangle dz_q^n, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq n-2-k$. Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} X_q \lrcorner\, d\alpha_q^0 &\in \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\alpha^0, \ldots, \alpha^{n-2-k}\}|_q, \\ X_q \lrcorner\, d\alpha_q^i &\in \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\alpha^0, \ldots, \alpha^{n-2-k}\}|_q, \quad \text{para } 1 \leq i \leq n-2-k, \end{aligned}$$

se e somente se

$$
\begin{aligned}
X_q \lrcorner\, d\alpha_q^0 &= \sum_{j=0}^{n-2-k} c^{0j}\alpha_q^i, \text{ onde } c^{0j} \in \mathbb{R},\\
X_q \lrcorner\, d\alpha_q^i &= \sum_{j=0}^{n-2-k} c^{ij}\alpha_q^i\\
&= c^{i0}dt_q + c^{i1}(dz^1 - z^2dz^n)_q + \cdots + c^{i(i-1)}(dz^{i-1} - z^idz^n)_q\\
&+ c^{ii}(dz^i - z^{i+1}dz^n)_q + c^{i(i+1)}(dz^{i+1} - z^{i+2}dz^n)_q + \ldots\\
&+ c^{i(n-2-k)}(dz^{n-2-k} - z^{n-1-k}dz^n)_q, \text{ para } 1 \le i \le n-2-k, \text{ onde } c^{ij} \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

se e somente se

$$
\begin{aligned}
&c^{00} = \cdots = c^{0(n-2-k)} = 0,\\
&c^{(n-2-k)0} = \cdots = c^{(n-2-k)(n-2-k)} = 0,\\
&\langle dz_q^{n-1-k}, X_q\rangle = \langle dz_q^n, X_q\rangle = 0,\\
&c^{i0} = \cdots = c^{i(i-1)} = c^{ii} = c^{i(i+2)} = \cdots = c^{i(n-2-k)} = 0,\\
&c^{i(i+1)} = \langle dz_q^n, X_q\rangle = 0,\\
&c^{i(i+1)}z^{i+2}(q) = \langle dz_q^{i+1}, X_q\rangle = 0, \quad \text{para } 1 \le i \le n-3-k,
\end{aligned}
$$

se e somente se

$$X_q \lrcorner\, d\alpha_q^0 = X_q \lrcorner\, d\alpha_q^1 = \cdots = X_q \lrcorner\, d\alpha_q^{n-2-k} = 0$$

se e somente se

$$\langle dz_q^2, X_q\rangle = \cdots = \langle dz_q^{n-1-k}, X_q\rangle = \langle dz_q^n, X_q\rangle = 0. \tag{3.10}$$

Suponha que $X_q \in A_q^k \subset (\Lambda_q^k)^\perp \subset T_q(\mathbb{R}\times M)$. De (3.9), obtemos que

$$X_q = a^{n-1-k}\partial/\partial z_q^{n-1-k} + \cdots + a^{n-1}\partial/\partial z_q^{n-1} + b\alpha_q,$$

onde $a^{n-1-k}, \ldots, a^{n-1}, b \in \mathbb{R}$. Então, (3.10) exige que

$$
\begin{aligned}
a_{n-1-k} &= \langle dz_q^{n-1-k}, X_q\rangle = 0,\\
b &= \langle dz_q^n, X_q\rangle = 0.
\end{aligned}
$$

Logo, $X_q \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(B_q^k)$, onde

$$B_q^k = \{\partial/\partial z^{n-k}, \ldots, \partial/\partial z^{n-1}\}|_q \subset R_q \subset (\Lambda_q^k)^\perp \subset T_q(\mathbb{R} \times M)$$

Assim, $A_q^k \subset \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(B_q^k)$. Agora, seja

$$X_q = a^{n-k}\partial/\partial z_q^{n-k} + \cdots + a^{n-1}\partial/\partial z_q^{n-1} \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(B_q^k) \subset (\Lambda_q^k)^\perp,$$

onde $a^{n-k}, \ldots, a^{n-1} \in \mathbb{R}$. É claro que $X_q \in (\Lambda_q^k)^\perp$ e que (3.10) é atendida. Isto significa que $X_q \in A_q^k$ e $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(B_q^k) \subset A_q^k$, ou seja, mostramos que $A_q^k = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(B_q^k)$.

Concluímos então que B_q^k é uma base de A_q^k e $\dim(A_q^k) = k$. Como $C_q^k = (A_q^k)^\perp$, segue que $\dim(C_q^k) = n + 1 - k$ e que

$$\widetilde{B}_q^k = \{dt, dz^1, \ldots, dz^{n-1-k}, dz^n\}|_q \subset T_q^*(\mathbb{R} \times M)$$

é uma base de C_q^k. □

Teorema 3.10. *Considere o sistema de controle (3.5) e o campo de vetores aumentado associado $F^a = (f^a, g_1^a, g_2^a)$. Seja (F_k) o flag de Lie e (G_k) o flag derivado da distribuição $\Delta = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{g_1, g_2\} \in \mathfrak{X}(U)$. Para cada $1 \leq k \leq n-3$, considere as seguintes codistribuições em $\mathbb{R} \times U$*

$$\begin{aligned} \Lambda^k &= (G_k^a)^\perp, \\ H^k &= (span_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\times U)}\{f^a\} + G_k^a)^\perp, \end{aligned}$$

onde (G_k^a) é o flag derivado da distribuição $\Delta^a = span_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\times U)}\{g_1^a, g_2^a\} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times U)$. Além disso, para todo $1 \leq k \leq n-3$, $(t,q) \in \mathbb{R} \times U$, definimos $C_{(t,q)}^k = C(\mathcal{I}_{\Lambda^k})_{(t,q)}$, isto é, $C_{(t,q)}^k$ é o espaço de retração do ideal diferencial gerado por Λ^k em (t,q) (veja a Definição 2.20).

Então, dados $t_0 \in \mathbb{R}$ e $p \in U$, existe uma carta local φ e uma realimentação de estado estática regular da forma $u = \alpha + \beta v$, ambas definidas em uma vizinhança aberta $V \subset U$ de p, tais que a expressão do sistema em malha-fechada resultante (3.6) na carta local

$\varphi = (z_1, \ldots, z_n)$ é dada pela forma triangular

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \phi_1(z_1, z_2, z_n) + z_2 v_1 \\
\dot{z}_2 &= \phi_2(z_1, z_2, z_3, z_n) + z_3 v_1 \\
&\vdots \\
\dot{z}_{n-3} &= \phi_{n-3}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, z_n) + z_{n-2} v_1 \\
\dot{z}_{n-2} &= \phi_{n-2}(z) + z_{n-1} v_1 \\
\dot{z}_{n-1} &= v_2 \\
\dot{z}_n &= v_1,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

se e somente se existe uma vizinhança aberta $J \subset \mathbb{R}$ de t_0 e um vizinhança aberta $W \subset U$ de p, em que as seguintes condições geométricas são satisfeitas:

1. *Para todo $0 \leq k \leq n-2$ e todo $q \in W$, $\dim(F_k(q)) = \dim(G_k(q)) = 2 + k$;*
2. *Para todo $1 \leq k \leq n-3$, todo $(t, q) \in J \times W$ e todo $\omega \in H^k$, temos que*

$$\begin{aligned}
L_{f^a}\omega_{(t,q)} &\in C^k_{(t,q)}, \\
L_{g_1^a}\omega_{(t,q)} &\in C^k_{(t,q)}, \\
L_{g_2^a}\omega_{(t,q)} &\in C^k_{(t,q)}.
\end{aligned}$$

Observação 3.11. *Note que a condição 1 deste teorema é precisamente a afirmação 1 estabelecida no Teorema 3.7 para sistemas sem arrasto. O propósito da condição 2 é justamente levar em conta o arrasto f do sistema (3.5). Veremos na demonstração do teorema acima que é de fato o Teorema 3.7 que assegura a existência da carta local $\varphi = (z_1, \ldots, z_n)$ e da aplicação β em $u = \alpha + \beta v$ que necessitamos.*

Antes de provarmos o teorema, explicaremos algumas das convenções e simplificações a respeito da notação que serão adotadas em sua demonstração.

Seja M uma variedade suave, Δ uma distribuição em $U \subset M$ e $X^1, \ldots, X^r \in \mathfrak{X}(U)$, onde U é aberto em M. Se

$$\Delta = \operatorname{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{X^1, \ldots, X^r\},$$

escreveremos simplesmente $\Delta = \operatorname{span}\{X^1, \ldots, X^r\}$. Seja $V \subset U$ um aberto. Se

$$\Delta_q = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{X_q^1, \ldots, X_q^r\},$$

para todo $q \in V$, escrevemos $\Delta = \text{span}\{X^1, \ldots, X^r\}$ *em* V. Seja $W \subset U$ um aberto tal que $V \subset W \subset U$ e assuma que $Y^1, \ldots, Y^m \in \mathfrak{X}(W)$. Caso

$$\Delta|V = \text{span}_{\mathcal{C}^\infty(V)}\{Y^1|V, \ldots, Y^m|V\},$$

escrevemos $\Delta|V = \text{span}\{Y^1, \ldots, Y^m\}$ *sobre* $\mathcal{C}^\infty(V)$. Utilizaremos, ainda, notações análogas para codistribuições. Observamos também que abusaremos da notação e não faremos qualquer distinção entre dt e sua restrição a um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. O domínio de definição de dt estará claro de acordo com o contexto.

Demonstração do Teorema 3.10. Por simplicidade, provaremos o Teorema 3.10 supondo que $n \geq 4$. O leitor não terá dificuldades em verificar que os argumentos apresentados também comprovam a validade do resultado para $2 \leq n \leq 3$. Começamos então demonstrando a necessidade.

(Necessidade) Primeiramente, reescrevemos (3.11) da seguinte maneira

$$\dot{z} = \widehat{f}(z) + \widehat{g}_1(z)v_1 + \widehat{g}_2(z)v_2, \tag{3.12}$$

para $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, onde

$$\begin{aligned} \widehat{f} &= (f + \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)|W, \\ \widehat{g}_1 &= (\beta_{11} g_1 + \beta_{12} g_2)|W, \\ \widehat{g}_2 &= (\beta_{21} g_1 + \beta_{22} g_2)|W \end{aligned} \tag{3.13}$$

são determinados pelo sistema em malha-fechada resultante (3.6). Seja $(\widehat{F}_k)$ o flag de Lie e $(\widehat{G}_k)$ o flag derivado da distribuição $\widehat{\Delta} = \text{span}_{\mathcal{C}^\infty(W)}\{\widehat{g}_1, \widehat{g}_2\} \subset \mathfrak{X}(W)$. De (3.11), temos que as expressões de $\widehat{f}, \widehat{g}_1, \widehat{g}_2 \in \mathfrak{X}(W)$ na carta local $\varphi = (z_1, \ldots, z_n)$ são dadas por

$$\begin{aligned} &\widehat{f}(z) = (\phi_1(z_1, z_2, z_n), \phi_2(z_1, z_2, z_3, z_n), \ldots, \phi_{n-3}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, z_n), \phi_{n-2}(z), 0, 0), \\ &\widehat{g}_1(z) = (z_2, z_3, \ldots, z_{n-1}, 0, 1), \\ &\widehat{g}_2(z) = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0), \end{aligned} \tag{3.14}$$

respectivamente. Decorre então do Lema C.2 que

$$\widehat{F}_k = \widehat{G}_k = \text{span}_{\mathcal{C}^\infty(W)}\{\widehat{g}_1, \partial/\partial z_{n-1}, \partial/\partial z_{n-2}, \ldots, \partial/\partial z_{n-1-k}\}$$

possuem dimensão constante com $\dim(\widehat{F}_k) = \dim(\widehat{G}_k) = 2 + k$, para $0 \leq k \leq n-2$, e

$\widehat{g}_2 = \partial/\partial z_{n-1}$. Observe que a Proposição A.4 e Proposição A.12 fornecem que

$$\begin{aligned} G_0|W &= \operatorname{span}\{g_1|W, g_2|W\}, \\ G_{k+1}|W &= G_k|W + [G_k|W, G_k|W], \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Assim, como $\beta = (\beta_{ij})$ em (3.13) é invertível em W, concluímos pela Observação 3.6 que

$$F_k|W = \widehat{F}_k = \widehat{G}_k = G_k|W = \operatorname{span}\{\widehat{g}_1, \partial/\partial z_{n-1}, \partial/\partial z_{n-2}, \ldots, \partial/\partial z_{n-1-k}\} \tag{3.15}$$

possuem dimensão constante com $\dim(F_k|W) = \dim(G_k|W) = 2 + k$, para $0 \leq k \leq n-2$.

Agora, seja $\widehat{F}^a = (\widehat{f}^a, \widehat{g}_1^a, \widehat{g}_2^a)$ o campo de vetores aumentado associado ao sistema em malha-fechada resultante (3.6). É claro que (3.14) implica que as expressões dos campos de vetores suaves $\widehat{f}^a, \widehat{g}_1^a, \widehat{g}_2^a \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times W)$ na carta local (t, φ) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} &\widehat{f}^a(t,z) = (1, \phi_1(z_1, z_2, z_n), \phi_2(z_1, z_2, z_3, z_n), \ldots, \phi_{n-3}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, z_n), \phi_{n-2}(z), 0, 0), \\ &\widehat{g}_1^a(t,z) = (0, z_2, z_3, \ldots, z_{n-1}, 0, 1), \\ &\widehat{g}_2^a(t,z) = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1, 0). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Além disso, é fácil ver que

$$\begin{aligned} \widehat{f}^a &= (f^a + \alpha_1 g_1^a + \alpha_2 g_2^a)|\mathbb{R} \times W, \\ \widehat{g}_1^a &= (\beta_{11} g_1^a + \beta_{12} g_2^a)|\mathbb{R} \times W \in G_0^a|\mathbb{R} \times W \subset G_k^a|\mathbb{R} \times W, \\ \widehat{g}_2^a &= (\beta_{21} g_1^a + \beta_{22} g_2^a)|\mathbb{R} \times W \in G_0^a|\mathbb{R} \times W \subset G_k^a|\mathbb{R} \times W, \quad \text{para } k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Por (C.2), obtemos também que[3]

$$\begin{aligned} [\partial/\partial z^{n-j}, \widehat{g}_1^a] &= [\pi_*^2(\partial/\partial z^{n-j}), \pi_*^2(\widehat{g}_1)] = \pi_*^2([\partial/\partial z^{n-j}, \widehat{g}_1]) = \pi_*^2(\partial/\partial z^{n-1-j}) \\ &= \partial/\partial z^{n-1-j} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times W), \end{aligned}$$

para todo $1 \leq j \leq n-2$. Segue então de (3.15), da Observação 3.1, da Proposição A.4 e

[3] O fato de que $\widehat{g}_1 = \pi_*^2(\widehat{g}_1^a)$, $\widehat{g}_2 = \pi_*^2(\widehat{g}_2^a)$, onde $\pi^2\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a projeção canônica, pode ser visto em (B.3). Para a validade da segunda igualdade, isto é, a comutatividade, veja, por exemplo, [6, Teorema 7.9 do Capítulo 4].

da Proposição A.12 que

$$G_k^a|\mathbb{R}\times W = \operatorname{span}\{\widehat{g}_1^a, \partial/\partial z_{n-1}, \partial/\partial z_{n-2}, \ldots, \partial/\partial z_{n-1-k}\} \subset \mathfrak{X}(\mathbb{R}\times W) \tag{3.18}$$

com $\dim(G_k^a|\mathbb{R}\times W) = 2+k$, para cada $0 \leq k \leq n-2$, e $\widehat{g}_2^a = \partial/\partial z_{n-1} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}\times W)$. Resulta de (3.16), da Proposição A.10 e da Proposição A.9 que existe uma vizinhança aberta $J \subset \mathbb{R}$ de $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Lambda^k|J\times W = (G_k^a|J\times W)^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{array}{c} dt \\ dz_1 - z_2 dz_n \\ dz_2 - z_3 dz_n \\ \vdots \\ dz_{n-2-k} - z_{n-1-k} dz_n \end{array}\right\},$$

sobre $\mathcal{C}^\infty(J\times W)$, para $1 \leq k \leq n-3$, restringindo W se necessário. Portanto, o Lema 3.9 e a Proposição 2.21 implicam que

$$C^k = \operatorname{span}\{dt, dz_1, \ldots, dz_{n-1-k}, dz_n\}$$

em $J\times W$ (pontualmente), para $1 \leq k \leq n-3$, ou seja,

$$C^{n-2-i} = \operatorname{span}\{dt, dz_1, \ldots, dz_{i+1}, dz_n\} \tag{3.19}$$

em $J\times W$, para $1 \leq i \leq n-3$.

Como $\widehat{f}^a = (f^a + \alpha_1 g_1^a + \alpha_2 g_2^a)|\mathbb{R}\times W$ (veja (3.17)), é fácil concluir a partir de (3.16), (3.18), da Proposição A.10, da Proposição A.12 e da Proposição A.9 que

$$H^k|J\times W = (\operatorname{span}\{\widehat{f}^a|J\times W\} + G_k^a|J\times W)^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{array}{c} dz_1 - z_2 dz_n - \phi_1 dt \\ dz_2 - z_3 dz_n - \phi_2 dt \\ \vdots \\ dz_{n-2-k} - z_{n-1-k} dz_n - \phi_{n-2-k} dt \end{array}\right\},$$

sobre $\mathcal{C}^\infty(J \times W)$, para $1 \leq k \leq n-3$, ou, de forma equivalente,

$$H^{n-2-i}|J \times W = \text{span}\left\{ \begin{array}{c} dz_1 - z_2 dz_n - \phi_1 dt \\ dz_2 - z_3 dz_n - \phi_2 dt \\ \vdots \\ dz_i - z_{i+1} dz_n - \phi_i dt \end{array} \right\}, \tag{3.20}$$

sobre $\mathcal{C}^\infty(J \times W)$, para $1 \leq i \leq n-3$, restringindo J e W se necessário.

Utilizando (3.16) e a Proposição A.3, obtemos que

$$\begin{aligned} L_{\widehat{f}^a}(dz_i - z_{i+1}dz_n - \phi_i dt) &= d\phi_i - \phi_{i+1}dz_n - (L_{\widehat{f}^a}\phi_i)dt, \\ L_{\widehat{g}_1^a}(dz_i - z_{i+1}dz_n - \phi_i dt) &= dz_{i+1} - z_{i+2}dz_n - (L_{\widehat{g}_1^a}\phi_i)dt, \\ L_{\widehat{g}_2^a}(dz_i - z_{i+1}dz_n - \phi_i dt) &= -(L_{\widehat{g}_2^a}\phi_i)dt, \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq n-3$. De (3.16), é claro que

$$d\phi_i \in \text{span}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\times W)}\{dz_1, dz_2, \ldots, dz_{i+1}, dz_n\},$$

para cada $1 \leq i \leq n-3$. Logo, (3.19) fornece que

$$\begin{aligned} L_{\widehat{f}^a}(dz_i - z_{i+1}dz_n - \phi_i dt)_{(t,q)} &\in C^{n-2-i}_{(t,q)}, \\ L_{\widehat{g}_1^a}(dz_i - z_{i+1}dz_n - \phi_i dt)_{(t,q)} &\in C^{n-2-i}_{(t,q)}, \\ L_{\widehat{g}_2^a}(dz_i - z_{i+1}dz_n - \phi_i dt)_{(t,q)} &\in C^{n-2-i}_{(t,q)}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

para todo $1 \leq i \leq n-3$, $(t,q) \in J \times W$. Sejam $1 \leq i \leq n-3$, $(t,q) \in J \times W$ e $\omega \in H^{n-2-i}$. Por (3.19) e (3.20), temos que $H^{n-2-i}(t,q) \subset C^{n-2-i}_{(t,q)}$. Assim, (3.20), (3.21) e a Proposição A.3 implicam que

$$L_{\widehat{f}^a}\overline{\omega}_{(t,q)} \in C^{n-2-i}_{(t,q)}, \quad L_{\widehat{g}_1^a}\overline{\omega}_{(t,q)} \in C^{n-2-i}_{(t,q)}, \quad L_{\widehat{g}_2^a}\overline{\omega}_{(t,q)} \in C^{n-2-i}_{(t,q)},$$

onde $\overline{\omega} = \omega|\mathbb{R} \times W$. Obtemos então de (3.17) e da Proposição A.3 que

$$L_{f^a}\omega_{(t,q)} \in C^{n-2-i}_{(t,q)}, \quad L_{g_1^a}\omega_{(t,q)} \in C^{n-2-i}_{(t,q)}, \quad L_{g_2^a}\omega_{(t,q)} \in C^{n-2-i}_{(t,q)},$$

pois $\langle \overline{\omega}, \widehat{g}_1^a \rangle_{(t',q')} = \langle \overline{\omega}, \widehat{g}_2^a \rangle_{(t',q')} = 0$, para $(t',q') \in J \times W$ (veja (3.20)).

(Suficiência) Por hipótese, temos que p é um ponto regular de F_k, G_k com $\dim(F_k(p)) =$

$\dim(G_k(p)) = 2 + k$, para todo $0 \leq k \leq n-2$. Então, aplicando o Teorema 3.7 e restringindo W se necessário, sabemos que existe uma carta local φ e uma realimentação de estado estática regular da forma $u = \beta v$, ambas definidas em W, tais as expressões dos seguintes campos de vetores suaves

$$\begin{aligned}\widehat{g}_1 &= (\beta_{11} g_1 + \beta_{12} g_2)|W,\\ \widehat{g}_2 &= (\beta_{21} g_1 + \beta_{22} g_2)|W\end{aligned}$$

na carta local $\varphi = (z_1, \ldots, z_n)$ são dadas por

$$\begin{aligned}\widehat{g}_1(z) &= (z_2, z_3, \ldots, z_{n-1}, 0, 1),\\ \widehat{g}_2(z) &= (0, 0, \ldots, 0, 1, 0),\end{aligned} \tag{3.22}$$

respectivamente. Devido à Proposição A.7, podemos assumir, restringindo W se necessário, que[4] $\beta = \overline{\beta}|W$, onde $\overline{\beta} = (\overline{\beta}_{ij})$: $U \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ é uma aplicação suave.

Agora, definimos $h = f|W$. Seja $\overline{F}^a = (h^a, \widehat{g}_1^a, \widehat{g}_2^a)$ o campo de vetores aumentado em relação ao campo de vetores parametrizado $\overline{F} = (h, \widehat{g}_1, \widehat{g}_2)$. Note que

$$\begin{aligned}h^a &= f^a|\mathbb{R} \times W,\\ \widehat{g}_1^a &= (\beta_{11} g_1^a + \beta_{12} g_2^a)|\mathbb{R} \times W,\\ \widehat{g}_2^a &= (\beta_{21} g_1^a + \beta_{22} g_2^a)|\mathbb{R} \times W.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Além disso, temos que as expressões de $h^a, \widehat{g}_1^a, \widehat{g}_2^a$ na carta local (t, φ) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned}h^a(t, z) &= (1, f(z)) = (1, \gamma_1(z), \ldots, \gamma_n(z)),\\ \widehat{g}_1^a(t, z) &= (0, z_2, z_3, \ldots, z_{n-1}, 0, 1),\\ \widehat{g}_2^a(t, z) &= (0, 0, 0, \ldots, 0, 1, 0).\end{aligned} \tag{3.24}$$

Relembramos que $\beta = (\beta_{ij})$ é invertível no aberto W. Assim, segue de (3.22) e da demonstração da necessidade acima que (veja (3.18))

$$G_k^a|\mathbb{R} \times W = \operatorname{span}\{\widehat{g}_1^a, \partial/\partial z_{n-1}, \partial/\partial z_{n-2}, \ldots, \partial/\partial z_{n-1-k}\} \subset \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times W) \tag{3.25}$$

com $\dim(G_k^a|\mathbb{R} \times W) = 2 + k$, para cada $1 \leq k \leq n-2$, e $\widehat{g}_2^a = \partial/\partial z_{n-1} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times W)$.

[4] A construção da extensão $\overline{\beta}$ pode ser deduzida da demonstração da Proposição A.8.

Portanto, obtemos da Proposição A.10 e da Proposição A.9 que existe uma vizinhança aberta $J \subset \mathbb{R}$ de $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Lambda^k|J \times W = (G_k^a|J \times W)^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{array}{c} dt \\ dz_1 - z_2 dz_n \\ dz_2 - z_3 dz_n \\ \vdots \\ dz_{n-2-k} - z_{n-1-k} dz_n \end{array}\right\}, \tag{3.26}$$

sobre $\mathcal{C}^\infty(J \times W)$, para cada $1 \leq k \leq n-3$, restringindo W se necessário. Da Observação 3.1, temos que $dt \in \Lambda^k = (G_k^a)^\perp$, $1 \leq k \leq n-3$. Note também que a Proposição A.7 e a Proposição A.9 garantem que podemos assumir que[5]

$$\begin{array}{rcl} dz_1 - z_2 dz_n & = & \theta_1|J \times W, \\ dz_2 - z_3 dz_n & = & \theta_2|J \times W, \\ & \vdots & \\ dz_{n-3} - z_{n-2} dz_n & = & \theta_{n-3}|J \times W, \end{array} \tag{3.27}$$

onde $\theta_1, \ldots, \theta_{n-2-k} \in \Lambda^k$, para cada $1 \leq k \leq n-3$, restringindo J e W se necessário. Desse modo, (3.26), o Lema 3.9 e a Proposição 2.21 implicam que

$$C^k = \operatorname{span}\{dt, dz_1, \ldots, dz_{n-1-k}, dz_n\}$$

em $J \times W$ (pontualmente), para $1 \leq k \leq n-3$, ou seja,

$$C^{n-2-i} = \operatorname{span}\{dt, dz_1, \ldots, dz_{i+1}, dz_n\} \tag{3.28}$$

em $J \times W$, para $1 \leq i \leq n-3$.

Considere as seguintes 1-formas em $\Omega^1(\mathbb{R} \times U)$

$$\begin{array}{rcl} \lambda^1 & = & \theta_1 - \langle \theta_1, f^a \rangle dt, \\ \lambda^2 & = & \theta_2 - \langle \theta_2, f^a \rangle dt, \\ & \vdots & \\ \lambda^{n-3} & = & \theta_{n-3} - \langle \theta_{n-3}, f^a \rangle dt. \end{array} \tag{3.29}$$

[5]Os detalhes da prova deste argumento são similares aos descritos na demonstração da Proposição A.8.

Por definição,

$$\langle dt, f^a \rangle = 1. \tag{3.30}$$

Logo, para cada $1 \leq k \leq n-3$, temos que

$$\lambda^1, \ldots, \lambda^{n-2-k} \in H^k, \tag{3.31}$$

pois $dt, \theta_1, \ldots, \theta^{n-2-k}$ são elementos de $\Lambda^k = (G_k^a)^\perp$. Além disso, segue de (3.24) e (3.25) que $\{h^a, \widehat{g}_1^a, \partial/\partial z_{n-1}, \partial/\partial z_{n-2}, \ldots, \partial/\partial z_{n-1-k}\} \subset \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times W)$ é um conjunto formados por $3+k$ campos de vetores independentes em $\mathbb{R} \times W$ (pontualmente), para todo $1 \leq k \leq n-3$. Assim,

$$(\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{h^a_{(t,q)}\} + G_k^a(t,q))^\perp = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\lambda^1, \ldots, \lambda^{n-2-k}\}|_{(t,q)}, \tag{3.32}$$

para todo $1 \leq k \leq n-3$, $(t,q) \in J \times W$, já que $\{\lambda^1, \ldots, \lambda^{n-2-k}\} \subset H^k$ é um conjunto formado por $(n-2-k)$ 1-formas independentes em $J \times W$ (veja (3.27) e (3.29)). Decorre da Proposição A.9 que

$$H^k | J \times W = \mathrm{span}\{\lambda^1, \ldots, \lambda^{n-2-k}\}$$

sobre $\mathcal{C}^\infty(J \times W)$, para $1 \leq k \leq n-3$, ou, de forma equivalente,

$$H^{n-2-i} | J \times W = \mathrm{span}\{\lambda^1, \ldots, \lambda^i\} \tag{3.33}$$

sobre $\mathcal{C}^\infty(J \times W)$, para $1 \leq i \leq n-3$.

Agora, definimos (veja (3.24))

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &\triangleq -\langle dz_n, h^a \rangle = -\gamma_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times W), \\
\alpha_2 &\triangleq -\langle dz_{n-1}, h^a \rangle = -\gamma_{n-1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times W), \\
\alpha &\triangleq (\alpha_1, \alpha_2) = (-\gamma_n, -\gamma_{n-1}), \\
\widehat{f}^a &= h^a + \alpha_1 \widehat{g}_1^a + \alpha_2 \widehat{g}_2^a \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times W), \\
\phi_i &= \langle dz_i - z_{i+1} dz_n, h^a \rangle \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times W), \\
\phi_{n-2} &= \langle dz_{n-2}, \widehat{f}^a \rangle \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times W),
\end{aligned} \tag{3.34}$$

para cada $1 \leq i \leq n-3$. De (3.32) e (3.25), temos que

$$\langle \lambda^i_{(t,q)}, \widehat{f}^a_{(t,q)} \rangle = 0,$$

onde (veja (3.23), (3.27), (3.29) e (3.34))

$$\lambda^i_{(t,q)} = (dz_i - z_{i+1}dz_n - \phi_i dt)_{(t,q)}, \tag{3.35}$$

para $(t,q) \in J \times W$, $1 \leq i \leq n-3$. Portanto, segue de (3.23), (3.24), (3.30), (3.34) e (3.35) que

$$\begin{aligned}
&\langle dt, \widehat{f}^a \rangle = L_{\widehat{f}^a} t = 1,\\
&\langle dz_i, \widehat{f}^a \rangle | J \times W = L_{\widehat{f}^a} z_i | J \times W = \phi_i | J \times W,\\
&\langle dz_{n-1}, \widehat{f}^a \rangle = L_{\widehat{f}^a} z_{n-1} = 0,\\
&\langle dz_n, \widehat{f}^a \rangle = L_{\widehat{f}^a} z_n = 0,
\end{aligned} \tag{3.36}$$

para $1 \leq i \leq n-2$. De fato, como $\langle dz_n, \widehat{g}^a_1 \rangle = \langle dz_{n-1}, \widehat{g}^a_2 \rangle = 1$ e $\langle dz_{n-1}, \widehat{g}^a_1 \rangle = \langle dz_n, \widehat{g}^a_2 \rangle = 0$, temos que $\langle dz_{n-j}, \widehat{f}^a \rangle = \langle dz_{n-j}, h^a \rangle + \alpha_1 \langle dz_{n-j}, \widehat{g}^a_1 \rangle + \alpha_2 \langle dz_{n-j}, \widehat{g}^a_2 \rangle = \gamma_{n-j} - \gamma_{n-j} = 0$, para $0 \leq j \leq 1$. Além disso, dado $1 \leq i \leq n-3$, temos que, restringindo a $J \times W$,

$$\begin{aligned}
\langle \lambda^i | \mathbb{R} \times W, \widehat{f}^a \rangle &= \langle dz_i, \widehat{f}^a \rangle - z_{i+1} \langle dz_n, \widehat{f}^a \rangle - \phi_i \langle dt, \widehat{f}^a \rangle\\
&= \langle dz_i, \widehat{f}^a \rangle - z_{i+1} \langle dz_n, \widehat{f}^a \rangle - \phi_i\\
&= \langle dz_i, \widehat{f}^a \rangle - z_{i+1} \langle dz_n, h^a \rangle\\
&\quad - \alpha_1 z_{i+1} \langle dz_n, \widehat{g}^a_1 \rangle - \alpha_2 z_{i+1} \langle dz_n, \widehat{g}^a_2 \rangle - \phi_i\\
&= \langle dz_i, \widehat{f}^a \rangle - z_{i+1} \langle dz_n, h^a \rangle - \alpha_1 z_{i+1} - \phi_i\\
&= \langle dz_i, \widehat{f}^a \rangle + \alpha_1 z_{i+1} - \alpha_1 z_{i+1} - \phi_i\\
&= \langle dz_i, \widehat{f}^a \rangle - \phi_i.
\end{aligned}$$

Devido ao fato de $\langle \lambda^i_{(t,q)}, \widehat{f}^a_{(t,q)} \rangle = 0$, concluímos que $\langle dz_i, \widehat{f}^a \rangle_{(t,q)} = \phi_i(t,q)$, para todo $(t,q) \in J \times W$.

Vamos mostrar que

$$d\phi_i(t,q) \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \{dz_1, \ldots, dz_{i+1}, dz_n\}|_{(t,q)},$$

para todo $(t,q) \in J \times W$, $1 \leq i \leq n-2$. Sejam $(t,q) \in J \times W$ e $1 \leq i \leq n-3$. Por

hipótese, para todo $\omega \in H^{n-2-i}$, temos que

$$L_{f^a}\omega_{(t,q)} \in C^{n-2-i}_{(t,q)}, \quad L_{g_1^a}\omega_{(t,q)} \in C^{n-2-i}_{(t,q)}, \quad L_{g_2^a}\omega_{(t,q)} \in C^{n-2-i}_{(t,q)}.$$

De (3.28), (3.33) e (3.35), obtemos que

$$H^{n-2-i}(t,q) \subset C^{n-2-i}_{(t,q)}.$$

Podemos assumir, restringindo W se necessário, que $\alpha = \overline{\alpha}|W$, onde $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2)$ e $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2 \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Desse modo, como $\beta = \overline{\beta}|W$ e $G_0^a \subset G_k^a$, $k \in \mathbb{N}$, segue de (3.23), (3.31), (3.34) e da Proposição A.3 que

$$L_{\widehat{f}^a}(\lambda^i|\mathbb{R} \times W)_{(t,q)} \in C^{n-2-i}_{(t,q)}.$$

Por (3.35), (3.36) e pela Proposição A.3, obtemos que

$$L_{\widehat{f}^a}(\lambda^i|\mathbb{R} \times W)_{(t,q)} = \left(d\phi_i - \phi_{i+1}dz_n - (L_{\widehat{f}^a}\phi_i)dt\right)_{(t,q)} \in C^{n-2-i}_{(t,q)}.$$

Conseqüentemente, (3.28) implica que

$$d\phi_i(t,q) \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{dt, dz_1, \ldots, dz_{i+1}, dz_n\}|_{(t,q)}.$$

Assim, (3.24) e a definição de ϕ_i em (3.34) resultam em

$$d\phi_i(t,q) \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{dz_1, \ldots, dz_{i+1}, dz_n\}|_{(t,q)}, \tag{3.37}$$

para todo $(t,q) \in J \times W$ e cada $1 \leq i \leq n-2$.

Relembre que

$$d\phi_i(t,q) = [\partial/\partial t|_{(t,q)}(\phi_i)]dt|_{(t,q)} + \sum_{j=1}^{n}[\partial/\partial z_j|_{(t,q)}(\phi_i)]dz_j|_{(t,q)},$$

para $(t,q) \in J \times W$, $1 \leq i \leq n-2$. Logo, (3.37) implica que

$$\partial/\partial t|_{(t,q)}(\phi_i) = \partial/\partial z_{i+2}|_{(t,q)}(\phi_i) = \cdots = \partial/\partial z_{n-1}|_{(t,q)}(\phi_i) = 0, \tag{3.38}$$

para $(t,q) \in J \times W$, $1 \leq i \leq n-3$.

Na seqüência, mostraremos que a realimentação de estado estática regular $u = \beta\alpha + \beta v$,

onde $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, assegura que a expressão do sistema em malha-fechada resultante (3.6) na carta local $\varphi = (z_1, \ldots, z_n)$ de $\mathbb{R}^n$ é dada pela forma triangular (3.11). Ficará claro o motivo do aparecimento do termo $\beta\alpha$ em $u = \beta\alpha + \beta v$. Relembre que $u = \beta\alpha + \beta v$ e $\varphi = (z_1, \ldots, z_n)$ estão definidas na vizinhança aberta $W \subset U \subset \mathbb{R}^n$ de $p \in U$.

Dado $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, considere o campo de vetores suave

$$X_v^a = (h^a + \alpha_1 \widehat{g}_1^a + \alpha_2 \widehat{g}_2^a) + \widehat{g}_1^a v_1 + \widehat{g}_2^a v_2 \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times W).$$

Por (3.24), (3.34), (3.36) e (3.38), temos que expressão de X_v^a na carta local (t, φ) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, a qual está definida em $J \times W$, é dada por

$$\begin{aligned}
\dot{t} &= 1 \\
\dot{z}_1 &= \phi_1(z_1, z_2, z_n) + z_2 v_1 \\
\dot{z}_2 &= \phi_2(z_1, z_2, z_3, z_n) + z_3 v_1 \\
&\vdots \\
\dot{z}_{n-3} &= \phi_{n-3}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, z_n) + z_{n-2} v_1 \\
\dot{z}_{n-2} &= \phi_{n-2}(z) + z_{n-1} v_1 \\
\dot{z}_{n-1} &= v_2 \\
\dot{z}_n &= v_1,
\end{aligned}$$

restringindo J e W a conjuntos abertos conexos, se necessário. Decorre então que a expressão do campo de vetores suave

$$X_v = (h + \alpha_1 \widehat{g}_1 + \alpha_2 \widehat{g}_2) + \widehat{g}_1 v_1 + \widehat{g}_2 v_2 \in \mathfrak{X}(W)$$

na carta local $\varphi = (z_1, \ldots, z_n)$ de $\mathbb{R}^n$ é dada por

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \phi_1(z_1, z_2, z_n) + z_2 v_1 \\
\dot{z}_2 &= \phi_2(z_1, z_2, z_3, z_n) + z_3 v_1 \\
&\vdots \\
\dot{z}_{n-3} &= \phi_{n-3}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, z_n) + z_{n-2} v_1 \\
\dot{z}_{n-2} &= \phi_{n-2}(z) + z_{n-1} v_1 \\
\dot{z}_{n-1} &= v_2 \\
\dot{z}_n &= v_1.
\end{aligned}$$

Portanto, $u = \beta\alpha + \beta v$ é a realimentação de estado estática regular desejada, pois $h = f|W$, $\widehat{g}_1 = (\beta_{11} g_1 + \beta_{12} g_2)|W$, $\widehat{g}_2 = (\beta_{21} g_1 + \beta_{22} g_2)|W$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ e $\beta = (\beta_{ij})$. $\square$

Como conseqüência imediata do teorema anterior e do Teorema 3.8, obtemos o resultado genérico mostrado abaixo.

Corolário 3.12. *Considere o sistema (3.5) e o campo de vetores aumentado associado* $F^a = (f^a, g_1^a, g_2^a)$. *Seja* (G_k) *o flag derivado de* $\Delta = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{g_1, g_2\} \in \mathfrak{X}(U)$. *Para cada* $1 \leq k \leq n-3$, *considere as seguintes codistribuições em* $\mathbb{R} \times U$

$$\begin{aligned} \Lambda^k &= (G_k^a)^\perp, \\ H^k &= (span_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\times U)}\{f^a\} + G_k^a)^\perp, \end{aligned}$$

onde (G_k^a) *é o flag derivado da distribuição* $\Delta^a = span_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\times U)}\{g_1^a, g_2^a\} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times U)$. *Além disso, para todo* $1 \leq k \leq n-3$, $(t,q) \in \mathbb{R} \times U$, *definimos* $C_{(t,q)}^k = C(\mathcal{I}_{\Lambda^k})_{(t,q)}$, *isto é,* $C_{(t,q)}^k$ *é o espaço de retração do ideal diferencial gerado por* Λ^k *em* (t,q). *Dado* $t_0 \in \mathbb{R}$, *suponha que existe uma vizinhança aberta* $J \subset \mathbb{R}$ *de* t_0 *e um conjunto* $D \subset U$ *que é aberto e denso em* U, *em que as seguintes condições geométricas são satisfeitas:*

1. *Para todo* $0 \leq k \leq n-2$ *e todo* $q \in D$, $\dim(G_k(q)) = 2 + k$;

2. *Para todo* $1 \leq k \leq n-3$, *todo* $(t,q) \in J \times D$ *e todo* $\omega \in H^k$, *temos que*

$$\begin{aligned} L_{f^a}\omega_{(t,q)} &\in C_{(t,q)}^k, \\ L_{g_1^a}\omega_{(t,q)} &\in C_{(t,q)}^k, \\ L_{g_2^a}\omega_{(t,q)} &\in C_{(t,q)}^k. \end{aligned}$$

Então, existe um conjunto $V \subset U$ *que é aberto e denso em* U *tal que, para todo* $p \in V$, *existe uma carta local* φ *e uma realimentação de estado estática regular da forma* $u = \alpha + \beta v$, *ambas definidas em uma vizinhança aberta* $W \subset U$ *de* p, *em que a expressão do sistema em malha-fechada resultante (3.6) na carta local* $\varphi = (z_1, \ldots, z_n)$ *é dada pela forma triangular*

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \phi_1(z_1, z_2, z_n) + z_2 v_1 \\ \dot{z}_2 &= \phi_2(z_1, z_2, z_3, z_n) + z_3 v_1 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-3} &= \phi_{n-3}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, z_n) + z_{n-2} v_1 \\ \dot{z}_{n-2} &= \phi_{n-2}(z) + z_{n-1} v_1 \\ \dot{z}_{n-1} &= v_2 \\ \dot{z}_n &= v_1. \end{aligned} \tag{3.39}$$

O exemplo acadêmico mostrado em seguida ilustra os aspectos computacionais envolvidos na aplicação do Teorema 3.10 em um sistema de controle com quatro estados (i.e. $n = 4$).

Exemplo 3.13. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ (x^1)^2 + x^2 \\ 1 \\ x^1x^4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x^4)^2 + 1 \\ (x^3 - 2x^1)((x^4)^2 + 1) \\ 0 \\ ((x^1)^2 + x^2)((x^4)^2 + 1) \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_2,\end{aligned}$$

onde $x = (x^1, \ldots, x^4) \in \mathbb{R}^4$ *é o estado e* $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ *são os controles. Mostraremos que este sistema pode ser descrito pela forma triangular (3.11) em torno de cada ponto de* $\mathbb{R}^4$.

Para cada $x \in \mathbb{R}^4$, *temos que*

$$\begin{aligned} g_3(x) &= [g_1, g_2](x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -((x^4)^2 + 1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ g_4(x) &= [g_1, g_3](x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x^4((x^1)^2 + x^2)((x^4)^2 + 1) \\ 0 \\ ((x^4)^2 + 1)^2 \end{pmatrix}, \\ g_5(x) &= [g_2, g_3](x) = 0. \end{aligned}$$

Assim, a Proposição 3.4 e a Proposição 3.5 implicam que

$$\dim(F_k) = \dim(G_k) = 2 + k, \qquad \textit{para cada } 0 \leq k \leq 2.$$

Como $G_1^a = span_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)}\{g_1^a, g_2^a, g_3^a\}$ *e*

$$(f^a(x)\ \ g_1^a(x)\ \ g_2^a(x)\ \ g_3^a(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (x^4)^2+1 & 0 & 0 \\ (x^1)^2+x^2 & (x^3-2x^1)((x^4)^2+1) & 0 & -((x^4)^2+1) \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ x^1x^4 & ((x^1)^2+x^2)((x^4)^2+1) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.40}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^4$*, resulta da Proposição A.9 que*

$$\begin{aligned} \Lambda^1 &= (G_1^a)^\perp = span_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)}\{dt, \alpha\}, \\ H^1 &= (span_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)}\{f^a, g_1^a, g_2^a, g_3^a\})^\perp = span_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)}\{x^1x^4dt + ((x^1)^2+x^2)dx^1 - dx^4\}, \end{aligned}$$

onde

$$\alpha = ((x^1)^2+x^2)dx^1 - dx^4 \in \Omega^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^4).$$

No que se segue, iremos provar, com base na demonstração do Lema 3.9, que

$$C^1_{(t,p)} \triangleq C(\mathcal{I}_{\Lambda^1})_{(t,p)} = span_{\mathbb{R}}\{dt, dx^1, dx^2, dx^4\}|_{(t,p)},$$

para todo $(t,p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^4$.

Seja $(t,p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^4$ *e defina* $A^1_{(t,p)} = A(\mathcal{I}_{\Lambda^1})_{(t,p)}$*. Da Proposição 2.21, obtemos que*

$$\begin{aligned} A^1_{(t,p)} = \{X_{(t,p)} \in T_{(t,p)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^4) \mid \langle dt_{(t,p)}, X_{(t,p)}\rangle = \langle \alpha_{(t,p)}, X_{(t,p)}\rangle = 0, \\ X_{(t,p)} \lrcorner\, d(dt)_{(t,p)}, X_{(t,p)} \lrcorner\, d\alpha_{(t,p)} \in span_{\mathbb{R}}\{dt, \alpha\}|_{(t,p)}\}. \end{aligned}$$

Note que $A^1_{(t,p)} \subset (\Lambda^1_{(t,p)})^\perp$*. Seja* $X_{(t,p)} \in T_{(t,p)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^4)$*. Pelo Teorema A.2, temos que*

$$\begin{aligned} &d(dt) = 0, \\ &d\alpha = d((x^1)^2+x^2)\wedge dx^1 = d(x^1)^2\wedge dx^1 + dx^2\wedge dx^1 = dx^2\wedge dx^1, \end{aligned}$$

e pelo Teorema 2.8 que

$$\begin{aligned} &X_{(t,p)} \lrcorner\, d(dt)_{(t,p)} = 0, \\ &X_{(t,p)} \lrcorner\, d\alpha_{(t,p)} = X_{(t,p)} \lrcorner\, (dx^2\wedge dx^1) = \langle dx^2_{(t,p)}, X_{(t,p)}\rangle dx^1_{(t,p)} - \langle dx^1_{(t,p)}, X_{(t,p)}\rangle dx^2_{(t,p)}. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$X_{(t,p)} \lrcorner\, d\alpha_{(t,p)} \in span_{\mathbb{R}}\{dt, \alpha\}|_{(t,p)}$$

se e somente se

$$X_{(t,p)} \lrcorner\, d\alpha_{(t,p)} = adt_{(t,p)} + b\alpha_{(t,p)} = adt_{(t,p)} + b((x^1)^2 + x^2)dx^1 - bdx^4, \qquad \text{onde } a, b \in \mathbb{R},$$

se e somente se

$$a = b = 0$$

se e somente se

$$X_{(t,p)} \lrcorner\, d\alpha_{(t,p)} = 0$$

se e somente se

$$\langle dx^1_{(t,p)}, X_{(t,p)}\rangle = \langle dx^2_{(t,p)}, X_{(t,p)}\rangle = 0. \tag{3.41}$$

Considere então que $X_{(t,p)} \in A^1_{(t,p)} \subset (\Lambda^1_{(t,p)})^\perp \subset T_{(t,p)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4)$. *Logo,*

$$X_{(t,p)} = c_1 g_1^a(t,p) + c_2 g_2^a(t,p) + c_3 g_3^a(t,p),$$

onde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. *Usando (3.40) e (3.41), devemos ter que* $c_1 = c_3 = 0$, *ou seja,* $X_{(t,p)} \in span_{\mathbb{R}}\{g_2^a(t,p)\}$. *Desse modo,* $A^1_{(t,p)} \subset span_{\mathbb{R}}\{g_2^a(t,p)\}$. *Suponha então que* $X_{(t,p)} \in span_{\mathbb{R}}\{g_2^a(t,p)\} \subset (\Lambda^1(t,p))^\perp$. *Logo, (3.40) e (3.41) implicam que* $X_{(t,p)} \in A^1_{(t,p)}$. *Portanto,* $span_{\mathbb{R}}\{g_2^a(t,p)\} \subset A^1_{(t,p)}$ *e*

$$\begin{aligned} A^1_{(t,p)} &= span_{\mathbb{R}}\{g_2^a\}|_{(t,p)}, \\ C^1_{(t,p)} &= span_{\mathbb{R}}\{dt, dx^1, dx^2, dx^4\}|_{(t,p)}. \end{aligned}$$

É fácil verificar que (3.40) e a Proposição A.3 estabelecem que

$$L_{f^a}\gamma_{(t,p)},\ L_{g_1^a}\gamma_{(t,p)},\ L_{g_2^a}\gamma_{(t,p)} \in C^1_{(t,p)},$$

onde

$$\gamma = x^1x^4dt + ((x^1)^2 + x^2)dx^1 - dx^4 \in \Omega^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4).$$

Como $H^1 = span_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)}\{\gamma\}$ *e* $H^1(t,p) \subset C^1_{(t,p)}$*, concluímos que*

$$L_{f^a}\omega_{(t,p)},\ L_{g_1^a}\omega_{(t,p)},\ L_{g_2^a}\omega_{(t,p)} \in C^1_{(t,p)},$$

para todo $\omega \in H^1$*,* $(t,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$*, ou seja, mostramos que as condições do Teorema 3.10 são atendidas em* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$*.*

Na próxima seção, estabeleceremos condições suficientes para a triangularização de uma classe de sistemas planares.

3.4 Condições suficientes para sistemas planares com até cinco estados

Faremos primeiro na Seção 3.4.1 um breve resumo sobre a teoria de controle geométrica de dimensão infinita desenvolvida em [29], [30], [94] e aprofundada em [87], [88], [20], [19], [90], [91], seguindo de perto a exposição de [88] e [19]. Para um tratamento completo e auto-contido desta teoria, direcionamos o leitor a [19], [90], [91]. Merece ser destacada a referência [19] pela excelente exposição didática e ao mesmo tempo minuciosa, e também por sua grande influência no desenvolvimento da presente tese. Com base nesta teoria de controle geométrica de dimensão infinita, definiremos, ainda na Seção 3.4.1, o conceito de sistema planar de uma maneira geométrica precisa. Em seguida, na Seção 3.4.2, enunciaremos o Teorema 3.17, que estabelece que quando o sistema de controle (3.1) com $2 \leq n \leq 5$ é planar, e a saída planar satisfaz algumas condições de regularidade, existe uma mudança de coordenadas e uma realimentação regular em que o sistema é descrito pela forma triangular (3.3). Observamos que a demonstração deste resultado está fortemente baseada na interpretação geométrica do Algoritmo da Extensão Dinâmica (AED) feita em [87], [88], [19], [91] (veja também [20]).

3.4.1 Geometria diferencial de dimensão infinita

3.4.1.1 $\mathbb{R}^A$-variedades

Seja A um conjunto enumerável. Como podemos identificar A com $\mathbb{N}$ (respectivamente, com um subconjunto finito de $\mathbb{N}$), seja $\mathbb{R}^A$ o conjunto de todas as seqüências reais

infinitas (resp. finitas). Este conjunto se torna um espaço topológico com a topologia produto, isto é, a topologia menos fina tal que todas as projeções naturais são contínuas. Uma função ϕ definida em um aberto $V \subset \mathbb{R}^A$ é denominada de *suave* se, para cada $p \in V$, existe uma vizinhança aberta $V_p \subset V$ de p e algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $\phi|V_p = h \circ \pi|V_p$, onde π é a projeção de $\mathbb{R}^A$ sobre $\mathbb{R}^n$ e h é uma função suave no sentido usual definida no conjunto aberto $\pi(V_p) \subset \mathbb{R}^n$. Seja B um outro conjunto enumerável. Dizemos que uma aplicação φ de um conjunto aberto de $\mathbb{R}^A$ em $\mathbb{R}^B$ é *suave* se cada função componente é suave. A partir destas definições, podemos estabelecer os conceitos de $\mathbb{R}^A$-variedade, aplicação suave entre $\mathbb{R}^A$-variedades, aplicação tangente, fibrado tangente, campo de vetores suave, pull-back, diferencial de uma função suave, distribuição, codistribuição e assim por diante, de maneira análoga à geometria diferencial de dimensão finita. Estes conceitos apresentam muitas das propriedades do caso de dimensão finita, pois, localmente, os mesmos se comportam como se fossem de dimensão finita.

Sejam M, N $\mathbb{R}^A$-variedades e $V \subset M$ um aberto. Se ϕ é uma função suave em V, então $d\phi$ denota a sua diferencial. Se $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ é uma aplicação suave de V em $\mathbb{R}^n$ e $\xi \in V$, então $d\Phi$ denota $(d\phi_1, \ldots, d\phi_n)$ e $d\Phi(\xi)$ denota $(d\phi_1(\xi), \ldots, d\phi_n(\xi))$. Se X é um campo de vetores suave em M, então $L_X\phi$ é a derivada de Lie de ϕ em relação a X e $L_X^{k+1}\phi = L_X(L_X^k\phi)$, $k \in \mathbb{N}$, onde $L_X^0\phi \triangleq \phi$. Se X e Y são campos de vetores suaves em M, então $[X, Y]$ denota o colchete de Lie e $\mathrm{ad}_X^{k+1}Y = [X, \mathrm{ad}_X^k Y]$, $k \in \mathbb{N}$, onde $\mathrm{ad}_X^0 Y \triangleq Y$. Uma *imersão* (resp. *submersão*) $F : M \to N$ é uma aplicação suave tal que, para cada $p \in M$, existem cartas locais (V, ϕ) e (W, ψ) de p e $F(p)$, respectivamente, de modo que $F(V) \subset W$ e que, nessas coordenadas, $F(x) = (x, 0)$ (resp. $F(x, y) = y$). Se $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, então xy denota $x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ e $\mathrm{card}(x) \triangleq n$. Além disso, $\widetilde{x} \subset x$ significa que as componentes de $\widetilde{x}$ são também componentes de x.

3.4.1.2 Diffieties

Uma *diffiety* M é uma $\mathbb{R}^A$-variedade equipada com um campo de vetores suave fixo ∂_M, denominado de *campo de Cartan*. Considere que M e N são diffieties. Uma aplicação de *Lie-Bäcklund* φ de M em N é uma aplicação suave que é compatível com os campos de Cartan, isto é, $\varphi_*(\partial_M(p)) = \partial_N(\varphi(p))$, para todo $p \in M$, onde φ_* é a aplicação tangente de φ. Uma *imersão de Lie-Bäcklund* é uma aplicação de Lie-Bäcklund que é uma imersão.

3.4.1.3 Sistemas

Um *sistema* é uma tripla $(S, d/dt, \tau)$, onde S é uma diffiety com campo de Cartan d/dt e $\tau\colon S \to \mathbb{R}$ é uma submersão de Lie-Bäcklund com $\mathbb{R}$ munido da estrutura diferenciável usual. Por abuso de notação, denotaremos $(S, d/dt, \tau)$ simplesmente por S. Se ϕ é uma aplicação suave em um conjunto aberto de S, então $\phi^{(k+1)} = L_{d/dt}\phi^{(k)}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, onde $\phi^{(0)} \triangleq \phi$ e $\dot{\phi} = \phi^{(1)}$.

3.4.1.4 Representações de estado e saídas

Seja S um sistema. Uma *representação de estado* de S em $\xi \in S$ é uma carta local $(V, \varphi = (t, x, \overline{U}))$ de ξ tal que $t = \tau|V$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $u_j^{(k+1)} = L_{d/dt}u_j^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, onde $\overline{U} = \{u_j^{(k)} : 1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}\}$. Denominamos x e $u = (u_1^{(0)}, \ldots, u_m^{(0)})$ de *estado* e *entrada*, respectivamente. Como x e u determinam φ completamente, denotamos (V, φ) simplesmente por (x, u). Nestas coordenadas, o campo de Cartan é dado por

$$d/dt = \partial/\partial t + \sum_{i=1}^{n} f_i \partial/\partial x_i + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{\infty} u_j^{(k+1)} \partial/\partial u_j^{(k)}. \tag{3.42}$$

Note que o campo de Cartan fica completamente determinado por $\dot{x}_i = f_i$. Se (x, u) e (z, v) são representações de estado em ξ, então devemos ter que[6] $\mathrm{card}(u) = \mathrm{card}(v)$. Uma aplicação suave $y = (y_1, \ldots, y_p)$ em torno de ξ é chamada *saída* de S em ξ. Ela é denominada de *saída planar* se $(\emptyset, y)$ é uma representação de estado em ξ (isto é, não há estado). Nestas coordenadas, o campo de Cartan é dado por

$$d/dt = \partial/\partial t + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=0}^{\infty} y_j^{(k+1)} \partial/\partial y_j^{(k)},$$

onde $p = \mathrm{card}(y)$.

Seja (x, u) uma representação de estado de S e $y = (y_1, \ldots, y_p)$ uma saída de S. Assuma que o domínio de y esteja contido no de (x, u). Dizemos que (x, u) (resp. y) é *clássica* se $\dot{x}_i$ (resp. y_ℓ) não depende de $u_j^{(k)}$, para $1 \leq i \leq n$ (resp. $1 \leq \ell \leq p$), $1 \leq j \leq m$, $k \geq 1$ (isto é, $\dot{x}_i = f(t, x, u)$ (resp. $y = h(t, x, u)$)). E, (x, u) (resp. y) é *independente do tempo* se $\dot{x}_i$ (resp. y_ℓ) não depende de t, para cada $1 \leq i \leq n$ (resp. $1 \leq \ell \leq p$). Uma saída planar y é denominada de 0-*planar* se $y = h(x)$. Dizemos que

[6] Veja, por exemplo, [30], [87], [19], [91].

duas representações de estado (x, u) e (z, v) em ξ estão relacionadas por *realimentação de estado estática invariante no tempo* se: (i) card(x)=card(z), card(u)=card(v); (ii) $\text{span}_{\mathbb{R}}\{dx(\nu)\} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{dz(\nu)\}$, $\text{span}_{\mathbb{R}}\{dx(\nu), du(\nu)\} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{dz(\nu), dv(\nu)\}$, para todo ν em torno de ξ.

Adotaremos em toda esta seção uma notação mais concisa, escrevendo simplesmente $\text{span}\{dx\} = \text{span}\{dz\}$, $\text{span}\{dx, du\} = \text{span}\{dz, dv\}$, *em torno* de ξ. Faremos também simplificações similares para propriedades que são válidas em todos os pontos de determinado conjunto.

Teorema 3.14. *[87], [91] Seja S um sistema, (x, u) uma representação de estado clássica independente do tempo em $\xi \in S$, e z, v aplicações suaves definidas em torno de ξ com card(x) = card(z) e card(u) = card(v). Suponha que span$\{dx\}$ = span$\{dz\}$ e span$\{dx, du\}$ = span$\{dz, dv\}$, em torno de ξ. Então, (z, v) é uma representação de estado clássica independente do tempo em ξ que está relacionada à (x, u) por realimentação de estado estática invariante no tempo.*

Uma outra caracterização de platitude é fornecida pelo teorema abaixo.

Teorema 3.15. *[87], [20], [91] Seja S um sistema e (x, u) uma representação de estado clássica independente do tempo em $\xi \in S$. Suponha que y é uma saída clássica independente do tempo em ξ com card(y) = card(u). Então, y é uma saída planar local em ξ se e somente se existe $k^* \in \mathbb{N}$ tal que span$\{dx, du\} \subset$ span$\{dy, \ldots, dy^{(k^*)}\}$, em torno de ξ, e $\{dy, \ldots, dy^{(k^*)}\}$ é independente em ξ.*

Portanto, segue da definição de aplicação suave entre espaços $\mathbb{R}^A$ que a formalização geométrica de platitude apresentada neste seção está de acordo com a noção de platitude descrita na Introdução deste trabalho. Para maiores detalhes, veja [30], [87], [20], [88], [19], [91], [60], [67].

3.4.1.5 Sistemas associados a sistemas de controle

Considere um sistema de controle da forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x, u), \quad 1 \leq i \leq n, \\ y_\ell &= h_\ell(x), \quad 1 \leq \ell \leq p, \end{aligned} \tag{3.43}$$

onde $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ é o estado, U é aberto e $u \in \mathbb{R}^m$ é o controle. É possível associar a estas equações um sistema S com representação de estado global clássica independente

do tempo (x, u) e saída global clássica independente do tempo $y = (y_1, \ldots, y_p)$. De fato: $S = \mathbb{R} \times U \times (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{N}}$; t, x_i, $u_j^{(k)}$ são as coordenadas canônicas; $\tau = t$; e o campo de Cartan de S é definido por (3.42) com $\mathrm{card}(x) = n$ e $\mathrm{card}(u) = m$.

Na seção seguinte, apresentaremos, com base nas ferramentas geométricas de dimensão infinita que explicamos acima, a terceira e última contribuição da presente tese referente a formas triangulares para sistemas não-lineares com duas entradas.

3.4.2 Resultado de triangularização

Considere o seguinte sistema de controle com duas entradas e duas saídas

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 = f(x) + g(x)u, \tag{3.44}$$

$$y = h(x), \tag{3.45}$$

onde $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ é o estado, U é aberto, $2 \leq n \leq 5$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ é o controle, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ é a saída, $f, g_1, g_2 \colon U \to \mathbb{R}^n$, $h \colon U \to \mathbb{R}^2$ são aplicações suaves, $g = (g_1, g_2)$ e $h = (h_1, h_2)$.

Definição 3.16. *Seja S um sistema e (x, u) uma representação de estado de S definida em um conjunto aberto $V \subset S$. Suponha que $y = (y_1, \ldots, y_p)$ é uma saída 0-planar de S definida em V. Dizemos que y é* 0-regular *se $y_1^{(1)}$ depende de u em V, isto é, $\partial y_1^{(1)}/\partial u|_\nu \neq 0$, para todo $\nu \in V$.*

Teorema 3.17. *Considere o sistema de controle (3.44)–(3.45) e suponha que distribuição $\mathcal{G} = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{g_1, g_2\}$ é involutiva. Seja S o sistema associado a (3.44)–(3.45) com representação de estado global clássica independente do tempo (x, u) e saída global clássica independente do tempo $y = (y_1, y_2)$. Assuma que y é uma saída 0-regular local em $\xi \in S$ tal que $y_1^{(k)}(\xi) = 0$, para $k \in \mathbb{N}$, onde $\xi = (\overline{t}, \overline{x}, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_1^{(1)}, \overline{u}_2^{(1)}, \ldots) \in S$ é um ponto regular das seguintes codistribuições*

$$\mathcal{Y}_k = span_{\mathcal{C}^\infty(S)}\{dx, dy, \ldots, dy^{(k)}\}, \tag{3.46}$$

para $1 \leq k \leq n$. Então, existe uma mudança de coordenadas $z = \Psi(x)$ e uma realimentação de estado estática regular $u = \alpha + \beta v$, ambas definidas em torno de $\overline{x} \in U$ e com

$v_1^{(k)}(\xi) = 0$, *para* $k \in \mathbb{N}$, *tais que (3.44) é descrito pela forma triangular*

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 + \phi_1(z_1, z_2, z_n)v_1, \\
&\vdots \\
\dot{z}_{n-3} &= z_{n-2} + \phi_{n-3}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, z_n)v_1, \\
\dot{z}_{n-2} &= z_{n-1} + \phi_{n-2}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, z_n)v_1, \\
\dot{z}_{n-1} &= v_2, \\
\dot{z}_n &= v_1.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Em particular, $\overline{y} = (z_1, z_n)$ *é um saída* 0*-planar local de* S *em* ξ.

Demonstração. Veja o Apêndice D. □

Conforme mencionado anteriormente, este resultado está fortemente baseado na interpretação geométrica do Algoritmo da Extensão Dinâmica (AED), que é fornecida pelo Teorema D.4 do Apêndice D. Alguns pontos importantes sobre o teorema são destacados abaixo.

Observação 3.18. *O fato de que* $\overline{y} = (z_1, z_n)$ *é um saída* 0*-planar local de* S *em* ξ *é uma conseqüência direta da forma triangular (3.47), do Teorema A.2, da Proposição A.3 e do Teorema 3.15. Alternativamente, pode-se chegar a esta mesma conclusão aplicando o Teorema da Função Implícita em cada uma das primeiras* $n-2$ *equações da forma triangular (3.47), de modo a obter as aplicações suaves* A *e* B *em (1.5) e (1.6), respectivamente, da Introdução deste trabalho. O Teorema 3.15 implica então que* $\overline{y} = (z_1, z_n)$ *é um saída* 0*-planar local de* S *em* ξ.

Observação 3.19. *Seja* S *o sistema associado a (3.44) e considere que* $y = (y_1, y_2)$ *é uma saída* 0*-planar definida em um aberto* $W \subset S$. *A Proposição D.3 do Apêndice D estabelece que sempre existe uma saída 0-regular* $\overline{y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2)$ *de* S *que é determinada a partir de* y *e que está definida em um conjunto aberto não-vazio* $V \subset W$,

Observação 3.20. *Considere que* $\xi = (\overline{t}, \overline{x}, \overline{u}_1, \overline{u}_2, 0, 0, 0, 0, \ldots) \in S$. *É fácil verificar que se* $h_1(\overline{x}) = 0$ *em (3.45) e* $(\overline{x}, (\overline{u}_1, \overline{u}_2))$ *é um ponto de equilíbrio de (3.44) (isto é,* $f(\overline{x}) + g_1(\overline{x})\overline{u}_1 + g_2(x)\overline{u}_2 = 0$*), então* $y_1^{(k)}(\xi) = 0$, *para* $k \in \mathbb{N}$.

Observação 3.21. *Em [87], [90], é mostrado que o conjunto dos pontos regulares das codistribuições (3.46), para* $1 \leq k \leq n$, *é aberto e denso.*

Observação 3.22. *Como pode ser visto na demonstração do teorema, não é exigido que a distribuição $\mathcal{G}$ seja involutiva para a existência da forma triangular (3.47) quando $2 \leq n \leq 4$. Neste caso, no entanto, $\dot{z}_{n-2} = z_{n-1} + \phi_{n-2}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, z_n)v_1$ é substituída por $\dot{z}_{n-2} = z_{n-1} + \phi_{n-2}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n)v_1$.*

Os resultados do Teorema 3.17 foram publicados nos anais do simpósio "*3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control – SSSC*" com o artigo [111], o qual pode ser visto no Apêndice F.

Neste ponto, chegamos ao final do capítulo e ao término do Parte I deste trabalho. Relembramos que as três contribuições da presente pesquisa referentes a formas triangulares para sistemas não-lineares com duas entradas são: o Teorema 3.10, o Corolário 3.12 e o Teorema 3.17. Acrescentamos, ainda, que esperamos ter evidenciado o papel fundamental que a geometria diferencial desempenha no estabelecimento de importantes resultados na teoria de controle não-linear.

O próximo capítulo, que corresponde à Parte II desta tese, trata do problema de controlar sistemas sem arrasto que evoluem em $\mathrm{SU}(n)$. As conclusões gerais sobre ambas as partes do presente trabalho assim como sugestões de assuntos de pesquisa futuros, serão apresentadas nas Considerações Finais.

Parte II

Controle de Sistemas sem Arrasto em SU(n) com Aplicações em Mecânica Quântica

Capítulo 4

Planejamento Periódico de Trajetórias para Sistemas sem Arrasto em SU(n)

Este capítulo corresponde integralmente à Parte II da presente tese e trata o problema de controlar sistemas sem arrasto que evoluem no grupo especial unitário SU(n). Formularemos o *problema de planejamento periódico de trajetórias* para tal classe de sistemas, que, em poucas palavras, consiste em encontrar entradas que forcem o estado do sistema a rastrear assintoticamente uma trajetória de referência de período T que passa por X_∞, com $T > 0$, $X_\infty \in \mathrm{SU}(n)$ arbitrários. Em particular, se resolvermos este problema, seremos capazes de especificar entradas que conduzem o estado do sistema até uma vizinhança arbitrariamente pequena de X_∞ em algum instante de tempo finito. O propósito deste capítulo é apresentar as soluções obtidas nesta pesquisa para o referido problema de controle.

As notações que serão adotadas ao longo de todo o capítulo serão explicadas na Seção 4.1. Em seguida, na Seção 4.2, definiremos de maneira precisa o problema de planejamento periódico de trajetórias para sistemas de controle sem arrasto em SU(n). Tomaremos, ainda, o cuidado em esclarecer do modo mais elementar possível todos os aspectos envolvidos. Na Seção 4.3, a solução que estabelecemos para o problema de controle considerado é construída progressivamente. Procuramos explicar em cada passo os argumentos que são necessários para continuarmos caminhando em direção a uma solução final para o problema de controle. Dessa maneira, a necessidade de introduzirmos os conceitos de

regularidade e de p-controlabilidade para tal classe de sistemas é justificada. Apresentaremos também dois critérios algébricos: um determina quando que o sistema é regular, enquanto que o outro estabelece quando que o mesmo é p-controlável. O primeiro critério é uma conseqüência do Método do Retorno de Coron e, o segundo, decorre basicamente da identidade de Jacobi. Com base no resultado de convergência de tipo-Lyapunov do Teorema 4.20, formularemos um algoritmo que determina as entradas desejadas em um número finito de passos. A solução que estabelecemos para o problema de planejamento periódico de trajetórias é então sintetizada no Teorema 4.23, sob a hipótese de que o sistema é regular ou p-controlável. Por fim, exibimos na Seção 4.4 os resultados de simulação obtidos com a aplicação da estratégia de controle proposta a um sistema quântico formado duas partículas de spin-1/2, com o objetivo de gerar a porta lógica quântica C–NOT. Observamos que tanto o resultado de convergência de tipo-Lyapunov do Teorema 4.20 quanto o algoritmo desenvolvido são contribuições da Parte II da presente pesquisa.

4.1 Notações

O conjunto dos números complexos será denotado por $\mathbb{C}$, os números reais por $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais maiores ou iguais à zero (não-negativos) por $\mathbb{R}_+$, o conjunto dos inteiros por $\mathbb{Z}$, o conjunto dos números naturais (incluindo o zero) por $\mathbb{N}$ e o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com elementos complexos por M^n, onde $n \geq 1$. A unidade imaginária de $\mathbb{C}$ é denotada por $\imath$ e a matriz identidade de M^n por I. Escrevemos $X = (x_{ij})$ para enfatizar que $x_{ij} \in \mathbb{C}$ são os elementos de $X \in M^n$. Se $z \in \mathbb{C}$, então $\Re(z)$ é sua parte real e $\Im(z)$ sua parte imaginária. Chamaremos de *função* uma aplicação de um conjunto em $\mathbb{R}$ e usaremos o termo *suave* como sinônimo de infinitamente diferenciável.

O conjunto M^n é um espaço de Banach real de dimensão $\dim(M^n) = 2n^2$ munido com a estrutura usual de espaço vetorial e com a norma usual de Hilbert-Schmidt definida por $\|X\| = (\sum_{i,j=1}^{n} |x_{ij}|^2)^{1/2}$, para todo $X = (x_{ij}) \in M^n$, onde $|\cdot|$ é a norma Euclidiana em $\mathbb{C}$. Observamos que na literatura a norma de Hilbert-Schmidt é também denominada de norma Euclidiana ou norma de Frobenius. Se $X \in M^n$ e $\Omega \subset M^n$ é um conjunto não-vazio, então $d(X, \Omega) \triangleq \inf_{Y \in \Omega} \|Y - X\|$. Quando $X = (x_{ij}) \in M^n$ é uma matriz tal que $x_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$, escrevemos simplesmente $X = \mathrm{diag}(x_{11}, \ldots, x_{nn})$. Dado $A \in M^n$, $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{C}$ é seu traço, $\det(A) \in \mathbb{C}$ sua determinante, $A^\dagger \in M^n$ sua transposta conjugada e $A^{-1} \in M^n$ sua inversa, caso a mesma exista. Relembramos que o traço é linear e que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, para $A, B \in M^n$.

Dizemos que $A \in M^n$ é *Hermitiana* se $A^\dagger = A$, *anti-Hermitiana* se $A^\dagger + A = 0$ e *unitária* se $A^\dagger A = I$. Se $A, B \in M^n$, então $AB \in M^n$ denota o produto matricial usual e o *colchete comutador* $[A, B] \in M^n$ é definido da maneira usual como $[A, B] = AB - BA$. Temos que o espaço M^n munido com o colchete comutador é uma álgebra de Lie real. Mais precisamente, isto significa que M^n é um espaço vetorial real e que o colchete comutador satisfaz as seguintes propriedades:

1. O colchete comutador é $\mathbb{R}$-bilinear;
2. $[A, B] = -[B, A]$, para todo $A, B \in M^n$;
3. $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$, para $A, B, C \in M^n$ (identidade de Jacobi).

Definimos, ainda, $\mathrm{ad}_A^0 B = B$ e $\mathrm{ad}_A^{j+1} B = [A, \mathrm{ad}_A^j B]$, para todo $j \in \mathbb{N}$. O subconjunto $\mathfrak{su}(n) \subset M^n$ é o conjunto de todos os $A \in M^n$ em que $A^\dagger + A = 0$ e $\mathrm{tr}(A) = 0$. Temos que $\mathfrak{su}(n)$ é uma subálgebra de Lie de M^n com $\dim(\mathfrak{su}(n)) = n^2 - 1$, ou seja, $\mathfrak{su}(n)$ é um subespaço vetorial (real) de M^n tal que $[A, B] \in \mathfrak{su}(n)$, para todo $A, B \in \mathfrak{su}(n)$. O subconjunto $\mathrm{SU}(n) \subset M^n$ é o conjunto de todos os $A \in M^n$ em que $A^\dagger A = I$ e $\det(A) = 1$. Temos que $\mathrm{SU}(n)$ é um grupo algébrico sob o produto matricial e é denominado de *grupo especial unitário*. Além disso, $\mathrm{SU}(n)$ é um subconjunto conexo e compacto (fechado e limitado) de M^n, $\exp(X)$ é uma matriz unitária se X é anti-Hermitiana e $\exp(X) \in \mathrm{SU}(n)$ se $X \in \mathfrak{su}(n)$. Quando consideramos $\mathrm{SU}(n)$ como um grupo de Lie, temos que a álgebra de Lie associada a $\mathrm{SU}(n)$ é canonicamente isomorfa à álgebra de Lie $\mathfrak{su}(n)$. Observamos que todos os detalhes técnicos mencionados acima podem ser encontrados em [55] e [38], por exemplo.

Por fim, seja $H \subset M^n$ um conjunto não-vazio. Denotamos por $\mathrm{Lie}(H)$ a menor subálgebra de Lie de M^n que contém H. Note que $\mathrm{Lie}(H)$ está bem definida, pois M^n é um álgebra de Lie que contém H. Pode ser mostrado que[1]

$$\mathrm{Lie}(H) = \mathrm{span}\{[X_k, [X_{k-1}, [\ldots, [X_2, X_1] \ldots]], \text{ para todo } k \geq 1, X_k, \ldots, X_1 \subset H\}.$$

Dizemos que $\mathrm{Lie}(H)$ é a álgebra de Lie *gerada* por $H \subset M^n$.

[1] Veja, por exemplo, [82, Proposição 3.25].

4.2 Definição do problema de controle

Considere o seguinte sistema de controle sem arrasto

$$\dot{X} = \sum_{k=1}^{m} u_k H_k X, \quad X(0) = I, \tag{4.1}$$

onde $X \in M^n$ é o estado, $u_k \in \mathbb{R}$ são os controles e $H = \{H_1, \ldots, H_m\} \subset \mathfrak{su}(n)$.

Primeiramente, relembraremos alguns resultados negativos bem conhecidos na literatura referentes à estabilização de sistemas não-holonômicos sem arrasto. Considere o sistema

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{m} u_k f_k(x), \tag{4.2}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u_k \in \mathbb{R}$ são os controles e as aplicações f_k são suaves. Se $m < n$ e $f_1(0), \ldots, f_m(0)$ são linearmente independentes, então a origem do sistema (4.2) não pode ser estabilizada através de realimentações contínuas invariantes no tempo $u_k = u_k(x)$. Isto é provado em [93] com base na condição necessária estabelecida em [11]. Além disso, foi mostrado em [11] que existem sistemas controláveis da forma (4.2) que não podem ser estabilizados por realimentações contínuas invariantes no tempo. No entanto, quando (4.2) é controlável, é possível estabilizá-lo com realimentações suaves variantes no tempo $u_k = u_k(t, x)$ que são periódicas em t [93], [15] (veja também [17], [18]).

Agora, baseados em [119, pág. 70], [23, pág. 26], [1], explicaremos uma maneira em que sistemas da forma (4.1), os quais evoluem[2] em SU(n), aparecem naturalmente em problemas de controle. Neste caso, no entanto, $X \in M^n$ não corresponde a um estado físico do sistema real.

Considere o sistema de controle

$$\dot{\psi} = \sum_{k=1}^{m} u_k H_k \psi, \quad \psi(0) = \psi_0 \in \mathbb{S}^{n-1}, \tag{4.3}$$

onde $\psi \in \mathbb{C}^n$ é o estado, $u_k \in \mathbb{R}$ são os controles e $\mathbb{S}^{n-1}$ é a esfera unitária em $\mathbb{C}^n$. Assuma que as entradas u_k: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ em (4.1) foram especificadas. É fácil verificar que

[2] O fato de que o sistema (4.1) evolui em SU(n) será demonstrado mais adiante.

se $X\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(n)$ é a solução correspondente de (4.1), então

$$\psi(t) = X(t)\psi_0 \in \mathbb{C}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{4.4}$$

é a solução de (4.3) com as mesmas entradas. Em particular, como $X(t) \in \mathrm{SU}(n)$, temos

$$\|\psi(t)\| = \|X(t)\psi_0\| = \|\psi_0\| = 1, \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}_+,$$

ou seja, $\psi(t) \in \mathbb{S}^{n-1}$, para $t \in \mathbb{R}_+$. Do mesmo modo, suponha que as entradas $u_k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ em (4.3) foram escolhidas. Se existe $X\colon \mathbb{R}_+ \to M^n$ tal que, para todo $\psi_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$\psi(t) = X(t)\psi_0 \in \mathbb{C}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

é a solução correspondente de (4.3), então $X\colon \mathbb{R}_+ \to M^n$ é a solução de (4.1) com as mesmas entradas. Em particular, $X(t) \in \mathrm{SU}(n)$ e $\psi(t) \in \mathbb{S}^{n-1}$, para todo $t \in \mathbb{R}_+$. O mapeamento $X\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(n)$, que é solução de (4.1) para certas entradas, é denominado de *propagador* ou *operator de evolução* do sistema (4.3) com as mesmas entradas [23]. Denominaremos (4.1) de *sistema propagador* do sistema de controle (4.3).

Seguindo [1], podemos definir dois tipos de problemas de controlabilidade. O primeiro, consiste em encontrar entradas $u_1, \ldots, u_m\colon [0, t_f] \to \mathbb{R}$ que conduzem o estado ψ do sistema (4.3) a um estado final arbitrário $\psi_f \in \mathbb{S}^{n-1}$ em algum instante de tempo $t_f > 0$. O segundo problema, que é análogo ao anterior, porém mais geral no caso de considerarmos o sistema propagador de (4.3), refere-se à especificação de entradas $u_1, \ldots, u_m\colon [0, t_f] \to \mathbb{R}$ que conduzem o estado X de (4.1) a um estado final arbitrário $X_f \in \mathrm{SU}(n)$ em algum instante $t_f > 0$. Desse modo, concluímos a partir de (4.4) que ao resolvermos o problema de controlabilidade do sistema propagador do sistema de controle (4.3), estamos, essencialmente, controlando operadores que atuam na condição inicial ψ_0 de (4.3) e que determinam seu estado futuro $\psi(t)$ no instante $t > 0$. Isto se torna muito importante no caso de sistemas quânticos. Por exemplo, quando (4.3) modela a dinâmica de um sistema formado por n-qubits, a controlabilidade do sistema propagador implica na possibilidade de geração de portas lógicas quânticas arbitrárias que atuam em um n-qubit.

É um resultado bem conhecido na teoria de controle geométrica que o sistema (4.1) é controlável[3] em $\mathrm{SU}(n)$ se e somente se $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{su}(n)$ [1], [48], [101] (veja também [46] e

[3]Mais precisamente, dado $X_f \in \mathrm{SU}(n)$, existe um número real $t_f > 0$ e entradas constantes por partes $u_k\colon [0, t_f] \to \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq m$, tais que a solução correspondente $X\colon [0, t_f] \to \mathrm{SU}(n)$ de (4.1) satisfaz $X(t_f) = X_f$.

[97]). Em [1], é mostrado que, quando este é o caso, o sistema (4.3) é controlável em $\mathbb{S}^{n-1}$. Uma maneira direta de comprovarmos esta segunda propriedade é utilizando o fato de que a ação natural do grupo de Lie SU(n) em $\mathbb{S}^{n-1}$ é transitiva, ou seja, dados $\psi_0, \psi_f \in \mathbb{S}^{n-1}$, existe $X \in \mathrm{SU}(n)$ tal que $\psi_f = X\psi_0$ [22]. No entanto, o simples conhecimento de que (4.1) é controlável em SU(n) não significa que sabemos como especificar as entradas $u_1, \ldots, u_m$ que conduzem o estado do sistema para um estado desejado $X_f \in \mathrm{SU}(n)$.

A presente pesquisa tem como objetivo determinar entradas $u_1, \ldots, u_m$ que resolvam, ao menos de maneira aproximada, o problema de controlabilidade descrito acima do sistema de controle (4.1). Em poucas palavras, dados $T > 0$, $X_\infty \in \mathrm{SU}(n)$, desejamos encontrar entradas $u_1, \ldots, u_m$ que forcem o estado X de (4.1) a rastrear assintoticamente uma trajetória de referência de período T que passa por X_∞. Em particular, se resolvermos este problema de controle, seremos capazes de especificar entradas $u_1, \ldots, u_m$ que conduzem o estado de (4.1) até uma vizinhança arbitrariamente pequena de X_∞ em algum instante de tempo finito. Na seqüência, definimos de maneira precisa o problema de controle a ser solucionado.

O *problema de planejamento periódico de trajetórias* para o sistema de controle (4.1) é formulado da seguinte maneira. Dado um *estado objetivo* $X_\infty \in \mathrm{SU}(n)$ e um número real $T > 0$ (arbitrários), encontrar uma *trajetória de referência* periódica continuamente diferenciável $X_r\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(n)$ de período T, com $X_r(0) = X_\infty$, e determinar leis de controle contínuas por partes[4] $u_k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, para cada $1 \leq k \leq m$, de modo que o erro de rastreamento entre a trajetória (continuamente diferenciável por partes) $X\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(n)$ de (4.1) e X_r convirja para zero quando $t \to \infty$, isto é,

$$\lim_{t\to\infty} (X(t) - X_r(t)) = 0.$$

Em particular, ($\ell \in \mathbb{N}$)

$$\lim_{\ell\to\infty} X(\ell T) = X_\infty.$$

Faremos agora alguns comentários sobre o exposto acima. Apesar de desenvolvermos uma estratégia de controle que resolve o problema de planejamento periódico de trajetórias para o sistema (4.1) somente na próxima seção, adiantamos, desde já, que, na realidade, serão determinadas leis de controle $u_k = u_k((T, X_\infty), X, t)$, $1 \leq k \leq m$, que solucionam o referido problema. Estas leis de controle dependem do período T, do estado objetivo X_∞, do estado X do sistema de controle (4.1) e do tempo t. Portanto, quando

[4]Mais precisamente, contínuas por partes em cada intervalo compacto de $\mathbb{R}_+$.

o estado X não puder ser medido continuamente, como no caso de (4.1) corresponder ao sistema propagador do sistema de controle (4.3), as entradas contínuas por partes $u_k(t) = u_k((T, X_\infty), X(t), t)$ desejadas deverão ser obtidas por integração numérica.

Em segundo lugar, se as entradas contínuas por partes $u_k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq m$, são dadas, resultados clássicos de equações diferenciais ordinárias estabelecem que[5] a solução $X\colon J \to M^n$ de (4.1) é continuamente diferenciável por partes e está definida em um intervalo maximal $J = [0, b) \subset \mathbb{R}_+$, onde $b > 0$. Da regra de diferenciação do produto, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(X^\dagger(t)X(t)) &= \left(\frac{d}{dt}X^\dagger(t)\right)X(t) + X^\dagger(t)\frac{d}{dt}X(t) = \dot{X}(t)^\dagger X(t) + X^\dagger(t)\dot{X}(t)\\ &= \sum_{k=1}^m u_k X^\dagger(t) H_k^\dagger X(t) + \sum_{k=1}^m u_k X^\dagger(t) H_k X(t) = 0,\end{aligned}$$

para cada $t \in J$, pois $H_k^\dagger + H_k = 0$. Como $X(0)^\dagger X(0) = I$, obtemos que $X(t)^\dagger X(t) = I$, para $t \in J$. A formula de Abel[6] estabelece que

$$\det(X(t)) = \det(X(0)) \exp\left[\int_0^t \operatorname{tr}\left(\sum_{k=1}^m u_k(s) H_k\right) ds\right] = \det(X(0)) = 1,$$

para todo $t \in J$, pois $\operatorname{tr}(H_k) = 0$. Logo, $X(t) \in \mathrm{SU}(n) \subset M^n$, para $t \in J$. Como $\mathrm{SU}(n)$ é compacto em M^n, concluímos que[7] $J = \mathbb{R}_+$ e que $X\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(n)$.

Por fim, não há perda de generalidade em assumir que $X(0) = I$ em (4.1). De fato, suponha que o problema de planejamento periódico de trajetórias foi resolvido para o sistema (4.1) com $X(0) = I$. Sejam $T > 0$ e $\overline{X}_0, \overline{X}_\infty \in \mathrm{SU}(n)$ arbitrários. Defina $X_\infty = \overline{X}_\infty \overline{X}_0^\dagger \in \mathrm{SU}(n)$. Decorre então que existe uma trajetória de referência periódica continuamente diferenciável X_r de período T, com $X_r(0) = X_\infty = \overline{X}_\infty \overline{X}_0^\dagger$, e entradas contínuas por partes $u_1, \ldots, u_m\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{t\to\infty}(X(t) - X_r(t)) = 0.$$

Defina $\overline{X} = X\overline{X}_0$ e $\overline{X}_r = X_r\overline{X}_0$. Note que $\overline{X}(0) = \overline{X}_0$ e que $\overline{X}_r$ é continuamente diferenciável e periódica de período T com $\overline{X}_r(0) = X_r(0)\overline{X}_0 = \overline{X}_\infty$. É fácil ver que, com

[5] Veja, por exemplo, [52, Corolário do Teorema 8, pág. 199, demonstração do Teorema 7, pág. 198, demonstração do Teorema 2, pág. 374, e demonstração do Teorema 3, pág. 375].

[6] Veja, por exemplo, [9, Teorema 2.3].

[7] O fato de que $J = \mathbb{R}_+$ decorre de [55, demonstração do Lema 17.10], por exemplo.

as entradas $u_1, \ldots, u_m$: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ obtidas, $\overline{X}$: $\mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(n)$ satisfaz

$$\dot{\overline{X}}(t) = \sum_{k=1}^{m} u_k(t) H_k \overline{X}(t), \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}_+.$$

Em outras palavras, o sistema de controle (4.1) é *invariante à direita*. Desse modo,

$$\lim_{t\to\infty} (\overline{X}(t) - \overline{X}_r(t)) = \lim_{t\to\infty} (X(t)\overline{X}_0 - X_r(t)\overline{X}_0) = \lim_{t\to\infty} (X(t) - X_r(t))\overline{X}_0 = 0.$$

Portanto, concluímos por unicidade de soluções[8] que o problema de controle também está resolvido para (4.1) com condição inicial $X(0) = \overline{X}_0 \in \mathrm{SU}(n)$.

4.3 Solução do problema de controle

Assumiremos em todo o restante desta seção, assim como no Apêndice E, que $T > 0$ e $X_\infty \in SU(n)$ (estado objetivo) foram fixados de modo arbitrário.

Baseado em (4.1), definimos o *sistema de referência*

$$\dot{X}_r = \sum_{k=1}^{m} u_k^r H_k X_r, \quad X_r(0) = X_\infty \in \mathrm{SU}(n), \tag{4.5}$$

onde $X_r \in M^n$ e as funções contínuas u_k^r: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ restam ainda ser determinadas.

Pelo momento, considere que as funções contínuas u_k^r: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do sistema de referência (4.5) foram especificadas de maneira que a solução (continuamente diferenciável) correspondente X_r: $\mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(n)$ possua período T. Em outras palavras, X_r é uma trajetória de referência tal que $X_r(0) = X_r(T) = X_\infty$.

É fácil verificar a partir de (4.1) e (4.5) que a mudança de coordenadas dependente do tempo

$$Z = Z(t, X) = X^\dagger X_r(t), \qquad \text{para todo } (t, X) \in \mathbb{R} \times M^n, \tag{4.6}$$

juntamente com a mudança de controle variante no tempo

$$v_k = u_k^r(t) - u_k, \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R},\ 1 \le k \le m, \tag{4.7}$$

[8] Veja, por exemplo, [52, demonstração do Teorema 3, pág. 375].

determina o sistema invariante à esquerda

$$\dot{Z} = ZX_r^\dagger(t)\sum_{k=1}^{m} v_k H_k X_r(t), \quad Z(0) = X_\infty \in \mathrm{SU}(n), \tag{4.8}$$

para todo $(t, Z) \in \mathbb{R} \times M^n$.

Seja $V\colon M^n \to \mathbb{R}$ a função linear contínua definida por

$$V(X) = \Re(tr(X)), \quad \text{para todo } X \in M^n. \tag{4.9}$$

Para

$$v_k(t, Z) = V(ZX_r^\dagger(t)H_k X_r(t)), \quad (t, Z) \in \mathbb{R} \times M^n,$$

temos, por construção, que

$$\dot{V}(t, Z) = \sum_{k=1}^{m} v_k(t, Z)^2 \geq 0, \quad \text{para todo } (t, Z) \in \mathbb{R} \times M^n.$$

Assim, V se qualifica como uma candidata à função de tipo-Lyapunov. Note também que, dado $X \in \mathrm{SU}(n)$,

$$n \geq V(X) \geq -n,$$
$$V(X) = n \Leftrightarrow X = I.$$

Com base nestas propriedades de V, e inspirados na versão periódica do princípio da invariância de LaSalle apresentada em [125, Teorema 77, pág. 178] e no método de estabilização pela condição *ad* (*ad-condition*) de [47], estabeleceremos mais adiante certos resultados de convergência de tipo-Lyapunov e formularemos um algoritmo que obtém, em um número finito de passos, leis de controle contínuas por partes $u_1, \ldots, u_m$ que asseguram a convergência assintótica do erro de rastreamento $X - X_r$ para zero (veja o Teorema 4.23). Como os resultados de convergência desenvolvidos não possuem convergência global, ou seja, existe uma região de convergência local, o propósito do algoritmo é, à grosso modo, garantir uma convergência global do erro de rastreamento para zero através de um número finito de translações à esquerda do mesmo. Estas translações fazem com que sempre estejamos dentro da região de convergência a cada passo do algoritmo. Portanto, tudo se passa como se o algoritmo proposto contornasse as singularidades da função de tipo-Lyapunov $V(Z) = \Re(tr(Z))$. Observamos, ainda, que apesar de os resultados de convergência de tipo-Lyapunov que estabelecemos não serem triviais, suas demonstrações dependem basicamente de propriedades bem conhecidas de álgebra linear e de argumentos

topológicos elementares em espaços de Banach. Mais precisamente, compacidade, continuidade e convergência de seqüências. Relembramos que SU(n) é um conjunto compacto no espaço de Banach M^n.

No que se segue, descreveremos os pontos chave que nos conduzirão em direção a uma solução para o problema de planejamento periódico de trajetórias do sistema (4.1). Se determinarmos funções contínuas por partes $v_k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, para cada $1 \leq k \leq m$, de maneira que

$$\lim_{t\to\infty} Z(t) = \lim_{t\to\infty} X^\dagger(t)X_r(t) = I, \tag{4.10}$$

onde $Z\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(n)$ é a solução correspondente do sistema (4.8), e $X\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(n)$ é a solução do sistema de controle (4.1) com as entradas contínuas por partes (veja (4.7))

$$u_k(t) = u_k^r(t) - v_k(t), \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}_+,\ 1 \leq k \leq m,$$

decorre da Proposição 4.1 apresentada abaixo que

$$\lim_{t\to\infty} (X(t) - X_r(t)) = 0, \tag{4.11}$$

resolvendo assim o problema de planejamento periódico de trajetórias. A Proposição 4.1 estabelece que (4.10) e (4.11) são equivalentes. Desse modo, $Z(t) = X^\dagger(t)X_r(t)$ corresponde, no grupo SU(n), ao erro de rastreamento $X(t) - X_r(t)$ no instante $t \in \mathbb{R}_+$.

Proposição 4.1. *Sejam $A, B\colon \mathbb{R}_+ \to SU(n)$. Então,*

$$\lim_{t\to\infty} A^\dagger(t)B(t) = I \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} (A(t) - B(t)) = 0.$$

Demonstração. Como SU(n) $\subset M^n$ é compacto (limitado), existe um número real $c \geq 0$ tal que $\|A(t)\| \leq c$, $\|A^\dagger(t)\| \leq c$, para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Temos também que

$$\begin{aligned}\|A(t) - B(t)\| &= \|A(t)[I - A^\dagger(t)B(t)]\| \leq c\|I - A^\dagger(t)B(t)\|,\\ \|I - A^\dagger(t)B(t)\| &= \|A^\dagger(t)[A(t) - B(t)]\| \leq c\|A(t) - B(t)\|,\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}_+$. O resultado é imediato destas desigualdades. □

Concluímos, então, que para encontrarmos uma solução para o problema de planejamento periódico de trajetórias do sistema (4.1), devemos:

1. Para cada $T > 0$ e $X_\infty \in \mathrm{SU}(n)$, determinar funções contínuas $u_k^r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em (4.5)

de modo que a solução correspondente X_r: $\mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(n)$ possua período T (ou seja, X_r é uma trajetória de referência);

2. Obter funções contínuas por partes v_k: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq m$, tais que (4.10) é satisfeita para o sistema (4.8).

Na seqüência, mostraremos como podemos satisfazer estas duas exigências. Para a primeira, torna-se necessário introduzir os conceitos de T-regular e de p-controlável para o sistema de controle (4.1). Em relação à segunda exigência, estabeleceremos alguns resultados de convergência de tipo-Lyapunov e formularemos um algoritmo que determina as funções desejadas $v_1, \ldots, v_m$ em um número finito de passos. Começamos então com a definição de T-regular.

Definição 4.2. *Dado $T > 0$, dizemos que o sistema (4.1) é T-*regular *quando existem funções periódicas suaves u_k^T: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de período T, para cada $1 \leq k \leq m$, tais que a solução suave X^T: $\mathbb{R} \to SU(n)$ de (4.1) com $u_k = u_k^T(t)$ também é periódica de período T e satisfaz*

$$\mathfrak{su}(n) = span\{B_k^j(0),\ para\ todo\ 1 \leq k \leq m,\ j \in \mathbb{N}\},$$

onde

$$\begin{aligned} A(t) &= \sum_{k=1}^{m} u_k^T(t) H_k \in \mathfrak{su}(n), \\ B_k^0(t) &= H_k X^T(t), \\ B_k^{j+1}(t) &= \dot{B}_k^j(t) - A(t) B_k^j(t), \end{aligned}$$

*para todo $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$, $t \in \mathbb{R}$. Quando (4.1) é T-*regular *para todo $T > 0$, diremos simplesmente que o sistema (4.1) é* regular.

Observação 4.3. *Note que A: $\mathbb{R} \to \mathfrak{su}(n)$, B_k^j, $\dot{B}_k^j$: $\mathbb{R} \to M^n$ são suaves e periódicas de período T, para cada $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$. Logo, cada uma destas aplicações é limitada. Além disso, definindo*

$$\begin{aligned} C_k^0(t) &= H_k, \\ C_k^{j+1}(t) &= \dot{C}_k^j(t) + [C_k^j(t), A(t)], \end{aligned}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$, $t \in \mathbb{R}$, é fácil provar por indução que

$$C_k^j(t)X^T(t) = B_k^j(t), \qquad \textit{para } j \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq m,\ t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, $C_k^j(0) = B_k^j(0)$, para $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$.

Considere que (4.1) é T-regular. Seja $X_r^T\colon \mathbb{R} \to \mathrm{SU}(n)$ a solução suave de (4.5) com $X_r^T(0) = I$ e

$$u_k^r = u_k^T, \qquad \text{para cada } 1 \leq k \leq m, \tag{4.12}$$

onde u_k^T é como na Definição 4.2. Sabemos então que $u_k^r = u_k^T$ assegura que X_r^T é periódica de período T e que

$$\mathfrak{su}(n) = \mathrm{span}\{B_k^j(0),\ \text{para todo } 1 \leq k \leq m,\ j \in \mathbb{N}\}, \tag{4.13}$$

onde

$$\begin{aligned} A(t) &= \textstyle\sum_{k=1}^m u_k^T(t)H_k \in \mathfrak{su}(n), \\ B_k^0(t) &= H_k X_r^T(t), \\ B_k^{j+1}(t) &= \dot{B}_k^j(t) - A(t)B_k^j(t), \end{aligned} \tag{4.14}$$

para cada $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$, $t \in \mathbb{R}$. Definimos a trajetória de referência $X_r\colon \mathbb{R} \to \mathrm{SU}(n)$ por

$$X_r = X_r^T X_\infty. \tag{4.15}$$

Note que X_r é a solução suave de (4.5) com $X_r(0) = X_\infty$ e u_k^r dada por (4.12). É evidente que X_r também tem período T. Veremos mais adiante que (4.13) e (4.14) serão cruciais para encontrarmos uma solução para o problema de planejamento periódico de trajetórias no caso em que (4.1) é T-regular.

Em todo o restante desta seção e no Apêndice E, sempre que assumirmos que o sistema (4.1) é T-regular, estaremos considerando que u_k^r no sistema de referência (4.5) está definida por (4.12) e X_r por (4.15).

O próximo teorema apresenta um critério algébrico para que (4.1) seja regular.

Teorema 4.4 (Método do Retorno de Coron). *[16, pág. 377], [18, págs. 187–192, 296–298] Considere o sistema de controle (4.1). Então, dado $T > 0$, existem realimenta-*

ções suaves variantes no tempo $\overline{u}_k^T\colon \mathbb{R}\times M^n \to \mathbb{R}$, *para cada* $1\le k\le m$, *tais que*

$$\begin{aligned}\overline{u}_k^T(t,Y) &= -\overline{u}_k^T(T-t,Y),\\ \overline{u}_k^T(t+T,Y) &= \overline{u}_k^T(t,Y),\end{aligned} \tag{4.16}$$

para todo $(t,Y)\in\mathbb{R}\times M^n$, *e de modo que*

$$Lie(H) = span\{B_k^j(0),\ \text{para todo } 1\le k\le m,\ j\in\mathbb{N}\}, \tag{4.17}$$

onde

$$\begin{aligned}A(t) &= \sum_{k=1}^m \overline{u}_k^T(t,X^T(t))H_k \in \mathfrak{su}(n),\\ B_k^0(t) &= H_k X^T(t),\\ B_k^{j+1}(t) &= \dot{B}_k^j(t) - A(t)B_k^j(t),\end{aligned}$$

para todo $j\in\mathbb{N}$, $1\le k\le m$, $t\in\mathbb{R}$, *e* $X^T\colon\mathbb{R}\to SU(n)$ *é a solução suave de (4.1) com as realimentações de estado variantes no tempo* $u_k = \overline{u}_k^T(t,X)$.

Em particular, a solução X^T *é periódica de período* T *e, se* $Lie(H)=\mathfrak{su}(n)$, *então o sistema de controle (4.1) é regular.*

Julgamos importante esclarecer alguns pontos a respeito deste resultado.

Observação 4.5. *A prova deste teorema é apresentada em [16], e envolve certos conceitos e resultados referentes a espaços de funções (topologia de Whitney, jatos, etc.). Para o estudo de tais assuntos, direcionamos o leitor a [63], [40], [35], [72] (veja também [73], [49], [50]). Além disso, ressaltamos que o Método do Retorno de Coron foi desenvolvido para uma classe muito mais ampla de sistemas de controle do que (4.1) e possui importantes conseqüências em problemas de estabilização.*

Observação 4.6. *Resultados clássicos de equações diferenciais ordinárias estabelecem que*[9] *a solução* $X^T\colon J\to M^n$ *de (4.1) com* $u_k=\overline{u}_k^T(t,X)$ *está definida em um intervalo aberto maximal* $J\subset\mathbb{R}$ *contendo* $t=0$. *Prosseguindo do mesmo modo que na seção anterior, a regra de diferenciação do produto e a fórmula de Abel implicam que, para todo* $t\in J$, $X^T(t)\in SU(n)$. *Como* $SU(n)$ *é compacto em* M^n, *concluímos que*[10] $J=\mathbb{R}$ *e que* $X^T\colon\mathbb{R}\to SU(n)$.

[9] *Veja, por exemplo, [52, Teorema 7, pág. 388].*
[10] *O fato que* $J=\mathbb{R}$ *decorre de [55, demonstração do Lema 17.10], por exemplo.*

Observação 4.7. *[16], [18] Note que o sistema linearizado de (4.1) ao longo da trajetória* $(X^T(t), \overline{u}_1^T(t, X^T(t)), \ldots, \overline{u}_m^T(t, X^T(t)))$, $t \in \mathbb{R}$, *é dado pelo seguinte sistema de controle linear variante no tempo*

$$\dot{X}_\ell = A(t)X_\ell + \sum_{k=1}^{m} w_k B_k^0(t),$$

onde $X_\ell \in M^n$ *é o estado e* $w_k \in \mathbb{R}$ *são os controles. Mais precisamente, reescrevendo (4.1) como*

$$\dot{X} = F(X, u_1, \ldots, u_m) = \sum_{k=1}^{m} u_k H_k X,$$

temos que

$$A(t) = \frac{\partial F}{\partial X}(X^T(t), \overline{u}_1^T(t, X^T(t)), \ldots, \overline{u}_m^T(t, X^T(t))) = \sum_{k=1}^{m} \overline{u}_k^T(t, X^T(t))H_k \in M^n,$$
$$B_k^0(t) = \frac{\partial F}{\partial u_k}(X^T(t), \overline{u}_1^T(t, X^T(t)), \ldots, \overline{u}_m^T(t, X^T(t))) = H_k X^T(t) \in M^n,$$

para cada $1 \leq k \leq m$, $t \in \mathbb{R}$.

Observação 4.8. *[18] Mostraremos que (4.16) implica que a solução* $X^T\colon \mathbb{R} \to SU(n)$ *de (4.1) com* $u_k = \overline{u}_k^T(t, X)$ *é periódica de período* T. *Considere as aplicações* $Y\colon \mathbb{R} \to SU(n)$ *e* $Z\colon \mathbb{R} \to SU(n)$ *definidas por*

$$Y(t) = X^T(T - t), \qquad \textit{para todo } t \in \mathbb{R},$$
$$Z(t) = X^T(t + T), \qquad \textit{para todo } t \in \mathbb{R},$$

respectivamente. Temos que

$$\overline{u}_k^T(t, X^T(T - t)) = -\overline{u}_k^T(T - t, X^T(T - t)),$$

e

$$\begin{aligned}\dot{Y}(t) = -\dot{X}^T(T - t) &= -\sum_{k=1}^{m} \overline{u}_k^T(T - t, X^T(T - t))H_k X^T(T - t) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \overline{u}_k^T(t, X^T(T - t))H_k X^T(T - t) = \sum_{k=1}^{m} \overline{u}_k^T(t, Y(t))H_k Y(t),\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. *Como* $Y(T/2) = X^T(T/2)$, *concluímos por unicidade de soluções que*[11]

[11] *Veja, por exemplo, [52, Teorema 3, pág. 375].*

$Y(t) = X^T(T-t) = X^T(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, $X^T(0) = X^T(T) = I$, ou seja, as realimentações de estado variantes no tempo $\overline{u}_k^T(t, X)$ garantem que o sistema "retorna" a $X^T(0) = I$ no instante $t = T$. Do mesmo modo, temos que

$$\overline{u}_k^T(t+T, X^T(t+T)) = \overline{u}_k^T(t, X^T(t+T)),$$

e

$$\begin{aligned}\dot{Z}(t) = \dot{X}^T(t+T) &= \sum_{k=1}^{m} \overline{u}_k^T(t+T, X^T(t+T)) H_k X^T(t+T) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \overline{u}_k^T(t, X^T(t+T)) H_k X^T(t+T) = \sum_{k=1}^{m} \overline{u}_k^T(t, Z(t)) H_k Z(t),\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, com $Z(0) = X^T(T) = X^T(0) = I$. Portanto, $Z(t) = X^T(t+T) = X^T(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e $X^T\colon \mathbb{R} \to SU(n)$ é periódica de período T.

Segue então que se $Lie(H) = \mathfrak{su}(n)$, então o sistema de controle (4.1) é regular. De fato, para cada $1 \leq k \leq m$, basta definirmos as funções suaves $u_k^T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na Definição 4.2 por $u_k^T(t) = \overline{u}_k^T(t, X^T(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Note que u_k^T é periódica de período T.

Agora, considere novamente a função linear contínua $V\colon M^n \to \mathbb{R}$ definida em (4.9) da seguinte maneira

$$V(X) = \Re(tr(X)), \qquad \text{para todo } X \in M^n. \tag{4.18}$$

Definimos o *sistema auxiliar* por

$$\dot{W} = W X_r^\dagger(t) \sum_{k=1}^{m} f_k a_k(t, W) H_k X_r(t), \tag{4.19}$$

para cada $(t, W) \in \mathbb{R} \times M^n$, onde $f_k \in \mathbb{R}$ é não-nulo e

$$a_k(t, W) = f_k V(W X_r^\dagger(t) H_k X_r(t)) \in \mathbb{R}. \tag{4.20}$$

Observe que o sistema (4.8) com as realimentações $v_k = f_k a_k(t, Z)$ nada mais é do que o

sistema auxiliar (4.19)–(4.20). Além disso, por construção,

$$\dot{V}(t,W) = \sum_{k=1}^{m} a_k(t,W)^2 \geq 0, \qquad \text{para todo } (t,W) \in \mathbb{R} \times M^n. \tag{4.21}$$

Relembramos que, dado $X \in \mathrm{SU}(n)$,

$$\begin{aligned} &n \geq V(X) \geq -n, \\ &V(X) = n \Leftrightarrow X = I. \end{aligned} \tag{4.22}$$

O Teorema 4.11 apresentado logo abaixo foi inspirado em [125, Lema 71, pág. 177], o qual é aplicado na demonstração da versão periódica do princípio da invariância de LaSalle apresentada em [125, Teorema 77, pág. 178], e estabelece um importante resultado de convergência de tipo-Lyapunov para o sistema auxiliar (4.19)–(4.20) com função de tipo-Lyapunov $V(W) = \Re(tr(W))$. Observamos que, apesar de as propriedades (4.13) e (4.22) não serem exigidas em sua demonstração, (4.14) e (4.21) desempenham um papel fundamental. De crucial importância também é a utilização do Lema de Barbalat que enunciamos em seguida.

Necessitaremos da seguinte versão mais geral do Lema de Barbalat.

Lema 4.9 (Lema de Barbalat). *Seja α: $[0,\infty) \to \mathbb{R}$ um função que satisfaz as seguintes hipóteses:*

1. *α é continuamente diferenciável;*
2. *$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \overline{\alpha}$, onde $\overline{\alpha} \in \mathbb{R}$;*
3. *Existe uma função limitada β: $[0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que, para cada número real $b > 0$, existe um conjunto finito $N_b \subset [0,b]$ de modo que a restrição $\beta|[0,b]$ é contínua por partes e*
$$\ddot{\alpha}(t) = \beta(t), \qquad \textit{para cada } t \in [0,b] \setminus N_b.$$

Então,

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\alpha}(t) = 0.$$

Demonstração. As hipóteses 1 e 3, juntamente com o Teorema do Valor Médio[12], implicam

[12]Veja [27, pág. 43] ou [52, demonstrações do Teorema 5, pág. 313, do Corolário 1, pág. 314, e do Corolário do Teorema 9, pág. 200].

que $\dot{\alpha}$ é uniformemente contínua. O resultado segue então da versão usual[13] do Lema de Barbalat. □

Observação 4.10. *Em todo o restante desta seção, abusaremos da notação sempre que formos aplicar o Lema de Barbalat acima, escrevendo simplesmente* $\ddot{\alpha} = \beta$.

Teorema 4.11. *Assuma que o sistema (4.1) é T-regular. Dado $q = (t_0, W_{t_0}) \in \mathbb{R} \times SU(n)$, seja W_q: $\mathbb{R} \to SU(n)$ a solução do sistema auxiliar (4.19)–(4.20) com condição inicial $W_q(t_0) = W_{t_0}$. Então:*

1. $\lim_{t\to\infty} V(W_q(t)X_r^\dagger(t)H_kX_r(t)) = 0$, *para cada* $1 \le k \le m$;
2. $\lim_{t\to\infty} d(W_q(t), E_R) = 0$ *e* E_R *é não-vazio, onde*

$$E_R = \{W \in SU(n) : V(WX_\infty^\dagger B_k^j(0)X_\infty) = 0, \text{ para todo } j \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le m\}$$

e B_k^j *é como em (4.14).*

Demonstração. Seja $\Omega(W_q)$ o conjunto limite da solução W_q (este conceito é relembrado na Definição E.1 do Apêndice E). Devido à Observação E.2 e à Proposição E.3 do Apêndice E, basta provarmos que $\Omega(W_q) \subset E_R$.

Primeiramente, como V é uma função linear contínua (veja (4.18)), existe um número real $c > 0$ tal que

$$|V(X)| \le c\|X\|, \quad \text{para todo } X \in M^n. \tag{4.23}$$

Além disso, decorre de (4.5), (4.19)–(4.20), da Observação 4.3 e da compacidade de SU(n), que cada uma das seguintes aplicações

$$X_r, X_r^\dagger, W_q, B_k^j, \dot{X}_r, \dot{X}_r^\dagger, \dot{W}_q, \dot{B}_k^j, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le m, \tag{4.24}$$

é limitada.

[13] Veja, por exemplo, [114, Lema 4.2].

Considere as funções $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b_k^j\colon \mathbb{R} \times M^n \to \mathbb{R}$, $\beta_k^j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{aligned}
&\alpha(t) = V(W_q(t)), && \text{para todo } t \in \mathbb{R},\\
&b_k^j(t, W) = V(W X_r^\dagger(t) B_k^j(t) X_\infty), && \text{para todo } (t, W) \in \mathbb{R} \times M^n,\\
&\beta_k^j(t) = b_k^j(t, W_q(t)), && \text{para todo } t \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

respectivamente, para todo $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$. Vamos provar por indução que

$$\lim_{t\to\infty} \beta_k^j(t) = \lim_{t\to\infty} V(W_q(t) X_r^\dagger(t) B_k^j(t) X_\infty) = 0, \tag{4.25}$$

para cada $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$. A partir de (4.5), (4.14), (4.15), (4.18), (4.19)–(4.20) e da definição de b_k^0, temos que

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, W) &= \sum_{k=1}^{m} [f_k b_k^0(t, W)]^2 \geq 0,\\
\ddot{V}(t, W) &= 2 \sum_{k=1}^{m} f_k^2 b_k^0(t, W) \dot{b}_k^0(t, W),
\end{aligned}$$

onde $f_k \in \mathbb{R}$ não-nulo é como em (4.19) e[14]

$$\dot{b}_k^0(t, W) = V(W X_r^\dagger(t) [\sum_{\ell=1}^{m} f_\ell^2 b_\ell^0(t, W) H_\ell] B_k^0(t) X_\infty) + b_k^1(t, W)$$

para todo $(t, W) \in \mathbb{R} \times M^n$. Como $\dot{V}$ é uma função contínua não-negativa, concluímos que α é uma função não-decrescente limitada superiormente tal que $\dot{\alpha}$ é continuamente diferenciável e $\ddot{\alpha}$ é limitada (por (4.23) e (4.24)). Logo,

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \overline{\alpha},$$

onde $\overline{\alpha} \in \mathbb{R}$. Esta relação, juntamente com o Lema de Barbalat (Lema 4.9), fornece

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\alpha}(t) = \sum_{k=1}^{m} [f_k b_k^0(t, W_q(t)]^2 = 0.$$

Desse modo, devido ao fato de $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{R}$ serem não-nulos, obtemos a partir de (4.14)

[14] Aqui, é necessário utilizar o fato de que $H_1, \ldots H_m \in \mathfrak{su}(n)$ e que a derivada de X_r comuta com '$\dagger$'.

e (4.15) que

$$\lim_{t\to\infty} \beta_k^0(t) = \lim_{t\to\infty} V(W_q(t)X_r^\dagger(t)B_k^0(t)X_\infty) = \lim_{t\to\infty} V(W_q(t)X_r^\dagger(t)H_kX_r(t)) = 0, \tag{4.26}$$

para cada $1 \leq k \leq m$. Logo, (4.19)–(4.20) e (4.24) implicam que

$$\lim_{t\to\infty} \dot{W}_q(t) = 0. \tag{4.27}$$

Agora, considere a hipótese de indução

$$\lim_{t\to\infty} \beta_k^j(t) = \lim_{t\to\infty} V(W_q(t)X_r^\dagger(t)B_k^j(t)X_\infty) = 0, \tag{4.28}$$

para todo $1 \leq k \leq m$, onde $j \in \mathbb{N}$. Temos que

$$\dot{b}_k^j(t,W) = V(WX_r^\dagger(t)[\sum_{\ell=1}^{m} f_\ell^2 b_\ell^0(t,W)H_\ell]B_k^j(t)X_\infty) + b_k^{j+1}(t,W), \tag{4.29}$$

para todo $(t,W) \in \mathbb{R}\times M^n$ e cada $1 \leq k \leq m$. Note que $\dot{b}_k^j$ é continuamente diferenciável. Com base em (4.23) e (4.24), computações matemáticas elementares mostram que a função $\ddot{\beta}_k^j$ é de fato limitada, pois $\ddot{\beta}_k^j(t) = \ddot{b}_k^j(t, W_q(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq m$. Portanto, resulta de (4.23), (4.24), (4.26), (4.28), (4.29) e do Lema de Barbalat que

$$\lim_{t\to\infty} \beta_k^{j+1}(t) = \lim_{t\to\infty} V(W_q(t)X_r^\dagger(t)B_k^{j+1}(t)X_\infty) = 0,$$

para cada $1 \leq k \leq m$. Demonstramos assim que (4.25) é verdade.

Neste momento, é simples provar que $\Omega(W_q) \subset E_R$. De fato, seja $\overline{W} \in \Omega(W_q) \subset \mathrm{SU}(n)$. Então, (4.25), (4.27) e o Lema E.5 (veja o Apêndice E) estabelecem que

$$V(\overline{W}X_\infty^\dagger B_k^j(0)X_\infty) = 0,$$

para cada $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$. □

Este teorema é um primeiro resultado de convergência de tipo-Lyapunov que desenvolvemos para o caso que o sistema (4.1) é T-regular. No entanto, para determinarmos funções contínuas por partes v_k: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq m$, tais que (4.10) é satisfeita para o sistema (4.8), ainda precisamos, à grosso modo, relaxar as propriedades do conjunto E_R do Teorema 4.11 de modo que $I \in E_R$ e $n \in V(E_R)$. Isto será feito mais adiante de ma-

neira gradual em duas etapas: o Lema 4.18 e o Teorema 4.20. Observamos que o último é o principal resultado de convergência de tipo-Lyapunov que estabelecemos para o sistema auxiliar (4.19)–(4.20). No entanto, antes de prosseguirmos nesta direção, introduziremos a propriedade de p-controlabilidade para o sistema (4.1) e demonstraremos um resultado análogo ao Teorema 4.11 para tal caso.

Mesmo quando sabemos que o sistema (4.1) é T-regular, podemos não ter a nossa disposição expressões analíticas explícitas para as funções contínuas u_k^r do sistema de referência (4.5). Isto ocorre, por exemplo, quando (4.1) é controlável em SU(n), ou seja, $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{su}(n)$. Quando este é o caso, o Método do Retorno de Coron implica que o sistema é regular (veja o Teorema 4.4). Entretanto, o Método do Retorno garante apenas a existência das funções u_k^T que definem u_k^r em (4.12), sem fornecer expressões analíticas explícitas para as mesmas. É com o objetivo de contornar esta dificuldade, a qual pode impossibilitar a solução do problema de planejamento periódico de trajetórias em situações práticas, que introduzimos o conceito de p-controlável dado abaixo. Neste caso, ao contrário do caso regular, veremos que as funções u_k^r são determinadas de modo explícito e analítico.

Definição 4.12. *Dizemos que o sistema de controle (4.1) é* p-controlável *quando existem* $\overline{H}_1, \dots \overline{H}_p \in span(H)$ *tais que*

$$\mathfrak{su}(n) = span\{ad^j_{\overline{H}_\ell} H_k,\ \textit{para todo } j \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le m,\ 1 \le \ell \le p\}.$$

É evidente que se (4.1) é p-controlável, então $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{su}(n)$, isto é, (4.1) é controlável em SU(n). Em suma, temos que

$$p\text{-controlável} \Rightarrow \text{controlável em SU}(n) \Leftrightarrow \mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{su}(n) \Rightarrow \text{regular}.$$

Relembramos que a segunda implicação decorre do Teorema 4.4.

Suponha que (4.1) é p-controlável. Logo, existem $\overline{H}_1, \dots \overline{H}_p \in \mathrm{span}(H)$ tais que

$$\mathfrak{su}(n) = \mathrm{span}\{\mathrm{ad}^j_{\overline{H}_\ell} H_k,\ \text{para todo } 1 \le \ell \le p,\ 1 \le k \le m,\ j \in \mathbb{N}\}. \tag{4.30}$$

Temos que

$$\overline{H}_\ell = \sum_{k=1}^{m} c_k^\ell H_k, \qquad \text{para cada } 1 \le \ell \le p,$$

onde $c_k^\ell \in \mathbb{R}$. Seja

$$T_p = T/p \tag{4.31}$$

e, para $1 \leq k \leq m$, definimos as funções $u_k^r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em (4.5) por

$$u_k^r(t) = \begin{cases} \sin(2\pi t/T_p)c_k^1, & \text{para } \ell T \leq t < \ell T + T_p, \\ \sin(2\pi t/T_p)c_k^2, & \text{para } \ell T + T_p \leq t < \ell T + 2T_p, \\ \vdots & \\ \sin(2\pi t/T_p)c_k^{p-1}, & \text{para } \ell T + (p-2)T_p \leq t < \ell T + (p-1)T_p, \\ \sin(2\pi t/T_p)c_k^p, & \text{para } \ell T + (p-1)T_p \leq t < \ell T + pT_p = (\ell+1)T, \end{cases} \tag{4.32}$$

para todo $\ell \in \mathbb{Z}$. Assim, obtemos que

$$\dot{X}_r = F_r(t, X_r) = \sin(2\pi t/T_p)\overline{H}_r(t)X_r, \quad X_r(0) = X_\infty \in SU(n), \tag{4.33}$$

para todo $(t, X_r) \in \mathbb{R} \times M^n$, onde $\overline{H}_r\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{su}(n)$ é dada por

$$\overline{H}_r(t) = \begin{cases} \overline{H}_1, & \text{para } \ell T \leq t < \ell T + T_p, \\ \overline{H}_2, & \text{para } \ell T + T_p \leq t < \ell T + 2T_p, \\ \vdots & \\ \overline{H}_{p-1}, & \text{para } \ell T + (p-2)T_p \leq t < \ell T + (p-1)T_p, \\ \overline{H}_p, & \text{para } \ell T + (p-1)T_p \leq t < \ell T + pT_p = (\ell+1)T, \end{cases} \tag{4.34}$$

para todo $\ell \in \mathbb{Z}$. É fácil ver que a solução (continuamente diferenciável) $X_r\colon \mathbb{R} \to SU(n)$ de (4.33) é dada por

$$X_r(t) = \begin{cases} \exp(T_p/2\pi[1 - cos(2\pi t/T_p)]\overline{H}_1)X_\infty, & \text{para } \ell T \leq t < \ell T + T_p, \\ \exp(T_p/2\pi[1 - cos(2\pi t/T_p)]\overline{H}_2)X_\infty, & \text{para } \ell T + T_p \leq t < \ell T + 2T_p, \\ \vdots & \\ \exp(T_p/2\pi[1 - cos(2\pi t/T_p)]\overline{H}_p)X_\infty, & \text{para } \ell T + (p-1)T_p \leq t < (\ell+1)T, \end{cases} \tag{4.35}$$

para todo $\ell \in \mathbb{Z}$. Portanto, X_r é periódica de período T e, além disso,

$$X_r(\ell T_p) = X_\infty, \quad \text{para todo } \ell \in \mathbb{Z}. \tag{4.36}$$

Observação 4.13. *Note que $\overline{H}_r$ é constante por partes em cada intervalo compacto de $\mathbb{R}$, limitada e periódica de período T. Apesar disso, a aplicação $F_r\colon \mathbb{R} \times M^n \to M^n$ em*

(4.33) é contínua. De fato, $\overline{H}_r$ *é constante por partes com as descontinuidades nos pontos* $t = \ell T_p$*, para todo* $\ell \in \mathbb{Z}$*. A função* $\sin(2\pi t/T_p)$ *que multiplica* $\overline{H}_r$ *em (4.33) garante que o produto* $\sin(2\pi t/T_p)\overline{H}_r$ *é contínuo em* $\mathbb{R}$ *e periódico de período* T*. Portanto,* F_r *é contínua. Do mesmo modo, temos que* u_k^r *em (4.32) é contínua e de período* T*. Ressaltamos que a definição de* u_k^r *em (4.32) é dada de maneira explícita e analítica. Além do mais, estabeleceremos um critério algébrico para que o sistema (4.1) seja p-controlável (veja a Proposição 4.15 mostrada logo abaixo).*

Observação 4.14. *Note, ainda, que a definição de* $\overline{H}_r$ *acima corresponde a uma comutação periódica de período* T *entre os elementos* $\overline{H}_1, \ldots, \overline{H}_p \in span(H)$ *que satisfazem (4.30). Os instantes de comutação são em* $t = \ell T_p$*, para* $\ell \in \mathbb{N}$*. Veremos mais adiante que tal comportamento será fundamental para encontrarmos uma solução para o problema de controle considerado no caso em que (4.1) é p-controlável (veja o Lema E.6, o Lema E.7 e o Teorema 4.16).*

Em todo o restante desta seção e no Apêndice E, sempre que assumirmos que o sistema (4.1) é p-controlável, estaremos considerando que u_k^r *no sistema de referência (4.5) está definida por (4.32) e* X_r *por (4.35).*

Relembre que p-controlável $\Rightarrow$ controlável $\Leftrightarrow$ Lie$(H) = \mathfrak{su}(n) \Rightarrow$ regular. A próxima proposição estabelece condições algébricas para que a recíproca da primeira implicação seja válida.

Proposição 4.15. *Considere o sistema (4.1). Suponha que existe* $G \subset Lie(H)$ *tal que:*

1. G *é uma base vetorial de* $Lie(H)$*;*
2. $G \subset span\{[X_1, [X_2, X_3]], ad_Y^j X_4,$ *para todo* $X_1, \ldots, X_4 \in H,\ Y \in span(H),\ j \in \mathbb{N}\}$.

Então, existem $\overline{H}_1, \ldots, \overline{H}_p \in span(H)$ *tais que*

$$Lie(H) = span\{ad_{\overline{H}_\ell}^j H_k,\ \text{para todo } j \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq m,\ 1 \leq \ell \leq p, \}.$$

Em particular, se $Lie(H) = \mathfrak{su}(n)$*, então (4.1) é p-controlável.*

Demonstração. Defina

$$L = \text{span}\{[X_1, [X_2, X_3]], ad_Y^j X_4,\ \text{para todo } X_1, \ldots, X_4 \in H,\ Y \in \text{span}(H),\ j \in \mathbb{N}\}.$$

Por hipótese, temos que $G \subset L \subset \mathrm{Lie}(H)$ é finito e $\mathrm{Lie}(H) = \mathrm{span}(G)$. Portanto, basta mostrarmos que, dados $X, Y, Z \in H = \{H_1, \ldots, H_m\}$, existem $\overline{H}_1, \ldots, \overline{H}_5 \in \mathrm{span}\{H\}$ tais que

$$[X, [Y, Z]] \in \mathrm{span}\{\mathrm{ad}^2_{\overline{H}_\ell} X, \mathrm{ad}^2_{\overline{H}_\ell} Y, \mathrm{ad}^2_{\overline{H}_\ell} Z, \text{ para todo } 1 \leq \ell \leq 5\}.$$

De fato, se isto for verdade, então existem $\overline{H}_1, \ldots, \overline{H}_p \in \mathrm{span}\{H\}$ tais que

$$G \subset \mathrm{span}\{\mathrm{ad}^j_{\overline{H}_\ell} H_k, \text{ para todo } j \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq m,\ 1 \leq \ell \leq p\} \subset L \subset \mathrm{Lie}(H).$$

Logo, obtemos que

$$\mathrm{Lie}(H) = \mathrm{span}(G) \subset \mathrm{span}\{\mathrm{ad}^j_{\overline{H}_\ell} H_k, \text{ para todo } j \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq m,\ 1 \leq \ell \leq p\} \subset \mathrm{Lie}(H),$$

ou seja,

$$\mathrm{Lie}(H) = \mathrm{span}\{\mathrm{ad}^j_{\overline{H}_\ell} H_k, \text{ para todo } j \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq m,\ 1 \leq \ell \leq p\}.$$

Agora, sejam $X, Y, Z \in H$. Temos que

$$\begin{aligned} ad^2_{X+Z} Y &= ad^2_X Y + ad^2_Z Y - [X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]], \\ ad^2_{X-Y} Z &= ad^2_X Z + ad^2_Y Z - [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]]. \end{aligned}$$

Utilizando a identidade de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,$$

encontramos que

$$-3[X, [Y, Z]] = ad^2_{X+Z} Y + ad^2_{X-Y} Z - (ad^2_X Y + ad^2_Z Y + ad^2_X Z + ad^2_Y Z).$$

Assim, escolhendo $\overline{H}_1 = X$, $\overline{H}_2 = Y$, $\overline{H}_3 = Z$, $\overline{H}_4 = X + Z$, $\overline{H}_5 = X - Y$, completa a demonstração. □

Quando o sistema de controle (4.1) é p-controlável, temos então o seguinte resultado de convergência de tipo-Lyapunov, que é análogo ao Teorema 4.11 referente ao caso em que o sistema é T-regular. Observamos que sua demonstração, apesar de não utilizar as propriedades (4.22) e (4.30), tem por base (4.34), (4.36) e o Lema de Barbalat.

Teorema 4.16. *Suponha que* (4.1) *é p-controlável. Dado $q = (t_0, W_{t_0}) \in \mathbb{R} \times SU(n)$,*

seja $W_q\colon \mathbb{R} \to SU(n)$ *a solução do sistema auxiliar (4.19)–(4.20) com condição inicial* $W_q(t_0) = W_{t_0}$. *Então:*

1. $\lim_{t\to\infty} V(W_q(t)X_r^\dagger(t)H_kX_r(t)) = 0, \quad$ *para cada* $1 \le k \le m$;
2. $\lim_{t\to\infty} d(W_q(t), E_C) = 0$ *e* E_C *é não-vazio, onde*

$$E_C = \{W \in SU(n) : V(WX_\infty^\dagger[ad^j_{\overline{H}_\ell}H_k]X_\infty) = 0, \text{ para } j \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le m,\ 1 \le \ell \le p\},$$

e $\overline{H}_\ell$ *é como em (4.34).*

Para demonstrarmos este teorema, necessitamos da definição dada baixo, que é um conceito generalizado de derivada de uma função ao longo das trajetórias do sistema auxiliar (4.19)–(4.20). Observamos que esta generalização é necessária devido ao fato de $\overline{H}_r$ em (4.34) ser constante por partes (em cada intervalo compacto de $\mathbb{R}$) com as descontinuidades em $t = \ell T_p$, para todo $\ell \in \mathbb{Z}$.

Definição 4.17. *Considere o sistema auxiliar (4.19)–(4.20). Seja* $\alpha\colon \mathbb{R} \times M^n \to \mathbb{R}$ *uma função tal que, para todo* $(t, W) \in \mathbb{R} \times M^n$, $\partial\alpha/\partial t_+(t, W) \in \mathbb{R}$ *e* $\partial\alpha/\partial W(t, W)$ *existem*[15]. *Definimos então a função* $\dot\alpha\colon \mathbb{R} \times M^n \to \mathbb{R}$ *por*

$$\dot\alpha(t, W) = \frac{\partial\alpha}{\partial t_+}(t, W) + \frac{\partial\alpha}{\partial W}(t, W)\dot W, \qquad \text{para todo } (t, W) \in \mathbb{R} \times M^n,$$

onde $\dot W$ *é como em (4.19)–(4.20). Denominamos* $\dot\alpha$ *de* derivada *de* α ao longo das trajetórias *do sistema auxiliar (4.19)–(4.20).*

Demonstração (do Teorema 4.16). A prova deste resultado segue essencialmente as mesmas linhas de raciocínio utilizadas na demonstração do Teorema 4.11. Faremos, no entanto, uma apresentação independente.

De acordo com a Observação E.2 e a Proposição E.3, basta mostrarmos que o conjunto limite $\Omega(W_q)$ da solução W_q está contido no conjunto E_C.

[15] *Mais precisamente,* $\partial\alpha/\partial t_+(t, W) \in \mathbb{R}$ *denota a derivada parcial à direita de* α *em relação à* t *em* (t, W) *e* $\partial\alpha/\partial W(t, W)$ *denota a derivada parcial de* α *em relação à* W *em* (t, W). *Isto significa que* $\partial\alpha/\partial W(t, W)\colon M^n \to \mathbb{R}$ *é uma aplicação linear contínua. Note que quando* α *é continuamente diferenciável, esta definição coincide com a definição usual de derivada ao longo das trajetórias do sistema auxiliar (4.19)–(4.20) que temos utilizado até o presente momento.*

Em primeiro lugar, como V é uma função linear contínua (veja (4.18)), existe um número real $c > 0$ tal que

$$|V(X)| \leq c\|X\|, \qquad \text{para todo } X \in M^n. \tag{4.37}$$

Além disso, segue de (4.33)–(4.34), (4.35), (4.19)–(4.20) e da compacidade de SU(n) que cada uma das seguintes aplicações

$$\overline{H}_r, X_r, X_r^\dagger, W_q, \dot{X}_r, \dot{X}_r^\dagger, \dot{W}_q, \mathrm{ad}^j_{\overline{H}_r} H_k \colon \mathbb{R} \to M^n, \qquad \text{para todo } j \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq m, \tag{4.38}$$

é limitada.

Considere as aplicações $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b_k^j\colon \mathbb{R} \times M^n \to M^n$, $\beta_k^j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{aligned}
&\alpha(t) = V(W_q(t)), && \text{para todo } t \in \mathbb{R},\\
&b_k^j(t, W) = V(W X_r^\dagger(t)[\mathrm{ad}^j_{\overline{H}_r(t)} H_k] X_r(t)), && \text{para todo } (t, W) \in \mathbb{R} \times M^n,\\
&\beta_k^j(t) = b_k^j(t, W_q(t)), && \text{para todo } t \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

respectivamente, para todo $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$. Mostraremos por indução que

$$\lim_{t\to\infty} \beta_k^j(t) = \lim_{t\to\infty} b_k^j(t, W_q(t)) = 0, \tag{4.39}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$. De (4.18), (4.19)–(4.20), (4.33)–(4.34) e da definição de b_k^0, obtemos que

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, W) &= \sum_{k=1}^{m} [f_k b_k^0(t, W)]^2 \geq 0,\\
\ddot{V}(t, W) &= 2 \sum_{k=1}^{m} f_k^2 b_k^0(t, W) \dot{b}_k^0(t, W),
\end{aligned}$$

onde $f_k \in \mathbb{R}$ não-nulo é como em (4.19) e[16]

$$\dot{b}_k^0(t, W) = V(W X_r^\dagger(t)[\sum_{\ell=1}^{m} f_\ell^2 b_\ell^0(t, W) H_\ell] H_k X_r(t)) - \sin(2\pi t/T_p) b_k^1(t, W),$$

para todo $(t, W) \in \mathbb{R} \times M^n$. Note que b_k^0, $\dot{b}_k^0$, $\dot{V}$ e $\ddot{V}$ são contínuas, para cada $1 \leq k \leq m$. Como $\dot{V}$ é uma função não-negativa, concluímos que α é uma função não-decrescente

[16] Aqui, é necessário utilizar o fato de que $H_1, \ldots H_m \in \mathfrak{su}(n)$ e que a derivada de X_r comuta com '$\dagger$'.

limitada superiormente tal que $\dot{\alpha}$ é continuamente diferenciável e $\ddot{\alpha}$ é limitada (por (4.37) e (4.38)). Assim,

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \lim_{t\to\infty} V(W_q(t)) = \overline{\alpha},$$

onde $\overline{\alpha} \in \mathbb{R}$. Esta relação, juntamente com o Lema de Barbalat (Lema 4.9), estabelece que

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\alpha}(t) = \lim_{t\to\infty} \dot{V}(t, W_q(t)) = \sum_{k=1}^{m} [f_k b_k^0(t, W_q(t))]^2 = 0.$$

Portanto, como $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{R}$ são não-nulos, obtemos que

$$\lim_{t\to\infty} \beta_k^0(t) = \lim_{t\to\infty} V(W_q(t) X_r^\dagger(t) H_k X_r(t)) = 0, \tag{4.40}$$

para cada $1 \leq k \leq m$. Logo, resulta de (4.19)–(4.20) e (4.38) que

$$\lim_{t\to\infty} \dot{W}_q(t) = 0. \tag{4.41}$$

Agora, considere a hipótese de indução

$$\lim_{t\to\infty} \beta_k^j(t) = \lim_{t\to\infty} V(W_q(t) X_r^\dagger(t) [\mathrm{ad}^j_{\overline{H}_r(t)} H_k] X_r(t)) = 0, \tag{4.42}$$

para cada $1 \leq k \leq m$, onde $j \in \mathbb{N}$. Seja $1 \leq k \leq m$. Defina $c_k^j \colon \mathbb{R} \times M^n \to M^n$ por

$$\begin{aligned} c_k^j(t, W) &\triangleq \sin^2(2\pi t/T_p) b_k^j(t, W) \\ &= V(W X_r^\dagger(t) \sin^2(2\pi t/T_p) [\mathrm{ad}^j_{\overline{H}_r(t)} H_k] X_r(t)), \qquad \text{para todo } (t, W) \in \mathbb{R} \times M^n, \end{aligned}$$

com $T_p = T/p$ (veja (4.31)). O propósito de multiplicar b_k^j pela função $\sin^2(2\pi t/T_p)$ é garantir uma certa regularidade de c_k^j para que seja possível aplicar o Lema Barbalat. Vejamos então os detalhes. De (4.34), temos que $\overline{H}_r$ é constante por partes com as descontinuidades em $t = \ell T_p$, para cada $\ell \in \mathbb{Z}$. Assim, c_k^j é continuamente diferenciável em cada $(t, W) \in \mathbb{R} \times M^n$ tal que $t \neq \ell T_p$, com $\ell \in \mathbb{Z}$. Seja $\ell \in \mathbb{Z}$. Em $t = \ell T_p$, temos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin^2(2\pi(\ell T_p + h)/T_p)}{h} = d/dt|_{t=\ell T_p} \sin^2(2\pi t/T_p) = (4\pi/T_p)\sin(0)\cos(0) = 0.$$

Obtemos então de (4.34) que

$$\begin{aligned} d/dt_-|_{t=\ell T_p}(\sin^2(2\pi t/T_p)ad^j_{\overline{H}_r(t)}H_k) &= \lim_{h\to 0-}\frac{\sin^2(2\pi(\ell T_p+h)/T_p)ad^j_{\overline{H}_\ell}H_k}{h} \\ &= [d/dt_-|_{t=\ell T_p}\sin^2(2\pi t/T_p)]ad^j_{\overline{H}_\ell}H_k = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d/dt_+|_{t=\ell T_p}(\sin^2(2\pi t/T_p)ad^j_{\overline{H}_r(t)}H_k) &= \lim_{h\to 0+}\frac{\sin^2(2\pi(\ell T_p+h)/T_p)ad^j_{\overline{H}_{\ell+1}}H_k}{h} \\ &= [d/dt_+|_{t=\ell T_p}\sin^2(2\pi t/T)]ad^j_{\overline{H}_{\ell+1}}H_k = 0, \end{aligned}$$

onde $\overline{H}_\ell, \overline{H}_{\ell+1} \in \{\overline{H}_1, \ldots, \overline{H}_p\}$. Desse modo, mostramos que $\partial c^j_k/\partial t(t,W)$ existe para todo $(t,W) \in \mathbb{R}\times M^n$. Além disso, é uma conseqüência de (4.33)–(4.34) que

$$\begin{aligned} \partial c^j_k/\partial t(t,W) &= V(W\dot{X}^\dagger_r(t)\sin^2(2\pi t/T_p)[\mathrm{ad}^j_{\overline{H}_r(t)}H_k]X_r(t)) \\ &\quad +(4\pi/T_p)V(WX^\dagger_r(t)\cos(2\pi t/T_p)\sin(2\pi t/T_p)[\mathrm{ad}^j_{\overline{H}_r(t)}H_k]X_r(t)) \\ &\quad +V(WX^\dagger_r(t)\sin^2(2\pi t/T_p)[\mathrm{ad}^j_{\overline{H}_r(t)}H_k]\dot{X}_r(t)) \\ &= (4\pi/T_p)V(WX^\dagger_r(t)\cos(2\pi t/T_p)\sin(2\pi t/T_p)[\mathrm{ad}^j_{\overline{H}_r(t)}H_k]X_r(t)) \\ &\quad -V(WX^\dagger_r(t)\sin^3(2\pi t/T_p)[\mathrm{ad}^{j+1}_{\overline{H}_r(t)}H_k]X_r(t)), \end{aligned}$$

para todo $(t,W) \in \mathbb{R}\times M^n$. É fácil ver que $\partial c^j_k/\partial t$ é uma função contínua. De fato, apesar de as aplicações $\mathrm{ad}^j_{\overline{H}_r}H_k, \mathrm{ad}^{j+1}_{\overline{H}_r}H_k$: $\mathbb{R} \to M^n$ serem constante por partes com as descontinuidades nos pontos $t = \ell T_p$, para todo $\ell \in \mathbb{Z}$, a função $\sin(2\pi t/T_p)$ que as multiplica assegura a continuidade do produto. Como $\partial c^j_k/\partial W$ também é contínua, decorre que c^j_k é continuamente diferenciável e

$$\dot{c}^j_k(t,W) = V(WX^\dagger_r(t)d_k(t,W)X_r(t)), \qquad \text{para todo } (t,W) \in \mathbb{R}\times M^n, \tag{4.43}$$

onde

$$\begin{aligned} d_k(t,W) &= \sin^2(2\pi t/T_p)[\textstyle\sum_{\ell=1}^m f^2_\ell b^0_\ell(t,W)H_\ell]\mathrm{ad}^j_{\overline{H}_r(t)}H_k \\ &\quad +(4\pi/T_p)\cos(2\pi t/T_p)\sin(2\pi t/T_p)\mathrm{ad}^j_{\overline{H}_r(t)}H_k \\ &\quad -\sin^3(2\pi t/T_p)\mathrm{ad}^{j+1}_{\overline{H}_r(t)}H_k. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Assim, (4.34) ($\overline{H}_r$ é constante por partes) assegura que $\ddot{c}^j_k$: $\mathbb{R}\times M^n \to M^n$ existe no

sentido mais geral da Definição 4.17 e é dada por

$$\begin{aligned}\ddot{c}_k^j(t,W) &= V(\dot{W}X_r^\dagger(t)d_k(t,W)X_r(t) + W\dot{X}_r^\dagger(t)d_k(t,W)X_r(t) + WX_r^\dagger(t)d_k(t,W)\dot{X}_r(t)) \\ &\quad + V(WX_r^\dagger(t)e_k(t,W)X_r(t)),\end{aligned}$$

para todo $(t,W) \in \mathbb{R} \times M^n$, onde

$$\begin{aligned}e_k(t,W) &= \sin^2(2\pi t/T_p)[\textstyle\sum_{\ell=1}^m f_\ell^2 \dot{b}_\ell^0(t,W)H_\ell]\mathrm{ad}_{\overline{H}_r(t)}^j H_k \\ &\quad + (4\pi/T_p)\cos(2\pi t/T_p)\sin(2\pi t/T_p)[\textstyle\sum_{\ell=1}^m f_\ell^2 b_\ell^0(t,W)H_\ell]\mathrm{ad}_{\overline{H}_r(t)}^j H_k \\ &\quad + (8\pi^2/T_p^2)[\cos^2(2\pi t/T_p) - \sin^2(2\pi t/T_p)]\mathrm{ad}_{\overline{H}_r(t)}^j H_k \\ &\quad - (6\pi/T_p)\cos(2\pi t/T_p)\sin^2(2\pi t/T_p)\mathrm{ad}_{\overline{H}_r(t)}^{j+1} H_k.\end{aligned}$$

Definimos então $\gamma_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\gamma_k(t) \triangleq c_k^j(t, W_q(t)) = \sin^2(2\pi t/T_p)\beta_k^j(t), \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

É claro que γ_k é continuamente diferenciável e que $\delta_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\delta_k(t) = \ddot{c}_k^j(t, W_q(t)), \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

é limitada e contínua por partes em cada intervalo compacto de $\mathbb{R}$. Além disso, $\ddot{\gamma}_k = \delta_k$, conforme a Observação 4.10. Portanto, a hipótese de indução (4.42) e o Lema de Barbalat (Lema 4.9) implicam que

$$\lim_{t\to\infty} \gamma_k(t) = \lim_{t\to\infty} \dot{\gamma}_k(t) = \lim_{t\to\infty} \dot{c}_k^j(t, W_q(t)) = 0.$$

Logo, (4.37), (4.38), (4.40), (4.42) e (4.43)–(4.44) estabelecem que

$$\lim_{t\to\infty} \sin^3(2\pi t/T_p)V(W_q(t)X_r^\dagger(t)[\mathrm{ad}_{\overline{H}_r(t)}^{j+1} H_k]X_r(t)) = 0.$$

Desse modo, concluímos a partir de (4.41) e do Lema E.7 que

$$\lim_{t\to\infty} \beta_k^{j+1}(t) = \lim_{t\to\infty} V(W_q(t)X_r^\dagger(t)[\mathrm{ad}_{\overline{H}_r(t)}^{j+1} H_k]X_r(t)) = 0.$$

Mostramos então a validade de (4.39).

Por fim, é imediato provar que $\Omega(W_{t_0}) \subset E_C$. De fato, pela Observação E.2, temos que

$\Omega(W_{t_0}) \subset \mathrm{SU}(n)$ é um conjunto não-vazio. Logo, (4.39), (4.41) e o Lema E.6 asseguram que $\Omega(W_{t_0}) \subset E_C$, completando assim a demonstração do teorema. □

Neste momento, recapitulamos que quando o sistema de controle (4.1) é T-regular ou p-controlável, sabemos como definir as funções contínuas $u_k^r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq m$, do sistema de referência (4.5) de modo que a solução correspondente X_r seja uma trajetória de referência continuamente diferenciável de período T com $X_r(0) = X_\infty$. Além disso, determinamos critérios algébricos para que (4.1) seja T-regular ou p-controlável e estabelecemos os resultados de convergência de tipo-Lyapunov do Teorema 4.11 e do Teorema 4.16.

Resta-nos agora determinar funções contínuas por partes $v_k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq m$, que asseguram a validade de (4.10) para o sistema (4.8). Isto é o que descreveremos na seqüência. Mostraremos como que o Teorema 4.20 apresentado logo mais adiante, o qual é o principal resultado de convergência de tipo-Lyapunov estabelecido na Parte II desta pesquisa, juntamente com alguns resultados bem conhecidos de álgebra linear e argumentos topológicos elementares em espaços de Banach, permite formular um algoritmo que obtém, em um número finito de passos, as funções desejadas $v_1, \ldots, v_m$. A estratégia de controle que propomos para solucionar o problema de planejamento periódico para o sistema (4.1) é então sintetizada no Teorema 4.23.

Para demonstrarmos o Teorema 4.20 supramencionado, necessitamos do lema dado abaixo, que foi inspirado no método de estabilização pela condição *ad* (*ad-condition*) desenvolvido em [47]. Observamos que as propriedades (4.13) e (4.30), referentes à T-regularidade e à p-controlabilidade do sistema de controle (4.1), respectivamente, desempenham um papel fundamental na demonstração deste lema.

Lema 4.18. *Suponha que o sistema de controle (4.1) é T-regular ou p-controlável. Dado $q = (t_0, W_{t_0}) \in \mathbb{R} \times SU(n)$, seja $W_q\colon \mathbb{R} \to SU(n)$ a solução do sistema (4.19)–(4.20) com condição inicial $W_q(t_0) = W_{t_0}$. Então:*

1. $\lim_{t\to\infty} V(W_q(t)X_r^\dagger(t)H_kX_r(t)) = 0$, *para cada* $1 \leq k \leq m$;

2. $\lim_{t\to\infty} d(W_q(t), F) = 0$, *$I \in F$ e $E_R \cup E_C \subset F$, onde*

$$F = \{W \in SU(n) : V(W) = \sum_{i=1}^{n} \Re(\lambda_i),\ \textit{onde } \lambda_i \in \mathbb{C} \textit{ são tais que } |\lambda_i| = 1,$$
$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \Im(\lambda_1) = \cdots = \Im(\lambda_n)\}$$

e E_R, E_C são como no Teorema 4.11 e no Teorema 4.16, respectivamente.

Observação 4.19. *Seja*

$$\mathbf{T} = \{W \in M^n : W = diag(z_1, \ldots, z_n),\ \textit{onde} \prod_{i=1}^{n} z_i = 1,\ |z_i| = 1,\ z_i \in \mathbb{C}\} \subset SU(n)$$

o toro maximal usual de $SU(n)$ [2, Proposição 10.10]. Considere o conjunto

$$\mathbf{S} = \{W \in M^n : W = diag(z, \ldots, z),\ \textit{onde } z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\} \subset SU(n).$$

Note que $\mathbf{S} \subset \mathbf{T} \subset SU(n)$ e $\mathbf{S} \subset F \subset SU(n)$. Se $W \in SU(n)$, então existem $M \in SU(n)$ e $D \in \mathbf{T}$ tais que $W = MDM^\dagger$ [2, Teorema 10.13] (veja também [59, Teorema 13.8 e Teorema 13.16]).

Demonstração. Se o sistema (4.1) é T-regular, segue do Teorema 4.11 que é suficiente mostrarmos a inclusão $E_R \subset F$. E, se (4.1) é p-controlável, o Teorema 4.16 implica que basta demonstrarmos que $E_C \subset F$.

Seja $W \in E_R \cup E_C \subset \mathrm{SU}(n)$. Pela Observação 4.19, temos que

$$W = M\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)M^\dagger,$$

onde $M \in \mathrm{SU}(n)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ e $|\lambda_i| = 1$. Assim, por (4.18),

$$\begin{aligned}
&V(W) = \sum_{i=1}^{n} \Re(\lambda_i),\\
&V(WX_\infty^\dagger B_k^j(0)X_\infty) = V(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)(X_\infty M)^\dagger B_k^j(0)(X_\infty M)) = 0,\\
&V(WX_\infty^\dagger[\mathrm{ad}_{\overline{H}_\ell}^j H_k]X_\infty) = V(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)(X_\infty M)^\dagger[\mathrm{ad}_{\overline{H}_\ell}^j H_k](X_\infty M)) = 0,
\end{aligned}$$

para cada $j \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le m$, $1 \le \ell \le p$, onde $B_k^j(0)$ e $\overline{H}_\ell$ são como em (4.14) e (4.34), respectivamente. Como $X_\infty M$ é unitária, é imediato que a aplicação N: $\mathfrak{su}(n) \to \mathfrak{su}(n)$

definida por

$$N(Y) = (X_\infty M)^\dagger Y (X_\infty M), \qquad \text{para todo } Y \in \mathfrak{su}(n),$$

é um isomorfismo linear sobrejetivo.

Agora, se (4.1) é T-regular, então (4.13) é satisfeita e $V(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)X) = 0$, para $X \in \mathfrak{su}(n)$. E, quando (4.1) é p-controlável, (4.30) é válida e $V(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)X) = 0$, para todo $X \in \mathfrak{su}(n)$. Suponha então que (4.1) é T-regular ou p-controlável. Assim,

$$V(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)D_k) = 0,$$

para cada $1 \leq k \leq n$, onde

$$\begin{aligned}
D_1 &= \mathrm{diag}(\imath, -\imath, 0, \ldots, 0),\\
D_2 &= \mathrm{diag}(0, \imath, -\imath, 0, \ldots, 0),\\
&\vdots\\
D_{n-1} &= \mathrm{diag}(0, \ldots, \imath, -\imath),\\
D_n &= \mathrm{diag}(\imath, 0, \ldots, 0, -\imath)
\end{aligned}$$

são as matrizes diagonais canônicas de $\mathfrak{su}(n)$. A partir da estrutura diagonal de $D_1, \ldots, D_n$, concluímos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ devem satisfazer

$$\Im(\lambda_1) = \cdots = \Im(\lambda_n),$$

Isto implica que $W \in F$. Portanto, $E_R \cup E_C \subset F$. □

O lema anterior e as propriedades (4.22) da função de tipo-Lyapunov $V = \Re(\mathrm{tr}(W))$, estabelecem o importante resultado de convergência de tipo-Lyapunov para o sistema auxiliar (4.19)–(4.20) que apresentamos em seguida. É com base neste resultado que formularemos o algoritmo mencionado anteriormente.

Teorema 4.20. *Sejam $T > 0$ e $X_\infty \in SU(n)$. Suponha que o sistema de controle (4.1) é T-regular ou p-controlável. Dado $q = (t_0, W_{t_0}) \in \mathbb{R} \times SU(n)$, seja W_q: $\mathbb{R} \to SU(n)$ a solução do sistema auxiliar (4.19)–(4.20) com condição inicial $W_q(t_0) = W_{t_0}$. Então:*

1. $\lim_{t\to\infty} V(W_q(t)X_r^\dagger(t)H_kX_r(t)) = 0, \quad$ *para cada* $1 \leq k \leq m$;

2. *O conjunto*

$$G = \{x \in \mathbb{R} : x = \sum_{i=1}^{n} \Re(\lambda_i), \text{ onde } \lambda_i \in \mathbb{C} \text{ são tais que } |\lambda_i| = 1, \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \\ \Im(\lambda_1) = \cdots = \Im(\lambda_n)\}.$$

é finito, $n \in G$ e $n = \max(G)$. Além disso, sendo[17] *δ o elemento maximal do conjunto $G \setminus \{n\}$, temos que*

$$V(W_{t_0}) > \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} W_q(t) = I.$$

Observação 4.21. *Note que $V(\mathbf{S}) \subset V(F) \subset G$, onde $F \subset SU(n)$ é como no Lema 4.18 e $\mathbf{S} \subset SU(n)$ é como na Observação 4.19. Além disso, é fácil ver que*

$$V(\mathbf{S}) = \{x \in \mathbb{R} : x = n\Re(z), \text{ onde } z \in \mathbb{C}, \ z^n = 1\} \subset G.$$

Ressaltamos que o conjunto G pode ser determinado com base na demonstração do Teorema 4.20 apresentada na seqüência. Para $n = 2$, temos que $V(\mathbf{S}) = G = \{-2, 2\}$ e, para $n = 4$, $V(\mathbf{S}) = G = \{-4, 0, 4\}$. No entanto, nem sempre é verdade que $V(\mathbf{S}) = G$. Por exemplo, para $n = 3$, $V(\mathbf{S}) = \{-3/2, 3\}$ e $G = \{-3/2, -1, 3\}$.

Demonstração. É claro que $n \in G$ e $n = \max(G)$. Primeiramente, mostraremos que G é um conjunto finito. Seja $x \in G$. Existem então $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tais que $x = \sum_{j=1}^{n} \Re(\lambda_j)$ e

1. $\prod_{j=1}^{n} \lambda_j$;
2. $|\lambda_j| = 1$;
3. $\Im(\lambda_1) = \cdots = \Im(\lambda_n)$.

A propriedade 2 implica que $\lambda_j = e^{\imath\theta_j}$, onde $\theta_j \in \mathbb{R}$, e resulta da propriedade 3 que $\lambda_j = \lambda_1 = e^{\imath\theta_1}$ ou $\lambda_j = e^{\imath(\pi-\theta_1)}$, para cada $1 \leq j \leq n$. Seja n_1 o número de $j \in \{1, \ldots, n\}$ em que $\lambda_j = \lambda_1$. Defina $n_2 = n - n_1$. Assim,

$$x = \sum_{j=1}^{n} \Re(\lambda_j) = n_1 \cos(\theta_1) + n_2 \cos(\pi - \theta_1) = (n_1 - n_2)\cos(\theta_1),$$

[17] Neste teorema, consideramos que $\max(\{\ \}) \triangleq -\infty$.

com $n_1, (n_2+1) \in \{1, \ldots, n\}$ e $n_1 + n_2 = n$. Se $n_1 = n_2$, então $x = 0$. Desse modo, assuma que $n_1 \neq n_2$. A partir da propriedade 1, obtemos que

$$e^{\imath n_1 \theta_1} e^{\imath n_2 (\pi - \theta_1)} = e^{\imath (n_1 \theta_1 + n_2 (\pi - \theta_1))} = 1.$$

Portanto, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n_1\theta_1 + n_2(\pi - \theta_1) = 2k\pi$. Esta relação implica que

$$\theta_1 = \frac{(2k - n_2)\pi}{n - 2n_2}.$$

Observamos que n_1, n_2, k dependem de $x \in G$ e que n_2, $n_1 - n_2$ podem assumir apenas um número finito de valores. Se mostrarmos que $\cos(\theta_1)$ pode assumir apenas um número finito de valores, então teremos provado que o mesmo é válido para $x \in G$, o que implica que G é um conjunto finito. É evidente que a função $\eta\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\eta(\ell) = \cos\left(\frac{(2\ell - n_2)\pi}{n - 2n_2}\right), \qquad \text{para todo } \ell \in \mathbb{Z},$$

tem período $|n - 2n_2| > 0$. Assim, os valores assumidos por $\cos(\theta_1)$ devem ser em número finito.

Agora, demonstraremos o resultado de convergência de W_q. Por (4.22), dada uma matriz $X \in \mathrm{SU}(n)$, temos que

$$\begin{aligned} &n \geq V(X) \geq -n, \\ &V(X) = n \Leftrightarrow X = I. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Seja $\delta = \max(G \setminus \{n\})$. Logo,

$$\delta < x \leq n \Rightarrow x = n, \qquad \text{para todo } x \in G. \tag{4.46}$$

Suponha que $V(W_{t_0}) > \delta$. Como SU(n) é um conjunto compacto em M^n e $V\colon M^n \to \mathbb{R}$ é contínua (veja (4.18)), decorre que a restrição $V|\mathrm{SU}(n)$ é uniformemente contínua. Defina a função $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\alpha(t) = V(W_q(t)), \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Relembre que (veja (4.21)), por construção,

$$\dot{V}(t,W) = \sum_{k=1}^{m} a_k(t,W)^2 \geq 0, \qquad \text{para todo } (t,W) \in \mathbb{R} \times M^n,$$

onde a_k é como em (4.20). Assim, $\dot{V}$ é contínua. Devido ao fato de $\dot{V}$ ser uma função não-negativa, concluímos que α é uma função não-decrescente. Portanto,

$$V(W_q(t)) \geq V(W_{t_0}) > \delta, \qquad \text{para todo } t \geq t_0.$$

A continuidade uniforme de $V|\mathrm{SU}(n)$ implica que existe um número real $\mu > 0$ tal que

$$\|X - W_q(t)\| < \mu \Rightarrow V(X) > \delta, \qquad \text{para todo } t \geq t_0 \text{ e todo } X \in \mathrm{SU}(n) \tag{4.47}$$

(de fato, escolha $\epsilon = V(W_{t_0}) - \delta > 0$). O resultado de convergência de W_q do Lema 4.18 significa que

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \overline{T} \in \mathbb{R} \; \forall t \geq \overline{T} \; \exists \beta(t) \in F \text{ t.q. } \|\beta(t) - W_q(t)\| < \epsilon.$$

Seja $\epsilon > 0$ e defina $\overline{\epsilon} = \min(\epsilon, \mu)$. Logo,

$$\forall t \geq \overline{T} \; \exists \beta(t) \in F \text{ t.q. } \|\beta(t) - W_q(t)\| < \overline{\epsilon} \leq \mu,$$

onde $\overline{T} \in \mathbb{R}$. Defina $\widetilde{T} = \max(\overline{T}, t_0)$ e seja $t \geq \widetilde{T}$. Como $\beta(t) \in F \subset \mathrm{SU}(n)$ e $V(F) \subset G$, (4.47) fornece que

$$\delta < V(\beta(t)) \in G.$$

Entretanto, $\delta < V(\beta(t)) \leq n$, por (4.45). Desse modo, é uma conseqüência de (4.46) que $V(\beta(t)) = n$. Obtemos então que $\beta(t) = I$ (veja (4.45)). Acabamos de mostrar que

$$\lim_{t \to \infty} W_q(t) = I.$$

□

Veremos agora como o teorema anterior permite formular um algoritmo que obtém, em um número finito de passos, funções contínuas por partes v_k: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq m$, que asseguram a validade de (4.10) para o sistema (4.8), resolvendo, assim, o problema de planejamento periódico de trajetórias. Observe que o resultado de convergência do Teorema 4.20 não é global, isto é, existe uma região de convergência local para o sistema

auxiliar (4.19)–(4.20) que é determinada por $V(W_{t_0}) > \delta$. O propósito do algoritmo é, à grosso modo, garantir uma convergência global através de um número finito de translações à esquerda do estado W do sistema auxiliar. Estas translações fazem com que sempre estejamos dentro da região de convergência a cada passo do algoritmo. Portanto, tudo se passa como se o algoritmo proposto contornasse as singularidades da função de tipo-Lyapunov $V(W) = \Re(tr(W))$.

Suponha que $V(X_\infty) > \delta$. No Teorema 4.20, escolhemos $q = (0, X_\infty) \in \mathbb{R} \times \mathrm{SU}(n)$. Portanto,

$$\lim_{t\to\infty} W_q(t) = I.$$

Assim, as realimentações contínuas v_k: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definidas por (veja (4.6) e (4.20))

$$v_k(t) \triangleq f_k a_k(t, Z(t)) = f_k^2 V(X^\dagger(t) H_k X_r(t)), \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}_+,$$

$1 \le k \le m$, onde Z: $\mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(n)$ é a solução correspondente de (4.8) e X: $\mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(n)$ a solução do sistema de controle (4.1) com as entradas contínuas $u_k(t) = u_k^r(t) - v_k(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ (veja (4.6) e (4.7)), asseguram que $Z(t) = X^\dagger(t) X_r(t) = W_q(t)$, para $t \in \mathbb{R}_+$. De fato, basta comparar (4.8) com o sistema auxiliar (4.19)–(4.20). Logo, (4.10) é atendida e o Teorema 4.20 implica também que

$$\lim_{t\to\infty} v_k(t) = \lim_{t\to\infty} f_k^2 V(X^\dagger(t) H_k X_r(t)) = \lim_{t\to\infty} V(W_q(t) X_r^\dagger(t) H_k X_r(t)) = 0,$$

$1 \le k \le m$. Note que os $f_k^2 > 0$ podem ser vistos como "ganhos de realimentação".

Assuma então que $V(X_\infty) \le \delta$. Para este caso, iremos determinar, com base em argumentos de continuidade, um caminho (contínuo) de extremidades X_∞ e I adequado que, em um certo sentido, reduz o problema à situação em que $V(X_\infty) > \delta$. Para isto, a idéia principal é encontrar um caminho $\overline{Z}$: $[0,1] \to \mathrm{SU}(n)$ de extremidades $\overline{Z}(0) = X_\infty$ e $\overline{Z}(1) = I$, e obter $0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{N-1} < \theta_N = 1$ de modo que

$$V(\overline{Z}(\theta_{\ell+1})^\dagger \overline{Z}(\theta_\ell)) > \delta, \qquad \text{para todo } 0 \le \ell \le N-1.$$

Seguirá então do Teorema 4.20 que

$$\lim_{t\to\infty} \overline{Z}(\theta_\ell) W_\ell(t) = \overline{Z}(\theta_\ell), \qquad \text{para todo } 1 \le \ell \le N,$$

onde $W_\ell\colon \mathbb{R} \to \mathrm{SU}(n)$ é a solução do sistema auxiliar (4.19)–(4.20) com condição inicial

$$W_\ell(T_\ell) = \overline{Z}(\theta_\ell)^\dagger \overline{Z}(\theta_{\ell-1}) \in \mathrm{SU}(n)$$

e $0 = T_1 < \cdots < T_{N+1}$ são tais que

$$W_\ell(T_{\ell+1}) \approx I.$$

À grosso modo, o próximo passo será "colar" juntas as N translações à esquerda $\overline{Z}(\theta_1)W_1, \ldots, \overline{Z}(\theta_N)W_N$ de maneira apropriada de modo a definirmos uma solução $(Z(t), v_1(t), \ldots, v_m(t))$, $t \in \mathbb{R}_+$, do sistema (4.8) que satisfaz (4.10). Ressaltamos que, para cada $1 \leq \ell \leq N$, tudo se passa como se estivéssemos no caso $V(X_\infty) > \delta$. Na seqüência, iremos formalizar estes argumentos em detalhe e determinar um algoritmo que obtém, em N passos, funções contínuas $v_k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq m$, tais que (4.10) é válida.

Pela Observação 4.19, temos que

$$X_\infty = M^\dagger \mathrm{diag}(e^{\imath\lambda_1}, \ldots, e^{\imath\lambda_n})M, \tag{4.48}$$

onde $M \in \mathrm{SU}(n)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$. Considere o caminho $\overline{Z}\colon [0,1] \to \mathrm{SU}(n)$ de extremidades $\overline{Z}(0) = X_\infty$ e $\overline{Z}(1) = I$ definido por

$$\overline{Z}(\theta) = M^\dagger \mathrm{diag}(e^{\imath\lambda_1(1-\theta)}, \ldots, e^{\imath\lambda_n(1-\theta)})M, \qquad \text{para todo } \theta \in [0,1].$$

Sejam $a, b \in [0,1]$. Logo,

$$\overline{Z}(b)^\dagger \overline{Z}(a) = M^\dagger \mathrm{diag}(e^{\imath\lambda_1(b-a)}, \ldots, e^{\imath\lambda_n(b-a)})M$$

e, portanto,

$$V(\overline{Z}(b)^\dagger \overline{Z}(a)) = \sum_{j=1}^n \cos(\lambda_j(b-a)).$$

Como a função $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\gamma(\theta) = \sum_{j=1}^n \cos(\lambda_j\theta), \qquad \text{para todo } \theta \in [0,1],$$

é contínua com $\gamma(0) = n$, sabemos que existe um número real $\nu > 0$ tal que

$$|\theta| < \nu \Rightarrow \gamma(\theta) > \delta, \qquad \text{para todo } \theta \in [0,1]$$

(de fato, escolha $\epsilon = n - \delta > 0$). Assim,

$$|b - a| < \nu \Rightarrow V(\overline{Z}(b)^\dagger \overline{Z}(a)) > \delta, \qquad \text{para todo } a, b \in [0, 1],$$

e existe $\eta \in \mathbb{N}$ não-nulo tal que

$$V(\overline{Z}_{\ell+1}^\dagger \overline{Z}_\ell) = \sum_{j=1}^{n} \cos(\lambda_j \Delta) > \delta, \qquad \text{para todo } N \geq \eta \text{ e cada } 0 \leq \ell \leq N-1, \tag{4.49}$$

onde $\overline{Z}_\ell = \overline{Z}(\ell\Delta)$, para cada $0 \leq \ell \leq N$, com $\Delta = 1/N$. Observe que $\overline{Z}_0 = \overline{Z}(0) = X_\infty$ e $\overline{Z}_N = \overline{Z}(1) = I$. Relembramos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ são como em (4.48).

Seja $N \geq \eta$ e considere a função contínua β: $M^n \times M^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\beta(X, Y) = V(Y^\dagger X), \qquad \text{para todo } (X, Y) \in M^n \times M^n.$$

Como $\mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(n)$ é um conjunto compacto em $M^n \times M^n$, a restrição $\beta|(\mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(n))$ é uniformemente contínua. Portanto, (4.49) implica que existe $\mu > 0$ tal que

$$\|X - \overline{Z}_\ell\| < \mu \Rightarrow V(\overline{Z}_{\ell+1}^\dagger X) > \delta, \qquad \text{para todo } X \in \mathrm{SU}(n) \text{ e cada } 0 \leq \ell \leq N-1 \tag{4.50}$$

(de fato, escolha $\epsilon = \sum_{j=1}^{n} \cos(\lambda_j \Delta) - \delta > 0$ e considere a norma do *sup* em $M^n \times M^n$).

O algoritmo que necessitamos para resolver o problema de controle considerado é descrito abaixo.

Algoritmo 4.22. *Seja $X_\infty \in SU(n)$. Escolha qualquer $N \in \mathbb{N}$ não-nulo de maneira que (4.49) é satisfeita. Defina $T_1 = 0$, $W_0(0) = I$ e $T_{N+1} = +\infty$. Para cada $1 \leq \ell \leq N-1$, escolha um número real positivo $T_{\ell+1} > T_\ell$ tal que*

$$V(\overline{Z}_{\ell+1}^\dagger \overline{Z}_\ell W_\ell(T_{\ell+1})) > \delta,$$

onde δ é como no Teorema 4.20 e W_ℓ: $\mathbb{R} \to SU(n)$ é a solução do sistema (4.19)–(4.20) com condição inicial

$$W_\ell(T_\ell) = \overline{Z}_\ell^\dagger \overline{Z}_{\ell-1} W_{\ell-1}(T_\ell) \in SU(n).$$

Para $1 \leq \ell \leq N$, *defina (veja (4.20))*

$$\begin{aligned} Z(t) &= \overline{Z}_\ell W_\ell(t) \in SU(n), && \textit{para } t \in [T_\ell, T_{\ell+1}), \\ v_k(t) &\triangleq f_k a_k(t, W_\ell(t)) = f_k^2 V(\overline{Z}_\ell^\dagger Z(t) X_r^\dagger(t) H_k X_r(t)) \\ &= f_k^2 V(\overline{Z}_\ell^\dagger X^\dagger(t) H_k X_r(t)) \in \mathbb{R}, && \textit{para } t \in [T_\ell, T_{\ell+1}),\ 1 \leq k \leq m, \end{aligned}$$

ou, de maneira equivalente,

$$\begin{aligned} Z(t) &= \gamma(t) W_\ell(t) \in SU(n), && \textit{para } t \in \mathbb{R}_+, \\ v_k(t) &= f_k^2 V(\gamma(t)^\dagger Z(t) X_r^\dagger(t) H_k X_r(t)), \\ &= f_k^2 V(\gamma(t)^\dagger X^\dagger(t) H_k X_r(t)) \in \mathbb{R}, && \textit{para } t \in \mathbb{R}_+,\ 1 \leq k \leq m, \end{aligned}$$

onde $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to SU(n)$ *é a aplicação constate por partes dada por*

$$\gamma(t) = \begin{cases} \overline{Z}_1, & \textit{se } t \in [0, T_2), \\ \overline{Z}_2, & \textit{se } t \in [T_2, T_3), \\ \vdots & \\ \overline{Z}_{N-1}, & \textit{se } t \in [T_{N-1}, T_N), \\ \overline{Z}_N = I, & \textit{se } t \in [T_N, +\infty). \end{cases}$$

É importante esclarecermos alguns pontos. Primeiramente, com base na linha de raciocínio que precede o Algoritmo 4.22, sabemos que sempre existe $N \in \mathbb{N}$ não-nulo tal que (4.49) é verdade. Além disso, o Teorema 4.20 e a propriedade (4.50) asseguram que $T_{\ell+1} > T_\ell$ sempre pode ser escolhido conforme exigido no Algoritmo 4.22, para cada $1 \leq \ell \leq N-1$. É também evidente que a aplicação contínua $Z\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(n)$ e as funções contínuas por partes $v_k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq m$, determinadas pelo algoritmo são tais que Z é a solução (continuamente diferenciável por partes) correspondente do sistema (4.8). De fato, compare (4.8) com o sistema auxiliar (4.19)–(4.20). Temos também que $Z(t) = X^\dagger(t) X_r(t)$, para $t \in \mathbb{R}_+$, onde $X\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(n)$ é a solução do sistema de controle (4.1) com as entradas contínuas por partes $u_k(t) = u_k^r(t) - v_k(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ (veja (4.6), (4.7), (4.12) e (4.32)). Note, ainda, que cada v_k possui no máximo $N-1$ pontos de descontinuidade. Mais precisamente, v_k é possivelmente descontínua somente nos instantes $t = T_\ell$, para $2 \leq \ell \leq N$. Por fim, como

$$V(\overline{Z}_N^\dagger \overline{Z}_{N-1} W_{N-1}(T_N)) = V(\overline{Z}_{N-1} W_{N-1}(T_N)) > \delta,$$

o Teorema 4.20 implica que

$$\lim_{t\to\infty} v_k(t) = \lim_{t\to\infty} f_k^2 V(W_N(t)X_r^\dagger(t)H_kX_r(t)) = \lim_{t\to\infty} f_k^2 V(X^\dagger(t)H_kX_r(t)) = 0,$$
$$\lim_{t\to\infty} Z(t) = \lim_{t\to\infty} W_N(t) = I,$$

pois $Z(t) = X^\dagger(t)X_r(t) = W_N(t)$, para $t \geq T_N$. Desse modo, as funções contínuas por partes v_k: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ determinadas pelo Algoritmo 4.22 são tais que (4.10) é satisfeita.

Mostramos assim a existência de uma estratégia de controle que soluciona o problema de planejamento periódico de trajetórias para o sistema (4.1). Esta estratégia é sintetizada no teorema abaixo.

Teorema 4.23. *Sejam $T > 0$, $X_\infty \in SU(n)$ e $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{R}$ não-nulos. Suponha que o sistema de controle (4.1) é T-regular ou p-controlável. Então, existem leis de controle limitadas e contínuas por partes u_k: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq m$, tais que*

$$\lim_{t\to\infty}(X(t) - X_r(t)) = 0. \tag{4.51}$$

Mais precisamente, se $V(X_\infty) > \delta$, onde δ é como no Teorema 4.20, então as entradas contínuas

$$u_k(t) = u_k^r(t) - f_k^2 V(X^\dagger(t)H_kX_r(t)), \qquad \text{para } t \in \mathbb{R}_+,\ 1 \leq k \leq m,$$

obtidas por integração numérica, garantem que (4.51) é atendida e satisfazem

$$\lim_{t\to\infty}(u_k^r(t) - u_k(t)) = \lim_{t\to\infty} f_k^2 V(X^\dagger(t)H_kX_r(t)) = 0, \qquad \text{para } 1 \leq k \leq m. \tag{4.52}$$

Caso contrário, quando $V(X_\infty) \leq \delta$, a execução do Algoritmo 4.22 determina $N \in \mathbb{N}$ não-nulo, $\overline{Z}_1, \ldots, \overline{Z}_N \in SU(n)$, $T_1, \ldots, T_N \in \mathbb{R}_+$, os quais dependem[18] *do período T e do estado objetivo X_∞, com $\overline{Z}_N = I$, $T_1 = 0$ e $T_{\ell+1} > T_\ell$, para $1 \leq \ell \leq N-1$, de modo que as entradas contínuas por partes dadas por*

$$u_k(t) = u_k^r(t) - f_k^2 V(\gamma(t)^\dagger X^\dagger(t)H_kX_r(t)), \qquad \text{para } t \in \mathbb{R}_+,\ 1 \leq k \leq m,$$

[18] *Na realidade, N, $\overline{Z}_1, \ldots, \overline{Z}_N$, dependem apenas de X_∞.*

onde

$$\gamma(t) = \begin{cases} \overline{Z}_1, & \text{se } t \in [0, T_2), \\ \overline{Z}_2, & \text{se } t \in [T_2, T_3), \\ \vdots & \\ \overline{Z}_{N-1}, & \text{se } t \in [T_{N-1}, T_N), \\ \overline{Z}_N = I, & \text{se } t \in [T_N, +\infty), \end{cases}$$

asseguram a validade de (4.51), satisfazem (4.52) e são possivelmente descontínuas somente nos instantes $t = T_\ell$, para $2 \leq \ell \leq N$.

Em particular, o problema de planejamento periódico de trajetórias sempre possui solução quando o sistema de controle (4.1) é controlável em $SU(n)$ ou p-controlável.

Observação 4.24. *Relembramos que mesmo quando sabemos que o sistema de controle (4.1) é T-regular, podemos não ter a nossa disposição expressões analíticas explícitas para as funções contínuas u_k^r do sistema de referência (4.5) que determinam as entradas u_k do sistema no teorema acima. Isto ocorre, por exemplo, quando (4.1) é controlável em $SU(n)$, ou seja, $Lie(H) = \mathfrak{su}(n)$. Neste caso, o Método do Retorno de Coron implica que o sistema é regular (veja o Teorema 4.4). No entanto, o Método do Retorno garante apenas a existência das funções u_k^T que definem u_k^r em (4.12), sem fornecer expressões analíticas explícitas para as mesmas. Felizmente, quando o sistema (4.1) é p-controlável, no qual estabelecemos o critério algébrico da Proposição 4.15, tanto as funções u_k^r do sistema de referência (4.5) quanto a própria trajetória de referência X_r correspondente, são dadas analítica e explicitamente em (4.32) e (4.35), respectivamente.*

Observação 4.25. *Note que quando o estado X do sistema (4.1) pode ser medido continuamente, o Teorema 4.23 estabelece, na realidade, que a execução* off-line *do Algoritmo 4.22 determina as seguintes leis de controle*

$$u_k = u_k((T, X_\infty), X, t) = u_k^r(t) - f_k^2 V(\gamma(t)^\dagger X^\dagger H_k X_r(t)),$$

ou seja, leis de controle dependentes do período T, do estado objetivo X_∞, do estado X do sistema e do tempo t, que solucionam o problema de planejamento periódico de trajetórias caso (4.1) seja regular ou p-controlável (note que a aplicação γ depende do par (T, X_∞) e deve ser obtida off-line*). Desse modo, se não é possível medirmos o estado X continuamente, como na situação em que (4.1) corresponde ao sistema propagador do sistema de controle (4.3), as entradas limitadas e contínuas por partes $u_k(t) = u_k((T, X_\infty), X(t), t)$ desejadas deverão ser obtidas por integração numérica.*

A solução proposta para o problema de planejamento periódico de trajetórias para sistemas (4.1) que são regulares, foi publicada nos anais do congresso "*48th IEEE Conference on Decision and Control – CDC*" com o artigo [112], o qual pode ser visto no Apêndice G.

Ressaltamos que tanto o resultado de convergência de tipo-Lyapunov do Teorema 4.20 quanto o Algoritmo 4.22 são contribuições da presente pesquisa em relação à Parte II.

Na próxima seção, aplicaremos a estratégia de controle desenvolvida a um sistema quântico formado duas partículas de spin-1/2, com o objetivo de gerar a porta C–NOT.

4.4 Aplicação em mecânica quântica

Após algumas aproximações (aproximação do comprimento de onda longo (*long wavelength approximation*) e considerando baixa intensidade do campo) e a mudança de coordenadas global linear

$$\psi = T\phi \in \mathbb{C}^4,$$

onde $T \in M^4$ é a matriz unitária dada por

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \iota & 1 & 0 \\ \iota & 0 & 0 & -1 \\ \iota & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\iota & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

um sistema quântico consistindo de duas partículas de spin-1/2 acopladas com interação de Heisenberg e controladas por um campo eletromagnético externo, pode ser modelado pela seguinte equação de Schrödinger [23, Capítulo 2 e Seção 5.5], [122], [21],

$$\hbar\dot{\psi} = (JD + e_x\gamma_1 D_x + e_y\gamma_1 D_y + e_z\gamma_1 D_z)\psi, \quad \psi(0) = \psi_0 \in \mathbb{S}^3, \tag{4.53}$$

onde $\psi \in \mathbb{C}^4$ é o estado, as entradas $e_x, e_y, e_z \in \mathbb{R}$ são as componentes x, y, z do campo eletromagnético, respectivamente, $\mathbb{S}^3$ é a esfera unitária em $\mathbb{C}^4$, $\hbar = h/2\pi$, h é a constante de Planck, $J \in \mathbb{R}$ é a constante de acoplamento entre as duas partículas, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ são as razões giromagnéticas (*gyromagnetic ratios*) da primeira e da segunda partícula,

respectivamente, $r = \gamma_2/\gamma_1$, e $D, D_x, D_y, D_z \in \mathfrak{su}(n)$ são dadas respectivamente por

$$
\begin{aligned}
D &= \operatorname{diag}(3\imath, -\imath, -\imath, -\imath), \\
D_x &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (r-1) \\ 0 & 0 & -(1+r) & 0 \\ 0 & (1+r) & 0 & 0 \\ -(r-1) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
D_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & (r-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r+1) \\ -(r-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1+r) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
D_z &= \begin{pmatrix} 0 & (r-1) & 0 & 0 \\ -(r-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(r+1) \\ 0 & 0 & (r+1) & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

Assumimos, ainda, que o acoplamento entre as duas partículas é fraco, no sentido de [57, pág. 363]. Observamos que quando as duas partículas são heteronucleares, esta hipótese sempre é atendida [57, pág. 366]. Em [62, págs. 8 e 137], são apresentados diversos valores experimentais de razões giromagnéticas e de constantes de acoplamento. Os primeiros são da ordem de 10^7–10^8 rad $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{s}^{-1}$ e os últimos da ordem de 10–100 Hz. Além disso, $\hbar \cong 1,054 \times 10^{-34}$ Js (Joule $\cdot$ segundo) [57, pág. 6].

É uma conseqüência dos princípios da mecânica quântica que a equação de Schrödinger (4.53) modela a dinâmica do sistema apenas enquanto o sistema permanece isolado de medições do seu estado. Mais precisamente, a medição causa um colapso no (redução do) estado do sistema, e a relação entre o estado no momento da medida e o imediatamente posterior à mesma não pode ser deduzida da equação diferencial determinística (4.53), mas sim de maneira probabilística pelo Postulado da Projeção da teoria da mecânica quântica (veja, por exemplo, [117]). Concluímos, assim, que não é possível aplicar diretamente técnicas de controle por realimentação de estado.

Temos que o sistema propagador de (4.53) é definido por

$$
\hbar \dot{Z} = (JD + e_x\gamma_1 D_x + e_y\gamma_1 D_y + e_z\gamma_1 D_z)Z, \quad Z(0) = I, \tag{4.55}
$$

onde $Z \in M^4$. Relembre que se as entradas e_x, e_y, e_z são especificadas e $Z\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(4)$ é a solução correspondente, então a solução $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{S}^3$ de (4.53) é dada por

$$\psi(t) = Z(t)\psi_0 \in \mathbb{S}^3, \qquad \text{para } t \in \mathbb{R}_+.$$

Os resultados de [21] estabelecem que, se $r \neq 1$ em (4.54), então (4.55) é controlável em SU(4), ou seja, $\mathrm{Lie}(\{D, D_x, D_y, D_z\}) = \mathfrak{su}(4)$. No entanto, o simples fato de sabermos que (4.55) é controlável em SU(4) não significa que, dado $Z_f \in \mathrm{SU}(4)$, saibamos especificar entradas $e_x, e_y, e_z\colon [0, t_f] \to \mathbb{R}$ que conduzem o estado Z de (4.55) da condição inicial $Z(0) = I$ até $Z(t_f) = Z_f$ em algum instante de tempo $t_f > 0$. Nosso objetivo é a determinação de leis de controle $e_x, e_y, e_z\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ que conduzem o estado Z a partir de $Z(0) = I$ até uma vizinhança arbitrariamente pequena de $Z_f \in \mathrm{SU}(4)$ em algum instante de tempo finito. Na seqüência, mostraremos como a estratégia de controle desenvolvida nesta pesquisa possibilita atingir tal meta.

Primeiramente, seguindo a exposição em [23], [122], [21], mudamos a escala de tempo pelo fator $\hbar/J$ e as escalas das entradas pelo fator $\gamma_1/\hbar$, resultando no sistema de controle

$$\dot{Y} = (D + u_x D_x + u_y D_y + u_z D_z)Y, \quad Y(0) = I, \tag{4.56}$$

onde $Y \in M^4$ é o estado e $u_x, u_y, u_z \in \mathbb{R}$ são as novas entradas, com

$$\begin{aligned} &Z(t) = Y(Jt/\hbar), \quad t \in \mathbb{R}, \\ &e_x = \frac{\hbar}{\gamma_1} u_x, \quad e_y = \frac{\hbar}{\gamma_1} u_y, \quad e_z = \frac{\hbar}{\gamma_1} u_z. \end{aligned}$$

Observamos que foi provado em [21] que todo estado em SU(4) de (4.56) pode ser atingido em no máximo 6π unidades de tempo quando $r \neq 1$.

Por simplicidade, de agora em diante assumiremos que $r = 2$ em (4.54). Relembramos que a estratégia de controle proposta é válida apenas para sistemas sem arrasto. Assim, com o objetivo de eliminar o termo de arrasto DY do sistema (4.56), definimos a seguinte mudança de coordenadas dependente do tempo

$$X = \Phi(t, Y) = e^{-Dt}Y, \qquad \text{para todo } (t, Y) \in \mathbb{R} \times M^4. \tag{4.57}$$

Note que $e^{-Dt} \in \mathrm{SU}(4)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, pois $D \in \mathfrak{su}(4)$ (veja (4.54)). Nestas coordena-

das, (4.56) é descrito por[19]

$$\dot{X} = (u_x C_x(t) + u_y C_y(t) + u_z C_z(t))X, \quad X(0) = I, \tag{4.58}$$

onde $X \in M^4$ é o estado e, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$C_x(t) = e^{-Dt} D_x e^{Dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{-\imath 4t} \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -e^{\imath 4t} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_y(t) = e^{-Dt} D_y e^{Dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-\imath 4t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -e^{\imath 4t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_z(t) = e^{-Dt} D_z e^{Dt} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\imath 4t} & 0 & 0 \\ -e^{\imath 4t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Na seqüência, explicaremos a importância física da mudança de coordenadas (4.57), baseado em [7], [23]. Suponha que as entradas $u_x, u_y, u_z \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ em (4.56) e (4.58) foram especificadas. Sejam $Y, X \colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(4)$ as respectivas soluções correspondentes. Defina as aplicações $\varphi, \overline{\varphi} \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{S}^3$ por

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= Y(t)\psi_0, \\ \overline{\varphi}(t) &= X(t)\psi_0, \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

respectivamente, onde $\psi_0 \in \mathbb{S}^3$, e escreva

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) \\ \alpha_4(t) \end{pmatrix}, \quad \overline{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}_1(t) \\ \overline{\alpha}_2(t) \\ \overline{\alpha}_3(t) \\ \overline{\alpha}_4(t) \end{pmatrix},$$

[19] Em mecânica quântica, esta descrição é geralmente denominada de representação de interação (*interaction representation* ou *interaction picture*) [23], [39], [117], [7].

onde $\alpha_j(t), \overline{\alpha}_j(t) \in \mathbb{C}$, para $1 \leq j \leq 4$, $t \in \mathbb{R}_+$. Resulta de (4.54) e (4.57) que

$$\varphi(t) = Y(t)\psi_0 = e^{Dt}X(t)\psi_0 = e^{Dt}\overline{\varphi}(t) = \mathrm{diag}(e^{\imath 3t}, e^{-\imath t}, e^{-\imath t}, e^{-\imath t})\overline{\varphi}(t),$$

para $t \in \mathbb{R}_+$. Portanto,

$$|\alpha_j(t)|^2 = |\overline{\alpha}_j(t)|^2,$$

para todo $1 \leq j \leq 4$, $t \in \mathbb{R}_+$. Isto significa que a mudança de coordenadas (4.57) preserva as amplitude de probabilidade dos estados φ e $\overline{\varphi}$ correspondentes a (4.56) e (4.58), respectivamente. Considere a norma Euclidiana em M^4 e sejam $\epsilon > 0$, $X_\infty \in \mathrm{SU}(4)$. Suponha que existe $t' \in \mathbb{R}_+$ tal que $\|X(t') - X_\infty\| \leq \epsilon$. Escreva

$$X_\infty \psi_0 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^3.$$

Temos então que

$$|\,|\alpha_j(t')| - |\beta_j|\,| = |\,|\overline{\alpha}_j(t')| - |\beta_j|\,| \leq |\,\overline{\alpha}_j(t') - \beta_j\,| \leq ||\overline{\varphi}(t') - X_\infty\psi_0\| = \|(X(t') - X_\infty)\psi_0\| \leq \epsilon,$$

para $1 \leq j \leq 4$. Desse modo, concluímos que se $X(t')$ está próximo de X_∞, então as amplitudes de probabilidade de $\varphi(t') = Y(t')\psi_0 \in \mathbb{S}^3$ estão próximas das de $X_\infty\psi_0 \in \mathbb{S}^3$.

Agora, considere as matrizes $H^R_{ij} = (h^{R,ij}_{k\ell})$, $H^I_{ij} = (h^{I,ij}_{k\ell}) \in \mathfrak{su}(4)$ definidas por

$$\begin{aligned} h^{R,ij}_{ij} &= 1, \; h^{R,ij}_{ji} = -1, \; h^{R,ij}_{k\ell} = 0, \quad \text{se } k, \ell \neq i, j, \\ h^{I,ij}_{ij} &= \imath, \; h^{I,ij}_{ji} = \imath, \quad h^{I,ij}_{k\ell} = 0, \quad \text{se } k, \ell \neq i, j, \end{aligned}$$

respectivamente, para cada $1 \leq i < j \leq 4$. Por exemplo,

$$H^R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^I_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \imath & 0 \\ 0 & \imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Relembramos que $\dim(\mathfrak{su}(4)) = 15$. É fácil ver que

$$\{H^R_{ij}, H^I_{ij}, H^d_{12}, H^d_{23}, H^d_{34}, \; 1 \leq i < j \leq 4\} \subset \mathfrak{su}(n),$$

é um base vetorial de $\mathfrak{su}(4)$, onde

$$H_{12}^d = \begin{pmatrix} \imath & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_{13}^d = \begin{pmatrix} \imath & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\imath & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_{14}^d = \begin{pmatrix} \imath & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\imath \end{pmatrix}.$$

Escolhemos as entradas reais u_x, u_y, u_z do sistema (4.58) como

$$\begin{aligned} u_x &\triangleq (u_1 + \imath u_2)e^{\imath 4t} + (u_1 - \imath u_2)e^{-\imath 4t} = 2u_1 \cos(4t) - 2u_2 \sin(4t), \\ u_y &\triangleq (u_3 + \imath u_4)e^{\imath 4t} + (u_3 - \imath u_4)e^{-\imath 4t} = 2u_3 \cos(4t) - 2u_4 \sin(4t), \\ u_z &\triangleq (u_5 + \imath u_6)e^{\imath 4t} + (u_5 - \imath u_6)e^{-\imath 4t} = 2u_5 \cos(4t) - 2u_6 \sin(4t), \qquad \text{para } t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4.59}$$

respectivamente, onde $u_1, \ldots, u_6 \in \mathbb{R}$ são as novas entradas. Aplicando a aproximação da onda girante[20] (*rotating wave approximation – RWA*) ao sistema (4.58)–(4.59), a qual consiste em considerar apenas os termos que são independentes do tempo e desprezar todos os que são oscilatórios, obtemos o seguinte sistema de controle sem arrasto

$$\dot{X}_{rwa} = \sum_{k=1}^{6} u_k H_k X_{rwa}, \quad X_{rwa}(0) = I, \tag{4.60}$$

onde $X_{rwa} \in M^4$ é o estado, u_k são os controles e

$$H_1 = H_{14}^R, \quad H_2 = H_{14}^I, \quad H_3 = H_{13}^R, \quad H_4 = H_{13}^I, \quad H_5 = H_{12}^R, \quad H_6 = H_{12}^R.$$

Observamos que quando as entradas u_k possuem amplitudes relativamente pequenas e variações relativamente lentas, espera-se que, ao menos em algum intervalo $[0, t_{rwa}]$, onde $t_{rwa} > 0$, o erro resultante da aproximação da onda girante $X - X_{rwa}$ seja relativamente pequeno, isto é, $\|X(t) - X_{rwa}(t)\| \approx 0$, $t \in [0, t_{rwa}]$, onde X é a solução correspondente do sistema de controle (4.58)–(4.59).

[20] Veja, por exemplo, [99], [108], [23], [53], [110, Capítulos 3, 5, 13 e 14], [39] .

Temos que

$$\begin{aligned}
&[H_1, H_2] = 2H_{14}^d, \quad [H_1, H_3] = H_{34}^R, \quad [H_1, H_4] = -H_{34}^I,\\
&[H_1, H_5] = H_{24}^R, \quad [H_1, H_6] = -H_{24}^I,\\
&[H_3, H_4] = 2H_{13}^d, \quad [H_3, H_5] = H_{23}^R, \quad [H_3, H_6] = -H_{23}^I,\\
&[H_5, H_6] = 2H_{12}^d.
\end{aligned}$$

Portanto, o sistema de controle (4.60) é 4-controlável ($p = 4$) com

$$\overline{H}_1 = H_1, \quad \overline{H}_2 = H_2, \quad \overline{H}_3 = H_3, \quad \overline{H}_4 = H_5.$$

Em particular, (4.60) é regular, ou seja, T-regular para todo $T > 0$. Desse modo, podemos aplicar o Teorema 4.23 para resolver o problema de planejamento periódico de trajetórias para o sistema de controle (4.60).

Especificamos o período como $T = 40$ e, como estado objetivo X_∞, escolhemos a matriz correspondente à porta lógica quântica C-NOT (*Controlled-NOT*)

$$X_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(4),$$

que é uma das portas universais e possui grande importância na teoria de computação quântica e informação quântica. Mais precisamente, do mesmo modo que a porta lógica clássica NAND é universal, isto é, qualquer operação em bits clássicos pode ser realizada como uma composição de portas NAND, a porta lógica quântica C-NOT, juntamente com as portas um qubit (*single qubit gate*), forma um conjunto universal, ou seja, qualquer operação unitária em qubits pode ser implementada a partir de portas C-NOT e portas um qubit. Para maiores detalhes, veja [81], [54].

Decorre da Observação 4.21 que

$$G = \{-4, 0, 4\}, \quad \delta = 0.$$

Temos também que

$$V(X_\infty) = \Re(\mathrm{tr}(X_\infty)) = 2 > 0.$$

Como o sistema de controle (4.60) é 4-controlável, o Teorema 4.23 implica que, para quaisquer "ganhos de realimentação" $f_k^2 > 0$, as seguintes entradas contínuas

$$u_k(t) = u_k^r(t) - v_k(t) = u_k^r(t) - f_k^2 V(X_{rwa}^\dagger(t) H_k X_r(t)), \qquad \text{para } t \in \mathbb{R}_+,\ 1 \le k \le 6, \tag{4.61}$$

obtidas por integração numérica, asseguram que

$$\lim_{t\to\infty} (X_{rwa}(t) - X_r(t)) = 0, \tag{4.62}$$

onde a trajetória de referência X_r é dada por (4.35) e u_k^r por (4.32) com $T_p = T/p = 10$ (veja(4.31)), ou seja,

$$u_k^r(t) = \begin{cases} \sin(2\pi t/10) c_k^1, & \text{para } \ell 40 \le t < \ell 40 + 10, \\ \sin(2\pi t/10) c_k^2, & \text{para } \ell 40 + 10 \le t < \ell 40 + 20, \\ \sin(2\pi t/10) c_k^3, & \text{para } \ell 40 + 20 \le t < \ell 40 + 30, \\ \sin(2\pi t/10) c_k^4, & \text{para } \ell 40 + 30 \le t < (\ell + 1) 40, \end{cases} \tag{4.63}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{Z}$, e c_k^j, $1 \le j \le 4$, são os elementos correspondentes da matriz $C = (c_k^j)$ definida por

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.64}$$

Relembre que $X_r(\ell T_p) = X_r(10\ell) = X_\infty$, para $\ell \in \mathbb{Z}$ (veja (4.36)).

Mostraremos agora os resultados de simulação obtidos no intervalo $[0, T] = [0, 40]$ com $f_k = 1$, $1 \le k \le 6$. Utilizaremos a norma Euclidiana em M^4. A Figura 4.1 exibe a convergência de $\|X_{rwa} - X_r\|$ para zero. Percebemos que a norma do erro de rastreamento é não-crescente. Na Figura 4.2, apresentamos as funções u_k^r em (4.63) e as entradas u_k em (4.61), $1 \le k \le 6$. É facilmente visualizado que cada função u_k^r corresponde de fato a uma modulação de $\sin(2\pi t/10)$ pelos pulsos de duração $T_p = 10$ determinados pela matriz C em (4.64). As "realimentações" $v_k = V(X_{rwa}^\dagger H_k X_r(t))$, $1 \le k \le 6$, são mostradas na Figura 4.3. Observe que as amplitudes de v_2, v_5, v_6 são muito menores do que as de v_1, v_3, v_4. Todos os resultados que comentamos até o momento são referentes ao sistema de controle (4.60)–(4.61). Vejamos agora os resultados obtidos para o sistema de controle que precede a aproximação da onda girante, isto é, o sistema (4.58)–(4.59), onde as entradas (4.59) são determinadas por (4.61) e (4.63). Na Figura 4.4, mostramos a norma do erro

de rastreamento $X - X_r$ entre a trajetória X de (4.58)–(4.59) e a trajetória de referência X_r, e, na Figura 4.5, as entradas u_x, u_y, u_z. Observamos que os valores assumidos por $\|X - X_r\|$ não são satisfatórios. Assim, devemos encontrar uma maneira de diminuir a amplitude e a taxa de variação das entradas u_k obtidas de modo que o erro $X - X_{rwa}$ decorrente da aproximação da onda girante seja relativamente pequeno. Isto é o que descrevemos na seqüência, inspirados em [48, Teorema 5.1].

Seja $\alpha > 0$ um número real, $u_k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ como em (4.61) e X_{rwa} a solução correspondente de (4.60). Defina as novas entradas $u_k^\alpha\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ por

$$u_k^\alpha(t) \triangleq \alpha u_k(\alpha t) = \alpha u_k^r(\alpha t) - \alpha v_k(\alpha t) \triangleq u_k^{\alpha r}(t) - v_k^\alpha(t), \quad \text{para } t \in \mathbb{R}_+,\ 1 \le k \le 6.$$

Note que u_k^α corresponde a uma mudança na escala de tempo e na escala dos controles pelo fator α. Observe, ainda, que (4.60), (4.61), (4.63) e (4.35) implicam que $u_k, \dot{v}_k$, $1 \le k \le 6$, são limitadas em $\mathbb{R}_+$, ou seja, existe $\beta > 0$ tal que $|u_k(t)| \le \beta$, $|\dot{v}_k(t)| \le \beta$, para todo $t \in \mathbb{R}_+$, $1 \le k \le 6$. Além disso, se $t \ne \ell 40 + j10$, para $\ell \in \mathbb{N}$, $0 \le j \le 3$, temos que

$$|\dot{u}_k^r(t)| \le |(2\pi/10)\cos(2\pi t/10)\max\{c_k^1, \ldots, c_k^4\}| \le (2\pi/10)|\max\{c_k^1, \ldots, c_k^4\}| \triangleq \beta_k.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&|u_k^\alpha(t)| = \alpha|u_k(\alpha t)| \le \alpha\beta, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}_+,\\
&|\dot{u}_k^\alpha(t)| = |\alpha^2 \dot{u}_k^r(\alpha t) - \alpha^2 \dot{v}_k(\alpha t)| \le \alpha^2(\beta_k + \beta), \quad t \ne (\ell 40 + j10)/\alpha,\ \ell \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le 3.
\end{aligned}$$

Desse modo, para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno, a amplitude e a taxa de variação dos u_k^α serão relativamente pequenas. Portanto, concluímos que quando $\alpha > 0$ é suficientemente pequeno, espera-se que, ao menos em algum intervalo $[0, t_{rwa}]$, onde $t_{rwa} > 0$, o erro resultante da aproximação da onda girante seja relativamente pequeno, isto é, $\|X^\alpha(t) - X_{rwa}^\alpha(t)\| \approx 0$, $t \in [0, t_{rwa}]$, onde X^α denota a solução do sistema de controle (4.58)–(4.59) com u_k^α no lugar de u_k e X_{rwa}^α é a solução de (4.60) com as entradas u_k^α. Denotaremos as entradas resultantes em (4.59) por $u_x^\alpha, u_y^\alpha, u_z^\alpha$.

Considere a aplicação $X_r^\alpha\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(n)$ definida por

$$X_r^\alpha(t) = X_r(\alpha t), \qquad \text{para } t \in \mathbb{R}_+,$$

relembrando que X_r é como em (4.35). É claro que $X_r^\alpha(1000\ell) = X_\infty$, para $\ell \in \mathbb{Z}$ e que X_r^α possui período T/α, ou seja, X_r^α é uma trajetória de referência. Note também que

X_r^α é a solução do sistema de referência (4.5) com as funções $u_k^{\alpha r}$ no lugar de u_k^r. Além disso, é fácil ver que a solução X_{rwa}^α de (4.60) com as entradas u_k^α é dada por

$$X_{rwa}^\alpha = X_{rwa}(\alpha t), \qquad \text{para } t \in \mathbb{R}_+.$$

e que

$$v_k^\alpha(t) = \alpha f_k^2 V((X_{rwa}^\alpha)^\dagger(t) H_k X_r^\alpha(t)), \qquad \text{para } t \in \mathbb{R}_+.$$

De (4.62), obtemos então que

$$\lim_{t\to\infty}(X_{rwa}^\alpha(t) - X_r^\alpha(t)) = 0. \tag{4.65}$$

Logo, para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno, é esperado que, ao menos em algum intervalo $[c, d]$, onde $0 \leq c < d$, tenhamos $\|X^\alpha(t) - X_r^\alpha(t)\| \approx 0$, para todo $t \in [c, d]$.

No que se segue, apresentamos os resultados de simulação obtidos com base na técnica descrita acima. Especificamos $\alpha = 0,01$ e $f_k = 1$, $1 \leq k \leq 6$. O intervalo de tempo simulado foi $[0, T/\alpha] = [0, 4000]$. Na Figura 4.6, mostramos a convergência da norma do erro de rastreamento $X_{rwa}^\alpha - X_r^\alpha$ para zero. Por definição, $X_{rwa}^\alpha - X_r^\alpha$ difere de $X_{rwa} - X_r$ apenas por uma mudança na escala de tempo pelo fator $\alpha = 0,01$ (compare com a Figura 4.1). A Figura 4.7 apresenta a norma do erro de rastreamento $X^\alpha - X_r^\alpha$. Veja a Figura 4.8 para maiores detalhes no intervalo [3750, 3775]. Observe que $\|X^\alpha - X_r^\alpha\|$ é relativamente próxima de $\|X_{rwa}^\alpha - X_r^\alpha\|$ no intervalo [0, 4000] (veja a Figura 4.6) e que

$$\|X^\alpha(1000\ell) - X_\infty\| < 0,025, \quad \text{para } 2 \leq \ell \leq 4.$$

Através da comparação entre os resultados da Figura 4.7 e os da Figura 4.4, concluímos que a aproximação da onda girante fornece de fato resultados razoáveis para uma boa escolha de α. No entanto, devido à mudança na escala de tempo pelo fator α, existe a desvantagem de termos de aumentar o instante de tempo $t' > 0$ necessário para que $\|X^\alpha(t') - X_\infty\|$ satisfaça as especificações práticas. Os envelopes das entradas $u_x^\alpha, u_y^\alpha, u_z^\alpha$ que controlam o estado X^α são mostrados na Figura 4.9. Maiores detalhes no intervalo [1000, 1100] podem ser vistos na Figura 4.10. A norma do erro resultante da aproximação da onda girante $X^\alpha - X_{rwa}^\alpha$ é exibida na Figura 4.11, e em maiores detalhes no intervalo [1000, 1050] na Figura 4.12. Percebemos que $\|X^\alpha(t) - X_{rwa}^\alpha(t)\| < 0,025$, para todo $t \in [0, 4000]$, e que $\|X^\alpha(1000\ell) - X_{rwa}^\alpha(1000\ell)\| < 0,005$, para $2 \leq \ell \leq 4$. Por fim, as funções $u_k^{\alpha r}$ e as entradas u_k^α são apresentadas na Figura 4.13 e, na Figura 4.14, exibimos as "realimentações" $v_k^\alpha = V((X_{rwa}^\alpha)^\dagger H_k X_r^\alpha(t))$. Relembramos que $u_k^{\alpha r}, u_k^\alpha, v_k^\alpha$ estão relacio-

nadas a u_k^r, u_k, v_k, respectivamente, por uma mudança na escala de tempo e na escala dos controles pelo fator $\alpha = 0,01$ (compare com a Figura 4.2 e com a Figura 4.3).

Voltamos agora ao fato de o sistema (4.60) ser regular, ou seja, T-regular, para $T > 0$. Especificamos novamente $T = 40$. Com base na Observação 4.3 ($C_k^j(0) = B_k^j(0)$), pacotes de computação simbólica mostraram que se definirmos as funções suaves u_k^r: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em (4.12) por

$$u_k^r(t) = \sum_{\ell=1}^{n_f} a_{k\ell} \sin(2\pi\ell t/40), \qquad \text{para } t \in \mathbb{R},\ 1 \le k \le 6, \tag{4.66}$$

onde $n_f \ge 3$ e $a_{k\ell} \in \mathbb{R}$ são escolhidos de maneira aleatória a partir da distribuição uniforme no intervalo $[-a, a]$, com $a > 0$ "suficientemente grande", então é "muito provável" que

$$\dim(\operatorname{span}\{B_k^j(0),\ 1 \le k \le 6,\ 0 \le j \le 6\}) = 15, \tag{4.67}$$

ou seja, (4.13) é satisfeita, onde B_k^j é como em (4.14). Note que como u_k^r em (4.66) é uma função periódica ímpar de período $T = 40$, temos que a solução X_r^T correspondente de (4.5) com $X_r^T(0) = I$ também possui período $T = 40$ (veja os argumentos utilizados na Observação 4.8). Definimos então a trajetória de referência $X_r = X_r^T X_\infty$ seguindo (4.15).

Quando (4.67) é atendida, o Teorema 4.23 estabelece que as entradas

$$u_k(t) = u_k^r(t) - v_k(t) = \sum_{\ell=1}^{n_f} a_{k\ell} \sin(2\pi\ell t/40) - f_k^2 V(X_{rwa}^\dagger(t) H_k X_r(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+,\ 1 \le k \le 6, \tag{4.68}$$

garantem que

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} v_k(t) = \lim_{t\to\infty} f_k^2 V(X_{rwa}^\dagger(t) H_k X_r(t)) = 0, \qquad \text{para } 1 \le k \le m, \\ &\lim_{t\to\infty}(X_{rwa}(t) - X_r(t)) = 0, \end{aligned} \tag{4.69}$$

onde X_{rwa} é a solução de (4.60) com as entradas (4.68). Note que, em (4.66), a e n_f determinam, num certo sentido, o "nível de excitação" das funções u_k^r. Simulações computacionais feitas indicaram que, com $f_k = 1$, a taxa de convergência para zero do erro de rastreamento $X_{rwa} - X_r$ torna-se mais elevada à medida que a e n_f tornam-se maiores (assumindo (4.67), é claro).

Mostramos agora os resultados de simulação obtidos no intervalo $[0,\ 4T] = [0,\ 160]$, com $f_k = 1$, $a = 1$, $n_f = 3$ e $a_{k\ell}$ escolhidos como os elementos correspondentes da matriz

$\overline{A} = (a_{k\ell})$ dada por

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -2.00 & -1.39 & 4.66 \\ -0.31 & -1.54 & 0.92 \\ -4.69 & -0.31 & 1.75 \\ -2.79 & 0.77 & 4.09 \\ 2.19 & 0.60 & -0.27 \\ -0.18 & -4.44 & -1.38 \end{pmatrix}.$$

Para estas especificações, verificamos que (4.67) é satisfeita. A Figura 4.15 exibe a convergência de $\|X_{rwa} - X_r\|$ para zero. Percebemos que $\|X_{rwa} - X_r\|$ é uma função não-crescente. Na Figura 4.16, apresentamos as funções u_k^r em (4.66) e as entradas u_k em (4.68). As "realimentações" $v_k = V(X_{rwa}^{\dagger} H_k X_r(t))$ são mostradas na Figura 4.17. Comprovamos que as mesmas estão de acordo com (4.69). Ao compararmos as Figuras 4.15 e 4.16 com as Figuras 4.1 e 4.2 (caso 4-controlável), respectivamente, observamos que, apesar de as entradas obtidas na Figura 4.16 (correspondentes à (4.68) com X_r dada por (4.15)) terem mais energia do que as obtidas na Figura 4.2 (correspondentes à (4.61) com X_r dada por (4.35)), a convergência de $\|X_{rwa} - X_r\|$ na Figura 4.1 é, à grosso modo, mais rápida do que na Figura 4.15.

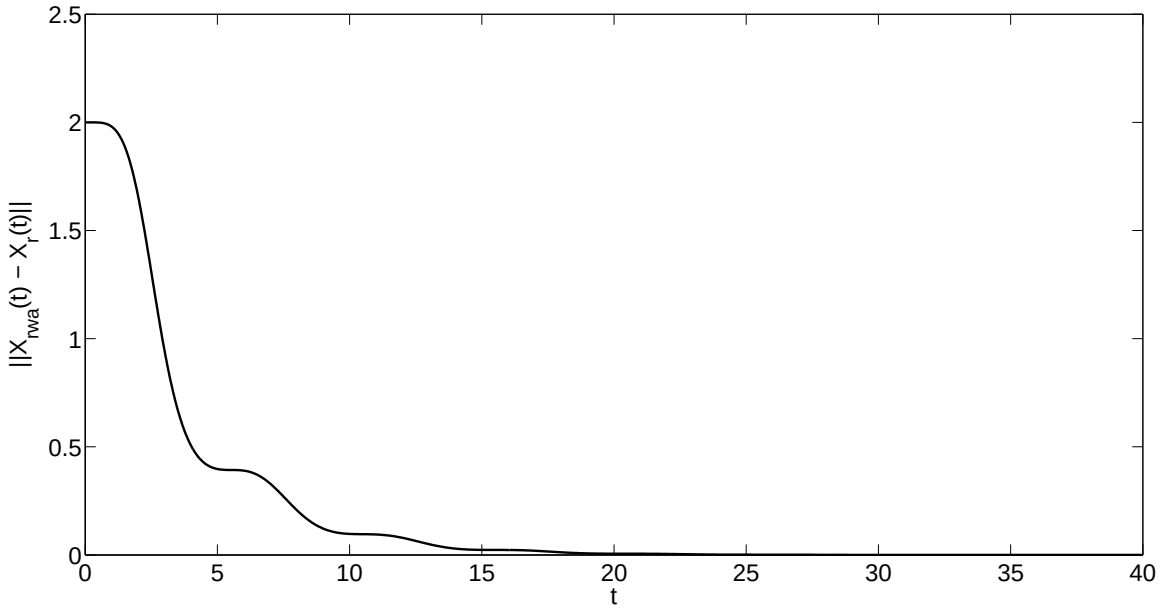

Figura 4.1: Convergência da norma do erro de rastreamento $X_{rwa} - X_r$ para zero.

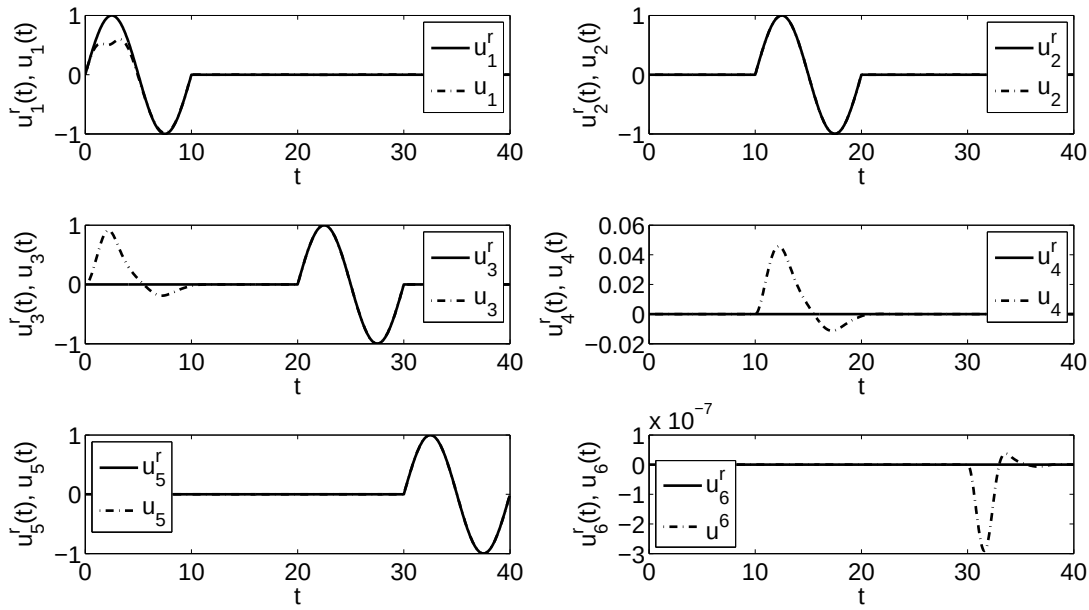

Figura 4.2: Funções u_k^r e entradas u_k, $1 \leq k \leq 6$.

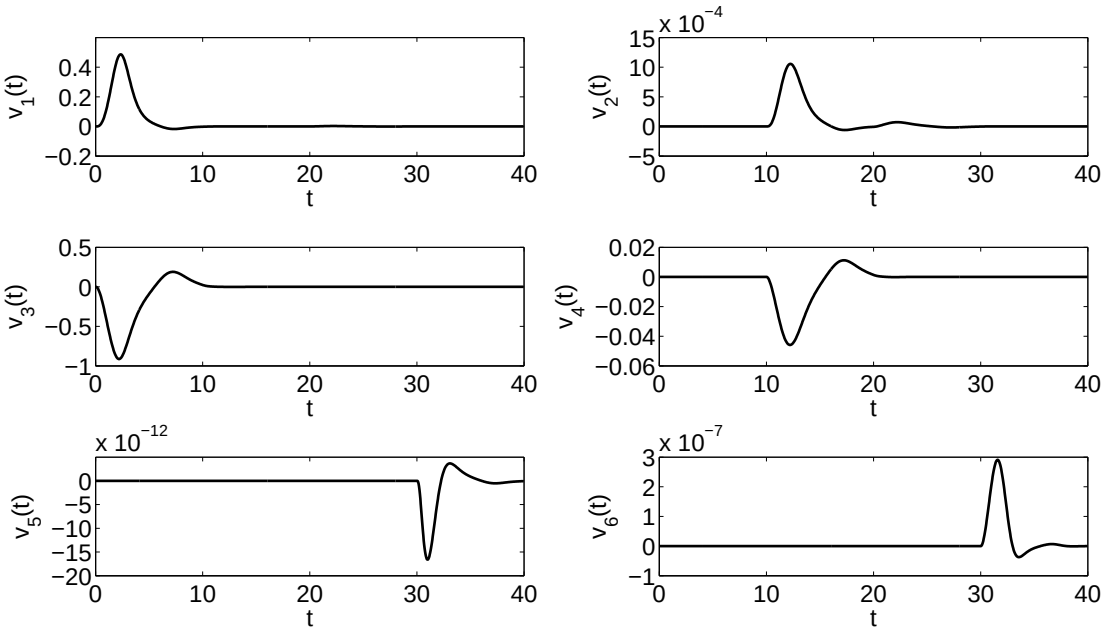

Figura 4.3: "Realimentações" $v_k = V(X_{rwa}^{\dagger} H_k X_r(t))$, $1 \leq k \leq 6$.

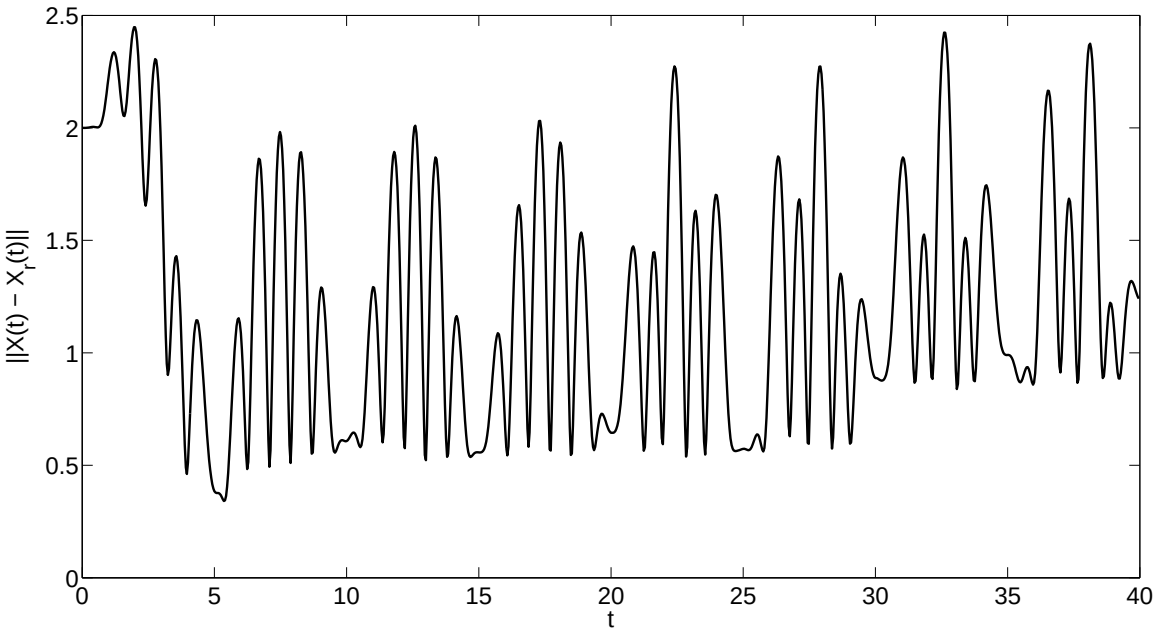

Figura 4.4: Norma do erro de rastreamento $X - X_r$.

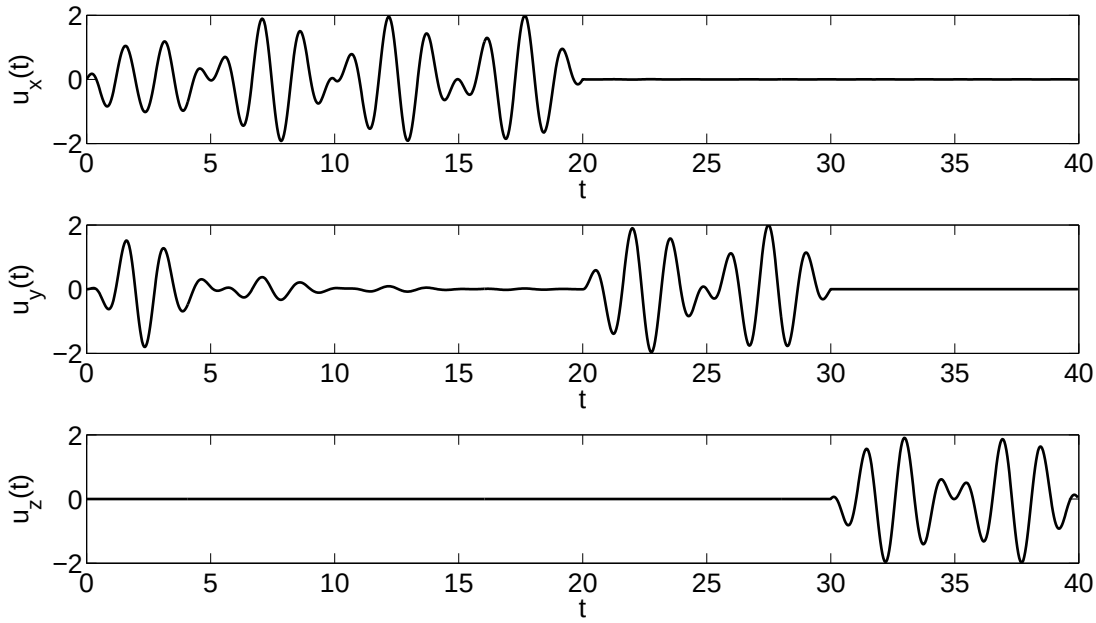

Figura 4.5: Entradas u_x, u_y, u_z.

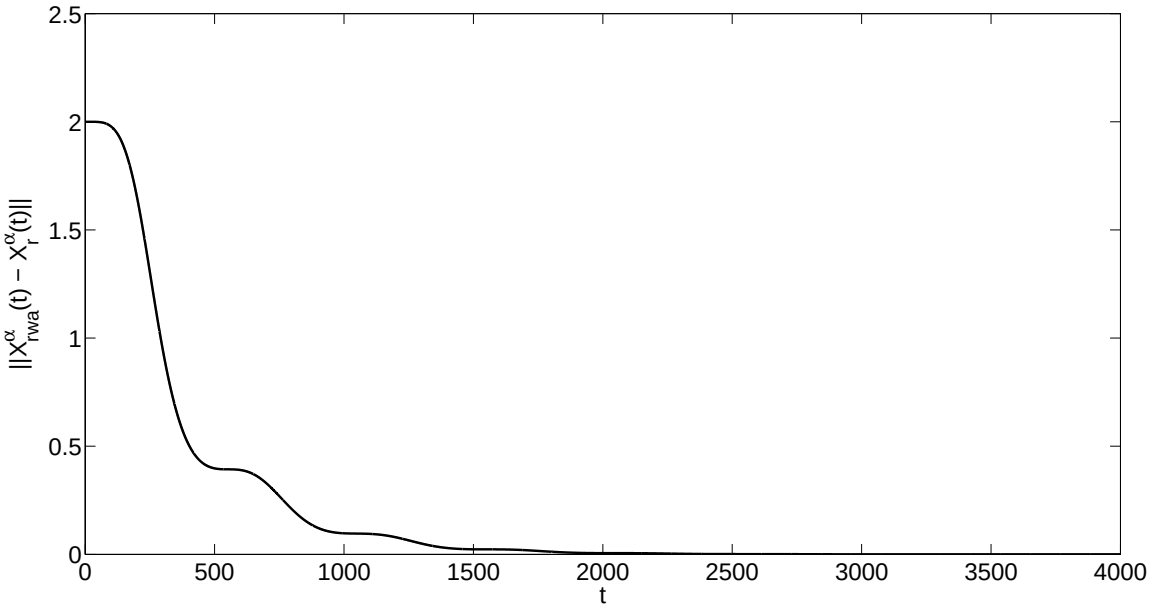

Figura 4.6: Convergência da norma do erro de rastreamento $X^{\alpha}_{rwa} - X^{\alpha}_{r}$ para zero.

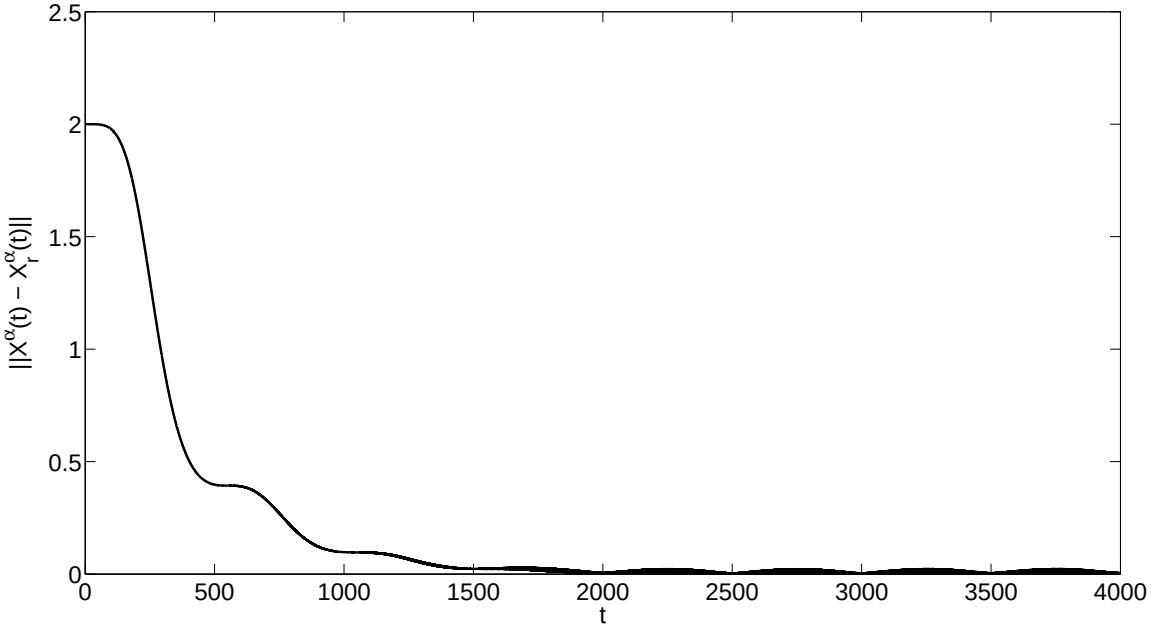

Figura 4.7: Norma do erro de rastreamento $X^{\alpha} - X^{\alpha}_{r}$.

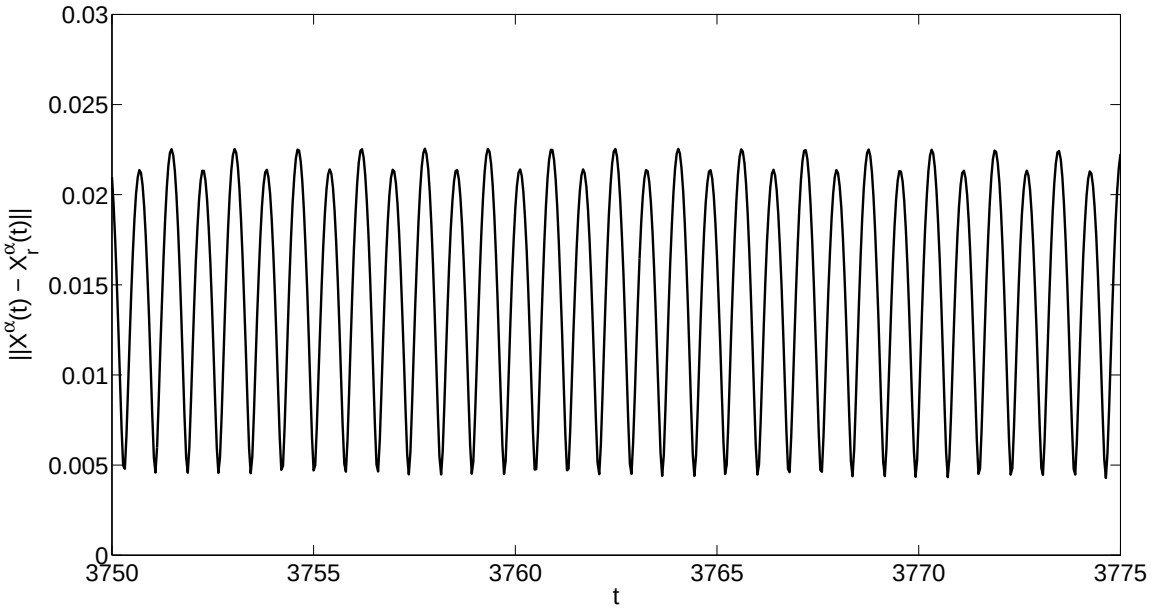

Figura 4.8: Norma do erro de rastreamento $X^\alpha - X_r^\alpha$ no intervalo [3750, 3775].

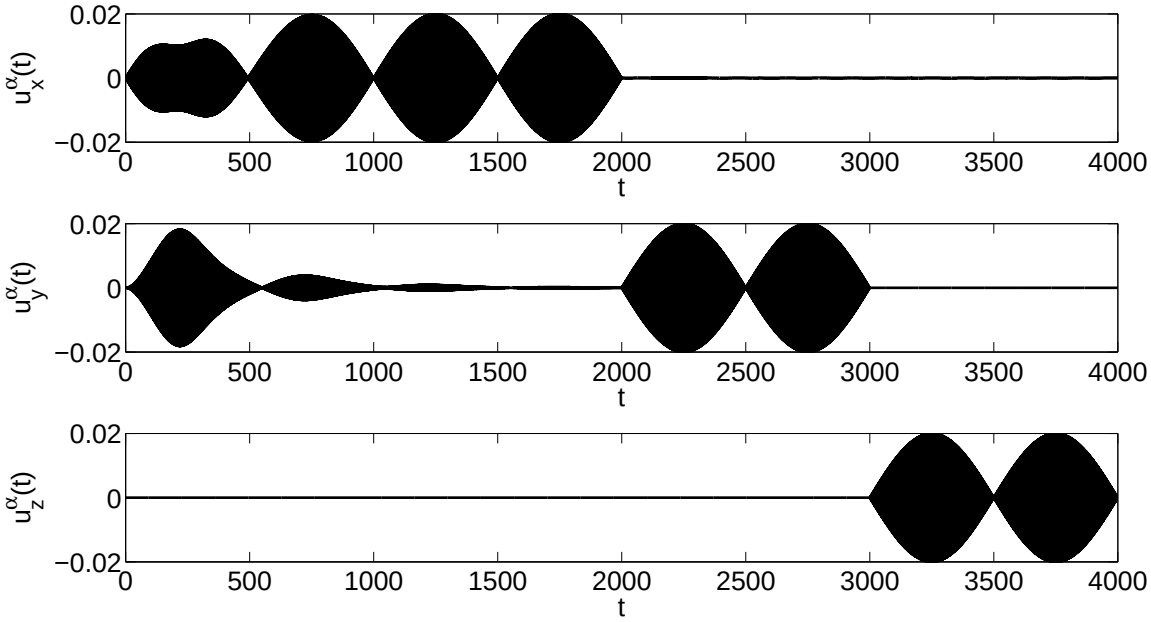

Figura 4.9: Entradas u_x^α, u_y^α, u_z^α.

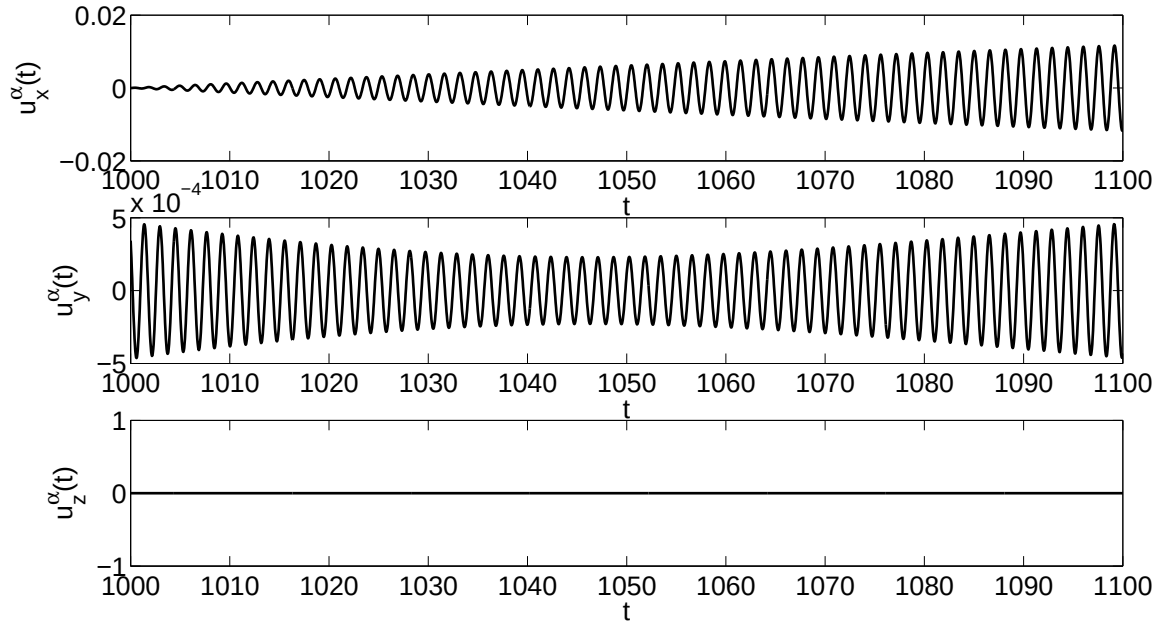

Figura 4.10: Entradas u_x^α, u_y^α, u_z^α no intervalo [1000, 1100].

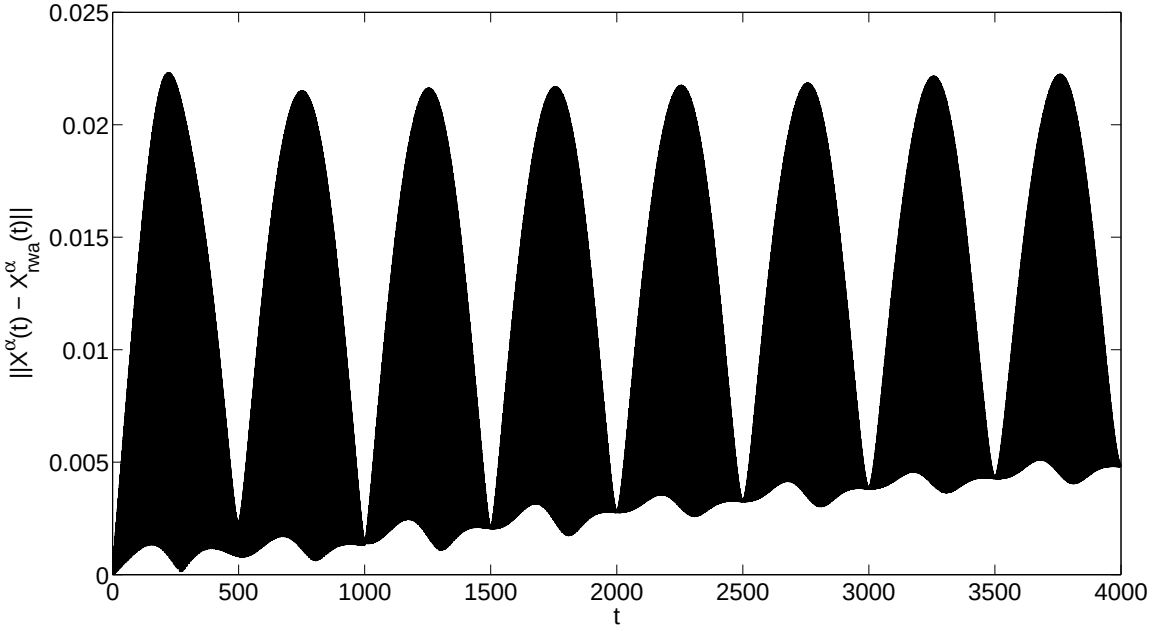

Figura 4.11: Norma do erro de aproximação $X^\alpha - X^\alpha_{rwa}$.

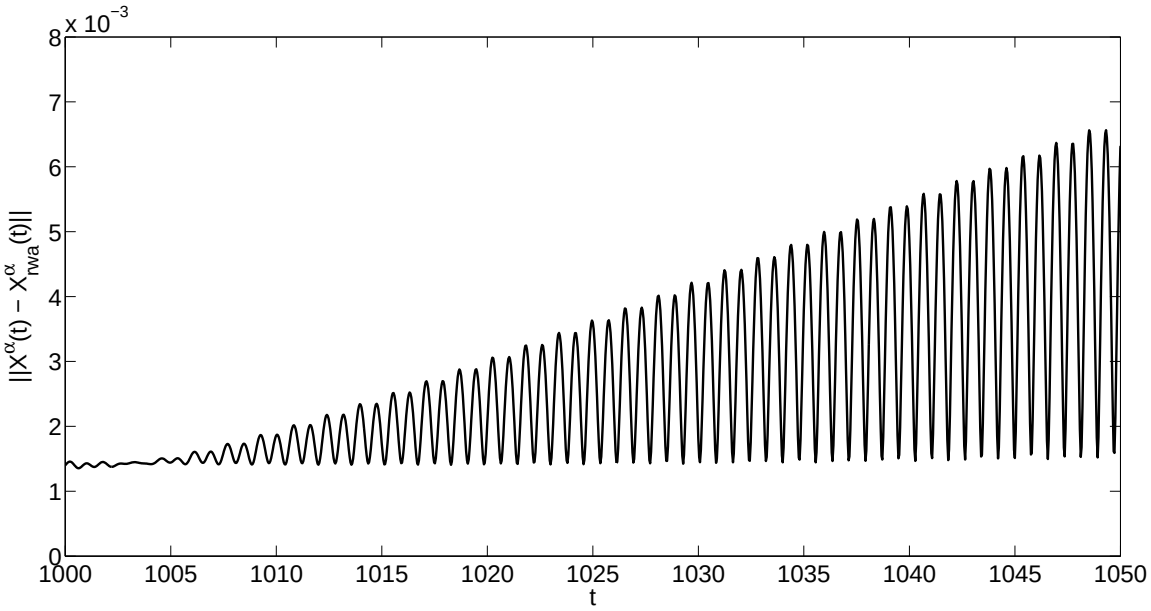

Figura 4.12: Norma do erro de aproximação $X^{\alpha} - X^{\alpha}_{rwa}$ no intervalo [1000, 1050].

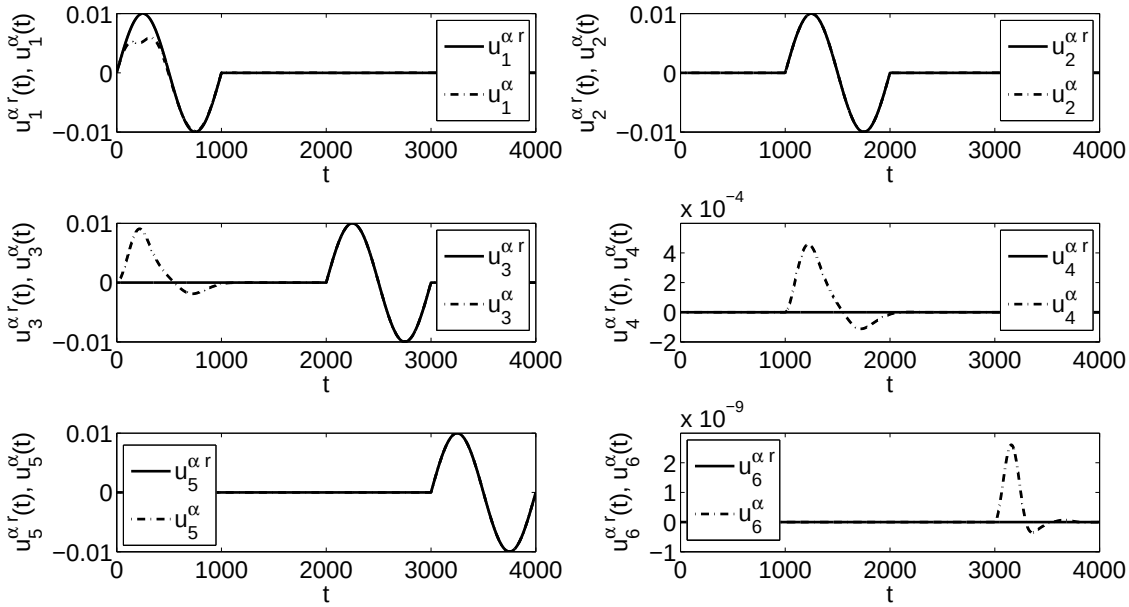

Figura 4.13: Funções $u_k^{\alpha r}$ e entradas u_k^{α}, $1 \leq k \leq 6$.

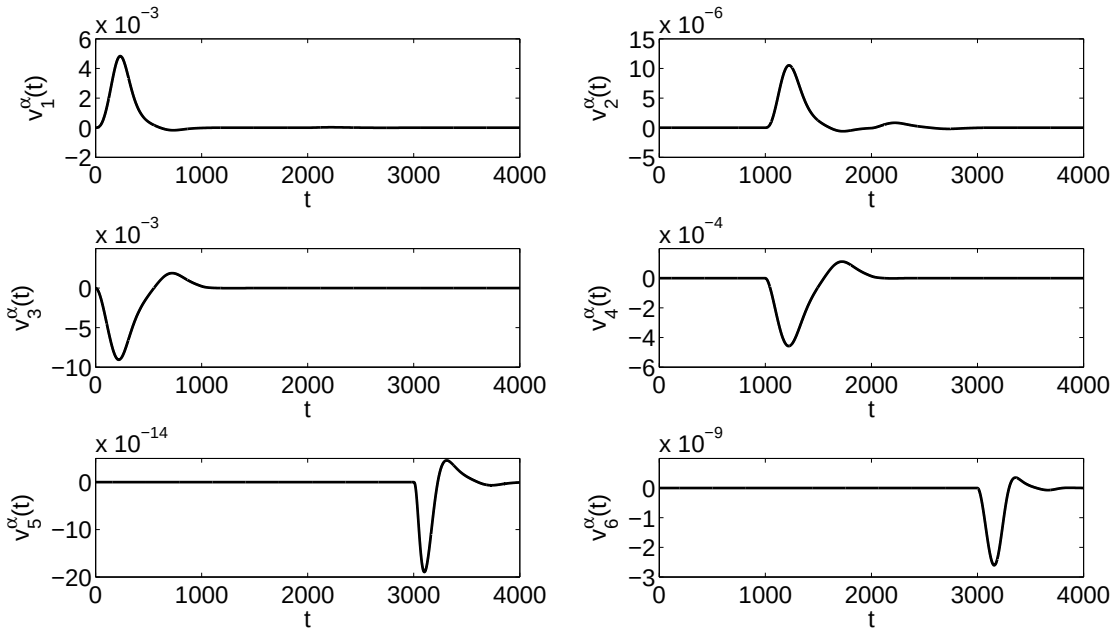

Figura 4.14: "Realimentações" $v_k^\alpha = V((X_{rwa}^\alpha)^\dagger H_k X_r^\alpha(t))$, $1 \leq k \leq 6$.

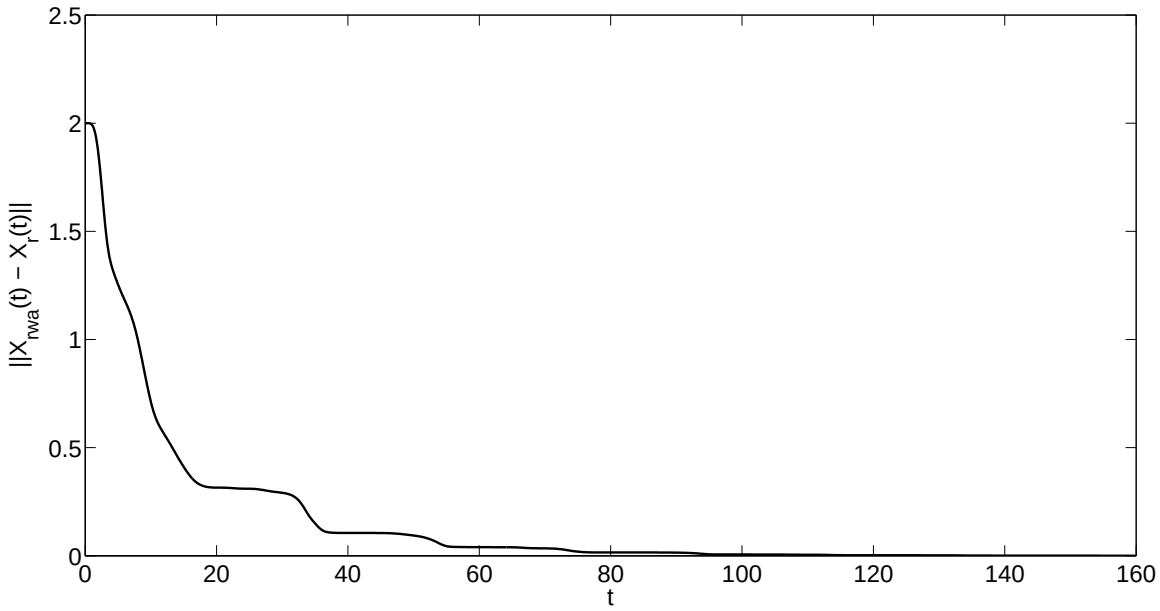

Figura 4.15: Convergência da norma do erro de rastreamento $X_{rwa} - X_r$ para zero para o caso regular.

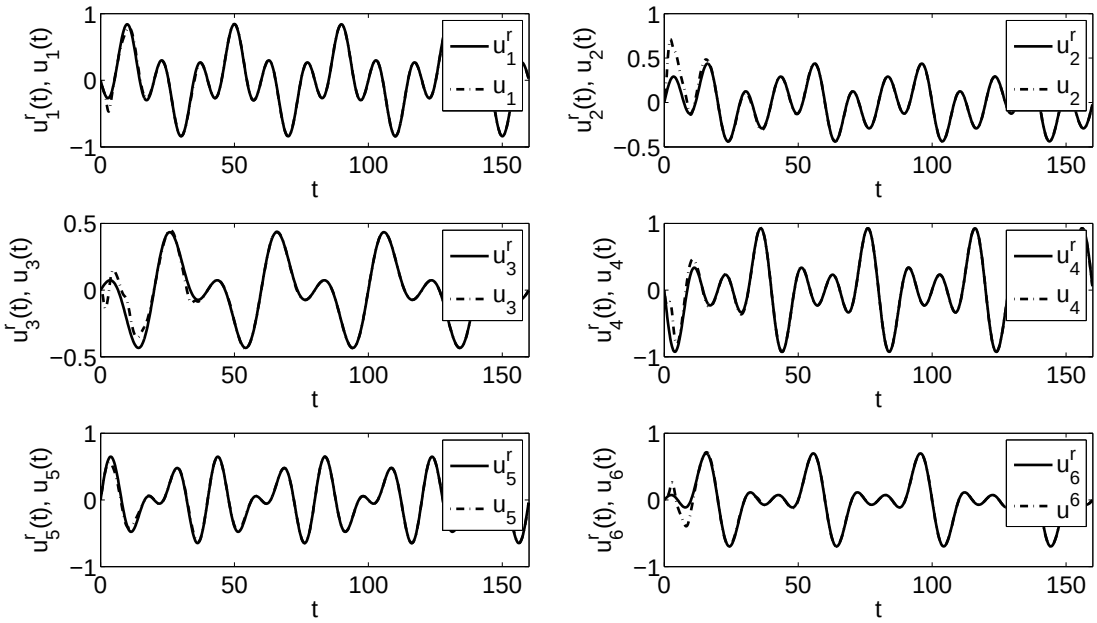

Figura 4.16: Funções u_k^r e entradas u_k para o caso regular, $1 \leq k \leq 6$.

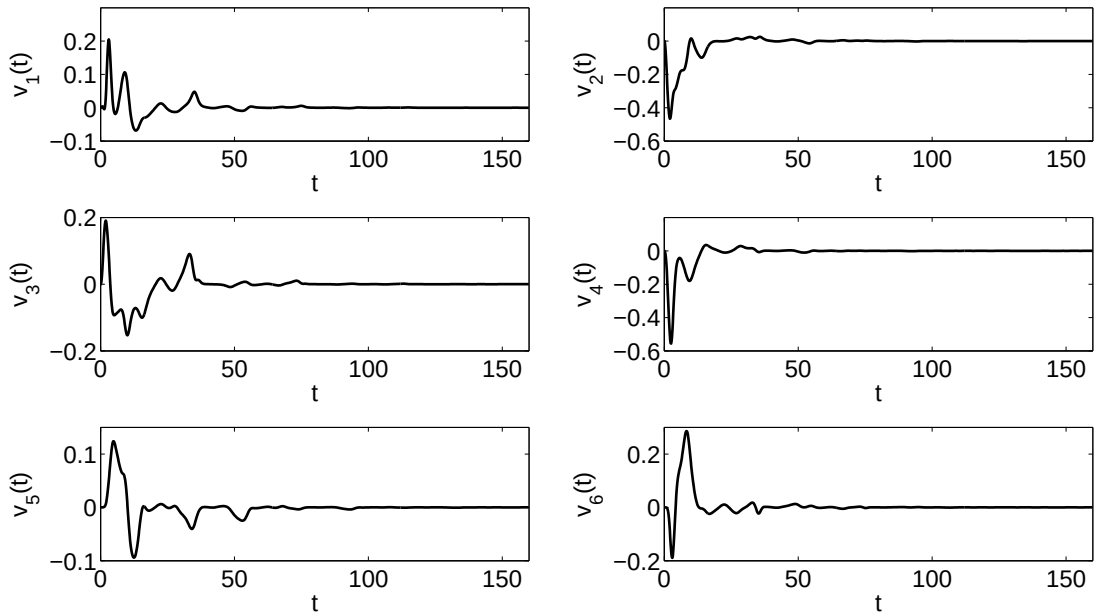

Figura 4.17: "Realimentações" $v_k = V(X_{rwa}^{\dagger} H_k X_r(t))$ para o caso regular.

Capítulo 5

Considerações Finais

Na presente pesquisa, estabelecemos condições geométricas para a triangularização de sistemas não-lineares com duas entradas (Parte I) e desenvolvemos uma estratégia de controle que soluciona o problema de planejamento periódico de trajetórias para sistemas de controle sem arrasto que evoluem no grupo especial unitário SU(n) (Parte II).

Na seqüência, enfatizaremos as contribuições desta tese em relação à cada parte, comentaremos alguns pontos específicos das mesmas, e recomendaremos certos assuntos a serem investigados futuramente.

As contribuições referentes à Parte I são:

1. O Teorema 3.10, que pode ser visto como uma generalização dos resultados de [76] para sistemas sem arrasto;
2. O Corolário 3.12, que pode ser visto como uma generalização dos resultados de [68] para sistemas sem arrasto;
3. O Teorema 3.17, que apresenta condições suficientes para que um sistema planar com até cinco variáveis de estado (i.e. $2 \leq n \leq 5$) seja triangularizado.

Relembramos que, conforme mostrado na Introdução deste trabalho, a forma triangular determinada pelo Teorema 3.10 e pelo Corolário 3.12 implica que, exceto por algumas condições de regularidade, o sistema é planar. Portanto, quando um sistema de controle com duas entradas satisfaz as condições do Teorema 3.10 ou do Corolário 3.12, os problemas de planejamento de trajetórias, rastreamento de trajetórias e rastreamento da saída

planar podem, a menos de certas exigências de regularidade, serem tratados com base nas propriedades de platitude diferencial.

Em [67], é mostrado que o satélite artificial com dois controles é planar quando o valor de um parâmetro real a possui modulo unitário. Até onde é de conhecimento do autor, saber se tal sistema é ou não planar para outros valores de a ainda é um problema em aberto. É claro que do ponto de vista prático, é desejável que o satélite seja planar para qualquer valor possível de a. Apesar de não termos incluído neste trabalho, constatamos que o satélite com dois controles não atende as condições do Teorema 3.10, para quaisquer pontos do espaço de estados e para quaisquer valores de a. Mais precisamente, é facilmente verificado que, mesmo após uma realimentação endógena que considera o estado ω_1 como entrada, a regularidade exigida do flag derivado não é satisfeita, para quaisquer valores de a e para quaisquer pontos do espaço de estado. Logo, o referido sistema não pode ser descrito pela forma triangular do Teorema 3.10. Concluímos então que a questão de estabelecer se o satélite com dois controles é planar para $|a| \neq 1$ permanece em aberto, o que reforça ainda mais a complexidade do problema.

Sugerimos as seguintes investigações futuras em relação à Parte I:

1. Generalização do Teorema 3.10 para sistemas com múltiplas entradas;
2. Generalização do Teorema 3.17 para $n \geq 6$ ou, ao menos, determinação de um contra-exemplo de triangularização com $n \geq 6$;
3. Verificação da equivalência entre a forma triangular do Teorema 3.10 e a do Teorema 3.17 (após uma mudança de coordenadas e uma realimentação regular).

Acreditamos que um ponto de partida para abordar o primeiro assunto possa ser os resultados de [85].

As contribuições em relação à Parte II são:

1. O Teorema 4.20, que é um resultado de convergência de tipo-Lyapunov para o sistema auxiliar (4.19)–(4.20);
2. O Algoritmo 4.22, que, juntamente com o Teorema 4.20, determina uma estratégia de controle que soluciona o problema de planejamento periódico de trajetórias (veja o Teorema 4.23).

Os resultados razoáveis de simulação obtidos com a aplicação da técnica de controle desenvolvida a um sistema quântico consistindo de duas partículas de spin-1/2, com o objetivo de gerar a porta lógica quântica C-NOT, a qual tem grande importância na teoria de computação quântica, podem, possivelmente, ser considerados como uma terceira contribuição referente à Parte II da presente pesquisa. Acrescentamos, ainda, que determinamos entradas contínuas para o referido sistema. Desse modo, evitamos, à princípio, as dificuldades práticas decorrentes da utilização de entradas constantes por partes, as quais podem invalidar o modelo do sistema.

Observamos que, como o Teorema 4.20 apresenta uma região de convergência que é local e não global, é exigida a execução *offline* do Algoritmo 4.22 para determinar as leis de controle $u_k = u_k((T, X_\infty), X, t)$ que forçam o estado do sistema a seguir uma trajetória de referência de período $T > 0$ que passa pelo estado objetivo $X_\infty \in \mathrm{SU}(n)$. Caso a região de convergência fosse global, o Algoritmo 4.22 passaria a ser desnecessário e encontraríamos leis de controle realimentadas da forma $u_k = u_k(X, t)$ que poderiam ser implementadas em tempo real no sistema.

Além disso, até onde é de conhecimento do autor, a aproximação da onda girante não possui um tratamento rigoroso do ponto de vista matemático, principalmente quando existem várias freqüências envolvidas.

Recomendamos, então, os seguintes assuntos de pesquisa futuros:

1. Determinação de um resultado de convergência global para o sistema (4.19)–(4.20);
2. Formalização matemática da aproximação da onda girante.

Apêndice A

Resultados de Geometria Diferencial

Ao longo de todo este apêndice, M é uma variedade suave de dimensão finita.

Teorema A.1. *[6], [41], [55] Considere que $U \subset M$ é aberto. Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$, $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^\infty(U)$ e $V \subset U$ um aberto. Então:*

1. *O colchete de Lie é $\mathbb{R}$-bilinear;*
2. $[X, Y] = -[Y, X]$;
3. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ *(identidade de Jacobi);*
4. $[X, Y]|V = [X|V, Y|V]$;
5. $[\alpha X, \beta Y] = \alpha\beta[X, Y] + \alpha(L_X\beta)Y - (L_Y\alpha)\beta X$.

Teorema A.2. *[6] Seja $U \subset M$ um aberto. A derivada exterior $d\colon \Omega(U) \to \Omega(U)$ possui as seguintes propriedades:*

1. *d é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear e $d(\Omega^r(U)) \subset \Omega^{r+1}(U)$;*
2. *Se $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, então $df \in \Omega^1(U)$ coincide com a diferencial de f;*
3. *Se $\theta \in \Omega^r(U)$ e $\sigma \in \Omega^s(U)$, então $d(\theta \wedge \sigma) = (d\theta) \wedge \sigma + (-1)^r\theta \wedge (d\sigma)$;*
4. $d \circ d = 0$;
5. *Se $V \subset U$ é aberto e $\omega \in \Omega(U)$, então $(d\omega)|V = d(\omega|V)$.*

Proposição A.3. *[41], [55] Considere que $U \subset M$ é aberto. Sejam $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(U)$, $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(U)$, $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Então:*

1. $L_{(aX_1+bX_2)}\omega = aL_{X_1}\omega + bL_{X_2}\omega$;
2. $L_X(a\omega_1 + b\omega_2) = aL_X\omega_1 + bL_{X_2}\omega$;
3. $L_{\alpha X}\beta\omega = \alpha\beta(L_X\omega) + \langle\omega, X\rangle\beta d\alpha + \alpha(L_X\beta)\omega$;
4. $L_X d\alpha = d(L_X\alpha)$;
5. *Se $V \subset U$ é aberto, então $L_{X|V}(\alpha|V) = (L_X\alpha)|V$.*

Demonstração. Conseqüência imediata do Teorema A.2, do Teorema 2.8 e do Teorema 2.10. □

Proposição A.4. *Sejam $\Delta, \Delta^1, \Delta^2$ distribuições em U, onde $U \subset M$ é aberto e $\Delta^2 \subset \Delta^1$. Considere que V, W são conjuntos abertos em M, com $W \subset V \subset U$. Então:*

1. $(\Delta|V)_p = \Delta_p$, *para todo $p \in V$;*
2. *Se $\Delta = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{X^1, \ldots, X^r\}$, então $\Delta_p = span_{\mathbb{R}}\{X^1_p, \ldots, X^r_p\}$, para todo $p \in U$, e $\Delta|V = span_{\mathcal{C}^\infty(V)}\{X^1|V, \ldots, X^r|V\}$;*
3. *Se $\Delta_p = span_{\mathbb{R}}\{X^1_p \ldots, X^r_p\}$, para todo $p \in V$, onde $X^1, \ldots, X^r \in \Delta$ são independentes em V, então $\Delta|V = span_{\mathcal{C}^\infty(V)}\{X^1|V, \ldots, X^r|V\}$ e $\dim(\Delta|V) = r$;*
4. $(\Delta|V)|W = \Delta|W$;
5. $\Delta^2_p \subset \Delta^1_p$, *para todo $p \in U$;*
6. $\Delta^2|V \subset \Delta^1|V$;
7. *Se Δ é involutiva, então $\Delta|V$ é involutiva.*

Demonstração. Todas as afirmações acima, exceto pela terceira e última, seguem de maneira trivial das definições. Note que $\mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(V)}\{X_1|V, \ldots, X_r|V\} \subset \Delta|V$. Os argumentos necessários para mostrar que $\Delta|V \subset \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(V)}\{X_1|V, \ldots, X_r|V\}$ são semelhantes aos utilizados na demonstração do Proposição A.9. A última afirmação é uma conseqüência imediata do Teorema A.1. □

Proposição A.5. *Seja Δ uma distribuição em U, onde $U \subset M$ é aberto. Suponha que $p \in U$ é um ponto regular de Δ com $\dim(\Delta_p) = r$. Então, existe uma vizinhança aberta $V \subset U$ de p e r campos de vetores $X^1, \ldots, X^r \in \Delta$ independentes em V, tais que*

$$\Delta_q = span_{\mathbb{R}}\{X_q^1, \ldots, X_q^r\},$$

para todo $q \in V$. Em particular, $\dim(\Delta|V) = r$ e

$$\Delta|V = span_{\mathcal{C}^\infty(V)}\{X^1|V, \ldots, X^r|V\}.$$

Demonstração. Sendo $p \in U$ é um ponto regular de Δ, existe, por definição, uma vizinhança aberta $V \subset U$ de p tal que $\dim(\Delta_q) = r$, para todo $q \in V$. Assim, existem $X^1, \ldots, X^r \in \Delta \subset \mathfrak{X}(U)$ tais que $X_p^1, \ldots, X_p^r \in T_pM$ são linearmente independentes e $\Delta_p = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{X_p^1, \ldots, X_p^r\}$. Sabemos que existe também uma carta local $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ definida em uma vizinhança aberta $W \subset V \subset U$ de p. Como $X_p^1, \ldots, X_p^r \in T_p(M)$ são independentes e $B = \{\partial/\partial x_p^1, \ldots, \partial/\partial x_p^n\}$ é uma base do espaço vetorial real T_pM, existem $n - r$ vetores tangentes $\partial/\partial x_p^{k_{r+1}}, \ldots, \partial/\partial x_p^{k_n} \in B$ tais que $\{X_p^1, \ldots, X_p^r, \partial/\partial x_p^{k_{r+1}}, \ldots, \partial/\partial x_p^{k_n}\}$ é uma base de T_pM. Temos que

$$X_q^i = \sum_{j=1}^{n} a^{ij}(q)\partial/\partial x_q^j,$$

para todo $q \in W$ e todo $1 \leq i \leq r$, onde $a^{ij} \in \mathcal{C}^\infty(W)$, pois $X^i \in \Delta \subset \mathfrak{X}(U)$. Para cada $q \in W$, considere a matriz quadrada $A(q) = (\overline{a}_{ij}(q)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por $\overline{a}_{ij}(q) = a^{ij}(q)$, para $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq n$, e $\overline{a}_{ij}(q) = \delta_{k_i j}$, para $r + 1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, onde $\delta_{k_i j}$ é o delta de Kronecker, isto é, $\delta_{k_i j} = 1$, para $k_i = j$, e $\delta_{k_i j} = 0$, para $k_i \neq j$. Como a função $D\colon W \to \mathbb{R}$ definida por $D(q) = \det(A(q))$, para todo $q \in W$, é contínua[1] com $D(p) \neq 0$, concluímos que $D(q) \neq 0$, para todo $q \in W$ (restringindo W se necessário). Desse modo, $\{X_q^1, \ldots, X_q^r, \partial/\partial x_q^{k_{r+1}}, \ldots, \partial/\partial x_q^{k_n}\}$ é uma base de T_qM, para todo $q \in W$. Em particular, $\{X_q^1, \ldots, X_q^r\} \subset \Delta_q$ são independentes, para todo $q \in W$. Mas, $\dim(\Delta_q) = r$, para cada $q \in W$. Portanto, $\{X_q^1, \ldots, X_q^r\}$ é uma base de Δ_q, para todo $q \in W \subset V \subset U$. □

Definição A.6. *[59], [41] Seja $p \in M$ e considere que R é um subespaço vetorial de T_pM. Definimos o seguinte subespaço vetorial de T_p^*M*

$$R^\perp = \{\omega_p \in T_p^*M \mid \langle \omega_p, X_p\rangle = 0, \text{ para todo } X_p \in R\},$$

[1] Veja, por exemplo, [52, pág. 342].

denominado de anulador *de R. Suponha que S é um subespaço vetorial de T_p^*M. Definimos o seguinte subespaço de T_pM*

$$S^\perp = \{X_p \in T_pM \mid \langle \omega_p, X_p \rangle = 0, \text{ para todo } \omega_p \in S\},$$

denominado de anulador *de S.*

Pode-se mostrar que[2] $(R^\perp)^\perp = R$ e $(S^\perp)^\perp = S$. Além disso, se $\dim(M) = n$ e $\dim(R) = r$, então $\dim(R^\perp) = n - r$. O mesmo resultado também é válido para S.

Proposição A.7. *[55] Considere que U é um aberto em M com a topologia de subespaço. Seja F um conjunto fechado em U e V um conjunto aberto em U com $F \subset V$. Então, existe $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tal que:*

1. *$0 \leq \sigma(p) \leq 1$, para todo $p \in U$;*
2. *$\sigma(p) = 1$, para todo $p \in F$;*
3. *$\operatorname{supp} \sigma \triangleq \overline{\{p \in U \mid \sigma(p) \neq 0\}} \subset V$, onde o fecho é tomado em relação a U.*

Proposição A.8. *Seja Δ uma distribuição em U e considere que $p \in U$ é um ponto regular de Δ, onde $U \subset M$ é aberto, $\dim(M) = n$ e $\dim(\Delta_p) = r$. Então, p é um ponto regular de $\Delta^\perp$ com $\dim((\Delta^\perp)_p) = n - r$. Além disso, existe uma vizinhança aberta $V \subset U$ de p tal que, para todo $q \in V$,*

$$(\Delta_q)^\perp = (\Delta^\perp)_q,$$
$$((\Delta^\perp)^\perp)_q = \Delta_q.$$

Demonstração. Pela Proposição A.5, existe uma vizinhança aberta $V \subset U$ de p e r campos de vetores $X^1, \ldots, X^r \in \Delta$ independentes em V, tais que

$$\Delta_q = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{X_q^1, \ldots, X_q^r\}, \tag{A.1}$$

para todo $q \in V$. É fácil ver a partir da demonstração da Proposição A.5 que existem $X^{r+1}, \ldots, X^n \in \mathfrak{X}(W)$ tais que $\{X_q^1, \ldots, X_q^r, X_q^{r+1}, \ldots, X_q^n\}$ é uma base de T_qM, para todo $q \in W$, onde $W \subset V \subset U$ é uma vizinhança aberta de p. Sejam $\omega^1, \ldots, \omega^n \in \Omega^1(W)$

[2] Veja, por exemplo, [59].

as (únicas) 1-formas que são o dual de $X^1, \ldots, X^n$ em todos os pontos de $W \subset U$, isto é, $\langle \omega_q^i, X_q^j \rangle = \delta_{ij}$, para todo $1 \leq i, j \leq n$ e todo $q \in W$. Portanto, decorre de (A.1) que

$$(\Delta_q)^\perp = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\omega_q^{r+1}, \ldots, \omega_q^n\}, \tag{A.2}$$

para todo $q \in W \subset U$.

Para cada $r+1 \leq i \leq n$, podemos estender a 1-forma $\omega^i \in \Omega^1(W)$ para uma 1-forma $\overline{\omega}^i \in \Omega^1(U)$ de maneira que $\overline{\omega}^i \in \Delta^\perp$ e $\overline{\omega}^i(q) = \omega^i(q)$, para todo $q \in W$ (restringindo W se necessário). De fato[3], temos que $\omega_q^i = \sum_{j=1}^n b^{ij}(q) dx_q^j$, para todo $1 \leq i \leq n$ e cada $q \in W$, onde $b^{ij} \in \mathcal{C}^\infty(W)$ e $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ é uma carta local definida em W (restringindo W se necessário). Sabemos que existe um conjunto compacto F em U e um conjunto aberto $\widetilde{W}$ em U que satisfazem $p \in \widetilde{W} \subset F \subset W \subset U$, onde a topologia de U é a topologia de subespaço. A Proposição A.7 implica então que existe $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tal que $\sigma(q) = 1$, para todo $q \in F$, e $\operatorname{supp} \sigma \subset W$. Seja $1 \leq i \leq n$. Definimos $\overline{\omega}_q^i \triangleq \sigma(q)\omega_q^i = \sigma(q) \sum_{j=1}^n b^{ij}(q) dx_q^j \in T_q^*M$, para cada $q \in W$, e $\overline{\omega}_q^i = 0 \in T_q^*M$, para cada $q \in (U - \operatorname{supp} \sigma)$. Note que $\overline{\omega}_q^i = 0$, para todo $q \in W \cap (U - \operatorname{supp} \sigma) = W - \operatorname{supp} \sigma$. Portanto, o vetor cotangente $\overline{\omega}_q^i \in T_q^*M$ está bem definido, para cada $q \in U$. Como $U - (W - \operatorname{supp} \sigma) = (U - W) \cup \operatorname{supp} \sigma$, temos que $W - \operatorname{supp} \sigma$ é um aberto em U. Portanto, $\overline{\omega}^i \in \Omega^1(U)$. Observe que, por construção, $\overline{\omega}^i \in \Delta^\perp$ e $\overline{\omega}_q^i = \omega_q^i$, para todo $q \in \widetilde{W} \subset F \subset W \subset U$ e cada $r+1 \leq i \leq n$.

Agora, seja $q \in W$ e considere que $\omega_q \in (\Delta^\perp)_q$. Como $\{\omega_q^1, \ldots, \omega_q^n\}$ é uma base de T_q^*M e $X^1, \ldots, X^r \in \Delta$, segue que $\omega_q = \sum_{j=r+1}^n c^j \overline{\omega}_q^j$, onde $c^j \in \mathbb{R}$. Assim, obtemos de (A.2) que $(\Delta^\perp)_q = (\Delta_q)^\perp = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\overline{\omega}_q^{r+1}, \ldots, \overline{\omega}_q^n\}$, para todo $q \in W$. Logo, $p \in U$ é um ponto regular de $\Delta^\perp$ com $\dim((\Delta^\perp)_p) = n - r$. Aplicando argumentos análogos aos acima à codistribuição $\Delta^\perp$, concluímos que existe uma vizinhança aberta $\widetilde{V} \subset W$ de p tal que, para todo $q \in \widetilde{V}$, $((\Delta^\perp)^\perp)_q = ((\Delta^\perp)_q)^\perp = ((\Delta_q)^\perp)^\perp = \Delta_q$. □

Proposição A.9. *Considere que Δ é uma distribuição em U, onde $U \subset M$ é aberto. Seja $V \subset U$ um aberto tal que, para todo $p \in V$, p é um ponto regular de Δ. Suponha que $\omega^1, \ldots, \omega^r \in \Delta^\perp \subset \Omega^1(U)$ são independentes em V e que uma das seguintes condições equivalentes é satisfeita:*

1. *Para todo $p \in V$, $(\Delta^\perp)_p = span_{\mathbb{R}}\{\omega_p^1, \ldots, \omega_p^r\}$,*

[3] Os argumentos aqui apresentados para provar a existência da referida extensão estão baseados em [55, demonstração do Lema 4.5].

2. Para todo $p \in V$, $(\Delta_p)^\perp = span_{\mathbb{R}}\{\omega_p^1, \ldots, \omega_p^r\}$.

Então,

$$(\Delta|V)^\perp = (\Delta^\perp)|V = span_{\mathcal{C}^\infty(V)}\{\omega^1|V, \ldots, \omega^r|V\}.$$

Demonstração. Note que as duas condições são equivalentes pela Proposição A.8. É fácil ver que $\Delta^\perp|V \subset (\Delta|V)^\perp$, para qualquer conjunto aberto $V \subset U$. Agora, considere que $V \subset U$ é um aberto tal que, para todo $p \in V$, p é um ponto regular de Δ. Pela Proposição A.4, temos que $(\Delta|V)_p = \Delta_p$, para cada $p \in V$. Desse modo, todo $p \in V$ é também um ponto regular de $\Delta|V$. Seja $\omega \in (\Delta|V)^\perp$. A Proposição A.8 implica que

$$\omega_p \in ((\Delta|V)^\perp)_p = ((\Delta|V)_p)^\perp = (\Delta_p)^\perp = (\Delta^\perp)_p,$$

para todo $p \in V$. Logo, $\omega_p = \sum_{i=1}^r b^i(p)\omega_p^i$, onde $b^i(p) \in \mathbb{R}$, para todo $p \in V$.

Com base em argumentos semelhantes aos utilizados na demonstração da Proposição A.5, vamos mostrar agora que $b^i \in \mathcal{C}^\infty(V)$, para $1 \leq i \leq r$. Seja $p \in V$. Existe então uma carta local $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ definida em uma vizinhança aberta $W \subset V \subset U$ de p. Mas, por hipótese, $\omega_p^1, \ldots, \omega_p^r \in T_p^*M$ são linearmente independentes. Além do mais, $B = \{dx_p^1, \ldots, dx_p^n\}$ é uma base do espaço vetorial T_p^*M. Portanto, existem $n-r$ vetores cotangentes $dx_p^{k_{r+1}}, \ldots, dx_p^{k_n} \in B$ tais que $\{\omega_p^1, \ldots, \omega_p^r, dx_p^{k_{r+1}}, \ldots, dx_p^{k_n}\}$ é uma base de T_p^*M. Temos que

$$\begin{aligned} \omega_q^i &= \sum_{j=1}^n a^{ij}(q)dx_q^j, \\ \omega_q &= \sum_{j=1}^n c^j(q)dx_q^j = \sum_{i=1}^r b^i(q)\omega_q^i, \end{aligned} \tag{A.3}$$

para todo $q \in W \subset V \subset U$ e todo $1 \leq i \leq r$, onde $a^{ij}, c^j \in \mathcal{C}^\infty(W)$, pois $\omega^i \in \Delta^\perp \subset \Omega^1(U)$ e $\omega \in (\Delta|V)^\perp \subset \Omega^1(V)$. Para $q \in W$, considere a matriz quadrada $A(q) = (\overline{a}_{ij}(q)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por $\overline{a}_{ij}(q) = a^{ij}(q)$, para $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq n$, e $\overline{a}_{ij}(q) = \delta_{k_i j}$, para $r+1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, onde $\delta_{k_i j}$ é o delta de Kronecker, ou seja, $\delta_{k_i j} = 1$, para $k_i = j$, e $\delta_{k_i j} = 0$, para $k_i \neq j$. Temos que a função $D\colon W \to \mathbb{R}$ definida por $D(q) = \det(A(q))$, para todo $q \in W$, é contínua[4] com $D(p) \neq 0$. Logo, a matriz inversa $A(q)^{-1}$ de $A(q)$ existe para todo $q \in W$ (restringindo W se necessário). É fácil ver a partir de (A.3) que $A(q)'b(q) = c(q)$, para cada $q \in W$, onde $b(q) = (b^1(q), \ldots, b^r(q), 0, \ldots, 0)' \in \mathbb{R}^n$, $c(q) = (c^1(q), \ldots, c^n(q))' \in \mathbb{R}^n$.

[4]Veja, por exemplo, [52, pág. 342].

Como a aplicação $L\colon W \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por $L(q) = (A(q)')^{-1}$, para todo $q \in W$, é suave[5] e $b(q) = (A(q)')^{-1}c(q)$, para $q \in W$, concluímos que $b^i|W \in \mathcal{C}^\infty(W)$, para $1 \leq i \leq r$. Portanto, $b^i \in \mathcal{C}^\infty(V)$, para cada $1 \leq i \leq r$.

Temos então que $\omega \in \Delta^\perp|V$, pois $b^i \in \mathcal{C}^\infty(V)$ e $\omega^i \in \Delta^\perp$, para $1 \leq i \leq r$. Desse modo, $(\Delta|V)^\perp = (\Delta^\perp)|V$. Aplicando uma vez mais a Proposição A.4, obtemos que $(\Delta|V)^\perp = (\Delta^\perp)|V = \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(V)}\{\omega^1|V, \ldots, \omega^r|V\}$. □

Proposição A.10. *Assuma que Δ é uma distribuição em U e que p é um ponto regular de Δ, onde $U \subset M$ é aberto. Então, existe uma vizinhança aberta $V \subset U$ de p tal que*

$$(\Delta|V)^\perp = \Delta^\perp|V.$$

Demonstração. Basta aplicar a Proposição A.8, a versão dual da Proposição A.5 para codistribuições e a Proposição A.9. □

Note que a relação $\Delta \subset (\Delta^\perp)^\perp$ é sempre verdadeira. A proposição a seguir apresenta condições que asseguram a igualdade.

Proposição A.11. *Seja $\Delta = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{X^1, \ldots, X^r\} \subset \mathfrak{X}(U)$ uma distribuição em U tal que $X^1, \ldots, X^r$ são independentes em U, onde $U \subset M$ é aberto. Então,*

$$(\Delta^\perp)^\perp = \Delta.$$

Demonstração. A Proposição A.8 e argumentos similares aos utilizados na prova da Proposição A.9 implicam que $(\Delta^\perp)^\perp \subset \Delta$. □

O próximo resultado, apesar de intuitivo, parece não ser tão evidente assim.

Proposição A.12. *Sejam $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ distribuições em U tais que $\Delta_2, \Delta_3 \subset \Delta_1$, onde $U \subset M$ é aberto. Suponha que $V \subset U$ é aberto. Então,*

$$(\Delta_2 + \Delta_3)|V = \Delta_2|V + \Delta_3|V,$$
$$(\Delta_1 + [\Delta_2, \Delta_3])|V = \Delta_1|V + [\Delta_2|V, \Delta_3|V].$$

Demonstração. Segue das definições que $(\Delta_2 + \Delta_3)|V = \Delta_2|V + \Delta_3|V$. Considere as distribuições $H = \Delta_1 + [\Delta_2, \Delta_3]$ e $\widetilde{H} = \Delta_1|V + [\Delta_2|V, \Delta_3|V]$. Temos que mostrar que

[5] Veja, por exemplo, [52, pág. 344].

$H|V = \widetilde{H}$. Seja $X = \sum_{i=1}^{k} a_i(X_i|V) \in H|V$, onde $a_i \in \mathcal{C}^\infty(V)$ e $X_i \in H$. Assim, $X_i = \sum_{j=1}^{k_i} b_{ij}(Y_{ij}^1 + [Y_{ij}^2, Y_{ij}^3])$, onde $b_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $Y_{ij}^1 \in \Delta_1$, $Y_{ij}^2 \in \Delta_2$, $Y_{ij}^3 \in \Delta_3$, para cada $1 \leq i \leq k$. Pelo Teorema A.1, temos que $X_i|V = \sum_{j=1}^{k_i} b_{ij}|V(Y_{ij}^1|V + [Y_{ij}^2|V, Y_{ij}^3|V]) \in \widetilde{H}$, para todo $1 \leq i \leq k$. Logo, $X \in \widetilde{H}$. Agora, seja $X = \sum_{i=1}^{k} a_i(Y_i^1 + [Y_i^2, Y_i^3]) \in \widetilde{H}$, com a_i em $\mathcal{C}^\infty(V)$, $Y_i^1 \in \Delta_1|V$, $Y_i^2 \in \Delta_2|V$, $Y_i^3 \in \Delta_3|V$. Temos então que $Y_i^j = \sum_{\ell=1}^{k_{ij}} b_{ij\ell}(Z_{ij\ell}|V)$, onde $b_{ij\ell} \in \mathcal{C}^\infty(V)$, $Z_{ij\ell} \in \Delta_j \subset \Delta_1$, para $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq 3$. Aplicando o Teorema A.1,

$$\begin{aligned}
[Y_i^2, Y_i^3] &= [\sum_{\ell=1}^{k_{i2}} b_{i2\ell}(Z_{i2\ell}|V), \sum_{m=1}^{k_{i3}} b_{i3m}(Z_{i3m}|V)] \\
&= \sum_{\ell=1}^{k_{i2}} \sum_{m=1}^{k_{i3}} c_{i\ell m}(Z_{i2\ell}|V) + d_{i\ell m}(Z_{i3m}|V) + e_{i\ell m}([Z_{i2\ell}, Z_{i3m}]|V) \in H|V,
\end{aligned}$$

onde $c_{i\ell m}, d_{i\ell m}, e_{i\ell m} \in \mathcal{C}^\infty(V)$, para $1 \leq i \leq k$. Portanto, $X \in H|V$. $\square$

Apêndice B

Formalização dos Conceitos de Campo de Vetores Parametrizado e de Campo de Vetores Aumentado

Suponha que M é uma variedade suave de dimensão finita. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathfrak{X}(U)$, onde $U \subset M$ é aberto. Definimos $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathfrak{X}(U)$ por

$$F_u = f + g_1 u_1 + g_2 u_2, \qquad \text{para todo } u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Em outras palavras, F é um campo de vetores suave em U parametrizado por $u \in \mathbb{R}^2$. Denominamos F de *campo de vetores parametrizado* em relação à tripla ordenada (f, g_1, g_2). Isto será denotado por $F = (f, g_1, g_2)$.

Assuma que φ é uma carta local de M definida em um aberto $V \subset U$. Temos que a expressão de F_u na carta local $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ é dada por

$$F_u(x) = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2,$$

ou seja,

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2,$$

para todo $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, onde $f(x), g_1(x), g_2(x)$ são as expressões de f, g_1, g_2 na carta local $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, respectivamente.

Considere então a variedade produto $\mathbb{R} \times M$, com $\mathbb{R}$ munido da estrutura usual de

variedade suave. Por abuso de notação, denotamos por t a carta global canônica de $\mathbb{R}$ (função identidade). Sejam $\pi^1\colon \mathbb{R}\times M \to \mathbb{R}$ e $\pi^2\colon \mathbb{R}\times M \to M$ as projeções canônicas definidas por $\pi^1(t,p)=t$ e $\pi^2(t,p)=p$, para todo $(t,p)\in\mathbb{R}\times M$, respectivamente. Para cada $(t,p)\in\mathbb{R}\times M$, considere a aplicação canônica $j_{(t,p)}\colon T_{(t,p)}(\mathbb{R}\times M)\to T_t\mathbb{R}\times T_pM$ definida por $j_{(t,p)}(X_{(t,p)})=(\pi^1_*(X_{(t,p)}),\pi^2_*(X_{(t,p)}))$, para todo $X_{(t,p)}\in T_{(t,p)}(\mathbb{R}\times M)$, onde π^1_* e π^2_* são as aplicações tangentes de π^1 e π^2 em (t,p), respectivamente. É um resultado bem conhecido[1] em geometria diferencial que $j_{(t,p)}$ é um isomorfismo sobrejetivo, para cada $(t,p)\in\mathbb{R}\times M$. Definimos

$$F^a_u(t,p)=j^{-1}_{(t,p)}(d/dt|_t,F_u(p))\in T_{(t,p)}(\mathbb{R}\times M),$$

para todo $(t,p)\in\mathbb{R}\times U$, $u\in\mathbb{R}^2$, onde d/dt é o campo de vetores suave usual em $\mathbb{R}$, isto é, $d/dt|_t(\alpha)$ é a derivada da função suave α no ponto $t\in\mathbb{R}$, onde α está definida em uma vizinhança aberta de $t\in\mathbb{R}$. É evidente que

$$F^a_u(t,p)=f^a(t,p)+g^a_1(t,p)u_1+g^a_2(t,p)u_2,$$

onde

$$\begin{aligned} f^a(t,p)&=j^{-1}_{(t,p)}(d/dt|_t,f(p)),\\ g^a_1(t,p)&=j^{-1}_{(t,p)}(0,g_1(p)),\\ g^a_2(t,p)&=j^{-1}_{(t,p)}(0,g_2(p)), \end{aligned} \tag{B.1}$$

para todo $(t,p)\in\mathbb{R}\times U$, $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$, ou seja, $F^a_u=f^a+g^a_1u_1+g^a_2u_2$, para $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$. Além disso, dado $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$, é fácil verificar que

$$\begin{aligned} \pi^2_*(F^a_u(t,p))&=F_u(p)=f(p)+g_1(p)u_1+g_2(p)u_2,\\ \pi^2_*(f^a(t,p))&=f(p),\\ \pi^2_*(g^a_1(t,p))&=g_1(p),\\ \pi^2_*(g^a_2(t,p))&=g_2(p), \end{aligned} \tag{B.2}$$

[1] Veja, por exemplo, [55, pág. 78], [127, pág. 52].

para todo $(t,p) \in \mathbb{R} \times U$, isto é,

$$\begin{aligned} F_u &= \pi_*^2(F_u^a), \\ f &= \pi_*^2(f^a), \\ g_1 &= \pi_*^2(g_1^a), \\ g_2 &= \pi_*^2(g_2^a). \end{aligned} \tag{B.3}$$

Agora, seja $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ uma carta local de M definida em um aberto $V \subset U$. Considere que $f(x), g_1(x), g_2(x), F_u(x)$ são as expressões de f, g_1, g_2, F_u na carta local φ, respectivamente, para cada $u \in \mathbb{R}^2$. É imediato ver que, na carta local (t, φ) de $\mathbb{R} \times M$,

$$\begin{aligned} f^a(t,x) &= (1, f(x)), \\ g_1^a(t,x) &= (0, g_1(x)), \\ g_2^a(t,x) &= (0, g_2(x)), \\ F_u^a(t,x) &= (1, F_u(x)) = (1, f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2) \\ &= f^a(t,x) + g_1^a(t,x)u_1 + g_2^a(t,x)u_2, \end{aligned} \tag{B.4}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{t} &= 1 \\ \dot{x} &= f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2, \end{aligned}$$

para todo $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, $f^a, g_1^a, g_2^a \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times U)$ e $F_u^a \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times U)$, para todo $u \in \mathbb{R}^2$, como era de se esperar. Assim, $F^a\colon \mathbb{R}^2 \to \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times U)$. Denominamos F^a de *campo de vetores aumentado* em relação a $F = (f, g_1, g_2)$. Devido à (B.1), isto será denotado por $F^a = (f^a, g_1^a, g_2^a)$. Observamos que (B.3) é o mesmo que dizer que $F_u^a, f^a, g_1^a, g_2^a \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times U)$ são π^2-relacionados com $F_u, f, g_1, g_2 \in \mathfrak{X}(U)$, respectivamente, para cada $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

Por fim, seja $\psi = (y^1, \ldots, y^n)$ uma carta local de M definida em uma vizinhança aberta $W \subset U$ e $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Se a expressão de F_u^a na carta local (t, ψ) de $\mathbb{R} \times M$ é dada por

$$F_u^a(t,y) = (1, \overline{f}(y) + \overline{g}_1(y)u_1 + \overline{g}_2(y)u_2),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{t} &= 1 \\ \dot{y} &= \overline{f}(y) + \overline{g}_1(y)u_1 + \overline{g}_2(y)u_2, \end{aligned}$$

então é claro que a expressão de F_u na carta local $\psi = (y^1, \ldots, y^n)$ de M é dada por

$$F_u(y) = \overline{f}(y) + \overline{g}_1(y)u_1 + \overline{g}_2(y)u_2 = f(y) + g_1(y)u_1 + g_2(y)u_2, \tag{B.5}$$

ou seja,

$$\dot{y} = f(y) + g_1(y)u_1 + g_2(y)u_2,$$

onde $f(y), g_1(y), g_2(y)$ são as expressões de f, g_1, g_2 na carta local ψ, respectivamente.

Temos, ainda, o seguinte resultado.

Proposição B.1. *Sejam $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(U)$, onde $U \subset M$ é aberto. Considere a variedade produto $\mathbb{R} \times M$ e a projeção canônica $\pi^2\colon \mathbb{R} \times M \to M$. Defina os campos de vetores suaves $X_1^a, X_2^a \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times U)$ por $X_1^a(t,p) = j_{(t,p)}^{-1}(0, X_1(p))$, $X_2^a(t,p) = j_{(t,p)}^{-1}(0, X_2(p))$, para todo $(t,p) \in \mathbb{R} \times U$, respectivamente, onde a aplicação $j_{(t,p)}\colon T_{(t,p)}(\mathbb{R} \times M) \to T_t\mathbb{R} \times T_pM$ é o isomorfismo sobrejetivo canônico. Defina, para cada $k \in \mathbb{N}$, as seguintes distribuições*

$$\begin{aligned} G_0 &= span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{X_1, X_2\}, & G_0^a &= span_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\times U)}\{X_1^a, X_2^a\}, \\ G_{k+1} &= G_k + [G_k, G_k] \supset G_k, & G_{k+1}^a &= G_k^a + [G_k^a, G_k^a] \supset G_k^a. \end{aligned}$$

Então, $\pi_*^2|G_k^a(t,p)$ é uma aplicação linear injetiva e

$$\pi_*^2(G_k^a(t,p)) = G_k(p),$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, $(t,p) \in \mathbb{R} \times U$. Em particular, $\dim(G_k^a(t,p)) = \dim(G_k(p))$, para $k \in \mathbb{N}$, $(t,p) \in \mathbb{R} \times U$. Além disso,

$$\langle d\pi^1, X^a \rangle_{(t,p)} = X_{(t,p)}^a(\pi^1) = 0,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, $X^a \in G_k^a$, $(t,p) \in \mathbb{R} \times U$, onde $\pi^1\colon \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ é a projeção canônica.

Demonstração. Este resultado será provado por indução sobre $k \in \mathbb{N}$. Defina, para $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} B_0 &= \{X_1, X_2\}, \quad B_0^a = \{X_1^a, X_2^a\}, \\ B_{k+1} &= \{X \in \mathfrak{X}(U) \mid X = [Y_1, Y_2], \text{ onde } Y_1, Y_2 \in \bigcup_{j=0}^{k} B_j\}, \\ B_{k+1}^a &= \{X^a \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times U) \mid X^a = [Y_1^a, Y_2^a], \text{ onde } Y_1^a, Y_2^a \in \bigcup_{j=0}^{k} B_j^a\}. \end{aligned}$$

Como $X_1 = \pi^2_*(X^a_1)$, $X_2 = \pi^2_*(X^a_2)$, ou seja, $X_1(p) = \pi^2_*(X^a_1(t,p))$, $X_2(p) = \pi^2_*(X^a_2(t,p))$, para $(t,p) \in \mathbb{R} \times U$ (veja (B.1)–(B.3)), é claro que $\pi^2_*(B^a_0) = B_0$ e $\pi^2_*(G^a_0(t,p)) = G_0(p)$, para todo $(t,p) \in \mathbb{R} \times U$. Seja $(t,p) \in \mathbb{R} \times U$. Suponha então que (hipótese de indução)

$$\begin{aligned} \pi^2_*(B^a_i) &= B_i, \\ \pi^2_*(G^a_i(t,p)) &= G_i(p), \quad \text{para cada } 0 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

Primeiramente, vamos mostrar que $\pi^2_*(B^a_{k+1}) = B_{k+1}$. Seja $X \in B_{k+1}$. Por definição, temos que $X = [Y_1, Y_2]$, onde $Y_1, Y_2 \in \bigcup_{j=0}^k B_j$. Mas, $Y_1 = \pi^2_*(Z^a_1)$, $Y_2 = \pi^2_*(Z^a_2)$, onde $Z^a_1, Z^a_2 \in \bigcup_{j=0}^k B^a_j$. Como[2]

$$X = [Y_1, Y_2] = [\pi^2_*(Z^a_1), \pi^2_*(Z^a_2)] = \pi^2_*([Z^a_1, Z^a_2])$$

e $[Z^a_1, Z^a_2] \in B^a_{k+1}$, obtemos que $X \in \pi^2_*(B^a_{k+1})$. Portanto, $B_{k+1} \subset \pi^2_*(B^a_{k+1})$. Agora, seja $X \in \pi^2_*(B^a_{k+1})$. Assim, $X = \pi^2_*(X^a)$, onde $X^a = [Z^a_1, Z^a_2] \in B^a_{k+1}$, com $Z^a_1, Z^a_2 \in \bigcup_{j=0}^k B^a_j$. Mas, $\pi^2_*(Z^a_1), \pi^2_*(Z^a_2) \in \bigcup_{j=0}^k B_j$ e $X = \pi^2_*(X^a) = \pi^2_*([Z^a_1, Z^a_2]) = [\pi^2_*(Z^a_1), \pi^2_*(Z^a_2)] \in B_{k+1}$. Desse modo, $\pi^2_*(B^a_{k+1}) \subset B_{k+1}$. Logo, $\pi^2_*(B^a_{k+1}) = B_{k+1}$.

Decorre da Proposição 3.5 (veja a Definição 3.3) e da Proposição A.4 que, dado $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} G_{\ell+1}(p) &= G_0(p) + \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(B_{\ell+1}|_p), \\ G^a_{\ell+1}(t,p) &= G^a_0(t,p) + \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(B^a_{\ell+1}|_{(t,p)}). \end{aligned} \tag{B.6}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} G_{k+1}(p) &= G_0(p) + \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(B_{k+1}|_p) = \pi^2_*(G^a_0(t,p)) + \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(\pi^2_*(B^a_{k+1})|_p) \\ &= \pi^2_*(G^a_0(t,p)) + \pi^2_*(\operatorname{span}_{\mathbb{R}}(B^a_{k+1}|_{(t,p)})) \\ &= \pi^2_*(G^a_0(t,p) + \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(B^a_{k+1}|_{(t,p)})) \\ &= \pi^2_*(G^a_{k+1}(t,p)). \end{aligned}$$

Seja $\pi^1\colon \mathbb{R}\times M \to \mathbb{R}$ a projeção canônica. Da definição de colchete de Lie, é fácil ver que se $Y^a, Z^a \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times U)$ são tais que $Y^a_{(t,p)}(\pi^1) = Z^a_{(t,p)}(\pi^1) = 0$, então $[Y^a, Z^a]_{(t,p)}(\pi^1) = 0$, para $(t,p) \in \mathbb{R}\times U$. Observe que $X^a_1(t,p)(\pi^1) = X^a_2(t,p)(\pi^1) = 0$, para $(t,p) \in \mathbb{R}\times U$ (veja (B.1) e (B.4)). Assim, é imediato provar por indução sobre $k \in \mathbb{N}$ que $Y^a_{(t,p)}(\pi^1) = 0$, para

[2]Para a validade desta última igualdade, isto é, a comutatividade, veja, por exemplo, [6, Teorema 7.9 do Capítulo 4].

$Y^a \in B^a_k$, $(t,p) \in \mathbb{R} \times U$, $k \in \mathbb{N}$. Em particular, concluímos de (B.6) que $\langle d\pi^1, Y^a \rangle_{(t,p)} = Y^a_{(t,p)}(\pi^1) = 0$, para $Y^a \in G^a_k$, $(t,p) \in \mathbb{R} \times U$, $k \in \mathbb{N}$.

Resta-nos mostrar que $\pi^2_*|G^a_k(t,p)$ é injetiva, para $(t,p) \in \mathbb{R} \times U$, $k \in \mathbb{N}$. Para isto, sejam $(t,p) \in \mathbb{R} \times U$, $k \in \mathbb{N}$, $Y^a_{(t,p)} \in G^a_k(t,p)$ e considere que $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ é uma carta local de M definida em uma vizinhança aberta $V \subset U$ de p. Suponha que $\pi^2_*(Y^a_{(t,p)}) = 0$. Desse modo, $Y^a_{(t,p)}(x^i \circ \pi^2|(\mathbb{R} \times V)) = \pi^2_*(Y^a_{(t,p)})(x^i) = 0$, para $1 \leq i \leq n$. Logo, $Y^a_{(t,p)} = 0$, pois $Y^a_{(t,p)}(\pi^1) = 0$. $\square$

Apêndice C

Demonstrações de Alguns Resultados Conhecidos da Teoria de Controle Geométrica

Proposição C.1. *Sejam X_1, X_2, $\widehat{X}_1$, $\widehat{X}_2 \in \mathfrak{X}(U)$, onde $U \subset M$ é aberto. Suponha que*

$$\widehat{X}_1 = \beta_{11}X_1 + \beta_{12}X_2,$$
$$\widehat{X}_2 = \beta_{21}X_1 + \beta_{22}X_2,$$

onde $\beta_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(U)$, para cada $1 \leq i, j \leq 2$, e a matriz quadrada $\beta(p) = (\beta_{ij}(p)) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ é invertível, para todo $p \in U$. Seja (F_k) o flag de Lie e (G_k) o flag derivado da distribuição $\Delta = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{X_1, X_2\}$. Do mesmo modo, seja $(\widehat{F}_k)$ o flag de Lie e $(\widehat{G}_k)$ o flag derivado da distribuição $\widehat{\Delta} = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{\widehat{X}_1, \widehat{X}_2\}$. Então,

$$(F_k) = (\widehat{F}_k),$$
$$(G_k) = (\widehat{G}_k),$$

ou seja, $F_k = \widehat{F}_k$ e $G_k = \widehat{G}_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre $k \in \mathbb{N}$. É evidente que $\widehat{F}_0 \subset F_0$, pois $\widehat{F}_0 = \widehat{\Delta}$ e $F_0 = \Delta$. Temos que

$$\beta(p) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(p) & \beta_{12}(p) \\ \beta_{21}(p) & \beta_{22}(p) \end{pmatrix}, \quad \beta(p)^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(p) & \gamma_{12}(p) \\ \gamma_{21}(p) & \gamma_{22}(p) \end{pmatrix},$$

para todo $p \in U$, onde $\gamma_{ij}(p) \in \mathbb{R}$, para cada $1 \leq i, j \leq 2$. Mas, a aplicação $\gamma\colon U \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por $\gamma(p) = \beta(p)^{-1}$, para todo $p \in U$, é suave[1]. Em particular, $\gamma_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(U)$, para $1 \leq i, j \leq 2$. Considere então $\widetilde{X}_1 = \gamma_{11}\widehat{X}_1 + \gamma_{12}\widehat{X}_2$, $\widetilde{X}_2 = \gamma_{21}\widehat{X}_1 + \gamma_{22}\widehat{X}_2 \in \mathfrak{X}(U)$. Como $\widehat{X}_1 = \beta_{11}X_1 + \beta_{12}X_2$ e $\widehat{X}_2 = \beta_{21}X_1 + \beta_{22}X_2$, segue da definição de γ que $\widetilde{X}_1 = X_1$ e $\widetilde{X}_2 = X_2$. Portanto, $F_0 \subset \widehat{F}_0$. Logo, $F_0 = \widehat{F}_0$ e $G_0 = \widehat{G}_0$. Assuma agora que $F_k = \widehat{F}_k$ e $G_k = \widehat{G}_k$. É imediato da Definição 3.3 que $F_{k+1} = \widehat{F}_{k+1}$ e $G_{k+1} = \widehat{G}_{k+1}$. □

C.1 Prova da Proposição 3.4

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre $k \in \mathbb{N}$. Vamos primeiro mostrar por indução sobre $k \in \mathbb{N}$ que $\bigcup_{j=0}^{k} A_j \subset F_k$. Em particular, $\mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(\bigcup_{j=0}^{k} A_j) \subset F_k$, para $k \in \mathbb{N}$. É evidente que $A_0 \subset F_0 = \Delta$. Suponha que $\bigcup_{j=0}^{k} A_j \subset F_k$. Obtemos então a partir das definições de F_{k+1} e de A_{k+1} que $\bigcup_{j=0}^{k+1} A_j \subset F_{k+1}$.

Observe que $F_0 = \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(A_0)$. Considere então que (hipótese de indução)

$$F_k = \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(\bigcup_{j=0}^{k} A_j).$$

Seja $X = W_1 + [W_2, W_3] \in F_{k+1}$, onde $W_1, W_2 \in F_k$, $W_3 \in F_0$. Temos que

$$\begin{aligned} W_2 &= \sum_{\ell=1}^{m} \beta_\ell Y_\ell \in F_k = \mathrm{span}(\bigcup_{j=0}^{k} A_j), \\ W_3 &= \gamma X_1 + \delta X_2, \end{aligned}$$

onde $\beta_\ell, \gamma, \delta \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $Y_\ell \in \bigcup_{j=0}^{k} A_j$. O Teorema A.1 implica que

$$\begin{aligned} [W_2, W_3] &= [\sum_{\ell=1}^{m} \beta_\ell Y_\ell, \gamma X_1 + \delta X_2] = -\sum_{\ell=1}^{m} [\gamma X_1, \beta_\ell Y_\ell] + [\delta X_2, \beta_\ell Y_\ell] \\ &= \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell X_1 + b_\ell X_2 + c_\ell Y_\ell + d_\ell [X_1, Y_\ell] + e_\ell [X_2, Y_\ell], \end{aligned}$$

[1] Veja, por exemplo, [52, pág. 344].

onde $a_\ell, b_\ell, c_\ell, d_\ell, e_\ell \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Como

$$\begin{aligned}
&X_1, X_2 \in A_0 \subset \bigcup_{j=0}^{k+1} A_j,\\
&W_1 \in F_k = \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(\bigcup_{j=0}^{k} A_j) \subset \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(\bigcup_{j=0}^{k+1} A_j),\\
&Y_\ell \in \bigcup_{j=0}^{k} A_j \subset \bigcup_{j=0}^{k+1} A_j,\\
&[X_1, Y_\ell], [X_2, Y_\ell] \in \bigcup_{j=0}^{k+1} A_j,
\end{aligned}$$

obtemos que $X \in \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(\bigcup_{j=0}^{k+1} A_j)$. Portanto, $F_{k+1} \subset \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(\bigcup_{j=0}^{k+1} A_j)$ e, assim, $F_{k+1} = \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(\bigcup_{j=0}^{k+1} A_j)$.

Acabamos de mostrar que $F_k = \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(\bigcup_{j=0}^{k} A_j)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. É evidente que $F_{k+1} = F_k + \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(A_{k+1})$, para cada $k \in \mathbb{N}$. □

C.2 Prova da Proposição 3.5

Demonstração. Provaremos este resultado por indução sobre $k \in \mathbb{N}$. Primeiramente, observamos que $B_0, \ldots, B_k \subset G_k$, $k \in \mathbb{N}$. Em particular, $G_0 + \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_{k+1}) \subset G_{k+1}$, para $k \in \mathbb{N}$, pois $G_0 = \Delta = \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_0)$. De fato, é claro que $B_0 \subset G_0$. Assuma que $B_0, \ldots, B_k \subset G_k$. Segue então das definições de G_{k+1} e de B_{k+1} que $B_0, \ldots, B_{k+1} \subset G_{k+1}$.

Note que $G_0 = \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_0) = G_0 + \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_0)$ e $B_{k+1} \subset B_{k+2}$, para $k \in \mathbb{N}$. Considere então que (hipótese de indução)

$$G_k = G_0 + \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_k).$$

Seja $X = W_1 + [W_2, W_3] \in G_{k+1}$, onde $W_1, W_2, W_3 \in G_k$. Assim,

$$W_i = Z_i + \sum_{\ell=1}^{r_i} \beta_{i\ell} Y_{i\ell} \in G_k = G_0 + \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_k),$$

para $2 \leq i \leq 3$, onde $\beta_{i\ell} \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $Z_i \in G_0$, $Y_{i\ell} \in B_k \subset G_k$. Utilizando o Teorema A.1,

obtemos que

$$\begin{aligned}
[W_2, W_3] &= [Z_2 + \sum_{\ell=1}^{r_2} \beta_{2\ell} Y_{2\ell}, Z_3 + \sum_{m=1}^{r_3} \beta_{3m} Y_{3m}] \\
&= [Z_2, Z_3] + \sum_{m=1}^{r_3} [Z_2, \beta_{3m} Y_{3m}] + \sum_{\ell=1}^{r_2} [\beta_{2\ell} Y_{2\ell}, Z_3] + \sum_{\ell=1}^{r_2} \sum_{m=1}^{r_3} [\beta_{2\ell} Y_{2\ell}, \beta_{3m} Y_{3m}] \\
&= [Z_2, Z_3] + \sum_{m=1}^{r_3} a_m Y_{3m} + b_m [Z_2, Y_{3m}] + \sum_{\ell=1}^{r_2} c_\ell Y_{2\ell} + d_\ell [Y_{2\ell}, Z_3] \\
&+ \sum_{\ell=1}^{r_2} \sum_{m=1}^{r_3} e_{\ell m} Y_{2\ell} + f_{\ell m} Y_{3m} + g_{\ell m} [Y_{2\ell}, Y_{3m}],
\end{aligned}$$

onde $a_m, b_m, c_\ell, d_\ell, e_{\ell m}, f_{\ell m}, g_{\ell m} \in \mathcal{C}^\infty(U)$, e que

$$\begin{aligned}
&[Z_2, Z_3] \in G_0 + \operatorname{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_1) \subset G_0 + \operatorname{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_{k+1}), \\
&[Z_2, Y_{3m}], [Y_{2\ell}, Z_3] \in G_0 + \operatorname{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_{k+1}).
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
&W_1, Y_{2\ell}, Y_{3m} \in G_k = G_0 + \operatorname{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_k) \subset G_0 + \operatorname{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_{k+1}), \\
&[Y_{2\ell}, Y_{3m}] \in B_{k+1} \subset G_0 + \operatorname{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_{k+1}),
\end{aligned}$$

concluímos que $X \in G_0 + \operatorname{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_{k+1})$. Logo, $G_{k+1} \subset G_0 + \operatorname{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_{k+1})$ e, dessa maneira, $G_{k+1} = G_0 + \operatorname{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_{k+1})$.

Acabamos de mostrar que $G_k = G_0 + \operatorname{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_k)$, para $k \in \mathbb{N}$. Como $G_0 \subset G_k$ e $G_0 + \operatorname{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_k) \subset G_0 + \operatorname{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_{k+1})$, é imediato que $G_{k+1} = G_k + \operatorname{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}(B_{k+1})$, para cada $k \in \mathbb{N}$. □

C.3 Prova do Teorema 3.7

Parte da demonstração do Teorema 3.7 está baseada no lema dado abaixo.

Lema C.2. *Sejam $X^1, X^2 \in \mathfrak{X}(U)$, onde $U \subset M$ é aberto e $\dim(M) = n \geq 2$. Considere que φ é uma carta local de M definida em U. Assuma que as expressões de X^1 e X^2 na carta local $\varphi = (z^1, \ldots, z^n)$ são dadas, respectivamente, por:*

para $n = 2$,

$$X^1(z) = (0, 1),$$
$$X^2(z) = (1, 0);$$

e, para $n \geq 3$,

$$X^1(z) = (z^2, z^3, \ldots, z^{n-1}, 0, 1),$$
$$X^2(z) = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0)$$

(note que $X^2 = \partial/\partial z^{n-1}$*). Seja* (F_k) *o flag de Lie e* (G_k) *o flag derivado da distribuição* $\Delta = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{X_1, X_2\}$*. Então, para cada* $0 \leq k \leq n-2$*, temos que*

$$F_k = G_k = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{X^1, \partial/\partial z^{n-1}, \partial/\partial z^{n-2}, \ldots, \partial/\partial z^{n-1-k}\}.$$

Em particular, F_k, G_k *possuem dimensão constante com* $\dim(F_k) = \dim(G_k) = 2+k$*, para* $0 \leq k \leq n-2$*. Além disso,*

$$(F_k)^\perp = (G_k)^\perp = span_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{dz^1 - z^2 dz^n, dz^2 - z^3 dz^n, \ldots, dz^{n-2-k} - z^{n-1-k} dz^n\},$$
$$(F_{n-2})^\perp = (G_{n-2})^\perp = \{0\},$$

para $0 \leq k \leq n-3$.

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar por indução sobre $0 \leq k \leq n-2$ que

$$G_k = \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{X^1, \partial/\partial z^{n-1}, \partial/\partial z^{n-2}, \ldots, \partial/\partial z^{n-1-k}\}. \tag{C.1}$$

Como $X^2 = \partial/\partial z^{n-1}$, é imediato que $G_0 = \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{X^1, \partial/\partial z^{n-1}\}$. Suponha então que (hipótese de indução)

$$G_k = \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{X^1, \partial/\partial z^{n-1}, \partial/\partial z^{n-2}, \ldots, \partial/\partial z^{n-1-k}\},$$

onde $0 \leq k \leq n-3$ com $n \geq 3$. Defina $H = G_k + \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{\partial/\partial z^{n-1-(k+1)}\}$. Assim, basta demonstrarmos que $G_{k+1} = H$. Por hipótese,

$$X^1(z) = (z^2, z^3, \ldots, z^{n-1}, 0, 1).$$

É fácil ver que[2]

$$[\partial/\partial z^{n-j}, X^1] = \partial/\partial z^{n-1-j} \in F_j \subset G_j, \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq n-2. \tag{C.2}$$

Em particular, $\partial/\partial z^{n-1-(k+1)} = \partial/\partial z^{n-2-k} \in G_{k+1}$. Logo, $H \subset G_{k+1}$, pois $G_k \subset G_{k+1}$. Agora, seja $Y = Y^1 + [Y^2, Y^3] \in G_{k+1}$, onde $Y^i \in G_k$, para $1 \leq i \leq 3$. Temos que

$$Y^i = \alpha^i X^1 + \sum_{j=1}^{k+1} \beta^{ij} \partial/\partial z^{n-j},$$

onde $\alpha^i, \beta^{ij} \in \mathcal{C}^\infty(U)$, para $1 \leq i \leq 3$. Decorre então do Teorema A.1 e de (C.2) que

$$\begin{aligned}[Y^2, Y^3] &= [\alpha^1 X^1 + \sum_{j=1}^{k+1} \beta^{1j} \partial/\partial z^{n-j}, \alpha^2 X^1 + \sum_{j=1}^{k+1} \beta^{2j} \partial/\partial z^{n-j}] \\ &= \lambda X^1 + \sum_{j=1}^{k+1} \gamma^j \partial/\partial z^{n-j} + \sum_{j=1}^{k+1} \delta^j \partial/\partial z^{n-1-j} \in H,\end{aligned}$$

onde $\lambda, \gamma^j, \delta^j \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Como $Y_1 \in G_k \subset H$, temos que $Y \in H$. Desse modo, $G_{k+1} \subset H$.

Relembramos que $F_k \subset G_k$, para $0 \leq k \leq n-2$, com $F_0 = G_0$. Por outro lado, é imediato de (C.1) e (C.2) que $G_k \subset F_k$, para $0 \leq k \leq n-2$. Portanto, $F_k = G_k$, para cada $0 \leq k \leq n-2$.

Por fim, (C.1) e a Proposição A.4 implicam que $\dim(G_k) = 2 + k$, para $0 \leq k \leq n-2$. Assim, a Proposição A.9 fornece que

$$(G_k)^\perp = \text{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{dz^1 - z^2 dz^n, dz^2 - z^3 dz^n, \ldots, dz^{n-2-k} - z^{n-1-k} dz^n\},$$

para $0 \leq k \leq n-3$, e a Proposição A.8 que $(G_{n-2})^\perp = \{0\}$.

□

Demonstração do Teorema 3.7. Mostraremos que $(1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1)$, supondo que $n \geq 3$. Em [76], é demonstrado que $(1 \Rightarrow 2)$. O fato de que $(2 \Rightarrow 3)$ é uma conseqüência imediata da Forma Normal de Goursat do Teorema 2.27. Veremos agora que $(3 \Rightarrow 4)$.

Assuma que 3 é verdade. De acordo com as versões duais da Proposição A.4 e da

[2] Veja também [105, Lema 11.8].

Proposição A.10 para codistribuições, temos que

$$(\Delta|\widetilde{V})^{\perp} = \Lambda|\widetilde{V} = \mathrm{span}_{\mathcal{C}^{\infty}(\widetilde{V})}\{dy^2 - y^3dy^1, \ldots, dy^{n-1} - y^n dy^1\}, \tag{C.3}$$

restringindo $\widetilde{V}$ se necessário. Seja $F = (0, g_1, g_2)$ o campo de vetores parametrizado associado ao sistema (3.5) com $f = 0$, isto é, $F_u = g_1u_1 + g_2u_2 \in \mathfrak{X}(U)$, para todo $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Temos que

$$\begin{aligned}
\dot{y}^1(q) &= \langle dy^1, F_u\rangle_q = u_1\langle dy^1, g_1\rangle_q + u_2\langle dy^1, g_2\rangle_q,\\
\dot{y}^n(q) &= \langle dy^n, F_u\rangle_q = u_1\langle dy^n, g_1\rangle_q + u_2\langle dy^n, g_2\rangle_q,
\end{aligned}$$

para todo $q \in \widetilde{V}$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Como $F_u|\widetilde{V} \in \Delta|\widetilde{V}$, para todo $u \in \mathbb{R}^2$, obtemos de (C.3) que

$$\begin{aligned}
\dot{y}^2(q) &= \langle dy^2, F_u\rangle_q = (y^3\langle dy^1, F_u\rangle)_q = y^3(q)\dot{y}^1(q)\\
&= u_1(y^3\langle dy^1, g_1\rangle)_q + u_2(y^3\langle dy^1, g_2\rangle)_q,\\
&\vdots\\
\dot{y}^{n-1}(q) &= \langle dy^{n-1}, F_u\rangle_q = (y^n\langle dy^1, F_u\rangle)_q = y^n(q)\dot{y}^1(q)\\
&= u_1(y^n\langle dy^1, g_1\rangle)_q + u_2(y^n\langle dy^1, g_2\rangle)_q,
\end{aligned}$$

para todo $q \in \widetilde{V}$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Mas, para $1 \leq i \leq 2$, a expressão de $g_i \in \mathfrak{X}(U)$ na carta local $\psi = (y^1, \ldots, y^n)$ é dada por

$$\begin{aligned}
g_i(y) &= (\langle dy^1, g_i\rangle_q, \ldots, \langle dy^n, g_i\rangle_q)\\
&= (\langle dy^1, g_i\rangle, y^3\langle dy^1, g_i\rangle, \ldots, y^n\langle dy^1, g_i\rangle, \langle dy^n, g_i\rangle)|_q.
\end{aligned}$$

Como $\dim(\Delta_q) = 2$, para $q \in \widetilde{V}$, temos que g_1, g_2 são linearmente independentes em $\widetilde{V}$. Portanto, a matriz quadrada real dada por

$$\gamma(q) = \begin{pmatrix} \langle dy^1, g_1\rangle_q & \langle dy^1, g_2\rangle_q \\ \langle dy^n, g_1\rangle_q & \langle dy^n, g_2\rangle_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

tem que ser invertível, para todo $q \in \widetilde{V}$. Defina a aplicação suave[3] β: $\widetilde{V} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ por $\beta(q) = \gamma(q)^{-1}$, para todo $q \in \widetilde{V}$. Considere então a seguinte realimentação de estado

[3] O fato de β ser suave pode ser visto em [52, pág. 344], por exemplo.

estática regular

$$u = \beta v, \tag{C.4}$$

onde $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Por construção, temos que

$$\begin{aligned} \dot{y}^1 &= v^1 \\ \dot{y}^2 &= y^3 v_1 \\ &\vdots \\ \dot{y}^{n-1} &= y^n v_1 \\ \dot{y}^n &= v_2, \end{aligned} \tag{C.5}$$

para $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Logo, a carta local $\varphi = (z^1, \ldots, z^n) = (y^2, \ldots, y^{n-1}, y^1, y^n)$ definida na vizinha aberta $\widetilde{V} \subset U$ de p é a mudança de coordenadas desejada para que 4 seja satisfeita.

Por fim, assuma que 4 é válida. Assim, existe uma carta local φ, além de uma realimentação de estado estática regular da forma $u = \beta v$, ambas definidas em uma vizinhança aberta $\widehat{V} \subset U$ de p, em que a expressão do sistema em malha-fechada resultante (3.6) na carta local $\varphi = (z^1, \ldots, z^n)$ é dada pela forma em cascata (3.7). Isto significa que as expressões dos seguintes campos de vetores

$$\begin{aligned} \widehat{g}_1 &= (\beta_{11} g_1 + \beta_{12} g_2)|\widehat{V} \in \mathfrak{X}(\widehat{V}), \\ \widehat{g}_2 &= (\beta_{21} g_1 + \beta_{22} g_2)|\widehat{V} \in \mathfrak{X}(\widehat{V}) \end{aligned}$$

na carta local φ são dadas por

$$\begin{aligned} \widehat{g}_1(z) &= (z^2, z^3, \ldots, z^{n-1}, 0, 1), \\ \widehat{g}_2(z) &= (0, 0, \ldots, 0, 1, 0), \end{aligned} \tag{C.6}$$

respectivamente, onde $\beta = (\beta_{ij})$.

Defina $\widehat{\Delta} = \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(\widehat{V})}\{\widehat{g}_1, \widehat{g}_2\}$. Seja $(\widehat{F}_k)$ o flag de Lie e $(\widehat{G}_k)$ o flag derivado da distribuição $\widehat{\Delta}$. Decorre então do Lema C.2 que $\dim(\widehat{F}_k) = \dim(\widehat{G}_k) = 2 + k$ e que

$$\widehat{F}_k = \widehat{G}_k = \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(\widehat{V})}\{\widehat{g}_1, \partial/\partial z^{n-1}, \partial/\partial z^{n-2}, \ldots, \partial/\partial z^{n-1-k}\},$$

para $0 \leq k \leq n-2$, onde $\widehat{g}_2 = \partial/\partial z^{n-1}$. Assim, como β em $u = \beta v$ é invertível em $\widehat{V}$,

concluímos pela Observação 3.6 e pela Proposição A.12 que

$$F_k|\widehat{V} = \widehat{F}_k = \widehat{G}_k = G_k|\widehat{V} = \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(\widehat{V})}\{\widehat{g}_1, \partial/\partial z^{n-1}, \partial/\partial z^{n-2}, \ldots, \partial/\partial z^{n-1-k}\},$$

com $\dim(F_k|\widehat{V}) = \dim(G_k|\widehat{V}) = 2 + k$, para $0 \leq k \leq n-2$. Desse modo, $(4 \Rightarrow 1)$.

Quando $n = 2$, é fácil verificar pelos argumentos acima que $1 \Leftrightarrow 4$. $\square$

Apêndice D

Proposições e Demonstração do Teorema 3.17

Proposição D.1. *Seja $y = (y_1, y_2)$ uma saída planar de um sistema S definida no aberto $W \subset S$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\overline{y} = (y_1 + y_2^{(k)}, y_2)$ também é uma saída planar de S definida em $W \subset S$.*

Demonstração. Evidente. □

Proposição D.2. *Seja $y = (y_1, y_2)$ uma saída de um sistema S e (x, u) uma representação de estado de S, ambas definidas no aberto $W \subset S$. Se, para cada $k \in \mathbb{N}$, $y_1^{(k)}$ and $y_2^{(k)}$ não dependem de u em W, então y não é uma saída planar de S.*

Demonstração. Provaremos este resultado por contradição. Assim, suponha que y é uma saída planar de S. Sabemos então que a mudança de coordenadas

$$(t, x, u_1, u_2, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots) \mapsto (t, y_1, y_2, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots)$$

é uma bijeção local. No entanto, esta aplicação não pode ser injetiva caso $y_1^{(k)}$ e $y_2^{(k)}$ não dependem de u em W, para todo $k \in \mathbb{N}$. □

Proposição D.3. *Seja S o sistema associado a (3.44) e considere que $y = (y_1, y_2)$ é uma saída 0-planar de S definida em um aberto $W \subset S$. Então, existe uma saída 0-regular $\overline{y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2)$ de S que é determinada a partir de y e que está definida em um conjunto aberto não-vazio $V \subset W$.*

Demonstração. Basta considerarmos o caso em que $\partial \dot{y}_1/\partial u = \partial \dot{y}_2/\partial u = 0$ no aberto $W \subset S$. Após uma possível reordenação de y_1 e y_2, escolha o menor $\overline{k} \geq 1$ em que:

1. $\partial y_2^{(k)}/\partial t = \partial y_2^{(k)}/\partial u^{(j)} = 0$ em W, para todo $0 \leq k \leq \overline{k} - 1$, $j \in \mathbb{N}$;
2. $\partial y_2^{(\overline{k})}/\partial t = \partial y_2^{(\overline{k})}/\partial u^{(j)} = 0$ em W, para todo $j \geq 1$;
3. $\partial y_2^{(\overline{k})}/\partial u|_\nu \neq 0$, onde $\nu \in W$.

Tal $\overline{k}$ existe pela Proposição D.2 e pela forma do sistema de controle (3.44). Por continuidade, temos que $\partial y_2^{(\overline{k})}/\partial u \neq 0$ em alguma vizinhança aberta $V \subset W$ de $\nu \in W$. Desse modo, a Proposição D.1 implica que $\overline{y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2) = (y_1 + y_2^{(\overline{k}-1)}, y_2)|V$ é uma saída 0-planar de S tal que $\overline{y}_1^{(1)}$ depende de u em V, isto é, $\partial \overline{y}_1^{(1)}/\partial u \neq 0$ em V. □

Os próximos dois teoremas são essenciais na demonstração do Teorema 3.17. O primeiro deles fornece uma interpretação geométrica do Algoritmo da Extensão Dinâmica.

Teorema D.4. *[87], [19], [91] Suponha que S é um sistema. Seja (x, u) uma representação de estado clássica independente do tempo e $y = (y_1, y_2)$ uma saída clássica independente do tempo, ambas definidas em uma vizinhança aberta $W \subset S$ de $\xi \in S$. Considere que ξ é um ponto regular das seguintes codistribuições*

$$Y_k = span_{\mathcal{C}^\infty(W)}\{dy, \ldots, dy^{(k)}\},$$
$$\mathcal{Y}_k = span_{\mathcal{C}^\infty(W)}\{dx, dy, \ldots, dy^{(k)}\},$$

para cada $0 \leq k \leq n$, onde $card(x) = n$.

Então:

1. *Podemos escolher $\widetilde{y}_k \subset y$ de modo de que $\{dx, d\widetilde{y}_0, d\widetilde{y}_1^{(1)}, \ldots, d\widetilde{y}_k^{(k)}\}$ é uma base de $\mathcal{Y}_k$ em torno de ξ e $\widetilde{y}_{k-1}^{(k)} \subset \widetilde{y}_k^{(k)}$, para todo $0 \leq k \leq n$, onde $\widetilde{y}_{-1} \triangleq \widetilde{y}_0$;*
2. *Considere as seqüências $\{\sigma_k\}$ e $\{\rho_k\}$ definidas por $\sigma_k = dim(\mathcal{Y}_k(\xi)) - dim(\mathcal{Y}_{k-1}(\xi))$ e $\rho_k = dim(Y_k(\xi)) - dim(Y_{k-1}(\xi))$, respectivamente, para $k \in \mathbb{N}$, onde $\mathcal{Y}_{-1} = span\{dx\}$ e $Y_{-1} = \{0\}$. Então, $\{\sigma_k\}$ é uma seqüência não-decrescente e $\{\rho_k\}$ é uma seqüência não-crescente. Além disso, existe um único $0 \leq k^* \leq n$ tal que $\sigma_k < \rho_k$, se $k < k^*$, e $\sigma_k = \rho_k$, se $k \geq k^*$. A seqüência finita $\{\sigma_0, \ldots, \sigma_n\}$ é denominada de* estrutura no infinito *em ξ;*

3. *Existe uma vizinhança aberta* $V \subset W$ *de* ξ *tal que* $Y_k \cap span\{dx\} = Y_{k^*-1} \cap span\{dx\}$ *em* V*, para todo* $k \geq k^*$*,* $k \in \mathbb{N}$*.*

Teorema D.5. *[87] Suponha que* S *é um sistema. Seja* (x, u) *uma representação de estado clássica independente do tempo e* $y = (y_1, y_2)$ *uma saída clássica independente do tempo, ambas definidas em uma vizinhança aberta* $W \subset S$ *de* $\xi \in S$*. Assuma que* $card(x) = n$*,* $card(y) = card(u) = m$*,* $span\{dx, du\} = span\{dx, d\dot{x}\}$*, em torno de* ξ*, e que* ξ *é um ponto regular das codistribuições*

$$\begin{aligned} Y_k &= span_{\mathcal{C}^\infty(W)}\{dy, \ldots, dy^{(k)}\}, \\ \mathcal{Y}_k &= span_{\mathcal{C}^\infty(W)}\{dx, dy, \ldots, dy^{(k)}\}, \end{aligned}$$

para cada $0 \leq k \leq n$*.*

Então, y *é uma saída* 0*-planar em* ξ *(restringindo* W *se necessário) se e somente se existe* $1 \leq \overline{k} \leq n$ *tal que uma das seguintes condições equivalentes é atendida:*

1. *A estrutura no infinito* $\{\sigma_0, \ldots, \sigma_n\}$ *em* ξ *satisfaz*

$$n + \sum_{i=1}^{\overline{k}-1} \sigma_i = m\overline{k}, \quad \sigma_{\overline{k}} = m;$$

2. $span\{dx\} \subset Y_{\overline{k}-1}$*, em torno de* ξ*.*

Demonstração do Teorema 3.17. Nas coordenadas (x, u), temos que

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= L_f h_1(x) + L_{g_1} h_1(x) u_1 + L_{g_2} h_1(x) u_2, \\ y_2^{(1)} &= L_f h_2(x) + L_{g_2} h_2(x) u_1 + L_{g_2} h_2(x) u_2, \end{aligned}$$

onde $L_{g_1} h_1 \neq 0$ ou $L_{g_2} h_1 \neq 0$, em torno de ξ, pois y é uma saída 0-regular local em ξ ($L_f h_i$ and $L_{g_j} h_i$ denotam as derivadas de Lie usuais em $\mathbb{R}^n$). Desse modo, existe uma realimentação de estado estática regular da forma (no sentido da Definição 3.2)

$$u = \alpha(x) + \beta(x) v, \tag{D.1}$$

tal que[1]

$$y_1^{(1)} = v_1,$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ é uma aplicação suave em torno de ξ e $\beta = (\beta_{ij})$ é um difeomorfismo local[2] em torno de ξ, com $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, o Teorema 3.14 implica que (x, v) é uma representação de estado clássica independente do tempo em ξ que está relacionada à (x, u) por realimentação de estado estática invariante no tempo. Nestas novas coordenadas, o campo de Cartan de S é descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v \\ &\triangleq \overline{f}(x) + \overline{g}_1(x)v_1 + \overline{g}_2(x)v_2. \end{aligned} \tag{D.2}$$

Como y é uma saída 0-planar local em ξ, obtemos que

$$\begin{aligned} &dy_1 \neq 0, \\ &dy_1 \in \operatorname{span}\{dx\}, \end{aligned}$$

em torno de ξ. Logo, existem $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ tais que[3]

$$\operatorname{span}\{dx_{i_1}, \ldots, dx_{i_{n-1}}, dy_1\} = \operatorname{span}\{dx\}, \tag{D.3}$$

em torno de ξ. Seja $\widetilde{x} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}}, y_1)$. Decorre do Teorema 3.14 que $(\widetilde{x}, v)$ é uma representação de estado clássica independente do tempo em ξ que está relacionada à (x, v) por realimentação de estado estática invariante no tempo. Por construção, temos que

$$\begin{aligned} &y_1 = \widetilde{x}_n, \\ &y_1^{(1)} = \dot{\widetilde{x}}_n = v_1, \\ &\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{f}(\widetilde{x}) + \widetilde{g}_1(\widetilde{x})v_1 + \widetilde{g}_2(\widetilde{x})v_2. \end{aligned} \tag{D.4}$$

Na seqüência, mostramos que a estrutura no infinito $\{\sigma_0, \ldots, \sigma_n\}$ em ξ (veja o Teorema D.4) é dada por

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 = \cdots = \sigma_{n-2} = 1, \quad \sigma_{n-1} = \sigma_n = 2. \tag{D.5}$$

[1] Esta construção está baseada no Algoritmo da Extensão Dinâmica. Veja, por exemplo, [19], [87], [24].

[2] O fato de β ser um difeomorfismo em torno de ξ pode ser visto na demonstração da Proposição C.1.

[3] A validade desta afirmação pode ser deduzida da demonstração da Proposição A.5.

De fato, é claro que $\sigma_0 = 0$, pois y é uma saída 0-planar em ξ. Por hipótese, temos que ξ é um ponto regular das seguintes codistribuições

$$Y_k = \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(S)}\{dy, \ldots, dy^{(k)}\},$$
$$\mathcal{Y}_k = \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(S)}\{dx, dy, \ldots, dy^{(k)}\},$$

para $0 \leq k \leq n$. A partir de (D.3), obtemos que

$$\mathcal{Y}_k = \mathrm{span}\{d\widetilde{x}, dy, \ldots, dy^{(k)}\},$$

em torno de ξ, para $0 \leq k \leq n$. Como $\mathrm{card}(\widetilde{x}) = \mathrm{card}(x) = n$ e $\mathrm{card}(v) = \mathrm{card}(y) = 2$, decorre do Teorema D.5 que existe $1 \leq \overline{k} \leq n$ tal que $\mathrm{span}\{d\widetilde{x}\} \subset Y_{\overline{k}-1}$, em torno de ξ. Observe que (D.4) garante que $\mathrm{span}\{d\widetilde{x}, dv\} = \mathrm{span}\{d\widetilde{x}, d\dot{\widetilde{x}}\}$, em torno de ξ. De acordo com o Teorema D.4, existe $1 \leq k^* \leq n$ tal que

$$Y_k \cap \mathrm{span}\{d\widetilde{x}\} = Y_{k^*-1} \cap \mathrm{span}\{d\widetilde{x}\},$$

em torno de ξ, para cada $k \geq k^*$, $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $\mathrm{span}\{d\widetilde{x}\} \subset Y_{k^*-1}$, em torno de ξ. Concluímos então pelo Teorema D.5 que

$$n + \sum_{i=1}^{k^*-1} \sigma_i = 2k^*, \quad \sigma_{k^*} = 2. \tag{D.6}$$

Por definição (veja o Teorema D.4), temos que $\sigma_k \leq \rho_k \leq 2$, para cada $k \in \mathbb{N}$. No entanto, $\{\rho_k\}$ é uma seqüência não-crescente e $\sigma_{k^*} = 2$. Assim, $\rho_k = 2$ e $\sigma_k < 2$, para $1 \leq k < k^*$. De (D.4), obtemos que $\sigma_1 \geq 1$. Como $\{\sigma_k\}$ é uma seqüência não-decrescente, temos que $\sigma_1 = \ldots \sigma_{k^*-1} = 1$. Logo, (D.6) implica que $k^* = n - 1$. Desse modo, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = \cdots = \sigma_{n-2} = 1$ e $\sigma_{n-1} = \sigma_n = 2$.

Relembre que $y_1^{(1)} = v_1$, em torno de ξ (veja (D.4)). Portanto, (D.5) e o Teorema D.4 determinam que

$$dy_2 \in \mathrm{span}\{d\widetilde{x}\}, \tag{D.7}$$
$$dy_2^{(k)} \in \mathrm{span}\{d\widetilde{x}, dv_1, \ldots, dv_1^{(k-1)}\}, \tag{D.8}$$

em torno de ξ, para $1 \leq k \leq n-2$. Isto significa que, nas coordenadas $(\widetilde{x}, v)$,

$$\partial y_2^{(k)} / \partial v_2 = 0, \tag{D.9}$$

em torno de ξ, para $0 \leq k \leq n-2$.

Iremos agora determinar uma nova representação de estado clássica independente do tempo em ξ tal que, nessas novas coordenadas, o campo de Cartan de S é descrito por (3.47). Seja $\varphi = (t, \widetilde{x}, \overline{V}_1, \overline{V}_2)$: $W \to \varphi(W)$ a carta local de ξ correspondente à $(\widetilde{x}, v)$, onde W é uma vizinhança aberta de ξ e $\overline{V_j} = \{v_j^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}$, para $1 \leq j \leq 2$. Por hipótese, temos que $y_1^{(k)}(\xi) = 0$, para $k \in \mathbb{N}$. Como $y_1^{(1)} = v_1$, em torno de ξ, segue que $\varphi(\xi) = (t(\xi), \widetilde{x}(\xi), 0, \overline{V}_2(\xi))$. Defina a aplicação suave $\iota = \varphi^{-1} \circ \eta \circ \varphi$: $W \to W$, onde η: $\varphi(W) \to \varphi(W)$ é dada por $\eta(t, \widetilde{x}, \overline{V}_1, \overline{V}_2) = (t, \widetilde{x}, 0, \overline{V}_2)$, restringindo W se necessário. Considere então as seguintes funções suaves em W

$$\begin{aligned} z_1 &= y_2, \\ z_2 &= y_2^{(1)} \circ \iota, \\ &\vdots \\ z_{n-1} &= y_2^{(n-2)} \circ \iota, \\ z_n &= y_1 = \widetilde{x}_n, \end{aligned} \tag{D.10}$$

onde podemos assumir, restringindo W se necessário, que y é 0-planar em W. De (D.7) e (D.8), concluímos que, nas coordenadas $(\widetilde{x}, v)$,

$$y_2 = r(\widetilde{x}), \tag{D.11}$$

$$y_2^{(k)} = s_k(\widetilde{x}, v_1, v_1^{(1)}, \ldots, v_1^{(k-1)}), \tag{D.12}$$

em torno de ξ, para $1 \leq k \leq n-2$, onde r e s_k são funções suaves em um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{n+k}$, respectivamente. Assim, de acordo com (D.10), temos que

$$\operatorname{span}\{dz\} \subset \operatorname{span}\{d\widetilde{x}\}$$

em W. Se provarmos que

$$\{dz_1, \ldots, dz_n\}$$

é linearmente independente em W, então o Teorema 3.14 implicará que (z, v) é uma representação de estado clássica independente do tempo em ξ. Isto é de fato verdade e é o que demonstramos abaixo.

Primeiramente, provaremos por indução que, nas coordenadas $(\widetilde{x}, v)$

$$L_{\widetilde{g}_2} L_{\widetilde{f}}^{k-1} r = 0, \tag{D.13}$$

$$y_2^{(k)} = L_{\widetilde{f}}^k r + P_k, \tag{D.14}$$

$$dy_2^{(k)} = \frac{\partial L_{\widetilde{f}}^k r}{\partial \widetilde{x}} d\widetilde{x} + Q_k d\widetilde{x} + w_k, \tag{D.15}$$

para $1 \leq k \leq n-2$, onde r é como em (D.11),

$$w_k \in \mathcal{Z} = \operatorname{span}\{dv_1, dv_1^{(1)}, \dots\}$$

em W, e P_k, Q_k são polinômios na variáveis

$$\begin{aligned}
&v_1, (v_1)^2, \dots, (v_1)^{k-1}, (v_1)^k, \\
&v_1^{(1)}, (v_1^{(1)})^2, \dots, (v_1^{(1)})^{k-1}, \\
&\vdots \\
&v_1^{(k-2)}, (v_1^{(k-2)})^2 \\
&v_1^{(k-1)},
\end{aligned}$$

com coeficientes que são funções suaves de $\widetilde{x}$ e tais que

$$P_k(0, \dots, 0) = Q_k(0, \dots, 0) = 0.$$

Observe que, por (D.4), o campo de Cartan de S, nas coordenadas $(\widetilde{x}, v)$, é dado por

$$d/dt = \partial/\partial t + (\widetilde{f}(\widetilde{x}) + \widetilde{g}_1(\widetilde{x})v_1 + \widetilde{g}_2(\widetilde{x})v_2)\partial/\partial\widetilde{x} + \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=0}^{\infty} v_j^{(i+1)} \partial/\partial v_j^{(i)}. \tag{D.16}$$

Desse modo, (D.9) e (D.11) fornecem que

$$\begin{aligned}
&L_{\widetilde{g}_2} r = 0, \\
&y_2^{(1)} = L_{\widetilde{f}} r + (L_{\widetilde{g}_1} r) v_1, \\
&dy_2^{(1)} = \frac{\partial L_{\widetilde{f}} r}{\partial \widetilde{x}} d\widetilde{x} + \left(\frac{\partial L_{\widetilde{g}_1} r}{\partial \widetilde{x}}\right) v_1 d\widetilde{x} + \ (L_{\widetilde{g}_1} r) dv_1,
\end{aligned}$$

e (D.13)–(D.15) é válida para $k = 1$. Suponha então que existe $1 \leq k \leq n-3$ tal que

(D.14) é satisfeita (hipótese de indução). Novamente de (D.9) e de (D.16), obtemos que

$$L_{\widetilde{g}_2} L_{\widetilde{f}}^k r = 0,$$

$$y_2^{(k+1)} = L_{\widetilde{f}}^{k+1} r + (L_{\widetilde{g}_1} L_{\widetilde{f}}^k r) v_1 + L_{\widetilde{f}} P_k + (L_{\widetilde{g}_1} P_k) v_1 + \sum_{j=0}^{(k-1)} v_1^{(j+1)} \frac{\partial P_k}{\partial v_1^{(j)}} = L_{\widetilde{f}}^{k+1} r + P_{k+1},$$

pois $v_1, \ldots, v_1^{(k-1)}$ são funções coordenadas e $P_k(0, \ldots, 0) = 0$. Logo,

$$dy_2^{(k+1)} = \frac{\partial L_{\widetilde{f}}^{k+1} r}{\partial \widetilde{x}} d\widetilde{x} + Q_{k+1} d\widetilde{x} + w_{k+1},$$

e, dessa maneira, (D.13)–(D.15) é válida para $k+1$.

Seja

$$\mathcal{Y} = \operatorname{span}\{dy_1, dy_2, dy_1^{(1)}, dy_2^{(1)}, \ldots\}.$$

Então, $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}$ em W, pois $v_1 = y_1^{(1)}$. Como $y = (y_1, y_2)$ é uma saída planar em W, segue que

$$\{dy_1, dy_2, dy_1^{(1)}, dy_2^{(1)}, \ldots\}$$

é linearmente independente em W. Assim, é imediato de (D.11) e (D.15) que, em W e para $0 \leq k \leq n-2$,

$$(dy_2^{(k)}) \circ i \bmod \mathcal{Z} = \frac{\partial L_{\widetilde{f}}^k r}{\partial \widetilde{x}} d\widetilde{x} \bmod \mathcal{Z},$$

e que

$$\left\{ dy_1, \frac{\partial r}{\partial \widetilde{x}} d\widetilde{x}, \frac{\partial L_{\widetilde{f}} r}{\partial \widetilde{x}} d\widetilde{x}, \ldots, \frac{\partial L_{\widetilde{f}}^{n-2} r}{\partial \widetilde{x}} d\widetilde{x} \right\} \tag{D.17}$$

é linearmente independente mod $\mathcal{Z}$ em W. Observe que (D.11) e (D.14) implicam que

$$d(y_2^{(k)} \circ i) = \frac{\partial L_{\widetilde{f}}^k r}{\partial \widetilde{x}} d\widetilde{x},$$

para $0 \leq k \leq n-2$. Desse modo, resulta de (D.10) e (D.17) que

$$\{dz_1, \ldots, dz_n\}$$

é linearmente independente em W. Como $\operatorname{span}\{dz\} \subset \operatorname{span}\{d\widetilde{x}\}$ em W, temos que

$$\operatorname{span}\{dz\} = \operatorname{span}\{d\widetilde{x}\} \tag{D.18}$$

em W. Logo, o Teorema 3.14 estabelece que (z, v) é uma representação de estado clássica independente do tempo em ξ que está relacionada à $(\widetilde{x}, v)$ por realimentação de estado estática invariante no tempo.

De (D.4), (D.10), (D.13) e (D.14), vemos que, nas coordenadas (z, v),

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + \phi_1(z)v_1, \\ \dot{z}_2 &= z_3 + \phi_2(z)v_1, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-2} &= z_{n-1} + \phi_{n-2}(z)v_1, \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n + \phi_{n-1}(z)v_1 + \delta(z)v_2, \\ \dot{z}_n &= v_1, \end{aligned} \tag{D.19}$$

onde $\delta = L_{\widetilde{g}_2} L_{\widetilde{f}}^{n-2} r$, em torno de ξ. Como $(\widetilde{x}, v)$ é uma representação de estado clássica independente do tempo em ξ, obtemos a partir de (D.8) que

$$dy_2^{(n-1)} \in \operatorname{span}\{d\widetilde{x}, dv_1, \ldots, dv_1^{(n-2)}, dv_2\}, \tag{D.20}$$

em torno de ξ. Relembramos que $\sigma_{n-1} = 2$ e $y_1^{(1)} = v_1$. Portanto, devido a (D.7), (D.8), (D.14) e (D.16), nas coordenadas $(\widetilde{x}, v)$, devemos ter que

$$\partial y_2^{(n-1)} / \partial v_2 = L_{\widetilde{g}_2} L_{\widetilde{f}}^{n-2} r \neq 0 \tag{D.21}$$

em ξ, pois, caso contrário, teríamos que $\sigma_{n-1} = 1$ (veja o Teorema D.4). Isto implica que $\delta \neq 0$, em torno de ξ. Defina então a seguinte realimentação de estado estática regular

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{z_n}{\delta(z)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\phi_{n-1}(z)}{\delta(z)} & \dfrac{1}{\delta(z)} \end{pmatrix} \widetilde{v} = \widehat{\alpha}(z) + \widehat{\beta}(z)\widetilde{v}, \tag{D.22}$$

onde $\widetilde{v} = (\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2)$. Observe que $\widetilde{v}_1 = v_1$, $\widehat{\alpha}$ é suave em torno de ξ e $\widehat{\beta}$ é um difeomorfismo local em torno de ξ. Decorre então do Teorema 3.14 que $(z, \widetilde{v})$ é uma representação de estado clássica independente do tempo em ξ que está relacionada à (z, v) (e, portanto, também à (x, u)) por realimentação de estado estática regular. Por construção, nestas coordenadas, o campo de Cartan é dado por

$$\dot{z} = \widehat{f}(z) + \widehat{g}_1(z)\widetilde{v}_1 + \widehat{g}_2(z)\widetilde{v}_2, \tag{D.23}$$

em torno de ξ, onde

$$\begin{aligned}\widehat{f} &= (z_2, \dots, z_{n-1}, 0, 0),\\ \widehat{g}_1 &= (\phi_1, \dots, \phi_{n-2}, 0, 1),\\ \widehat{g}_2 &= (0, \dots, 0, 1, 0).\end{aligned}$$

Assim, para finalizarmos a demonstração, resta-nos mostrar que as funções componentes ϕ_k de $\widehat{g}_1$ possuem de fato a estrutura triangular de (3.47).

Relembramos que $(z, \widetilde{v})$ está relacionada à (x, u) por (D.1), (D.3), (D.18) e (D.22). Note que (D.3) e (D.18) implicam que $z = \Psi(x)$ é uma mudança de coordenadas definida em torno de $\overline{x} \in U \subset \mathbb{R}^n$, onde $\xi = (\overline{t}, \overline{x}, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_1^{(1)}, \overline{u}_2^{(1)}, \dots) \in S$, e que $\widehat{g}_1\partial/\partial z, \widehat{g}_2\partial/\partial z$ são campos de vetores suaves definidos em torno $\overline{x} \in U$, onde $\partial/\partial z = (\partial/\partial z_1, \dots, \partial/\partial z_n)$. Por hipótese, no sistema de controle (3.44)–(3.45), a distribuição $\mathcal{G} = \mathrm{span}_{\mathcal{C}^\infty(U)}\{g_1, g_2\}$ é involutiva. Obtemos então de (D.1), (D.22), da Observação 3.6 e da Proposição A.4 que

$$[\widehat{g}_1\partial/\partial z, \widehat{g}_2\partial/\partial z] \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{g_1, g_2\} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\widehat{g}_1\partial/\partial z, \widehat{g}_2\partial/\partial z\},$$

em torno de $\overline{x} \in U$. No entanto, observe que $\{\widehat{g}_1\partial/\partial z, \widehat{g}_2\partial/\partial z\}$ é linearmente independente em torno de $\overline{x}$. Conseqüentemente, devemos ter que

$$[\widehat{g}_1\partial/\partial z, \widehat{g}_2\partial/\partial z] = -(\partial\phi_1/\partial z_{n-1}, \dots, \partial\phi_{n-2}/\partial z_{n-1}, 0, 0)\partial/\partial z = 0, \tag{D.24}$$

em torno de $\overline{x}$. Logo, (3.47) é satisfeita para $n \leq 4$.

Assuma então que $n = 5$. É fácil comprovar que a estrutura no infinito em ξ é invariante sob representações de estado em ξ que estão relacionadas por realimentação de estado estática invariantes no tempo. Desse modo, (D.5) ainda é válida e, assim como descrito anteriormente, fornece que (veja (D.9))

$$\partial y_2^{(k)}/\partial \widetilde{v}_2 = 0, \tag{D.25}$$

em torno de ξ, para $0 \leq k \leq n-2$. Decorre que

$$L_{\partial/\partial\widetilde{v}_2} y_2^{(k)} = 0, \tag{D.26}$$

em torno de ξ, o que é equivalente à[4]

$$L_{ad^k_{d/dt}\partial/\partial\widetilde{v}_2} y_2^{(j)} = 0, \tag{D.27}$$

em torno de ξ, para $0 \leq k \leq n-2$, $0 \leq j \leq n-2-k$. Seja $\widehat{e}_i = \partial/\partial z_i$, para $1 \leq i \leq n-2$. É fácil concluir a partir de (D.23) que

$$[d/dt, \partial/\partial\widetilde{v}_2] = -\widehat{e}_4, \tag{D.28}$$

e, de (D.24), que

$$[d/dt, [d/dt, \partial/\partial\widetilde{v}_2]] = -\widehat{e}_3. \tag{D.29}$$

Como $z_1 = y_2$, em torno de ξ, (D.23) e (D.27) fornecem que

$$\langle dy_2^{(1)}, -\widehat{e}_3\rangle = \widetilde{v}_1\langle d\phi_1, -\widehat{e}_3\rangle = 0, \tag{D.30}$$

em torno de ξ, implicando que

$$\langle d\phi_1, \widehat{e}_3\rangle = \partial\phi_1/\partial z_3 = 0 \tag{D.31}$$

em torno de ξ, pois $\widetilde{v}_1$ é uma função coordenada. Desse modo, (D.23) tem a forma triangular desejada (3.47) para $n = 5$, completando a demonstração.

Com base nos argumentos apresentados acima, é imediato verificar a validade da Observação 3.22. De fato, note que a Observação 3.22 é claramente válida para $n \leq 3$. Para $n = 4$, temos

$$[d/dt, \partial/\partial\widetilde{v}_2] = -\widehat{e}_3.$$

Assim, a Observação 3.22 é uma conseqüência de (D.27), (D.30) e (D.31). □

[4]Para uma demonstração deste fato, veja, por exemplo, [41, Lemma 4.1.2].

Apêndice E

Lemas Desenvolvidos para Demonstrar o Teorema 4.20

Por simplicidade, consideraremos em todo este apêndice que $q = (t_0, W_{t_0}) \in \mathbb{R} \times \mathrm{SU}(n)$ está fixado e que $W_q \colon \mathbb{R} \to \mathrm{SU}(n)$ denota a solução do sistema auxiliar (4.19)–(4.20) com condição inicial $W_q(t_0) = W_{t_0}$.

Antes de apresentarmos os lemas que foram desenvolvidos na presente pesquisa para demonstrar o Teorema 4.20, relembramos a definição de conjunto limite da solução W_q.

Definição E.1. *[125, pág. 152] Um elemento $\overline{W} \in M^n$ é denominado de* ponto limite *da solução W_q se existe uma seqüência real $\{t_m\}$ tal que*

$$\lim_{m\to\infty} t_m = \infty,$$
$$\lim_{m\to\infty} W_q(t_m) = \overline{W}.$$

O conjunto de todos os pontos limites de W_q é denominado de conjunto limite *de W_q e é denotado por $\Omega(W_q)$.*

Observação E.2. *Como $SU(n)$ é um conjunto compacto de M^n, é fácil ver que $\Omega(W_q)$ é um subconjunto não-vazio de $SU(n)$. Relembramos que, dado um conjunto compacto C em um espaço de Banach, toda seqüência em C possui uma subseqüência que converge para algum elemento de C.*

A proposição abaixo é um resultado bem conhecido que pode ser facilmente demonstrado por contradição.

Proposição E.3. *[125, Lema 34, pág. 153] Temos que*

$$\lim_{t\to\infty} d(W_q(t), \Omega(W_q)) = 0.$$

Os próximos resultados, que consistem de quatro lemas, são essenciais para estabelecermos o Teorema 4.20.

Lema E.4. *Seja $W\colon \mathbb{R} \to M^n$ uma aplicação continuamente diferenciável tal que*

$$\lim_{t\to\infty} \dot{W}(t) = 0$$

e $\{t_m\}$ uma seqüência real em que

$$\lim_{m\to\infty} t_m = \infty,$$
$$\lim_{m\to\infty} W(t_m) = \overline{W}.$$

Então, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{m\to\infty} W(t_m + \epsilon) = \overline{W}.$$

Demonstração. Seja $\epsilon \geq 0$ e $m \in \mathbb{N}$. Temos que

$$W(t_m + \epsilon) - W(t_m) = \int_{t_m}^{t_m+\epsilon} \dot{W}(t)\, dt.$$

Assim,

$$\|W(t_m + \epsilon) - W(t_m)\| \leq |\epsilon| \sup_{t\in[t_m, t_m+\epsilon]} \|\dot{W}(t)\|.$$

Como

$$\|W(t_m + \epsilon) - \overline{W}\| \leq \|W(t_m + \epsilon) - W(t_m)\| + \|W(t_m) - \overline{W}\|,$$

as hipóteses implicam que

$$\lim_{m\to\infty} W(t_m + \epsilon) = \overline{W}.$$

Para $\epsilon < 0$, podemos proceder de maneira análoga. □

Lema E.5. *Suponha que o sistema de controle (4.1) é T-regular. Sejam $\overline{W} \in \Omega(W_q)$,*

$j \in \mathbb{N}$ e $1 \leq k \leq m$. Assuma que

$$\lim_{t\to\infty} \dot{W}_q(t) = 0,$$
$$\lim_{t\to\infty} V(W_q(t)X_r^\dagger(t)B_k^j(t)X_\infty) = 0,$$

onde B_k^j é como em (4.14). Então,

$$V(\overline{W}X_\infty^\dagger B_k^j(0)X_\infty) = 0.$$

Demonstração. Seja $\overline{W} \in \Omega(W_q)$. Por definição, existe uma seqüência real $\{t_m\}$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} t_m = \infty,$$
$$\lim_{m\to\infty} W_q(t_m) = \overline{W}.$$

Agora, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $\ell_m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$s_m = t_m - \ell_m T \in [0, T).$$

Como $[0, T]$ é um conjunto compacto, existe uma subseqüência $\{s_{m_i}\}$ de $\{s_m\}$ em que

$$\lim_{i\to\infty} s_{m_i} = \theta,$$

onde $\theta \in [0, T]$. Seja $\{t_{m_i}\}$ a subseqüência correspondente de $\{t_m\}$. Definimos as seqüências reais $\{s_{m_i}^*\}$ e $\{t_{m_i}^*\}$ por

$$s_{m_i}^* = s_{m_i} - \theta,$$
$$t_{m_i}^* \triangleq t_{m_i} - \theta = s_{m_i} + \ell_{m_i}T - \theta = s_{m_i}^* + \ell_{m_i}T,$$

respectivamente. Por hipótese, temos que

$$\lim_{t\to\infty} \dot{W}_q(t) = 0,$$
$$\lim_{t\to\infty} V(W_q(t)X_r^\dagger(t)B_k^j(t)X_\infty) = 0.$$

Desse modo, o Lema E.4 estabelece que

$$\lim_{i\to\infty} W_q(t_{m_i}^*) = \lim_{i\to\infty} W_q(t_{m_i} - \theta) = \overline{W}.$$

Além disso, por definição,

$$\lim_{i\to\infty} s^*_{m_i} = 0.$$

Portanto, a continuidade e a periodicidade de B^j_k e de X_r (veja a Observação 4.3 e (4.15)) implicam que

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty} V(W_q(t^*_{m_i})X^\dagger_r(t^*_{m_i})B^j_k(t^*_{m_i})X_\infty) &= \lim_{i\to\infty} V(W_q(t^*_{m_i})X^\dagger_r(s^*_{m_i})B^j_k(s^*_{m_i})X_\infty)\\ &= V(\overline{W}X^\dagger_\infty B^j_k(0)X_\infty) = 0\end{aligned}$$

(relembre que V é contínua por (4.18)). □

Os dois lemas que apresentamos na seqüência tratam o caso em que o sistema de controle (4.1) é p-controlável.

Lema E.6. *Suponha que o sistema de controle (4.1) é p-controlável. Sejam $\overline{W} \in \Omega(W_q)$, $j \in \mathbb{N}$ e $1 \le k \le m$. Assuma que*

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty} \dot{W}_q(t) = 0,\\ &\lim_{t\to\infty} V(W_q(t)X^\dagger_r(t)[ad^j_{\overline{H}_r(t)}H_k]X_r(t)) = 0,\end{aligned}$$

onde $\overline{H}_r$ é como em (4.34). Então,

$$V(\overline{W}X^\dagger_\infty[ad^j_{\overline{H}_\ell}H_k]X_\infty) = 0, \qquad \textit{para cada } 1 \le \ell \le p.$$

Demonstração. Seja $\overline{W} \in \Omega(W_q)$. Por definição, existe uma seqüência real $\{t_m\}$ tal que

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty} t_m = \infty,\\ &\lim_{m\to\infty} W_q(t_m) = \overline{W}.\end{aligned}$$

Agora, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $\ell_m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$s_m = t_m - \ell_m T \in [0, T).$$

Como $[0, T]$ é um conjunto compacto, existe uma subseqüência $\{s_{m_i}\}$ de $\{s_m\}$ em que

$$\lim_{i\to\infty} s_{m_i} = \theta,$$

onde $\theta \in [0, T]$. Seja $\{t_{m_i}\}$ a subseqüência correspondente de $\{t_m\}$. Para cada $0 \le \ell \le p$,

definimos as seqüências reais $\{s^{\ell}_{m_i}\}$ e $\{t^{\ell}_{m_i}\}$ por

$$\begin{aligned} s^{\ell}_{m_i} &= s_{m_i} - \theta + \ell T_p, \\ t^{\ell}_{m_i} &\triangleq t_{m_i} - \theta + \ell T_p = s_{m_i} + \ell_{m_i} T - \theta + \ell T_p = s^{\ell}_{m_i} + \ell_{m_i} T, \end{aligned}$$

respectivamente, com $T_p = T/p$ (veja (4.31)). Assim,

$$s^{\ell+1}_{m_i} = s^{\ell}_{m_i} + T_p, \qquad \text{para todo } i \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ell \leq p-1. \tag{E.1}$$

Por hipótese, temos que $\lim_{t\to\infty} \dot{W}_q(t) = 0$. Desse modo, as definições acima e o Lema E.4 implicam que

$$\begin{aligned} &\lim_{i\to\infty} (s^{\ell}_{m_i} + \epsilon) = \ell T_p + \epsilon, \\ &\lim_{i\to\infty} W_q(t^{\ell}_{m_i} + \epsilon) = \lim_{i\to\infty} W_q(t_{m_i} - \theta + \ell T_p + \epsilon) = \overline{W}, \end{aligned} \tag{E.2}$$

para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$, $0 \leq \ell \leq p$. Defina $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\beta(t) = V(W_q(t) X_r^{\dagger}(t) [\mathrm{ad}^j_{\overline{H}_r(t)} H_k] X_r(t)), \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Por hipótese,

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = 0. \tag{E.3}$$

Seja $0 \leq \ell \leq p-1$. De (4.34), temos que $\overline{H}_r$ é constante no intervalo $[\ell T_p, (\ell+1)T_p)$ com $\overline{H}_r(\ell T_p) = \overline{H}_{\ell+1}$. Como X_r é contínua e $\overline{H}_r$, X_r possuem período T (veja (4.34) e (4.35)), obtemos que

$$\begin{aligned} &\lim_{i\to\infty} \overline{H}_r(t^{\ell}_{m_i} + \epsilon) = \lim_{i\to\infty} \overline{H}_r(s^{\ell}_{m_i} + \epsilon) = \overline{H}_r(\ell T_p + \epsilon) = \overline{H}_{\ell+1}, \\ &\lim_{i\to\infty} X_r(t^{\ell}_{m_i} + \epsilon) = \lim_{i\to\infty} X_r(s^{\ell}_{m_i} + \epsilon) = X_r(\ell T_p + \epsilon), \end{aligned} \tag{E.4}$$

para todo $\epsilon \in (0, T_p)$. Defina $\gamma\colon (0, T_p) \to \mathbb{R}$ por

$$\gamma(\epsilon) \triangleq \lim_{i\to\infty} \beta(t^{\ell}_{m_i} + \epsilon) = \lim_{i\to\infty} \beta(t_{m_i} - \theta + \ell T_p + \epsilon), \qquad \text{para todo } \epsilon \in (0, T).$$

Decorre de (E.2), (E.3), (E.4) e da continuidade de V (veja (4.18)) que

$$\gamma(\epsilon) = V(\overline{W} X_r^{\dagger}(\ell T_p + \epsilon) [\mathrm{ad}^j_{\overline{H}_{\ell+1}} H_k] X_r(\ell T_p + \epsilon)) = 0, \qquad \text{para todo } \epsilon \in (0, T).$$

Portanto, concluímos da continuidade de X_r e de (4.36) que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\gamma(\epsilon) = V(\overline{W}X_\infty^\dagger[\mathrm{ad}^j_{\overline{H}_{\ell+1}}H_k]X_\infty) = 0.$$

□

Lema E.7. *Suponha que o sistema de controle (4.1) é p-controlável. Sejam $j \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le m$ e $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua periódica de período T tal que o número de zeros da restrição $\alpha|[0,T]$ é finito. Assuma que*

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\dot{W}_q(t) = 0,\\
&\lim_{t\to\infty}\alpha(t)V(W_q(t)X_r^\dagger(t)[ad^j_{\overline{H}_r(t)}H_k]X_r(t)) = 0,
\end{aligned}$$

onde $\overline{H}_r$ é como em (4.34). Então,

$$\lim_{t\to\infty}V(W_q(t)X_r^\dagger(t)[ad^j_{\overline{H}_r(t)}H_k]X_r(t)) = 0.$$

Em outras palavras, tudo se passa como se pudéssemos dividir o segundo limite acima pela função α.

Demonstração. Provaremos este resultado por contradição. Defina $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\beta(t) = V(W_q(t)X_r^\dagger(t)[\mathrm{ad}^j_{\overline{H}_r(t)}H_k]X_r(t)), \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

e suponha que β não converge para zero quando $t \to \infty$. Temos que $W_q\colon \mathbb{R} \to \mathrm{SU}(n)$, $X_r\colon \mathbb{R} \to \mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ é compacto, $\overline{H}_r\colon \mathbb{R} \to M^n$ é limitada e V é contínua (veja (4.18)). Relembre que, dado um conjunto compacto C em um espaço de Banach, toda seqüência em C possui uma subseqüência que converge para algum elemento de C. Portanto, existe uma seqüência real $\{t_m\}$ tal que

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}t_m = \infty,\\
&\lim_{m\to\infty}W_q(t_m) = \overline{W},\\
&\lim_{m\to\infty}X_r(t_m) = \overline{X}_r,\\
&\lim_{m\to\infty}\overline{H}_r(t_m) = \overline{A}_r,\\
&\lim_{m\to\infty}\beta(t_m) = V(\overline{W}\overline{X}_r^\dagger[\mathrm{ad}^j_{\overline{A}_r}H_k]\overline{X}_r) = \overline{\beta} \neq 0,
\end{aligned} \tag{E.5}$$

onde $\overline{W}, \overline{X}_r \in \mathrm{SU}(n)$, $\overline{A}_r \in M^n$, $\overline{\beta} \in \mathbb{R}$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $\ell_m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$s_m = t_m - \ell_m T \in [0, T).$$

Como $[0, T]$ é compacto, existe uma subseqüência $\{s_{m_i}\}$ de $\{s_m\}$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} s_{m_i} = \theta,$$

onde $\theta \in [0, T]$. Seja $\{t_{m_i}\}$ a subseqüência correspondente de $\{t_m\}$. Por hipótese, α tem período T, é contínua e

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t)\beta(t) = 0. \tag{E.6}$$

Logo,

$$\lim_{i\to\infty} \alpha(t_{m_i})\beta(t_{m_i}) = \lim_{i\to\infty} \alpha(s_{m_i})\beta(t_{m_i}) = \alpha(\theta)\overline{\beta} = 0$$

e, como $\overline{\beta} \neq 0$, concluímos que $\alpha(\theta) = 0$, ou seja, θ pertence ao conjunto Z de zeros de $\alpha|[0, T]$. Mas, por hipótese, Z é um conjunto finito. Desse modo, θ é um ponto isolado de $Z \subset \mathbb{R}$. Além disso, (E.5), as definições acima e o Lema E.4 implicam que

$$\begin{aligned} &\lim_{i\to\infty} (s_{m_i} + \epsilon) = \theta + \epsilon, \\ &\lim_{i\to\infty} W_q(t_{m_i} + \epsilon) = \overline{W}, \end{aligned} \tag{E.7}$$

para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$.

Iremos agora considerar dois casos distintos, dependendo do valor de $\theta \in [0, T]$. Relembramos que $T_p = T/p$ (veja (4.31)).

Caso 1: $\theta \neq \ell T_p$, para todo $0 \leq \ell \leq p$.

Devido ao fato de θ ser um ponto isolado de $Z \subset \mathbb{R}$ e usando (4.34), sabemos que existe um número real $\epsilon_0 > 0$ tal que $\alpha(\epsilon) \neq 0$, para todo $\epsilon \in (\theta, \theta + \epsilon_0)$, e $\overline{H}_r$ é constante em $[\theta, \theta + \epsilon_0)$ e contínua em $t = \theta$. Como X_r é contínua e $\overline{H}_r$, X_r possuem período T

(veja (4.34) e (4.35)), obtemos de (E.5) que

$$\begin{aligned}
&\lim_{i\to\infty} \overline{H}_r(t_{m_i}) = \lim_{i\to\infty} \overline{H}_r(s_{m_i}) = \overline{H}_r(\theta) = \overline{A}_r,\\
&\lim_{i\to\infty} \overline{H}_r(t_{m_i}+\epsilon) = \lim_{i\to\infty} \overline{H}_r(s_{m_i}+\epsilon) = \overline{H}_r(\theta+\epsilon) = \overline{H}_r(\theta) = \overline{A}_r,\\
&\lim_{i\to\infty} X_r(t_{m_i}) = \lim_{i\to\infty} X_r(s_{m_i}) = X_r(\theta) = \overline{X}_r,\\
&\lim_{i\to\infty} X_r(t_{m_i}+\epsilon) = \lim_{i\to\infty} X_r(s_{m_i}+\epsilon) = X_r(\theta+\epsilon),
\end{aligned} \tag{E.8}$$

para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Defina γ: $(0, \epsilon_0) \to \mathbb{R}$ por

$$\gamma(\epsilon) = \lim_{i\to\infty} \beta(t_{m_i}+\epsilon), \qquad \text{para cada } \epsilon \in (0, \epsilon_0).$$

De (E.7) e (E.8), resulta que

$$\gamma(\epsilon) = V(\overline{W} X_r^{\dagger}(\theta+\epsilon)[\mathrm{ad}^j_{\overline{A}_r} H_k] X_r(\theta+\epsilon)), \qquad \text{para cada } \epsilon \in (0, \epsilon_0),$$

e (E.6) implica que

$$\lim_{i\to\infty} \alpha(t_{m_i}+\epsilon)\beta(t_{m_i}+\epsilon) = \lim_{i\to\infty} \alpha(s_{m_i}+\epsilon)\beta(t_{m_i}+\epsilon) = \alpha(\theta+\epsilon)\gamma(\epsilon) = 0, \text{ para } \epsilon \in (0, \epsilon_0).$$

Mas, $\alpha(\theta+\epsilon) \neq 0$, para $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Desse modo, $\gamma = 0$. Portanto, decorre da continuidade de X_r e de (E.8) que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \gamma(\epsilon) = V(\overline{W} \overline{X}_r^{\dagger}[\mathrm{ad}^j_{\overline{A}_r} H_k] \overline{X}_r) = \overline{\beta} = 0,$$

contradizendo $\overline{\beta} \neq 0$.

Caso 2: $\theta = \ell T_p$, onde $0 \leq \ell \leq p$.

Considere os conjuntos

$$\begin{aligned}
L_+ &= \{i \in \mathbb{N} : s_{m_i} \geq \theta\},\\
L_- &= \{i \in \mathbb{N} : s_{m_i} < \theta\}.
\end{aligned}$$

É evidente que estes conjuntos são disjuntos e $L_+ \cup L_- = \mathbb{N}$. Além disso, L_+ ou é finito ou infinito. Suponha que L_+ é infinito. Assim, existe uma subseqüência[1] $\{s_{m_{i_j}}\}$ de $\{s_{m_i}\}$

[1] Veja, por exemplo, [52, Proposição 1, pág. 11].

tal que

$$s_{m_{i_j}} \geq \theta, \qquad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Seja $\{t_{m_{i_j}}\}$ a subseqüência correspondente de $\{t_{m_i}\}$. Podemos então proceder de maneira idêntica ao Caso 1, substituindo $\{s_{m_i}\}$ por $\{s_{m_{i_j}}\}$, $\{t_{m_i}\}$ por $\{t_{m_{i_j}}\}$ e a continuidade de $\overline{H}_r$ em $t = \theta$ pela continuidade à direita de $\overline{H}_r$ em $t = \theta = \ell T_p$ (veja (4.34)), e concluir que $\overline{\beta} = 0$.

Agora, suponha que L_+ é finito. Portanto, L_- é infinito e existe uma subseqüência $\{s_{m_{i_k}}\}$ de $\{s_{m_i}\}$ tal que

$$s_{m_{i_k}} < \theta, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Note que $\theta \neq 0$, ou seja, $\ell \neq 0$, pois $s_m \in [0, T)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Como $\theta = \ell T_p$ é um ponto isolado de $Z \subset \mathbb{R}$, segue de (4.34) que existe um número real $\epsilon_0 > 0$ tal que $\alpha(\epsilon) \neq 0$ e $\overline{H}_r(\epsilon) = \overline{H}_r(\ell T_p)$, para $\epsilon \in (\theta - \epsilon_0, \theta)$. Obtemos então de (E.5) que

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \overline{H}_r(t_{m_{i_k}}) = \lim_{k\to\infty} \overline{H}_r(s_{m_{i_k}}) = \overline{H}_r(\ell T_p) = \overline{A}_r,\\
&\lim_{k\to\infty} \overline{H}_r(t_{m_{i_k}} - \epsilon) = \lim_{k\to\infty} \overline{H}_r(s_{m_{i_k}} - \epsilon) = \overline{H}_r(\theta - \epsilon) = \overline{H}_r(\ell T_p) = \overline{A}_r,\\
&\lim_{k\to\infty} X_r(t_{m_{i_k}}) = \lim_{k\to\infty} X_r(s_{m_{i_k}}) = X_r(\theta) = \overline{X}_r,\\
&\lim_{k\to\infty} X_r(t_{m_{i_k}} - \epsilon) = \lim_{k\to\infty} X_r(s_{m_{i_k}} - \epsilon) = X_r(\theta - \epsilon),
\end{aligned} \tag{E.9}$$

para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Defina $\delta\colon (0, \epsilon_0) \to \mathbb{R}$ por

$$\delta(\epsilon) = \lim_{k\to\infty} \beta(t_{m_{i_k}} - \epsilon), \qquad \text{para cada } \epsilon \in (0, \epsilon_0).$$

É uma conseqüência de (E.7) e (E.9) que

$$\delta(\epsilon) = V(\overline{W} X_r^\dagger(\theta - \epsilon)[\mathrm{ad}_{\overline{A}_r}^j H_k] X_r(\theta - \epsilon)), \text{ para cada } \epsilon \in (0, \epsilon_0),$$

e de (E.6) que

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(t_{m_{i_k}} - \epsilon)\beta(t_{m_{i_k}} - \epsilon) = \lim_{k\to\infty} \alpha(s_{m_{i_k}} - \epsilon)\beta(t_{m_{i_k}} - \epsilon) = \alpha(\theta - \epsilon)\delta(\epsilon) = 0, \text{ para } \epsilon \in (0, \epsilon_0).$$

Assim, $\delta = 0$, pois $\alpha(\theta - \epsilon) \neq 0$, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Portanto, (E.9) estabelece que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \delta(\epsilon) = V(\overline{W X_r^\dagger}[\mathrm{ad}_{\overline{A}_r}^j H_k] \overline{X}_r) = \overline{\beta} = 0,$$

que é uma contradição. □

Apêndice F

Artigo "*A Triangular Form for Flat Nonlinear Systems with Two Controls and Five or Less States*"

Este apêndice corresponde ao artigo [111] publicado nos anais do simpósio "*3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control – SSSC*".

A TRIANGULAR FORM FOR FLAT NONLINEAR SYSTEMS WITH TWO CONTROLS AND FIVE OR LESS STATES

H. B. Silveira, P. S. Pereira da Silva

Department of Telecommunications and Control – PTC
University of São Paulo – USP
São Paulo, SP, Brasil
Emails: hector@lac.usp.br, paulo@lac.usp.br

Abstract: This paper shows that, for flat affine time-invariant continuous-time nonlinear systems with two controls and five or less state variables, there exists a smooth change of coordinates and a time-invariant regular static state feedback such that the system is described by a triangular form. The presentation is based on an infinite-dimensional differential geometric approach to nonlinear control systems. *Copyright © 2007 IFAC*

Keywords: Nonlinear control systems, Structural properties, Control theory, Differential geometric methods, Co-ordinate transformations, State feedback.

1. INTRODUCTION

The concept of flatness was introduced by Fliess *et al.* (1992) in the control literature (see also (Fliess *et al.*, 1999)). Loosely speaking, if a system is flat, then there exists an output y (called flat output) such the state and the control can be determined from y and a finite number of its derivatives. In this paper [1], we present a proof that flat affine time-invariant continuous-time nonlinear systems with two controls and five or less states are essentially triangular. In other words, there exists a smooth change of coordinates and a time-invariant regular static state feedback in which the system is described by a triangular form. This is achieved by using the infinite-dimensional differential geometric approach to nonlinear control systems developed in (Pomet, 1995),(Fliess *et al.*, 1999).

[1] The first author was supported by the Ministry of Education through CAPES. The second author was partially supported by the National Council of Scientific and Technology Development – CNPQ.

The layout of the paper is as follows. A brief overview of the infinite-dimensional differential geometric approach mentioned above is given in Section 2. In Section 3, a proof of the existence of a triangular form for flat systems with two controls and five or less states is presented. Specific parts of the proof, along with some selected theorems from the literature that are referred to along the text, were collected in Appendix.

2. MATHEMATICAL BACKGROUND

This section follows very closely the presentation in (Pereira da Silva and Corrêa Filho, 2001).

Conventions. Let $\mathbb{R}$ be the set of real numbers, $\mathbb{N}$ the set of natural numbers (including 0), $[n] = \{0, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$ and $]n] = \{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$. The symbol '$\circ$' denotes the composition of mappings and '$|$' the restriction of a mapping. By a function we mean a mapping of a set into $\mathbb{R}$. If $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, then xy denotes $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ and $\mathrm{card}(x) \triangleq n$.

Furthermore, $\widetilde{x} \subset x$ means that the components of $\widetilde{x}$ are also components of x.

$\mathbb{R}^A$-manifolds. Let A be a countable set. Since we can identify A with $\mathbb{N}$, let $\mathbb{R}^A$ be the set of all real sequences. This set becomes a topological space with the (Tychonoff) product topology (i.e. the coarsest topology such that all the natural projections are continuous). A function ϕ defined on an open set $V \subset \mathbb{R}^A$ is smooth if, for every $p \in V$, there exists an open neighborhood $V_p \subset V$ of p and some $n \in \mathbb{N}$ such that $\phi|V_p = h \circ \pi|V_p$, where π is the projection of $\mathbb{R}^A$ onto $\mathbb{R}^n$ and h is a smooth function in the usual sense defined on the open set $\pi(V_p) \subset \mathbb{R}^n$. Let B be another countable set. A mapping φ of an open set of $\mathbb{R}^A$ into $\mathbb{R}^B$ is smooth if each component function is smooth. From these definitions, we can establish the concepts of $\mathbb{R}^A$-manifold, smooth mapping between $\mathbb{R}^A$-manifolds, tangent mapping, tangent bundle, smooth vector field, pull-back, differential of a smooth function, smooth (co)distribution and so on, in an analogous manner to finite-dimensional differential geometry. These concepts exhibit many of the properties of the finite-dimensional case, since, locally, they behave as if they were finite-dimensional. Let M and N be $\mathbb{R}^A$-manifolds and let $V \subset M$ be open. If ϕ is a smooth function on V, then $d\phi$ denotes its differential. If $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ is a smooth mapping of V into $\mathbb{R}^n$, then $d\Phi$ denotes $(d\phi_1, \ldots, d\phi_n)$. If X is a smooth vector field on M, then $L_X\phi$ is the Lie derivative of ϕ along X and $L_X^k\phi = L_X(L_X^{k-1}\phi)$, $k \in \mathbb{N}$, where $L_X^0\phi \triangleq \phi$. If X and Y are smooth vector fields on M, then $[X, Y]$ denotes their Lie bracket and $\mathrm{ad}_X^k Y = [X, \mathrm{ad}_X^{k-1} Y]$, $k \in \mathbb{N}$, where $\mathrm{ad}_X^0 Y \triangleq Y$. An immersion $\iota : M \to N$ is a smooth mapping such that, for every $p \in M$, there exist local charts (V, ϕ) and (W, ψ) of p and $\iota(p)$, respectively, with $\iota(V) \subset W$ and such that, in these coordinates, $\iota(x) = (x, 0)$. If Ω is a codistribution, then $\Omega^\perp$ denotes its annihilator.

Diffieties. A diffiety M is a $\mathbb{R}^A$-manifold endowed with a fixed smooth vector field ∂_M, called the Cartan field. Let M and N be diffieties. A Lie-Bäcklund mapping φ of M into N is a smooth mapping that is compatible with the Cartan fields, that is, $\varphi_*|_p(\partial_M(p)) = \partial_N(\varphi(p))$, for all $p \in M$, where φ_* is the tangent mapping of φ. A Lie-Bäcklund immersion is Lie-Bäcklund mapping that is an immersion.

Systems. A system is a triple $(S, d/dt, \tau)$, where S is a diffiety with Cartan field d/dt and $\tau : S \to \mathbb{R}$ is a Lie-Bäcklund immersion with $\mathbb{R}$ having the usual differential structure. By abuse of notation, we shall denote $(S, d/dt, \tau)$ simply by S. If ϕ is a smooth function on an open set of S, then $\phi^{(k)} = L_{d/dt}\phi^{(k-1)}$, $k \in \mathbb{N}$, where $\phi^{(0)} \triangleq \phi$, and $\dot{\phi} = \phi^{(1)}$.

State representations and outputs. Let S be a system. A state representation of S at $\xi \in S$ is a local chart $(V, \varphi = (t, x, \overline{U}))$ of ξ such that $t = \tau|V$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ and $u_j^{(k+1)} = L_{d/dt}u_j^{(k)}$, where $\overline{U} = \{u_j^{(k)} : j \in]m], k \in \mathbb{N}\}$. We call x and $u = (u_1^{(0)}, \ldots, u_m^{(0)})$ the state and the input, respectively. Since x and u completely determine φ, we shall denote (V, φ) simply by (x, u). In these coordinates, the Cartan field is given by

$$\begin{aligned} d/dt = \partial/\partial t + \sum_{i=1}^{n} f_i \partial/\partial x_i \\ + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{\infty} u_j^{(k+1)} \partial/\partial u_j^{(k)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Note that it is completely determined by $\dot{x}_i = f_i$. If (x, u) and (v, z) are state representations at ξ, then we must have $\mathrm{card}(u) = \mathrm{card}(v)$. A smooth mapping $y = (y_1, \ldots, y_p)$ around ξ is called an output of S at ξ. It is called a flat output at ξ if $(\emptyset, y)$ is a state representation at ξ (i.e. there is no state). Another characterization of flatness is given in Theorem 3 in Appendix A.3. Let (x, u) be a state representation of S and $y = (y_1, \ldots, y_p)$ an output of S. Assume that the domain of y is contained in that of (x, u). Then, (x, u) (resp. y) is classic if $\dot{x}_i$ (resp. y_l) does not depend on $u_j^{(k)}$, for $i \in]n]$ (resp. $l \in]p]$), $j \in]m], k \geq 1$. And, (x, u) (resp. y) is time-independent if $\dot{x}_i$ (resp. y_l) does not depend on t, for $i \in]n]$ (resp. $l \in]p]$). A flat output y is 0-flat if it does not depend on t, $u_j^{(k)}$, for $j \in]m], k \in \mathbb{N}$. Two state representations (x, u) and (z, v) at ξ are related by time-invariant static state feedback if: (i) $\mathrm{card}(x)$=$\mathrm{card}(z)$, $\mathrm{card}(u)$=$\mathrm{card}(v)$; (ii) $\mathrm{span}\{dx\} = \mathrm{span}\{dz\}$, $\mathrm{span}\{dx, du\} = \mathrm{span}\{dz, dv\}$, around ξ (pointwise).

Systems associated to control systems. Consider the following control system

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x, u), \ i \in]n], \\ y_l &= h_l(x), \quad\ \ l \in]p], \end{aligned} \tag{2}$$

where $x \in \mathcal{X}$ (open set of $\mathbb{R}^n$) and $u \in \mathbb{R}^m$. It is possible to associate to these equations a system S with global classic time-independent state representation (x, u) and global classic time-independent output $y = (y_1, \ldots, y_p)$. Indeed: $S = \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{N}}$; t, x_i, $u_j^{(k)}$ are the canonical coordinates; $\tau = t$; and the Cartan field of S is defined by (1), with $\mathrm{card}(x) = n$ and $\mathrm{card}(u) = m$.

3. MAIN RESULT

Consider the following affine nonlinear control system with two controls and two outputs

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 = f(x) + g(x)u, \tag{3}$$

$$y = h(x), \tag{4}$$

where $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ is the state vector, $\mathcal{X}$ is open, f, g_1, g_2: $\mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ are smooth, $g = (g_1, g_2)$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ is the control, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ is the output and h: $\mathcal{X} \to \mathbb{R}^2$ is smooth.

Let S be a system and let (x, u) be a state representation of S defined on an open set $V \subset S$. Suppose that y is an output of S defined on V. We define, for every $k \in \mathbb{N}$, the following smooth codistributions on V (over $\mathcal{C}^\infty(V)$)

$$\begin{aligned} Y_k &= \operatorname{span}\{dy, \ldots, dy^{(k)}\}, \\ \mathcal{Y}_k &= \operatorname{span}\{dx, dy, \ldots, dy^{(k)}\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Definition 1. Suppose that $y = (y_1, y_2)$ is a 0-flat output of S. Then y is said to be *0-regular* [2] if $y_1^{(1)}$ depends on u, i.e. $\partial y_1^{(1)}/\partial u \neq 0$ on V.

Theorem 1. Consider the control system (3)–(4), with $n \leq 5$. Suppose that the smooth distribution $\mathcal{G} = \operatorname{span}\{g_1, g_2\}$ is involutive. Let S be the system associated to (3)–(4) with global classic time-independent state representation (x, u) and global classic time-independent output $y = (y_1, y_2)$. Assume that y is a local 0-regular output at $\xi = (\overline{t}, \overline{x}, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_1^{(1)}, \overline{u}_2^{(1)}, \ldots) \in S$ and that $y_1^{(k)}(\xi) = 0$, for $k \in \mathbb{N}$, where ξ is a regular point of the codistributions (5), for $k \in [n]$. Then, there exists a classic time-independent state representation (z, v) $(v = (v_1, v_2))$ at ξ that is related to (x, u) by time-invariant static state feedback, such that $v_1^{(k)}(\xi) = 0$, for $k \in \mathbb{N}$, and that, in these new coordinates, the Cartan field of S is described by

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + \phi_1(z_n, z_1, z_2)v_1, \\ \dot{z}_2 &= z_3 + \phi_2(z_n, z_1, z_2, z_3)v_1, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-3} &= z_{n-2} + \phi_{n-3}(z_n, z_1, z_2, \ldots, z_{n-2})v_1, \\ \dot{z}_{n-2} &= z_{n-1} + \phi_{n-2}(z_n, z_1, z_2, \ldots, z_{n-2})v_1, \\ \dot{z}_{n-1} &= v_2, \\ \dot{z}_n &= v_1. \end{aligned} \tag{6}$$

In particular, $\overline{y} = (z_1, z_n)$ is a local 0-flat output of S at ξ.

Remark 1. As can be seen in the proof of the theorem above, it is not required that $\mathcal{G}$ is involutive for the triangular form of (6) to hold when $n \leq 4$. In this case, however, $\dot{z}_{n-2} = z_{n-1} + \phi_{n-2}(z_n, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})v_1$ is substituted for $\dot{z}_{n-2} = z_{n-1} + \phi_{n-2}(z_n, z_1, z_2, \ldots, z_{n-2})v_1$.

Remark 2. The last assertion of the theorem is a direct consequence of the triangular form of (6), the Implicit Function Theorem and Theorem 3 in Appendix A.3.

Remark 3. Let $\xi = (\overline{t}, \overline{x}, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_1^{(1)}, \overline{u}_2^{(1)}, \ldots) \in S$. It is easily seen that in case $h_1(\overline{x}) = 0$ in (4), where $h = (h_1, h_2)$, and $(\overline{x}, (\overline{u}_1, \overline{u}_2))$ is an equilibrium point of (3) (i.e. $f(\overline{x}) + g_1(\overline{x})\overline{u}_1 + g_2(x)\overline{u}_2 = 0$), then $y_1^{(k)}(\xi) = 0$, for $k \in \mathbb{N}$.

Remark 4. Put another way, the theorem establishes that there exists a smooth change of coordinates $(z = \Phi(x))$ Φ: $V \to \Phi(V) \subset \mathbb{R}^n$, where $V \subset \mathbb{R}^n$ is an open neighborhood of $\overline{x}$, and a time-invariant (smooth) regular static state feedback $((u_1, u_2) = \alpha(x, (v_1, v_2))$ α: $W \to \mathbb{R}^2$, where $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ is an open neighborhood of $(\overline{x}, (0, \overline{v}_2))$ and $\alpha(\overline{x}, (0, \overline{v}_2)) = (\overline{u}_1, \overline{u}_2)$, such that, in the new coordinates z and in the new control $v = (v_1, v_2)$, (3) is described by the triangular system (6) around $(\Phi(\overline{x}), (0, \overline{v}_2))$.

Proof. In the coordinates (x, u), we have

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= L_f h_1(x) + L_{g_1} h_1(x) u_1 + L_{g_2} h_1(x) u_2, \\ y_2^{(1)} &= L_f h_2(x) + L_{g_2} h_2(x) u_1 + L_{g_2} h_2(x) u_2, \end{aligned} \tag{7}$$

where $L_{g_1} h_1 \neq 0$ or $L_{g_2} h_1 \neq 0$, around ξ, because y is a local 0-regular output at ξ ($L_f h_i$ and $L_{g_j} h_i$ denote the usual Lie derivatives in $\mathbb{R}^n$). It follows that there exists a regular static feedback (in the usual sense) of the form [3]

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \tag{8}$$

such that $y_1^{(1)} = v_1$, where α is smooth around ξ, β is a diffeomorphism around ξ and $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Therefore, it follows from Theorem 2 (see Appendix A.3) that (x, v) is a classic time-independent state representation at ξ that is related to (x, u) by time-invariant static state feedback. By construction, we have that $v_1 = y_1^{(1)}$, around ξ. Furthermore, in these new coordinates, the Cartan field of S is described by

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v \\ &= \overline{f}(x) + \overline{g}_1(x)v_1 + \overline{g}_2(x)v_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Since y is a local 0-flat output at ξ, we obtain that $dy_1 \neq 0$ and $dy_1 \in \operatorname{span}\{dx\}$, around ξ. Hence, we can choose among the components of $x = (x_1, \ldots, x_n)$ in a way that

$$\operatorname{span}\{dx_{i_1}, \ldots, dx_{i_{n-1}}, dy_1\} = \operatorname{span}\{dx\}, \tag{10}$$

around ξ. Let $\widetilde{x} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}}, y_1)$. Theorem 2 thus implies that $(\widetilde{x}, v)$ is a classic time-

[2] It is shown in Appendix A.1 that we can always assume, without loss of generality, that a local 0-flat output $y = (y_1, y_2)$ of the system S associated to (3) is a local 0-regular output.

[3] This construction is based on the coordinate description of the Dynamic Extension Algorithm. See e.g. (Di Benedetto *et al.*, 1989), (Pereira da Silva, 2000).

independent state representation at ξ that is related to (x, v) by time-invariant static state feedback. By construction, we have

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_n &= y_1, \\ v_1 &= y_1^{(1)} = \dot{\widetilde{x}}_n, \\ \dot{\widetilde{x}} &= \widetilde{f}(\widetilde{x}) + \widetilde{g}_1(\widetilde{x})v_1 + \widetilde{g}_2(\widetilde{x})v_2. \end{aligned} \tag{11}$$

It is shown in Appendix A.2 that the structure at infinity $\{\sigma_0, \ldots, \sigma_n\}$ at ξ (see Theorem 5(b) in Appendix A.3) is given by

$$\sigma_0 = 0,\ \sigma_1 = \ldots = \sigma_{n-2} = 1,\ \sigma_{n-1} = \sigma_n = 2. \tag{12}$$

But $v_1 = y_1^{(1)}$, around ξ. Hence, Theorem 5(a) implies

$$dy_2 \in \operatorname{span}\{d\widetilde{x}\}, \tag{13}$$

$$dy_2^{(k)} \in \operatorname{span}\{d\widetilde{x}, dv_1, \ldots, dv_1^{(k-1)}\}, \tag{14}$$

around ξ, for $k \in\ ]n-2]$. Therefore, in the coordinates $(\widetilde{x}, v)$, we obtain

$$\partial y_2^{(k)}/\partial v_2 = 0, \tag{15}$$

around ξ, for $k \in [n-2]$.

We shall now determine a new classic time-independent state representation at ξ such that, in these new coordinates, the Cartan field of S is described by (6). Let $\varphi = (t, \widetilde{x}, \overline{V}_1, \overline{V}_2)$: $W \to \varphi(W)$ be the local chart of ξ corresponding to $(\widetilde{x}, v)$, where W is an open neighborhood of ξ and $\overline{V_j} = \{v_j^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}$, for $j = 1, 2$. By hypothesis, we have that $y_1^{(k)}(\xi) = 0$, for $k \in \mathbb{N}$. Since $v_1 = y_1^{(1)}$, around ξ, it follows that $\varphi(\xi) = (t(\xi), \widetilde{x}(\xi), 0, \overline{V}_2(\xi))$. Define the smooth mapping $\iota = \varphi^{-1} \circ \eta \circ \varphi$: $W \to W$, where η: $\varphi(W) \to \varphi(W)$ is given by $\eta(t, \widetilde{x}, \overline{V}_1, \overline{V}_2) = (t, \widetilde{x}, 0, \overline{V}_2)$. Now, consider the following smooth functions on W

$$\begin{aligned} z_1 &= y_2, \\ z_2 &= y_2^{(1)} \circ \iota, \\ &\vdots \\ z_{n-1} &= y_2^{(n-2)} \circ \iota, \\ z_n &= y_1 = \widetilde{x}_n, \end{aligned} \tag{16}$$

where we can assume, without loss of generality, that the open set where y is 0-regular is equal to W. From (13) and (14), it follows that, in the coordinates $(\widetilde{x}, v)$, we have

$$y_2 = r(\widetilde{x}), \tag{17}$$

$$y_2^{(k)} = s_k(\widetilde{x}, v_1, v_1^{(1)}, \ldots, v_1^{(k-1)}), \tag{18}$$

around ξ, for $k \in\ ]n-2]$, where r and s_k are smooth functions on an open set of $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^{n+k}$, respectively. It is easy to show by induction from (11) and (15) that, in the coordinates $(\widetilde{x}, v)$,

$$L_{\widetilde{g}_2} L_{\widetilde{f}}^{k-1} r = 0, \tag{19}$$

$$y_2^{(k)} = L_{\widetilde{f}}^k r + P_k, \tag{20}$$

$$dy_2^{(k)} = \frac{\partial L_{\widetilde{f}}^k r}{\partial \widetilde{x}} d\widetilde{x} + Q_k d\widetilde{x} + w_k, \tag{21}$$

for $k \in\ ]n-2]$, where r is as in (17), $w_k \in \mathcal{Z} = \operatorname{span}\{dv_1, dv_1^{(1)}, \ldots\}$ on W, and P_k and Q_k are polynomials with real coefficients in the variables v_1 (until degree k), $v_1^{(1)}$ (until degree $k-1$), $\ldots$, $v_1^{(k-2)}$ (until degree 2), $v_1^{(k-1)}$ (only degree 1), such that $P_k = Q_k = 0$ for $v_1^{(j)} = 0$. Recall that $y = (y_1, y_2)$ is a flat output on W and note that (17) and (20) imply that $d(y_2^{(k)} \circ i) = (\partial L_{\widetilde{f}}^k r/\partial \widetilde{x}) d\widetilde{x}$, for $k \in [n-2]$. It is thus straightforward to show from (21) that $\{dz_1, \ldots, dz_n\}$ is linearly independent on W. Since $\operatorname{span}\{dz\} \subset \operatorname{span}\{d\widetilde{x}\}$ on W, we obtain

$$\operatorname{span}\{dz\} = \operatorname{span}\{d\widetilde{x}\} \tag{22}$$

on W. Therefore, Theorem 2 implies that (z, v) is a classic time-independent state representation at ξ that is related to $(\widetilde{x}, v)$ by time-invariant static state feedback.

It is easily seen from (11), (16), (19) and (20) that, in the coordinates (z, v), we have

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + \phi_1(z)v_1, \\ \dot{z}_2 &= z_3 + \phi_2(z)v_1, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-2} &= z_{n-1} + \phi_{n-2}(z)v_1, \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n + \phi_{n-1}(z)v_1 + \delta(z)v_2, \\ \dot{z}_n &= v_1, \end{aligned} \tag{23}$$

where $\delta = L_{\widetilde{g}_2} L_{\widetilde{f}}^{n-2} r$, around ξ. Since $(\widetilde{x}, v)$ is a classic time-independent state representation at ξ, it follows from (14) that

$$dy_2^{(n-1)} \in \operatorname{span}\{d\widetilde{x}, dv_1, \ldots, dv_1^{(n-2)}, dv_2\}, \tag{24}$$

around ξ. Recall that $\sigma_{n-1} = 2$ and $v_1 = y_1^{(1)}$. Hence, in the coordinates $(\widetilde{x}, v)$, we must have

$$\partial y_2^{(n-1)}/\partial v_2 = L_{\widetilde{g}_2} L_{\widetilde{f}}^{n-2} r \neq 0 \tag{25}$$

at ξ, because otherwise we would have $\sigma_{n-1} = 1$ (see Theorem 5(a)–(b)). This implies that $\delta \neq 0$, around ξ. Define the regular static feedback

$$\begin{aligned} v &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{z_n}{\delta(z)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\phi_{n-1}(z)}{\delta(z)} & \dfrac{1}{\delta(z)} \end{pmatrix} \widetilde{v} \\ &= \widehat{\alpha}(z) + \widehat{\beta}(z)\widetilde{v}, \end{aligned} \tag{26}$$

where $\widetilde{v} = (\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2)$. Note that $\widetilde{v}_1 = v_1$, $\widehat{\alpha}$ is smooth around ξ and $\widehat{\beta}$ is a diffeomorphism around ξ. It thus follows from Theorem 2 that $(z, \widetilde{v})$ is a classic time-independent state representation at ξ that is related to (z, v) (and hence to (x, u)) by time-invariant static state feedback. By construction, in these coordinates, the Cartan field is given by

$$\dot{z} = \widehat{f}(z) + \widehat{g}_1(z)\widetilde{v}_1 + \widehat{g}_2(z)\widetilde{v}_2, \tag{27}$$

around ξ, where $\widehat{f} = (z_2, \ldots, z_{n-1}, 0, 0)$, $\widehat{g}_1 = (\phi_1, \ldots, \phi_{n-2}, 0, 1)$ and $\widehat{g}_2 = (0, \ldots, 0, 1, 0)$. Therefore, in order to complete the proof, it remains to show that the component functions ϕ_k of $\widehat{g}_1$ have indeed the triangular structure of (6). Throughout the rest of this section, we will denote the smooth vector fields $\widehat{g}_1\partial/\partial z$ and $\widehat{g}_2\partial/\partial z$ simply by $\widehat{g}_1$ and $\widehat{g}_2$, respectively.

Note that $\{\widehat{g}_1, \widehat{g}_2\}$ is independent around ξ. By hypothesis, in the control system (3)–(4), the smooth distribution $\mathcal{G} = \mathrm{span}\{g_1, g_2\}$ is involutive. Recall that $(z, \widetilde{v})$ is related to (x, u) by (8), (10), (22) and (26). Hence, $\widehat{\mathcal{G}} = \mathrm{span}\{\widehat{g}_1, \widehat{g}_2\}$ is involutive and we thus must have

$$[\widehat{g}_1, \widehat{g}_2] = -\begin{pmatrix} \partial\phi_1/\partial z_{n-1} \\ \vdots \\ \partial\phi_{n-2}/\partial z_{n-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \tag{28}$$

around ξ. Therefore, (6) is true for $n \leq 4$.

Now, suppose that $n = 5$. It is easy to see that the structure at infinity at ξ is invariant under state representations at ξ that are related by time-invariant static state feedback. Hence, (12) still holds and, as before, gives

$$\partial y_2^{(k)}/\partial\widetilde{v}_2 = 0, \tag{29}$$

around ξ, for $k \in [n-2]$. It follows that

$$L_{\partial/\partial\widetilde{v}_2} y_2^{(k)} = 0, \tag{30}$$

around ξ, which in turn is equivalent to [4]

$$L_{ad^k_{d/dt}\partial/\partial\widetilde{v}_2} y_2^{(j)} = 0, \tag{31}$$

around ξ, for $k \in [n-2]$, $j \in [n-2-k]$. Let $\widehat{e}_i = \partial/\partial z_i$, for $i \in]n]$. It is straightforward to conclude from (27) that

$$[d/dt, \partial/\partial\widetilde{v}_2] = -\widehat{e}_4, \tag{32}$$

and from (28) that

$$[d/dt, [d/dt, \partial/\partial\widetilde{v}_2]] = -\widehat{e}_3. \tag{33}$$

[4] For a proof of this fact, see e.g. (Isidori, 1995, Lemma 4.1.1, p. 140).

Since $z_1 = y_2$, around ξ, (27) and (31) give

$$\langle dy_2^{(1)}, -\widehat{e}_3\rangle = \widetilde{v}_1\langle d\phi_1, -\widehat{e}_3\rangle = 0, \tag{34}$$

around ξ, which implies

$$\langle d\phi_1, \widehat{e}_3\rangle = \partial\phi_1/\partial z_3 = 0 \tag{35}$$

around ξ, because $\widetilde{v}_1$ is a coordinate function. Therefore, (27) has the desired triangular form (6) for $n = 5$, which completes the proof.

It is easy to verify from the foregoing reasoning the validity of Remark 1. Indeed, note that it is clearly true for $n \leq 3$. For $n = 4$, we have that $[d/dt, \partial/\partial\widetilde{v}_2] = -\widehat{e}_3$. Thus, Remark 1 follows from (31), (34) and (35).

□

REFERENCES

Di Benedetto, M. D., J. W. Grizzle and C. H. Moog (1989). Rank invariants of nonlinear systems. *SIAM J. Control Optim.* **27**(3), 658–672.

Fliess, M., J. Lévine, P. Martin and P. Rouchon (1992). Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **315**, 619–624.

Fliess, M., J. Lévine, P. Martin and P. Rouchon (1999). A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control* **44**(5), 922–937.

Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems.* 3rd ed.. Springer–Verlag. London.

Pereira da Silva, P. S. (2000). Some geometric properties of the dynamic extension algorithm. Technical Report EPUSP–BT/PTC/0008. Universidade de São Paulo. Available at www.lac.usp.br/∼paulo/.

Pereira da Silva, P. S. and C. Corrêa Filho (2001). Relative flatness and flatness of implicit systems. *SIAM J. Contr. Optimiz.* **39**(6), 1929–1951.

Pomet, J.-B. (1995). A differential geometric setting for dynamic equivalence and dynamic linearization. *Banach Center Publications* pp. 319–339.

APPENDIX

Appendix A.1

This fact is a consequence of the next two results.

Proposition 1. Let $y = (y_1, y_2)$ be a 0-flat output of S. Then, for every $k \in \mathbb{N}$, $\overline{y} = (y_1 + y_2^{(k)}, y_2)$ is also a 0-flat output of S.

Proof. Straightforward. □

Proposition 2. Let $y = (y_1, y_2)$ be an output of S. If, for every $k \in \mathbb{N}$, $y_1^{(k)}$ and $y_2^{(k)}$ do not depend on u, then y is not a flat output of S.

Proof. We shall prove this by contradiction. Hence, suppose that y is a flat output of S. Therefore, the change of coordinates mapping $(t, x, u_1, u_2, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \ldots) \mapsto (t, y_1, y_2, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots)$ is a bijection. However, this mapping cannot be injective in case $y_1^{(k)}$ and $y_2^{(k)}$ do not depend on u, for $k \in \mathbb{N}$. □

Indeed, suppose that this is not the case. After a possible reordering of the outputs, take the least $\overline{k} \geq 1$ such that: (i) $y_2^{(k)}$ does not depend on $t, u^{(j)}$, for $k \in [\overline{k}-1]$, $j \in \mathbb{N}$; (ii) $y_2^{(\overline{k})}$ does not depend on $t, u^{(j)}$, for $j \geq 1$; (iii) $\partial y_2^{(\overline{k})}/\partial u \neq 0$ on some open set $V \subset S$. Such $\overline{k}$ exists by Proposition 2 and by the form of the control system (3). Therefore, Proposition 1 implies that $\overline{y} = (y_1 + y_2^{(\overline{k}-1)}, y_2)$ is a local 0-flat output of S such that $\overline{y}_1^{(1)}|V$ depends on u (i.e. $\partial \overline{y}_1^{(1)}/\partial u \neq 0$ on V), where $\overline{y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2)$.

Appendix A.2

It is clear that $\sigma_0 = 0$, since y is a local 0-flat output at ξ. By hypothesis, ξ is a regular point of $Y_k, \mathcal{Y}_k$ in (5), for $k \in [n]$. From (10), we have that $\mathcal{Y}_k = \text{span}\{d\widetilde{x}, dy, \ldots, dy^{(k)}\}$, around ξ, for $k \in [n]$. Since $\text{card}(\widetilde{x}) = \text{card}(x) = n$ and $\text{card}(v) = \text{card}(y) = 2$, it follows from Theorem 4 in Appendix A.3 that there exists $\overline{k} \in [n]$ such that $\text{span}\{d\widetilde{x}\} \subset Y_{\overline{k}-1}$, around ξ. Note that, by (11), we have that $\text{span}\{d\widetilde{x}, dv\} = \text{span}\{d\widetilde{x}, d\dot{\widetilde{x}}\}$, around ξ. According to Theorem 5(b)–(c), there exists $k^* \in [n]$ such that $Y_k \cap \text{span}\{d\widetilde{x}\} = Y_{k^*-1} \cap \text{span}\{d\widetilde{x}\}$, around ξ, for $k \geq k^*$. Therefore, $\text{span}\{d\widetilde{x}\} \subset Y_{k^*-1}$, around ξ. We thus conclude from Theorem 4 that

$$n + \sum_{i=1}^{k^*-1} \sigma_i = 2k^*, \ \sigma_{k^*} = 2. \qquad (.1)$$

Now, by definition (see Theorem 5(b)), we have that $2 \geq \rho_k \geq \sigma_k$, for $k \in \mathbb{N}$. However, $\{\rho_k\}$ is a non-increasing sequence and $\sigma_{k^*} = 2$. Hence, $\rho_k = 2$ and $\sigma_k < 2$, for $1 \leq k < k^*$. From (11), we obtain that $\sigma_1 \geq 1$. Since $\{\sigma_k\}$ is a non-decreasing sequence, we have that $\sigma_1 = \ldots \sigma_{k^*-1} = 1$. Hence, (.1) implies that $k^* = n - 1$. Therefore, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = \ldots = \sigma_{n-1} = 1$ and $\sigma_{n-1} = \sigma_n = 2$.

Appendix A.3

Theorem 2. (Pereira da Silva, 2000) Let S be a system and let (x, u) be a classic time-independent state representation at $\xi \in S$. Let z and v be smooth mappings defined around ξ such that $\text{card}(x) = \text{card}(z)$ and $\text{card}(u) = \text{card}(v)$. Suppose that, around ξ, $\text{span}\{dx\} = \text{span}\{dz\}$ and $\text{span}\{dx, du\} = \text{span}\{dz, dv\}$. Then, (z, v) is a classic time-independent state representation at ξ that is related to (x, u) by time-invariant static state feedback.

Theorem 3. (Pereira da Silva, 2000) Let S be a system and let (x, u) be a classic state representation at $\xi \in S$. Suppose that y is a classic output at ξ such that $\text{card}(y) = \text{card}(u)$. Then, y is a local flat output at ξ if and only if there exists $k^* \in \mathbb{N}$ such that $\{dy, \ldots, dy^{(k^*)}\}$ is independent at ξ and $\text{span}\{dx, du\} \subset \text{span}\{dy, \ldots, dy^{(k^*)}\}$, around ξ.

Theorem 4. (Pereira da Silva, 2000) Let S be a system. Let (x, u) be a classic time-independent state representation at ξ and let y be a classic time-independent output at ξ such that $\text{card}(x) = n$, $\text{card}(y) = \text{card}(u) = m$ and $\text{span}\{dx, du\} = \text{span}\{dx, d\dot{x}\}$, around ξ, where $\xi \in S$ is a regular point of the smooth codistribuitions (5), for $k \in [n]$. Suppose that (x, u) and y are defined on the same open set. Then, y is a local 0-flat output at ξ if and only if there exists $\overline{k} \in [n]$ such that either one of the following two equivalent conditions is met: (i) the structure at infinity $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ at ξ satisfies $n + \sum_{i=1}^{\overline{k}-1} \sigma_i = m\overline{k}$, $\sigma_{\overline{k}} = m$; (ii) $\text{span}\{dx\} \subset Y_{\overline{k}-1}$, around ξ.

Theorem 5. (Pereira da Silva, 2000) Let S be a system. Let (x, u) be a classic time-independent state representation at $\xi \in S$ and let y be a classic time-independent output of S at ξ. Assume that (x, u) and y are defined on the same open set and that ξ is a regular point of the codistributions (5), for $k \in [n]$, where $\text{card}(x) = n$. Then:

(a) We can choose $\widetilde{y}_k \subset y$ such that $\widetilde{y}_{k-1}^{(k)} \subset \widetilde{y}_k^{(k)}$ and $\{dx_k\}$ is a basis for $\mathcal{Y}_k$, around ξ, where $x_k = (x, \widetilde{y}_0, \widetilde{y}_1^{(1)}, \ldots, \widetilde{y}_k^{(k)})$, for $k \in [n]$;
(b) Consider the sequences $\{\sigma_k\}$ and $\{\rho_k\}$ defined as $\sigma_k = \dim(\mathcal{Y}_k(\xi)) - \dim(\mathcal{Y}_{k-1}(\xi))$ and $\rho_k = \dim(Y_k(\xi)) - \dim(Y_{k-1}(\xi))$, where $\mathcal{Y}_{-1} = \text{span}\{dx\}$, $Y_{-1} = \{0\}$, and Y_k and $\mathcal{Y}_k$ are as in (5), for $k \in \mathbb{N}$. Then, $\{\sigma_k\}$ is a non-decreasing sequence and $\{\rho_k\}$ is a non-increasing sequence. Furthermore, there exists (an unique) $k^* \in [n]$ such that $\sigma_k < \rho_k$, for $k < k^*$, and $\sigma_k = \rho_k$, for $k \geq k^*$, $k \in \mathbb{N}$. The finite sequence $\{\sigma_0, \ldots, \sigma_n\}$ is called the structure at infinity at ξ;
(c) $Y_k \cap \text{span}\{dx\} = Y_{k^*-1} \cap \text{span}\{dx\}$, around ξ, for $k \geq k^*$, $k \in \mathbb{N}$.

Apêndice G

Artigo "*A Time-Periodic Lyapunov Approach for Motion Planning of Controllable Driftless Systems on* $SU(n)$"

Este apêndice corresponde ao artigo [112] publicado nos anais do congresso "*48th IEEE Conference on Decision and Control – CDC*".

A Time-Periodic Lyapunov Approach for Motion Planning of Controllable Driftless Systems on SU(n)

H. B. Silveira, P. S. Pereira da Silva and P. Rouchon

***Abstract*— For a right-invariant and controllable driftless system on SU(n), we consider a time-periodic reference trajectory along which the linearized control system generates $\mathfrak{su}(n)$: such trajectories always exist and constitute the basic ingredient of Coron's Return Method. The open-loop controls that we propose, which rely on a left-invariant tracking error dynamics and on a fidelity-like Lyapunov function, are determined from a finite number of left-translations of the tracking error and they assure global asymptotic convergence towards the periodic reference trajectory. The role of these translations is to avoid being trapped in the critical region of this Lyapunov-like function. The convergence proof relies on a periodic version of LaSalle's invariance principle and the control values are determined by numerical integration of the dynamics of the system. Simulations illustrate the obtained controls for $n = 4$ and the generation of the C–NOT quantum gate.**

I. INTRODUCTION

Consider the right-invariant driftless system

$$\dot{X} = \sum_{k=1}^{m} u_k H_k X, \quad X(0) = I, \tag{1}$$

where $X \in M^n$ is the state, M^n is the real Banach space of square $n \times n$ matrices with complex entries endowed with the Euclidean norm, $H = \{H_1, \ldots, H_m\} \subset \mathfrak{su}(n)$ (the Lie algebra of the special unitary group SU(n)), $u_k \in \mathbb{R}$ are the controls, and I is the identity matrix of M^n. The *periodic motion planning problem* for this system is formulated as follows. Given a *goal state* $X_\infty \in$ SU(n) and $T > 0$, find a smooth periodic *reference trajectory* X_r: $\mathbb{R}_+ \to$ SU(n) of period T, with $X_r(0) = X_\infty$, and determine continuous open-loop controls u_k: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, for $1 \leq k \leq m$, in a manner that the tracking error between the trajectory X: $\mathbb{R}_+ \to$ SU(n) of (1) and X_r converges to zero as $t \to \infty$, that is, $\lim_{t\to\infty}[X(t) - X_r(t)] = 0$.

We remark that there is no loss of generality in assuming that $X(0) = I$ in (1). Indeed, since system (1) is right-invariant, if $(X(t), (u_1(t), \ldots, u_m(t)))$, for $t \in \mathbb{R}_+$, is a solution of (1) with $X(0) = I$, then $(X(t)X_0, (u_1(t), \ldots, u_m(t)))$, for $t \in \mathbb{R}_+$, is a solution of (1) with initial condition $X(0) = X_0 \in$ SU(n). Therefore, if the periodic motion planning problem has been solved for system (1) with $X(0) = I$, it is straightforward to show that it will also be solved for (1) with $X(0) = X_0 \in$ SU(n).

The main result of this paper is the determination of a solution for the periodic motion planning problem. This is established by Theorem 2 in Section II, whose only assumption is that system (1) regular, in the sense of Definition 1 in Section II. The results of Coron's Return Method show that such condition is always met in case the system is controllable on SU(n) (see Remark 2 in Section II). Loosely speaking, by finding an appropriate reference trajectory X_r, using the time-dependent change of coordinates $Z = Z(X, t) = X^\dagger X_r(t)$, which corresponds to the tracking error on the group SU(n), and defining an adequate "feedback", we determine an algorithm that obtains, in a finite number of steps, continuous open-loops controls u_k, for every $1 \leq k \leq m$, which assure that the tracking error $X - X_r$ converges to zero as $t \to \infty$. This algorithm relies on Lyapunov-like convergence results inspired in the periodic version of LaSalle's invariance principle presented in [11], and in the *ad-condition* stabilization method of [6]. In a certain sense, we have used the real part of the trace of the left-invariant tracking error Z as a Lyapunov-like function, that is, $V(Z) = \Re(tr(Z))$. In the case of quantum systems, V can then be seen as a fidelity-like Lyapunov function.

The problem of steering a quantum system from a given initial state to an arbitrary final state, which can be regarded as a particular case of the periodic motion planning problem here formulated, has recently been treated in [8] using a flatness-based approach and in the book [4] (see also the references therein), where many quantum control techniques used in the literature are grouped together and explained in detail, such as Lyapunov-based methods, optimal control and decompositions of SU(n). Our Lyapunov-like approach has no restrictions on the goal state $X_\infty \in$ SU(n) and on n, as long as system (1) is regular.

The layout of the paper is as follows. Section II is entirely dedicated to the proof of Theorem 2 mentioned above. Simulations illustrate in Section III the generation of the Controlled-NOT (C–NOT) gate for a quantum system with $n = 4$. Appendix presents the proof of the important convergence result of Theorem 1 in Section II.

II. MAIN RESULT

Based on (1), we define the *reference system*

$$\dot{X}_r = \sum_{k=1}^{m} u_k^r H_k X_r, \quad X_r(0) = X_\infty \in \text{SU}(n), \tag{2}$$

The first author was fully supported by CAPES. The second author was partially supported by CNPq. The second and third authors were partially supported by CAPES/COFECUB and "Agence Nationale de la Recherche" (ANR), Projet Blanc CQUID number 06-3-13957.

H. B. Silveira and P. S. Pereira da Silva are with Laboratory of Automation and Control, Department of Telecommunications and Control Engineering, University of São Paulo, Brazil hectorbessa@yahoo.com.br and paulo@lac.usp.br

P. Rouchon is with Mines ParisTech, Centre Automatique et Systèmes, Mathématiques et Systèmes, France pierre.rouchon@mines-paristech.fr

where $X_r \in M^n$ and the smooth time functions $u_k^r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are still to be specified.

Definition 1: System (1) is said to be *regular* when, given $T > 0$, there exist smooth periodic functions $u_k^T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ of period T, for all $1 \le k \le m$, such that the solution $X_r^T\colon \mathbb{R} \to \mathrm{SU}(n)$ of (2), with $X_r^T(0) = I$ and $u_k^r = u_k^T$, is also periodic of period T and satisfies

$$\mathrm{span}\{B_k^j(0), 1 \le k \le m, j \in \mathbb{N}\} = \mathfrak{su}(n), \tag{3}$$

where $\mathbb{N}$ is the set of natural numbers (including zero), $A(t) = \sum_{k=1}^m u_k^T(t) H_k \in \mathfrak{su}(n)$, $B_k^0(t) = H_k X_r^T(t)$, $B_k^{j+1}(t) = -A(t)B_k^j(t) + \dot{B}_k^j(t)$, $1 \le k \le m$, $j \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$.

Remark 1: Note that $A\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{su}(n)$, B_k^j, $\dot{B}_k^j\colon \mathbb{R} \to M^n$ are smooth and also have period T, for every $1 \le k \le m$, $j \in \mathbb{N}$. Hence, they are bounded mappings.

Remark 2: Note that the linearized control system of (2) (or of (1)) along the trajectory $(X_r^T, (u_1^T, \ldots, u_m^T))$ is given by $\dot{X}_r^\ell = A(t)X_r^\ell + \sum_{k=1}^m w_k B_k^0(t)$, $w_k \in \mathbb{R}$. Based on Coron's Return Method (see [2], [3]), it can be shown that (1) is regular in case $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{su}(n)$. We recall that (1) is controllable on $\mathrm{SU}(n)$ if and only if $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{su}(n)$ [1].

For simplicity, we shall assume throughout this paper that system (1) is regular, that $T > 0$ has been fixed and that the functions u_k^r in (2) were specified accordingly, that is, $u_k^r = u_k^T$, for $1 \le k \le m$. Moreover, we also assume that the goal state $X_\infty \in \mathrm{SU}(n)$ is fixed. Define $X_r\colon \mathbb{R} \to \mathrm{SU}(n)$ as $X_r = X_r^T X_\infty$. Note that X_r is the solution of (2) with $X_r(0) = X_\infty$ and that X_r also has period T. It will be shown afterwards that X_r can indeed be used as a reference trajectory. We also adopt the following notations. The imaginary unit of $\mathbb{C}$ is denoted by $\imath$ and if $z \in \mathbb{C}$, then $\Re(z)$ is its real part and $\Im(z)$ its imaginary part.

It is straightforward to verify from (1) and (2) that the time-dependent change of coordinates

$$Z = Z(t, X) = X^\dagger X_r(t), \qquad \text{for all } (t, X) \in \mathbb{R} \times M^n,$$

along with the time-varying control shift

$$v_k \triangleq u_k^r(t) - u_k = u_k^T(t) - u_k, \qquad \text{for all } t \in \mathbb{R},\ 1 \le k \le m,$$

determine the left-invariant "closed-loop system"

$$\dot{Z} = Z X_r^\dagger(t) \sum_{k=1}^m v_k H_k X_r(t), \quad Z(0) = X_\infty \in \mathrm{SU}(n), \tag{4}$$

for all $(t, Z) \in \mathbb{R} \times M^n$. If we can find continuous functions $v_k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, for each $1 \le k \le m$, such that

$$\lim_{t\to\infty} Z(t) = \lim_{t\to\infty} X^\dagger(t) X_r(t) = I, \tag{5}$$

where $Z\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(n)$ is the solution of system (4) and $X\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{SU}(n)$ is the solution of system (1) with the continuous open-loop controls

$$u_k(t) = u_k^T(t) - v_k(t), \qquad \text{for all } t \in \mathbb{R}_+,\ 1 \le k \le m,$$

it is then clear that

$$\lim_{t\to\infty} [X(t) - X_r(t)] = 0, \tag{6}$$

thus solving the periodic motion planning problem.

Let $V\colon M^n \to \mathbb{R}$ be defined by

$$V(X) = \Re(tr(X)), \qquad \text{for all } X \in M^n, \tag{7}$$

and consider the *auxiliary system*

$$\dot{W} = W X_r^\dagger(t) \sum_{k=1}^m f_k a_k(t, W) H_k X_r(t), \tag{8}$$

where $(t, W) \in \mathbb{R} \times M^n$, $f_k \neq 0$ is a fixed real number, $1 \le k \le m$, and

$$a_k(t, W) = f_k \mathrm{V}(W X_r^\dagger(t) H_k X_r(t)) \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Notice that the "closed-loop" system (4) with "feedbacks" $v_k = f_k a_k(t, Z)$ is nothing but system (8)–(9). Note also that V in (7) is linear and that, for every $X \in \mathrm{SU}(n)$, we have $-n \le V(X) \le n$ and $V(X) = n$ if and only if $X = I$. Furthermore, by construction, $\dot{\mathrm{V}}(t, W) = \sum_{k=1}^m a_k(t, W)^2 \ge 0$, for all $(t, W) \in \mathbb{R} \times M^n$.

In what follows, we show how the next theorem, which is a Lyapunov-like convergence result for the auxiliary system (8)–(9) with Lyapunov-like function $V(W) = \Re(tr(W))$, and whose proof is deferred to Appendix, determines continuous functions $v_k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, for $1 \le k \le m$, such that (5) is satisfied for the "closed-loop" system (4). We remark that the properties of V stated above are essential in the proof. Our approach to solve the periodic motion planning problem is then summarized in Theorem 2.

Theorem 1: Consider the set

$$G = \{x \in \mathbb{R} : x = \sum_{i=1}^n \Re(\lambda_i), \text{ for some } \lambda_i \in \mathbb{C} \text{ such that } |\lambda_i| = 1, \prod_{i=1}^n \lambda_i = 1, \Im(\lambda_1) = \cdots = \Im(\lambda_n)\}.$$

Then, G is a finite set, $n \in G$ and $n = \max(G)$. Furthermore, letting δ be the maximal element of the set $G \setminus \{n\}$, we have that, for all $q = (t_0, W_{t_0}) \in \mathbb{R} \times \mathrm{SU}(n)$,

$$V(W_{t_0}) > \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} W_q(t) = I,$$

where $W_q\colon \mathbb{R} \to \mathrm{SU}(n)$ is the solution of (8)–(9) with initial condition $W_q(t_0) = W_{t_0}$.

Suppose that $V(X_\infty) > \delta$. In Theorem 1, we choose $q = (0, X_\infty) \in \mathbb{R} \times \mathrm{SU}(n)$. Therefore, $\lim_{t\to\infty} W_q(t) = I$. Hence, the smooth "feedbacks" $v_k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ defined as

$$v_k(t) \triangleq f_k a_k(t, Z(t)) = f_k^2 \mathrm{V}(X^\dagger(t) H_k X_r(t)),$$

for $t \in \mathbb{R}_+$, $1 \le k \le m$, assure that $Z(t) = W_q(t)$, for $t \in \mathbb{R}_+$. Indeed, compare (4) with (8)–(9). Thus, (5) holds.

Now, assume that $V(X_\infty) \le \delta$. For this case, based on continuity arguments, we determine an adequate (continuous) path from X_∞ to I which, in a certain sense, reduces the problem to the situation where $V(X_\infty) > \delta$. In order to achieve this, the main idea is to find a path $\overline{Z}\colon [0, 1] \to \mathrm{SU}(n)$, with $\overline{Z}(0) = X_\infty$ and $\overline{Z}(1) = I$, and obtain $0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{N-1} < \theta_N = 1$, such that $V(\overline{Z}(\theta_{\ell+1})^\dagger \overline{Z}(\theta_\ell)) > \delta$, for all $0 \le \ell \le N-1$. It thus follows from Theorem 1 that, for $1 \le \ell \le N$,

$\lim_{t\to\infty}\overline{Z}(\theta_\ell)W_\ell(t) = \overline{Z}(\theta_\ell)$, where $W_\ell\colon \mathbb{R} \to \mathrm{SU}(n)$ is the solution of (8)–(9) with initial condition $W_\ell(T_\ell) = \overline{Z}(\theta_\ell)^\dagger\overline{Z}(\theta_{\ell-1}) \in \mathrm{SU}(n)$, where $0 = T_1 < \cdots < T_{N+1}$ are such that $W_\ell(T_{\ell+1}) \approx I$. Loosely speaking, we then "glue" together the left-translations $\overline{Z}(\theta_1)W_1, \ldots, \overline{Z}(\theta_N)W_N$ in an appropriate manner in order to define a continuous solution $(Z(t), (v_1(t), \ldots, v_m(t)))$, for $t \in \mathbb{R}_+$, of system (4) that satisfies (5). We remark that, for every $1 \le \ell \le N$, it is as if we were in the case $V(X_\infty) > \delta$. In the sequel, we formalise these arguments in detail and determine an algorithm which obtains, in N steps, continuous functions $v_k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, for $1 \le k \le m$, such that (5) holds.

It is a standard result that any $X_\infty \in \mathrm{SU}(n)$ can be written as $X_\infty = M^\dagger \mathrm{diag}(\exp \imath\lambda_1, \ldots, \exp \imath\lambda_n)M$, where M is a unitary matrix, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ and $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$. Consider the path $\overline{Z}\colon [0,1] \to \mathrm{SU}(n)$ from X_∞ to I defined by

$$\overline{Z}(\theta) = M^\dagger \mathrm{diag}(\exp \imath\lambda_1(1-\theta), \ldots, \exp \imath\lambda_n(1-\theta))M,$$

for all $\theta \in [0,1]$. Let $a, b \in [0,1]$. Hence, $\overline{Z}(b)^\dagger\overline{Z}(a) = M^\dagger \mathrm{diag}(\exp \imath\lambda_1(b-a), \ldots, \exp \imath\lambda_n(b-a))M$ and therefore $V(\overline{Z}(b)^\dagger\overline{Z}(a)) = \sum_{j=1}^n \cos(\lambda_j(b-a))$. Since the function $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ defined by $\gamma(\theta) = \sum_{j=1}^n \cos(\lambda_j\theta)$, for all $\theta \in [0,1]$, is continuous with $\gamma(0) = n$, there exists $\nu > 0$ such that $\gamma(\theta) > \delta$ in case $|\theta| < \nu$, for all $\theta \in [0,1]$ (indeed, choose $\epsilon = n - \delta > 0$). Hence, $V(\overline{Z}(b)^\dagger\overline{Z}(a)) > \delta$ whenever $|b-a| < \nu$, for all $a, b \in [0,1]$, and there exists a non-zero $\eta \in \mathbb{N}$ such that, for all $N \ge \eta$,

$$V(\overline{Z}_{\ell+1}^\dagger\overline{Z}_\ell) = \sum_{j=1}^n \cos(\lambda_j\Delta) > \delta, \tag{10}$$

for all $0 \le \ell \le N-1$, where $\overline{Z}_\ell = \overline{Z}(\theta_\ell)$, $\theta_\ell = \ell\Delta$, for every $0 \le \ell \le N$, with $\Delta = 1/N$. Note that $\overline{Z}_0 = \overline{Z}(0) = X_\infty$ and $\overline{Z}_N = \overline{Z}(1) = I$. Let $N \ge \eta$ and consider the continuous function $\beta\colon M^n \times M^n \to \mathbb{R}$ defined by $\beta(X,Y) = V(Y^\dagger X)$, for all $(X,Y) \in M^n \times M^n$. Since $\mathrm{SU}(n)\times\mathrm{SU}(n)$ is compact, $\beta|(\mathrm{SU}(n)\times\mathrm{SU}(n))$ is uniformly continuous. Therefore, by (10), there exists $\mu > 0$ such that, for all $X \in \mathrm{SU}(n)$ and $0 \le \ell \le N-1$, we have

$$\|X - \overline{Z}_\ell\| < \mu \Rightarrow V(\overline{Z}_{\ell+1}^\dagger X) > \delta \tag{11}$$

(indeed, choose $\epsilon = \sum_{j=1}^n \cos(\lambda_j\Delta) - \delta > 0$ and consider the sup norm on $M^n \times M^n$). The aforementioned algorithm is described below. Recall that $\overline{Z}_0 = X_\infty$ and $\overline{Z}_N = I$.

Algorithm 1: Let $X_\infty \in \mathrm{SU}(n)$. Choose any non-zero $N \in \mathbb{N}$ in a manner that (10) holds. Define $T_1 = 0$ and $W_0(T_1) = I$. For every $1 \le \ell \le N-1$, choose a real number $T_{\ell+1} > T_\ell$ such that $V(\overline{Z}_{\ell+1}^\dagger\overline{Z}_\ell W_\ell(T_{\ell+1})) > \delta$, where $W_\ell\colon \mathbb{R} \to \mathrm{SU}(n)$ is the solution of system (8)–(9) with initial condition $W_\ell(T_\ell) = \overline{Z}_\ell^\dagger\overline{Z}_{\ell-1}W_{\ell-1}(T_\ell) \in \mathrm{SU}(n)$. Define

$$\begin{aligned} Z(t) &= \overline{Z}_\ell W_\ell(t) \in \mathrm{SU}(n), && \text{for } t \in [T_\ell, T_{\ell+1}),\\ v_k(t) &= f_k a_k(t, W_\ell(t)) \in \mathbb{R},\ 1 \le k \le m, && \text{for } t \in [T_\ell, T_{\ell+1}). \end{aligned}$$

If $T_N > T_{N-1}$ has been chosen as above, define

$$\begin{aligned} Z(t) &= W_N(t) \in \mathrm{SU}(n), && \text{for } t \ge T_N,\\ v_k(t) &= f_k a_k(t, W_N(t)) \in \mathbb{R},\ 1 \le k \le m, && \text{for } t \ge T_N, \end{aligned}$$

where $W_N\colon \mathbb{R} \to \mathrm{SU}(n)$ is the solution of (8)–(9) with initial condition $W_N(T_N) = \overline{Z}_{N-1}W_{N-1}(T_N) \in \mathrm{SU}(n)$. ■

Some remarks are in order. First of all, from the reasoning preceding Algorithm 1, we know that there always exists some non-zero $N \in \mathbb{N}$ such that (10) is true. Furthermore, Theorem 1 and property (11) assure that $T_{\ell+1} > T_\ell$ can always be chosen as required in the algorithm, for every $1 \le \ell \le N-1$. It is also clear that $(Z(t), (v_1(t), \ldots, v_m(t)))$, for $t \in \mathbb{R}_+$, determined by the algorithm is a continuous solution of the "closed-loop" system (4). Indeed, compare (4) with (8)–(9). Finally, since $V(\overline{Z}_N^\dagger\overline{Z}_{N-1}W_{N-1}(T_N)) = V(\overline{Z}_{N-1}W_{N-1}(T_N)) > \delta$, Theorem 1 implies that $\lim_{t\to\infty} W_N(t) = I$. However, $Z(t) = W_N(t)$, for $t \ge T_N$. Therefore, the continuous functions $v_k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ determined by Algorithm 1 are such that (5) is satisfied. We have thus shown our main result:

Theorem 2: Assume that system (1) is regular, in the sense of Definition 1. Given $X_\infty \in \mathrm{SU}(n)$, $T > 0$ and "feedback gains" $f_k^2 > 0$, consider $X_r^T\colon \mathbb{R} \to \mathrm{SU}(n)$ and $u_k^T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as in Definition 1, for $1 \le k \le m$. Define $X_r = X_r^T X_\infty$. Then, there exist continuous open-loop controls $u_k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, for $1 \le k \le m$, such that (6) is satisfied. In other words, the periodic motion planning problem always has a solution when (1) is regular. More precisely, if $V(X_\infty) > \delta$, where δ is as in Theorem 1, then the smooth open-loop controls $u_k(t) = u_k^T(t) - f_k^2 \mathrm{V}(X^\dagger(t)H_k X_r(t))$, obtained by numerical integration, for $t \in \mathbb{R}_+$, $1 \le k \le m$, assure that (6) holds. Otherwise, in case $V(X_\infty) \le \delta$, then by following Algorithm 1 we determine continuous functions $v_k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, for $1 \le k \le m$, such that the corresponding continuous open-loop controls $u_k(t) = u_k^T(t) - v_k(t)$, for $t \in \mathbb{R}_+$, assure that (6) is satisfied.

III. QUANTUM MECHANICAL EXAMPLE

After some approximations, an appropriate change of coordinates, scalings and simplifications, a controlled quantum system consisting of two coupled spin-$\frac{1}{2}$ particles with Heisenberg interaction and driven by an external electromagnetic field, can be modeled as [4]

$$\dot{Y} = (D + u_x D_x + u_y D_y + u_z D_z)Y, \quad Y(0) = I, \tag{12}$$

where $Y \in M^4$ ($n = 4$), the controls u_x, u_y, $u_z \in \mathbb{R}$ are the x, y, z components of the electromagnetic field, respectively, $D = \mathrm{diag}(3\imath, -\imath, -\imath, -\imath)$, $D_x = H_{14}^R - 3H_{23}^R$, $D_y = H_{13}^R + 3H_{24}^R$, $D_z = H_{12}^R - 3H_{34}^R \in \mathfrak{su}(4)$, and $H_{ij}^R = (h_{k\ell}^{R,ij})$, $H_{ij}^I = (h_{k\ell}^{I,ij}) \in \mathfrak{su}(4)$ are the matrices with entries

$$\begin{aligned} &h_{ij}^{R,ij} = 1,\ h_{ji}^{R,ij} = -1,\ h_{k\ell}^{R,ij} = 0, && \text{for } k,\ell \ne i,j,\\ &h_{ij}^{I,ij} = h_{ji}^{I,ij} = \imath, \qquad h_{k\ell}^{I,ij} = 0, && \text{for } k,\ell \ne i,j, \end{aligned}$$

respectively, for all $1 \le i < j \le 4$.

Now, in order to remove the drift term DY in (12), we define, as usual, the time-dependent change of coordinates

$X = \Phi(t, Y) = e^{-Dt}Y$, for all $(t, Y) \in \mathbb{R} \times M^4$. In these coordinates, (12) is described as[1]

$$\dot{X} = (u_x C_x(t) + u_y C_y(t) + u_z C_z(t))X, \quad X(0) = I, \quad (13)$$

where

$$C_x(t) = e^{-Dt} D_x e^{Dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{-\imath 4t} \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -e^{\imath 4t} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_y(t) = e^{-Dt} D_y e^{Dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-\imath 4t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -e^{\imath 4t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_z(t) = e^{-Dt} D_z e^{Dt} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\imath 4t} & 0 & 0 \\ -e^{\imath 4t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

for all $t \in \mathbb{R}$. We choose the real controls u_x, u_y, u_z as

$$\begin{aligned} u_x &= (u_1 + \imath u_2)e^{\imath 4t} + (u_1 - \imath u_2)e^{-\imath 4t}, \\ u_y &= (u_3 + \imath u_4)e^{\imath 4t} + (u_3 - \imath u_4)e^{-\imath 4t}, \\ u_z &= (u_5 + \imath u_6)e^{\imath 4t} + (u_5 - \imath u_6)e^{-\imath 4t}, \end{aligned} \quad (14)$$

respectively, for all $t \in \mathbb{R}$, where $u_1, \ldots, u_6 \in \mathbb{R}$ are the new controls. By applying the rotating wave approximation (RWA) (see e.g. [9], [4], [5]) to system (13)–(14), which consists in considering only the terms that are time-independent and in disregarding all the oscillating ones, we obtain the following time-independent driftless system

$$\dot{X} = (u_1 H_{14}^R + u_2 H_{14}^I + u_3 H_{13}^R + u_4 H_{13}^I + u_5 H_{12}^R + u_6 H_{12}^I)X, \quad (15)$$

with initial condition $X(0) = I$. It is straightforward to verify that $\mathrm{Lie}(\{H_{14}^R, H_{14}^I, H_{13}^R, H_{13}^I, H_{12}^R, H_{12}^I\}) = \mathfrak{su}(4)$, i.e. the system is controllable on $\mathrm{SU}(4)$. Hence, Coron's Return Method implies that the system is regular (see Remark 2) and therefore Theorem 2 can be applied. We choose $T = 1$ and as goal state the C–NOT (Controlled-Not) gate

$$X_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(4),$$

which is one of the universal gates and has great importance in quantum information theory [7], [5]. It is easy to see from the proof of Theorem 1 that $G = \{-4, 0, 4\}$ with $\delta = 0$. Since $V(X_\infty) = 2 > 0$, Theorem 2 implies that the smooth open-loop controls $u_k(t) = u_k^1(t) - f_k^2 \mathrm{V}(X^\dagger(t) H_k X_r(t)) = u_k^1(t) - v_k(t)$, for $t \in \mathbb{R}_+$, $1 \le k \le 6$, obtained by numerical integration, assure that $\lim_{t\to\infty}[X(t) - X_r(t)] = 0$, for any "feedback gains" $f_k^2 > 0$. Here, $u_k^1 = u_k^T$ with $T = 1$, and $H_1 = H_{14}^R$, $H_2 = H_{14}^I$, $H_3 = H_{13}^R$, $H_4 = H_{13}^I$, $H_5 = H_{12}^R$, $H_6 = H_{12}^I$. However, the periodic functions $u_1^1, \ldots, u_6^1$ are not known explicitly. Coron's Return Method only establishes their existence. Fortunately, for system (15), symbolic computation software packages have shown that if we define them as $u_k^1(t) = \sum_{\ell=1}^{n_f} a_{k\ell} \sin(2\pi\ell t)$, for $t \in \mathbb{R}$, $1 \le k \le 6$, with $n_f \ge 3$ and where $a_{k\ell} \in \mathbb{R}$ are randomly chosen from the uniform distribution on the interval $[-a, a]$ with "sufficiently large" $a > 0$, then it is "very likely" that $\dim(\mathrm{span}\{B_k^j(0), 1 \le k \le 6, 0 \le j \le 6\}) = 15$, that is, (3) holds (recall that $\dim(\mathfrak{su}(4)) = 15$). And, when (3) is true, it follows that $\lim_{t\to\infty}[X(t) - X_r(t)]$, where $X_r = X_r^1 X_\infty$. We remark that since u_k^1 is an odd periodic function with period $T = 1$, the solution $X_r^1 \colon \mathbb{R} \to \mathrm{SU}(n)$ in Definition 1 is also periodic with period $T = 1$. Note that a and n_f determine the "excitation level" of u_k^1. For $f_k = 1$, computer simulations have suggested that as a and n_f get larger, the faster the convergence of the tracking error $X - X_r$ to zero (assuming that $\dim(\mathrm{span}\{B_j^k(0)\}) = 15$, of course).

The obtained simulation results are now presented for $f_k = 1$, $a = n_f = 5$ and $a_{k\ell}$ having as values the corresponding entries of the matrix $\overline{A} = (a_{k\ell})$ below

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -2.00 & -1.39 & 4.66 & 4.31 & 1.80 \\ -0.31 & -1.54 & 0.92 & -3.20 & -2.18 \\ -4.69 & -0.31 & 1.75 & 3.94 & -1.11 \\ -2.79 & 0.77 & 4.09 & 2.34 & 3.46 \\ 2.19 & 0.60 & -0.27 & 0.43 & -3.75 \\ -0.18 & -4.44 & -1.38 & -4.58 & 2.59 \end{pmatrix}.$$

With these choices, we have indeed verified that $\dim(\mathrm{span}\{B_j^k(0)\}) = 15$. Figure 1 exhibits the convergence of $\|X - X_r\|$ to zero (Euclidean norm on M^4). We see that the norm of the tracking error is non-increasing. In Figure 2, the controls u_1, u_2 (top) and the "feedbacks" v_1, v_2 (bottom) on the time interval $[0, 10]$ are shown. Notice that v_k is relatively small in comparison with the control u_k, for $k = 1, 2$. Therefore, the control u_k is relatively close to u_k^1 as defined above, for $k = 1, 2$. In order not to overwhelm the presentation, we have chosen not to exhibit u_k, v_k, for $3 \le k \le 6$. They have, however, a similar behavior and a similar order of magnitude as for $k = 1, 2$.

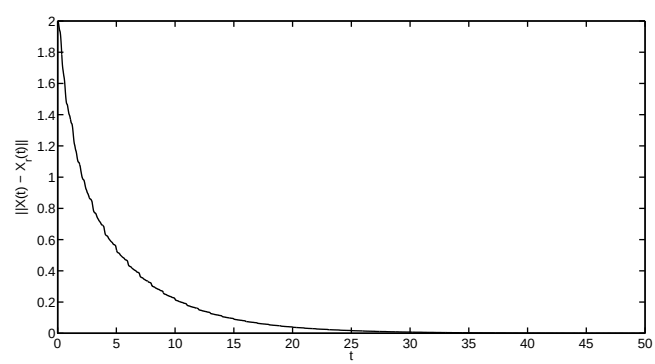

Fig. 1. Convergence of the norm of the tracking error to zero.

IV. CONCLUDING REMARKS

In the solution here presented for the periodic motion planning problem, the only needed assumption is that system

[1] In quantum mechanics, this description is usually called the interaction picture or interaction representation.

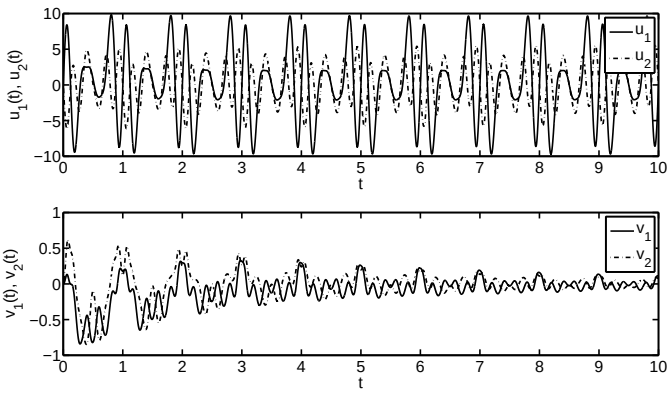

Fig. 2. Controls u_1, u_2 and "feedbacks" v_1, v_2 on the interval $[0, 10]$.

(1) is regular, which requires that the periodic functions u_k^T satisfying (3) are explicitly known. Nevertheless, this will hardly be the case in general. For this reason, currently under investigation is the explicit determination of u_k^r in (2) in a manner that Theorem 1 still holds under assumptions other than the regularity of system (1).

V. ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to thank Jean-Michel Coron and Mazyar Mirrahimi for valuable discussions and suggestions.

APPENDIX

In order to prove Theorem 1, we need first a few intermediate definitions and results. For simplicity, we consider throughout this section that $q = (t_0, W_{t_0}) \in \mathbb{R} \times \mathrm{SU}(n)$ is fixed and that $W_q\colon \mathbb{R} \to \mathrm{SU}(n)$ denotes the solution of system (8)–(9) with initial condition $W_q(t_0) = W_{t_0}$. Recall that if $X \in M^n$ and $\Omega \subset M^n$, $d(X, \Omega) \triangleq \inf_{Y \in \Omega} \|Y - X\|$.

Definition 2: [11] A point $\overline{W} \in M^n$ is called a *limit point* of W_q if there exists a real sequence $\{t_m\}$ such that $\lim_{m\to\infty} t_m = \infty$ and $\lim_{m\to\infty} W_q(t_m) = \overline{W}$. The set of all limit points of W_q is called the *limit set* of W_q and is denoted by $\Omega(W_q)$.

Remark 3: Since $\mathrm{SU}(n)$ is a compact subset of M^n, it is clear that $\Omega(W_q)$ is a non-empty subset of $\mathrm{SU}(n)$.

Proposition 1: [11] $\lim_{t\to\infty} d(W_q(t), \Omega(W_q)) = 0$.

The next 2 lemmas are essential in the proof of the important convergence result of Theorem 3 given below, which was inspired in the periodic version of LaSalle's invariance principle presented in [11] and in the *ad-condition* stabilization method of [6].

Lemma 1: Let $W\colon \mathbb{R} \to M^n$ be a continuously differentiable mapping such that $\lim_{t\to\infty} \dot{W}(t) = 0$. Suppose that $\{t_m\}$ is a real sequence such that $\lim_{m\to\infty} t_m = \infty$ and $\lim_{m\to\infty} W(t_m) = \overline{W}$. Then, for every $\epsilon \in \mathbb{R}$, we have that $\lim_{m\to\infty} W(t_m + \epsilon) = \overline{W}$.

Proof: Let $\epsilon \geq 0$ and $m \in \mathbb{N}$. We have that $W(t_m + \epsilon) - W(t_m) = \int_{t_m}^{t_m+\epsilon} \dot{W}(t)\, dt$. Thus, the inequality $\|W(t_m + \epsilon) - W(t_m)\| \leq |\epsilon| \sup_{t\in[t_m, t_m+\epsilon]} \|\dot{W}(t)\|$ holds. The assumptions then imply that $\lim_{m\to\infty} W(t_m + \epsilon) = \overline{W}$. For $\epsilon < 0$, we can proceed in an analogous manner. ■

Lemma 2: Consider that $\overline{W} \in \Omega(W_q)$, $j \in \mathbb{N}$ and let $1 \leq k \leq m$. Assume that $\lim_{t\to\infty} \dot{W}_q(t) = 0$ and that $\lim_{t\to\infty} \mathrm{V}(W_q(t) X_r^\dagger(t) B_k^j(t) X_\infty) = 0$, where B_k^j is as in (3). Then, $\mathrm{V}(\overline{W} X_\infty^\dagger B_k^j(0) X_\infty) = 0$.

Proof: Let $\overline{W} \in \Omega(W_q)$. By definition, there exists a real sequence $\{t_m\}$ such that $\lim_{m\to\infty} t_m = \infty$ and $\lim_{m\to\infty} W_q(t_m) = \overline{W}$. Now, for each $m \in \mathbb{N}$, there exists $\ell_m \in \mathbb{Z}$ such that $s_m = t_m - \ell_m T \in [0, T)$, where $T > 0$ is the period of X_r and of B_k^j (see Remark 1). Since $[0, T]$ is compact, there exists a subsequence $\{s_{m_i}\}$ in which $\lim_{i\to\infty} s_{m_i} = \theta \in [0, T]$. Let $\{t_{m_i}\}$ be the corresponding subsequence of $\{t_m\}$. Define the sequences $\{t_{m_i}^*\}$ and $\{s_{m_i}^*\}$ as $t_{m_i}^* = t_{m_i} - \theta$ and $s_{m_i}^* = s_{m_i} - \theta$, respectively. We have that $\lim_{t\to\infty} \dot{W}_q(t) = 0$ as well as $\lim_{t\to\infty} \mathrm{V}(W_q(t) X_r^\dagger(t) B_k^j(t) X_\infty) = 0$ (assumptions). Therefore, by definition, $\lim_{i\to\infty} s_{m_i}^* = 0$, and Lemma 1 gives that $\lim_{i\to\infty} W_q(t_{m_i}^*) = \lim_{i\to\infty} W_q(t_{m_i} - \theta) = \overline{W}$. Hence, the continuity and periodicity of X_r and of B_k^j imply that $\lim_{i\to\infty} \mathrm{V}(W_q(t_{m_i}^*) X_r^\dagger(t_{m_i}^*) B_k^j(t_{m_i}^*) X_\infty) = \lim_{i\to\infty} \mathrm{V}(W_q(t_{m_i}^*) X_r^\dagger(s_{m_i}^*) B_k^j(s_{m_i}^*) X_\infty) = \mathrm{V}(\overline{W} X_\infty^\dagger B_k^j(0) X_\infty) = 0$. ■

Theorem 3: Consider the subset $E = \{W \in \mathrm{SU}(n) : \mathrm{V}(W X_\infty^\dagger B_k^j(0) X_\infty) = 0, \text{ for all } j \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq m\}$, where B_k^j is as in (3). Then, $\lim_{t\to\infty} d(W_q(t), E) = 0$ and E is non-empty.

Proof: Due to Proposition 1, it suffices to prove that the non-empty limit set $\Omega(W_q)$ of the solution W_q is contained in the set E. We remark that since $\mathrm{V}\colon M^n \to \mathbb{R}$ is a continuous linear function, there exists $c > 0$ such that $|\mathrm{V}(X)| \leq c\|X\|$, for all $X \in M^n$. Furthermore, it follows from (2), (8)–(9), Remark 1 and the compactness of $\mathrm{SU}(n)$ that each of the mappings X_r, $X_r^\dagger$, W_q, B_k^j, $\dot{X}_r$, $\dot{X}_r^\dagger$, $\dot{W}_q$, $\dot{B}_k^j$ is bounded, for every $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$.

Consider the functions $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b_k^j\colon \mathbb{R} \times M^n \to \mathbb{R}$, $\beta_k^j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined respectively as

$$\begin{aligned} &\alpha(t) = \mathrm{V}(W_q(t)), && \text{for all } t \in \mathbb{R}, \\ &b_k^j(t, W) = \mathrm{V}(W X_r^\dagger(t) B_k^j(t) X_\infty), && (t, W) \in \mathbb{R} \times M^n, \\ &\beta_k^j(t) = b_k^j(t, W_q(t)), && \text{for all } t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

for $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$. We will prove by induction that

$$\lim_{t\to\infty} \beta_k^j(t) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{V}(W_q(t) X_r^\dagger(t) B_k^j(t) X_\infty) = 0, \quad (16)$$

for $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$. From (8)–(9) and the definition of b_k^0, we have that $\dot{\mathrm{V}}(t, W) = \sum_{k=1}^m f_k^2 b_k^0(t, W)^2 \geq 0$ and $\ddot{\mathrm{V}}(t, W) = 2\sum_{k=1}^m f_k^2 \dot{b}_k^0(t, W) b_k^0(t, W)$, where $\dot{b}_k^0(t, W) = \mathrm{V}(W X_r^\dagger(t) \sum_{\ell=1}^m f_\ell^2 b_\ell^0(t, W) H_\ell B_k^0(t) X_\infty) + b_k^1(t, W)$ and $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{R}$ are non-zero, for $(t, W) \in \mathbb{R} \times M^n$. Since $\dot{\mathrm{V}}$ is a non-negative function, we conclude that α is a non-decreasing function bounded from above such that $\ddot{\alpha}$ is bounded. Hence, $\lim_{t\to\infty} \alpha(t)$ exists and is finite. This relation along with Barbalat's Lemma (see e.g. [10]) give that $\lim_{t\to\infty} \dot{\alpha}(t) = \sum_{k=1}^m f_k^2 b_k^0(t, W_q(t))^2 = 0$. Thus, $\lim_{t\to\infty} \beta_k^0(t) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{V}(W_q(t) X_r^\dagger(t) B_k^0(t) X_\infty) = 0$, for each $1 \leq k \leq m$, from which (8)–(9) imply that

$$\lim_{t\to\infty} \dot{W}_q(t) = 0. \quad (17)$$

Now, consider the induction hypothesis

$$\lim_{t\to\infty} \beta_k^j(t) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{V}(W_q(t)X_r^\dagger(t)B_k^j(t)X_\infty) = 0, \quad (18)$$

for some $j \in \mathbb{N}$ and all $1 \leq k \leq m$. We have that $\dot{b}_k^j(t,W) = \mathrm{V}(WX_r^\dagger(t)\sum_{\ell=1}^m f_\ell^2 b_\ell^0(t,W)H_\ell B_k^j(t)X_\infty) + b_k^{j+1}(t,W)$, for all $1 \leq k \leq m$, $(t,W) \in \mathbb{R}\times M^n$. Straightforward computations show that $\ddot{\beta}_k^j$ is bounded because $\ddot{\beta}_k^j(t) = \ddot{b}_k^j(t,W_q(t))$, for all $1 \leq k \leq m$, $t \in \mathbb{R}$. Hence, (18) and Barbalat's Lemma imply that $\lim_{t\to\infty}\beta_k^{j+1}(t) = \lim_{t\to\infty}\mathrm{V}(W_q(t)X_r^\dagger(t)B_k^{j+1}(t)X_\infty) = 0$, for $1 \leq k \leq m$. We have thus proved that (16) is true. At this moment, it is simple to prove that $\Omega(W_q) \subset E$. Indeed, assume that $\overline{W} \in \Omega(W_q) \subset \mathrm{SU}(n)$. Then, (16), (17) and Lemma 2 imply that $\mathrm{V}(\overline{W}X_\infty^\dagger B_k^j(0)X_\infty) = 0$, for each $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$. ■

Lemma 3: Consider the subset $F = \{W \in \mathrm{SU}(n) : V(W) = \sum_{i=1}^n \Re(\lambda_i),$ for some $\lambda_i \in \mathbb{C}$ such that $|\lambda_i| = 1, \prod_{i=1}^n \lambda_i = 1, \Im(\lambda_1) = \cdots = \Im(\lambda_n)\}$. Then, $I \in F$ and $\lim_{t\to\infty} d(W_q(t),F) = 0$.

Proof: According to Theorem 3, it suffices to show the inclusion $E \subset F$. Let $W \in E \subset \mathrm{SU}(n)$. It is a well-known result in linear algebra that $W \in \mathrm{SU}(n)$ can be decomposed as $W = M\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)M^\dagger$, where M is unitary, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{C}$, $|\lambda_i| = 1$ and $\prod_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Thus, $V(W) = \sum_{i=1}^n \Re(\lambda_i)$ and $\mathrm{V}(WX_\infty^\dagger B_k^j(0)X_\infty) = \mathrm{V}(\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)(X_\infty M)^\dagger B_k^j(0)(X_\infty M)) = 0$, for each $1 \leq k \leq m$, $j \in \mathbb{N}$. Since $X_\infty M$ is unitary, it is clear that N: $\mathfrak{su}(n) \to \mathfrak{su}(n)$ defined by $N(Y) = (X_\infty M)^\dagger Y(X_\infty M)$, for every $Y \in \mathfrak{su}(n)$, is a linear surjective isomorphism. Now, by assumption, system (1) is regular and (3) is satisfied. Hence, $\mathrm{V}(\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)X) = 0$, for every $X \in \mathfrak{su}(n)$, and thus $\mathrm{V}(\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)D_\ell) = 0$, for each $1 \leq \ell \leq n$, where $D_1 = \mathrm{diag}(\imath,-\imath,0,\ldots,0)$, $D_2 = \mathrm{diag}(0,\imath,-\imath,0,\ldots,0),\ldots,D_{n-1} = \mathrm{diag}(0,\ldots,\imath,-\imath)$ and $D_n = \mathrm{diag}(\imath,0,\ldots,0,-\imath)$ are the canonical diagonal matrices of $\mathfrak{su}(n)$. From the diagonal structure of $D_1,\ldots,D_n$, we conclude that $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ must satisfy $\Im(\lambda_1) = \cdots = \Im(\lambda_n)$. This implies that $W \in F$ and therefore $E \subset F$. ■

The proof of Theorem 1 is given below.

Proof: It is clear that $n = \max(G)$ because $I \in F$. We will first show that G is finite. Let $x \in G$. Then, there exist $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{C}$ such that $x = \sum_{j=1}^n \Re(\lambda_j)$ with (i) $\prod_{j=1}^n \lambda_j$, (ii) $|\lambda_j| = 1$ and (iii) $\Im(\lambda_1) = \cdots = \Im(\lambda_n)$. Property (ii) implies that $\lambda_j = e^{\imath\theta_j}$, for some $\theta_j \in \mathbb{R}$, and it follows from (iii) that $\lambda_j = \lambda_1 = e^{\imath\theta_1}$ or $\lambda_j = e^{\imath(\pi-\theta_1)}$, for each $1 \leq j \leq n$. Let n_1 be the number of $j \in \{1,\ldots,n\}$ such that $\lambda_j = \lambda_1$ and define $n_2 = n - n_1$. Therefore, $x = n_1\cos(\theta_1) + n_2\cos(\pi-\theta_1) = (n_1-n_2)\cos(\theta_1)$ with $n_1,(n_2+1) \in \{1,\ldots,n\}$ and $n_1+n_2 = n$. If $n_1 = n_2$, then $x = 0$. Thus, assume that $n_1 \neq n_2$. From property (i) we obtain that $e^{\imath n_1\theta_1}e^{\imath n_2(\pi-\theta_1)} = 1$. Hence, there exists $k \in \mathbb{Z}$ such that $n_1\theta_1 + n_2(\pi-\theta_1) = 2k\pi$. This relation implies that $\theta_1 = (2k-n_2)\pi/(n-2n_2)$. Note that n_1,n_2,k depend on $x \in G$ and that n_2, n_1-n_2 can only assume a finite number of values. If we show that θ_1 can only assume a finite number of values, we will have shown that the same holds for $x \in G$, which implies that G is finite. It is clear that the function η: $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ defined as $\eta(\ell) = \cos((2\ell-n_2)\pi/(n-2n_2))$, for all $\ell \in \mathbb{Z}$, has period $|n-2n_2| > 0$. Thus, the values assumed by θ_1 must be finite in number.

Now, the convergence result will be shown. Recall that, for all $X \in \mathrm{SU}(n)$, we have that $-n \leq V(X) \leq n$ and that $V(X) = n$ if and only if $X = I$. Let $\delta = \max(G\setminus\{n\})$. Since G is finite, we have that

$$\delta < x \leq n \Rightarrow x = n, \qquad \text{for all } x \in G. \quad (19)$$

Suppose that $V(W_{t_0}) > \delta$. Since $\mathrm{SU}(n)$ is compact and V: $M^n \to \mathbb{R}$ is continuous, it follows that $V|\mathrm{SU}(n)$ is uniformly continuous. Define the function α: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by $\alpha(t) = \mathrm{V}(W_q(t))$, for $t \in \mathbb{R}$. Recall that, by construction, we have that $\dot{\mathrm{V}}(t,W) = \sum_{k=1}^m a_k(t,W)^2 \geq 0$, for all $(t,W) \in \mathbb{R}\times M^n$. Note that a_k and $\dot{\mathrm{V}}$ are smooth, for each $1 \leq k \leq m$. Since $\dot{\mathrm{V}}$ is a non-negative function, we conclude that α is a smooth non-decreasing function. Therefore, $V(W_q(t)) \geq V(W_{t_0}) > \delta$, for all $t \geq t_0$. The uniform continuity of $V|\mathrm{SU}(n)$ then implies that there exists $\mu > 0$ such that

$$\|X - W_q(t)\| < \mu \Rightarrow V(X) > \delta, \qquad \text{for } t \geq t_0,\ X \in \mathrm{SU}(n) \quad (20)$$

(indeed, choose $\epsilon = V(W_{t_0}) - \delta > 0$). The convergence result of Lemma 3 means that

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\overline{T} \in \mathbb{R}\ \forall t \geq \overline{T}\ \exists\alpha(t) \in F \text{ s.t. } \|\alpha(t) - W_q(t)\| < \epsilon.$$

Let $\epsilon > 0$ and define $\bar{\epsilon} = \min(\epsilon,\mu)$. Thus,

$$\forall t \geq \overline{T}\ \exists\alpha(t) \in F \text{ s.t. } \|\alpha(t) - W_q(t)\| < \bar{\epsilon} \leq \mu,$$

for some $\overline{T} \in \mathbb{R}$. Define $\widetilde{T} = \max(\overline{T},t_0)$ and let $t \geq \widetilde{T}$. Since $\alpha(t) \in F \subset \mathrm{SU}(n)$ and $V(F) \subset G$, (20) gives that $\delta < V(\alpha(t)) \in G$. However, $\delta < V(\alpha(t)) \leq n$. Therefore, from (19), we obtain that $V(\alpha(t)) = n$, which implies that $\alpha(t) = I$. We have thus shown that $\lim_{t\to\infty} W_q(t) = I$. ■

References

[1] F. Albertini and D. D'Alessandro. Notions of controllability for bilinear multilevel quantum systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 48(8):1399–1403, 2003.

[2] J.-M. Coron. Linearized control systems and applications to smooth stabilization. *SIAM J. Control Optim.*, 32(2):358–386, 1994.

[3] J.-M. Coron. *Control and Nonlinearity*. American Mathematical Society, 2007.

[4] D. D'Alessandro. *Introduction to Quantum Control and Dynamics*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2008.

[5] S. Haroche and J-M. Raimond. *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities and Photons*. Oxford University Press, Oxford, 2006.

[6] V. Jurdjevic and J. P. Quinn. Controllability and stability. *J. Diff. Equations*, 28:381–389, 1978.

[7] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge Universisty Press, Cambridge, 2000.

[8] P. S. Pereira da Silva and P. Rouchon. Flatness-based control of a single qubit gate. *IEEE Trans. Automat. Control*, 53(3):775–779, 2008.

[9] P. Rouchon. Quantum systems and control. *ARIMA*, 9:325–357, 2008.

[10] J.-J. E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, New Jersey, 1991.

[11] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, New Jersey, 2nd edition, 1993.

Referências Bibliográficas

[1] F. Albertini and D. D'Alessandro. Notions of controllability for bilinear multilevel quantum systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 48(8):1399–1403, 2003.

[2] A. Baker. *Matrix Groups: An Introduction to Lie Group Theory.* Springer-Verlag, London, 2002.

[3] J.-L. Basdevant and J. Dalibard. *Quantum Mechanics.* Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[4] F. A. Berezin and M. A. Shubin. *The Schrödinger Equation.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

[5] J. Blank, P. Exner, and M. Havlícek. *Hilbert Space Operators in Quantum Physics.* Springer, 2nd edition, 2008.

[6] W. M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry.* Academic Press, New York, 1975.

[7] U. Boscain, G. Charlot, J.-P. Gauthier, S. Guérin, and H.-R. Jauslin. Optimal control in laser-induced population transfer for two- and three-level quantum systems. *Journal of Mathematical Physics*, 43(5):2107–2132, 2002.

[8] L. Bouten, R. van Handel, and M. R. James. An introduction to quantum filtering. *SIAM J. Control Optim.*, 46(6):2199–2241, 2007.

[9] F. Brauer and J. A. Nohel. *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations: An Introduction.* Dover Publications, Inc., New York, 1989.

[10] R. Briant, S. Chern, R. Gardner, H. Goldschmidt, and P. Griffiths. *Exterior Differential Systems.* Springer-Verlag, New York, 1991.

[11] R. W. Brocket. Asymptotic stability and feedback stabilization. In R. W. Brockett, R. S. Millman, and H. H. Sussmann, editors, *Differential Geometric Control Theory*, volume 27 of *Progr. Math.*, pages 181–191. Birkhäuser, Basel, 1983.

[12] F. Bullo and A. D. Lewis. *Geometric Control of Mechanical Systems*. Springer-Verlag, New York, 2005.

[13] K.-C. Cao. Global $\mathcal{K}$-exponential tracking control of nonholonomic systems in chained-form by output feedback. *Acta Automatica Sinica*, 35(5):568–576, 2009.

[14] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Quantum Mechanics*. John Wiley & Sons/Hermann, Paris, 1977.

[15] J.-M. Coron. Global asympotic stabilization for controllable systems without drift. *Math. Control Signals Systems*, 5(3):295–312, 1992.

[16] J.-M. Coron. Linearized control systems and applications to smooth stabilization. *SIAM J. Control Optim.*, 32(2):358–386, 1994.

[17] J.-M. Coron. On the stabilization of some nonlinear control systems: Results, tools, and applications. In F. H. Clarke and R. J. Stern, editors, *NATO Advanced Study Institute, Nonlinear analysis, differential equations, and control*, pages 307–367. Kluwer Academic Publishers, Holanda, 1999.

[18] J.-M. Coron. *Control and Nonlinearity*. American Mathematical Society, 2007.

[19] C. Corrêa Filho. *Aspectos da Estrutura Geométrica de Sistemas de Não Lineares Implícitos*. PhD thesis. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

[20] P. S. Pereira da Silva. *Sobre a Estrutura de Sistemas de Controle Lineares e Não-Lineares*. Tese de Livre Docência, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

[21] D. D'Alessandro. Constructive controllability of one and two spin $\frac{1}{2}$ particles. In *Proc. of the American Control Conference – ACC*, pages 1715–1720, Arlington, Estados Unidos, 2001.

[22] D. D'Alessandro. Contributions of control theory to fundamental quantum mechanics and its applications. In *Proc. of the 41st IEEE Conf. on Decision and Control – CDC*, pages 4569–4574, Las Vegas, Estados Unidos, 2002.

[23] D. D'Alessandro. *Introduction to Quantum Control and Dynamics.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2008.

[24] M. D. Di Benedetto, J. W. Grizzle, and C. H. Moog. Rank invariants of nonlinear systems. *SIAM J. Control Optim.*, 27:658–672, 1989.

[25] J. Dieudonné. *Treatise on Analysis Volume III.* Academic Press, New York, 1972.

[26] J. Dieudonné. *Treatise on Analysis Volume IV.* Academic Press, New York, 1974.

[27] J. Dieudonné. *Calcul Infinitésimal.* Hermann, Paris, 2nd edition, 1980.

[28] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 315:619–624, 1992.

[29] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. Linéarisation par bouclage dynamique et transformations de Lie-Bäcklund. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 317:981–986, 1993.

[30] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 44(5):922–937, 1999.

[31] T. Ganesan and T.-J. Tarn. Disturbance decoupling for open quantum systems: Quantum internal model principle. In *Analysis in Design of Nonlinear Control Systems*, pages 355–375. Springer, Berlin, 2008.

[32] R. B. Gardner and W. F. Shadwick. The GS algorithm for exact linearization to Brunovsky normal form. *IEEE Trans. Automat. Control*, 37:224–230, 1992.

[33] S. Gasiorowicz. *Quantum Physics.* John Wiley & Sons, New York, 3rd edition, 2003.

[34] A. Giaro, A. Kumpera, and C. Ruiz. Sur la lecture correcte d'un résultat d'Élie Cartan. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série A 287(4):241–244, 1978.

[35] M. Golubitsky and V. Guillemin. *Stable Mappings an Their Singularities.* Springer-Verlag, New York, 1973.

[36] D. J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics.* Prentice Hall, New Jersey, 1995.

[37] S. J. Gustafson and I. M. Sigal. *Mathematical Concepts of Quantum Mechanics.* Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[38] B. C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras and Representations: An Elementary Introduction.* Springer-Verlag, New York, 2003.

[39] S. Haroche and J-M. Raimond. *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities and Photons.* Oxford University Press, Oxford, 2006.

[40] M. W. Hirsch. *Differential Topology.* Springer-Verlag, New York, 1976.

[41] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems.* Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 1995.

[42] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems II.* Springer-Verlag, London, 1999.

[43] A. T. Ivey and J. M. Landsberg. *Cartan for Beginners: Differential Geometry Via Moving Frames and Exterior Differential Systems.* American Mathematical Society, 2003.

[44] N. R. James, H. I. Nurdin, and I. R. Pertersen. H^∞ control of linear quantum stochastic systems. *IEEE Trans. Automat. control*, 53(8):1787–1803, 2008.

[45] Z-P. Jiang and H. Nijmeijer. A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form. *IEEE Trans. Automat. control*, 44(2):265–279, 1999.

[46] V. Jurdjevic. *Geometric Control Theory.* Cambridge Universisty Press, Cambridge, 1997.

[47] V. Jurdjevic and J. P. Quinn. Controllability and stability. *J. Diff. Equations*, 28:381–389, 1978.

[48] V. Jurdjevic and H. J. Sussmann. Control systems on Lie groups. *J. Diff. Equations*, 12:313–329, 1972.

[49] I. Kolár, P. W. Michor, and J. Slovák. *Natural Operations in Differential Geometry.* Springer-Verlag, Berlin, 1993. Disponível em http://www.mat.univie.ac.at/∼michor.

[50] A. Kriegl and P. W. Michor. *The Convenient Setting of Global Analysis.* American Mathematical Society, 1997. Disponível em http://www.mat.univie.ac.at/∼michor.

[51] S. Kuang and Cong. S. Lyapunov control methods of closed quantum systems. *Automatica*, 44(1):98–108, 2008.

[52] S. Lang. *Analysis I.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.

[53] M. Le Bellac. *Quantum Physics.* Cambridge University Press, New York, 2006.

[54] M. Le Bellac. *A Short Introduction to Quantum Information and Quantum Computation.* Cambridge Universisty Press, Cambridge, 2006.

[55] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer-Verlag, New York, 2003.

[56] N. E. Leonard and P. S. Krishnaprasad. Motion control of drift-free, left-invariant systems on Lie groups. *IEEE Trans. Automat. control*, 40(9):1539–1554, 1995.

[57] M. H. Levitt. *Spin Dynamics: Basic of Nuclear Magnetic Resonance.* John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2nd edition, 2008.

[58] E. L. Lima. *Álgebra Exterior.* IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[59] S. Lipschutz. *Schaum's Outline of Linear Algebra.* McGraw-Hill, New York, 1968.

[60] J. Lévine. *Analysis and Control of Nonlinear Systems: A Flatness-based Approach.* Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[61] H. Mabuchi. Coherent-feedback quantum control with a dynamic compensator. *Phys. Rev. A*, 78(032323), 2008.

[62] R. S. Macomber. *A Complete Introduction to Modern NMR Spectroscopy.* John Wiley & Sons, New York, 1998.

[63] J. Margalef-Roig and E. Outerelo Dominguez. *Differential Topology.* North-Holland, Amsterdam, 1992.

[64] A. Marigo. Constructive necessary and sufficient conditions for strict triangularizability of driftless nonholonomic systems. In *Proc. of the 38th IEEE Conf. on Decision and Control – CDC*, pages 2138–2143, Phoenix, Estados Unidos, 1999.

[65] A. Marigo and A. Bicchi. Steering driftless nonholonomic systems by control quanta. In *Proc. of the 37th IEEE Conf. on Decision and Control – CDC*, pages 4164–4168, Tampa, Estados Unidos, 1998.

[66] P. Martin. *Contribuition a l'étude des systémes différentiellement plats.* PhD thesis, École des Mines, Paris, 1992.

[67] Ph. Martin, R. M. Murray, and P. Rouchon. Flat systems, equivalence and trajectory generation. Technical report, 2003. Disponível em http://cas.ensmp.fr/∼rouchon.

[68] Ph. Martin and P. Rouchon. Feedback linearization and driftless systems. *Math. Control Signals Systems*, 7:235–254, 1994.

[69] Ph. Martin and P. Rouchon. Any (controllable) driftless system with 3 inputs and 5 states is flat. *Systems Control Lett.*, 25:167–173, 1995.

[70] Ph. Martin and P. Rouchon. Any (controllable) driftless system with m inputs and m+2 states is flat. In *Proc. of the 34th IEEE Conf. on Decision and Control – CDC*, pages 2886–2891, New Orleans, Estados Unidos, 1995.

[71] E. Merzbacher. *Quantum Mechanics.* John Wiley & Sons, New York, 2nd edition, 1970.

[72] P. Michor. Manifolds of smooth maps. *Cahiers de Topologie et Géométrie Differéntielle Catégoriques*, 19(1), 1978. Disponível em http://www.numdam.org.

[73] P. W. Michor. *Manifolds of Differential Mappings.* Shiva Publishing, Orpington, 1980. Disponível em http://www.mat.univie.ac.at/∼michor.

[74] S. Morita. *Geometry of Differential Forms.* American Mathematical Society, 2001.

[75] R. M. Murray. Applications and extensions of Goursat normal form to control of nonlinear systems. In *Proc. of the 32nd IEEE Conf. on Decision and Control – CDC*, pages 3425–3430, San Antonio, Estados Unidos, 1993.

[76] R. M. Murray. Nilpotent bases for a class of non-integrable distributions with applications to trajectory generation for nonholonomic systems. *Math. Control Signals Systems*, 7(1):58–75, 1995. Disponível na versão de um relatório técnico em http://caltechcdstr.library.caltech.edu/59/01/CDS92-002.pdf.

[77] R. M. Murray and S. Sastry. Steering nonholonomic systems using sinusoids. In *Proc. of the 29th IEEE Conf. on Decision and Control – CDC*, pages 2097–2101, Honolulu, Estados Unidos, 1990.

[78] R. M. Murray and S. Sastry. Steering nonholonomic systems in chained form. In *Proc. of the 30th IEEE Conf. on Decision and Control – CDC*, pages 2097–2101, Brighton, Inglaterra, 1991.

[79] R. M. Murray and S. Sastry. Nonholonomic motion planning: Steering using sinusoids. *IEEE Trans. Automat. control*, 38(5):700–716, 1993.

[80] R. Narasimhan. *Analysis on Real and Complex Manifolds*. North-Holland, Amsterdam, 1985.

[81] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge Universisty Press, Cambridge, 2000.

[82] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1990.

[83] H. I. Nurdin, N. R. James, and I. R. Pertersen. Coherent quantum LQG control. *Automatica*, 45(8):1837–1846, 2009.

[84] W. Pasillas-Lépine and W. Respondek. On geometry of control systems equivalent to canonical contact systems: Regular points, singular points and flatness. In *Proc. of the 39th IEEE Conf. on Decision and Control – CDC*, pages 5151–5156, Sidney, Australia, 2000.

[85] W. Pasillas-Lépine and W. Respondek. On the geometry of Goursat structures. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 6:119–181, 2001. Disponível em http://www.esaim-cocv.org.

[86] P. S. Pereira da Silva. Flatness of nonlinear control systems and exterior differential systems. In F. Lamnabhi-Lagarrigue A. Isidori and W. Respondek, editors, *Nonlinear Control in the year 2000*, volume 259 of *Lecture notes in control and Information Sciences*, pages 205–228. Springer, London, 2000.

[87] P. S. Pereira da Silva. Some geometric properties of the Dynamic Extension Algorithm. Technical Report EPUSP–BT/PTC/0008, Universidade de São Paulo, 2000. Disponível em www.lac.usp.br/∼paulo.

[88] P. S. Pereira da Silva and C. Corrêa Filho. Relative flatness and flatness of implicit systems. *SIAM J. Contr. Optimiz.*, 39:1929–1951, 2001.

[89] P. S. Pereira da Silva and P. Rouchon. Flatness-based control of a single qubit gate. *IEEE Trans. Automat. control*, 53(3):775–779, 2008.

[90] P. S. Pereira da Silva, H. B. Silveira, C. Corrêa Filho, and S. Batista. An infinite dimensional differential-geometric approach for nonlinear systems: Part I – R^A-manifolds, diffieties and systems. Em preparação.

[91] P. S. Pereira da Silva, H. B. Silveira, C. Corrêa Filho, and S. Batista. An infinite dimensional differential-geometric approach for nonlinear systems: Part II – Systems theory. Em preparação.

[92] N. Petit, P. Rouchon, J.-M. Boueilh, F. Guérin, and Ph. Pinvidic. Control of an industrial polymerization reactor using flatness. *Journal of Process Control*, 12:659–665, 2002.

[93] J.-B. Pomet. Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift. *Systems Control Lett.*, 18(2):147–158, 1992.

[94] J.-B. Pomet. A differential geometric setting for dynamic equivalence and dynamic linearization. *Banach Center Publications*, pages 319–339, 1995.

[95] E. Prugovecki. *Quantum Mechanics in Hilbert Space.* Academic Press, New York, 2nd edition, 1981.

[96] Marino R. and Tomei P. *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust.* Prentice Hall, London, 1995.

[97] V. Ramakrishna, M. V. Salapaka, M. Dahleh, H. Rabitz, and A. Peirce. Controllability of molecular systems. *Physical Review A*, 51(2):960–966, 1995.

[98] W. Respondek. Transforming nonholonomic control systems into the canonical contact form. In *Proc. of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control – CDC*, pages 1781–1786, Orlando, Estados Unidos, 2001.

[99] P. Rouchon. Quantum systems and control. *ARIMA*, 9:325–357, 2008.

[100] P. Rouchon, M. Fliess, J. Lévine, and Ph. Martin. Flatness, motion planning and trailer systems. In *Proc. of the 32nd IEEE Conf. on Decision and Control – CDC*, San Antonio, Estados Unidos, 1993.

[101] Yu. L. Sachkov. Control theory on Lie groups. *Journal of Mathematical Sciences*, 156(3):381–439, 2009.

[102] D. R. Sahoo and M. V. Salapaka. Constructive control of quantum-mechanical systems. In *Proc. of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control – CDC*, pages 1601–1606, Orlando, Estados Unidos, 2001.

[103] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, 1994.

[104] C. Samson. Control of chained systems application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots. *IEEE Trans. Automat. control*, 40(1):64–77, 1995.

[105] S. Sastry. *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*. Springer-Verlag, New York, 1999.

[106] M. Schechter. *Operator Methods in Quantum Mechanics*. Dover, Mineola, 2002.

[107] F. Scheck. *Quantum Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[108] S. G Schirmer, A. D. Greentree, V. Ramakrishna, and H. Rabitz. Constructive control of quantum systems using factorization of unitary operators. *J. Phys. A*, 35:8315–8339, 2002.

[109] R. Shankar. *Principles of Quantum Mechanics*. Plenum Press, New York, 2nd edition, 1994.

[110] B. W. Shore. *The Theory of Coherent Atom Excitation – Volumes 1 and 2*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990.

[111] H. B. Silveira and P. S. Pereira da Silva. A triangular form for flat nonlinear systems with two controls and five or less states. Foz do Iguassu - RS, Brasil, 2007. Proc. CD of the 3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control – SSSC.

[112] H. B. Silveira, P. S. Pereira da Silva, and P. Rouchon. A time-periodic Lyapunov approach for motion planning of controllable driftless systems on SU(n). In *Proc. of the 48th IEEE Conf. on Decision and Control – CDC*, Xangai, China, 2009.

[113] H. Sira-Ramirez and S. K. Agrawal. *Differentially Flat Systems*. Marcel Dekker, New York, 2004.

[114] J.-J. E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, New Jersey, 1991.

[115] O. J. Sørdalen and O. Egeland. Exponential stabilization of nonholonomic chained systems. *IEEE Trans. Automat. control*, 40(1):35–49, 1995.

[116] K. Spindler. Motion planning via optimal control theory. In *Proc. American Control Conference*, pages 1972–1977, Anchorage, Estados Unidos, 2002.

[117] A. Sudbery. *Quantum Mechanics and Particles of Natures: An Outline for Mathematicians*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[118] A. R. Teel, R. M. Murray, and G. C. Walsh. Non-holonomic control systems: From steering to stabilization with sinusoids. *Internat. J. Control*, 62(4):849–870, 1995.

[119] G. Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Disponível em www.mat.univie.ac.at/∼gerald.

[120] G. Teschl. *Mathematical Methods in Quantum Mechanics: with Applications to Schrödinger Operators*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009. Disponível em www.mat.univie.ac.at/∼gerald.

[121] D. Tilbury, R. M. Murray, and S. R. Sastry. Trajectory generation for the n-trailer problem using Goursat normal form. *IEEE Trans. Automat. Control*, 40(5):802–819, 1995.

[122] U. Vaidya, D. D'Alessandro, and I. Mezic. Control of Heisenberg spin systems; Lie algebraic decompositions and action-angle variables. In *Proc. of the 42nd IEEE Conf. on Decision and Control – CDC*, pages 4174–4178, Hawaii, Estados Unidos, 2003.

[123] R. van Handel, J. K. Stockton, and H. Mabuchi. Feedback control of quantum state reduction. *IEEE Trans. Automat. control*, 50(6):768–780, 2005.

[124] M. van Nieuwstadt, M. Rathinam, and R. M. Murray. Differential flatness and absolute equivalence of nonlinear control systems. *SIAM J. Control Optim.*, 36(4):1225–1239 (electronic), 1998.

[125] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, New Jersey, 2nd edition, 1993.

[126] X. Wang and S. G. Schirmer. Analysis of Lyapunov method for control of quantum systems. *arXiv:0801.0702v2*, 2008.

[127] F. W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[128] M. Yanagisawa and H. Kimura. Transfer function approach to quantum control – Part I: Dynamics of quantum feedback systems. *IEEE Trans. Automat. control*, 48(12):2107–2120, 2003.

[129] M. Yanagisawa and H. Kimura. Transfer function approach to quantum control – Part II: Control concepts and applications. *IEEE Trans. Automat. control*, 48(12):2121–2132, 2003.

[130] K. Yang. *Exterior Differential Systems and Equivalence Problems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.