Capitulo 2 – Fundamentação Teórica

2.1. Introdução ao problema de controle

O controle automático tem desempenhado um papel fundamental no avanço da engenharia e da ciência, pois ele é essencial em diversas áreas dos modernos processos industriais e de produção. Por exemplo, o controle automático é essencial em operações industriais, como controle de pressão, nível, temperatura, viscosidade, umidade e de vazão nos diferentes processos industriais.

Nas últimas décadas houve um grande avanço na teoria de projeto de sistemas de controle. Muitas das questões que criavam uma barreira entre a teoria e a prática no projeto de controladores na década de 70 foram resolvidas, ao menos parcialmente, somente depois da relação estabelecida entre as teorias de controle com os conceitos de realimentação, tais como, margem de estabilidade, sensibilidade, atenuação de perturbações, etc. Além disso, também começaram a ser empregados nesse estudo, os diagramas de Bode de valores singulares como indicadores de desempenho de sistemas multivariáveis e também, o conceito de variáveis de estado para descrição de sistemas e técnicas de otimização matemática aplicada à síntese de controladores (DOYLE, 1981).

Os sistemas complexos modernos geralmente possuem muitas entradas e muitas saídas, podendo estar relacionados entre si de uma forma complicada. Para analisar tais sistemas, é essencial reduzir a complexidade das expressões matemáticas, bem como recorrer aos computadores para a maioria das tarefas de cálculo necessárias à análise. O enfoque de variáveis de estado é a melhor solução, deste ponto de vista (OGATA, 2003).

Como nenhum modelo matemático é capaz de representar perfeitamente um sistema físico, devemos estabelecer alguma forma de representar e quantificar a incerteza a respeito do modelo utilizado. Estas incertezas se apresentam basicamente de duas maneiras: estruturadas e não estruturadas. Uma incerteza é dita estruturada quando a pertinência dos parâmetros de um modelo a um dado conjunto é uma representação estruturada do erro de modelagem, ou seja, supondo-se conhecida a estrutura do modelo, a incerteza reside apenas nos valores numéricos dos seus parâmetros. Em representações onde existam incertezas não

estruturadas do erro de modelagem, não se sabe exatamente as fontes da incerteza, apenas é representado o efeito final do erro (CRUZ, 1996).

Além do problema da incerteza do modelo a ser utilizado, uma outra característica importante quando o projeto de um controlador está sendo desenvolvido, tange no quesito robustez do conjunto controlador/planta. A robustez é uma caracteristica desejável nos sistemas de controle e deve ser uma preocupação constante de todo projetista de sistemas de controle (CRUZ, 1996).

Os sistemas de controle são ditos robustos quando os controladores projetados são capazes de apresentar um desempenho satisfatório, mesmo que as condições de operação atuais da planta sejam distintas das condições utilizadas durante a fase de projeto do controlador.

2.2. O controle LQR (Regulador Linear Quadrático)

Conforme apresentado no item 2.1, a engenharia de controle representa um papel importante em diferentes áreas, sejam elas ligadas ao processo fabril, ligadas à economia, etc. O objetivo principal de um projetista no desenvolvimento de um sistema de controle é de promover a estabilização da planta em estudo. Além disso, outros objetivos além da estabilização da planta devem ser buscados, tais como (AGUIRRE, 2007):

- ✓ Obtenção de uma determinada resposta transiente;
- ✓ Rejeição de ruído de medição;
- Melhoria no erro de estado estacionário;
- Robustez a variação dos parâmetros da planta.

Para desenvolver tal projeto, as técnicas de controle clássico, que envolvem o estudo em geral de plantas com uma entrada e uma saída, usam métodos analíticos (transformada de Laplace, Routh, etc) e gráficos (Nyquist, Bode, etc) para elaborar o projeto do controlador para a planta em questão. Porém, quando o sistema a ser controlado passa a apresentar múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), o projetista poderá encontrar dificuldades para aplicar as técnicas de controle clássico para o desenvolvimento do projeto do controlador (AGUIRRE, 2007).

As técnicas atuais de controle moderno utilizam a representação do modelo da planta em espaço de estados com o objetivo de facilitar a tarefa do projetista na elaboração do projeto do controlador. O controle ótimo é uma das técnicas de controle moderno onde um sistema realimentado, que é capaz de satisfazer os requisitos de estabilidade e restrições associadas ao controle clássico, passa também a ser capaz de apresentar a melhor solução dentro de uma determinada classe considerada no projeto, justificando assim a terminologia de controle "ótimo" (AGUIRRE, 2007). O sistema de controle ótimo a ser projetado, no caso particular da RTC, deve ser capaz de rejeitar os distúrbios das temperaturas de entrada das correntes quentes e frias, além de ser capaz de fazer com que as temperaturas de saída das correntes acompanhem mudanças de setpoint.

A representação por espaço de estados é uma solução conveniente, pois apresenta o modelo contendo o vetor de estados *x* da planta, utilizado em técnicas de controle ótimo. Particularmente neste trabalho, será discutida a técnica LQR. Considere o sistema genérico a seguir, descrito por equação de estados

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t).$$
 (2.2)

onde *A*, *B*, *C*, *D* são as matrizes de estado que representam o sistema genérico, $x \in$ o vetor dos estados do modelo, $u \in$ o vetor das entradas e $y \in$ o vetor das saídas do sistema genérico.

Com todos os estados do modelo genérico mensuráveis, a realimentação de estados

$$u(t) = -Kx(t), \qquad (2.3)$$

pode ser aplicada, sendo *K* a matriz de realimentação de estados. Substituindo a Equação 2.3 na Equação 2.1, é possível então obter a resposta em malha fechada desejada

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t). \tag{2.4}$$

Para o controle LQR, a sua característica de otimalidade é dada através da minimização da função quadrática *J*

$$J = \int_0^\infty \left[x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) \right] dt, \qquad (2.5)$$

17

onde $Q=Q^T \ge 0$ e $R=R^T > 0$ são matrizes constantes com dimensões apropriadas, $x \in 0$ vetor dos estados, $u \in 0$ vetor das entradas e $J \in a$ função a ser minimizada.

Substituindo a Equação 2.3 na Equação 2.5 resulta em

$$J = \int_0^\infty \left[x(t)^T \left(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \right) x(t) \right] dt \,.$$
(2.6)

As matrizes $Q \in R$ são chamadas de matrizes de ponderação, as quais irão determinar a resposta em malha fechada do sistema. A matriz Q é a matriz de ponderação dos estados e a matriz R é a matriz de ponderação das entradas. A escolha adequada dessas matrizes permite que se obtenha uma relação satisfatória entre esforço de controle e tempo de resposta (BILL e HILL, 2004).

Com os valores das matrizes de ponderação Q e R, a matriz de realimentação de estados K é dada por

$$K = R^{-1}B^{\mathsf{T}}P, \qquad (2.7)$$

onde $P=P^{T}\geq 0$ é a solução da Equação Algébrica de Riccati (EAR)

$$A^{T}P + PA - PBR^{-1}B^{T}P + Q = 0.$$
(2.8)

A estrutura do modelo genérico com a matriz de realimentação de estados *K* é apresentada pela Figura 2.1.



Figura 2.1 – Sistema genérico com a matriz de realimentação de estados K.

A estrutura apresentada pela Figura 2.1 não é a solução mais adequada para sistemas de ordem elevada, pois nessa estrutura, deverá existir um *setpoint* para cada variável de estado. Sendo assim, uma solução mais adequada a ser empregada é a apresentada pela Figura 2.2. Basicamente, um integrador é incluído no sistema, permitindo que sejam acrescentados estados ao mesmo e que seja possível a fixação de *setpoints* para as variáveis de saída.



Figura 2.2 – Sistema genérico com a matriz de realimentação de estados Kx e Kz.

Essa inclusão de estados permite que os *setpoints* passem a ser fornecidos para as variáveis de saída do sistema, e não mais para os estados do sistema. Dessa forma, a partir da matriz de realimentação de estados *K*, são criados duas novas matrizes, a *Kx* e a *Kz* onde agora deverão ser contemplados no projeto do controlador LQR os novos estados incluídos pelo integrador. Considerando inicialmente o diagrama da Figura 2.2 sem a presença do *setpoint*, é possível definir o estado aumentado x_a

$$X_{a}(t) = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix},$$
(2.9)

e escrever

$$\dot{z(t)} = y(t) \rightarrow \dot{z(t)} = Cx(t) + Du(t).$$
(2.10)

Substituindo as relações apresentadas nas Equações 2.1 e 2.2, resultam as novas equações de estados

$$\dot{x}_{a}(t) = A_{1}x_{a}(t) + B_{1}u(t),$$
 (2.11)

$$y(t) = C_1 x_a(t) + D_1 u(t),$$
 (2.12)

onde:

.

$$A_{1} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \qquad (2.13)$$

$$B_{1} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (2.14)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.15}$$

$$D_1 = [0].$$
 (2.16)

A nova matriz de realimentação de estados para a planta aumentada pode ser escrita como

$$u(t) = -K_a x_a(t) \rightarrow -[K_x \quad K_z] x_a(t).$$
(2.17)

O presente trabalho irá utilizar a estrutura LQR apresentada pela Figura 2.2, onde inicialmente o projeto do controlador LQR será apenas para um trocador de calor com *bypasses*, sendo posteriormente expandido o projeto para a RTC. Os resultados simulados obtidos com os projetos realizados foram apresentados em congressos nacionais e internacionais (DELATORE *et al.*, 2009a; DELATORE *et al.*, 2010a; DELATORE *et al.*, 2010b).

2.3. Uso do controlador PID obtido a partir do controle LQR

Considere novamente a estrutura do modelo genérico representado pelas equações de estado, assumindo que a matriz D seja igual a zero:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
 (2.18)

$$y(t) = Cx(t). \tag{2.19}$$

Utilizando uma estrutura de controle PID para realizar o controle em malha fechada, observando a Figura 2.3 é possível escrever o vetor u(t) como sendo igual a (LEONARDI *et al.*, 1993)

$$u(t) = K_{P}e(t) + K_{I}\int_{0}^{t}e(t)dt + K_{D}\dot{e}(t), \qquad (2.20)$$

substituindo a Equação 2.19 na Equação 2.20 e assumindo que

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}_{SP}(t) - \mathbf{y}(t),$$

$$\mathbf{\dot{y}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{\dot{x}}(t) \therefore \mathbf{\dot{y}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$
(2.21)

é possível reescrever o vetor u(t) como

$$u(t) = -[\mathcal{K}_{P}C + \mathcal{K}_{D}CA]x(t) - \mathcal{K}_{I}\int_{0}^{t}y(t)dt - [\mathcal{K}_{D}CB]u(t), \qquad (2.22)$$

considerando que o valor do setpoint $y_{SP}(t)$ seja igual a zero.



Figura 2.3 – Sistema genérico com realimentação PID.

Observando o diagrama da Figura 2.2, em que o sistema genérico é apresentando com a realimentação de estados K_X e K_Z , é possível escrever o vetor u como sendo igual a

$$u(t) = -K_{X}x(t) - K_{Z}\int_{0}^{t} y(t)dt.$$
 (2.23)

Comparando a Equação 2.22 com a Equação 2.23, é possível obter as relações

$$\boldsymbol{K}_{X} = \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}_{D}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\right)^{-1} \left(\boldsymbol{K}_{P}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}_{D}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\right), \qquad (2.24)$$

$$\boldsymbol{K}_{Z} = \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}_{D}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{K}_{I}, \qquad (2.25)$$

que devidamente trabalhadas, resultam nas constantes proporcional (K_P), integral (K_I) e derivativo (K_D) do controlador PID:

$$K_{I} = (I + K_{D}CB)K_{Z}, \qquad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} K_{P} & K_{D} \end{bmatrix} = K_{\chi} \begin{bmatrix} C \\ CA - CBK_{\chi} \end{bmatrix}^{-1}.$$
(2.27)

Para obter o termo proporcional e o termo derivativo, é necessário calcular a inversa de uma matriz, que geralmente não é uma matriz quadrada, visto que a ordem dessa matriz depende do número de saídas e do número de estados. A sintonia do controlador PID baseado no controle ótimo também foi apresentada em congresso (DELATORE *et al.*, 2009b).

2.4. A técnica de desacoplamento de variáveis (Decoupling System)

Os sistemas multivariáveis (MIMO) são sistemas que apresentam múltiplas entradas e múltiplas saídas. Em sua grande maioria, as suas variáveis de entrada estão acopladas com as suas variáveis de saída, em que esse acoplamento pode ocorrer de duas formas distintas:

- ✓ Acoplamento direto, em que a entrada u_i influencia apenas a saída y_i ,
- ✓ Acoplamento cruzado, em que a entrada u_i , passa a ter influência também sobre as demais saídas, além da saída diretamente relacionada a ela.

O acoplamento direto é a forma desejada de que os acoplamentos apareçam nos sistemas, pois permite que o sistema possa ser controlado de uma forma mais simples (OGUNNAIKE, 1994). O grande desafio é encontrado em sistemas com acoplamento cruzado, pois estes acabam provocando interações nas malhas de controle, e é justamente a sistemas deste tipo que será direcionado este capítulo do trabalho.

A técnica de desacoplamento de variáveis tem como objetivo eliminar os efeitos dos acoplamentos cruzados existentes entre variáveis, permitindo que a sintonia dos controladores possa ser executada através de uma análise de malhas do tipo SISO (*Single Input, Single Output*). Essa compensação é obtida através da inclusão de um bloco compensador ($GI_1 \in GI_2$), entre a saída do controlador e a entrada do processo em estudo, como pode ser observado na Figura 2.4



(OGUNNAIKE, 1994). O cálculo desse bloco compensador depende fortemente do modelo matemático do processo em estudo.

Figura 2.4 – O sistema de desacoplamento multivariável.

O projeto do desacoplador deverá, sob o aspecto matemático, eliminar alguns termos das funções de transferência do modelo matemático. O projeto pode ser realizado basicamente de três formas (OGUNNAIKE, 1994):

- ✓ Desacoplamento dinâmico, que é capaz de eliminar todas as interações existentes no sistema, a cada instante de tempo;
- ✓ Desacoplamento de estado estacionário, capaz de eliminar todas as interações existentes no sistema, apenas no seu valor final;
- ✓ Desacoplamento parcial, capaz de eliminar as interações, dinâmicas ou de estado estacionário, de apenas algumas variáveis, geralmente as que apresentam interações mais expressivas.

O projeto a ser exemplificado a seguir será o do desacoplador dinâmico. A Figura 2.4 será usada como a base do desenvolvimento do projeto. Através da observação da Figura 2.4, desconsiderando o compensador e o desacoplador, é possível escrever as relações matemáticas apresentadas pelas Equações 2.28 e 2.29:

$$Y_{1}(s) = (G_{11} + G_{12}GI_{2})U_{1}(s) + (G_{11}GI_{1} + G_{12})U_{2}(s), \qquad (2.28)$$

$$Y_{2}(s) = (G_{21} + G_{22}GI_{2})U_{1}(s) + (G_{21}GI_{1} + G_{22})U_{2}(s).$$
(2.29)

Uma breve análise nas Equações 2.28 e 2.29 apresentadas permitem identificar os parâmetros que devem ser eliminados pelo desacoplador (eliminar o segundo parênteses na Equação 2.28 e o primeiro parênteses na Equação 2.29), eliminando os efeitos das interações. Sendo assim, os valores de GI_1 e de GI_2 necessários para tal, devem ser iguais a

$$GI_{1} = -\left(\frac{G_{12}}{G_{11}}\right),$$
 (2.30)

$$GI_2 = -\left(\frac{G_{21}}{G_{22}}\right). \tag{2.31}$$

Introduzindo os valores apresentados para GI_1 e para GI_2 nas Equações 2.28 e 2.29, as novas funções de transferência do sistema, agora sem as interações entre as variáveis, são:

$$Y_{1}(s) = \left[G_{11} - \left(\frac{G_{12} \cdot G_{21}}{G_{22}}\right)\right] \cdot U_{1}(s), \qquad (2.32)$$

$$Y_{2}(s) = \left[G_{22} - \left(\frac{G_{12} \cdot G_{21}}{G_{11}}\right)\right] \cdot U_{2}(s) \cdot$$
(2.33)

Apesar da técnica, em tese, ser capaz de eliminar completamente as interações existentes entre as variáveis de um sistema MIMO, na prática essa eliminação pode não ocorrer por completo. Como a técnica é baseada no modelo matemático do sistema e na eliminação de alguns termos, a eliminação completa exigiria um modelo matemático exato do sistema a ser estudado. O estudo do sistema de desacoplamento realizado para o trocador de calor e para a RTC também foi apresentado em congressos (DELATORE, 2009a; DELATORE, 2010a).

2.5. A técnica de controle H-infinito

Na técnica de controle H-infinito as especificações do projeto são apresentadas a partir de representações no domínio da frequência (*frequency domain design*), diferentemente do controle LQR em que o projeto é baseado essencialmente em características temporais (*time domain design*) (WILLIAMS, 1991).

O problema de controle H-infinito pode ser expresso como um problema de otimização em que um controlador deve ser encontrado e que seja capaz de

satisfazer de maneira ótima, as exigências de robustez, de desempenho e de esforço de controle, que são as especificações de um projeto H-infinito.

Considere o diagrama de blocos apresentado pela Figura 2.5, que representa um sistema SISO em malha fechada com a presença de sinais de distúrbio $D_i(s)$ e de ruído nos sensores N(s).



Figura 2.5 – Diagrama em blocos de um sistema SISO.

Através de uma rápida análise na Figura 2.5, é possível escrever as seguintes funções de transferência para o sistema (ROCHA, 2006):

$$S(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)K(s)},$$
(2.34)

$$R(s) = \frac{U(s)}{R_{EF}(s)} = \frac{K(s)}{1 + G(s)K(s)},$$
(2.35)

$$T(s) = -\frac{C_{o}(s)}{N(s)} = -\frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)},$$
(2.36)

onde S(s) é a função sensibilidade, a R(s) é a função relacionada com o esforço de controle, T(s) é a função sensibilidade complementar.

O diagrama SISO apresentado pela Figura 2.5 contempla duas fontes externas de perturbações, que frequentemente aparecem em sistemas de controle: o ruído de medição em sensores e os distúrbios nas variáveis de saída, que são representados por N(s) e $D_i(s)$, respectivamente. A eliminação ou minimização desses efeitos é um desafio que o controlador K(s) deve ser capaz de resolver, pois basicamente, ruídos em sensores e os distúrbios ocorrem em faixas de frequência distintas, respectivamente em alta e em baixa frequência.

A partir do exposto acima, é desejável que a função sensibilidade complementar T(s) apresente um ganho baixo em altas frequências e que a função

25

sensibilidade S(s) apresente um ganho baixo em baixas frequências, conforme apresentado pela Figura 2.6 (ROCHA, 2006).



Figura 2.6 – Barreiras de robustez e de desempenho.

Dessa forma, para que os sistemas em malha fechada apresentem um bom desempenho ao acompanhamento de sinais de referência, à rejeição a distúrbios e também à rejeição de ruído de sensores, as funções S(s) e T(s) são utilizadas para como parâmetros do projeto H-infinito, pois a partir dessas funções, são delimitadas as barreiras de desempenho e de robustez de estabilidade (ROCHA, 2006).

A formulação do problema H-infinito pode ser inicialmente esquematizada pela Figura 2.7, onde P(s) representa a planta aumentada e K(s) o controlador que estabiliza P(s), com o mesmo número de estados de P(s).



Figura 2.7 – A estrutura de controle H_∞.

A planta aumentada é obtida através da inserção das exigências de robustez, de desempenho e de esforço de controle a partir das funções de ponderação $W_1(s)$, $W_2(s) \in W_3(s)$, que penalizam o erro e(s), o esforço de controle u(s) e a saída y(s), respectivamente, conforme estrutura apresentada pela Figura 2.8.

Dessa forma, com as especificações previamente definidas, o objetivo do projeto H-infinito é encontrar um controlador K(s) que satisfaça a relação

$$\|T(s)\|_{\infty} = \| \frac{W_1(s)S(s)}{W_2(s)R(s)} \|_{\infty} < 1,$$
(2.37)
$$W_3(s)T(s)\|_{\infty} = \| \frac{W_1(s)S(s)}{W_3(s)T(s)} \|_{\infty} = 1,$$

onde a matriz T(s) é a matriz de transferência entre a saída y1(s) e a entrada u1(s).



Figura 2.8 – O sistema de controle H-infinito com a planta aumentada P(s).

Além do formato apresentado pela Figura 2.8, que envolve especificações de projeto no domínio da frequência, é possível que o projeto seja obtido através de especificações temporais, com características semelhantes ao projeto LQR, onde a Figura 2.9 apresenta a estrutura proposta, em que $G_{ref}(s)$ é a função de referência para o projeto e $W_1(s)$ é a função que pondera a diferença entre os sinais $y_{ref}(s)$ e y(s) (LEONARDI, 2002).



Figura 2.9 – O sistema de controle H-infinito modificado com a planta aumentada P(s).

Dessa forma, a partir da estrutura apresentada pela Figura 2.9, o controlador K(s) será obtido a partir da técnica conhecida como *model matching*, capaz de tornar a matriz de transferência do sistema em malha fechada, idêntica à matriz de

referência $G_{ref}(s)$, também conhecido como *model matching* exato (LEONARDI, 2002).

O projeto H-infinito é equivalente a um problema de *model matching*, porém no projeto H-infinito não é desejado que se obtenha um casamento exato com a matriz de referência, mas sim encontrar um controlador K(s) capaz de tornar a norma infinito da matriz de transferência T(s), entre a entrada u1(s) e a saída y1(s), (LEONARDI, 2002)

$$\left\|T(\mathbf{s})\right\|_{\infty} < 1. \tag{2.38}$$

Sendo assim, o controlador K(s) da estrutura model matching, obtido a partir do projeto H-infinito, passa a ser considerado então como uma estrutura model matching aproximada, pois a norma infinito de T(s) implica diretamente na obtenção de uma matriz de transferência entre as variáveis controladas e sinais de referência que é aproximadamente igual ao modelo de referência (LEONARDI, 2002).

2.6. Sistemas de controle com ação integral: Efeito windup

Como consequência da utilização da ação integral em controladores, associado com as limitações dos atuadores no processo, o efeito *windup* das variáveis controladas é um fato relevante e prejudicial para o desempenho do sistema de controle como um todo (DOLOVAI *et al.,* 2008).

Apesar de vários aspectos dos sistemas de controle serem fundamentados em teorias lineares, alguns efeitos não lineares devem ser levados em consideração: os atuadores no processo apresentam limitações, o motor apresenta um limite de rotação, a válvula de controle apresenta limites de abertura / fechamento, etc (ASTRÖM e HÄGGLUND, 1988).

O efeito *windup* ocorre quando a variável de controle atinge o limite físico do atuador do processo. Certamente, esse efeito anula a realimentação do sistema de controle, pois o atuador permanecerá no seu limite independentemente da variável controlada.

Caso o sistema de controle projetado apresente um termo integral, esse erro continuará sendo integrado, assumindo um valor muito grande. Esse efeito descrito recebe o nome de efeito integral *windup* e acarreta uma lentidão na resposta dinâmica do sistema em malha fechada caso ocorra a saturação dos atuadores.

Uma possível solução para eliminar o efeito *windup* é apresentada pela Figura 2.10, onde uma realimentação extra é adicionada ao controlador através da diferença entre o sinal de saída do atuador (v) e do sinal de saída do controlador (u).



Figura 2.10 - Controlador PI, com sistema anti windup.

Essa realimentação extra somente executará alguma função na malha de controle caso ocorra uma saturação no atuador. Nessa situação, a variável E_{SAT} assume um valor diferente de zero e o ganho *KT* pondera essa diferença, que será posteriormente somada ao integrador, podendo assumir um valor positivo ou negativo em função dos valores das variáveis *u* e *v*. Caso as variáveis sejam sempre iguais, a realimentação não realiza nenhuma ação ao termo integral.

Frequentemente ocorre que a saída do atuador não pode ser medida. Nessas situações, é possível substituir a medição direta do sinal de saída do atuador por um modelo matemático que o represente (ASTRÖM e HÄGGLUND, 1988), conforme apresentado pela Figura 2.11.



Figura 2.11 – Controlador PI, com sistema anti windup e modelo matemático do atuador.

2.7. Observador de estados

Em projetos de sistemas de controle em que se torna necessária a realimentação de estados, é desejável que todas as variáveis de estado estejam disponíveis para realimentação. Na prática, porém, pode ocorrer que nem todas as variáveis de estado estejam disponíveis, sendo necessária a utilização de um sistema conhecido como observador de estados, capaz de estimar as variáveis de estado de forma indireta do modelo estudado (OGATA, 2002). Existem basicamente, duas estruturas para a implementação de um observador de estados em sistemas de controle:

- Observador de estados de ordem plena, onde o observador de estados é capaz de estimar (observar) todas as variáveis do sistema, independentemente de algumas dessas variáveis estarem disponíveis para medição direta;
- Observador de estados de ordem reduzida, onde o observador de estados irá apenas estimar as variáveis de estado não mensuráveis do sistema, dispensando a estimação das variáveis que permitem a medição direta.

O observador de estados é um sistema dual, exatamente igual ao modelo matemático da planta, a menos de um termo que *incorpora o erro de estimação para compensar as incertezas nas matrizes A e B e a ausência do erro inicial* (OGATA, 2002), sendo o erro de estimação o resultado da diferença entre as saídas medidas do sistema e as saídas estimadas pelo observador de estados.

Considere o sistema apresentado pela Figura 2.12, onde é apresentada a estrutura de um observador de estados de ordem plena. Para o sistema original em verde, é possível escrever as seguintes equações de estado (Equações 2.18 e 2.19)

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \tag{2.39}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \,. \tag{2.40}$$

Estendendo o raciocínio para o observador de estados, temos que

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \rightarrow (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t), \qquad (2.41)$$

onde

 $\hat{x}(t)$ é o estado estimado (x_{ESTIMADO}) pelo observador e *L* é a matriz de ganho do observador.



Figura 2.12 – Observador de estados de ordem plena.

Sendo assim, é possível determinar o erro de observação, subtraindo a Equação 2.39 da Equação 2.41, resultando em

$$\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) - A\hat{x}(t) - L(Cx(t) - C\hat{x}(t)) = (A - LC)(x(t) - \hat{x}(t)).$$
(2.42)

Considerando que

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t),$$
 (2.43)

é possível reescrever a Equação 2.42 como

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t).$$
 (2.44)

A Equação 2.44 remete à conclusão que a dinâmica do observador de estados depende da matriz (*A-LC*). Sendo essa matriz estável, o erro de observação convergirá para zero, possibilitando encontrar um valor adequado para a matriz *L* que garanta a estabilidade da matriz com uma velocidade de resposta dinâmica do erro adequada (OGATA, 2002).

2.8. Modelo matemático do trocador de calor

Os trocadores de calor do tipo casco e tubo são os mais comuns em indústrias químicas, graças ao seu custo relativamente baixo, robustez, facilidade de manutenção e à possibilidade de construção de equipamentos com área de troca térmica bastante elevada. A escolha por esse tipo de trocador de calor, comparado aos demais modelos de trocadores existentes, foi feita em função de seu baixo custo de produção e de manutenção. Além disso, esse trocador de calor pode ser

31

construído com diferentes áreas de troca térmica, sendo capaz de atender as exigências de quase todos os tipos de processos químicos que necessitem de um sistema de troca térmica. A Figura 2.13 representa o trocador de calor com *bypasses* utilizado no presente trabalho.



Figura 2.13 – Trocador de calor do tipo casco e tubo com bypasses.

O modelo matemático do trocador foi obtido através do balanço de energia das correntes quente e fria, usando relações simples e conhecidas de Termodinâmica e de transferência de calor (Equações 2.45 e 2.46). Em sua tese de doutorado, NOVAZZI (2006), usando a técnica de diferenças finitas, desenvolve a modelagem matemática de trocadores de calor do tipo casco tubo 1-1 e 1-2, apresentando um modelo que contempla características de construção do trocador e também as propriedades físicas (densidade, viscosidade, vazão, etc) do fluido que escoa no mesmo. Os índices $H \in C$ fazem referência às variáveis relacionadas com as correntes quentes (*hot*) e frias (*cold*).

$$\frac{\partial T_{H}}{\partial t} = -\frac{\dot{m}_{H}}{\rho_{H} \cdot v_{H}} \cdot \frac{\partial T_{H}}{\partial z} - \frac{U \cdot A_{TC}}{\rho_{H} \cdot V_{H} \cdot C \rho_{H}} (T_{H} - T_{C})$$
(2.45)

$$\frac{\partial T_{c}}{\partial t} = \frac{\dot{m}_{c}}{\rho_{c}.\nu_{c}} \cdot \frac{\partial T_{c}}{\partial z} + \frac{U.A_{TC}}{\rho_{c}.V_{c}.Cp_{c}} (T_{H} - T_{c})$$
(2.46)

onde: T(t) é a temperatura da corrente, t é o tempo, z é a posição axial, m é a vazão mássica, ρ é a densidade, v é a relação entre o volume e o comprimento do trocador de calor, A é a área de troca térmica, C_P é o calor específico do fluido, V é o volume e o U é o coeficiente global de troca térmica.

A aplicação do método das diferenças finitas nas Equações 2.45 e 2.46 apresentadas permitiu a discretização do trocador de calor em *n* estágios de troca térmica de comprimento infinitesimal, com o objetivo de promover um modelo de

mistura perfeita (temperatura no interior da célula igual à temperatura de saída da célula). A estrutura proposta é apresentada pela Figura 2.14.



Figura 2.14 – Modelo de células de um trocador 1-1 (NOVAZZI, 2006).

Fazendo-se um balanço de energia para o *i*-ésimo estágio, é possível reescrever as Equações 2.45 e 2.46, resultando nas Equações 2.47 e 2.48 a seguir:

$$\frac{dT_{H,i}}{dt} = -\frac{n.\dot{m}_{H}}{\rho_{H}.\nu_{H}} \cdot \left(T_{H,i-1} - T_{H,i}\right) - \frac{U.A}{\rho_{H}.V_{H}.Cp_{H}} \cdot \left(T_{H,i} - T_{C,n-i+1}\right),$$
(2.47)

$$\frac{dI_{C,n-i+1}}{dt} = \frac{n.m_{C}}{\rho_{C}.\nu_{C}} \cdot \left(T_{C,n-i} - T_{C,n-i+1}\right) + \frac{U.A}{\rho_{C}.V_{C}.Cp_{C}} \cdot \left(T_{H,i} - T_{C,n-i+1}\right).$$
(2.48)

As Equações apresentadas constituem um modelo de trocador de calor discretizado em *n* células sem a presença das válvulas de *bypass* da corrente quente e da corrente fria. Estendendo o conceito de células para o trocador de calor com *bypasses* para a estrutura apresentada pela Figura 2.15, são obtidas 4*n* equações diferenciais: 2*n* para o trocador de calor (Equações 2.49 e 2.50) e 2*n* para o s*bypasses* (Equações 2.51 e 2.52).



Figura 2.15 – Modelo de células de um trocador 1-1, com bypasses (NOVAZZI, 2006).

$$\frac{dT_{H,i}}{dt} = \frac{n \, m_H \left(1 - f_H\right)}{\rho_H V_H} \left(T_{H,i-1} - T_{H,i}\right) - \frac{UA}{\rho_H V_H C_{p,H}} \left[\frac{\left(T_{H,i} - T_{C,n-i}\right) + \left(T_{H,i-1} - T_{C,n-i+1}\right)}{2}\right]$$
(2.49)

$$\frac{dT_{C,n-i+1}}{dt} = \frac{n m_C (1 - f_C)}{\rho_C V_C} (T_{C,n-i} - T_{C,n-i+1}) + \frac{UA}{\rho_C V_C C_{p,C}} \left[\frac{(T_{H,i} - T_{C,n-i}) + (T_{H,i-1} - T_{C,n-i+1})}{2} \right]$$
(2.50)

$$\frac{dT_{Hby,i}}{dt} = \frac{nm_H f_H}{\rho_H V_{Hby}} \left(T_{Hby,i-1} - T_{Hby,i} \right)$$
(2.51)

$$\frac{dT_{Cby,n-i+1}}{dt} = \frac{nm_C f_C}{\rho_C V_{Cby}} \left(T_{Cby,n-i} - T_{Cby,n-i+1} \right)$$
(2.52)

As equações foram implementadas em *Matlab*, através de uma *S-Function* montada em um bloco em *Simulink*, com 50 estágios de troca térmica. O modelo exige que seja realizada uma parametrização em função das características de construção do trocador e também em função das propriedades físicas dos fluidos quente e frio, características essas apresentadas pela Tabela 2.1. O diagrama montado no programa apresenta seis variáveis de entrada e quatro variáveis de saída, onde cada variável de entrada e saída é descrita e apresentada na Tabela 2.2.

Características Físicas	Características Construtivas
ρ_{C} , ρ_{H} – Densidade, fluido frio / quente	U – Coef. global troca térmica
C_{PC} , C_{PH} – Calor específico, fluido frio / quente	A – Área troca térmica
	 <i>n</i> – N^o de estágios troca
	térmica

Tabela 2.1 – Parametrização inicial do modelo com dados dos fluidos (NOVAZZI, 2006)

Tabela 2.2 - Variáveis de entrada e saída do modelo matemático (NOVAZZI, 2006)

Entradas	Saídas
TC _{IN} – Temp. de entrada, fluido frio	TC_{OUT} – Temp. de saída, fluido frio
TH _{IN} – Temp. de entrada, fluido quente	ΤΗ_{ουτ} – Temp. de saída, fluido quente
<i>mc_{IN}</i> – vazão de entrada, fluido frio	<i>mc_{out} – vazão de saída, fluido frio</i>
<i>mh_{IN}</i> – vazão de entrada, fluido quente	<i>mhour</i> – vazão de saída, fluido quente
<i>fc_{IN} – Bypass</i> , fluido frio	
fh_{IN} – Bypass , fluido quente	

Determinação do coeficiente global de troca térmica

Um parâmetro extremamente importante para que a análise de qualquer trocador de calor possa ser realizada é o coeficiente global de troca térmica – U.

Esse parâmetro geralmente é uma fonte de incertezas em um modelamento matemático do trocador de calor. Esse coeficiente representa, de forma simplificada, a eficiência pela qual um trocador de calor irá realizar a troca de energia entre as correntes quentes e frias do mesmo. Além disso, ele é "definido em função da resistência térmica total à transferência de calor entre dois fluidos" (INCROPERA & DEWITT, 1998).

Considere a seção transversal do trocador de calor conforme apresentado na Figura 2.16, representando o casco e os tubos internos do trocador. Assumindo que os tubos apresentam uma espessura relativamente fina (diâmetro externo do tubo $D_0 \approx$ diâmetro interno D_i), a área externa total dos tubos é determinada pela relação

$$A_{o,T} \approx \pi . D_{o,T} . I_T . N_T, \qquad (2.53)$$

onde: $D_{o,T}$ é o diâmetro externo dos tubos, I_T é o comprimento dos tubos, n_T é o número de tubos internos ao trocador, $A_{o,T}$ é a área externa total dos tubos.



Figura 2.16 - Corte transversal de um trocador de calor casco - tubo

O coeficiente global de troca térmica é obtido levando em consideração as características de construção e também do fluido que está escoando no trocador. A Equação 2.54 apresenta o relacionamento dessas características para a determinação de um valor aproximado do coeficiente. Os índices *i* e *o*, que aparecem nas variáveis, fazem referência às áreas externas e internas do tubo.

$$U.A_{o} = \frac{1}{\left[\frac{1}{(h_{o}.A_{o})} + \frac{1}{(h_{i}.A_{i})}\right] + \left[\frac{\ln(D_{o}/D_{i})}{2.\pi.k_{SOLIDO}.n_{T}.I_{T}}\right] + \left[R_{D_{i}} + R_{D_{o}}\right]},$$
(2.54)

onde k é a condutividade térmica, h é o coeficiente convectivo para a tubulação. O termo da Equação 2.54

$$\frac{1}{(h_o.A_o)} + \frac{1}{(h_i.A_i)},$$
(2.55)

representa a resistência convectiva. Já o termo

$$\frac{\ln(D_o/D_i)}{2.\pi.k_{\text{SOLIDO}}.n_T.I_T},$$
(2.56)

representa a resistência de condução. Finalizando, o termo

$$R_{D_i} + R_{D_o}$$
, (2.57)

representa a resistência devido às incrustações.

O coeficiente global de troca térmica também pode ser usado como um indicador para que intervenções para manutenção e limpeza do sistema possam ser executadas, pois sujeiras e incrustações que se depositam na superfície interna do trocador, fazem com que a resistência térmica aumente, diminuindo assim a eficiência do equipamento.

Assumindo que o diâmetro interno e externo são aproximadamente iguais, e, aplicando essa aproximação na Equação 2.54, o termo referente à resistência de condução passa ser igual à zero. Além disso, considerando que o trocador de calor é novo, os valores das resistências de incrustação também são iguais a zero. Dessa forma, o valor do coeficiente global de troca térmica é obtido em função das resistências convectivas apenas. Além disso, os termos relativos à área dos tubos do trocador (interna e externa) são eliminados, já que A_i \approx A_o, reduzindo a Equação 2.54 para

$$U \approx \frac{1}{\left[\frac{1}{(h_o)} + \frac{1}{(h_i)}\right]}.$$
(2.58)

Os valores dos coeficientes convectivos h_i e h_o podem ser estimados através de diferentes expressões encontradas em literatura, com erros que variam entre 10% a 25%. Para os coeficientes h_i e h_o temos (INCROPERA & DEWITT, 1998)

$$h_{i} = \frac{\left(0,023.R_{e}^{0.8}.P_{r}^{0.33}\right).k_{FLUIDO}}{D_{i}},$$
(2.59)

36

$$h_o = \alpha . V_{FLUIDO}^{0.5}, \qquad (2.60)$$

onde R_e é o número de *Reynolds,* P_r é o número de *Prandtl,* v_{FLUIDO} é a velocidade de escoamento do fluido.

A partir da Equação 2.59, os números de *Reynolds* e *Prandtl* podem ser calculados com base nas características físicas do fluido que escoa pelos tubos, e do diâmetro interno destes:

$$R_e = \frac{\rho_{FLUIDO} \cdot V_{FLUIDO} \cdot D_i}{\mu_{FLUIDO}}$$
(2.61)

$$P_{r} = \frac{C_{P} \cdot \mu_{FLUIDO}}{k_{FLUIDO}}$$
(2.62)

onde ρ_{FLUIDO} é a densidade do fluido, μ_{FLUIDO} é viscosidade do fluido, C_P é o calor específico do fluido.