APENDICE A

1. Conjuntos "fuzzy"

Na teoria clássica os conjuntos são definidos como coleções (bem definidas, nítidas e objetivas) de elementos distintos (números, objetos, símbolos, etc.), aqui denominados por conjuntos "crisp". Os elementos x, de todos os conjuntos considerados em uma determinada situação, pertencem a um conjunto constante e invariável denominado universo, ou conjunto universal ou, em lógica "fuzzy", universo de discurso.

O fato dos elementos x do universo de discurso X pertencerem ou não a um conjunto "crisp" A pode ser formalmente indicado, na teoria clássica, por uma função f_A definida como:

$$f_A(x) \equiv \begin{cases} 1 & se \quad e \quad somente \quad se \quad x \in A \\ 0 & se \quad e \quad somente \quad se \quad x \notin A \end{cases} \qquad (\text{ A.1 })$$

O par de números $\{0,1\}$ é chamado conjunto de valores "crisp".

Uma outra forma de se representar a equação (A.1) é:

$$f_A(x) : X \rightarrow \{0,1\} \qquad (\text{ A.2 })$$

A equação (A.2) deve ser lida como: existe uma função característica $f_A(x)$ que mapeia todos os elementos do universo de discurso X no conjunto $\{0,1\}$.

Portanto a função característica é um mecanismo de mapeamento do universo de discurso X no conjunto de valorização $\{0,1\}$.

As operações destes conjuntos "crisp", tais como: intersecção, união, e complemento, são tratadas na matemática básica e usualmente representadas através dos diagramas de Venn.

Propõe-se, então uma generalização da função característica $f_A(x)$ de forma que

esta não fique restrita aos valores 0 e 1 do conjunto de valorização $\{0,1\}$, o que torna a $f_A(x)$ uma função bivalente, e possa assumir infinitos valores no intervalo entre 0 e 1, representada pelo conjunto de valorização [0,1] e denominada função de pertinência $\mu_A(x)$ e desta forma podemos escrever [Zadeh-67]:

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0,1] \qquad (\text{ A.3 })$$

A equação (A.3) deve ser lida como: existe uma função de pertinência $\mu_A(x)$ que mapeia todos os elementos do universo de discurso X no conjunto de valorização [0,1].

Um exemplo de mapeamento do universo de discurso utilizando a função característica definida pela teoria clássica e a função de pertinência proposta pela teoria dos conjuntos "fuzzy"r:

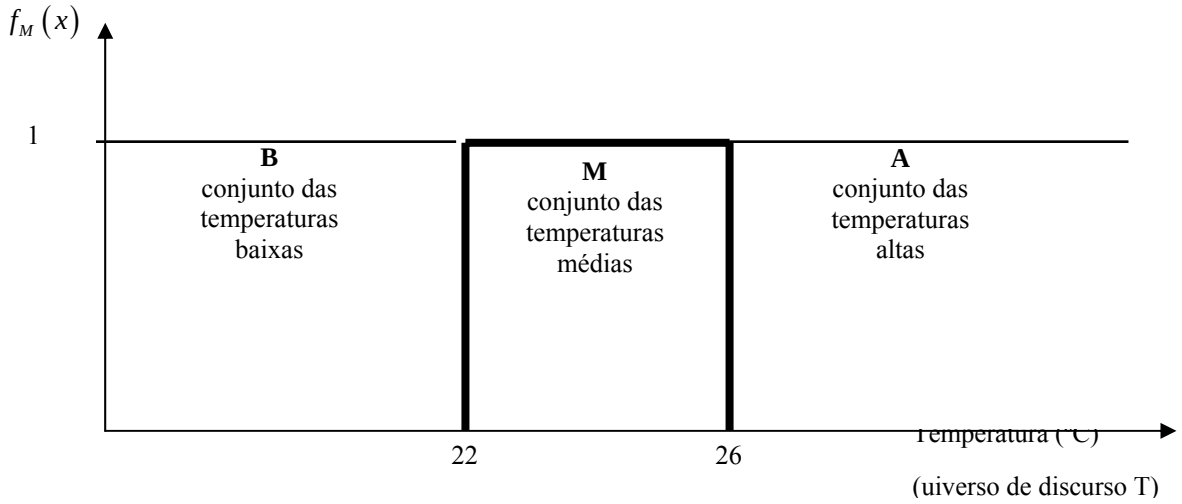

Figura A.1 - Representação dos conjuntos de temperaturas alta, média e baixa pela teoria clássica

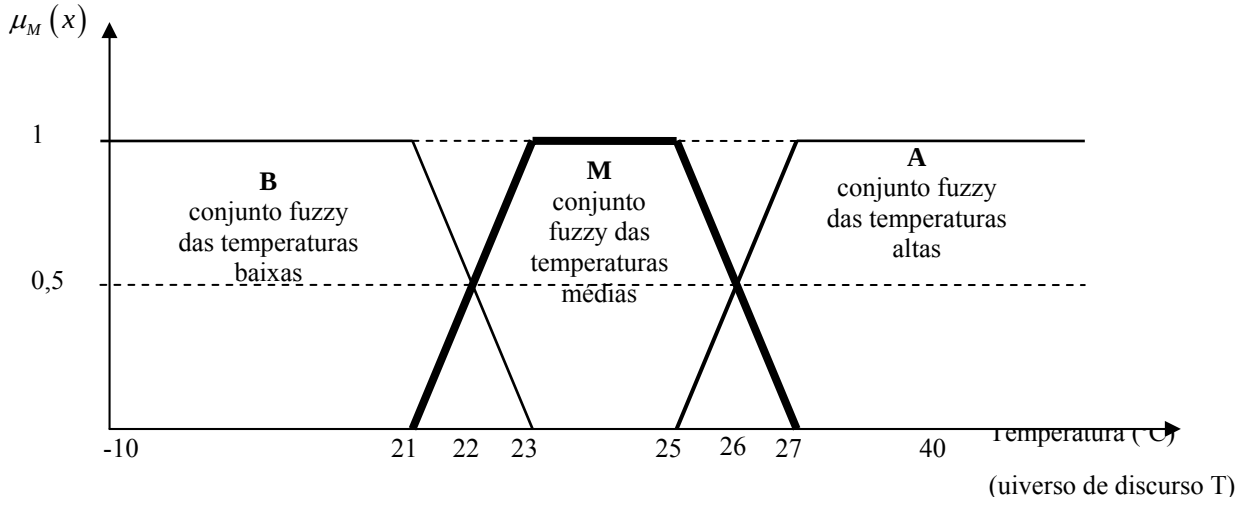

Figura A.2 - Representação dos conjuntos de temperaturas alta, média e baixa pela teoria dos conjuntos "fuzzy"

Pode-se observar na Figura A.1 que, neste caso, a teoria clássica determina que os valores (elementos) de temperatura no intervalo de 22 a 26ºC, pertencem ao conjunto das temperaturas médias M, se a temperatura for de 21,99 ºC será considerada baixa, o que não é um senso comum. Já pela teoria "fuzzy", Figura A.2, um determinado valor (elemento) do universo de discurso T, pode pertencer a dois conjuntos ao mesmo tempo, conjuntos estes denominados conjuntos "fuzzy", com certo grau de pertinência. Desta forma 22 ºC pertence ao conjunto "fuzzy" B – temperaturas baixas com grau de pertinência $\mu_B(x) = 0{,}5$ e ao mesmo tempo ao conjunto "fuzzy" M – temperaturas médias com grau de pertinência $\mu_M = 0{,}5$. Da mesma forma pode-se dizer que a temperatura de 21,99 ºC tem um grau de pertinência 0,5 no conjunto "fuzzy" B e 0,5 conjunto M, o que nos permite dizer que esta temperatura está entre baixa e média, o que vai ao encontro do senso comum.

Representam-se os conjuntos "fuzzy" por um conjunto de pares ordenados. Se X é o universo de discurso e x um elemento deste universo, então o conjunto "fuzzy" A pode ser representado pelo seguinte conjunto de pares ordenados:

$$A = \{(x, \mu_A(x))\}, \quad x \in X \qquad (\text{A.4})$$

Por exemplo, $A = \{(1,1.0),(2,0.5),(3,0.2)\}$

Ou alternativamente.

$$A = \sum_{x_i \in X} \mu_A(x_i) / x_i \qquad (\text{A.5})$$

Onde o sinal $\sum$ indica a união de todos os valores.

Por exemplo, A= $\mu_A(1)/1 + \mu_A(2)/2 + \mu_A(3)/3 = 1.0/1 + 0.5/2 + 0.2/3$

A figura A.3 apresenta as principais partes de um conjunto "fuzzy"

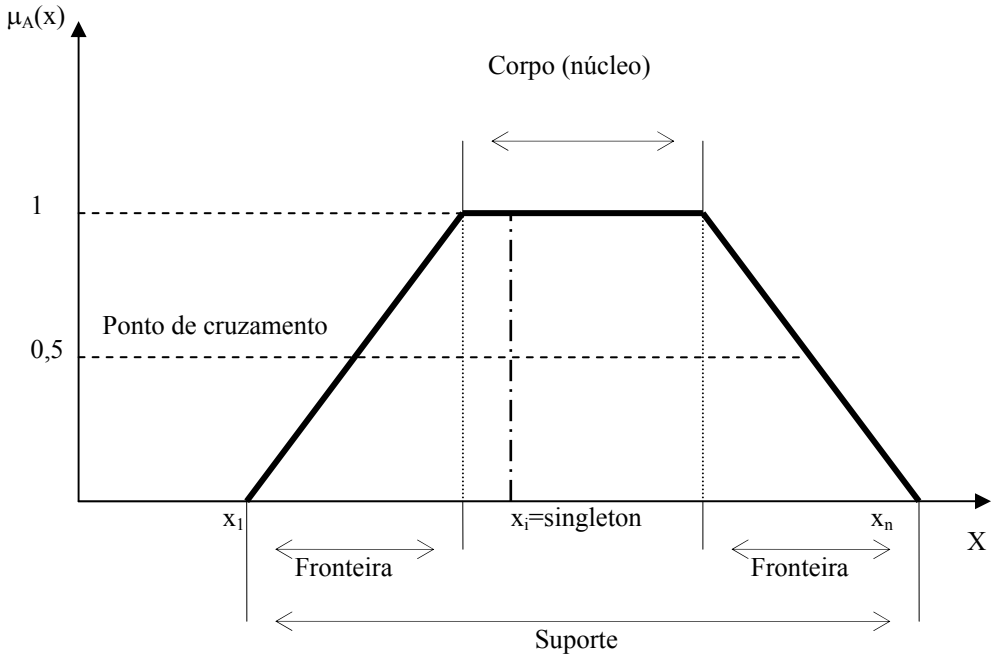

Figura A.3 - Caracterização das partes de um conjunto “fuzzy”

1.1. "Fuzzy singleton"

Para um conjunto convencional "crisp" um "singleton" é simplesmente o elemento x. Já para um conjunto "fuzzy" um "singleton" é representado pelo par composto do elemento x pertencente ao universo de discurso X e pelo seu grau de pertinência $\mu_A(x)$ no conjunto "fuzzy" A. No exemplo anterior, temos que o segundo valor crisp (2) pertence ao conjunto A com um grau de pertinência igual a 0.5. Na equação A.5, a somatória indica a união de todos "singletons" e representa um universo de discurso discreto. Se desejarmos representar um universo de discurso contínuo usa-se a seguinte notação:

$$A = \int_X \mu_A(x)/x \qquad (\text{A.6})$$

Onde a integral indica a união de todos os pares $\mu_A(x)$, e a barra é apenas uma marca e não uma divisão.

1.2. Suporte e Corpo

Suporte de um conjunto "fuzzy" é o conjunto ordinário de todos os valores de x em X tais que $\mu_A(x) \rangle 0$.

O Corpo de um conjunto "fuzzy" A é o ponto ou são os pontos x do universo de discurso X tal que $\mu_A(x)$ seja o valor máximo.

1.3. Ponto de cruzamento

Ponto de cruzamento, também chamado de "Crossover Point", se dá quando o elemento x do universo de discurso X pertencer a um dado conjunto "fuzzy" A com grau de pertinência igual a 0.5 $(\mu_A(x) = 0.5)$.

1.4. Funções de Pertinência

A função de pertinência é escolhida de forma subjetiva pelo especialista, com base no conhecimento prévio do processo e ou com base em dados estatísticos, desde que forneça um valor no intervalo [0,1] em todo o universo de discurso. A seguir são apresentados exemplos de funções de pertinência que aparecem com mais freqüência em aplicações industriais.

1.4.1. Funções Triangulares

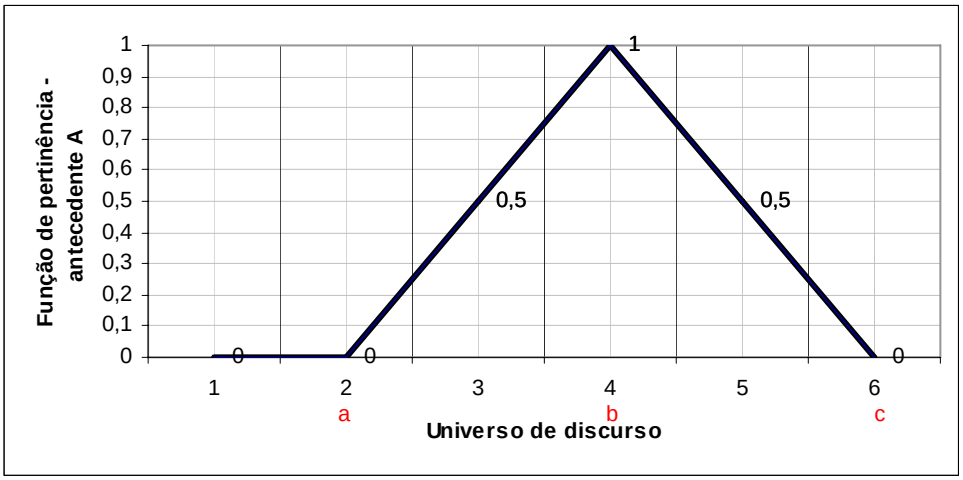

Figura A.4 - Função triangular

$$\mu_A(x;a,b,c) = 0 \quad para \quad x \le a$$
$$\mu_A(x;a,b,c) = x - a \quad para \quad a \le x \le b$$
$$\mu_A(x;a,b,c) = -x + c \quad para \quad b \le x \le c$$
$$\mu_A(x;a,b,c) = 0 \quad para \quad x \ge c$$

1.4.2. Diagrama de Zadeh

$$\mu_A(x;a,b)=\begin{cases} 1 & x \le a \\ 1-2\left(\dfrac{x-b}{b-a}\right)^2 & a < x \le \dfrac{a+b}{2} \\ 2\left(\dfrac{x-b}{b-a}\right)^2 & x > b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

Onde ***a*** está relacionado com a posição e ***b*** com a escala da função de pertinência.

1.4.3. Função Sigmoidal

$$\mu_A(x;a,b)=\frac{1}{1+e^{-b(x-a)}}$$

Onde ***a*** está relacionado com a posição e ***b*** com a escala da função de pertinência.

1.4.4. Função Gausiana

$$\mu_A(x;a,b)=e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}$$

Onde ***a*** está relacionado com a posição e ***b*** com a escala da função de pertinência.

2. Operações com conjuntos "fuzzy"

Para definir as operações com os conjuntos "fuzzy", tais como intersecção e união, utilizam-se os operadores min ($\wedge$) e max ($\vee$), que são análogos ao produto (.) e soma (+) da álgebra [Dubois at al. – 80)].

Os operadores min ($\wedge$) e max ($\vee$) podem ser usados para selecionar o mínimo ou o máximo de dois elementos – por exemplo, $0.3 \vee 0.4=0.4$ e $0.3 \wedge 0.4=0.3$. Formalmente o

mínimo μ_1 e μ_2, representados por $\min(\mu_1, \mu_2)$ ou $(\mu_1 \wedge \mu_2)$ e o máximo μ_1 e μ_2, representados por $\max(\mu_1, \mu_2)$ ou $\mu_1 \vee \mu_2$ são definidos como:

$$\mu_1 \wedge \mu_2 = \min(\mu_1, \mu_2) \equiv \begin{cases} \mu_1 & se\, e\, somente\, se\, \mu_1 \leq \mu_2 \\ \mu_2 & se\, e\, somente\, se\, \mu_1 \rangle \mu_2 \end{cases} \qquad (\text{ A.7 })$$

$$\mu_1 \vee \mu_2 = \max(\mu_1, \mu_2) \equiv \begin{cases} \mu_1 & se\, e\, somente\, se\, \mu_1 \geq \mu_2 \\ \mu_2 & se\, e\, somente\, se\, \mu_1 \langle \mu_2 \end{cases} \qquad (\text{ A.8 })$$

Os operadores min ($\wedge$) e max ($\vee$) podem selecionar em todo o conjunto o menor de todos os elementos ou o maior de todos os elementos, denominado de "infimum" e "supremum" respectivamente – por exemplo $\wedge$(0.1, 0.5, 0.8)=0.1 ou $\vee$(0.1, 0.5, 0.8)=0.8. Formalmente escreve-se:

$$\mu = \wedge A = \inf A \qquad (\text{ A.9 })$$

$$\mu = \vee A = \sup A \qquad (\text{ A.10 })$$

Algumas vezes utiliza-se min ($\wedge$) e max ($\vee$) como uma função operando sobre elementos simples ou em todo o conjunto, por exemplo para acharmos o menor elemento μ de um conjunto $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)$, ou seja:

$$\mu = \wedge(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m) = \mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \cdots \wedge \mu_m = \bigwedge_{k=1}^{m} (\mu_k) \qquad (\text{ A.11 })$$

Pode-se utilizar min ($\wedge$) e max ($\vee$) para operar uma coleção de conjuntos:

$$A = \wedge(A_1, A_2, ..., A_m) = \bigwedge_{k=1}^{m} (A_k) \qquad (\text{ A.12 })$$

A tabela A1 a seguir apresenta algumas operações e definições úteis.

Tabela A1 - Operações e definições utilizadas com conjuntos "fuzzy"

Operação / definição	**Descrição**	**Notação**
Conjunto "fuzzy" vazio	Quando a função de pertinência for zero em todo o universo de discurso.	$A \equiv \phi \quad se\ \mu_A(x) = 0,$
Conjunto "fuzzy" normal	Quando existe pelo menos um elemento x_0 no universo de discurso X onde a função de pertinência tenha o valor unitário.	$\mu_A(x_0) = 1$
Igualdade de conjuntos "fuzzy"	Quando as funções de pertinência forem iguais em todo o universo de discurso.	$A \equiv B \quad se\ \mu_A(x) = \mu_B(x)$
União de conjuntos "fuzzy"	A união de dois conjuntos "fuzzy" definidas sobre o mesmo universo de discurso X é um novo conjunto "fuzzy" $A \cup B$ também em X, cuja funções de pertinência é o máximo entre as funções de pertinência de A e B.	$\mu_{A \cup B}(x) \equiv \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$
Intersecção de conjuntos "fuzzy"	A intersecção de dois conjuntos "fuzzy" A e B é um novo conjunto "fuzzy" $A \cap B$ com sua função de pertinência sendo formada pelo mínimo entre as funções de pertinência de A e B.	$\mu_{A \cup B}(x) \equiv \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$
Complemento de conjuntos "fuzzy"	O complemento de um conjunto "fuzzy" A é um novo conjunto "fuzzy" A', que é equivalente ao negativo (NOT) em lógica "fuzzy".	$\mu_{A'}(x) \equiv 1 - \mu_A(x)$
Produto de dois conjuntos "fuzzy"	O produto de dois conjuntos "fuzzy" A e B definido no mesmo universo de discurso X é um novo conjunto "fuzzy" A.B cuja função de pertinência é constituída do produto algébrico das funções de pertinência de A e B.	$\mu_{A.B}(x) \equiv \mu_A(x) \bullet \mu_B(x)$
Potência de um conjunto "fuzzy"	Elevar a potência α um conjunto "fuzzy" A significa levar a potência α sua função de pertinência obtendo A^{α}.	$\mu_{A^{\alpha}}(x) \equiv [\mu_A(x)]^{\alpha}$

As operações união ("OR" ou OU), intersecção ("AND" ou E) e complemento ("NOT" ou NÃO) podem ser parametrizadas através das normas triangulares T e S [Terano etal – 94]. O conceito da T norma e S norma, definido nos itens a seguir, foi originalmente desenvolvido para uso na teoria da probabilidade, mas tem considerável aplicação na lógica "fuzzy".

2.1. T norma

É uma operação binária $T:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$ *tal que* $\forall x,y,z,w\in[0,1]$, onde as seguintes propriedades são satisfeitas:

- Comutatividade : $xTy = yTx$
- Associatividade : $(xTy)Tz = xT(yTz)$
- Monotonicidade : $se\ \ x \le y,\ w \le z\ \ então\ xTw \le yTz$
- Condições de contorno: $xT0 = 0\ \ e\ \ xT1 = x$

2.2. S norma (ou co-norma T)

É uma operação binária $S:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$ *tal que* $\forall x,y,z,w\in[0,1]$, onde as seguintes propriedades são satisfeitas:

- Comutatividade : $xSy = ySx$
- Associatividade : $(xSy)Sz = xS(ySz)$
- Monotonicidade : $se\ \ x \le y,\ w \le z\ \ então\ xSw \le ySz$
- Condições de contorno: $xS0 = x \quad e \quad xS1 = 1$

Ao formular as operações entre subconjuntos “fuzzy”, Zadeh [Zadeh – 65], sabendo do isomorfismo entre a álgebra de Boole, a teoria de conjuntos e a lógica de proposições, se inspirou nas operações entre subconjuntos clássicos, de forma que estas representassem uma generalização da teoria de conjuntos clássica. Definiu então o apresentado na Tabela A2:

Tabela A2 - Relação entre teoria de conjuntos clássica e "fuzzy"

Operação	Conjunto clássico	Conjunto "fuzzy"
União (OU) S norma	$\forall x \in X$, $x \in A \cup B$, *se e somente se* $x \in A$ *ou* $x \in B$	$\forall x \in X$, $\mu_{A \cup B}(x) = máx(\mu_A(x), \mu_B(x))$ *ou* $\mu_{A \cup B}(x) = \vee(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Intersecção (E) T norma	$\forall x \in X$, $x \in A \cap B$, *se e somente se* $x \in A$ *ou* $x \in B$	$\forall x \in X$, $\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ *ou* $\mu_{A \cap B}(x) = \wedge(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Complemento	$A' = 1 - A$	$\forall x \in X$, $\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$

Outros pesquisadores criaram outros operadores, além dos de Zadeh. Recomenda-se a leitura do artigo [Lee-90a] e [Lee-90b].

3. Propriedades

As propriedades dos conjuntos "crisp" são válidas para os conjuntos "fuzzy", algumas são exclusivas para os conjuntos "fuzzy" [Dubois at al. – 80]. A seguir são apresentadas algumas destas propriedades utilizando os operadores max e min para a descrição da união e interseção "fuzzy", respectivamente e sendo os conjuntos A, B e C definidos em um universo de discurso comum X :

- Involução : $(A') = A$
- Indempotência : $A \cap A = A \quad e \quad A \cup A = A$
- Comutatividade: $A \cap B = B \cap A \quad e \quad A \cup B = B \cup A$
- Associatividade: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad e \; (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- Distributividade: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad e \quad A \cup (B \cap CB) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Absorção: $A \cap (A \cup B) = A \quad e \quad A \cup (A \cap B) = A$

- Lei Transitiva : $se \quad A \subset B \quad e \quad B \subset C \;\Rightarrow\; A \subset C$
- Leis de De Morgam: $(A \cap B)' = A' \cup B' \quad e \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$

4. Princípio da extensão

Considere a relação simples entre uma variável independente e uma variável dependente:

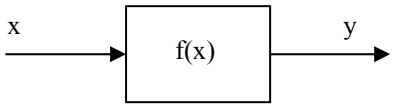

Figura A.5. - Sistema convencional

No caso típico, este sistema SISO possui uma entrada determinística que gera uma saída determinística mapeada através da função de transferência f .

Zadeh e mais tarde Yager [Zadeh – 75] [Yager – 86] estenderam este mapeamento para o caso de termos a entrada x "fuzzy" ou um conjunto "fuzzy" e a função f também "fuzzy", determinando assim a saída y, o que foi denominado por “Princípio da Extensão”. As operações anteriormente descritas são úteis para “fuzificar” conjuntos individuais ou “singletons”, o princípio da extensão permite então “fuzificar” conjuntos já “fuzificados”. Este princípio provê uma garantia teórica que “fuzificar” parâmetros ou argumentos de uma função resultará em conjuntos "fuzzy" computáveis.

A seguir é apresentada uma descrição heurística informal do princípio da extensão, detalhes podem ser vistos em [Zadeh – 75] e [Dubois at al. – 80].

Supondo-se uma função "fuzzy" que mapeia os elementos $x_1, x_1, \cdots, x_n$ de um universo de discurso X para outro universo de discurso Y, e que um conjunto "fuzzy"

A definido em $x_1, x_1, \cdots, x_n$, seja dado por sua função de pertinência.

$$\begin{array}{l} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \\ \vdots \\ y_n = f(x_n) \end{array} \quad \text{e} \quad A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \cdots + \mu_A(x_n)/x_n \qquad (\text{A.13})$$

O princípio da extensão nos diz que existe um conjunto "fuzzy" B dado por:

$$B = f(A) = \mu_A(x_1)/f(x_1) + \mu_A(x_2)/f(x_2) + \cdots + \mu_A(x_n)/f(x_n) \qquad (\text{A.14})$$

Onde toda imagem simples ou única de x_i sob f – quer dizer $y_i = f(x_i)$ – é "fuzzy" em um grau $\mu_A(x_i)$.

Geralmente as funções são mapeadas muitas para uma (MISO), portanto é esperado que muitos x podem ser mapeados para um mesmo y, então se deve decidir qual grau de pertinência $\mu_A(x_i)$ será considerado como o grau de pertinência de y_0. O princípio da extensão diz que o máximo valor de grau de pertinência é a melhor escolha para fazer parte da grade de pertinência de y_0 do conjunto B, isto é:

$$\mu_B(y_0) = \mu_A(x_i) \vee \mu_A(x_{ii}) \qquad (\text{A.15})$$

Pode-se então calcular o conjunto B, formado pelos graus de pertinência dos elementos y em Y produzidos pelo mapeamento $f(A)$ usando a equação A.14.

Generalizando para várias variáveis $u, v, \cdots w$ de diferentes universos de discurso $U, V, \cdots, W$ em diferentes conjuntos "fuzzy" $A_1, A_2, \cdots A_m$ definidos no espaço de produto $U \cdot V \cdot \ldots \cdot W$, a função multivariável, $y = f(u, v, \cdots, w)$, pode ser usado para "fuzificar" o espaço y através do princípio da extensão. Neste caso a grade de pertinência para qualquer y

é igual ao mínimo dos graus de pertinência de $u, v, \cdots w$ em $A_1, A_2, \cdots A_m$ respectivamente. A função de pertinência de B é dada por:

$$\mu_B(y) = \int_{U \cdot V \cdot \ldots \cdot W} \left(\mu_{A_1}(u) \wedge \mu_{A_2}(v) \wedge \cdots \wedge \mu_{A_3}(w)\right) / \ f(u, v, \cdots, w) \qquad (\ \text{A.16}\ )$$

Sendo que a integral representa a operação de união max($\vee$), pode-se reescrever a equação A.16 como segue:

$$\mu_B(y) = \bigvee_{U \cdot V \cdot \ldots \cdot W} \left(\left(\mu_{A_1}(u) \wedge \mu_{A_2}(v) \wedge \cdots \wedge \mu_{A_3}(w)\right) / \ f(u, v, \cdots, w)\right) \qquad (\ \text{A.17}\ )$$

5. α-corte

Um α-corte é um conjunto “crisp” constituído de elementos de A os quais pertencem ao conjunto "fuzzy" de pelo menos um grau α.

Os α-cortes são indispensáveis para a realização de operações aritméticas com conjuntos "fuzzy" . Deve-se notar que α-cortes são conjuntos “crisp” e não conjuntos "fuzzy". A figura A5 exemplifica um α-corte.:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}, \ 0 \langle \alpha \langle 1 \qquad (\ \text{A.18}\ )$$

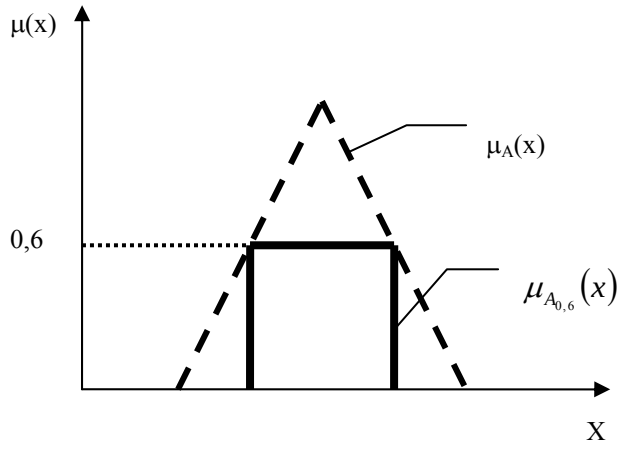

Figura A.6 - Exemplo de um α – corte

Outro exemplo para representar um α-corte é:

Sendo dado $A = 1{,}0/1 + 1{,}0/2 + 0{,}75/3 + 0{,}5/4 + 0{,}3/5 + 0{,}3/6 + 0{,}1/7 + 0{,}1/8$ temos para o α-corte 0,5, $A_{0,5}=\{1,2,3,4\}$.

6. Relações "fuzzy"

Em lógica "fuzzy" relações possuem a mesma força de cálculo e significado que funções possuem em cálculo convencional.

Relações "fuzzy" são conjuntos "fuzzy" definidos no espaço de produtos cartesiano $(X \cdot Y \cdot Z \cdot \ldots)$.

$$R_{X \cdot Y \cdot Z \cdot ..} \{((x, y, z, ...), \mu_R(x, y, z, ...))/(x, y, z, ...) \in X \cdot Y \cdot Z \cdot ...\} \qquad (\text{A.19})$$

Alternativamente podemos usar a notação da equação A.5 para formar a união de todos “singletons” $\mu_R(x, y, z, ...)/(x, y, z, ...)$ de $(X \cdot Y \cdot Z \cdot \ldots)$ para o caso de um espaço de produto cartesiano discreto:

$$R_{X \cdot Y \cdot Z \cdot \ldots} \sum_{(x_i, y_j, z_h, \ldots) \in X \cdot Y \cdot Z \cdot \ldots} \mu_R(x_i, y_j, z_h, \ldots) / (x_i, y_j, z_h, \ldots) \qquad (\text{ A.20 })$$

Ou para um espaço de produto Cartesinao contínuo nós temos:

$$R_{X \cdot Y \cdot Z \cdot \ldots} = \int_{X \cdot Y \cdot Z \cdot \ldots} \mu_R(x, y, z, \ldots) / (x, y, z, \ldots) \qquad (\text{ A.21 })$$

Uma forma alternativa muito usada de representar uma relação binária é:

$$R_{X \cdot Y} = \begin{bmatrix} \mu_R(x_1, y_1) & \mu_R(x_1, y_2) & \cdots & \mu_R(x_1, y_n) \\ \mu_R(x_2, y_1) & \mu_R(x_2, y_2) & \cdots & \mu_R(x_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_R(x_m, y_1) & \mu_R(x_m, y_2) & \cdots & \mu_R(x_m, y_n) \end{bmatrix} \qquad (\text{ A.22 })$$

Como exemplo supondo X e Y dado pelos vetores formados pelos respectivos graus de pertinência $X = [0.1, 0.5, 0.2, 0.8, 1.0]$ e $Y = [0.0, 0.5, 1.0, 0.4, 0.3]$, a relação "fuzzy" fica, utilizando a T norma mínima:

$$R_{X \cdot Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & 0.8 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 1.0 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \qquad (\text{ A.23 })$$

6.1. Operações básicas com relações "fuzzy"

Todas as operações vistas em no item 2 são validas, por exemplo, união e intersecção.

6.2.1. União

$$R_1 \cup R_2 = \int_{X \cdot Y} \left[\mu_{R_1}(x,y) \vee \mu_{R_2}(x,y)\right] / (x,y) \qquad (\text{ A.24 })$$

$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x,y) \equiv \left[\mu_{R_1}(x,y) \vee \mu_{R_2}(x,y)\right] \qquad (\text{ A.25 })$$

6.2.2. Intersecção

$$R_1 \cap R_2 = \int_{X \bullet Y} \left[\mu_{R_1}(x,y) \wedge \mu_{R_2}(x,y)\right] / (x,y) \qquad (\text{ A.26 })$$

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(x,y) \equiv \left[\mu_{R_1}(x,y) \wedge \mu_{R_2}(x,y)\right] \qquad (\text{ A.27 })$$

Como exemplo, supor duas relações R_1 e R_2 descritas a seguir:

R_1 = “x é mais largo que y” e R_2 = “ y é mais alto que x”

$$R = x\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} \mu_R(x_1,y_1) & \mu_R(x_1,y_2) & \mu_R(x_1,y_3) \\ \mu_R(x_2,y_1) & \mu_R(x_2,y_2) & \mu_R(x_2,y_3) \\ \mu_R(x_3,y_1) & \mu_R(x_3,y_2) & \mu_R(x_3,y_3) \end{bmatrix}}^{y}\right., \; R_1 = x\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.1 \\ 0.0 & 0.8 & 0.0 \\ 0.1 & 0.8 & 1.0 \end{bmatrix}}^{y}\right. \; e \; R_2 = x\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0.0 & 0.9 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}}^{y}\right.$$

A união $R_1 \cup R_2$ é formada, segundo a equação A.24, tomando-se o máximo entre as duas grades de pertinência e a intersecção $R_1 \cup R_2$ tomando-se o mínimo entre as duas grades:

$$R_1 \cup R_2 = x\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0.8 & 0.9 \\ 0.3 & 0.8 & 1.0 \end{bmatrix}}^{y}\right. \qquad R_1 \cap R_2 = x\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}}^{y}\right.$$

Deve-se interpretar o resultado das novas relações, por exemplo: a união pode ser interpretada como a proposição da forma “ *x* é um tanto quanto diferente de *y* ”. A

intersecção, no entanto, não tem um significado, desde que x não pode ser simultaneamente mais largo que y e y não pode ser mais largo que x.

6.2. Composição de Relações "fuzzy"

Composição pode ser interpretada como sendo uma ponte que permite conectar um espaço de produto cartesiano a outro espaço de produto cartesiano. Composição é muito importante para procedimentos de inferências usadas em descrições lingüísticas de sistemas e, particularmente, útil em controladores "fuzzy" e sistemas especialistas. Conforme veremos mais adiante no desenvolvimento da parte prática desta dissertação, coleções de regras “if/them” são matematicamente equivalentes a relações "fuzzy", e o problema da inferência é matematicamente equivalente à composição.

Existem diversos tipos de composição, mas o mais utilizado em engenharia é a composição de max-min, porém máx-estrela, max-produto e max-médio também são alternativas interessantes.

6.2.1. Composição max-min

Usa os operadores de conjuntos "fuzzy" , max($\vee$) e min($\wedge$), conforme apresentado na tabela A2. Supondo $R_1(x, y)$ e $R_2(x, z)$ definido sobre o produto cartesiano $X \cdot Y$ e $X \cdot Z$ respectivamente, a composição max-min de R_1 e R_2 é uma nova relação, denotada por $R_1 \circ R_2$, definida em $X \cdot Z$ como:

Para sistemas contínuos –

$$R_1 \circ R_2 \equiv \int_{X \cdot Z} \vee_y \left[\mu_{R_1}(x,y) \wedge \mu_{R_2}(y,z)\right] / (x,z) \qquad (\text{ A.28 })$$

Para sistemas discretos –

$$R_1 \circ R_2 \equiv \sum_{X \bullet Z} \vee_y \left[\mu_{R_1}(x,y) \wedge \mu_{R_2}(y,z)\right] / (x,z) \qquad (\text{ A.29 })$$

O grau de pertinência de cada para (x,z) na nova relação é:

$$\mu_{R_1 \cdot R_2}(x,z) = \vee_y \left[\mu_{R_1}(x,y) \wedge \mu_{R_2}(y,z)\right] \qquad (\text{ A.30 })$$

A operação da equação A.30 é na verdade muito similar a multiplicação de matriz, com o max($\vee$) sendo análogo a soma(+) e o mín($\wedge$) ao produto $(\cdot)$.

6.2.2. Composição max-estrela (ou max-*)

A estrela aparece no lugar do min($\wedge$) para representar que este pode ser substituído pelo sinal de multiplicação, soma ou outra operação binária nas equações A.29 e A.30, permanecendo a maximização em relação a y. É representado como segue:

Para sistemas contínuos

$$R_1 \circ R_2 \equiv \int_{X \bullet Z} \vee_y \left[\mu_{R_1}(x,y) * \mu_{R_2}(y,z)\right] / (x,z) \qquad (\text{ A.31 })$$

Para sistemas discretos

$$R_1 \circ R_2 \equiv \sum_{X \bullet Z} \vee_y \left[\mu_{R_1}(x,y) * \mu_{R_2}(y,z)\right] / (x,z) \qquad (\text{ A.32 })$$

O grau de pertinência de cada para (x,z) na nova relação é:

$$\mu_{R_1 \bullet R_2}(x,z) = \vee_y \left[\mu_{R_1}(x,y) * \mu_{R_2}(y,z)\right] \qquad (\text{ A.33 })$$

6.2.3. Composição máx-produto

Neste caso substituí-se a (*) das equações A.31 a A.33 pelo produto $(\cdot)$.

6.2.4. Composição máx-médio

Neste caso substituí-se a (*) das equações (3.31) a (3.33) pela soma (+) dividida por dois.

Como exemplo, considerando as relações R_1 e R_2 do exemplo apresentado em 3.1.8., calcula-se a matriz de pertinência da composição max-min, para tanto se utiliza a equação A.30 cuja operação é similar ao produto de matrizes, onde ($\vee$) é tratado como uma soma e ($\wedge$) como uma multiplicação, desta forma pode-se proceder ao cálculo conforme segue:

$$R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.1 \\ 0.0 & 0.8 & 0.0 \\ 0.1 & 0.8 & 1.0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0.0 & 0.9 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \qquad (\text{A.34})$$

O cálculo da primeira linha de R_1 pela primeira coluna de R_2 é realizado da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \wedge 0.4 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0.0 \wedge 0.5 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0.1 \wedge 0.3 \end{bmatrix} = 0.0 \vee 0.0 \vee 0.1 = 0.1$$

Repetindo este procedimento tem-se:

$$R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.0 & 0.8 \\ 0.5 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \qquad (\text{A.35})$$