DANILO ZUCOLLI FIGUEIREDO

**TOMADA DE DECISÃO DE INVESTIMENTO EM
UM FUNDO DE PENSÃO COM PLANO DE
BENEFÍCIOS DO TIPO BENEFÍCIO DEFINIDO:
UMA ABORDAGEM VIA PROGRAMAÇÃO
ESTOCÁSTICA MULTISTÁGIO LINEAR**

São Paulo

2011

DANILO ZUCOLLI FIGUEIREDO

**TOMADA DE DECISÃO DE INVESTIMENTO EM
UM FUNDO DE PENSÃO COM PLANO DE
BENEFÍCIOS DO TIPO BENEFÍCIO DEFINIDO:
UMA ABORDAGEM VIA PROGRAMAÇÃO
ESTOCÁSTICA MULTISTÁGIO LINEAR**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração:
Engenharia de Sistemas

Orientador:
Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa

São Paulo

2011

*Aos meus pais, Daniel e Vilma,
com muito amor*

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa pelos valiosos ensinamentos, pela oportunidade de realizar este trabalho e pelo exemplo de competência acadêmica.

À banca examinadora pela análise e contribuições.

Aos que auxiliaram na realização deste trabalho. À Ana Maria Badiali, bibliotecária da Escola Politécnica, pelas críticas e orientações em relação à formatação. Ao meu pai pelas sugestões para a redação e pela revisão ortográfica. Ao Aldo Medina e à Fran Lima pela ajuda na elaboração do código R para as análises estatísticas das simulações e pelas dicas de LaTeX. À Kellen Quessada por todas as referências sobre Ciências Atuariais.

Aos docentes do programa de pós-graduação da Escola Politécnica, em especial, aos professores José Roberto Castilho Piqueira e Agenor de Toledo Fleury por conseguirem transformar Matemática em Engenharia.

Aos professores Plinio Francisco dos Santos Rodrigues, Osvaldo Shigueru Nakao e Paulo Sérgio Muniz Silva pelo incentivo e recomendação de ingresso no mestrado.

A todos os colegas da Principia Capital Management pelas discussões sobre finanças quantitativas.

Ao Eng. Salvador Arena (*in memoriam*) por seu ideal ao criar o Colégio Termomecânica, onde tive o prazer de estudar.

Às pessoas queridas que fazem parte da minha vida. Aos meus pais pelo amor, carinho e incentivo incondicional. À Nina pelo amor, incentivo (o maior de todos) e por sempre me manter com os pés no chão. A todos os meus amigos e familiares pelo carinho e incentivo.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho apresenta uma abordagem via programação estocástica linear para a tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão com plano de benefícios do tipo benefício definido. Propõe-se uma nova metodologia para a definição da alocação da carteira do fundo no instante inicial baseada na média de vários cenários econômicos gerados aleatoriamente. Como exemplo de aplicação, essa metodologia é utilizada para resolver o problema da alocação inicial da carteira de um grande fundo de pensão brasileiro e a alocação inicial obtida é avaliada em termos da probabilidade de insolvência e VaR , valor em risco, do fundo no instante final do horizonte de planejamento de investimento.

Palavras-chave: Programação estocástica. Fundo de pensão. Gestão de Ativos e Passivos.

Abstract

This paper presents an approach via linear stochastic programming for investment decision making in a defined benefit pension fund plan. It proposes a new methodology for defining the allocation of the portfolio at the initial time based on the average of several randomly generated economic scenarios. As an illustrative example, this methodology is used to solve the problem of portfolio initial allocation of a large Brazilian pension fund and the obtained initial allocation is evaluated in terms of fund's probability of default and VaR , Value-at-Risk, at the final time of the investment planning horizon.

Keywords: Stochastic programming. Pension fund. Asset and Liability Management (ALM).

Lista de abreviaturas e siglas

ALM	Gestão de Ativos e Passivos (<i>Asset and Liability Management</i>)
BD	Benefício Definido
CD	Contribuição Definida
CDI	Certificado de Depósito Interfinanceiro
DI	Depósito Interfinanceiro
EAPC	Entidade Aberta de Previdência Complementar
EFPC	Entidade Fechada de Previdência Complementar
IBOV	Índice da BOVESPA
INSS	Instituto Nacional do Seguro Social
MPS	Ministério da Previdência Social
Previc	Superintendência Nacional de Previdência Complementar

Sumário

1	Introdução	9
1.1	Fundos de Pensão	9
1.2	Objetivo do trabalho	11
1.3	Justificativa do tema	11
1.4	Estrutura da dissertação	14
2	Programação Estocástica	15
2.1	Modelos de recurso com dois estágios	16
2.2	Modelos multiestágio	18
3	Formulação do problema de ALM para um fundo de pensão	22
3.1	Restrições na tomada de decisão de investimento	23
3.1.1	Restrições de balanço	25
3.1.2	Restrições de inventário	26
3.1.3	Restrições de alocação	28
3.1.4	Restrições de liquidez	28
3.2	Função objetivo	29
3.3	Problema de ALM para um fundo de pensão	31
3.3.1	Definição do problema	31
3.3.2	Abordagem por árvores de cenários	33
4	Metodologia para a alocação da carteira de um fundo de pensão	37
4.1	Definição da árvore de cenários	37
4.1.1	Modelagem dos retornos dos ativos	39
4.1.2	Modelagem do passivo do fundo	39
4.1.3	Construção da árvore de cenários	41
4.2	Alocação da carteira do fundo	42
4.2.1	Técnicas de amostragem	42

4.2.2	Metodologia proposta	43
5	Simulações	45
5.1	Parâmetros das simulações	46
5.2	Experimentos e resultados	47
5.2.1	Determinação da alocação do fundo no instante inicial	47
5.2.2	Análise da distribuição do resultado técnico do fundo	48
6	Conclusões	51
6.1	Conclusões	51
6.2	Perspectivas futuras	52
	Referências	54
	Biblioteca ALM (Matlab)	57
	Código do estudo de simulação 1 (Matlab)	63
	Código do estudo de simulação 2 (Matlab)	64
	Código da análise estatística do estudo de simulação 2 (R)	66

1 Introdução

1.1 Fundos de Pensão

Previdência é a capacidade de antecipar acontecimentos futuros e de se prevenir. Na medida em que não há acontecimento futuro mais certo para o ser humano que o envelhecimento e a morte, cabe a ele prevenir-se de modo a garantir um final de vida tranquilo e a possibilidade de que sua família tenha uma renda satisfatória mesmo em sua ausência.

O Brasil conta com um seguro social chamado Previdência Social que garante renda ao trabalhador e à sua família caso ele perca a capacidade de trabalho - seja por doença, acidente, gravidez, prisão, morte ou velhice - mediante uma contribuição mensal realizada durante seu tempo de serviço. A administração da Previdência Social é realizada pelo Ministério da Previdência Social (MPS) e o reconhecimento de direito ao recebimento de benefícios é realizado pelo Instituto Nacional do Seguro Social (INSS).

Além da Previdência Social, os trabalhadores têm a opção de contratar uma Previdência Complementar, que se constitui num seguro previdenciário adicional oferecido como um produto financeiro por entidades privadas.

Os planos de Previdência Complementar se dividem em planos de previdência aberta e planos de previdência fechada, sendo que as principais diferenças entre essas duas classes de planos de previdência são as entidades que os oferecem e a quem esses planos são ofertados.

Os planos abertos são oferecidos por Entidades Abertas de Previdência Complementar (EAPC) ou Sociedades Seguradoras e podem ser contratados de forma individual ou coletiva, sem nenhum tipo de restrição ao contratante.

Já os planos de previdência fechada são oferecidos por Entidades Fechadas de Previdência Complementar (EFPC), também conhecidas como fundos de pensão e são permitidos exclusivamente aos empregados de uma empresa e aos servidores da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, entes denominados patrocinadores; e aos associados ou membros de pessoas jurídicas de caráter profissional, classista ou setorial,

denominados instituidores. Trabalhadores vinculados a entidades representativas, como sindicatos, cooperativas e órgãos de classe também têm direito à previdência complementar fechada, numa modalidade denominada previdência associativa.

No presente trabalho, as empresas, de forma geral, que oferecem a seus empregados ou servidores planos de benefícios de natureza previdenciária operado por um fundo de pensão serão denominadas patrocinadoras do plano. Os trabalhadores que aderem a estes planos serão chamados de participantes do plano de benefícios. Por último, as empresas responsáveis pela gestão dos recursos do fundo serão chamadas administradoras ou gestoras do fundo.

Segundo Oliveira (2005), fundos de pensão são a forma pela qual as empresas provêem recursos para a acumulação de reservas destinadas a cobrir pagamentos de aposentadorias aos seus empregados. Estes fundos se justificam pela necessidade de garantir um nível equivalente de renda para os que se desligam do quadro pessoal da patrocinadora, por motivo de tempo de serviço, invalidez ou velhice.

O fluxo de caixa de um fundo de pensão se constitui em uma série de recebimentos durante a fase em que os participantes encontram-se em atividade, seguida de uma série de pagamentos durante a fase de inatividade dos participantes, ou seja, participantes e patrocinadora contribuem com recursos financeiros para o fundo enquanto o empregado encontra-se trabalhando e, em contrapartida, a partir do momento em que o empregado se aposenta ele passa a receber do fundo uma aposentadoria ou benefício mensal.

Cabe ao gestor do fundo investir os valores captados com as contribuições em ativos, de modo a garantir os recursos necessários para o pagamento do total dos compromissos futuros do fundo expressos em sua reserva matemática. A reserva matemática de um fundo de pensão é definida como a diferença entre o valor presente dos benefício futuros do plano e o valor presente das contribuições futuras.

O descasamento temporal entre o fluxo de caixa gerado pelas contribuições e aquele gerado pelo pagamento dos benefícios e a diferença entre as rentabilidades obtidas nos investimentos realizados pelo fundo e a taxa de crescimento de suas obrigações são as principais fontes de incerteza para a saúde financeira de um fundo de pensão. Este tipo de risco causado pelas diferenças entre ativo e passivo de uma carteira são a base de estudo da chamada Gestão de Ativos e Passivos, *Asset and Liability Management* (ALM).

1.2 Objetivo do trabalho

Este trabalho procura contribuir com os avanços na área de ALM através da proposta de uma metodologia para a tomada de decisão de investimento, ou seja, uma metodologia para a definição da alocação, no instante atual, da carteira de um fundo de pensão com plano de benefícios do tipo benefício definido (BD). Para isso, o problema da tomada de decisão de investimento é formulado como um problema de programação estocástica e, a partir das soluções ótimas deste problema para uma variedade de realizações distintas de futuros cenários econômicos, é definida a alocação da carteira do fundo para o instante atual.

1.3 Justificativa do tema

O problema da tomada de decisão de investimento em fundos de pensão tem relevante importância face os vultosos volumes financeiros sob gestão dessa classe de fundos e o risco de desequilíbrio entre seus ativos e passivos.

Segundo a Superintendência Nacional de Previdência Complementar (Previc) em seu relatório de estatísticas mensais¹, o total de ativos de investimento de fundos de pensão em Junho de 2010 somava cerca de 496 bilhões de reais, distribuídos como mostra a tabela 1.1.

Tabela 1.1: Composição do ativo de investimentos das EFPC

Aplicações	%
fundos de investimento	56,9
títulos públicos	18,2
ações	14,8
créditos privados e depósitos	4,6
investimentos imobiliários	2,9
empréstimos e financiamentos	2,5
outros realizáveis	0,1

Diante dessa grande acumulação de recursos nos fundos de pensão, torna-se notável a participação dessa classe de fundos como investidores nos mais diversos mercados. A título de exemplo, a média diária negociada, em volume financeiro, na Bovespa em 2010

¹Previdência Complementar - Estatística Mensal - Junho/2010 (Estatísticas Mensais - Contábil e Cadastro)

foi de R\$ 6,48 bilhões e os investimentos diretos de fundos de pensão em ações totalizavam aproximadamente R\$ 73 bilhões, 14,8% do total de ativos de investimento dos fundos, demonstrando nitidamente a significativa relevância desses fundos para o mercado acionário.

Além disso, o crescimento do sistema de previdência complementar fechado e os grandes volumes financeiros sob sua gestão têm criado demandas complexas para os órgãos fiscalizadores do setor, como a Secretaria de Previdência Complementar, exigindo a formulação de políticas públicas eficazes, em consonância com o cenário macroeconômico e de transição demográfica do País, de forma a contribuir efetivamente para a sustentabilidade do sistema de previdência privada.

Neste mesmo sentido, gestores têm adotado técnicas cada vez mais sofisticadas de ALM para tomar suas decisões de investimento. Segundo pesquisa realizada por Oliveira (2005) e que considerou uma amostra de 72 fundos de pensão, há indícios de que a maioria dos fundos de pensão já empregue alguma ferramenta de ALM e, aqueles que por alguma razão declararam não usar, revelaram intenção de fazê-lo. As respostas dessa pesquisa indicaram também que os fundos têm conhecimento das técnicas de ALM e de sua importância no planejamento estratégico que deve considerar o horizonte de longo prazo de suas obrigações.

As principais técnicas empregadas em ALM são os modelos de média-variância, modelos de tempo discreto com múltiplos períodos, modelos de tempo contínuo e modelos de programação estocástica. Kouwenberg; Zenios (2006) discutem as características positivas e negativas de cada uma destas técnicas e destacam que os modelos de tempo discreto com múltiplos períodos e os modelos de tempo contínuo apesar de trazerem informações relevantes sobre políticas de investimento e ALM, por incorporarem muitas simplificações para se tornarem computacionalmente viáveis, não são ferramentas interessantes do ponto de vista prático. Destacam ainda que modelos de programação estocástica podem ser considerados extensões dos modelos de média-variância para o caso multiperíodo.

Kouwenberg; Zenios (2006) apontam como a maior vantagem para o uso de modelos de programação estocástica em ALM o fato destes modelos considerarem aspectos práticos relevantes em sua formulação como custos de transação, mercados incompletos e limites de alocação e de liquidez.

Um dos primeiros trabalhos envolvendo aplicações de programação estocástica a problemas de gestão de carteiras foi realizado por Bradley; Crane (1972), que estudaram a gestão multiperíodo de uma carteira de títulos. A partir desse trabalho, muito foi feito e revisões detalhadas dos trabalhos realizados de aplicações de programação estocástica

aos problemas da gestão de fundos de pensão e empresas de seguro foram efetuadas por Silva (2001) e Kouwenberg; Zenios (2006).

A aplicação de técnicas de ALM em fundos de pensão tem como premissa básica garantir que o plano de benefícios previdenciários contratado pelo participante seja cumprido. Segundo Conde; Ernandes (2007), um plano de benefícios previdenciários é representado pelo conjunto de direitos e obrigações assumidas pelas partes: participante, patrocinador e administrador, expresso no regulamento do plano.

Há no mercado uma série de diferentes planos de benefícios com as mais peculiares características. Neste trabalho serão citados apenas os planos do tipo benefício definido (BD) e do tipo contribuição definida (CD).

Planos do tipo BD são planos em que o participante tem direito a um benefício de aposentadoria na forma de uma renda mensal e vitalícia, cujo valor é dado por um percentual de seu salário na data da aposentadoria. Como existe uma regra expressa no regulamento do plano que define o cálculo do benefício, este tipo de plano é dito de benefício definido. Nesta modalidade de plano, as contribuições dos participantes não são fixas e podem variar ao longo do tempo.

No caso de planos do tipo CD ocorre o oposto ao observado nos planos do tipo BD. Em um plano do tipo CD o participante conhece exatamente o valor de suas contribuições, daí este tipo de plano ser dito de contribuição definida, mas não sabe antecipadamente qual será o valor de seu benefício. Este valor é fixado em função do montante acumulado em sua conta individual durante o período contributivo e depende das contribuições acumuladas ao longo do tempo e dos retornos dos investimentos realizados pelo fundo com essas contribuições.

Oliveira (2005) comenta que um fundo de pensão com plano do tipo CD pode ser encarado como um fundo de investimento ou uma poupança programada, com vantagens tributárias, onde o saldo acumulado na data da aposentadoria é transformado em benefício de renda mensal, podendo ou não ser vitalício, com ou sem garantia de reajustes anuais.

Valladão (2008) destaca que apesar da migração que tem ocorrido no mercado de fundos de pensão para os planos do tipo CD, os planos BD residuais ainda são um percentual significativo, em alguns casos, a maior parte da carteira dos grandes fundos do país. Desse modo, é de extrema relevância prática o estudo do problema de ALM para essa classe de fundos.

Segundo Oliveira (2005), gestores e atuários dividem responsabilidades de modo a buscar garantir o objetivo de um fundo de pensão: cumprir a promessa de pagamentos de aposentadoria. Os gestores devem alocar os recursos disponíveis em investimentos com

rendimentos suficientes para o pagamento das obrigações do fundo. Já os atuários têm a responsabilidade de definir os valores das contribuições e o nível dos benefícios. Para isto se utilizam de hipóteses sobre determinadas variáveis como retorno dos investimentos, rotatividade de mão-de-obra, crescimento salarial, reajuste de benefícios, idade de aposentadoria, taxas de inflação, taxas de juros, tábuas de mortalidade, etc. A falta de verificação destas hipóteses atuariais é a maior fonte de risco dos fundos, traduzidos na sua incapacidade de realizar a promessa feita a seus participantes.

1.4 Estrutura da dissertação

Este trabalho foi organizado em 6 capítulos. A seguir é apresentada uma breve descrição do conteúdo de cada um deles.

No capítulo 1 é feita uma apresentação sobre fundos de pensão e previdência complementar no Brasil. Também são expostos os objetivos e a motivação para o desenvolvimento deste trabalho.

No capítulo 2 é feita uma breve revisão sobre Programação Estocástica, de modo a introduzir o formalismo necessário para o tratamento do problema objeto de estudo deste trabalho.

No capítulo 3 é apresentada uma formulação via programação estocástica linear para o problema da tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão com plano de benefícios do tipo benefício definido. No capítulo 4 é definida a forma como são construídas as árvores de cenários para o problema e é apresentada uma metodologia para a definição da alocação da carteira do fundo no instante atual.

No capítulo 5 são apresentadas simulações do uso da metodologia proposta aplicada a dados obtidos de um grande fundo de pensão brasileiro. No capítulo 6 são apresentadas as conclusões e listados possíveis trabalhos futuros. Por fim, os apêndices contêm os códigos utilizados nas simulações numéricas.

2 Programação Estocástica

A maioria dos problemas de otimização que modelam situações reais incorporam incertezas em pelo menos alguns de seus parâmetros. Graças a isso, a área da programação estocástica, que engloba modelos e métodos para tratar justamente de problemas de otimização que envolvem incertezas, possui vasta aplicação prática. Exemplos de aplicações de técnicas de programação estocástica são encontrados em problemas envolvendo a gestão de recursos (agrícolas, energéticos, financeiros, hídricos, militares, etc.), problemas de controle e planejamento da produção, problemas de logística, etc.

Neste capítulo é realizada uma breve revisão sobre programação estocástica. São apresentados os problemas de programação estocástica com recurso para os casos em que há dois estágios de decisão e múltiplos estágios de decisão. Por fim, o problema de programação estocástica linear é apresentado. No próximo capítulo, o problema da tomada de decisão de investimento num fundo de pensão será formulado em termos de um problema de programação estocástica linear com múltiplos estágios.

Deve-se ressaltar os dois empregos da palavra “recurso” neste capítulo. O primeiro ocorre quando se fala das aplicações da programação estocástica em problemas de alocação de recursos. Neste caso, a palavra recursos tem sentido de riquezas, bens materiais, bens naturais, força de trabalho, etc. O segundo ocorre ao se tratar de problemas de programação estocástica com recurso. Neste caso, recurso tem sentido de ação ou resultado de recorrer, ou seja, um meio empregado para vencer determinada dificuldade.

Problemas de programação estocástica foram formulados pela primeira vez por Dantzig (1955) e Beale (1955). Uma interessante revisão dos trabalhos sobre programação estocástica foi realizada por Dupačová (1995), que apresentou as formulações típicas dos problemas, áreas de aplicação, técnicas numéricas para a solução dos problemas e uma extensa lista de referências a trabalhos da área. Os livros texto de Birge; Louveaux (1997) e Shapiro; Dentcheva; Ruszczyński (2009) condensam grande parte da teoria disponível sobre programação estocástica e apresentam diversos exemplos de aplicação.

2.1 Modelos de recurso com dois estágios

Modelo de recurso com dois estágios

O problema de programação matemática de dois estágios com recurso pode ser formulado como

$$\min f(x) + \mathbb{E}[Q(x, \omega)], \quad (2.1)$$

sujeito a

$$A \cdot x = b,$$

$$x \in \mathbb{R}_+^{n_0},$$

onde $x \in \mathbb{R}^{n_0}$ é a variável de decisão do primeiro estágio, $f(x)$ é a função custo do primeiro estágio, A é uma matriz de dimensão $m_0 \times n_0$ de coeficientes das restrições, b é um vetor de dimensão m_0 e ω é uma variável aleatória definida sobre o espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

A função $Q(x, \omega)$, chamada função custo do recurso, é definida como o valor ótimo de

$$\min q(y, \omega), \quad (2.2)$$

sujeito a

$$W(\omega) \cdot y = h(\omega) - T(\omega) \cdot x,$$

$$y \in \mathbb{R}_+^{n_1},$$

onde $y \in \mathbb{R}^{n_1}$ é chamada variável de decisão do segundo estágio, $q(y, \omega)$ é a função custo do segundo estágio e $\{T(\omega), W(\omega), h(\omega)\}$ são parâmetros do modelo. Tais parâmetros são aleatórios, uma vez que são função de ω . T é chamada matriz de tecnologia e tem dimensão $m_1 \times n_0$, W é chamada matriz de recurso e tem dimensão $m_1 \times n_1$ e h é um vetor de dimensão m_1 .

A decisão de primeiro estágio x não depende da observação de ω , mas para que a decisão seja tomada de maneira adequada, deve considerar todas as possíveis realizações desta variável aleatória. Em outras palavras, a decisão x deve ser tal que, sob todas as possíveis realizações de ω , as restrições e a função objetivo do problema tenham características desejadas.

Já a decisão de segundo estágio y é tomada depois que as incertezas sobre o problema se tornam conhecidas, ou seja, depois que é realizada a observação da variável aleatória

ω e, por isso, é chamada decisão de recurso. Seja $\mathcal{F}$ toda a informação disponível após a realização da observação, tal que $\mathcal{F}$ seja a σ -álgebra de todos os possíveis eventos, gerada pelo conjunto Ω suporte da variável aleatória ω . Como y depende desses possíveis eventos, y é dita $\mathcal{F}$ -adaptada.

Desse modo, o problema de programação matemática (2.1) modela a situação em que um agente deve tomar uma decisão x em um ambiente em que a incerteza sobre o futuro é descrita pela variável aleatória ω . Num estágio seguinte, o valor de ω se torna conhecido e, em função da decisão anterior x e da forma como a incerteza ω se realizou, uma ação de recurso y deve ser tomada. As decisões x e y são escolhidas de modo que a função custo do problema seja minimizada.

$$\text{decisão } x \longrightarrow \text{ocorre } \omega \longrightarrow \text{recurso } y$$

De (2.1) e (2.2), o problema de programação matemática de dois estágios com recurso pode ser escrito de maneira compacta como

$$\min f(x) + \mathbb{E} \left[\min_{y \in R_+^{n_1}} \{q(y, \omega) \mid T(\omega) \cdot x + W(\omega) \cdot y = h(\omega)\} \right], \quad (2.3)$$

sujeito a

$$A \cdot x = b,$$

$$x \in \mathbb{R}_+^{n_0}.$$

Forma determinística equivalente

Nos casos em que a variável aleatória ω tem distribuição discreta, com suporte $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$, cada uma de suas possíveis realizações, $\omega_1, \dots, \omega_N$, é chamada de cenário. A modelagem por cenários é interessante em aplicações em que a incerteza sobre o futuro pode ser descrita de maneira razoável por meio de sua discretização em um número finito de casos.

Denotando por p_i a probabilidade de ocorrência do i -ésimo cenário, $i = 1, \dots, N$, tem-se

$$p_i = \mathbb{P}(\omega = \omega_i), \quad (2.4)$$

com

$$p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

e

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1,$$

e o valor esperado da função custo do recurso pode ser escrito como

$$\mathbb{E}[Q(x, \omega)] = \sum_{i=1}^N p_i Q(x, \omega_i). \quad (2.5)$$

Para cada realização $\omega_i \in \Omega$ da variável aleatória ω , uma decisão diferente de segundo estágio y_i é tomada. Para uma dada realização ω_i , o problema de segundo estágio (2.2) pode, então, ser escrito como

$$\min q(y_i, \omega_i), \quad (2.6)$$

sujeito a

$$W(\omega_i) \cdot y = h(\omega_i) - T(\omega_i) \cdot x,$$

$$y_i \in \mathbb{R}_+^{n_1},$$

e combinando (2.5) e (2.6), o problema (2.3) pode ser escrito como um problema determinístico não-linear, chamado problema determinístico equivalente,

$$\min f(x) + \sum_{i=1}^N p_i q(y_i, \omega_i), \quad (2.7)$$

sujeito a

$$A \cdot x = b,$$

$$T(\omega_i) \cdot x + W(\omega_i) \cdot y_i = h(\omega_i), \quad \forall \omega_i \in \Omega$$

$$x \in \mathbb{R}_+^{n_0}, \quad y_i \in \mathbb{R}_+^{n_1}, \quad i = 1, \dots, N.$$

2.2 Modelos multiestágio

Modelo de recurso com múltiplos estágios

O problema apresentado na seção 2.1 pode ser generalizado para o caso em que existem mais que dois estágios de decisão. Neste caso, deve-se tomar uma sequência de decisões $x = (x_0, \dots, x_T)$, cada decisão associada a um estágio do problema, e a cada decisão é revelado um componente do vetor aleatório $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_T)$, que descreve a incerteza sobre o futuro.

Analogamente ao problema de dois estágios, uma decisão inicial x_0 é tomada sem que seja revelada qualquer informação sobre ω . Em seguida, torna-se conhecido ω_1 e deve-se tomar a decisão x_1 do segundo estágio. Este processo em que se alternam decisões x_t e observações de ω_t se repete até o estágio T , que representa o final do horizonte de decisões,

$$x_0 \longrightarrow \omega_1 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \omega_T \longrightarrow x_T.$$

O vetor aleatório $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_T)$ é definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_T$ e $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}$ é uma sequência de σ -álgebras, tal que cada $\mathcal{F}_t$, $t = 1, \dots, T$, é a σ -álgebra gerada pelas observações $\omega_1, \dots, \omega_t$. A σ -álgebra $\mathcal{F}_t$ representa toda a história do processo ou toda a informação disponível até t . Neste sentido, como cada decisão x_t , com $t = 1, \dots, T$, depende apenas das observações realizadas até t , x_t é dita $\mathcal{F}_t$ -adaptada.

O problema 2.3 pode, então, ser generalizado, para o caso em que são considerados $(T+1)$ estágios correspondentes a instantes de $t = 0$ até $t = T$, e considerando-se restrições lineares e dependentes, no máximo, de decisões tomadas no estágio anterior como

$$\min f(x_0) + \mathbb{E} \left[\min_{x_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1}} q_1(x_1, \omega_1) + \dots + \mathbb{E} \left[\min_{x_T \in \mathbb{R}_+^{n_T}} q_T(x_T, \omega_T) \right] \dots \right], \quad (2.8)$$

sujeito a

$$W_0 \cdot x_0 = h_0,$$

$$T_t(\omega_t) \cdot x_{t-1} + W_t(\omega_t) \cdot x_t = h_t(\omega_t), \quad t = 1, \dots, T,$$

$$x_0 \in \mathbb{R}_+^{n_0},$$

onde x_0 é a variável de decisão do primeiro estágio e x_t , com $t = 1, \dots, T$, representa a variável de recurso do $(t+1)$ -ésimo estágio.

Note que o problema de programação estocástica multiestágio (2.8) apresenta, para cada $t > 0$, um problema de recurso condicionado à informação disponível até t , com função custo $q_t(x_t, \omega_t)$ e parâmetros $\{T_t(\omega_t), W_t(\omega_t), h_t(\omega_t) \mid \omega_t \in \Omega_t\}$.

Caso a função custo de primeiro estágio e todas as funções custo de recurso de um problema de programação estocástica multiestágio (2.8) sejam lineares, o problema será dito um problema de programação estocástica multiestágio linear. Esta classe de problemas é muito importante, principalmente no caso em que Ω é um conjunto finito, dada sua possibilidade de tratamento computacional e extensa aplicação prática.

Forma determinística equivalente

Como nos modelos de recurso com dois estágios, caso a variável aleatória ω tenha distribuição discreta, a forma geral (2.8) pode ser escrita numa forma mais simples, em que os valores esperados são escritos como somatórios.

Seja o conjunto Ω tal que $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_N$, com cada um dos conjuntos Ω_t finitos, $\Omega_t = \{\omega_{t,1}, \dots, \omega_{t,N_t}\}$, com $t = 1, \dots, T$.

Um cenário será definido como um vetor $(\omega_{1,i_1}, \dots, \omega_{T,i_T})$, em que cada um de seus componentes $\omega_{t,i_t} \in \Omega_t$ é dito um estado de instante t . De modo análogo, um vetor $(\omega_{1,i_1}, \dots, \omega_{t,i_t})$, composto por uma sequência de estados de instantes 1 até t , será chamado de cenário de instante t .

Para que a formulação do problema se torne mais simples, o conjunto de possíveis cenários será tomado de modo que um dado estado ω_{t,i_t} , de instante t , tem apenas um possível estado antecessor em $t - 1$, denotado por $\omega_{a(t,i_t)}$.

A probabilidade de ocorrência de $\omega_{t,i}$, i -ésimo possível estado de instante t , será denotada por $p_{t,i}$ e será tal que

$$p_{t,i} = \mathbb{P}(\omega_t = \omega_{t,i}),$$

com

$$p_{t,i} \geq 0$$

e

$$\sum_{i=1}^{N_t} p_{t,i} = 1,$$

com $t = 1, \dots, T$ e $i = 1, \dots, N_t$ e onde ω_t corresponde ao t -ésimo componente do vetor aleatório $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_t, \dots, \omega_T)$.

De forma semelhante ao modelo de recurso com dois estágios, para cada realização de cenário de instante t , $(\omega_{1,i_1}, \dots, \omega_{t,i_t}) \in \Omega_1 \times \dots \times \Omega_t$, uma decisão, de instante t , $x_{t,i}$ diferente é tomada. Desse modo, o problema (2.8) pode ser escrito em sua forma determinística equivalente como

$$\min f(x_0) + \left[\sum_{i_1=1}^{N_1} p_{1,i_1} q(x_{1,i_1}, \omega_{1,i_1}) \right] + \dots + \left[\sum_{i_T=1}^{N_T} p_{T,i_T} q(x_{T,i_T}, \omega_{T,i_T}) \right], \quad (2.9)$$

sujeito a

$$W_0 \cdot x_0 = h_0,$$

$$T(\omega_{1,i_1}) \cdot x_0 + W(\omega_{1,i_1}) \cdot x_{1,i_1} = h(\omega_{1,i_1}), \quad \forall \omega_{1,i_1} \in \Omega_1$$

$$\begin{aligned}
T(\omega_{2,i_2}) \cdot x_{a(2,i_2)} + W(\omega_{2,i_2}) \cdot x_{2,i_2} &= h(\omega_{2,i_2}), \quad \forall \omega_{2,i_2} \in \Omega_2 \\
&\vdots \\
T(\omega_{T,i_T}) \cdot x_{a(T,i_T)} + W(\omega_{T,i_T}) \cdot x_{T,i_T} &= h(\omega_{T,i_T}), \quad \forall \omega_{T,i_T} \in \Omega_T
\end{aligned}$$

e sujeito às restrições de sinal

$$\begin{aligned}
x_0 &\in \mathbb{R}_+^{n_0} \\
x_{1,i_1} &\in \mathbb{R}_+^{n_1}, \quad i_1 = 1, \dots, N_1 \\
&\vdots \\
x_{T,i_T} &\in \mathbb{R}_+^{n_T}, \quad i_T = 1, \dots, N_T,
\end{aligned}$$

onde $x_{a(t,i_t)}$ denota a decisão tomada no estado antecessor ao estado ω_{t,i_t} .

No problema (2.9) as restrições de implementabilidade ou não-antecipação estão implícitas. Tais restrições impõem que cenários com mesma sequência de estados do instante inicial até t devem estar associados a um mesmo conjunto de informações e, por isso, as decisões até t nestes cenários, $x_0, \dots, x_t$, devem ser as mesmas.

Note que o problema (2.8) quando escrito em sua forma determinística equivalente (2.9), para um conjunto Ω finito, deixa de ser um problema estocástico e toma a forma de um problema determinístico e no caso em que a função objetivo é linear, torna-se um problema de programação linear.

Dupačová; Consigli; Wallace (2000) fazem comentários sobre a complexidade de problemas de programação estocástica linear e destacam que, dada a disponibilidade de ferramentas computacionais (CPLEX, MSLiP-OSL, OSL-SP, etc.) capazes de resolver problemas multiestágio com restrições lineares e funções objetivos não-lineares, as etapas mais trabalhosas entre a formulação e solução de um problema de programação estocástica linear são as etapas de modelagem do problema e de geração de cenários.

3 Formulação do problema de ALM para um fundo de pensão

Neste capítulo o problema da tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão é formulado em termos de um problema de programação estocástica multiestágio linear.

A gestão do fundo pode ser facilmente definida em termos de um problema de programação matemática, pois trata-se de um problema do qual emergem naturalmente uma série de restrições e em que se está interessado em otimizar alguma quantidade como maximizar a capacidade do fundo em honrar suas obrigações. As restrições que serão adotadas são as geralmente utilizadas na literatura da área, sendo semelhantes às adotadas nos trabalhos de Consigli; Dempster (1998), Kouwenberg; Zenios (2006), Hilli et al. (2007) e Valladão (2008).

A necessidade de um enfoque via programação estocástica se dá pelo caráter não-determinístico das variáveis econômicas e atuariais envolvidas no problema. Essas variáveis definem os possíveis cenários para o ativo e passivo do fundo em datas futuras e, por isso, têm comportamento estocástico.

Bradley; Crane (1972) estudaram a gestão multiperíodo de uma carteira de títulos, *bonds*, por uma abordagem via programação estocástica. Este trabalho é tido como uma contribuição fundamental para a abordagem de problemas de gestão de carteiras utilizando-se de programação estocástica. A partir deste trabalho pioneiro, muito foi feito e revisões detalhadas dos trabalhos realizados de aplicações de programação estocástica aos problemas da gestão de fundos de pensão e empresas de seguro foram efetuadas por Silva (2001) e Kouwenberg; Zenios (2006).

3.1 Restrições na tomada de decisão de investimento

Nesta seção são elencadas as restrições que se aplicam à gestão de um fundo de pensão. Na seção 3.2 é proposta uma função objetivo para o problema de otimização e por último, de posse da definição de um problema de programação estocástica linear apresentada na seção 2.2, na seção 3.3 o problema de tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão é formulado.

As restrições aplicadas à gestão de um fundo de pensão podem ser divididas em quatro categorias: restrições de balanço, restrições de inventário, restrições de alocação e restrições de liquidez.

As restrições de balanço e de inventário surgem da necessidade de se estabelecer um coerente fluxo financeiro para o fundo. Já as restrições de alocação são frutos de imposições legais e da política de uso do risco adotada pelo gestor e estabelecem limites de alocação por classe de ativos na carteira do fundo. Por último, as restrições de liquidez garantem que os valores financeiros de ativos negociados pelo fundo sejam inferiores a certos limites estabelecidos pela liquidez de seus respectivos mercados.

Seja $I_0 = \{0, 1, \dots, n\}$ o conjunto de índices dos $n + 1$ ativos disponíveis para investimento. O índice $i = 0$ representa o caixa do fundo, ou seja, um ativo de renda fixa e liquidez imediata. Os demais índices, $i = 1, \dots, n$, representam n diferentes ativos de risco como ações, contratos derivativos, investimentos estruturados, imóveis, empréstimos a participantes e assistidos, etc. O subconjunto de I_0 que contém todos os ativos exceto o caixa será denotado por $I = \{1, \dots, n\} \subset I_0$.

A principal função do gestor é definir como alocar os recursos financeiros do fundo entre esses $(n + 1)$ diferentes ativos disponíveis para investimento, de modo que a carteira do fundo tenha uma relação de risco e retorno adequada sob todos os possíveis cenários futuros. Suas variáveis de decisão são, portanto, a compra ou venda de ativos em cada instante de tempo e por meio delas ele, baseado nas informações disponíveis e nas perspectivas econômicas e atuariais futuras, estabelece a alocação da carteira do fundo.

Esse processo se dá de maneira sequencial, sendo que após uma decisão de alocação, com o passar do tempo, são observadas mudanças nas variáveis econômicas e atuarias que influenciam a atividade do fundo de pensão, tornando necessária uma nova decisão de investimento que realoque a carteira do fundo de modo a aproveitar as informações disponíveis. Este processo se repete ao longo do tempo, de modo que a alocação da carteira sempre reflita as informações conhecidas e as perspectivas futuras.

A incerteza sobre as variáveis econômicas e atuariais envolvidas no problema será modelada pela variável aleatória $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_T) \in \Omega$, com $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_T$, definida no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. O processo sequencial de tomada de decisão de investimento pode, então, ser representado esquematicamente como

$$\text{alocação inicial} \longrightarrow \omega_1 \longrightarrow \text{realocação} \longrightarrow \omega_2 \longrightarrow \text{realocação} \dots$$

O valor financeiro alocado no i -ésimo ativo, antes da primeira tomada de decisão de investimento, será denotado por $a_{0,i}$. A primeira decisão de investimento ou decisão inicial é tomada e a alocação neste ativo passa, então, a ser $a_i(\omega_0)$. A variável ω_0 denota o estado atual da economia definido pelo valor das variáveis econômicas e atuarias de interesse. Seguindo o processo de tomada de decisão já descrito, no instante seguinte, o estado da economia passa a ser ω_1 e uma nova alocação $a_i(\omega_1)$ no i -ésimo ativo é feita. Esta sequência de observações da economia e de novas alocações se repete,

$$a_{0,i} \longrightarrow a_i(\omega_0) \longrightarrow \omega_1 \longrightarrow a_i(\omega_1) \longrightarrow \omega_2 \longrightarrow a_i(\omega_2) \dots$$

Com a notação apresentada, o valor financeiro alocado no i -ésimo ativo no instante t é simbolizado por $a_i(\omega_t)$ e seguindo este padrão, a rentabilidade do i -ésimo ativo realizada na transição entre os instantes $t - 1$ e t é denotada por $r_i(\omega_t)$. Essas variáveis são escritas como funções de ω_t , de modo a explicitar sua dependência com as informações disponíveis até t .

Como já foi dito, as variáveis sobre as quais o gestor do fundo pode atuar são a compra e a venda de ativos em cada instante t , que serão denotadas, respectivamente, por $c_i(\omega_t)$ e $v_i(\omega_t)$, para todos os ativos, $i = 0, \dots, n$, e para os instantes $t = 0, \dots, T - 1$. As restrições de balanço e inventário definem como as alocações $a_i(\omega_t)$ se relacionam com $c_i(\omega_t)$ e $v_i(\omega_t)$.

Em $t = T$, instante de tempo correspondente ao término do horizonte de planejamento de investimento, não são tomadas decisões de investimento e ocorre a análise dos resultados da gestão do fundo. Por isso, as compras e vendas de ativos são definidas para os instante de $t = 0$ até $t = T - 1$.

Vale destacar que a decisão de investimento mais importante é aquela correspondente ao instante $t = 0$, que representa o instante atual ou presente. Esta decisão é a única que pode ser imediatamente implementada, uma vez que as demais se referem a instantes futuros. Além disso, no instante seguinte, pode-se reformular o problema e resolvê-lo novamente, adotando o instante seguinte como instante presente ($t = 0$), adicionando as novas

informações sobre o estado atual da economia e atualizando as perspectivas sobre o futuro. Por isso, o foco deste trabalho estará nas decisões, $c_1(\omega_0), \dots, c_n(\omega_0), v_1(\omega_0), \dots, v_n(\omega_0)$, e alocações, $a_1(\omega_0), \dots, a_n(\omega_0)$, de primeiro estágio, sendo que as decisões dos demais estágios serão úteis apenas para a análise do resultado das decisões iniciais e da política de investimento ao término do horizonte de planejamento em $t = T$.

Na modelagem que será apresentada, a incerteza sobre o futuro recairá apenas sobre os retornos dos diferentes ativos e não serão consideradas incertezas sobre as variáveis atuariais. No capítulo 4 será feita uma discussão sobre como modelar cenários futuros para um problema de tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão, abordando tanto a questão dos retornos dos ativos quanto a das variáveis atuariais.

3.1.1 Restrições de balanço

A variação do valor total dos ativos do fundo entre dois instantes consecutivos $t - 1$ e t é dada pela rentabilidade dos ativos no período, descontados os custos das transações (compras e vendas) de ativos em t , somadas as contribuições realizadas pelos participantes e subtraídos os benefícios pagos no período.

Desse modo, pode-se escrever, para cada instante t , uma expressão para o valor total dos ativos do fundo. Essas expressões são, então, incorporadas ao problema de otimização como restrições de igualdade e são chamadas de restrições de balanço.

Como já mencionado, o instante $t = 0$ representa o instante de tempo atual e é neste instante em que a primeira - e mais importante - decisão de investimento é tomada. As demais decisões correspondem a datas futuras, $t = 1, \dots, T - 1$. Como $t = 0$ representa o presente, o estado da economia ω_0 é completamente conhecido e todas as informações econômicas e atuariais estão disponíveis. Além disso, convencionou-se que os valores alocados antes da primeira decisão de investimento $a_{0,i}$, $i = 0, \dots, n$, já incorporam as rentabilidades obtidas até $t = 0$.

Assim, no instante inicial, $t = 0$, o valor total dos ativos é dado pelo valor total dos ativos antes da primeira decisão de investimento, descontados os custos das transações realizadas no instante inicial e o saldo resultante da diferença entre benefícios pagos e contribuições recebidas pelo fundo, $\psi(\omega_0)$, no período. Desse modo,

$$\sum_{i=0}^n a_i(\omega_0) = \sum_{i=0}^n a_{0,i} - \sum_{i=1}^n \{\kappa_i [c_i(\omega_0) + v_i(\omega_0)]\} - \psi(\omega_0), \quad (3.1)$$

onde κ_i denota o custo de transação do i -ésimo ativo.

Vale lembrar que o ativo de índice $i = 0$ representa o caixa do fundo e, por isso, todos os valores recebidos ou pagos implicam em movimentações nos recursos alocados neste ativo e sobre essas transações não incorre nenhum custo transacional.

Para os instantes seguintes, $0 < t < T$, são consideradas, além das alocações no instante anterior, também as rentabilidades dos diferentes ativos no período entre $t - 1$ e t , de modo que

$$\sum_{i=0}^n a_i(\omega_t) = \sum_{i=0}^n \{[1 + r_i(\omega_t)] a_i(\omega_{t-1})\} - \sum_{i=1}^n \{\kappa_i [c_i(\omega_t) + v_i(\omega_t)]\} - \psi(\omega_t), \quad (3.2)$$

onde $r_i(\omega_t)$ representa a rentabilidade do i -ésimo ativo e $\psi(\omega_t)$ representa o saldo resultante da diferença entre benefícios pagos e contribuições recebidas pelo fundo entre os instantes $t - 1$ e t .

No último estágio, $t = T$, não são consideradas tomadas de decisões de investimento (compra e venda de ativos) e ocorre a análise da saúde financeira do fundo. A restrição de balanço no último estágio, $t = T$, é escrita como

$$\sum_{i=0}^n a_i(\omega_T) = \sum_{i=0}^n \{[1 + r_i(\omega_T)] a_i(\omega_{T-1})\} - \psi(\omega_T) \quad (3.3)$$

e dela pode-se obter

$$V(\omega_T) = \sum_{i=0}^n a_i(\omega_T),$$

onde $V(\omega_T)$ representa o valor total dos ativos do fundo ao término do horizonte de planejamento.

3.1.2 Restrições de inventário

A alocação de cada um dos ativos com exceção do caixa, em um dado instante t , é dada pela alocação no instante anterior $t - 1$ rentabilizada, somada às compras e descontadas as vendas desse ativo em t . Há, então, para cada instante t uma expressão para o valor alocado em cada um dos ativos de risco. Essas expressões são incorporadas ao problema de otimização como restrições de igualdade chamadas de restrições de inventário.

No instante inicial, $t = 0$, de maneira análoga ao realizado para as restrições de balanço, não são levadas em conta as rentabilidades dos ativos. Desse modo, a alocação do i -ésimo ativo, no instante inicial, é dada pela soma da alocação anterior à primeira

tomada de decisão $a_{0,i}$ com o saldo dos valores comprados e vendidos desse ativo, ou seja,

$$a_i(\omega_0) = a_{0,i} + c_i(\omega_0) - v_i(\omega_0). \quad (3.4)$$

Já nos instantes seguintes, tais que $0 < t < T$, são consideradas também as rentabilidades dos ativos, de modo que o valor alocado no i -ésimo ativo pode ser escrito como

$$a_i(\omega_t) = [1 + r_i(\omega_t)] \cdot a_i(\omega_{t-1}) + c_i(\omega_t) - v_i(\omega_t). \quad (3.5)$$

No último estágio, $t = T$, não ocorre compra nem venda de ativos e, por isso, considera-se apenas a rentabilidade obtida entre os instantes $T - 1$ e T , ou seja,

$$a_i(\omega_T) = [1 + r_i(\omega_T)] \cdot a_i(\omega_{T-1}). \quad (3.6)$$

Nota-se facilmente que, tendo em vista as restrições de inventário, as restrições de balanço podem ser escritas numa forma mais simples.

De (3.1) e (3.4) a restrição de balanço para $t = 0$ pode ser reescrita como

$$a_0(\omega_0) = a_{0,0} - \sum_{i=1}^n \{c_i(\omega_0) [1 + \kappa_i] + v_i(\omega_0) [-1 + \kappa_i]\} - \psi(\omega_0), \quad (3.7)$$

de (3.2) e (3.5) a restrição de balanço para $0 < t < T$ torna-se

$$a_0(\omega_t) = [1 + r_0(\omega_t)] a_0(\omega_{t-1}) - \sum_{i=1}^n \{c_i(\omega_t) [1 + \kappa_i] + v_i(\omega_t) [-1 + \kappa_i]\} - \psi(\omega_t), \quad (3.8)$$

e de (3.3) e (3.6) é obtida a restrição de balanço para $t = T$,

$$a_0(\omega_T) = [1 + r_0(\omega_T)] a_0(\omega_{T-1}) - \psi(\omega_T). \quad (3.9)$$

Estas formas alternativas de se escrever as restrições de balanço, (3.7), (3.8) e (3.9), são interessantes, pois, além de serem mais simples, evidenciam o valor alocado no caixa do fundo em cada instante.

3.1.3 Restrições de alocação

Por imposições legais¹, a alocação em algumas classes de ativos não deve ultrapassar certos limites na carteira de um fundo de pensão. Entre os títulos de renda fixa, por exemplo, a legislação vigente limita os investimentos em certificados e recibos de depósito bancário a 80% do valor total da carteira. Já no caso de ativos de renda variável, um exemplo é o investimento em ações de companhias abertas negociadas nos moldes do Novo Mercado da Bovespa, que é limitado a 50% do valor total da carteira.

Além das limitações por imposições legais, o próprio gestor do fundo pode, visando controlar o risco financeiro a que o fundo está exposto, estabelecer limites para a alocação em certas classes de ativos. Surgem, assim, as chamadas restrições de alocação, que podem ser escritas, para o instante t , como

$$a_i(\omega_t) \leq \varphi_i \cdot \sum_{i=0}^n a_i(\omega_t), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (3.10)$$

onde φ_i representa o percentual máximo de alocação do i -ésimo ativo na carteira do fundo.

A formulação para as restrições de alocação apresentada em (3.10) é válida desde que todos os ativos sejam de natureza diferente. Caso alguns dos ativos pertençam a uma mesma classe de ativos, o valor total alocado nesta classe deve respeitar os limites expressos no parâmetro φ e deve ser escrita uma restrição para cada classe de ativo e não uma para cada ativo.

As restrições de alocação estão na forma de desigualdades. Uma possível abordagem seria escrevê-las na forma de restrições do tipo igualdade fazendo uso, para isso, de variáveis de folga. Esta abordagem não será adotada neste trabalho, de modo a limitar o número de variáveis envolvidas.

3.1.4 Restrições de liquidez

O último tipo de restrição a que está submetida a gestão do fundo é a chamada restrição de liquidez, impondo que a compra $c_i(\omega_t)$ e venda $v_i(\omega_t)$ do i -ésimo ativo no instante t não superem certos volumes financeiros impostos pela liquidez do mercado em

¹No Brasil vigora a resolução CMN nº3.456, de 1º de junho de 2007 que dispõe sobre as diretrizes de aplicação dos recursos garantidores dos planos de benefícios administrados pelas entidades fechadas de previdência complementar.

que este ativo é negociado. Essas restrições podem ser escritas, para o instante t , como

$$c_i(\omega_t) \leq \gamma_i(\omega_t), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (3.11)$$

e

$$v_i(\omega_t) \leq \beta_i(\omega_t), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (3.12)$$

onde $\gamma_i(\omega_t)$ representa o volume financeiro máximo para a compra e $\beta_i(\omega_t)$ o volume financeiro máximo para a venda do i -ésimo ativo no instante t .

3.2 Função objetivo

A tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão tem como premissa garantir que, ao final do horizonte de planejamento, $t = T$, o fundo tenha recursos disponíveis para honrar suas obrigações expressas na reserva matemática $\Psi(\omega_T)$. Assim, a saúde financeira do fundo, em $t = T$, pode ser avaliada comparando-se o total dos ativos disponíveis $V(\omega_T)$ com a reserva matemática $\Psi(\omega_T)$ por meio do chamado resultado técnico do fundo $RT(\omega_T)$ dado por

$$RT(\omega_T) = V(\omega_T) - \Psi(\omega_T) = \sum_{i=0}^n a_i(\omega_T) - \Psi(\omega_T).$$

Nesse sentido, o objetivo da gestão do fundo deve ser maximizar o valor esperado de $RT(\omega_T)$, tomado sobre todos os possíveis cenários e considerando-se um dado nível de risco a que o fundo esteja disposto a incorrer, de modo que a probabilidade de ocorrência de $RT(\omega_T) < 0$, chamada probabilidade de insolvência, seja minimizada.

Além disso, o problema da tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão deve ser escrito em termos de uma função objetivo (utilidade) côncava, de modo a refletir a aversão ao risco típica dessa classe de fundos.

Seguindo a abordagem proposta por Valladão (2008), pode-se adotar uma função objetivo linear por partes, que pode ser expressa como

$$z(\omega) = \begin{cases} f_{(+)} \cdot RT(\omega_T), & \text{se } RT(\omega_T) \geq 0 \\ -f_{(-)} \cdot RT(\omega_T), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $f_{(+)}$ e $f_{(-)}$ representam, respectivamente, uma bonificação no caso de total de ativos maior que o requisito de capital e uma penalização no caso contrário.

A razão entre os parâmetros $f_{(-)}$ e $f_{(+)}$ pode ser entendida como uma medida de aversão ao risco. Quanto maior o valor dessa razão, mais conservadora será a gestão adotada para o fundo e quanto menor o valor dessa razão, mais arrojada será a gestão.

Uma outra maneira de interpretar os parâmetros $f_{(-)}$ e $f_{(+)}$ é pensá-los, respectivamente, como constantes proporcionais ao custo de captação e ao retorno de uma aplicação financeira em $t = T$. Caso o fundo, ao final do horizonte de planejamento, não tenha patrimônio suficiente para honrar suas obrigações, terá que captar recursos a um custo proporcional a $f_{(-)} \cdot RT(\omega_T)$ e no caso em que tiver recursos em excesso, poderá aplicá-los tendo um ganho financeiro proporcional a $f_{(+)} \cdot RT(\omega_T)$.

Visando escrever a função objetivo $z(\omega)$ como uma função linear, convém definir variáveis auxiliares $u(\omega_T)$ e $w(\omega_T)$, tais que

$$u(\omega_T) = \begin{cases} RT(\omega_T), & \text{se } RT(\omega_T) \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$w(\omega_T) = \begin{cases} -RT(\omega_T), & \text{se } RT(\omega_T) < 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e, portanto,

$$RT(\omega_T) = u(\omega_T) - w(\omega_T)$$

e

$$\sum_{i=0}^n a_i(\omega_T) - \Psi(\omega_T) = u(\omega_T) - w(\omega_T). \quad (3.13)$$

Como em $t = T$ ocorre apenas a verificação da saúde financeira do fundo, as restrições de alocação e liquidez não são aplicadas e a equação (3.13) pode ser utilizada no lugar das restrições de balanço e inventário. Além disso, fazendo uso das variáveis auxiliares apresentadas, a função objetivo $z(\omega)$ pode ser escrita como uma função linear dada por

$$z(\omega) = \{f_{(+)} \cdot u(\omega_T) - f_{(-)} \cdot w(\omega_T)\}. \quad (3.14)$$

A função objetivo $z(\omega)$ definida em (3.14) tem como méritos ser extremamente simples e incorporar em sua formulação o fato mais importante em relação a um fundo de pensão que é sua solvência.

Vale lembrar que a modelagem apresentada considera que o objetivo da gestão é alocar a carteira do fundo de modo a maximizar o valor esperado de $z(\omega)$ sobre todos os possíveis cenários e que o gestor tem poder de decisão sobre a composição da carteira do fundo, mas não tem controle do planejamento atuarial, que define o fluxo de caixa do passivo e a reserva matemática do fundo.

Numa modelagem alternativa, o problema de otimização poderia incorporar também objetivos referentes ao passivo do fundo. A abordagem proposta por Drijver (2005), por exemplo, considera na função objetivo do problema termos referentes ao valor total das contribuições, taxa de variação das contribuições e contribuições extraordinárias.

Conforme Kouwenberg; Zenios (2006), a criação de uma função objetivo para investidores como fundos de pensão não é uma tarefa trivial. Neste sentido, considerar negociações de curto prazo que sejam coerentes com os objetivos de longo prazo do fundo e as incertezas inerentes a longos períodos de tempo são as maiores dificuldades. Além disso, é importante conciliar a escolha de uma função objetivo com as teorias aceitas sobre as preferências dos investidores e funções utilidade.

3.3 Problema de ALM para um fundo de pensão

3.3.1 Definição do problema

As diversas restrições aplicadas à gestão de um fundo de pensão - restrições de balanço, inventário, alocação e liquidez - podem ser escritas de maneira compacta por meio de sua representação matricial.

Seja o vetor coluna $x_t(\omega_t)$, tal que, para $t = 0, \dots, T - 1$,

$$x_t(\omega_t) = \begin{bmatrix} a(\omega_t) \\ c(\omega_t) \\ v(\omega_t) \end{bmatrix},$$

e para $t = T$,

$$x_T(\omega_T) = \begin{bmatrix} u(\omega_T) \\ w(\omega_T) \end{bmatrix},$$

onde

$$a(\omega_t) = \begin{bmatrix} a_0(\omega_t) \\ \vdots \\ a_n(\omega_t) \end{bmatrix}, \quad c(\omega_t) = \begin{bmatrix} c_1(\omega_t) \\ \vdots \\ c_n(\omega_t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v(\omega_t) = \begin{bmatrix} v_1(\omega_t) \\ \vdots \\ v_n(\omega_t) \end{bmatrix}.$$

Seja ainda o vetor coluna f dos coeficientes da função objetivo, dado por

$$f = \begin{bmatrix} f_{(+)} \\ -f_{(-)} \end{bmatrix}$$

e que

$$f' = \begin{bmatrix} f_{(+)} & -f_{(-)} \end{bmatrix}$$

denote o transposto de f .

Como as restrições do problema de otimização são todas lineares e dependentes, no máximo, das variáveis referentes ao instante anterior, podem ser escritas como

$$W_0 \cdot x_0(\omega_0) = h_0, \quad (3.15)$$

$$T(\omega_t) \cdot x_{t-1}(\omega_{t-1}) + W(\omega_t) \cdot x_t(\omega_t) = h(\omega_t), \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.16)$$

$$W_d(\omega_t) \cdot x_t(\omega_t) \leq h_d(\omega_t), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (3.17)$$

e as restrições de sinal como

$$x_0(\omega_0) \geq 0, \quad x_1(\omega_1) \geq 0, \quad \dots, \quad x_T(\omega_T) \geq 0, \quad (3.18)$$

onde W_0 e h_0 são definidos de modo que (3.15) seja equivalente a um sistema de equações composto por (3.4) e (3.7), $T(\omega_t)$, $W(\omega_t)$ e $h(\omega_t)$ são definidos de modo que (3.16) seja equivalente, para $t = 1, \dots, T-1$, a (3.5) e (3.8) e para $t = T$ seja equivalente a (3.13) e $W_d(\omega_t)$ e $h_d(\omega_t)$ são definidos de modo que (3.17) seja equivalente a um sistema de inequações formado por (3.10), (3.11) e (3.12), sendo que as desigualdades em (3.17) devem ser entendidas componente a componente. Desse modo, as equações (3.15) e (3.16) denotam as restrições de balanço e inventário e a equação (3.17) representa as restrições de alocação e liquidez. As restrições (3.18) são chamadas restrições de sinal e também devem ser tomadas componente a componente.

De posse da função objetivo (3.14) e das restrições (3.15), (3.16), (3.17) e (3.18), o problema de tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão com plano de benefícios do tipo BD pode ser definido como o problema de maximizar o valor esperado do resultado técnico do fundo, tomado sobre todos os possíveis cenários,

$$\max \mathbb{E} \{f' \cdot x_T(\omega_T)\} \quad (3.19)$$

sujeito a

$$W_0 \cdot x_0(\omega_0) = h_0,$$

$$T(\omega_t) \cdot x_{t-1}(\omega_{t-1}) + W(\omega_t) \cdot x_t(\omega_t) = h(\omega_t), \quad t = 1, \dots, T,$$

$$W_d(\omega_t) \cdot x_t(\omega_t) \leq h_d(\omega_t), \quad t = 0, \dots, T-1,$$

$$x_0(\omega_0) \geq 0, \quad x_1(\omega_1) \geq 0, \quad \dots, \quad x_T(\omega_T) \geq 0.$$

O problema (3.19) é um problema de programação estocástica linear. Na próxima seção será tratado o caso particular em que o conjunto Ω de todos os possíveis cenários é finito e o problema (3.19) será escrito, em sua forma determinística equivalente, como um problema de programação linear.

3.3.2 Abordagem por árvores de cenários

O ambiente em que as decisões de investimento são tomadas num fundo de pensão pode ser definido como um conjunto de variáveis econômicas - como preço dos ativos, taxas de juro, índices da inflação, taxas de câmbio, nível de atividade econômica, etc. - atuariais e demográficas. Esse conjunto de variáveis será chamado estado da economia e, por definição, nele estão contidas todas as informações relevantes para o processo de tomada de decisão num dado instante. Desse modo, a evolução temporal das variáveis de interesse pode ser descrita, de maneira equivalente, pela evolução temporal de estados econômicos.

Nesse contexto, um cenário econômico (ou simplesmente cenário) será definido como uma sequência finita de estados econômicos. Adotando-se uma discretização na variável tempo e nos estados, pode-se representar o conjunto de todos os N_t possíveis estados econômicos, de um dado instante t , por $\Omega_t = \{\omega_{t,1}, \dots, \omega_{t,N_t}\}$, onde $\omega_{t,k}$ representa o k -ésimo possível estado de instante t . Com essa notação, o conjunto de todos os possíveis cenários econômicos de horizonte T , isto é, cenários econômicos com início em $t = 0$ e fim

no instante $t = T$, pode ser denotado por $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_T$.

Cenários econômicos podem ser representados esquematicamente num grafo do tipo árvore não recombinate, em que os estados econômicos são os vértices e as probabilidades de ocorrência dos estados são arestas da árvore. Pode-se representar em $t = 0$ o estado econômico atual - estado em que os valores das variáveis de interesse são conhecidos - e nos demais instantes, $0 < t \leq T$, os possíveis futuros estados econômicos - estados em que as variáveis de interesse são variáveis aleatórias.

Figura 3.1: Exemplo de diagrama de árvore de cenários econômicos

A figura 3.1 apresenta um exemplo de representação de cenários econômicos em uma árvore de cenários. No primeiro estágio da árvore, $t = 0$, está representado o estado atual da economia $\omega_{0,1}$, do qual se conhecem todas as variáveis econômicas. A partir desse estágio, todos os outros representam possíveis futuros estados econômicos. No segundo estágio, em $t = 1$, estão representados os dois possíveis futuros estados econômicos, $\omega_{1,1}$ e $\omega_{1,2}$, para os quais o estado atual da economia $\omega_{0,1}$ pode evoluir. Pode-se imaginar, por exemplo, que esses dois estados representem a economia em crescimento positivo e negativo daqui a um ano - no caso de uma discretização do tempo com período de 1 ano. Raciocínio análogo se aplica ao próximo estágio, em $t = 2$, onde estão representados quatro possíveis estados econômicos seguintes aos representados no segundo estágio.

A probabilidade de ocorrência do estado $\omega_{t,k}$, k -ésimo estado de instante t , será denotada por $p_{t,k}$. Assim, por exemplo, as probabilidades de ocorrência dos estados $\omega_{1,1}$ e $\omega_{1,2}$ de $t = 1$ são representadas, respectivamente, por $p_{1,1}$ e $p_{1,2}$.

Estabelecida uma árvore de cenários em que constem todas as variáveis de interesse e probabilidades de ocorrências dos estados, o problema de tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão (3.19) pode ser escrito, em sua forma determinística equivalente, como

$$\max \sum_{k_T=1}^{N_T} \{f' \cdot x_T(\omega_{T,k_T}) \cdot p_{T,k_T}\} \quad (3.20)$$

sujeito a

$$W_0 \cdot x_{0,1}(\omega_{0,1}) = h_0,$$

$$W_d(\omega_{0,1}) \cdot x_{0,1}(\omega_{0,1}) \leq h_d(\omega_{0,1}),$$

$$T(\omega_{1,i_1}) \cdot x_{0,1} + W(\omega_{1,i_1}) \cdot x_{1,i_1} = h(\omega_{1,i_1}), \quad \forall \omega_{1,i_1} \in \Omega_1$$

$$W_d(\omega_{1,i_1}) \cdot x_{1,i_1}(\omega_{1,i_1}) \leq h_d(\omega_{1,i_1}), \quad \forall \omega_{1,i_1} \in \Omega_1$$

$$\vdots$$

$$T(\omega_{T-1,i_{T-1}}) \cdot x_{a(T-1,i_{T-1})} + W(\omega_{T-1,i_{T-1}}) \cdot x_{T-1,i_{T-1}} = h(\omega_{T-1,i_{T-1}}), \quad \forall \omega_{T-1,i_{T-1}} \in \Omega_{T-1}$$

$$W_d(\omega_{T-1,i_{T-1}}) \cdot x_{T-1,i_{T-1}}(\omega_{T-1,i_{T-1}}) \leq h_d(\omega_{T-1,i_{T-1}}), \quad \forall \omega_{T-1,i_{T-1}} \in \Omega_{T-1}$$

$$T(\omega_{T,i_T}) \cdot x_{a(T,i_T)} + W(\omega_{T,i_T}) \cdot x_{T,i_T} = h(\omega_{T,i_T}), \quad \forall \omega_{T,i_T} \in \Omega_T$$

e sujeito às restrições de sinal

$$x_{0,1} \geq 0$$

$$x_{1,i_1} \geq 0, \quad i_1 = 1, \dots, N_1$$

$$\vdots$$

$$x_{T,i_T} \geq 0, \quad i_T = 1, \dots, N_T,$$

onde $x_{a(t,i_t)}$ denota a decisão realizada no cenário antecessor ao cenário ω_{t,i_t} .

No problema (3.20) as restrições de implementabilidade ou não-antecipação estão implícitas. Tais restrições impõem que cenários com mesma sequência de estados do instante inicial até t devem estar associados a um mesmo conjunto de informações. Por exemplo, no caso da árvore representada na figura 3.1, para que a restrição de implementabilidade esteja satisfeita, as decisões de primeiro e segundo estágio para os cenários $(\omega_{0,1}, \omega_{1,1}, \omega_{2,1})$ e $(\omega_{0,1}, \omega_{1,1}, \omega_{2,2})$ devem ser as mesmas.

Como o número de cenários, em geral, cresce exponencialmente com o número de estágios da árvore que representa o problema, as quantidades de variáveis e restrições de (3.20) podem se tornar extremamente grandes, mesmo no caso em que se considera um número pequeno de ativos. Neste sentido, como destacam Kouwenberg; Zenios (2006), torna-se extremamente relevante o uso de técnicas como decomposição, agregação, amostragem e paralelização para a resolução deste tipo de problema.

4 Metodologia para a alocação da carteira de um fundo de pensão

Neste capítulo é apresentado um procedimento para a construção de árvores de cenários para a modelagem dos possíveis futuros valores das variáveis envolvidas no problema de tomada de decisão de investimento (3.20). Além disso, é proposta uma metodologia para a definição da alocação da carteira do fundo no instante atual com base nas soluções ótimas deste problema para diferentes árvores de cenários.

4.1 Definição da árvore de cenários

A construção da árvore de cenários é uma importante etapa para a aplicação bem sucedida de um modelo de programação estocástica. Deve-se estabelecer o número de estágios, as durações de cada estágio e a estrutura da árvore, isto é, a forma como a árvore se ramifica.

Na modelagem proposta neste trabalho, cada nó de uma árvore de cenários representa um estado econômico, ou seja, uma possível realização do conjunto de variáveis econômicas e atuariais de interesse. Como apresentado no problema (3.20), as variáveis envolvidas são os retornos dos ativos e o saldo resultante da diferença entre benefícios pagos e contribuições recebidas pelo fundo no período.

Desse modo, para que possa ser definida uma árvore para o problema de programação estocástica estabelecido para a tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão deve-se dispor de um modelo para o retorno dos ativos e de um modelo que descreva a dinâmica do passivo do fundo. A partir destes modelos pode-se elencar um conjunto limitado de cenários que serão considerados e associá-los aos ramos da árvore. Além disso, deve ser especificada a probabilidade de ocorrência de cada um dos cenários representados na árvore.

Os modelos para o ativo e passivo do fundo serão definidos nos itens 4.1.1 e 4.1.2, respectivamente, e no item 4.1.3 será apresentada a forma como serão estruturadas as árvores de cenários utilizadas nas simulações deste trabalho.

Høyland; Wallace (2001) propõem uma metodologia para a construção de árvores de cenários baseada na solução de um problema de programação não-linear. A ideia básica por eles adotada foi a de minimizar alguma medida de distância entre as propriedades estatísticas dos cenários da árvore e aquelas desejadas. Klaassen (2002) completa a abordagem proposta por Høyland; Wallace (2001) considerando a restrição de que a árvore de cenário gerada não pode permitir oportunidades de arbitragem, fato essencial quando são considerados derivativos.

Kouwenberg (2001) apresenta um modelo VAR (*Vector Autoregressive*) para os retornos das variáveis econômicas e atuárias. De posse deste modelo, ele propõe um método para a construção de árvores de cenários baseado na geração de realizações dos retornos das variáveis a partir da amostragem do termo aleatório do modelo VAR. Cada amostragem do termo aleatório dá origem a duas realizações dos retornos das variáveis, sendo uma calculada com a realização do termo aleatório e a outra com o valor oposto da realização. A estrutura da árvore por ele proposta tem um esquema de ramificação em que cada nó origina um número par de nós no estágio seguinte, de modo que os pares de realizações dos retornos gerados aleatoriamente possam ser acomodados na árvore.

As variáveis geradas pelo procedimento proposto por Kouwenberg (2001) são chamadas de variáveis antitéticas e permitem o ajuste dos momentos centrais ímpares da distribuição expressa na árvore com o modelo econométrico dos retornos. Por último ele realiza um ajuste nos retornos da árvore, de modo a compatibilizar a variância com a distribuição original.

O conjunto dos cenários representados na árvore não pode ser demasiadamente grande, caso contrário o problema de programação estocástica se torna computacionalmente impraticável, mas deve ser suficiente para retratar de maneira razoável o futuro.

Vale ressaltar a direta relação entre a solução do problema de programação estocástica e a árvore de cenários adotada. A solução só será de relevância prática no caso em que a árvore que representa os possíveis cenários futuros seja uma boa aproximação da realidade, demandando, daquele que cria o modelo da árvore de cenários, profundo conhecimento sobre o problema em estudo e a capacidade de avaliar cenários futuros.

4.1.1 Modelagem dos retornos dos ativos

Seja $R(\omega_t)$ o vetor de rentabilidades dos $n + 1$ ativos, tal que

$$R(\omega_t) = \begin{bmatrix} r_0(\omega_t) \\ r_1(\omega_t) \\ \vdots \\ r_n(\omega_t) \end{bmatrix},$$

onde $r_i(\omega_t)$ denota a rentabilidade do i -ésimo ativo obtida na transição entre os instantes $t - 1$ e t .

A dinâmica adotada para as rentabilidades dos ativos será dada por

$$R(\omega_t) = \mu + Q^{\frac{1}{2}}W,$$

onde

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \sigma_{0,0} & \dots & \sigma_{0,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,0} & \dots & \sigma_{n,n} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad W \sim N(0, I_{n+1}).$$

O vetor μ é o vetor de retornos médios, em que μ_i denota o retorno médio do i -ésimo ativo, Q é a matriz de covariância dos retornos e W é um vetor aleatório com distribuição normal, média nula e matriz de variância-covariância dada pela matriz identidade de dimensão $(n + 1) \times (n + 1)$.

4.1.2 Modelagem do passivo do fundo

O saldo $\psi(\omega_t)$ resultante da diferença entre os benefícios pagos aos participantes inativos e as contribuições pagas pelos participantes ativos entre os instantes $t - 1$ e t pode ser escrito como

$$\psi(\omega_t) = [1 + \rho(\omega_t)] \cdot \psi(\omega_{t-1}), \quad (4.1)$$

onde $\rho(\omega_t)$ representa uma taxa de variação entre os pagamentos $\psi(\omega_{t-1})$ e $\psi(\omega_t)$.

Para um instante qualquer $\tau > 0$, fazendo uso da expressão (4.1), pode-se escrever

$$\psi(\omega_\tau) = \prod_{t=0}^{\tau-1} [1 + \rho(\omega_{t+1})] \cdot \psi(\omega_0). \quad (4.2)$$

Seja $r(\omega_t)$ o retorno dos investimentos do fundo entre $t - 1$ e t , de modo que

$$V(\omega_t) = [1 + r(\omega_t)] \cdot V(\omega_{t-1}) - \psi(\omega_t), \quad (4.3)$$

onde $V(\omega_t)$ denota o valor total de ativos na carteira do fundo no instante t .

Seja ainda $t = T_f$ a data em que todos os compromissos do fundo tenham sido cumpridos e ele possa ser extinto. De (4.3), pode-se escrever, de $t = 0$ a $t = T_f$,

$$V(\omega_{T_f}) = \prod_{t=0}^{T_f-1} [1 + r(\omega_{t+1})] \cdot V(\omega_0) - \sum_{m=1}^{T_f} \left[\prod_{s=m}^{T_f-1} [1 + r(\omega_{s+1})] \right] \cdot \psi(\omega_m).$$

Como todas as obrigações financeiras terão sido honradas até T_f , pode-se tomar $V(\omega_{T_f}) = 0$ e fazendo $V(\omega_0) = \Psi(\omega_0)$ tem-se que

$$\Psi(\omega_0) = \frac{\sum_{m=1}^{T_f} \left[\prod_{s=m}^{T_f-1} [1 + r(\omega_{s+1})] \right] \cdot \psi(\omega_m)}{\prod_{t=0}^{T_f-1} [1 + r(\omega_{t+1})]}$$

e

$$\Psi(\omega_0) = \sum_{m=1}^{T_f} \frac{\psi(\omega_m)}{\prod_{t=0}^{m-1} [1 + r(\omega_{t+1})]}, \quad (4.4)$$

onde $\Psi(\omega_0)$ denota a reserva matemática do fundo em $t = 0$.

De (4.2) e (4.4), a reserva matemática $\Psi(\omega_0)$ pode ser escrita como

$$\Psi(\omega_0) = \sum_{m=1}^{T_f} \frac{\prod_{i=0}^{m-1} [1 + \rho(\omega_{i+1})]}{\prod_{t=0}^{m-1} [1 + r(\omega_{t+1})]} \cdot \psi(\omega_0). \quad (4.5)$$

Adotando as hipóteses simplificadoras de que os parâmetros $\rho(\omega_t)$ e $r(\omega_t)$ são valores constantes no tempo, ou seja, $\rho(\omega_t) = \rho$ e $r(\omega_t) = r$, para todo t , a expressão da reserva matemática $\Psi(\omega_0)$ pode ser escrito como

$$\Psi(\omega_0) = \sum_{m=1}^{T_f} \left[\frac{1 + \rho}{1 + r} \right]^m \cdot \psi(\omega_0). \quad (4.6)$$

e definindo $\lambda = \left[\frac{1 + \rho}{1 + r} \right]$, a equação (4.6) pode ser reescrita como

$$\Psi(\omega_0) = \sum_{m=1}^{T_f} \lambda^m \cdot \psi(\omega_0). \quad (4.7)$$

Como a reserva matemática $\Psi(\omega_0)$ é obtida a partir do desconto de um fluxo de caixa, é natural supor que tenha valor finito, ou seja, $0 \leq |\lambda| < 1$ e como o fundo, a rigor, pode permanecer em funcionamento por um período muito grande pode-se no limite tomar $T_f \rightarrow \infty$, de modo que

$$\Psi(\omega_0) = \frac{\lambda}{1 - \lambda} \cdot \psi(\omega_0). \quad (4.8)$$

A equação (4.8) permite que, conhecidos o saldo $\psi(\omega_0)$ dos pagamentos de benefícios e contribuições recebidas e o valor da reserva matemática $\Psi(\omega_0)$ calculada com referência ao mesmo período, o valor da taxa de variação ρ dos valores que compõem o fluxo de caixa do fundo seja estimado para um dado valor do retorno r dos ativos e o saldo entre pagamentos de benefícios e contribuições recebidas seja dado por

$$\psi(\omega_t) = \left[(1 + r) \cdot \frac{\Psi(\omega_0)}{\psi(\omega_0) + \Psi(\omega_0)} \right]^t \cdot \psi(\omega_0). \quad (4.9)$$

4.1.3 Construção da árvore de cenários

Seguindo uma proposta semelhante a de Kouwenberg (2001), serão adotadas árvores de cenários construídas através da amostragem do processo que modela os retornos dos ativos e fazendo uso de variáveis antitéticas. A estrutura das árvores será tal que a partir de cada nó, em um dado instante t , desce sempre dois nós com igual probabilidade de ocorrência em $t + 1$.

As rentabilidades dos ativos entre um nó qualquer $\omega_{t,j}$ e seus dois descendentes ω_{t+1,j_1} e ω_{t+1,j_2} serão dadas por

$$R(\omega_{t+1,j_1}) = \mu + Q^{\frac{1}{2}} \cdot W$$

e

$$R(\omega_{t+1,j_2}) = \mu - Q^{\frac{1}{2}} \cdot W,$$

de modo que a média e a matriz de covariância dos retornos expressos na árvore de cenários são idênticos aos especificados nos parâmetros μ e Q , respectivamente,

$$\mathbb{E}\{R(\omega_{t+1})\} = \mu$$

e

$$Var\{R(\omega_{t+1})\} = Q.$$

Já a modelagem do passivo seguirá o resultado obtido na equação (4.9), sendo que todos os nós de mesmo estágio, $\omega_{t,i_t} \in \Omega_t$, terão o mesmo valor para o saldo resultante da diferença entre benefícios pagos e contribuições recebidas pelo fundo no período,

$$\psi(\omega_{t,i_t}) = \left[(1+r) \cdot \frac{\Psi(\omega_0)}{\psi(\omega_0) + \Psi(\omega_0)} \right]^t \cdot \psi(\omega_{0,1}), \quad \forall \omega_{t,i_t} \in \Omega_t.$$

4.2 Alocação da carteira do fundo

4.2.1 Técnicas de amostragem

De posse de uma árvore de cenários definida segundo a proposta apresentada em 4.1, o problema da tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão escrito como um problema de programação estocástica, definido em (3.19), pode ser escrito em sua forma determinística equivalente (3.20) e resolvido. A solução obtida é função da árvore de cenários utilizada, que por sua vez é definida a partir da geração aleatória de cenários. Para cada particular árvore, o problema (3.19) apresentará uma solução ótima diferente.

Como já foi citado neste trabalho, caso a árvore de cenários seja complexa, envolvendo um conjunto grande de cenários, as técnicas computacionais envolvidas na solução do problema (3.19) se tornam relevantes. Linderoth; Shapiro; Wright (2006) destacam as técnicas que podem ser utilizadas e as divide em técnicas de amostragem interior e amostragem exterior. Ao invés de considerar todos os possíveis cenários do problema (3.19), estas técnicas fazem a amostragem de um conjunto limitado de cenários e estimam, a partir do processo de amostragem utilizado, a solução do problema. O maior cuidado no uso deste tipo de técnica diz respeito à condição de implementabilidade, que deve ser satisfeita para que a solução obtida faça sentido no contexto da aplicação prática do problema.

As técnicas de amostragem interior se diferenciam das de amostragem exterior pelo fato de que as amostras são tomadas durante a execução do algoritmo. Entre as técnicas de amostragem interior são citadas as técnicas *L-shaped with embedded sampling* de Dantzig; Infanger (1991) - baseada no método de decomposição de Benders - decomposição estocástica de Hagle; Sen (1991) e métodos estocásticos do tipo quasi-gradiente (Ermoliev (1988)).

Já as técnicas de amostragem exterior têm como ideia básica amostrar um conjunto de cenários e gerar uma aproximação para a função objetivo do problema. De posse do conjunto amostrado de cenários e da nova função objetivo, o problema é resolvido através de um algoritmo de otimização determinístico. Esta técnica é conhecida como *sample-path optimization* (Gürkan; Özge; Robinson (1994)) ou *the stochastic counterpart method* (Rubinstein; Shapiro (1990)).

O método de amostragem exterior proposto por Linderorth; Shapiro; Wright (2006) para problemas de programação estocástica linear de dois estágios com recurso se baseia na aproximação da função objetivo pelo valor médio da função objetivo, calculada para um número N de cenários amostrados. A partir dessa função objetivo, o problema de otimização é resolvido com base nos N diferentes cenários amostrados, obtendo-se uma estimativa da solução ótima. Esse procedimento é, então, repetido M vezes e as estimativas da solução ótima são comparadas. Caso essas estimativas coincidam, a estimativa da solução ótima é aceita, caso não coincidam, o processo é refeito com um número N maior de cenários. Linderorth; Shapiro; Wright (2006) também discutem intervalos de confiança para o valor ótimo da função objetivo e fazem uma interessante discussão conceitual sobre o tamanho N da amostra de cenários.

4.2.2 Metodologia proposta

Como a metodologia proposta no presente trabalho dá origem a árvores de cenários de dimensões modestas e que, portanto, consideram um número de cenários relativamente pequeno, o problema determinístico equivalente (3.20) formulado a partir do problema de programação estocástica (3.19) pode ser resolvido com um esforço computacional reduzido e sem a necessidade de técnicas computacionais específicas.

Nas simulações deste trabalho, o algoritmo utilizado para a solução de (3.20) foi um algoritmo determinístico baseado em pontos interiores (Zhang (1995)), disponível na função `linprog` do software Matlab.

Como já mencionado, para cada particular árvore de cenários considerada, o problema (3.19) apresentará uma solução ótima diferente. Nesse contexto, pode-se propor uma heurística para a determinação da alocação do fundo no instante inicial $a(\omega_{0,1})$, ou seja, para a determinação dos valores de $a_i(\omega_{0,1})$ de cada um dos $n + 1$ ativos disponíveis para investimento, dada pelo procedimento:

- *Passo 1:* O problema (3.19) é resolvido para M diferentes árvores de cenários, ou seja, para M diferentes árvores geradas aleatoriamente de acordo com o proposto na seção 4.1. Desse modo são obtidas M soluções ótimas das quais pode-se extrair a alocação ótima para o instante inicial, que serão denotadas $a^*(c_j, \omega_{0,1})$, com $j = 1, \dots, M$;
- *Passo 2:* Alocação para o instante inicial será dada pela média aritmética das alocações ótimas obtidas para as M diferentes árvores, ou seja, a alocação de cada um dos ativos $(n + 1)$ ativos será dada por

$$a_i^{sub}(\omega_{0,1}) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N a_i^*(c_j, \omega_{0,1}), \quad i = 0, \dots, n. \quad (4.10)$$

Tem-se de (4.10) uma estratégia para a determinação da alocação da carteira do fundo no instante inicial que, apesar de não ser ótima - na medida em que não é necessariamente igual à alocação ótima de nenhuma das M árvores de cenários propostas - é, por construção, uma carteira que contempla maior diversidade de realizações dos cenários futuros. No caso apresentado são contempladas M diferentes realizações das árvores de cenários econômicos.

Passado um período de tempo, o gestor realizará a apuração dos resultados financeiros do fundo e atualizará o calculo do passivo atuarial. Terá, também, que decidir novamente como alocar os recursos do fundo e, para isso, poderá repetir o processo acima descrito obtendo a nova alocação para a carteira do fundo.

O procedimento proposto pode ser encarado como uma alternativa à solução do problema (3.19) com árvore de cenários complexa e, sob esta óptica, ser encarado como um método de amostragem exterior.

Nesta visão, o procedimento proposto guarda certa semelhança com a abordagem por aproximações via média amostral proposta por Linderorth; Shapiro; Wright (2006). Naquele trabalho são utilizados conjuntos de cenários de tamanho N , cujo valor é determinado de modo iterativo até que se encontre uma aproximação para a solução ótima que seja a mesma para M diferentes amostras. Já no método proposto neste trabalho, o tamanho N , que está relacionado com a estrutura da árvore de cenários amostrada, é fixo e o parâmetro M está associado com o número de amostras utilizadas no cálculo da estimativa da solução ótima. Além disso, o trabalho de Linderorth; Shapiro; Wright (2006) considera fundamentalmente o problema com dois estágios enquanto a proposta apresentada neste trabalho trata o caso multiestágio.

5 Simulações

Com o objetivo de aplicar a metodologia proposta no capítulo 4 ao mercado brasileiro, foram considerados dados obtidos a partir de demonstrativos contábeis - Demonstração Patrimonial e da Demonstração de Resultados - divulgados ao fim do exercício de 2009 por um grande fundo de pensão em atividade no Brasil.

O fundo considerado contava basicamente com participantes inativos - aposentados e pensionistas - não permite mais inscrições de participantes e concede um plano de benefícios do tipo benefício definido (BD).

Foi adotada uma discretização na variável tempo de modo que cada estágio da árvore de cenários correspondia ao período de um ano e o horizonte de planejamento foi tomado como $T = 5$, ou seja, foram consideradas as tomadas de decisão de investimento no instante atual e para os próximos quatro anos e ao término do horizonte de investimento, no quinto ano, foi apurada a saúde financeira do fundo.

Como a frequência de transações foi tomada com periodicidade anual, não foram consideradas restrições de liquidez.

Por simplicidade, para limitar o número de variáveis e restrições do problema, nas simulações foram considerados apenas dois ativos disponíveis para investimento, um representando o caixa do fundo ($i = 0$) e o outro um ativo de risco ($i = 1$). Os parâmetros para a modelagem destes ativos foram estimados tendo como base as séries temporais diárias de retornos anualizados do Certificado de Depósito Interfinanceiro (CDI) e do Índice BOVESPA (IBOV), respectivamente.

O CDI é um instrumento que permite a troca de recursos entre instituições financeiras, possibilitando a captação ou aplicação de capitais excedentes. Em razão do uso deste título, sua taxa é encarada como uma referência de taxa de juros. Já o IBOV representa o valor em reais de uma carteira teórica composta pelas ações mais negociadas na BOVESPA e tem como finalidade servir de indicador do comportamento do mercado acionário brasileiro.

5.1 Parâmetros das simulações

A partir da série histórica da taxa over média diária do Depósito Interfinanceiro (DI) e da série histórica de preço de fechamento do Índice BOVESPA (IBOV) até o final do ano de 2009, foram calculados os retornos anualizados do CDI e do IBOV e foram estimados os retornos médios e a covariância dos retornos como sendo

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,10 \\ 0,15 \end{bmatrix}$$

e

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_{0,0} & \sigma_{0,1} \\ \sigma_{1,0} & \sigma_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,001 & -0,005 \\ -0,005 & 0,206 \end{bmatrix},$$

onde o índice $i = 0$ se refere ao caixa e $i = 1$ ao ativo de risco.

Não foram considerados custos nas transações envolvendo o caixa do fundo e adotou-se um custo de 0,2% sobre as transações com o ativo de risco,

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,002 \end{bmatrix}$$

Além disso, não foi adotado limite de alocação para o caixa, $\varphi_0 = 100\%$, e foi adotado um limite de 50% do total dos ativos para os investimentos no ativo de risco, $\varphi_1 = 50\%$,

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}.$$

O fundo que foi utilizado como fonte para os dados das simulações encontrava-se positivamente desequilibrado, ou seja, o valor total de seus ativos superava o valor do passivo, expresso em termos da reserva matemática, $V(\omega_{0,1}) > \Psi(\omega_{0,1})$. Foi, então, adotado um caso mais conservador em que o ativo do fundo era igual a sua reserva matemática, de modo que os dados utilizados foram, em milhões de reais, $V(\omega_{0,1}) = \Psi(\omega_{0,1}) = 6.000$ e $\psi(\omega_{0,1}) = 226$, de modo que

$$\Psi(\omega_{0,1}) = \frac{\lambda}{1 - \lambda} \cdot \psi(\omega_{0,1}) \implies \lambda = \frac{\Psi(\omega_{0,1})}{\psi(\omega_{0,1}) + \Psi(\omega_{0,1})} \approx 0,96$$

e, adotando-se um retorno médio para os ativos do fundo de $r = \mu_1 = 0,10$,

$$\lambda = \left[\frac{1 + \rho}{1 + r} \right] \implies \rho = (1 + r)\lambda - 1 \approx 0,06$$

Por último, foi considerado que a alocação antes da primeira decisão de investimento seria em renda fixa, ou seja, $a_{0,0} = 6.000$ e $a_{0,1} = 0$,

$$a_0 = \begin{bmatrix} a_{0,0} \\ a_{0,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.000 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.2 Experimentos e resultados

O problema da tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão foi resolvido empregando-se a metodologia apresentada no item 4.2.2 e tendo como base o problema formulado via programação estocástica apresentado em (3.19), com parâmetros $f_{(+)} = 1$ e $f_{(-)} = 2$. Desse modo, a função objetivo utilizada no problema determinístico equivalente (3.20) foi

$$\max \frac{1}{32} \sum_{k=1}^{32} \{u(\omega_{T,k}) - 2w(\omega_{T,k})\},$$

e os demais parâmetros utilizados foram os definidos na seção 5.1.

5.2.1 Determinação da alocação do fundo no instante inicial

Com o objetivo de demonstrar a aplicação da metodologia proposta no capítulo 4, foi desenvolvido um estudo de simulação com geração aleatória de $M = 200$ árvores de cenários. Para cada uma das árvores de cenários, o problema de programação estocástica definido com os parâmetros apresentados acima foi resolvido (*passo 1*) e as alocações para o instante inicial do ativo de renda fixa $a_0^{sub}(\omega_{0,1})$ e de renda variável $a_1^{sub}(\omega_{0,1})$ foram calculadas (*passo 2*). A alocação obtida para a carteira do fundo, em porcentagem do total dos ativos, foi

$$a^{sub}(\omega_{0,1}) = \begin{bmatrix} a_0^{sub}(\omega_{0,1}) \\ a_1^{sub}(\omega_{0,1}) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 67,5\% \\ 32,5\% \end{bmatrix}.$$

Para a realização deste estudo de simulação foi utilizado o software Matlab. Nos apêndices deste trabalho são apresentados os códigos das funções utilizadas, que formam

uma biblioteca de métodos para um problema de ALM, e o código do script que faz a chamada dessas funções com os parâmetros determinados neste capítulo.

As simulações foram executadas de maneira quase imediata, num tempo da ordem de segundos, demonstrando a compatibilidade da estrutura da árvore proposta no capítulo 4 com os recursos computacionais disponíveis.

Além disso, a solução obtida demonstrou realmente contemplar uma maior diversidade de realizações dos cenários futuros. No caso de soluções para árvores particulares foram obtidos resultados distintos, variando entre os dois extremos: 100% da alocação no ativo de renda fixa e 50% de alocação em cada um dos ativos. Estes resultados reforçam a afirmação de que a solução obtida é extremamente dependente da árvore de cenários considerada e que, neste sentido, contemplar uma grande diversidade de árvores possibilita que a solução obtida seja mais adequada frente às incertezas dos retornos futuros dos ativos.

5.2.2 Análise da distribuição do resultado técnico do fundo

Com o objetivo de avaliar a alocação obtida no primeiro estudo de simulação, um novo estudo foi realizado com a geração aleatória de $N = 200$ novas árvores de cenários. Para cada uma das árvores, o problema de otimização estocástica foi resolvido com a adição de novas restrições do tipo igualdade, de modo a garantir que as alocações no instante inicial, correspondentes a $\omega_{0,1}$, fossem as alocações determinadas no primeiro experimento.

Foi, então, avaliada a distribuição do resultado técnico do fundo, permitindo estimar a probabilidade de insolvência e o valor em risco VaR do fundo.

Como todos os cenários em $t = T$ foram tomados como equiprováveis, a probabilidade de insolvência foi calculada pela razão entre a quantidade de cenários em que o fundo apresentou resultado técnico negativo e a quantidade total de cenários do último estágio.

Já o valor em risco VaR foi definido como a perda máxima provável da carteira para um nível de confiança de 95% num horizonte de tempo $T = 5$ anos. Como referência para diferentes abordagens do cálculo do valor em risco de um portfólio recomenda-se a leitura do trabalho de Alexander (2008).

Este segundo experimento foi realizado para duas condições iniciais diferentes. Na primeira o fundo encontrava-se inicialmente equilibrado, isto é, o ativo e o passivo eram inicialmente iguais e na segunda o fundo estava positivamente desequilibrado, sendo que o total de ativos era inicialmente 20% maior que a reserva matemática. Vale mencionar que com esta mudança na condição inicial - alocação antes da primeira tomada de decisão - caso o primeiro estudo de simulação fosse refeito, a alocação inicial obtida seria

diferente da considerada. Apesar disto foi utilizada a mesma alocação calculada no caso equilibrado para que fosse possível a comparação de desempenho de duas carteiras com mesma alocação, mas valores totais de ativos diferentes.

Figura 5.1: Distribuição empírica do resultado técnico do fundo.

As curvas da distribuição empírica do resultado técnico obtidas nos dois casos estão representadas na figura 5.1. Elas foram obtidas seguindo o mesmo procedimento, diferenciando-se apenas em relação à alocações iniciais:

- i. Foram geradas aleatoriamente $N = 200$ árvores de cenários;
- ii. Para cada uma das árvores geradas, o problema de otimização estocástica foi resolvido com a adição de novas restrições do tipo igualdade, de modo a garantir que as alocações no instante inicial, correspondentes a $\omega_{0,1}$, fossem as alocações determinadas no primeiro estudo de simulação;
- iii. A partir da solução ótima do problema para cada uma das árvores de cenários, foi obtido o resultado técnico do fundo, ou seja, a diferença entre o valor total dos ativos e a reserva matemática para cada um dos 32 cenários da árvore;

- iv. Considerando todas as árvores equiprováveis, a partir da amostra de $200 \cdot 32 = 6400$ resultados técnicos, foi plotada na figura 5.1 a distribuição empírica de probabilidade do resultado técnico;
- v. De posse da distribuição empírica de probabilidade do resultado técnico, a probabilidade de insolvência do fundo foi calculada por

$$\text{Probabilidade de insolvência} = \mathbb{P}(V(\omega_T) < 0)$$

e o valor em risco foi calculado por

$$VaR = -\inf\{l \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(RT(\omega_T) > l) \leq 0,05\}.$$

Seguindo o procedimento descrito, foi estimada uma probabilidade de insolvência de cerca de 23% e um valor em risco $VaR \approx 2.535$ milhões de reais no caso em que o fundo estava equilibrado e uma probabilidade de insolvência de cerca de 5% e um valor em risco $VaR \approx 38$ milhões de reais no caso em que o fundo estava no instante inicial positivamente desequilibrado.

Evidencia-se, então, a necessidade da gestão do fundo zelar por mantê-lo ligeiramente desequilibrado positivamente, de modo a reservar um valor financeiro capaz de suprir suas necessidades de capital nos casos de cenários mais pessimistas. Para o caso estudado, por exemplo, uma reserva financeira de 20% sobre o valor da reserva matemática $\Psi(\omega_{0,1})$ foi capaz de reduzir o risco de insolvência a um nível aceitável de cerca de 5%.

Para a realização deste estudo de simulação também foi utilizado o software Matlab. O código do script que faz a chamada das funções para a realização do estudo e o código utilizado no software R para as análises estatísticas do resultado técnico do fundo estão disponíveis nos apêndices deste trabalho.

6 Conclusões

6.1 Conclusões

Este trabalho apresenta uma metodologia para a tomada de decisão de investimento num fundo de pensão com plano de benefícios do tipo benefício definido (BD). Esta metodologia se baseia na formulação de um problema de programação estocástica e na solução desse problema para uma variedade de árvores de cenários.

Na figura 6.1, encontra-se a representação esquemática das etapas da modelagem de um problema de programação estocástica proposta por Silva (2001). Nessa representação, um problema de programação estocástica é formado por três elementos básicos: uma função objetivo, um conjunto de restrições e uma árvore de cenários.

Figura 6.1: Etapas da modelagem estocástica. (Silva, 2001)

No capítulo 3, foram apresentadas e discutidas a função objetivo e o conjunto de restrições utilizadas na formulação do problema de tomada de decisão em um fundo de pensão. Além disso, foi apresentada a formulação do problema em sua forma determinística equivalente, que considera a representação dos possíveis cenários econômicos fu-

turos numa árvore de cenários. A função objetivo adotada fundamenta-se na expectativa de que todos os compromissos do fundo sejam honrados e foi modelada por uma função linear. Já as restrições adotadas - restrições de inventário, balanço, máxima alocação e liquidez - baseiam-se nas restrições gerenciais usualmente consideradas em estudos de fundos de pensão.

A definição de um procedimento para a geração de árvore de cenários foi concretizado na capítulo 4, com a apresentação da modelagem dos ativos e do passivo do fundo, além da forma como a árvore é construída. Foi também descrita uma metodologia para a alocação do fundo no instante inicial que contempla um conjunto de diferentes árvores.

A metodologia proposta para a definição da alocação da carteira foi, então, aplicada a dados de um grande fundo de pensão brasileiro - considerando-se as hipóteses simplificadoras a respeito da dinâmica da evolução do ativo e do passivo do fundo discutidas no capítulo 4 - e demonstrou-se consistente e capaz de dar indicações da saúde financeira do fundo em termos de sua probabilidade de insolvência e de seu valor em risco VaR . No exemplo considerado, observou-se que para uma probabilidade de insolvência da ordem de 5% seria necessário um total de ativos pelo menos 20% acima da reserva matemática do fundo no instante inicial.

A metodologia proposta pode ser facilmente aplicada a modelos alternativos, ainda baseados em programação estocástica, em que o comportamento das rentabilidades dos ativos disponíveis para investimento ou a modelagem do passivo do fundo ou a forma como as árvore de cenários são construídas são diferentes das aqui apresentadas. O uso de ferramentas mais sofisticadas para a modelagem desses itens potencialmente traria resultados mais precisos e indicações mais fidedignas da saúde financeira do fundo.

A abordagem do problema da tomada de decisão de investimento em fundos de pensão via programação estocástica demonstrou-se compatível com os elementos que se desejava modelar: o objetivo da gestão do fundo e suas restrições gerenciais. Além disso, a representação da economia como uma árvore de cenários se encaixou perfeitamente à estrutura de decisões em estágios em que se baseia a programação estocástica.

6.2 Perspectivas futuras

A modelagem via programação estocástica permite que o problema de tomada de decisão incorpore incertezas tanto em relação aos ativos quanto ao passivo do fundo. Apesar disso, neste trabalho foi abordada apenas a modelagem estocástica dos ativos, uma vez que o fluxo de caixa do passivo foi considerado determinístico.

Uma possibilidade de trabalho futuro envolve a utilização de um modelo mais sofisticado para o passivo em que seja representada uma população de participantes com as incertezas a ela associada - crescimento dessa população, idade de aposentadoria, expectativa de vida dos participantes, crescimento salarial, reajuste de benefícios - e sejam consideradas variáveis econômicas relevantes, como taxas de juros e inflação. Modelos mais sofisticados também podem ser utilizados para representar o ativo do fundo e nesse caso indicam-se modelos de séries temporais financeiras, principalmente aqueles que consideram estruturas multivariadas de dados.

O uso de modelos mais complexos para o passivo e ativo do fundo permitem, além de uma maior adequação com os dados reais, que o problema de programação estocástica seja definido com uma função objetivo que considere outros aspectos além da maximização do resultado técnico do fundo e, nesse sentido, torne-se mais próximo das decisões tomadas por um gestor na prática.

A metodologia apresentada no capítulo 4 merece destaque em relação aos possíveis trabalhos futuros, isso porque, além da modelagem do passivo e do ativo, há grande interesse no desenvolvimento de técnicas de geração de cenários, construção de árvores de cenários e métodos para a solução de problemas com estruturas que considerem um grande número de possíveis cenários futuros.

A demanda por essas técnicas surge da necessidade de uma representação adequada das variáveis econômicas e atuariais envolvidas no problema, pois, dada a dependência entre a solução obtida e a árvore de cenários utilizada, uma árvore mal construída leva a uma solução de pouca relevância prática.

A metodologia definida no item 4.2.2 também deve ser melhor estudada, de modo a serem estabelecidas condições e limites para a otimalidade da solução obtida.

Referências

- ALEXANDER, C. **Value-at-risk models - market risk analysis**. Chichester: John Wiley and Sons, 2008. v. IV.
- BEALE, E. M. L. On minimizing a convex function subject to linear inequalities. **J. Royal Statistical Society, Series B17**, n. 2, p. 173-184, 1955.
- BIRGE, J. R.; LOUVEAUX, F. **Introduction to Stochastic Programming**. New York: Springer-Verlag, 1997.
- BRADLEY, S. P.; CRANE, D. B. A dynamic model for bond portfolio management. **Management Science**, v. 19, n. 2, p. 139-151, 1972.
- CONDE, N. C.; ERNANDES, I. S. **Atuária para não atuários**. São Paulo: ABRAPP/ICSS/SINDAP, 2007.
- CONSIGLI, G.; DEMPSTER, M. A. H. Dynamic stochastic programming for asset liability management. **Annals of Operations Research**, v. 81, p. 131-162, 1998.
- DANTZIG, G. B. Linear programming under uncertainty. **Management Science**, v. 1, p. 197-206, 1955.
- _____.; INFANGER, G. Large-scale stochastic linear programs - importance sampling and Bender's decomposition. **Computational and Applied Mathematics I**, p. 111-120, 1991.
- DORNY, C. N. **A Vector Space Approach to Models and Optimization**. New York: John Wiley and Sons, 1975.
- DRIJVER, S. **Asset Liability Management for pension funds using multistage mixed-integer stochastic programming**. Tese (Doutorado) - Rijksuniversiteit Groningen, Groningen, 2005.
- DUPACOVÁ, J. Multistage stochastic programs: the state-of-the-art and selected bibliography. **Kybernetika**, v. 31, n. 2, p. 151-174, 1995.
- _____.; CONSIGLI, G.; WALLACE, S. W. Scenarios for multistage stochastic programs. **Annals of Operations Research**, v. 100, p. 25-53, 2000.
- ERMOLIEV, Y. Stochastic quasigradient methods. In: ERMOLIEV, Y. e WETS, R. J. B., (Ed.) **Numerical techniques for stochastic optimization problems**. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

- GÜRKAN, G.; ÖZGE, A. Y.; ROBINSON, S. M. Sample-path optimization in simulation. **Proceedings of the Winter Simulation Conference**, p. 247-254, 1994.
- HIGLE, J. L.; SEN, S. Stochastic decomposition: an algorithm for two-stage linear programs with recourse. **Mathematics of Operations Research**, v. 16, p. 650-669, 1991.
- HILLI, P. et al. A stochastic programming model for asset liability management of a Finnish pension company. **Annals of Operations Research**, v. 152, n. 1, p. 115-139, 2007.
- HØYLAND, K.; WALLACE, S. W. Generating scenario trees for multistage decision problems. **Management Science**, v. 47, n. 2, p. 295-307, 2001.
- KEEL, A.; MULLER, H. H. Efficient Portfolios in the asset liability context. **ASTIN Bulletin**, v. 25, n. 1, p. 33-48, 1995.
- KLAASSEN, P. Coment on "Generating scenario trees for multistage decision problems". **Management Science**, v. 48, n. 11, p. 1512-1516, 2002.
- KOUWENBERG, R. Scenario generation and stochastic programming models for asset liability management. **European Journal of Operational Research**, v. 134, p. 279-292, 2001.
- _____.; ZENIOS, S. A. Stochastic programming models for asset liability management. In: ZENIOS, S. A.; ZIEMBA, W. T., (Ed.) **Handbook of Asset and Liability Management. v. 1: Theory and methodology**. Amsterdam: Elsevier, 2006. p. 253-303.
- LINDEROTH, J.; SHAPIRO, A.; WRIGHT, S. The empirical behavior of sampling methods for stochastic programming. **Annals of Operations Research**, v. 142, n. 1, p. 215-241, 2006.
- LUENBERGER, D. G. **Linear and nonlinear programming**. 2nd ed. Estados Unidos da América: Addison-Wesley, 1984.
- OLIVEIRA, M. A. C. **Uma análise da utilização de ALM pelos fundos de pensão no Brasil e uma contribuição para análise do risco de solvência nos planos de benefício definido**. 2005. 266 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.
- RAO, S. S. **Optimization - theory and applications**. 2nd ed. New Delhi: Wiley Eastern, 1984.
- RUBINSTEIN, R. Y.; SHAPIRO, A. Optimization of static simulation models by the score function method. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 32, p. 373-392, 1990.
- SHAPIRO, A., DENTCHEVA D.; RUSZCZYNSKI A. **Lectures on stochastic programming - modelling and theory**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics and the Mathematical Programming Society, 2009.

- SILVA, L. C. **Alocação ótima de ativos e derivativos em fundos de pensão via programação estocástica**. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.
- VALLADÃO, D. M. **Alocação ótima e medida de risco de um ALM para fundo de pensão via programação estocástica multi-estágio e bootstrap**. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.
- VANDERBEI, R. J. **Linear programming - foundations and extensions**. 3rd ed. New York: Springer, 2008.
- ZHANG, Y. **Solving large-scale linear programs by interior-point methods under the MATLAB environment**. Baltimore County: University of Maryland, 1995.

Biblioteca ALM (Matlab)

```
% *****
% Elaboração do Problema de Programação Estocástica

function [Aeq,beq,A,b,c,lb,ub] = buildDeterministicEquivalentProgram(S,R,a0,ma,k,l,L,fp,fn)

[nr,nc] = size(R);
na = nr-1; % quantidade de ativos na simulação

% 1o estágio
Aeqi = eye(na,na); % alocação
Aeqi_aux1 = []; % compra
Aeqi_aux2 = []; % venda

Ai = -ma;

for i=2:na
    Aeqi_aux1 = [Aeqi_aux1 1+k(i)];
    Aeqi_aux2 = [Aeqi_aux2 k(i)-1];

    Ai = [Ai -ma];
end

Aeqi = [Aeqi [Aeqi_aux1; -eye(na-1,na-1)] [Aeqi_aux2; eye(na-1,na-1)]];

beqi = a0 + [1(1); zeros(na-1,1)];

Ai = Ai + eye(na,na);
Ai = [Ai zeros(na,2*(na-1))]; % restrição de máxima alocação

bi = [zeros(na,1)];
ub = [];

% Constrói as matrizes Aeq, beq, A, b e c do problema de programação linear
[Aeq,beq,A,b,c] = buildLPP(S,R,l,L,fp,fn,Aeqi,beqi,Ai,bi,na);

lb = zeros(size(c)); % vetor de limites inferiores de x (lower bounds)

end

% *****
% Função que constrói as matrizes Aeq, beq, A, b, c que definem o Problema de Programação Linear

function [Aeq,beq,A,b,c] = buildLPP(S,R,l,L,fp,fn,Aeqi,beqi,Ai,bi,na);

% Inicialização das variáveis
bl1 = Aeqi;
bl3 = [1 -1];
bl4 = Ai;
Aeq = Aeqi; % matriz Aeq das restrições de igualdade do PPL
beq = beqi; % matriz beq das restrições de igualdade do PPL
[nr_Aeq,nc_Aeq] = size(Aeq);
c = zeros(nc_Aeq,1); % matriz c da função custo do PPL
A = Ai; % matriz A das restrições de desigualdade do PPL
b = bi; % matriz b das restrições de desigualdade do PPL
n = 1; % contador de nós

% Estrutura da árvore de cenários
T = length(S); % último estágio da árvore
```

```

N = S(1); % vetor linha em que a j-ésima coluna apresenta o número de nós do j-ésimo estágio
for t=2:T
    N = [N N(t-1)*S(t)];
end

% Percorre todos os estágios
for t=2:T
    % Percorre os nós de cada estágio
    for i=1:N(t)
        % Atualiza o contador de nós
        n=n+1;
        % Constrói a matriz bl2 referente ao nó atual
        if t<T
            bl2 = [[-eye(na,na)-diag(R(1:na,n))] zeros(na,na-1) zeros(na,na-1)];
        else
            bl2 = [[-ones(1,na)-R(1:na,n)'] zeros(1,na-1) zeros(1,na-1)];
        end
        % variável auxiliar nb
        nb = R(na+1,n)-1;
        % atualiza as matrizes a, b e c
        if t<T
            % atualiza Aeq
            [nr,nc] = size(Aeq);
            Aeq_aux = [zeros(na,nb*(na+(na-1)+(na-1))) bl2 zeros(na,nc-(nb+1)*(na+(na-1)+(na-1)))];
            Aeq = buildMatrixFromBlocks(Aeq,[],Aeq_aux,bl1);
            % atualiza beq
            beq_aux = [1(n);zeros(na-1,1)];
            beq = [beq; beq_aux];
            % atualiza c
            c = [c; zeros(na+(na-1)+(na-1),1)];
            % atualiza A
            A = buildMatrixFromBlocks(A,[],[],bl4);
            % atualiza b
            b = [b; zeros(na,1)];
        else
            % atualiza Aeq
            [nr,nc] = size(Aeq);
            Aeq_aux = [zeros(1,nb*(na+(na-1)+(na-1))) bl2 zeros(1,nc-(nb+1)*(na+(na-1)+(na-1)))];
            Aeq = buildMatrixFromBlocks(Aeq,[],Aeq_aux,bl3);
            % atualiza beq
            beq = [beq; 1(n)-L];
            % atualiza c
            c = [c; fp; -fn];
            % atualiza A
            [nr,nc] = size(A);
            A = [A zeros(nr,2)];
            % não há necessidade de atualizar b
        end
    end
end
end

c = -(1/N(t))*c;

end

% *****
% Função que constrói uma matriz m a partir das matrizes a, b, c e d, tal que  $m = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 
%
function [m] = buildMatrixFromBlocks(a,b,c,d)

[nr_a,nc_a] = size(a);
[nr_b,nc_b] = size(b);
[nr_c,nc_c] = size(c);
[nr_d,nc_d] = size(d);

if nr_a==0 | nc_a==0
    a = zeros(nr_b,nc_c);
end

if nr_b==0 | nc_b==0
    b = zeros(nr_a,nc_d);

```

```

end

if nr_c==0 | nc_c==0
    c = zeros(nr_d,nc_a);
end

if nr_d==0 | nc_d==0
    d = zeros(nr_c,nc_b);
end

m = [a b; c d];

end

% *****
% Função que constrói automaticamente uma árvore de cenários

function [S,R,l,L] = buildScenarios(S,T,mu,Q,rho,l0,L0)

p = 0;
l = [0];
L = L0;

[nr,nc] = size(Q);
na = nr;
Q = sqrtm(Q);
R = []; % vetor de retornos entre estados ligados da árvore
for i=1:na
    R = [R; 0];
end
R = [R; p];
p = p+1;

% Ajusta árvore para construção de variáveis antitéticas
S(1) = 1;
N(1) = 1; % vetor linha em que a j-ésima coluna apresenta o número de variáveis antitéticas do j-ésimo estágio
P(1) = 1; % vetor linha em que a j-ésima coluna apresenta o número de nós do j-ésimo estágio
for i=2:T
    if mod(S(i),2) ~= 0
        S(i) = 2*floor(S(i)/2);
    end
    N(i) = S(i)/2;
    P(i) = P(i-1) * S(i);
end

for t=2:T
    l0 = (1+rho)*l0;
    for i=1:P(t-1)
        for j=1:N(t)
            % Constrói o vetor w de elementos aleatórios
            w = [];
            for k=1:na
                w = [w; randn(1)];
            end
            % Primeiro nó
            Raux = mu + Q*w;
            R = [R [Raux; p]];
            l = [l -l0];
            % Segundo nó
            Raux = mu - Q*w;
            R = [R [Raux; p]];
            l = [l -l0];
        end
        % Atualiza p
        p=p+1;
    end
    % Reserva matemática no estágio final da árvore
    L = L * (1+mu(1)) - l0;
end

end

```

```

% *****
% Função que constrói a variável auxiliar x_aux

function [x_aux] = build_x0(a0,a_sub,k);

if a0(2) == a_sub(2)
    xc = 0;
    xv = 0;
    a_sub = a0;
else
    if a0(2) < a_sub(2)
        xc = a_sub(2)-a0(2);
        xv = 0;
        a_sub(1) = a0(1) - xc*(1+k(2));
        a_sub(2) = a0(2) + xc;
    else
        xc = 0;
        xv = a0(2)-a_sub(2);
        a_sub(1) = a0(1) - xv*(-1+k(2));
        a_sub(2) = a0(2) - xv;
    end
end

x_aux = [a_sub; xc; xv];

end

% *****
% Função que calcula a probabilidade do fundo não ter capacidade de honrar com suas obrigações financeiras

function [prob] = defaultProbability(S,xopt);

T = length(S);
N = S(1);
for t=2:T
    N = N*S(t);
end

[nr,nc] = size(xopt);
p = 0;
n = 0;

for i=nr-2*N+2:2:nr
    if xopt(i) > 0.1
        n=n+1;
    else
        p=p+1;
    end
end

prob = n/(n+p);

end

% *****
% Função que retorna os valores finais do total dos ativos V(T,k)

function [V] = finalWealth(S,xopt,L);

T = length(S);
N = S(1);
for t=2:T
    N = N*S(t);
end

[nr,nc] = size(xopt);
V = [];

for i=nr-2*N+1:2:nr
    if abs(xopt(i)) > (xopt(i+1))

```

```

        V = [V; xopt(i)+L];
    else
        V = [V; -xopt(i+1)+L];
    end
end

end

% *****
% Função que carrega os parâmetros do modelo

function [a0,ma,k,S,T,mu,Q,rho,L0,l0,fp,fn] = loadProblemData()

a0 = [6e3; 0]; % a0: alocação inicial
ma = [1; 0.5]; % ma: máxima alocação por classe de ativo
k = [0; 0.002]; % k: custo de transação por classe de ativo

S = [1 2 2 2 2 2]; % S: estrutura da árvore de cenários
T = length(S); % T: número de estágios

mu = [0.1; 0.15]; % mu: retorno médio dos ativos
Q = [0.001 -0.005; -0.005 0.206]; % Q: matriz de covariância dos retornos dos ativos

rho = 0.06; % rho: taxa de crescimento do passivo
L0 = 6e3; % L0: Reserva Matemática no primeiro estágio
l0 = 226; % l0: último pagamento realizado antes do início da simulação

fp = 1; % fp: ponderação da parcela positiva da função custo
fn = 2; % fn: ponderação da parcela negativa da função custo

end

% *****
% Retorna as alocações percentuais do portfólio (até o penúltimo estágio da árvore)

function [aloc] = portfolioAllocation(xopt,S,R)

[nr,nc] = size(R);
na = nr-1; % quantidade de ativos na simulação

T = length(S); % último estágio da árvore
N = S(1); % vetor linha em que a j-ésima coluna apresenta o número de nós do j-ésimo estágio
for t=2:T
    N = [N N(t-1)*S(t)];
end

idx = 1; % indexador do vetor xopt
aloc = []; % matriz de alocações percentuais
% Percorre todos os estágios
for t=1:(T-1)
    % Percorre os nós de cada estágio
    for i=1:N(t)
        aloc = [aloc [allocation(xopt(idx:idx+(na-1),1))]];
        idx = idx+(na+(na-1)*2);
    end
end
end

end

% *****
% Função auxiliar (chamada pela função portfolioAllocation)

function [aloc] = allocation(x)

[nr,nc] = size(x);

portfValue = sum(x);
aloc = [];

for i=1:nr

```

```
        aloc = [aloc; x(i)/portfValue];
    end

end

% *****
% Função que retorna os resultados técnicos  $V(T,k)$  -  $RM(T,k)$ 

function [rt] = technicalResult(S,xopt);

T = length(S);
N = S(1);
for t=2:T N = N*S(t); end

[nr,nc] = size(xopt);
rt = [];

for i=nr-2*N+1:2:nr
    if abs(xopt(i)) > (xopt(i+1))
        rt = [rt; xopt(i)];
    else
        rt = [rt; -xopt(i+1)];
    end
end

end
```

Código do estudo de simulação 1 (Matlab)

```
% Carrega os parâmetros do modelo e a estrutura da árvore de cenários
[a0,ma,k,S,T,mu,Q,rho,L0,l0,fp,fn] = loadProblemData();

firstStagePort = [];

iters = 200;
while i<iters

    % Constrói a árvore de cenários
    [S,R,l,L] = buildScenarios(S,T,mu,Q,rho,l0,L0);
    % Constrói o problema determinístico equivalente
    [Aeq,beq,A,b,c,lb,ub] = buildDeterministicEquivalentProgram(S,R,a0,ma,k,l,L,fp,fn);
    % Resolve o problema determinístico equivalente
    [xopt,fopt,exitflag,output,lambda] = linprog(c,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
    fopt = -fopt;

    if exitflag == 1

        % Calcula a alocação percentual do portfolio do fundo (até o penúltimo estágio da árvore)
        portAlloc = portfolioAllocation(xopt,S,R);
        firstStagePort = [[firstStagePort] [portAlloc(:,1)]];

        i = i+1;

    end

end

meanFirstStagePort(1) = mean(firstStagePort(1,:));
meanFirstStagePort(2) = mean(firstStagePort(2,:));
```


Código do estudo de simulação 2 (Matlab)

Fundo equilibrado

```
% Carrega os parâmetros do modelo e a estrutura da árvore de cenários
[a0,ma,k,S,T,mu,Q,rho,L0,l0,fp,fn] = loadProblemData();

firstStagePort = [];

% alocação inicial obtida no estudo 1
a_sub = 6e3*[0.6779; 0.3221];
x_aux = build_x0(a0,a_sub,k);

% resultado técnico
rt = [];
rt_stat = [];

iters = 200;
while i<iters

    % Constrói a árvore de cenários
    [S,R,l,L] = buildScenarios(S,T,mu,Q,rho,l0,L0);
    [nr,nc] = size(R);
    na = nr-1;
    % Constrói o problema determinístico equivalente
    [Aeq,beq,A,b,c,lb,ub] = buildDeterministicEquivalentProgram(S,R,a0,ma,k,l,L,fp,fn);
    % Inclui as restrições para que a alocação do primeiro estágio seja a obtida no estudo 1
    [nr_Aeq,nc_Aeq] = size(Aeq);
    Aeq = [[eye(na+2*(na-1),na+2*(na-1)) zeros(na+2*(na-1),nc_Aeq-(na+2*(na-1)))]; [Aeq]];
    beq = [x_aux; beq];
    % Resolve o problema determinístico equivalente
    [xopt,fopt,exitflag,output,lambda] = linprog(c,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
    fopt = -fopt;

    if exitflag == 1

        % Resultado técnico
        rt_aux = technicalResult(S,xopt);
        rt = [rt rt_aux];
        rt_stat = [rt_stat; rt_aux];

        i = i+1;
    end
end

csvwrite('rt_2a.csv',rt_stat);
```

Fundo positivamente desequilibrado

```
% Carrega os parâmetros do modelo e a estrutura da árvore de cenários
[a0,ma,k,S,T,mu,Q,rho,L0,l0,fp,fn] = loadProblemData();

firstStagePort = [];

% alocação inicial obtida no estudo 1
a_sub = 1.2*6e3*[0.6779; 0.3221];
x_aux = build_x0(a0,a_sub,k);

% resultado técnico
rt = [];
rt_stat = [];

iters = 200;
while i<iters

    % Constrói a árvore de cenários
    [S,R,l,L] = buildScenarios(S,T,mu,Q,rho,l0,L0);
    [nr,nc] = size(R);
    na = nr-1;
    % Constrói o problema determinístico equivalente
    [Aeq,beq,A,b,c,lb,ub] = buildDeterministicEquivalentProgram(S,R,a0,ma,k,l,L,fp,fn);
    % Inclui as restrições para que a alocação do primeiro estágio seja a obtida no estudo 1
    [nr_Aeq,nc_Aeq] = size(Aeq);
    Aeq = [[eye(na+2*(na-1),na+2*(na-1)) zeros(na+2*(na-1),nc_Aeq-(na+2*(na-1)))]; [Aeq]];
    beq = [x_aux; beq];
    % Resolve o problema determinístico equivalente
    [xopt,fopt,exitflag,output,lambda] = linprog(c,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
    fopt = -fopt;

    if exitflag == 1

        % Resultado técnico
        rt_aux = technicalResult(S,xopt);
        rt = [rt rt_aux];
        rt_stat = [rt_stat; rt_aux];

        i = i+1;
    end
end

csvwrite('rt_2b.csv',rt_stat);
```

Código da análise estatística do estudo de simulação 2 (R)

```
# Dados dos experimentos
rt_equilibrado <- read.table("rt_2a.csv", header=F)
rt_equilibrado = unlist(rt_equilibrado)

rt_positivo <- read.table("rt_2b.csv", header=F)
rt_positivo = unlist(rt_positivo)

# Cálculo da densidade experimental
rt_equilibrado_density <- density(rt_equilibrado)
rt_positivo_density <- density(rt_positivo)

# Distribuição empírica
xs=cbind(rt_equilibrado_density$x,rt_positivo_density$x)
sim=cbind(rt_equilibrado_density$y,rt_positivo_density$y)
matplot(xs,sim,type="l",xlab='Resultado técnico', ylab='Distribuição empírica')
legend("topright", c("Equilibrado","Positivamente desequilibrado"), col=1:2, lty=1:2)

# Percentis
quantile(rt_equilibrado,probs = c(0, 5, 23.4, 50, 75, 95, 100)/100)
min(rt_equilibrado)
mean(rt_equilibrado)
median(rt_equilibrado)
max(rt_equilibrado)

quantile(rt_positivo,probs = c(0, 5, 8, 9, 25, 50, 75, 95, 100)/100)
min(rt_positivo)
mean(rt_positivo)
median(rt_positivo)
max(rt_positivo)
```