JOSÉ ROBERTO MATEUS FERNANDES

REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES DE ROTOR
USANDO REGULAÇÃO SINCRONIZADA

São Paulo

2012

JOSÉ ROBERTO MATEUS FERNANDES

REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES DE ROTOR
USANDO REGULAÇÃO SINCRONIZADA

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Mestre em Ciências

Área de Concentração:
Engenharia de Sistemas

Orientador:
Prof. Dr. Paulo Sérgio Pereira da Silva

São Paulo

2012

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 15 de junho de 2012.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Fernandes, José Roberto Mateus

**Redução de vibrações de rotor usando regulação sincronizada / J.R.M. Fernandes. --- ed.rev. -- São Paulo, 2012.
142 p.**

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle.

1.Rotor (Sistemas de controle) 2.Mancais (Sistemas de controle) 3.Vibrações de máquinas 4.Controle (Teoria de sistemas e controle) I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle II.t.

DEDICATÓRIA

A DEUS.

À minha esposa, Edna.

Às minhas filhas, Giovanna e Maria Isabel.

*“QUE A FORÇA ESTEJA COM VOCÊ”
do hexalogia de filmes Star Wars*

Agradecimentos

Ao Professor Dr. Paulo Sérgio Pereira da Silva, pela sua paciência e orientação, dando-me a confiança necessária para realizar este trabalho.

Ao CC(EN) Dr. Eng. Paulo Henrique da Rocha, 1T(RM2-EN) Eng. Diego Alves Corrêa e CB(EO) Thiago Santos Rocha, pelo seu constante apoio e auxílio logístico dentro do Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo.

Ao MSc. Eng. Ricardo Ugliara Mendes (“Sardinha”), pela sua disposição em dividir o seu conhecimento na área de dinâmica de rotores comigo.

À minha esposa, Edna Felix da Silva e as minhas filhas, Giovanna Prestes da Silva e Maria Isabel Felix Mateus, pelo carinho e suporte emocional necessários.

A Marinha do Brasil, pelo apoio financeiro para a realização deste projeto.

Resumo

Este trabalho versa sobre a análise teórica do desempenho da regulação sincronizada aplicada na redução de vibrações de rotores utilizando mancais magnéticos. Originalmente apresentado na dissertação “Regulação sincronizada de distúrbios senoidais”, de Vaydia I. C. Segura, o regulador teve o seu módulo de regulação modificado para trabalhar com múltiplas entradas e saídas, além de permitir a estimação em tempo real da matriz de influência. O desempenho e a robustez do regulador foram analisados em função de seus parâmetros. A regulação sincronizada foi aplicada a um modelo teórico de rotor desenvolvido pelo método dos elementos finitos e simulado em computador.

Palavras-chave: regulação sincronizada, controle ótimo, máquinas rotativas, mancais magnéticos

Abstract

This work discusses about the theoretical analysis of the performance of synchronized regulation applied in reduction of rotor vibrations using magnetic bearings. Originally presented in the dissertation “Synchronized regulation of sinoidal disturbing”, of Vaydia I. C. Segura, the regulator had its regulation module changed to work with multiple inputs and outputs, in addition to enabling real-time estimation of the influence matrix. The performance and robustness of the regulator were analyzed as a function of the parameters. The synchronized regulation was applied to the theoretical model developed by the finite elements method and simulated in a computer.

Keywords: synchronized regulation, optimal control, rotating machinery, magnetic bearings

Lista de Figuras

2.1	Mancal magnético radial	7
2.2	Circuito magnético	9
2.3	Circuito simplificado de acionamento diferencial	11
2.4	Um mancal magnético com magnetos dispostos ortogonalmente	13
2.5	Diagrama de controle em malha fechada de um mancal magnético radial	14
2.6	Diagrama de corpo livre de um mancal radial	17
3.1	Sistema rotativo mostrando seus elementos e o sistema de referência . .	22
3.2	Sistema de coordenadas do disco sobre um eixo flexível girante	23
3.3	Sistema de coordenadas de um elemento de eixo	26
3.4	Funções de Interpolação	27
3.5	Coordenadas do centro geométrico C e um ponto B qualquer do eixo .	30
3.6	Rigidez e amortecimento do mancal	34
3.7	Desbalanceamento de massa	35
3.8	Arranjo das submatrizes numa matriz global	37
4.1	Sistema SISO com controle de estabilização e desempenho	40
4.2	Diagrama com módulos de geração e filtragem	41
4.3	Diagrama equivalente à figura 4.2	42
4.4	Sistema simplificado	43

4.5	Sistema com módulos de geração e filtragem e conversores A/D e D/A	43
4.6	Sistema com módulos de geração, filtragem e regulação	44
4.7	Sistema completo da regulação sincronizada	45
4.8	Esquema mostrando o funcionamento do módulo de filtragem	47
4.9	Sistema de regulação em malha fechada	51
4.10	Sinal u_k gerado pelo módulo de geração de sinal a partir da informação u	53
5.1	Controle não adaptativo usando coeficiente de influência	56
5.2	Controle não adaptativo por coeficiente de influência usando ganho α .	57
5.3	Região de estabilidade do controle não adaptativo por coeficiente de influência	59
5.4	Controle adaptativo por coeficiente de influência	61
5.5	Controle ótimo adaptativo por matriz de influência	63
5.6	Vetores de perturbação para $\gamma = 0, 0,5$ e 1	74
5.7	Fluxograma do controle ótimo adaptativo por matriz de influência . . .	76
5.8	Diagrama do regulador síncrono com controle ótimo adaptativo por ma- triz de influência	77
6.1	Modelo em elementos finitos do rotor simulado	79
6.2	Modo de vibrar em 21,33 Hz	80
6.3	Modo de vibrar em 36,16 Hz	80
6.4	Modo de vibrar em 40,08 Hz	80
6.5	Modo de vibrar em 85,72 Hz	80
6.6	Resposta à 10 Hz do mancal superior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = \text{diag}(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} =$ $\text{diag}(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = \text{diag}(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = \text{diag}(0)$, $\gamma = 0,5$)	81

6.7	Resposta à 10 Hz do mancal motor ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 5$)	82
6.8	Resposta à 10 Hz do mancal inferior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 5$)	82
6.9	Resposta à 21,33 Hz do mancal superior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 5$)	83
6.10	Resposta à 21,33 Hz do mancal motor ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 5$)	84
6.11	Resposta à 21,33 Hz do mancal inferior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 5$)	84
6.12	Resposta à 21,33 Hz do mancal superior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(1 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 5$)	85
6.13	Resposta à 21,33 Hz do mancal motor ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(1 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 5$)	86
6.14	Resposta à 21,33 Hz do mancal inferior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(1 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 5$)	86
6.15	Resposta à 21,33 Hz do mancal superior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(1 \times 10^{-3})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 5$)	87
6.16	Resposta à 21,33 Hz do mancal motor ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(1 \times 10^{-3})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 5$)	87
6.17	Resposta à 21,33 Hz do mancal inferior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(1 \times 10^{-3})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 5$)	88
6.18	Resposta à 21,33 Hz do mancal superior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1)$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 5$)	89
6.19	Resposta à 21,33 Hz do mancal motor ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1)$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 5$)	89

6.20	Resposta à 21,33 Hz do mancal inferior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1)$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 5$)	90
6.21	Resposta à 21,33 Hz do mancal superior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(0)$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 5$)	90
6.22	Resposta à 21,33 Hz do mancal motor ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(0)$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 5$)	91
6.23	Resposta à 21,33 Hz do mancal inferior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(0)$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 5$)	91
6.24	Resposta à 21,33 Hz do mancal superior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 1$)	92
6.25	Resposta à 21,33 Hz do mancal motor ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 1$)	93
6.26	Resposta à 21,33 Hz do mancal inferior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 1$)	93
6.27	Resposta à 21,33 Hz do mancal superior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 1$)	94
6.28	Resposta à 21,33 Hz do mancal motor ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 1$)	94
6.29	Resposta à 21,33 Hz do mancal inferior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 1$)	95
A.1	Localização dos elementos de disco no rotor	103
B.1	Diagrama geral do sistema	106
B.2	Rotor e mancal magnético	107
B.3	Planta do Rotor	107
B.4	Regulador MIMO com estimação em tempo real da matriz de influência	108

B.5	Modulo de sincronismo	108
B.6	Modulo de filtragem	108
B.7	Modulo de regulação	109
B.8	Modulo de geração de sinal	109

Lista de Tabelas

A.1	Propriedades dos materiais	102
A.2	Localização dos nós	104
A.3	Localização dos elementos de disco	104
A.4	Rigidez e amortecimento equivalentes dos mancais	105
A.5	Desbalanceamentos	105

Lista de Símbolos

A	Área
a	Constante de ganho complexa
A, α	Amplitude e fase da perturbação
$\hat{c}$	Coefficiente de influência estimado
c	Coefficiente de influência
D_{eq}	Amortecimento equivalente do mancal
E	Módulo de elasticidade do material
e_h	Fasor de saída da h -ésima iteração do controle
F, f	Força
G	Modulo de cisalhamento do material
$g(j\omega)$	Função de transferência do sistema avaliada na frequência ω
G_{amp}	Função de transferência do amplificador
G_{cmf}	Função de transferência global
G_{cnt}	Função de transferência do controle de estabilização
G_{lp}	Função de transferência do filtro passa-baixa
G_{ss}	Função de transferência do sensor
h	Iteração

I	Momento de inércia
i	Corrente elétrica
i_0	Corrente de polarização (<i>bias</i>)
I_c	Corrente de saída do amplificador
i_x	Corrente de controle do mancal
J	Função objetivo
j	$\sqrt{-1}$
k	Amostra
K_d	Ganho derivativo
K_i	Ganho integral
k_i	Fator força/corrente do mancal
k_m	Constante do mancal magnético
K_p	Ganho proporcional
K_t	Ganho total do controle de estabilização
k_x	Fator força/deslocamento do mancal
K_{eq}	Rigidez equivalente do mancal
l	Comprimento
L_s	Número de amostras por ciclo
m	Número de planos de atuação
M_D	Massa do disco
m_r	Massa do rotor

m_s	Número de ciclos entre iterações
$m_u d$	Desbalanceamento de massa
n	Numero de espiras
p	Número da sub-iteração
Q	Carga elétrica
S	Área da seção reta
s	variável complexa
T	Energia cinética
T_w	Período de um ciclo da perturbação senoidal
U	Energia potencial ou de deformação
$u(t)$	Excitação de entrada da planta
u_h	Fasor de entrada da h -ésima iteração do controle
V	Volume
V_x	Tensão de saída do sensor
V_{cnt}	Tensão de saída do controle de estabilização
V_{lp}	Tensão de saída do filtro passa-baixa
W	Energia magnética
$w(t)$	Perturbação
x	Deslocamento
X, Y, Z	Coordenadas no referencial inercial
x, y, z	Coordenadas no referencial solidário ao disco

x_0	Entreferro (<i>gap</i>)
$y(t)$	Saída da planta
α	Fator de ganho do controle
β	Fator de esquecimento
χ	Fator de compensação da rigidez
δW	Trabalho Virtual
η_u, η_w	Funções de interpolação
γ	Parâmetro de construção da matriz de base $\mathbf{\Lambda}$
κ	Fator de cisalhamento
μ_0	Permeabilidade magnética no vácuo
μ_r	Permeabilidade magnética relativa
ν	Razão de <i>Poisson</i>
Ω	Velocidade angular
ω	Frequência
ω_{amp}	Frequência de corte do amplificador
ω_{lp}	Frequência de corte do filtro passa-baixa
Φ	Fluxo magnético
ϕ, θ, ψ	Ângulos de orientação do disco
ρ	Densidade de massa
τ_r, τ_i	Parte real e imaginária da função de transferência global
ξ_{lp}	Fator de amortecimento do filtro passa-baixa

ζ	Vetor de coordenadas generalizadas
$\Delta \mathbf{E}$	Matriz das diferenças dos vetores de erro
$\Delta \mathbf{U}$	Matriz das diferenças dos vetores de controle
$\mathbf{B}, B$	Densidade de fluxo magnético
$\hat{\mathbf{C}}$	Matriz de influência estimada
$\hat{\mathbf{C}}_{novo}$	Matriz de influência instantânea
$\mathbf{C}$	Matriz de influência
$\mathbf{D}$	Matriz de amortecimento
$\mathbf{D}_b$	Matriz de amortecimento do mancal magnético
$\mathbf{D}_s$	Matriz de amortecimento do rotor
$\tilde{\mathbf{e}}$	Vetor de erro da estimação por perturbação
$\mathbf{e}_h$	Vetor complexo dos sensores de erro
$\mathbf{f}$	Vetor de forças
$\mathbf{G}$	Matriz giroscópica
$\mathbf{H}, H$	Campo magnético
$\mathbf{I}$	Matriz identidade
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$\mathbf{K}_b$	Matriz de rigidez do mancal magnético
$\mathbf{K}_s$	Matriz de rigidez do rotor
$\mathbf{\Lambda}$	Matriz de base para algoritmo de perturbação
$\mathbf{M}$	Matriz de massa ou de inércia

Q	Matriz de penalização dos sensores de erro
R	Matriz de penalização dos controle
S	Matriz de penalização da taxa de mudança do controle
$\tilde{\mathbf{u}}$	Vetor de controle da estimação por perturbação
$\mathbf{u}_h$	Vetor complexo dos sinais dos atuadores
v	Velocidade
w	Vetor de perturbação

Sumário

1	Introdução	1
2	Mancais Magnéticos	6
2.1	Teoria de mancais magnéticos	8
2.2	Controle de mancais magnéticos	13
2.2.1	Sensor de posição	15
2.2.2	Filtro passa baixa	15
2.2.3	Controle de estabilização	16
2.2.4	Amplificador de potência	17
2.3	Modelo matemático do sistema rotor-mancal magnético	17
2.4	Rigidez e amortecimento equivalentes	18
3	Modelagem de Rotores	21
3.1	Método dos elementos finitos	21
3.2	Elemento de disco	23
3.3	Elemento de eixo	25
3.3.1	Energia cinética do elemento de eixo	27
3.3.2	Energia de deformação do elemento de eixo	29
3.4	Mancais	33
3.5	Desbalanceamento de massa	34

3.6	Equações do rotor	36
4	Regulação Sincronizada	39
4.1	Heurística	39
4.2	Esquema da regulação sincronizada	44
4.3	Sinal de sincronismo	45
4.3.1	Escolha de m_s	45
4.3.2	Escolha de L_s	46
4.4	Módulo da filtragem	46
4.5	Módulo de regulação sincronizada	48
4.5.1	Modelo simplificado do subsistema de entrada u_h e saída e_h . .	49
4.5.2	Projeto do módulo de regulação	50
4.6	Módulo de geração de sinal	52
5	Controle de redução do desbalanceamento	54
5.1	Controle não adaptativo por coeficiente de influência	56
5.1.1	Estabilidade do controle não adaptativo por coeficiente de in- fluência	57
5.2	Controle adaptativo por coeficiente de influência	60
5.2.1	Estimação em tempo real do coeficiente de influência	60
5.3	Controle ótimo adaptativo por matriz de influência	62
5.3.1	Lei de controle ótimo	63
5.3.2	Análise de desempenho e estabilidade do controle ótimo não adaptativo	66
5.3.3	Estimação em tempo real da matriz de influência	68
5.3.4	Algoritmo de <i>perturbação</i> para estimação da matriz de influência	71

5.3.5	Lei de controle ótimo adaptativo recursivo	75
5.4	Regulação sincronizada MIMO usando o controle ótimo adaptativo por matriz de influência	77
6	Simulações	78
7	Conclusão	96
	Referências Bibliográficas	98
A	Características do rotor modelado	102
B	Diagramas para <i>Simulink</i>	106
C	Programas para <i>Matlab</i>	110

Capítulo 1

Introdução

Um problema comum na área de dinâmica de rotores é a presença de vibrações dos eixos devido a existência de desbalanceamentos residuais. Em muitos casos, o custo e o tempo envolvidos na minimização desses desbalanceamentos é muito alto, como no caso de turbinas para aviões e turbogeradores. Há casos também que o desbalanceamento se modifica ao longo da operação do equipamento, por exemplo, em máquinas-ferramenta que efetuam a troca das ferramentas de corte várias vezes durante sua operação.

Muita pesquisa tem sido feita na área para minimizar o efeito dessas vibrações, seja através de equipamentos capazes de identificar os desbalanceamentos e determinar os valores e posicionamentos das massas de correção, seja através de algum elemento atuador ativo capaz de aplicar as devidas forças de compensação.

Podemos citar [2] que fez o estudo de um dispositivo mecânico redutor de vibrações de rotor para a passagem pela velocidade crítica.

O artigo [9] propôs adicionar um filtro *notch* generalizado aplicado a malha de controle de um sistema com mancal magnético. Ficou demonstrado a sua capacidade de rejeitar as vibrações em sistemas de rotores com acoplamento giroscópico fraco.

Um novo método, chamado de auto centragem adaptativa, foi desenvolvido por [19]. Seu princípio se baseia na identificação em tempo real do desbalanceamento do rotor e a utilização desse resultado para sintonizar um controle de estabilização. A sua vantagem é ser independente da velocidade de rotação do rotor. Porém a sua aplicabilidade é restrita aos rotores rígidos.

Em [13] foi desenvolvida a síntese de controladores de resposta síncrona capazes de operar em uma larga faixa de rotações do rotor. Assim obtém-se uma grande simplificação pois os controladores podem ser implementados usando-se circuitos analógicos simples. Posteriormente os trabalhos [11] e [12] demonstraram a capacidade e robustez desses controladores aplicados a uma bancada experimental.

Em [22] foi investigado a compensação do desbalanceamento do ponto de vista da regulação da saída cujo ponto chave é o cancelamento de polos e zeros. Foi apresentada também uma forma geral de obter controladores para a regulação do deslocamento, corrente e força.

Na tese [6] foi desenvolvido dois métodos de redução de desbalanceamento de rotores: o primeiro usa um controle adaptativo simples por estimação de coeficiente de influência; o segundo método usa o controle adaptativo ótimo com matriz de influência. Foram utilizados elementos atuadores formados por discos excêntricos capazes de cancelar o desbalanceamento residual do rotor. Alguns resultados experimentais foram apresentados usando ambos os métodos.

Um método de controle iterativo com aprendizagem foi pesquisado por [3]. Neste método os parâmetros do PID são ajustados de acordo com as mudanças da magnitude e frequência da perturbação. Duas formas diferentes para eliminar a perturbação de alta frequência do sinal de compensação foram estudadas, uma utilizando um fator de esquecimento e outra com um filtro passa-baixa não causal.

Encontramos em [30] uma comparação entre os vários métodos de redução de desbalanceamento conhecidos, procurando organizar e mostrar as qualidades e deficiências de cada um.

Em [18] foi proposto um algoritmo adaptativo de rejeição de distúrbios de múltiplas frequências. Suas vantagens são poder estimar as frequências dos distúrbios sem usar um sensor de rotação mesmo com a presença de ruído de medição, ser razoavelmente estável e permitir a sua aplicação em sistemas MIMO não lineares de rotores.

O trabalho [20] apresentou dois métodos para redução do desbalanceamento de

rotores. O primeiro estima as forças de compensação iterativamente. Já o segundo método determina essas forças usando a matriz de coeficientes de influência do modelo do rotor.

Um novo algoritmo adaptativo de malha aberta baseado no algoritmo de filtragem adaptativa de mínimos quadrados (*Least Mean Square*) filtrado-x foi apresentado em [25]. Tal algoritmo utiliza uma medida de desempenho que é função da corrente do atuador ou da vibração do rotor, permitindo a minimização da corrente ou da vibração, respectivamente. O controle foi aplicado à uma bancada experimental demonstrando a sua eficácia.

O artigo [27] apresentou um algoritmo capaz de reduzir o desbalanceamento em toda faixa de operação da máquina. No entanto, exige o conhecimento prévio e preciso do modelo do rotor.

O trabalho [29] investigou a técnica de redução ativa de desbalanceamento durante a aceleração de um rotor de *Jeffcott* rígido. Também foi desenvolvida uma estratégia de redução de vibração para vários modos baseada na expressão analítica da resposta de desbalanceamento do rotor durante a aceleração.

A otimização das forças que minimizam os deslocamentos de um rotor durante a passagem pelas velocidades críticas foi tema da dissertação de [1]. O autor também utilizou-se de uma bancada experimental para a comparação e validação com resultados obtidos de forma teórica.

Dois algoritmos de redução de desbalanceamento foram apresentados em [26]. O primeiro, chamado de método direto, usa as técnicas de filtragem adaptativa para atenuar os deslocamentos ou as correntes dos mancais magnéticos. O segundo método, chamado indireto, procura minimizar a magnitude do sinal de erro.

A dissertação [10] fez uma análise teórica do desempenho de um sistema de controle de vibrações usando um filtro de coeficientes variáveis e usando como elementos atuadores os mancais magnéticos. Estudou-se também a influência do número de atuadores, número de sensores e os pontos de colocação dos sensores.

Em [17] foi desenvolvido um controle adaptativo para rejeição de desbalanceamento aplicado a um giroscópio de satélite artificial. O rotor estava suspenso magneticamente por mancais magnéticos e foi considerado que a sua dinâmica e desbalanceamentos eram desconhecidos.

O artigo [28] apresentou um método para modelagem e controle de um rotor flexível chamado de modelo físico de ordem reduzida estendido. Com esse modelo, foi estudado um controle de redução de vibrações onde o controle de levitação é um PID e o de supressão de vibrações é um LQ.

Por fim, [7] apresentou a aplicação da técnica de regulação sincronizada em um modelo de rotor do tipo *Jeffcott*. Nesse artigo, ficou comprovada a capacidade de tal regulador em reduzir as vibrações provocadas pelo desbalanceamento do rotor.

Este trabalho pretende estudar e desenvolver um sistema regulador em malha aberta que permita a redução das vibrações em sistemas rotativos e que tenha também capacidade adaptativa, permitindo que seja utilizado em plantas cujo modelo não é conhecido *a priori*. Para aplicar as forças de cancelamento das vibrações, escolheu-se como atuador ativo os mancais magnéticos.

Este trabalho está organizado em 7 capítulos. No capítulo 2 é apresentada a teoria básica dos mancais magnéticos ativos e os circuitos necessários para o controle de estabilização em malha fechada. Também determina-se a função de transferência global do controle de estabilização levando-se também em conta a função de transferência dos circuitos utilizados. Apresenta-se um modelo matemático para determinar a rigidez e amortecimento equivalentes do mancal a partir de suas características e da função de transferência global.

O capítulo 3 apresenta a teoria básica necessária para a modelagem de rotores flexíveis pelo método de elementos finitos. Um modelo matemático de um rotor proposto será necessário mais adiante para o desenvolvimento das simulações.

No capítulo 4 apresenta-se os fundamentos da regulação síncrona. Tal teoria foi tema da dissertação [24], que comprovou as características de robustez deste regulador

em sistemas SISO. O mérito deste trabalho é demonstrar a efetividade de uma classe de métodos semelhantes e considerando um modelo simplificado dos elementos envolvidos no processo. A metodologia utilizada em [24] é equivalente ao consagrado método de coeficiente ou matriz de influência.

Na sequência, o capítulo 5 é dedicado a mostrar o controle ótimo adaptativo por matriz de influência. Nas seções iniciais é feita uma pequena revisão dos controles não adaptativo e adaptativo por coeficiente de influência. O uso do controle por coeficiente de influência é aplicável em sistemas rotativos onde a localização da fonte do desbalanceamento é bem determinada e é possível instalar-se um atuador ativo (por exemplo, mancal magnético) próximo deste local. Já o controle ótimo, que utiliza a matriz de influência, é mais extenso, podendo ser aplicado à rotores que apresentam vários pontos de desbalanceamento e mancais anisotrópicos. Tal controle, além de poder estimar automaticamente a matriz de influência do sistema, possui também parâmetros que permitem estabelecer o compromisso entre a robustez e o desempenho na eliminação das vibrações.

O capítulo 6 é dedicado as simulações e à apresentação dos resultados. Para tanto, utilizou-se a técnica de regulação sincronizada modificada para o caso MIMO, onde o módulo SISO de regulação original foi substituído por um módulo MIMO que utiliza a teoria de controle ótimo adaptativo por matriz de influência, apresentada no capítulo anterior.

Finalmente o capítulo 7 apresenta as conclusões finais e sugestões para a continuidade da pesquisa.

Capítulo 2

Mancais Magnéticos

Mancais magnéticos são atuadores capazes de manter um eixo em levitação usando forças eletromagnéticas. O fato do eixo flutuar sem contato dentro do mancal tem as seguintes vantagens:

- O rotor pode trabalhar em rotações muito mais altas que as possíveis usando mancais comuns pois praticamente não há atrito entre o eixo e o mancal;
- Como não há necessidade de lubrificação, o mancal pode trabalhar em ambientes onde seria muito problemático, ou até mesmo proibido o uso de graxas ou óleos (exemplo: bombas de vácuo, coração artificial, etc.);
- Como não há partes móveis entre o eixo e o mancal, este pode trabalhar em faixas de temperaturas bem mais altas ou mais baixas que os mancais convencionais. De fato, variações dimensionais por dilatação ou contração dos materiais tem pouco efeito sobre o funcionamento do mancal magnético;
- O fato do mancal magnético ser ativo permite o controle da posição do rotor dentro do mancal com precisão micrométrica. Comumente esta característica é usada para o controle ativo de vibrações do rotor;

Infelizmente há também desvantagens. Para citar algumas delas:

- Há a necessidade de um suprimento de energia elétrica para os sensores, controladores e atuadores magnéticos;

- As dimensões e o peso do conjunto é bem maior quando comparado com os mancais convencionais de mesma capacidade de carga;
- Por ser necessário o uso de sensores, controle e amplificadores, o custo inicial é bem mais alto que outros mancais.

Por essas vantagens e desvantagens os mancais magnéticos são indicados para aplicações muito específicas como:

- Máquinas de altíssima rotação como turbogeradores;
- Bombas de vácuo e de líquidos corrosivos;
- Bomba ventricular de sangue ("coração artificial");
- Turbinas que precisam de controle ativo de vibrações do rotor;
- Bombas para aplicações críticas tais como circulação de fluido de refrigeração de reatores nucleares.

Há uma vasta literatura tratando de mancais magnéticos. Podemos citar as referências [4] e [23]. A figura 2.1 mostra um mancal radial comercializado pela empresa *Revolve Magnetic Bearing Inc.*.

Figura 2.1: Mancal magnético radial

2.1 Teoria de mancais magnéticos

O campo magnético é descrito pelas forças mecânicas e a indução eletromagnética. Num campo magnético estacionário temos que a força de *Lorenz* que age sobre uma partícula carregada com carga Q , é perpendicular à velocidade $\mathbf{v}$ e a densidade de fluxo magnético $\mathbf{B}$.

$$\mathbf{f} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.1)$$

O fluxo magnético total Φ que atravessa uma área A é a integral da densidade de fluxo sobre essa área.

$$\Phi = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.2)$$

Campos magnéticos podem ser gerados por cargas móveis (corrente elétrica), campos elétricos variáveis e ímãs permanentes. Um campo magnético simétrico circular é gerado em torno de um condutor retilíneo atravessado por uma corrente constante i . O campo magnético $\mathbf{H}$ é inversamente proporcional à distância do condutor e tem direção tangencial a círculos concêntricos ao condutor. O campo magnético e a corrente elétrica estão relacionados pela integral de caminho

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{x} = i \quad (2.3)$$

Se a integral de caminho engloba vários circuitos como, por exemplo, uma bobina ou enrolamento de n espiras, teremos

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{x} = ni \quad (2.4)$$

Essa última relação é conhecida como *lei circuital de Ampère*. O campo magnético e a densidade de fluxo estão relacionados pela lei constitutiva

$$B = \mu_0 \mu_r H \quad (2.5)$$

onde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Vs/Am é a permeabilidade magnética no vácuo e μ_r é a permeabilidade relativa que depende do meio em que o campo magnético está.

Na análise de circuitos magnéticos fechados (figura 2.2), que é o caso de mancais magnéticos, precisamos usar algumas simplificações. A primeira é considerar que todo o fluxo magnético circula somente dentro do circuito magnético (sem espalhamento de fluxo). A segunda é considerar que todas as linhas de fluxo deixam a superfície do material ferromagnético em direção perpendicular a esta. Esta simplificação vem do fato da permeabilidade do material ferromagnético ser muito superior a do ar ou vácuo. De (2.2)

$$\Phi = B_{fe} A_{fe} = B_a A_a \quad (2.6)$$

e

$$A_{fe} = A_a \quad (2.7)$$

resulta

$$B_{fe} = B_a \quad (2.8)$$

Figura 2.2: Circuito magnético [23]

Além disso, o campo magnético dentro do circuito é tido como homogêneo tanto no material ferromagnético como no entreferro. Assim, os cálculos podem se basear no comprimento médio l_{fe} do caminho magnético e no comprimento $2x$ do entreferro. Considerando a permeabilidade relativa do material ferromagnético constante, tem-se para o circuito magnético da figura 2.2.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = l_{fe}H_{fe} + 2xH_a = ni \quad (2.9)$$

O termo ni é muitas vezes chamado de força magnetomotriz pois "força" o fluxo através do circuito magnético [21].

$$l_{fe}\frac{B}{\mu_0\mu_r} + 2x\frac{B}{\mu_0} = ni \quad (2.10)$$

Ou seja

$$B = \mu_0 \frac{ni}{\frac{l_{fe}}{\mu_r} + 2x} \quad (2.11)$$

Em geral, $\mu_r \gg 1$ e a magnetização do material ferromagnético pode ser desprezada. Então a relação acima pode ser simplificada para

$$B = \mu_0 \frac{ni}{2x} \quad (2.12)$$

A energia magnética W_a armazenada no volume de ar do entreferro, $V_a = 2xA_a$, e considerando o campo magnético homogêneo no circuito magnético, é dada por

$$W_a = \frac{1}{2}B_aH_aV_a = \frac{1}{2}B_aH_aA_a(2x) \quad (2.13)$$

A força que age no corpo ferromagnético é gerada pela mudança na energia de campo do entreferro, que é função do deslocamento. Para pequenos deslocamentos ds , o fluxo magnético B_aA_a permanece aproximadamente constante.

Quando a distância s do entreferro aumenta de ds , o volume incrementa e o mesmo acontece com a energia. Esta energia tem que ser fornecida mecanicamente, ou seja, a força atrativa tem que ser vencida. Esta força é igual a [23]

$$f = -\frac{\partial W_a}{\partial x} = B_a H_a A_a = \frac{B_a^2 A_a}{\mu_0} \quad (2.14)$$

A expressão acima permite encontrar a força máxima do atuador f_{max} se B_a for substituído pela densidade máxima de fluxo no material ferromagnético B_{max} , ou seja

$$f_{max} = \frac{B_{max}^2 A_a}{\mu_0} \quad (2.15)$$

Substituindo a equação (2.12) na equação (2.14), obtém-se

$$f = \frac{\mu_0 A n^2 i^2}{4x^2} \quad (2.16)$$

Uma forma muito comum de operar os mancais magnéticos é através do chamado acionamento diferencial (*differential drive*). Esse tipo de configuração permite gerar forças positivas ou negativas (figura 2.3). Neste circuito, um dos magnetos recebe a soma da corrente de polarização com a corrente de controle ($i_0 + i_x$) enquanto que o outro recebe a diferença ($i_0 - i_x$) (figura 2.3).

Figura 2.3: Circuito simplificado de acionamento diferencial [23]

$$f_x = f_+ - f_- = k_m \left[\frac{(i_0 + i_x)^2}{(x_0 - x)^2} - \frac{(i_0 - i_x)^2}{(x_0 + x)^2} \right] \quad (2.17)$$

onde

$$k_m = \frac{\mu_0 A n^2}{4} \quad (2.18)$$

Se a equação (2.17) for simplificada e linearizada em torno do ponto de equilíbrio, será obtida

$$f_x = \frac{4k_m i_0}{x_0^2} i_x - \frac{4k_m i_0^2}{x_0^3} x \quad (2.19)$$

Essa equação pode ser escrita numa forma mais compacta

$$f_x = k_i i_x + k_x x \quad (2.20)$$

onde k_x e k_i são

$$k_i \equiv \frac{4k_m i_0}{x_0^2} \quad (2.21)$$

$$k_x \equiv -\frac{4k_m i_0^2}{x_0^3} \quad (2.22)$$

As constantes k_i e k_x são chamadas comumente de fator força/corrente [N/A] e fator força/deslocamento [N/m] [23]. Em mancais magnéticos a constante k_x é negativa o que torna o sistema mancal-eixo instável. Portanto, todo mancal magnético precisa de um controle de malha fechada que estabilize o sistema.

Uma construção bastante comum (figura 2.4), é utilizar dois pares de bobinas (ou magnetos), um par ortogonal ao outro e cada par sendo excitado pelo circuito diferencial da seção anterior. Com isso, o mancal magnético pode aplicar forças ortogonais e independentes entre si, sendo possível o controle de dois planos.

Figura 2.4: Um mancal magnético com magnetos dispostos ortogonalmente

2.2 Controle de mancais magnéticos

Como já foi dito na seção anterior, um mancal magnético precisa de um sistema de controle ativo para manter a estabilidade do sistema rotor-mancal. Tal sistema de controle utiliza sinais emitidos por sensores, localizados juntos aos atuadores, para determinar a corrente de estabilização necessária. Amplificadores, então, fornecerão a corrente com a potência necessária para excitar os atuadores, os quais criam as forças de estabilização do rotor na forma de fluxo eletromagnético. Esse circuito em malha fechada é retroalimentado milhares de vezes por segundo. A figura 2.5 mostra o diagrama de controle em malha fechada de um mancal radial. Além da malha de estabilização do mancal, um controle de malha aberta também pode simultaneamente ser usado para as vibrações do rotor ou então minimizar as vibrações transmitidas para os suportes dos mancais. O controle de malha aberta se aproveita então da natureza ativa dos mancais magnéticos para, adaptativamente, cancelar as componentes síncronas da posição medida no eixo.

Como pode ser visto na figura 2.5, o circuito possui três componentes básicos: sensor de posição, controlador de estabilização e amplificador de potência. Eventualmente, um filtro passa baixa pode também ser usado para eliminar as componentes

Figura 2.5: Diagrama de controle em malha fechada de um mancal magnético radial

de alta frequência do sinal fornecido pelos sensores. Neste circuito, a corrente no enrolamento do atuador é determinada com base na posição do rotor. A equação geral (empregando a transformada de Laplace, onde s é uma variável complexa) para o circuito de controle é,

$$i_x(s) = G_{cmf}(s)x(s) \quad (2.23)$$

onde $G_{cmf}(s)$ é a função de transferência global que expressa a relação entre a corrente de perturbação (saída) e a posição do eixo (entrada). Como G_{cmf} é uma função complexa, podemos reescrever como

$$G_{cmf}(s) = \tau_r(s) + j\tau_i(s) \quad (2.24)$$

sendo que $\tau_r(s)$ e $\tau_i(s)$ representam a parte real e a parte imaginária da função de transferência global, respectivamente. Essa função de transferência multiplicada pela posição do eixo x , produz a corrente de controle i_x .

A função de transferência $G_{cmf}(s)$ é composta por uma série de componentes de função de transferência multiplicadas entre si. Considerando todos os componentes do circuito, a função de transferência completa é dada por,

$$G_{cmf}(s) = G_{ss}(s)G_{lp}(s)G_{cnt}(s)G_{amp}(s) \quad (2.25)$$

com G_{ss} , G_{lp} , G_{cnt} e G_{amp} funções de transferência do sensor de posição, do filtro passa baixa, do controle de estabilização e do amplificador de potência, respectivamente. A seguir serão apresentadas as funções que regem cada componente do circuito de controle.

2.2.1 Sensor de posição

Os sensores de posição são usados para monitorarem continuamente a posição do rotor no mancal magnético. Normalmente são usados sensores sem contato, podendo ser do tipo indutivo, capacitivo, de corrente parasita (*eddy current*) ou óptico. Dependendo do tipo de sensor, este deverá ser instalado à uma distância conveniente das bobinas da mancal magnético de forma a não haver interferência com o campo magnético das bobinas. O sensor emite tensão de saída que é proporcional à posição do eixo, e a função de transferência do sensor, considerando que ele se comporta linearmente na faixa de movimento do rotor, é dada simplesmente por, [5],

$$G_{ss}(s) = \frac{V_x(s)}{x(s)} \quad (2.26)$$

Em um mancal magnético radial, o sensor deve ser colocado o mais próximo possível da localização do mancal, para garantir uma melhor precisão na medida da posição do rotor e evitar problemas no controle. Um problema particular surge quando um ponto nodal do eixo, associado a uma particular frequência natural do rotor, é localizado entre o ponto de leitura do sensor e o ponto de atuação do mancal magnético.

2.2.2 Filtro passa baixa

O filtro passa baixa é utilizado para reduzir o ganho das altas frequências do controlador, acima da largura de banda pré-estabelecida, evitando o esforço desnecessário do controle de estabilização. O filtro passa baixa também proporciona uma operação

silenciosa do mancal, atenuando o ruído de origem elétrica, de altas frequências. Um modelo de filtro passa baixa de segunda ordem pode ser expresso da forma, [5],

$$G_{lp}(s) = \frac{V_{lp}(s)}{V_x(s)} = \frac{\omega_{lp}^2}{s^2 + 2\xi_{lp}\omega_{lp}s + \omega_{lp}^2} \quad (2.27)$$

sendo que V_{lp} é a tensão saída do filtro, V_x é a tensão de entrada vinda do sensor de posição, ω_{lp} é a frequência de corte do filtro passa baixa, ξ_{lp} é o fator de amortecimento do filtro e s é a variável complexa de frequência.

2.2.3 Controle de estabilização

Normalmente, o controle PID é o método de controle mais utilizado para mancais magnéticos. A forma padrão da função de transferência do filtro PID é dada por, [5],

$$G_{cnt}(s) = \frac{V_{cnt}(s)}{V_{lp}(s)} = K_t \frac{(K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s} \quad (2.28)$$

sendo K_t o ganho total, K_d o ganho derivativo, K_p o ganho proporcional, K_i o ganho integral e s a variável complexa de frequência. V_{cnt} é a tensão de saída do filtro e V_{lp} é a tensão de entrada vinda do filtro passa baixa. O ganho proporcional afeta diretamente a rigidez do mancal, uma vez que ele está multiplicado diretamente pelo sinal de posição. De forma similar, o ganho derivativo afeta diretamente o amortecimento do eixo, porque ele está multiplicado pela derivada do sinal de posição. O ganho integral age sobre os níveis permanentes DC (“*steady offsets*”) e proporciona uma forma de eliminar os erros de regime permanente da posição do rotor. O ganho total é simplesmente um multiplicador sobre os três ganhos simultaneamente.

Quando o controlador é implementado usando circuitos analógicos com amplificadores operacionais, costuma-se usar um controle do tipo *atraso-avanço*. A razão disso é que um circuito integrador analógico apresenta problemas de saturação do sinal de saída. A função de transferência do controle tipo *atraso-avanço* é

$$G_{cnt}(s) = K_t \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{(s + p_1)(s + p_2)} \quad (2.29)$$

onde K_t é o ganho total, z_1 e z_2 são os zeros da função de transferência, p_1 e p_2 os polos e s a variável complexa de frequência.

2.2.4 Amplificador de potência

O amplificador de potência é responsável por converter o sinal vindo do circuito de controle (tipicamente uma tensão) numa corrente proporcional à esse sinal e que será fornecida para os enrolamentos do mancal. A função de transferência de um amplificador de potência pode ser expressa como, [5],

$$G_{amp}(s) = \frac{I_c(s)}{V_{cnt}(s)} = K_a \frac{\omega_{amp}^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_{amp}s + \omega_{amp}^2} \quad (2.30)$$

sendo I_c a corrente de controle para o mancal magnético, V_{cnt} a tensão de entrada vinda do filtro PID, ω_{amp} a frequência de corte do amplificador, K_a o ganho do amplificador e s a variável complexa de frequência.

2.3 Modelo matemático do sistema rotor-mancal magnético

Em cada eixo de controle do mancal magnético atuam dois magnetos montados em lados opostos, conforme está mostrado na figura 2.6.

Figura 2.6: Diagrama de corpo livre de um mancal radial

onde m_r é a massa do rotor, F_1 e F_2 são as forças aplicadas por cada magneto ao rotor e F_i é uma força externa agindo sobre o rotor. A equação do movimento que descreve esse sistema é dada por,

$$m_r \ddot{x} + F_1 - F_2 = F_i \quad (2.31)$$

A força líquida F_i é dada pela equação (2.20). Substituindo a equação (2.20) na equação (2.31), têm-se

$$m_r \ddot{x} + k_x x + k_i i_x = F_i \quad (2.32)$$

2.4 Rigidez e amortecimento equivalentes

Um controlador retroalimentado tira vantagem da rigidez positiva de corrente para proporcionar estabilidade do sistema. O controlador ajusta a corrente de perturbação i_x para os magnetos contraporem à mudança na posição detectada por um sensor dentro do mancal. A função de transferência do controlador fornece uma relação entre a corrente de perturbação (saída) e a posição (entrada), como discutida anteriormente. A corrente de perturbação, i_x , é também referida como corrente de controle, i_c , porque ela é gerada pelo sistema de controle, associada à eletrônica envolvida. A função de transferência do controlador, equação (2.24), também contém a informação da fase relativa entre o sinal da corrente e o sinal da posição de entrada. Essa equação pode ser convenientemente simplificada, substituindo-se a variável complexa s pela frequência complexa $j\omega$ para chegar a,

$$G(j\omega) = \tau_r(\omega) + j\tau_i(\omega) \quad (2.33)$$

Essa função de transferência, multiplicada pela posição x , leva à corrente de controle i_c , a qual pode ser substituída na equação (2.32) para dar,

$$-m_r X \omega^2 + [k_x + k_i(\tau_r(\omega) + j\tau_i(\omega))]X = \bar{f} \quad (2.34)$$

A equação (2.34) assume uma força harmônica externa atuando sobre o sistema, tal que a aceleração da massa pode ser representada como $-X\omega^2$. Assim a rigidez e o amortecimento do mancal podem agora ser determinados igualando a força líquida, produzida pela rigidez de posição e de corrente juntamente com a função de transferência do controlador, com uma força produzida por uma rigidez e um amortecimento equivalentes. Equacionando essas duas forças têm-se,

$$(K_{eq} + D_{eq}j\omega)X = [k_x + k_i(\tau_r + j\tau_i)]X \quad (2.35)$$

e, igualando os termos reais de ambos os lados da equação, obtém-se a rigidez equivalente dada como,

$$K_{eq} = k_x + k_i\tau_r \quad (2.36)$$

e, dos termos imaginários, obtém-se o amortecimento equivalente expresso por,

$$D_{eq} = \frac{k_i\tau_i}{\omega} \quad (2.37)$$

As equações (2.36) e (2.37) representam a rigidez e o amortecimento linearizados de um único eixo de controle. Esses valores variam com a frequência devido à sua dependência da parte real e da parte imaginária da função de transferência do controlador, que também são dependentes da frequência. Para modelar um sistema de mancal magnético radial com sucesso, a função de transferência do controlador deve ser conhecida. A rigidez e amortecimentos equivalentes fornecem uma simplificação deste modelo que pode ser útil em alguns casos, mas considera a dinâmica real do controle de malha fechada como dinâmica não modelada.

A equação de movimento completa de um sistema rotor mancal magnético pode ser obtida combinando a equação do modelo do rotor com a equação do modelo do man-

cal magnético ativo representado pelas equações (2.36) e (2.37). A equação completa pode ser escrita como,

$$\mathbf{M}\ddot{\zeta} + (\mathbf{D}_{rotor} + \mathbf{D}_{eq})\dot{\zeta} + (\mathbf{K}_{rotor} + \mathbf{K}_{eq})\zeta = \mathbf{f} \quad (2.38)$$

onde $\mathbf{M}$ é a matriz de massa do sistema, ζ é o vetor de coordenadas do sistema, $\mathbf{D}_{rotor}$ é a matriz de amortecimento do rotor, $\mathbf{D}_{eq}$ é a matriz de amortecimento equivalente dos mancais magnéticos, $\mathbf{K}_{rotor}$ é a matriz de rigidez do rotor, $\mathbf{K}_{eq}$ é a matriz de rigidez equivalente dos mancais magnéticos e $\mathbf{f}$ é o vetor das forças externas aplicadas ao sistema. As matrizes $\mathbf{D}_{eq}$ e $\mathbf{K}_{rotor}$ contém as propriedades dos mancais magnéticos, calculadas de acordo com as equações (2.36) e (2.37).

Capítulo 3

Modelagem de Rotores

Segundo a definição da ISO, um rotor é um corpo suportado por mancais que o permitem girar livremente em torno de um eixo fixo no espaço. Eixos de transmissão, turbinas de reação, eixos de turbobombas de vácuo são exemplo de rotores. Há vários métodos para se modelar matematicamente os rotores. Podemos citar por exemplo o método de *Rayleigh-Ritz*, o método modal, o método das matrizes de impedância e o método dos elementos finitos.

Para o presente trabalho escolhemos o método de elementos finitos pela facilidade de modelar rotores de estrutura complexa e estrutura de fácil aplicação computacional. A descrição deste método pode ser encontrada em [8], [14] e [15]. Nas seções seguintes será mostrado o desenvolvimento deste método conforme apresentado em [15].

3.1 Método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos consiste em discretizar a estrutura em elementos de dimensões finitas unidos entre si por pontos denominados nós. A partir da hipótese de deslocamento de um ponto do elemento, calcula-se as energias de deformação, cinética e de dissipação em função dos deslocamentos dos nós. Logo, se a estrutura foi dividida em n elementos, a energia de deformação total, a energia cinética total e a energia de dissipação total correspondem a soma de cada um dos componentes de cada elemento.

Os elementos básicos de um rotor são os discos, o eixo e os mancais (figura 3.1). Uma característica que é usada para classificar os eixos e discos é a relação entre o comprimento do elemento e o seu diâmetro externo. Se a dimensão do diâmetro externo for muito superior ao seu comprimento, o elemento é considerado um disco. De outro modo, se a dimensão do comprimento é muito maior que o diâmetro externo, esse elemento é considerado um eixo. Para caracterizar os discos e os desbalanceamentos usamos as expressões de energia cinética. No caso do eixo, além da expressão da energia cinética, usamos a expressão da energia de deformação. As forças devidas aos mancais são usadas para calcular o trabalho virtual e então determinamos as forças atuantes no eixo. A equação dinâmica de um rotor pode ser obtida aplicando-se as equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\zeta}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \zeta_i} + \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} = f_{\zeta_i} \quad (3.1)$$

onde T é a energia cinética, U é a energia de deformação (energia potencial), ζ_i são as coordenadas generalizadas, f_{ζ_i} as forças generalizadas e t o tempo.

Figura 3.1: Sistema rotativo mostrando seus elementos e o sistema de referência

3.2 Elemento de disco

O elemento de disco [15] é considerado rígido e é caracterizado somente pela sua energia cinética. $R_0(XYZ)$ é um referencial inercial e $R(xyz)$ é outro referencial solidário ao disco (figura 3.2). O sistema de coordenadas xyz está relacionado ao sistema de coordenadas XYZ pelo conjunto de três ângulos ψ , θ e ϕ . Para obter-se a orientação espacial do disco, este primeiro gira em torno do eixo Z num ângulo ψ , depois gira em torno do novo eixo x , denominado x_1 , num ângulo θ e finalmente gira em torno de y num ângulo ϕ .

Figura 3.2: Sistema de coordenadas do disco sobre um eixo flexível girante [15]

O vetor velocidade angular instantânea do referencial xyz é

$$\omega_{R/R_0} = \dot{\psi}Z + \dot{\theta}x_1 + \dot{\phi}y \quad (3.2)$$

onde Z , x_1 e y são vetores unitários.

A energia cinética do disco em torno do seu centro de massa O é calculada usando o referencial R . Nesse sistema, o vetor da velocidade angular se torna

$$\omega_{R/R_0}^R = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

A massa do disco será denominada M_D . O tensor de inércia em O no referencial xyz é

$$I_0 = \begin{pmatrix} I_{D_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{D_y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{D_z} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

A expressão da energia cinética do disco é

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{D_x} \omega_x^2 + I_{D_y} \omega_y^2 + I_{D_z} \omega_z^2) \quad (3.5)$$

Esta equação pode ser simplificada se for observado que o disco tem simetria ($I_{D_x} = I_{D_z}$). Como os ângulos θ e ψ são pequenos e considerando a velocidade angular constante ($\dot{\phi} = \Omega$), a equação (3.5) fica.

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{D_x} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{D_y} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi} \theta) \quad (3.6)$$

onde o termo $\frac{1}{2} I_{D_y} \Omega^2$ é constante e não tem influência na equação. O último termo, $I_{D_y} \Omega \dot{\psi} \theta$, representa o efeito giroscópico.

Cada nó do rotor tem quatro graus de liberdade: dois deslocamentos u e w e duas inclinações sobre os eixos X e Z , denominados θ e ψ . Se for considerado um vetor de deslocamento nodal ζ a partir do centro O do disco

$$\zeta = [u \ w \ \theta \ \psi]^T \quad (3.7)$$

a aplicação da equação de Lagrange na equação (3.6) resulta em

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_D}{\partial \dot{\zeta}} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial \zeta} = & \begin{pmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{D_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{D_x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} \\
& + \Omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{D_y} \\ 0 & 0 & I_{D_y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

onde a primeira matriz é a matriz de massa e a segunda é a matriz giroscópica.

3.3 Elemento de eixo

O eixo é modelado [15] como uma viga de seção circular constante. Cada elemento finito do eixo possui dois nós, o que resulta em matrizes de oitava ordem (quatro deslocamentos e quatro inclinações) (veja a figura 3.3). As inclinações estão relacionadas aos deslocamentos pelas equações

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \tag{3.9}$$

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{3.10}$$

O vetor de deslocamento nodal é

$$\zeta = [u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ \psi_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2 \ \psi_2]^T \tag{3.11}$$

que inclui os vetores de deslocamentos ζ_u e ζ_w que correspondem aos movimentos nas direções X e Z , respectivamente

Figura 3.3: Sistema de coordenadas de um elemento de eixo

$$\zeta_u = [u_1 \ \psi_1 \ u_2 \ \psi_2]^T \quad (3.12)$$

$$\zeta_w = [w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2]^T \quad (3.13)$$

O elemento finito pode ser construído a partir das equações

$$u(y, t) = \eta_u(y) \zeta_u \quad (3.14)$$

$$w(y, t) = \eta_w(y) \zeta_w \quad (3.15)$$

onde η_u e η_w são funções de interpolação para uma viga flexionada

$$\eta_u = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3y^2}{l^2} + \frac{2y^3}{l^3} & -y + \frac{2y^2}{l} - \frac{y^3}{l^2} & \frac{3y^2}{l^2} - \frac{2y^3}{l^3} & \frac{y^2}{l} - \frac{y^3}{l^2} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\eta_w = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3y^2}{l^2} + \frac{2y^3}{l^3} & y - \frac{2y^2}{l} + \frac{y^3}{l^2} & \frac{3y^2}{l^2} - \frac{2y^3}{l^3} & -\frac{y^2}{l} + \frac{y^3}{l^2} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Figura 3.4: Funções de Interpolação [23]

3.3.1 Energia cinética do elemento de eixo

A energia cinética vem da extensão da equação (3.6) do disco [15]. Para um elemento de comprimento l , a expressão da energia cinética é

$$T_S = \frac{\rho S}{2} \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^l (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) dy + \rho I l \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^l \dot{\psi} \theta dy \quad (3.18)$$

onde ρ é a massa por unidade de volume, S é a área da seção reta da viga, supostamente constante e I é o momento de inércia de área da seção reta da viga, também supostamente constante.

A primeira integral de (3.18) é a expressão clássica para a energia cinética de uma viga em balanço; a segunda integral é o efeito secundário da inércia rotacional. O termo $\rho I l \Omega^2$ é constante e não tem influência nas equações. Finalmente, a última integral representa o efeito giroscópico.

Reescrevendo a equação (3.18) usando as funções de interpolação, obtemos

$$\begin{aligned}
T_S = & \frac{\rho S}{2} \int_0^l \left[\dot{\zeta}_u^T \eta_u^T \eta_u \dot{\zeta}_u + \dot{\zeta}_w^T \eta_w^T \eta_w \dot{\zeta}_w \right] dy \\
& + \frac{\rho I}{2} \int_0^l \left[\dot{\zeta}_u^T \frac{d\eta_u^T}{dy} \frac{d\eta_u}{dy} \dot{\zeta}_u + \dot{\zeta}_w^T \frac{d\eta_w^T}{dy} \frac{d\eta_w}{dy} \dot{\zeta}_w \right] dy \\
& - 2\rho I \Omega \int_0^l \left[\dot{\zeta}_u^T \frac{d\eta_u^T}{dy} \frac{d\eta_w}{dy} \dot{\zeta}_w \right] dy + \rho I l \Omega^2
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Substituindo as equações (3.16) e (3.17) na equação (3.19) será obtido, após a integração

$$\begin{aligned}
T_S = & \frac{1}{2} \dot{\zeta}_u^T \mathbf{M}_1 \dot{\zeta}_u + \frac{1}{2} \dot{\zeta}_w^T \mathbf{M}_2 \dot{\zeta}_w + \frac{1}{2} \dot{\zeta}_u^T \mathbf{M}_3 \dot{\zeta}_u \\
& + \frac{1}{2} \dot{\zeta}_w^T \mathbf{M}_4 \dot{\zeta}_w + \frac{1}{2} \Omega \dot{\zeta}_u^T \mathbf{M}_5 \dot{\zeta}_w + \rho I l \Omega^2
\end{aligned} \tag{3.20}$$

onde as matrizes $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ são as matrizes clássicas de massa, $\mathbf{M}_3$ e $\mathbf{M}_4$ dão a influência do efeito secundário da inércia de rotação e $\mathbf{M}_5$ nos dá o efeito giroscópico. Aplicando a equação de *Lagrange* em (3.20)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_S}{\partial \dot{\zeta}} \right) - \frac{\partial T_S}{\partial \zeta} = (\mathbf{M}_R + \mathbf{M}_S) \ddot{\zeta} + \mathbf{G} \dot{\zeta} \tag{3.21}$$

onde $\mathbf{M}_R$ é obtida de $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_S$ vem de $\mathbf{M}_3$ e $\mathbf{M}_4$ e a matriz $\mathbf{G}$ vem de $\mathbf{M}_5$. Essas matrizes são

$$\mathbf{M}_R = \frac{\rho S l}{420} \begin{pmatrix} 156 & 0 & 0 & -22l & 54 & 0 & 0 & 13l \\ & 156 & 22l & 0 & 0 & 54 & -13l & 0 \\ & & 4l^2 & 0 & 0 & 13l & -3l^2 & 0 \\ & & & 4l^2 & -13l & 0 & 0 & -3l^2 \\ & & & & 156 & 0 & 0 & 22l \\ & & & & & 156 & -22l & 0 \\ & & & & & & 4l^2 & 0 \\ & & & & & & & 4l^2 \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

$$\mathbf{M}_S = \frac{\rho I}{30l} \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 & -3l & -36 & 0 & 0 & -3l \\ & 36 & 3l & 0 & 0 & -36 & 3l & 0 \\ & & 4l^2 & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 \\ & & & 4l^2 & 3l & 0 & 0 & -l^2 \\ & & & & 36 & 0 & 0 & 3l \\ & & & & & 36 & -3l & 0 \\ & sim. & & & & & 4l^2 & 0 \\ & & & & & & & 4l^2 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{G} = \frac{\rho I \Omega}{15l} \begin{pmatrix} 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 36 & -3l & 0 \\ & 0 & 0 & -3l & -36 & 0 & 0 & -3l \\ & & 0 & -4l^2 & -3l & 0 & 0 & l^2 \\ & & & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 \\ & & & & 0 & -36 & 3l & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 3l \\ & antisim. & & & & & 0 & -4l^2 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

3.3.2 Energia de deformação do elemento de eixo

A seguinte notação será usada: C é o centro geométrico da viga, $B(x, y)$ é um ponto qualquer da seção da viga, E é o módulo de *Young* do material, ε e σ são a deformação e o cisalhamento, e u^* e w^* são os deslocamentos do centro geométrico com respeito aos eixos x e z (figura 3.5).

Se os termos de segunda ordem forem incluídos, é possível demonstrar que a deformação longitudinal do ponto B é [15]

$$\varepsilon = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \quad (3.25)$$

ou

Figura 3.5: Coordenadas do centro geométrico C e um ponto B qualquer do eixo

$$\varepsilon = \varepsilon_l + \varepsilon_{nl} \quad (3.26)$$

onde ε_l contém os termos lineares e ε_{nl} os termos não lineares. A energia de deformação é

$$U_S = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^T \sigma d\tau \quad (3.27)$$

A relação entre a força e a deformação é

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.28)$$

Então

$$U_S = \frac{E}{2} \int_{\tau} (\varepsilon_l^2 + 2\varepsilon_l\varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^2) d\tau \quad (3.29)$$

Da simetria da viga com relação aos eixos x e z resulta

$$\int_{\tau} (\varepsilon_l \varepsilon_{nl}) d\tau = 0 \quad (3.30)$$

e o terceiro termo na integral (3.29) é um termo de segunda ordem e pode ser desprezado. A energia de deformação é então

$$\begin{aligned} U_S &= \frac{E}{2} \int_0^l \int_S \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \\ &= \frac{E}{2} \int_0^l \int_S \left[x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] dS dy \end{aligned} \quad (3.31)$$

Por causa da simetria, a integral do último termo da equação (3.31) é nula.

Introduzindo o momento de inércia de área com relação aos eixos x e z

$$I_x = \int_S z^2 dS \quad (3.32)$$

$$I_z = \int_S x^2 dS \quad (3.33)$$

A energia da deformação do eixo é então

$$U_S = \frac{E}{2} \int_0^l \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.34)$$

Da figura 3.5, pode-se afirmar

$$u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \quad (3.35)$$

$$w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \quad (3.36)$$

Substituindo na equação (3.34), obtêm-se

$$U_S = \frac{E}{2} \int_0^l \left[I_z \left(\cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.37)$$

Finalmente, para os casos em que o eixo é simétrico, isto é, $I_x = I_z = I$, a energia de deformação se torna

$$U_S = \frac{EI}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.38)$$

Aplicando as equações (3.14) e (3.15) em (3.38), temos

$$U_S = \frac{EI}{2} \int_0^l \left[\zeta_u^T \frac{d\eta_u^T}{dy} \frac{d\eta_u}{dy} \zeta_u + \zeta_w^T \frac{d\eta_w^T}{dy} \frac{d\eta_w}{dy} \zeta_w \right] dy \quad (3.39)$$

Depois da integração, obtém-se

$$U_S = \frac{1}{2} \zeta_u^T \mathbf{K}_1 \zeta_u + \frac{1}{2} \zeta_w^T \mathbf{K}_2 \zeta_w \quad (3.40)$$

Onde as matrizes $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$ são as matrizes clássicas de rigidez. Também é frequentemente necessário levar em conta o efeito do cisalhamento, que é caracterizado pela quantidade

$$\chi = \frac{12EI\kappa}{GSl^2} \quad (3.41)$$

com o módulo de cisalhamento G dado por

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.42)$$

A quantidade κ representa o fator de cisalhamento [8]. Para um eixo de seção anular, seu valor é dado por

$$\kappa = \frac{(7+6\nu)(1+r_d)^2 + 4r_d(5+3\nu)}{6(1+\nu)(1+r_d)^2} \quad (3.43)$$

onde ν é a razão de *Poisson* do material do eixo e r_d é a razão entre o diâmetro interno e externo do eixo.

Se a equação de Lagrange for aplicada à (3.40), nós teremos

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta} = \mathbf{K}\zeta \quad (3.44)$$

com

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{(1+\chi)l^3} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & -6l & -12 & 0 & 0 & -6l \\ & 12 & 6l & 0 & 0 & -12 & 6l & 0 \\ & & (4+\chi)l^2 & 0 & 0 & -6l & (2-\chi)l^2 & 0 \\ & & & (4+\chi)l^2 & 6l & 0 & 0 & (2-\chi)l^2 \\ & & & & 12 & 0 & 0 & 6l \\ & & & & & 12 & -6l & 0 \\ & sim. & & & & & (4+\chi)l^2 & 0 \\ & & & & & & & (4+\chi)l^2 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Se $\chi = 0$, a matriz $\mathbf{K}$ (3.45) reduz-se a matriz clássica de rigidez de uma viga de Euler-Bernoulli em flexão.

3.4 Mancais

Será assumido que os termos de rigidez e amortecimento viscoso são conhecidos e a influência da flexão do eixo é desprezível [15]. Da figura 3.6, o trabalho virtual δW das forças agindo no eixo pode ser escrita

$$\begin{aligned} \delta W = & -k_{xx}u\delta u - k_{zz}w\delta w \\ & -c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{zz}\dot{w}\delta w \end{aligned} \quad (3.46)$$

ou

$$\delta W = F_u\delta u + F_w\delta w \quad (3.47)$$

Figura 3.6: Rigidez e amortecimento do mancal

onde F_u e F_w são os componentes da força generalizada. Na forma matricial, as equações (3.46) e (3.47) ficam

$$\begin{pmatrix} F_u \\ F_w \\ F_\theta \\ F_\psi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

A primeira matriz é uma matriz de rigidez enquanto que a segunda é uma matriz de amortecimento viscoso e os termos das matrizes podem variar significativamente em função da velocidade de rotação.

3.5 Desbalanceamento de massa

Um desbalanceamento é definido por uma massa m_u situada a uma distância d do centro geométrico do eixo [15]. A massa permanece perpendicular ao eixo y e a sua coordenada sobre o eixo y permanece constante (figura 3.7). O vetor velocidade é dado por

Figura 3.7: Desbalanceamento de massa

$$\dot{\overline{CD}} = \begin{pmatrix} \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d\Omega \sin \Omega t \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

e a energia cinética do desbalanceamento de massa

$$T_U = \frac{m_u}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2d\Omega \dot{u} \cos \Omega t - 2d\Omega \dot{w} \sin \Omega t) \quad (3.50)$$

O termo $m_u \Omega^2 d^2 / 2$ é constante e não tem influência nas equações. Normalmente a massa m_u é muito menor que a massa do rotor, assim a expressão da energia cinética pode ser escrita

$$T_U \approx m_u \Omega^2 d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (3.51)$$

Aplicando a equação de Lagrange nós obtemos o vetor de força centrífuga.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_U}{\partial \dot{\zeta}} \right) - \frac{\partial T_U}{\partial \zeta} = -m_u d \Omega^2 \begin{pmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

com $\zeta = [u, w]^T$. A expressão (3.52) corresponde a um desbalanceamento de massa

situado no eixo z em $t = 0$. Quando rotores industriais são estudados, a influência de diversos desbalanceamentos de massa agindo simultaneamente devem ser considerados. Para um desbalanceamento de massa situado em $t = 0$ com uma posição angular α com respeito ao eixo z , as forças se tornam

$$\begin{pmatrix} F_u \\ F_w \end{pmatrix} = m_u d \Omega^2 \begin{pmatrix} \sin(\Omega t + \alpha) \\ \cos(\Omega t + \alpha) \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

que pode ser reescrita

$$\begin{pmatrix} F_u \\ F_w \end{pmatrix} = m_u d \Omega^2 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} \sin \Omega t + m_u d \Omega^2 \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \cos \Omega t \quad (3.54)$$

3.6 Equações do rotor

Uma vez determinado todas as matrizes elementares dos componentes do rotor, é possível obter a equação diferencial de movimento do rotor da forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\delta} + \Omega \mathbf{G}\dot{\delta} + \mathbf{K}\delta = \mathbf{f}(t) \quad (3.55)$$

onde δ é o vetor contendo os deslocamentos nodais; $\mathbf{M}$ é a matriz simétrica de massa; $\mathbf{G}$ é uma matriz anti-simétrica giroscópica; $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez, simétrica; $\mathbf{f}(t)$ é o vetor de forças que inclui a força da gravidade, as forças provocadas pelo desbalanceamento do rotor, as forças harmônicas e as forças assíncronas.

Para determinar-se as matrizes $\mathbf{M}$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{K}$, devem ser seguidos os seguintes passos:

- Obter as propriedades mecânicas dos materiais usados no rotor, ou seja, o módulo de elasticidade E , a densidade de massa ρ e o coeficiente de Poisson;
- Subdividir os eixo do rotor em vários elementos discretos de eixo conectados entre si por nós. Não há um método específico para essa subdivisão, porém

Figura 3.8: Arranjo das submatrizes numa matriz global

há algumas regras a serem seguidas: deverá haver um nó no local onde: for extremidade do eixo; houver uma mudança de geometria (diâmetro) do eixo; mudança de material; for centro de massa de um elemento de disco; for um ponto de colocação de sensor, for um ponto de atuação de elementos de rigidez ou amortecimento (mancais); for um ponto de atuação de força (desbalanceamento, mancal magnético ativo, etc);

- A dimensão das matrizes será igual ao número de nós multiplicado por quatro, o número de graus de liberdade de cada nó. Por exemplo, se um eixo tiver sido subdividido em quatro nós, a dimensão das matrizes globais $\mathbf{M}$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{K}$ será dezesseis;

- Para cada elemento de eixo será determinado as submatrizes $\mathbf{M}_{i,i+1}$, $\mathbf{G}_{i,i+1}$ e $\mathbf{K}_{i,i+1}$ onde i é o índice do elemento. Por exemplo, o elemento de eixo 1 determina as submatrizes $\mathbf{M}_{1,2}$, $\mathbf{G}_{1,2}$ e $\mathbf{K}_{1,2}$, o elemento de eixo 2 as submatrizes $\mathbf{M}_{2,3}$, $\mathbf{G}_{2,3}$ e $\mathbf{K}_{2,3}$, e assim por diante;
- Cada submatriz é somada a respectiva matriz global em seus respectivos nós. Exemplo: a matriz $\mathbf{M}_{1,2}$ que contém os nós 1 e 2 é somada elemento a elemento as linhas/colunas de 1 até 8 da matriz global $\mathbf{M}$; $\mathbf{M}_{2,3}$ que contém os nós 2 e 3 é somada aos elementos das linhas/colunas de 5 até 12 da matriz global $\mathbf{M}$, e isso será feito até a última submatriz (veja a figura 3.8);
- Passa-se agora a determinar as submatrizes $\mathbf{M}_{D_i}$ e $\mathbf{G}_{D_i}$ de cada elemento disco, onde i é o nó onde está o centro de massa do disco. Novamente deve-se somar cada submatriz aos respectivos elementos do nó na matriz global (representados pelos pequenos quadrados escuros na figura 3.8).
- Continua-se agora com as características dos elementos restantes como a rigidez e amortecimento de cada mancal. Da mesma forma como foi feito com as submatrizes dos discos, soma-se as submatrizes de rigidez e amortecimento às matrizes globais.
- Por fim restam os vetores das forças de excitação (em geral desbalanceamentos) que devem ser montados de acordo com o nó e o grau de liberdade que ele excita.

Capítulo 4

Regulação Sincronizada

A técnica de regulação sincronizada foi apresentada na dissertação de *Vaidya Segura* [24]. Nesse trabalho foi demonstrado a funcionalidade e robustez da regulação sincronizada aplicada uma planta SISO. Será reapresentada esta técnica seguindo aproximadamente o conteúdo do capítulo 3 da referida dissertação. Algumas denominações usadas terão seus nomes alterados objetivando com isso uma maior clareza.

A regulação sincronizada tem por objetivo eliminar completamente uma perturbação senoidal aplicada à entrada de um sistema. A única característica conhecida dessa perturbação é a sua frequência angular Ω , enquanto que sua amplitude A e fase α são desconhecidas. Se a função de transferência $g(s)$ do sistema for conhecida, mesmo que de forma aproximada, será possível então usar o regulador síncrono para gerar um sinal de mesma amplitude mas de fase oposta a esse distúrbio de forma a cancelá-lo.

4.1 Heurística

Assuma que uma certa planta SISO está sendo controlada por um sistema de controle que pode ser analógico ou digital (figura 4.1). O objetivo deste sistema de controle é a estabilização desta planta e o estabelecimento de outros critérios de desempenho e robustez. Neste trabalho não será tratado do problema de projetar este sistema de controle e será assumido que este projeto já foi realizado.

O problema tratado aqui se resume ao projeto de um controle externo adicional,

Figura 4.1: Sistema SISO com controle de estabilização e desempenho

que pretende eliminar o efeito de uma perturbação $w(t) = A \sin(\Omega t + \alpha)$ através de uma aplicação de uma entrada $u(t)$ que cancele esta perturbação. A ideia básica é descrita a seguir.

Assume-se que $u(t)$ será da forma

$$u(t) = \bar{u}(t) \sin(\Omega t + \bar{\phi}(t)) \quad (4.1)$$

Sendo que a amplitude $\bar{u}(t)$ e a fase $\bar{\phi}(t)$ é constante por partes dentro de cada intervalo $m_s T_w$.

Assumindo por simplicidade que a única perturbação que age sobre a planta é $w(t)$ e que o controle da figura 4.1 estabiliza a planta, a resposta $y(t)$ será da forma

$$y(t) = \bar{y}(t) \sin(\Omega t + \bar{\gamma}(t)) + \text{termos transitórios} \quad (4.2)$$

onde $\bar{y}(t)$ e $\bar{\gamma}(t)$ também são constantes por partes.

Considere que o sistema em malha fechada da figura 4.1 com entrada u e saída y é aproximado por uma função de transferência SISO $g(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$. Utilizando a notação fasorial seguinte para $u(t)$ que figura na equação (4.1):

$$\bar{u}(t) / \underline{\bar{\phi}(t)} = u_h \quad (4.3)$$

Em (4.3) está sendo dito que $\bar{u}(t) / \underline{\bar{\phi}(t)}$ é um número complexo constante u_h de

cada intervalo $t \in [hm_sT_w, (h+1)m_sT_w), h = 0, 1, 2, \dots$. Usando da mesma notação, pode-se afirmar também que

$$\bar{y}(t)/\underline{\bar{y}}(t) = e_h \quad (4.4)$$

onde e_h é também um número complexo constante dentro de cada intervalo $t \in [hm_sT_w, (h+1)m_sT_w), h = 0, 1, 2, \dots$.

Assuma que foi construído um subsistema que denominado *módulo de filtragem*, capaz de determinar os valores de e_h . Para isso, m_sT_w deve ser suficientemente grande para que os termos transitórios possam ser desprezados ao final de cada intervalo de comprimento m_sT_w . Assuma também que foi construído outro subsistema, denominado *módulo de geração de sinal* que converte o sinal discreto u_h em $u(t)$ dado pela equação (4.1). Ambos módulos estão mostrados na figura 4.2.

Figura 4.2: Diagrama com módulos de geração e filtragem

Lembrando que a dinâmica do sistema em malha fechada da figura 4.1 pode ser aproximada por um sistema linear estável de função de transferência $g(s)$ e, assumindo inicialmente $w(t) = 0$, tem-se que a relação entre os sinais discretos (complexos) e_h e u_h é simplesmente dada por $g(j\Omega)$, isto é

$$\frac{e_h}{u_h} = g(j\Omega), \quad h = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

Para ver que isto é verdade, basta lembrar que dentro de cada intervalo de tempo $[hm_sT_w, (h+1)m_sT_w)$ tem-se

$$u(t) = \|u_h\| \sin(\Omega t + \angle u_h) \quad (4.6)$$

Portanto, pelo teorema da resposta permanente senoidal

$$y(t) = \|e_h\| \sin(\Omega t + \angle e_h) + \text{termos transitórios} \quad (4.7)$$

onde a relação entre e_h e u_h é dada por (4.5).

Note que, quando a perturbação está presente, se for assumido que

$$w(t) = \bar{w} \sin(\Omega t + \bar{\alpha}) \quad (4.8)$$

onde $\bar{w}$ são constantes, o diagrama da figura 4.3 produz a mesma saída e_h que o diagrama da figura 4.2 quando $w_h = \bar{w}/\bar{\alpha}$.

Figura 4.3: Diagrama equivalente à figura 4.2

Note que o modelo do sistema de entrada u_h e saída e_h é apresentado de forma simplificada na figura 4.4

O problema de controle recai num problema simples de regulação de uma entrada complexa constante w_h , que será solucionado na seção 4.5.2.

Figura 4.4: Sistema simplificado

Como a implementação dos módulos de filtragem e de geração de sinal será digital, serão colocados conversores A/D e D/A trabalhando em um período de amostragem $\frac{T_w}{L_s}$, onde $T_w = \frac{2\pi}{\Omega}$ é o período da perturbação, e L_s é suficientemente grande para garantir o bom funcionamento do sistema, como será visto a seguir (figura 4.5).

Figura 4.5: Sistema com módulos de geração e filtragem e conversores A/D e D/A

Desta forma, o sistema completo adquire o aspecto da figura 4.6. Note que o módulo de regulação será projetado para o cancelamento perfeito da perturbação.

Figura 4.6: Sistema com módulos de geração, filtragem e regulação

4.2 Esquema da regulação sincronizada

A regulação sincronizada é dividida em duas grandes partes. A primeira, não sincronizada com o sinal de distúrbio da planta, é efetuada pelo Módulo de Estabilização e Desempenho¹ e tem a responsabilidade de resolver os problemas de estabilidade e desempenho da planta. A segunda parte é constituída pelos Módulos de Filtragem, Regulação e Geração de Sinal, e é a responsável pela solução do problema de regulação.

Falando sucintamente, a técnica de regulação síncrona trabalha de forma iterativa e em tempo discreto, ou seja, usa um conjunto de amostras obtidas na iteração h para determinar as características da perturbação, e efetua a ação de correção, gerando um sinal de cancelamento da perturbação na iteração $h + 1$. A taxa da amostragem deverá ser múltipla inteira do período da perturbação senoidal. A razão dessa restrição poderá ser entendida mais adiante quando for apresentado o módulo de filtragem.

¹Originalmente denominada de Módulo de Controle

Figura 4.7: Sistema completo da regulação sincronizada

4.3 Sinal de sincronismo

4.3.1 Escolha de m_s

A resposta de um sistema linear a um sinal senoidal de entrada é dada por sua resposta transitória e permanente e é dada por

$$y(t) = \underbrace{\sum_i t^{k_i} A_i e^{-\alpha_i t}}_{\text{Resposta transitória}} + \text{Resposta permanente} \quad (4.9)$$

Seja $\alpha = \min(\alpha_i)$ sendo que α_i é a parte real dos polos do sistema estabilizada. O valor do produto $m_s T_w$ será escolhido de maneira que após $m_s T_w / 2$ segundos a resposta transitória do sistema possa ser considerada desprezível, tendo se estabelecido a resposta permanente. Notando que para $t \geq \frac{5}{\alpha}$, tem-se $e^{-\alpha_i t} \leq 0,006$ para todo i . Então a contribuição da resposta transitória é desprezível após cinco constantes de tempo. Assim

$$\frac{m_s T_w}{2} = \frac{5}{\alpha} \quad (4.10)$$

logo

$$m_s > \frac{10}{\alpha T_w} \quad (4.11)$$

4.3.2 Escolha de L_s

O valor de L_s deve ser tal que o módulo de geração de sinal possa reconstruir de forma razoavelmente precisa o sinal senoidal. Portanto T_w/L_s deve obedecer a taxa de *Nyquist* com certa folga, digamos $L_s \geq 5$.

4.4 Módulo da filtragem

Tem o objetivo de extrair a informação de amplitude e fase (sinal e_h) do sinal $y(t)$ de saída do sistema na mesma frequência da perturbação. Para isso, esse módulo se utiliza do algoritmo da Série de Fourier Discreta.

A Série de Fourier Discreta é uma combinação linear de uma sequência finita de exponenciais complexas dadas por

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-jn2\pi k/N} \quad (4.12)$$

onde a_n são os coeficientes da série, dados por

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-jn2\pi k/N} \quad (4.13)$$

Os coeficientes determinam a decomposição de $x[k]$ como a soma de N exponenciais complexas de frequências múltiplas de $2\pi/N$.

A cada iteração, sinal contínuo $y(t)$ é amostrado a taxa T_w/L_s por um conversor A/D, obtendo as amostras y_k , onde $0 \leq k < m_s L_s$. Porém, as primeiras $m_s L_s/2$

Figura 4.8: Esquema mostrando o funcionamento do módulo de filtragem

amostras contém a soma da resposta em regime transitório com o regime permanente e devem ser descartadas. O módulo de filtragem usará então as $m_s L_s / 2$ amostras seguintes.

No caso específico deste trabalho, na equação (4.13), os termos serão tais que $x[k] = y_k$ e $N = m_s L_s / 2$

Estes coeficientes dão a informação da amplitude e fase na frequência digital

$$\omega_n = \frac{2\pi}{N}n \quad (4.14)$$

Como o período de amostragem é T_w / L_s , a conversão da frequência digital ω_n

para frequência analógica correspondente é

$$\omega = \frac{\omega_n}{T_w/L_s} \quad (4.15)$$

Substituindo (4.14) em (4.15)

$$\omega = \frac{2\pi}{T_w} \frac{2n}{m_s} \quad (4.16)$$

Sabendo que $\Omega = 2\pi/T_w$ e substituindo em (4.16), obtém-se

$$\omega = \Omega \frac{2n}{m_s} \quad (4.17)$$

Como é preciso extrair a informação que esteja na frequência da perturbação, de (4.17), é necessário que $2n/m_s = 1$. Assim o valor de n é

$$n = \frac{m_s}{2} \quad (4.18)$$

Concluí-se então que $e_h = 2a_{m_s/2}$. Como n deve ser sempre um número inteiro, é necessário então que m_s seja um múltiplo de dois (par). O fator de dois na equação (4.18) é necessário pois o coeficiente da Série de Fourier tem metade da amplitude do sinal original.

4.5 Módulo de regulação sincronizada

Este módulo tem a função de gerar um sinal senoidal $u(t)$ que cancele assintoticamente o efeito da perturbação $w(t)$. Este módulo recebe o sinal e_h do módulo de filtro e através de algum algoritmo, gera o sinal u_h que será usado pelo módulo de geração de sinal. Para determinar algoritmo, será feita uma análise do sistema completo com regulação sincronizada.

4.5.1 Modelo simplificado do subsistema de entrada u_h e saída e_h

Antes de proceder a análise, serão usadas algumas hipóteses simplificadoras no projeto deste módulo. Suponha que:

- T_w/L_s é suficientemente pequeno para podemos considerar que o módulo de geração de sinal reconstrua perfeitamente a senoide de frequência Ω a partir da informação de amplitude e fase;
- $m_s T_w/2$ é suficientemente grande para que a resposta em regime permanente do sistema na frequência Ω se estabeleça;
- As características da perturbação (frequência, amplitude e fase) variam muito lentamente o suficiente para que possam ser consideradas constantes durante o período $m_s T_w$.

Será considerado que o sinal analógico $w(t)$ pode ser convertido em um sinal digital w_h . Note que w_h é um sinal digital com valores complexos que fornece a informação de amplitude e fase do sinal $w(t)$.

Como o módulo de geração de sinal está sincronizado com o distúrbio, u_h e w_h são valores de amplitude e fase na mesma frequência. Assim, é possível adicioná-los, obtendo o sinal $z_h = u_h + w_h$ e z_h também é uma informação de amplitude e fase na frequência da perturbação.

Dado um sistema estável com uma entrada senoidal $z(t) = A \sin(\Omega t + \phi)$ onde A é a amplitude e ϕ a fase obtidas do sinal z_h . A resposta $y(t)$ do sistema será da forma

$$y(t) = \underbrace{\bar{A} \sin(\Omega t + \theta)}_{\text{Resposta permanente}} + \text{Resposta transitória} \quad (4.19)$$

onde

$$\bar{A} = A \|g(j\Omega)\| \quad \text{e} \quad \theta = \phi + \angle g(j\Omega) \quad (4.20)$$

Como o sistema é estável, o termo da resposta transitória tende à zero em um tempo suficientemente longo ($m_s T_w/2$ grande), sobrando somente o termo da resposta permanente. Então, ao final de cada período $m_s T_w$, $y(t)$ será aproximadamente

$$y(t) = A \|g(j\Omega)\| \sin(\Omega t + \phi + g(j\Omega)) \quad (4.21)$$

Para gerar o sinal e_h , será considerada a hipótese de que o módulo de filtragem extrai perfeitamente a informação na frequência da perturbação. Assim

$$e_h = g(j\Omega) z_h = g(j\Omega)(u_h + w_h) \quad (4.22)$$

Como $g(j\Omega)$ é uma grandeza complexa que pode ser representada pela amplitude e fase, o sinal de saída e_h será então

$$e_h = A \|g(j\Omega)\| / \phi + \angle g(j\Omega) = \bar{A} / \theta \quad (4.23)$$

4.5.2 Projeto do módulo de regulação

Um controlador baseado no princípio do modelo interno que regula e estabiliza o sistema é

$$u_h = u_{h-1} + a e_{h-1} \quad (4.24)$$

onde a é uma constante de ganho complexa escolhida convenientemente.

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados e manipulando a equação anterior, obtém-se a função de transferência do regulador

$$\frac{u_h(z)}{e_h(z)} = a \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = K(z) \quad (4.25)$$

Em malha fechada, esse sistema é representado pela figura 4.9, onde $w_h = A/\underline{\alpha}$ é o fasor que representa a perturbação $w(t)$.

Figura 4.9: Sistema de regulação em malha fechada

Para remover a perturbação síncrona na planta, deve-se ter

$$u_h = -w_h \quad (4.26)$$

Como

$$e_h = g(j\Omega)(w_h - u_h) \quad (4.27)$$

Pode-se verificar que a perturbação será cancelada em um passo apenas (*dead-beat*) se for escolhido $a = -g^{-1}(j\Omega)$, lembrando que inicialmente $u_{h-1} = 0$.

Dois Teoremas válidos para o caso SISO, já demonstrados em [24], serão enunciados. Tais teoremas são válidos para as seguintes hipóteses:

- A resposta permanente da planta se estabeleceu (m_s grande);
- O módulo de filtragem extrai a informação e_j perfeitamente;
- O módulo de geração de sinal é capaz de gerar um sinal senoidal perfeito (L_s grande).

Teorema 1 (Estabilidade). *O regulador síncrono será estável se $\|1 + ag(j\Omega)\| < 1$*

Prova: A partir do sistema mostrado na figura 4.9, determinamos a função de transferência de w_h para e_h

$$\frac{e_h}{w_h} = \frac{g(j\Omega)}{1 - g(j\Omega)K(z)} = \frac{(z-1)g(j\Omega)}{(z-1) - ag(j\Omega)} \quad (4.28)$$

O polo do sistema é dado pela raiz do denominador da equação (4.28). Utilizando o critério de estabilidade para sistemas discretos, o polo deve estar no interior do círculo unitário, ou seja, $\|1 + ag(j\Omega)\| < 1$

Teorema 2 (Regulação). *Um regulador síncrono que obedeça ao critério dado no Teorema 1 tem regulação assintótica, isto é*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} e_h = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})e(z) = 0$$

Prova: Admitindo que w_h é um sinal complexo constante, da equação (4.28)

$$\mathcal{Z}(e_h) = \mathcal{Z}(w_h) \frac{(z-1)g(j\Omega)}{z - g(j\Omega)a - 1} = \frac{zw_h}{z-1} \frac{(z-1)g(j\Omega)}{z - g(j\Omega)a - 1}$$

então

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})\mathcal{Z}(e_h) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{z\bar{w}G(j\Omega)}{z - g(j\Omega)a - 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{zw_h G(j\Omega)}{z - g(j\Omega)a - 1} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Supondo que $\|1 + ag(j\Omega)\| < 1$, é assegurado então que

$$z - g(j\Omega)a - 1 \neq 0 \quad \text{para } z = 1 \quad (4.30)$$

Passando ao limite, obtém-se

$$\lim_{h \rightarrow \infty} e_h = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})e(z) = 0$$

4.6 Módulo de geração de sinal

Este módulo tem a função de gerar um sinal senoidal $u(t)$ com a mesma frequência que a da perturbação e com amplitude e fase fornecida por u_h . Durante um período $m_s T_w$ segundos o módulo gera uma senoide amostrada na frequência Ω , amplitude $\|u_h\|$ e fase $\angle u_h$ dada por

$$u_k = \bar{u} \left(k \frac{T_w}{L_s} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.31)$$

$$\bar{u} = \|u_h\| \sin(\Omega t + \angle u_h) \quad (4.32)$$

Logo

$$u_k = \|u_h\| \sin\left(\Omega \frac{kt}{L_s} + \angle u_h\right) \quad (4.33)$$

Figura 4.10: Sinal u_k gerado pelo módulo de geração de sinal a partir da informação u

Com essa informação, um sinal senoidal contínuo pode ser gerado em $m_s T_w$ segundos, dado por

$$u(t) = u_k \quad kT_w \leq t \leq (k+1)T_w \quad (4.34)$$

Capítulo 5

Controle de redução do desbalanceamento

No capítulo anterior foi apresentada a técnica de regulação sincronizada. Como foi visto, o sucesso para regulação assintótica depende do conhecimento da constante de ganho complexa a . No caso de sistemas rotativos, esta constante está relacionada ao coeficiente de influência do rotor. Portanto, para a aplicação com sucesso da técnica é necessário o conhecimento do modelo da planta.

Neste capítulo serão apresentados dois métodos desenvolvidos na tese [6]: o primeiro faz uso da estimação recursiva em tempo real do coeficiente de influência e é utilizado em sistemas onde o desbalanceamento está concentrado em um ponto do rotor e um atuador está instalado muito próximo desse ponto; Já o segundo método (controle ótimo adaptativo por matriz de influência) estima recursivamente a matriz de influência e é aplicável em sistemas rotativos que apresentam mancais anisotrópicos, caso mais comum. O mérito dessa tese foi aprimorar trabalhos sobre a redução de desbalanceamento usando coeficiente de influência ou matriz de influência, adicionando a eles a capacidade de adaptação em tempo real, tornando desnecessário o conhecimento *a priori* do modelo do rotor, além de acrescentar parâmetros que permitiram estabelecer o compromisso entre a robustez e o desempenho do controle. No final do capítulo, o regulador síncrono do capítulo anterior será modificado, substituindo a lei de controle do módulo de regulação pela lei de controle ótimo adaptativo por matriz de influência.

Para uniformizar a nomenclatura com relação à [6], pode-se considerar o modelo

da vibração de um rotor como uma função de resposta em frequência $g(j\Omega)$. A entrada $u(t)$ será a ação do atuador (neste caso, um mancal magnético) e a saída $e(t)$ será a vibração do rotor num ponto de interesse, também denominada de saída de erro. Como os desbalanços de um rotor provocam combinações de forças senoidais e o rotor é (em geral) um sistema estável, a saída $e(t)$ em regime permanente senoidal pode ser representada por um fasor. Utilizando-se de considerações análogas à da seção 4.5.1, os fasores da entrada e saída serão representados nos instantes discretos $h = 0, 1, 2, \dots$, correspondentes aos instantes $0, m_s T_w, 2m_s T_w, \dots$. Assumindo que $m_s T_w$ é suficientemente grande de maneira que os valores e_h representem os fasores correspondentes às respostas senoidais nos instantes $h = 0, 1, 2, \dots$. Desta forma podemos escrever a equação complexa:

$$e_h = c(\Omega)u_h + c(\Omega)c_r(\Omega)r_h \quad (5.1)$$

onde $c(\Omega) = g(j\Omega)$ é o coeficiente de influência, u_h é o fasor correspondente a ação do atuador (mancal magnético) e r_h a ação do desbalanço do rotor. O número complexo $c_r(\Omega)$ representa a matriz de influência do desbalanço (ou termo de influência cumulativo).

Normalmente,

$$w_h = c(\Omega)c_r(\Omega)r_h \quad (5.2)$$

No caso em que $c_r(\Omega)$ é uma identidade complexa, a equação (5.1) se reduz a

$$e_h = c(\Omega)(u_h + r_h)$$

Como o desbalanço é constante ou varia muito lentamente, tem-se que $r_h = r$, $h = 0, 1, 2, \dots$. Observe que a notação de [6] é perfeitamente identificada com o contexto do capítulo 4, de modo que a formalização do modelo poderia ser obtida através de argumentos semelhantes aos usados na seção 4.5.1. É importante observar no presente

capítulo que w_h representa o efeito total da perturbação sobre a saída. Assim, o fasor w_h aqui apresentado não coincide com o fasor w_h do capítulo 4.

Desta forma, escreve-se

$$e_h = c(\Omega)u_h + w_h \quad (5.3)$$

onde u_h é a correção de desbalanceamento complexa na iteração de controle h , $c(\Omega)$ é o coeficiente de influência complexo na velocidade Ω , e w_h é o distúrbio do desbalanceamento do rotor. Note que essa equação se identifica com a equação (4.22).

5.1 Controle não adaptativo por coeficiente de influência

O controlador de balanceamento ativo deve aplicar a entrada u_{h+1} para conseguir o objetivo de levar o sinal de erro na iteração $h + 1$ para exatamente zero (figura 5.1). Ou seja

$$u_{h+1} = u_h - \frac{e_h}{c} \quad (5.4)$$

Figura 5.1: Controle não adaptativo usando coeficiente de influência

Apesar do fasor de correção do desbalanço u_h e o fasor do erro de vibração e_h serem medidos e conhecidos, o coeficiente de influência c deve ser estimado. Ele

pode ser obtido através de modelagem ou por testes experimentais do sistema. Esse coeficiente de influência estimado, denominado $\hat{c}$, é então usado no lugar do coeficiente de influência c , na lei de controle da equação (5.4).

5.1.1 Estabilidade do controle não adaptativo por coeficiente de influência

A estabilidade desta lei de controle não adaptativa depende da precisão do coeficiente de influência estimado. Para melhorar a margem de estabilidade, um parâmetro de ganho α é proposto [6] para ser adicionado a lei de controle da equação (5.4) (figura 5.2).

$$u_{h+1} = u_h - \alpha \frac{e_h}{\hat{c}} \quad (5.5)$$

Figura 5.2: Controle não adaptativo por coeficiente de influência usando ganho α

O parâmetro de ganho α pode melhorar a robustez do controle frente ao erro de coeficiente de influência estimado $\hat{c}$. Sem perda de generalidade, considere o distúrbio w representado por um desbalanço hipotético q (que pode incluir termos forçantes síncronos, não apenas o desbalanceamento) agindo num coeficiente de influência cumulativo c_q , tal que

$$w = cc_q q \quad (5.6)$$

A equação (5.3) pode ser reescrita

$$e_h = c(u_h + c_q q) \quad (5.7)$$

definindo um termo forçante acumulativo v_h por

$$v_h = u_h + c_q q \quad (5.8)$$

Substituindo (5.8) em (5.7), temos

$$e_h = c v_h \quad (5.9)$$

Assumindo ainda que o distúrbio q e os coeficientes de influência c e c_q não mudam a cada iteração do controle, substituindo a equação (5.9) e rearranjando a equação (5.8) para ambas iterações do controle h e $h + 1$ na equação (5.5), obtém-se a relação:

$$v_{h+1} = v_h - \alpha \frac{c}{\hat{c}} v_h \quad (5.10)$$

$$v_{h+1} = \left(1 - \alpha \frac{c}{\hat{c}}\right) v_h \quad (5.11)$$

O termo recursivo forçante em (5.11), combinado com (5.9), leva à história do sinal de erro da vibração

$$e_{h+1} = \left(1 - \alpha \frac{c}{\hat{c}}\right)^{h+1} e_0 \quad (5.12)$$

Se segue então que o controle é estável para coeficientes de influência constantes c se e somente se:

$$R = \left\|1 - \alpha \frac{c}{\hat{c}}\right\| < 1 \quad (5.13)$$

A condição de estabilidade pode ser representada na figura 5.3:

Figura 5.3: Região de estabilidade do controle não adaptativo por coeficiente de influência no plano complexo. O controle será estável se todos os valores de $\alpha \frac{c}{\hat{c}}$ estiverem dentro do círculo unitário no semi-plano direito

Será mostrado mais adiante como o parâmetro α pode melhorar a robustez. Para o caso em que o coeficiente de influência não muda durante a convergência do controle, podemos mostrar, baseado na equação (5.13), que a lei de controle não adaptativo da equação (5.5) é estável se e somente se

$$\alpha < 2 \frac{|\hat{c}|}{|c|} \cos(\theta_c - \theta_{\hat{c}}) \quad (5.14)$$

onde $|c|$ e $|\hat{c}|$ são, respectivamente, os módulos dos coeficientes de influência real e estimado e θ_c e $\theta_{\hat{c}}$ são os respectivos ângulos de fase. Uma vez que α é definido maior que zero, se o ângulo de fase do coeficiente de influência estimado estiver entre $\pm 90^\circ$ (não-inclusivo) do ângulo de fase do coeficiente de influência atual (ou seja, a parte real do quociente $c/\hat{c}$ é maior que zero), então existe um ganho para o qual o controle é estável.

A convergência do sinal de erro do estado inicial e_0 para zero é governada por (5.12). Está claro que valores pequenos para α melhoram a robustez de estabilidade mas eles também tornam a taxa de convergência do controle lenta. Também deve estar claro que uma estimativa precisa do coeficiente de influência reduz a necessidade de ser conservativo na escolha do ganho para garantir a robustez de estabilidade. Portanto,

uma estratégia de estimação em tempo real pode ser empregada para garantir uma estimativa precisa do coeficiente de influência independente de mudanças na planta ou da dinâmica não linear.

Deve ser observado que a análise de estabilidade desta seção é essencialmente equivalente a análise da seção 4.5.2.

5.2 Controle adaptativo por coeficiente de influência

O objetivo do controle adaptativo por coeficiente de influência (figura 5.4) é minimizar a vibração em regime permanente na velocidade de operação do rotor independente do conhecimento do modelo da planta. É aplicável em equipamentos onde é conhecida a localização da fonte de desbalanceamento e um atuador capaz de aplicar forças que compensem esse desbalanceamento esteja instalado no mesmo ponto. Neste trabalho, tal atuador será o mancal magnético.

Uma vez que o balanceamento ativo somente pode afetar a frequência de vibração síncrona do eixo, o sinal de vibração (sinal de erro) com ruído deve ser filtrado para obter o componente da frequência síncrona. Esta saída filtrada do transdutor de vibração é um fasor complexo do sinal de erro e_h e deve ser cancelada pelo sistema de controle ativo. O vetor de correção do balanceamento (vetor de controle) é representada pelo fasor u_h .

5.2.1 Estimação em tempo real do coeficiente de influência

Como a informação da entrada (o sinal de controle) e da saída (o sinal de erro) estão disponíveis a cada iteração do controle, torna-se possível estimar o coeficiente de influência. Este método determina o novo coeficiente de influência utilizando a seguinte fórmula

$$c_{novo} = \frac{e_h - e_{h-1}}{u_h - u_{h-1}} \quad (5.15)$$

Figura 5.4: Controle adaptativo por coeficiente de influência

A equação (5.15) é obtida facilmente a partir da equação (5.3), considerando-se que o distúrbio w_h não se altera a cada iteração do controle.

Se existe excitação suficiente (ou seja, suficiente mudança no sinal de controle u_h entre cada iteração), o valor computado c_{novo} será não singular. No entanto, esta fórmula também está sujeita ao ruído presente nas medidas e e u . Além disso, pode ser indesejável usar toda a informação previamente estimada do coeficiente de influência. Para mitigar o efeito do ruído de medição, uma média móvel ponderada pode ser usada para atualizar o coeficiente de influência [6]. O coeficiente de influência atualizado na computação do próximo passo do controle é então recursivamente estimado por

$$\hat{c}_h = (1 - \beta)\hat{c}_{h-1} + \beta \left(\frac{e_h - e_{h-1}}{u_h - u_{h-1}} \right) \quad (5.16)$$

onde $0 \leq \beta \leq 1$. O parâmetro β é um fator de “esquecimento” que governa a extensão da adaptabilidade do sistema de controle. Quando $\beta = 0$, nenhum peso é dado ao coeficiente de influência mais recente e o sistema de controle torna-se o método não adaptativo discutido anteriormente. Quando β está próximo de um, o controle adaptativo dá mais peso ao coeficiente de influência recentemente estimado e ignora as estimativas anteriores. O fator de esquecimento β deve ser escolhido de forma a proporcionar um compromisso entre a sensibilidade da estimação ao ruído de medida

e a velocidade da convergência da estimação.

Valores altos de β resulta em convergência de estimação rápida. Para sistemas que têm dinâmica de variação lenta e alto ruído de medição, um baixo valor de β apresenta melhores resultados. Para sistemas altamente não lineares e com dinâmica variando rapidamente, um alto valor de β pode ser usado com convergência rápida do controle.

5.3 Controle ótimo adaptativo por matriz de influência

Conforme discutido anteriormente, o controle por coeficiente de influência pode ser suficiente para sistemas em que apenas um modo vibracional domina a resposta dinâmica em cada velocidade de interesse. Na prática, no entanto, muitas máquinas ficam de fora deste critério. Além disso, a maioria dos mancais é anisotrópico, isto é, a rigidez do mancal é diferente para as direções horizontal e vertical. Para esses casos é necessário um controle ativo de múltiplos planos.

Esta seção apresenta uma estratégia de controle ótimo adaptativo por matriz de influência [6]. Uma função objetivo quadrática é definida e inclui termos ponderados de mínimos quadrados penalizando a vibração, o esforço de controle (correção de desbalanceamento), e a taxa de mudança do controle (a velocidade de resposta do controle). Os termos que penalizam o esforço de controle e a taxa de mudança do controle são usados para melhorar a robustez da estabilidade do controle ótimo não adaptativo por matriz de influência em várias situações. Um algoritmo de *perturbação*¹ foi usado para garantir uma estimação não singular da matriz de influência durante cada iteração do controle. A figura 5.5 apresenta uma representação simplificada do controle ótimo por matriz de influência.

---

¹*dithering* no texto original de [6]

Figura 5.5: Controle ótimo adaptativo por matriz de influência

5.3.1 Lei de controle ótimo

Considere um sistema rotativo operando a velocidade constante e com um distúrbio que não se altera a cada iteração do controle, o vetor de erro $\mathbf{e}_h$ será dado por

$$\mathbf{e}_h = \mathbf{C}\mathbf{u}_h + \mathbf{w} \quad (5.17)$$

onde $\mathbf{u}_h$ é o vetor de controle e $\mathbf{w}$ é o vetor de distúrbio agindo no sistema. Note que a equação 5.17 é uma generalização da equação (5.3) para o caso de múltiplos planos.

Para sistemas com matrizes de influência $\mathbf{C}$ quadradas, uma lei de controle usando a matriz de influência estimada $\hat{\mathbf{C}}$ ao invés da matriz de influência atual é dada por

$$\mathbf{u}_{h+1} = \mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{C}}^{-1}\mathbf{e}_h \quad (5.18)$$

Na situação onde cada sensor de erro tem uma importância diferente do outro, uma lei de controle de mínimos quadrados ponderada pode ser implementada. Uma matriz de penalidade $\mathbf{Q}$ real semi-definida positiva $n \times n$ (onde n é o número de sensores) pode ser especificada para dar o peso relativo dos sensores de erro

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & & 0 \\ & q_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & q_n \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

onde q é o peso relativo do n -ésimo sensor de erro. Analogamente, matrizes de ponderação $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$ reais e semi-definidas positivas podem ser utilizadas para penalizar o esforço de controle e a taxa de mudança do controle, respectivamente. Uma função objetivo $J(\mathbf{e}_{h+1}, \mathbf{u}_{h+1}, \mathbf{u}_h, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S})$ pode então ser definida como

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{e}_{h+1}^H \mathbf{Q} \mathbf{e}_{h+1} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{h+1}^H \mathbf{R} \mathbf{u}_{h+1} + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{h+1} - \mathbf{u}_h)^H \mathbf{S} (\mathbf{u}_{h+1} - \mathbf{u}_h) \quad (5.20)$$

onde o símbolo ^{H} denota a operação matricial hermitiana (transposta da complexa conjugada). O problema de controle ótimo consiste em comandar o vetor de correção na próxima iteração do controle $\mathbf{u}_{h+1}$ de forma a minimizar a função objetivo.

Assumindo que o vetor distúrbio $\mathbf{w}$ não muda a cada iteração do controle, teremos

$$\mathbf{e}_{h+1} = \mathbf{C}(\mathbf{u}_{h+1} - \mathbf{u}_h) + \mathbf{e}_h \quad (5.21)$$

Substituindo a equação (5.21) na equação (5.20), possibilita avaliar a função objetivo J usando somente o vetor de controle atualizado $\mathbf{u}_{h+1}$ e as medidas $\mathbf{e}_h$ e $\mathbf{u}_h$

$$J = \frac{1}{2} [\mathbf{C}(\mathbf{u}_{h+1} - \mathbf{u}_h) + \mathbf{e}_h]^H \mathbf{Q} [\mathbf{C}(\mathbf{u}_{h+1} - \mathbf{u}_h) + \mathbf{e}_h] + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{h+1}^H \mathbf{R} \mathbf{u}_{h+1} + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{h+1} - \mathbf{u}_h)^H \mathbf{S} (\mathbf{u}_{h+1} - \mathbf{u}_h) \quad (5.22)$$

Para encontrar os pontos estacionários da função objetivo J com respeito ao vetor de controle atualizado $\mathbf{u}_{h+1}$, toma-se a derivada parcial correspondente, iguala-se a zero e resolve-se para o vetor de controle. Este ponto estacionário é garantido ser mínimo se a função objetivo for realmente uma função quadrática de $\mathbf{u}_{h+1}$. Para garantir isso,

pelo menos uma das matrizes $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$ devem ser positiva definida. Além disso, se somente $\mathbf{Q}$ é definida positiva, então a matriz $\mathbf{C}$ deve ter posto completo.

Procedendo desta forma, a fórmula do mínimo da função objetivo é encontrada [16]:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}_{h+1}} = 0 = \mathbf{C}^H \mathbf{Q} [\mathbf{C}(\mathbf{u}_{h+1} - \mathbf{u}_h) + \mathbf{e}_h] + \mathbf{R} \mathbf{u}_{h+1} + \mathbf{S}(\mathbf{u}_{h+1} - \mathbf{u}_h) \quad (5.23)$$

O vetor de controle atualizado ótimo $\mathbf{u}_{h+1}$ pode ser resolvido algebricamente como se segue

$$(\mathbf{C}^H \mathbf{Q} \mathbf{C} + \mathbf{R} + \mathbf{S}) \mathbf{u}_{h+1} = (\mathbf{C}^H \mathbf{Q} \mathbf{C} + \mathbf{S}) \mathbf{u}_h - \mathbf{C}^H \mathbf{Q} \mathbf{e}_h \quad (5.24)$$

$$\mathbf{u}_{h+1} = (\mathbf{C}^H \mathbf{Q} \mathbf{C} + \mathbf{R} + \mathbf{S})^{-1} [(\mathbf{C}^H \mathbf{Q} \mathbf{C} + \mathbf{S}) \mathbf{u}_h - \mathbf{C}^H \mathbf{Q} \mathbf{e}_h] \quad (5.25)$$

Em regime permanente, assumindo que o controle é convergente, o vetor de controle ótimo é dado por

$$\mathbf{u}_{\infty,otimo} = (\mathbf{C}^H \mathbf{Q} \mathbf{C} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{Q} \mathbf{w} \quad (5.26)$$

E subsequentemente o erro em regime permanente

$$\mathbf{e}_{\infty,otimo} = [\mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{Q} \mathbf{C} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{Q}] \mathbf{w} \quad (5.27)$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade $n \times n$. Note ainda que a realização prática da lei de controle ótimo na equação (5.25) deve usar a matriz de influência estimada $\hat{\mathbf{C}}$ ao invés da matriz de influência real $\mathbf{C}$, que é geralmente desconhecida.

5.3.2 Análise de desempenho e estabilidade do controle ótimo não adaptativo

A matriz $\mathbf{R}$ permite penalizar o esforço de controle de cada plano de balanceamento, o que pode ser desejável em certos casos. Por exemplo, se a fonte do desbalanceamento residual não estiver localizada no mesmo plano que os atuadores, a correção ótima de balanceamento pode ser diferente para diferentes velocidades de operação.

A matriz $\mathbf{S}$ penaliza a velocidade de resposta do controle. Isto pode ser benéfico por permitir algum tempo para intervenção do operador no caso de alguma falha do sistema de balanceamento ativo.

Tanto as matrizes $\mathbf{R}$ como $\mathbf{S}$ proporcionam oportunidades para um controle cauteloso, muito necessário em indústrias que utilizam turbomáquinas em processos críticos contínuos. Além disso, ambas matrizes tem como benefício a melhora da margem de estabilidade do controle não adaptativo. Por limitar as entradas de controle ou diminuir a resposta do controle, uma implementação que originalmente era instável devido a uma matriz de influência mal estimada pode tornar-se estável. Uma análise da estabilidade do controle ótimo se segue.

Trocando a matriz de influência real na lei de controle ótimo da equação (5.25) pela matriz de influência estimada, obtemos a relação recursiva

$$\mathbf{u}_{h+1} = (\hat{\mathbf{C}}^H \mathbf{Q} \hat{\mathbf{C}} + \mathbf{R} + \mathbf{S})^{-1} [(\hat{\mathbf{C}}^H \mathbf{Q} \hat{\mathbf{C}} + \mathbf{S}) \mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{C}}^H \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{C}}^H \mathbf{Q} \mathbf{w}] \quad (5.28)$$

Que leva a seguinte relação

$$\mathbf{u}_{h+1} = (\hat{\mathbf{C}}^H \mathbf{Q} \hat{\mathbf{C}} + \mathbf{R} + \mathbf{S})^{-1} [\hat{\mathbf{C}}^H \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{C}} - \mathbf{C}) + \mathbf{S}] \mathbf{u}_h - (\hat{\mathbf{C}}^H \mathbf{Q} \hat{\mathbf{C}} + \mathbf{R} + \mathbf{S})^{-1} \hat{\mathbf{C}}^H \mathbf{Q} \mathbf{w} \quad (5.29)$$

Para um controle estável, a entrada de controle $\mathbf{u}_{h+1}$ deve convergir para um valor constante. Somente o primeiro termo multiplicado por $\mathbf{u}_h$ é relevante para a questão da estabilidade. O segundo termo multiplicando $\mathbf{w}$ é constante e somente afeta o valor

final que o vetor de correção converge. Então se segue que o controle de balanceamento ativo ótimo é estável para um vetor de distúrbio constante $\mathbf{w}$ e matrizes de influência $\mathbf{C}$ e $\hat{\mathbf{C}}$ se e somente se

$$\bar{\sigma}[(\hat{\mathbf{C}}^H \mathbf{Q} \hat{\mathbf{C}} + \mathbf{R} + \mathbf{S})^{-1}(\hat{\mathbf{C}}^H \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{C}} - \mathbf{C}) + \mathbf{S})] < 1 \quad (5.30)$$

onde o símbolo $\bar{\sigma}$ significa valor singular máximo

O efeito da matriz $\mathbf{R}$ na estabilidade está evidente na equação (5.30). Independente do erro de estimação $(\hat{\mathbf{C}} - \mathbf{C})$, uma matriz $\mathbf{R}$ grande irá tornar o controle estável por efetivamente prevenir que o esforço de controle cresça sem limites. O efeito da matriz de penalização da taxa de controle $\mathbf{S}$ na estabilidade não está muito claro da equação (5.30). O critério de estabilidade pode ser expandido ainda para

$$\bar{\sigma}[(\hat{\mathbf{C}}^H \mathbf{Q} \hat{\mathbf{C}} + \mathbf{R} + \mathbf{S})^{-1}(\hat{\mathbf{C}}^H \mathbf{Q} \hat{\mathbf{C}} - \hat{\mathbf{C}}^H \mathbf{Q} \mathbf{C} + \mathbf{S})] < 1 \quad (5.31)$$

Em [6] foi demonstrado que existe uma matriz real semi-definida positiva $\mathbf{S}$ para qual o critério de estabilidade da equação (5.30) é verdadeiro. Isto é análogo a situação descrita para o controle por coeficiente de influência mostrado na seção 5.1.1 onde o ângulo de fase do coeficiente de influência estimado difere não mais que $\pm 90^\circ$ do valor real. No controle por coeficiente de influência, podemos melhorar a estabilidade usando um ganho de controle α pequeno.

Assumindo um controle estável, e que o vetor de distúrbio $\mathbf{w}$ e a matriz de influência real $\mathbf{C}$ são constantes durante a convergência do controle, pode-se mostrar que o vetor de força de correção do desbalanceamento irá convergir para o regime permanente

$$\mathbf{u}_\infty = -(\hat{\mathbf{C}}^H \mathbf{Q} \mathbf{C} + \mathbf{R})^{-1} \hat{\mathbf{C}}^H \mathbf{Q} \mathbf{w} \quad (5.32)$$

O correspondente vetor de erro em regime permanente será

$$\mathbf{e}_\infty = [\mathbf{I} - \mathbf{C}(\hat{\mathbf{C}}^H \mathbf{Q} \mathbf{C} + \mathbf{R})^{-1} \hat{\mathbf{C}}^H \mathbf{Q}] \mathbf{w} \quad (5.33)$$

Deve estar aparente da equação (5.32) que mesmo que o controle seja estável, se a matriz de influência estimada $\hat{\mathbf{C}}$ não for igual a matriz de influência atual $\mathbf{C}$, então o vetor de correção de desbalanceamento não irá necessariamente ser igual ao vetor de correção ótimo da equação (5.26) que minimiza a função objetivo. Consequentemente, o vetor de erro em regime permanente da equação (5.33) não será igual ao vetor de erro da equação (5.27) e o controle não será ótimo. Isto é, o controle resultante não será tão eficiente como o controle que utiliza uma matriz de influência perfeitamente conhecida, isto é, $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}$.

Se aplicarmos matrizes de penalidade $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$ diferentes de zero puramente para melhorarmos a robustez da estabilidade em um controle não adaptativo, certos compromissos de desempenho tornam-se necessários. Inspeccionando a equação (5.32), é evidente que a medida que $\mathbf{R}$ se aproxima do infinito, a correção de balanceamento de regime permanente se aproxima de zero e o vetor de erro de regime permanente se aproxima do vetor de distúrbio $\mathbf{w}$. Assim a robustez de estabilidade associada com uma matriz $\mathbf{R}$ grande tem como custo um reduzido desempenho do controle. Se a parte real do termo $\hat{\mathbf{C}}^H \mathbf{Q} \hat{\mathbf{C}}$ é positiva definida, então a matriz $\mathbf{S}$ pode ser incrementada para melhorar a margem de estabilidade. Isto é obtido ao custo de diminuir a taxa de convergência do controle.

O compromisso entre a margem de estabilidade e o desempenho não ótimo com controle não adaptativo usando uma matriz de influência estimada imprecisa pode ser remediado se conseguirmos uma matriz de influência estimada precisa através da estimação em tempo real do sistema.

5.3.3 Estimação em tempo real da matriz de influência

Para melhorar a estabilidade de robustez e melhorar a otimalidade do desempenho do controle baseado na matriz de influência, podem ser usadas as ideias mostradas

nas seções anteriores para desenvolver um controle adaptativo por matriz de influência. Similar a versão do controle adaptativo por coeficiente de influência, o controle adaptativo por matriz de influência também utiliza um conjunto de medidas para calcular o valor instantâneo da matriz de influência. Este valor instantâneo é então recursivamente combinado com a estimativa anterior usando uma função de media móvel ponderada.

Será assumido inicialmente que o vetor distúrbio $\mathbf{w}$ e a matriz de influência $\mathbf{C}$ não se alteram a cada iteração. Para m iterações sucessivas do controle (onde m = número de planos de atuação), a matriz de influência pode ser encontrada pela seguinte fórmula:

$$\hat{\mathbf{C}}_{novo} = (\Delta \mathbf{E})(\Delta \mathbf{U})^{-1} \quad (5.34)$$

onde $\Delta \mathbf{U}$ e $\Delta \mathbf{E}$ são as matrizes contendo as variações nos vetores de controle e nos vetores de erro, respectivamente, depois de m sucessivas sub-iterações de controle e são dadas por

$$\Delta \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_1 - \tilde{\mathbf{u}}_0 & : & \tilde{\mathbf{u}}_2 - \tilde{\mathbf{u}}_1 & : & \cdots & : & \tilde{\mathbf{u}}_m - \tilde{\mathbf{u}}_{m-1} \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

$$\Delta \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_1 - \tilde{\mathbf{e}}_0 & : & \tilde{\mathbf{e}}_2 - \tilde{\mathbf{e}}_1 & : & \cdots & : & \tilde{\mathbf{e}}_m - \tilde{\mathbf{e}}_{m-1} \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

onde u_n é o n -ésimo vetor de controle e e_n o vetor de erro resultante da aplicação do n -ésimo vetor de controle.

Note que a matriz $\Delta \mathbf{U}$ deve ser $(m \times m)$ e não singular de forma a ser possível calcular $\hat{\mathbf{C}}_{novo}$. Estes dados medidos correspondem a $(m + 1)$ estados de correção de balanceamento independentes.

Para melhor esclarecimento, será apresentado um exemplo:

Imagine um sistema rotativo mantido em velocidade constante e que exista um mancal magnético instalado nesse sistema e que será usado como atuador. Tal mancal magnético tem a mesma construção mostrada na figura 2.4, o que permite a atuação em dois planos ($m = 2$). Também há dois

sensores instalados juntos ao mancal magnético e que fazem a leitura do sinal de erro para cada plano de atuação do mancal. Portanto, as matrizes $\Delta\mathbf{U}$, $\Delta\mathbf{E}$ e $\hat{\mathbf{C}}_{novo}$ serão todas quadradas (2×2).

Para calcular as matrizes, será preciso três vetores de controle diferentes e os correspondentes vetores de erro. Digamos que os vetores de controle aplicados ao sistema foram esses:

$$\tilde{\mathbf{v}}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} 1+j \\ 2-j \end{pmatrix} \times 10^{-2}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} 3-2j \\ 1+2j \end{pmatrix} \times 10^{-2}$$

cujos vetores de erro correspondentes são

$$\tilde{\mathbf{e}}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times 10^{-5}$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1.04 - 0.02j \\ 1.09 \end{pmatrix} \times 10^{-5}$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 1.12 + 0.09j \\ 1.02 - 0.05j \end{pmatrix} \times 10^{-5}$$

As matrizes $\Delta\mathbf{U}$ e $\Delta\mathbf{E}$ serão então

$$\Delta\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1+j & 2-3j \\ 2-j & -1+3j \end{pmatrix} \times 10^{-2}$$

$$\Delta\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0.04 - 0.02j & 0.08 + 0.11j \\ 0.09 & -0.07 - 0.05j \end{pmatrix} \times 10^{-5}$$

Usando a equação (5.34), encontra-se a matriz de influência estimada

$$\hat{\mathbf{C}}_{novo} = \begin{pmatrix} 1+2j & 3-j \\ 2-2j & 2+j \end{pmatrix} \times 10^{-5}$$

□

Assumindo excitação suficiente (isto é, há suficiente mudança do vetor de controle $\mathbf{u}_h$ de iteração para iteração), o valor calculado de $\hat{\mathbf{C}}_{novo}$ será não singular. A matriz de influência a ser usada na próxima iteração é então atualizada:

$$\hat{\mathbf{C}}_h = (1 - \beta)\hat{\mathbf{C}}_{h-1} + \beta(\Delta\mathbf{E}_h)(\Delta\mathbf{U}_h)^{-1} \quad (5.37)$$

onde novamente o fator de esquecimento β , ($0 \leq \beta \leq 1$) é utilizado para governar a adaptabilidade do sistema de controle.

5.3.4 Algoritmo de *perturbação* para estimação da matriz de influência

Como já foi discutido anteriormente, para computar a matriz de influência atualizada em cada iteração, $m + 1$ atuações independentes de correção do desbalanceamento são necessários para formar uma matriz $\Delta \mathbf{U}$ não singular da equação (5.35). No entanto, a medida que a estimação em tempo real da matriz de influência converge para o valor atual, o controle irá gerar na saída o mesmo vetor de controle de correção durante cada iteração sucessiva do controle. Para aliviar este problema, o controle deve ser *perturbado* de alguma forma para fornecer $m + 1$ vetores de correção independentes. A forma mais simples para conseguir isto é através da ação em um plano de correção de cada vez (enquanto isso são mantidos os vetores de sinal de erro após de cada mudança do vetor de controle). Este método, no entanto, pode fazer que os sinais de erro em algumas localizações do rotor tornem-se temporariamente piores. O potencial de piorar a vibração depende da magnitude da influência cruzada presente. A influência cruzada é quando elementos fora da diagonal da matriz de influência têm aproximadamente magnitude com ordem de grandeza maior ou igual que os elementos diagonais. Quanto mais influência cruzada no sistema, maior a chance de gerar uma piora temporária da vibração. Para garantir que todas as saídas de erro diminuam, cada sinal do vetor de controle deve ser alterado simultaneamente (assumindo uma estimativa precisa da matriz de influência). No entanto, isto não irá proporcionar medidas independentes que permitam calcular uma estimativa atualizada da matriz de influência e a matriz (5.35) será singular.

Uma forma de contornar esse problema é criando uma matriz de vetores de base independente que permita controlar a independência relativa de cada sub-iteração de balanceamento e assim ter algum controle sobre a “singularidade” de $(\Delta \mathbf{U})$. Considere a matriz de base simétrica $\mathbf{\Lambda}$ da forma

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m-m\gamma+\gamma} & \frac{1-\gamma}{m-m\gamma+\gamma} & \cdots & \frac{1-\gamma}{m-m\gamma+\gamma} \\ \frac{1-\gamma}{m-m\gamma+\gamma} & \frac{1}{m-m\gamma+\gamma} & & \frac{1-\gamma}{m-m\gamma+\gamma} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1-\gamma}{m-m\gamma+\gamma} & \frac{1-\gamma}{m-m\gamma+\gamma} & \cdots & \frac{1}{m-m\gamma+\gamma} \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

onde m é o número de planos de atuação, e γ ($0 < \gamma \leq 1$) é um parâmetro de *perturbação* que define a independência dos vetores de correção do balanceamento para cada sub-iteração do controle. Note que a soma de todos os elementos de cada coluna da matriz $\mathbf{\Lambda}$ é unitária. No final de todas as sub iterações, a correção de balanceamento num dado plano estará no estado $\mathbf{u}_{h+1}$ comandado. Os vetores de controle comandados para as p sub-iterações da iteração $(h + 1)$ do controle será

$$\tilde{\mathbf{u}}_p = \tilde{\mathbf{u}}_{p-1} + \text{diag}(\mathbf{\Lambda}_p)(\mathbf{u}_{h+1} - \mathbf{u}_h) \quad (5.39)$$

para $1 \leq p \leq m$ inteiro e $\mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_h$.

A matriz $\text{diag}(\mathbf{\Lambda}_p)$ é uma matriz diagonal que tem sua diagonal formada pelos elementos da p -ésima coluna da matriz base $\mathbf{\Lambda}$. Note que para $\gamma = 1$, a matriz $\mathbf{\Lambda}$ é exatamente uma matriz identidade. Subsequentemente, cada sub-iteração irá modificar a força de atuação de um plano de cada vez para máxima independência do vetor de correção e máxima razão sinal ruído da estimação da matriz de influência. No outro extremo, para $\gamma = 0$, cada sub-iteração irá modificar a força de atuação em todos os planos de correção simultaneamente. Isto irá minimizar a amplitude da piora temporária do sinal de erro (assumindo uma matriz de influência precisamente conhecida). Isto pode, no entanto, resultar em uma matriz $\Delta\mathbf{U}$ singular e tornar a estimação da matriz de influência impossível. Na prática, o parâmetro γ deve ser especificado para proporcionar um compromisso entre a relação sinal ruído da estimação da matriz de influência e a amplitude de pior caso do balanceamento ativo.

Exemplo:

Suponha um sistema rotativo com dois planos de atuação e com os vetores de controle $\mathbf{u}_h$ e $\mathbf{u}_{h+1}$, sendo $[-1 \ 2]^T$ e $[2 \ 1]^T$, respectivamente. Como já foi dito, para computar a matriz de

influência atualizada, precisamos de m atuações independentes do vetor de controle. Neste exemplo, $m = 2$. Vamos observar o efeito da variação de γ no cálculo dos vetores de *perturbação*.

- Para $\gamma = 0$, temos

$$\mathbf{\Lambda}_{\gamma=0} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

O vetor $\tilde{\mathbf{u}}_0$ é igual a $\mathbf{u}_h$. Logo,

$$\tilde{\mathbf{u}}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Usando a equação (5.39) para encontrar os vetores de *perturbação* seguintes:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_1 &= \tilde{\mathbf{u}}_0 + \text{diag}(\mathbf{\Lambda}_1)(\mathbf{u}_{h+1} - \mathbf{u}_h) \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_2 &= \tilde{\mathbf{u}}_1 + \text{diag}(\mathbf{\Lambda}_2)(\mathbf{u}_{h+1} - \mathbf{u}_h) \\ &= \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note que último vetor de perturbação $\tilde{\mathbf{u}}_2$ corresponde ao vetor de controle $\mathbf{u}_{h+1}$.

- Para $\gamma = 0,5$, temos

$$\mathbf{\Lambda}_{\gamma=0,5} = \begin{pmatrix} 0,666 & 0,333 \\ 0,333 & 0,666 \end{pmatrix}$$

E os vetores de *perturbação* serão:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_1 &= \tilde{\mathbf{u}}_0 + \text{diag}(\mathbf{\Lambda}_1)(\mathbf{u}_{h+1} - \mathbf{u}_h) \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,666 & 0 \\ 0 & 0,333 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1,666 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_2 &= \tilde{\mathbf{u}}_1 + \text{diag}(\mathbf{\Lambda}_2)(\mathbf{u}_{h+1} - \mathbf{u}_h) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1,666 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,333 & 0 \\ 0 & 0,666 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Finalmente, para $\gamma = 1$

$$\mathbf{\Lambda}_{\gamma=1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E os vetores de *perturbação* serão:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_1 &= \tilde{\mathbf{u}}_0 + \text{diag}(\mathbf{\Lambda}_1)(\mathbf{u}_{h+1} - \mathbf{u}_h) \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_2 &= \tilde{\mathbf{u}}_1 + \text{diag}(\mathbf{\Lambda}_2)(\mathbf{u}_{h+1} - \mathbf{u}_h) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Representando graficamente a ação do método de *perturbação* (figura 5.6):

Figura 5.6: Vetores de perturbação para $\gamma = 0, 0,5$ e 1

Pode-se perceber que, quando $\gamma = 0$, os vetores diferença (representados pela setas pontilhadas) entre os vetores de perturbação tem sempre o mesmo módulo e direção, produzindo uma matriz $\Delta \mathbf{U}$ singular. Quando $\gamma = 1$, a variação de módulo e sentido entre os vetores diferença é máxima, gerando uma matriz $\Delta \mathbf{U}$ certamente não singular. No entanto, os vetores de perturbação intermediários entre $\mathbf{u}_h$ e $\mathbf{u}_{h+1}$ (neste exemplo há somente um) irão apresentar a máxima variação de módulo, produzindo uma forte perturbação na planta.

□

5.3.5 Lei de controle ótimo adaptativo recursivo

Uma implementação adaptativa recursiva de lei de controle ótima da equação (5.25) pode ser obtida pela adição da estimação em tempo real dado pela equação (5.37) e o método de perturbação, governado pela matriz de base da equação (5.38). A lei de controle adaptativa recursiva ótima é então dada pela equação

$$\mathbf{u}_{h+1} = (\hat{\mathbf{C}}_h^H \mathbf{Q} \hat{\mathbf{C}}_h + \mathbf{R} + \mathbf{S})^{-1} [(\hat{\mathbf{C}}_h^H \mathbf{Q} \hat{\mathbf{C}}_h + \mathbf{S}) \mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{C}}_h^H \mathbf{Q} \mathbf{e}_h] \quad (5.40)$$

onde $\hat{\mathbf{C}}_h$ é a matriz de influência estimada computada usando a equação (5.37). A cada iteração de controle h é dividida em m sub-iterações sobre as quais o vetor de correção é *perturbado* de acordo com a equação (5.39) para garantir uma estimação não singular.

É necessário também estabelecer um critério de parada do controle pois, a medida que vetor de erro diminui, o ruído de medição torna-se mais evidente e a estimação da matriz de influência fica ruim. Se essa matriz $\mathbf{C}_{novo}$ for usada na atualização da matriz de influência estimada $\hat{\mathbf{C}}_h$, a matriz $\hat{\mathbf{C}}_h$ irá se afastar da matriz de influência real e o novo vetor de controle $\mathbf{u}_h$ irá piorar as momentaneamente as vibrações do sistema. A sugestão é usar um vetor de erro $\mathbf{e}_{limiar}$ que irá determinar se o controle deve ou não realizar novas *perturbações* de forma a atualizar a estimação da matriz de influência $\hat{\mathbf{C}}_h$.

A figura 5.7 mostra um fluxograma completo controle ótimo adaptativo por matriz de influência.

Figura 5.7: Fluxograma do controle ótimo adaptativo por matriz de influência

5.4 Regulação sincronizada MIMO usando o controle ótimo adaptativo por matriz de influência

Com base no que foi exposto no capítulo 4 e na seção 5.3, pode-se implementar um regulador apropriado para a redução de vibrações de sistemas rotativos que utilizem múltiplos sensores e atuadores. A estrutura desse regulador é mostrada na figura 5.8.

Figura 5.8: Diagrama do regulador síncrono com controle ótimo adaptativo por matriz de influência

Comparando essa figura com a figura 4.7, pode-se perceber as seguintes diferenças: o número de conversores A/D e módulos de filtragem no regulador MIMO é igual ao número de sensores de erro (sensores de vibração); O número de conversores D/A e módulos de geração de sinal nesse mesmo regulador é igual ao número de planos de atuação; O módulo de regulação de cada um apresentam leis de controle diferentes.

Capítulo 6

Simulações

Para verificar o desempenho do controle ótimo adaptativo por matriz de influência, foi criado um modelo de rotor usando o método de elementos finitos, conforme descrito no capítulo 3. O rotor é constituído de um eixo de aço de 3,2 mm de diâmetro e 337,5 mm de comprimento. Há cinco “corpos” dispostos no eixo: **Axs**, mancal axial superior, **Axi**, mancal axial inferior, **Rds**, mancal radial superior, **Rdi**, mancal radial inferior e **Mm**, disco-motor. Os mancais axiais são fabricados em aço, à exceção da extremidade de cada um possuir um disco fino de alumínio. Tanto os mancais radiais como o disco-motor são feitos de alumínio. Adicionalmente, em cada mancal radial e ao disco rotor foi fixado um anel de material ferromagnético (aço silício) para o correto funcionamento dos mancais magnéticos e do motor. O rotor é mantido na posição vertical por meio de dois mancais magnéticos axiais enquanto que a centralização do mesmo é mantida por dois mancais radiais. O torque necessário para girar o rotor é fornecido por bobinas de um estator montado no mesmo ponto nodal do disco-motor.

No desenvolvimento do modelo do rotor, o eixo foi discretizado em 13 pontos nodais (figura 6.1). Uma análise prévia mostrou que esse número de nós era suficiente para a precisão requerida do modelo. Para introduzir as características de rigidez e amortecimento dos mancais magnéticos no modelo de elementos finitos, foi utilizado a teoria apresentada no seção 2.2. Foi admitido que os parâmetros dos mancais magnéticos são $k_x = -40,08 \text{ N/m}$ e $k_i = 0,8 \text{ N/A}$. O controle de estabilização escolhido foi um tipo *atraso-avanço* de ganho $K_t = 1,6$, com os polos alocados em 0,2 e 3100 rad/s, e zeros

Figura 6.1: Modelo em elementos finitos do rotor simulado

em 1 e 310 rad/s. Para o sensor usou-se um ganho de 1×10^4 V/m. Quanto ao filtro passa baixa, a frequência de corte ω_{lp} escolhida foi de 800 Hz, com um fator de amortecimento ξ_{lp} de 0,7. Finalmente, para o amplificador de potência, tomou-se um ganho $K_a = 0,1$, com frequência de corte $\omega_{amp} = 20$ kHz. Usando uma pequena rotina escrita para o programa *Matlab*, chegou-se ao valor da rigidez e amortecimento equivalente, $K_{eq} = 17000$ N/m e $C_{eq} = 30$ N.s/m. Deve-se atentar que estes valores são apenas uma aproximação da realidade e não representam completamente a dinâmica do controle de malha fechada.

Os nós de aplicação da força eletromagnética dos mancais são 6 e 10. Quatro sensores de erro foram instalados, dois para cada mancal, posicionados nos nós 4 e

Figura 6.2: Modo de vibrar em 21,33 Hz

Figura 6.3: Modo de vibrar em 36,16 Hz

Figura 6.4: Modo de vibrar em 40,08 Hz

Figura 6.5: Modo de vibrar em 85,72 Hz

8, e foram dispostos de forma a lerem os deslocamentos de cada plano de atuação de cada mancal. Foi considerado também que a ação dos mancais axiais é independente da ação dos mancais radiais. As velocidades críticas abaixo de 100Hz do rotor foram calculadas e situam-se em 21,33, 36,16, 40,08 e 85,72 Hz. As figuras 6.2, 6.3, 6.4 e

6.5 mostram os modos de vibrar do rotor em cada uma dessas velocidades. O rotor apresenta desbalanceamentos concentrados em três nós, sendo $6 \times 10^{-6}/180^\circ$ kg.m no nó 7 e $3 \times 10^{-6}/180^\circ$ kg.m nos nós 5 e 9. Mais detalhes sobre as características do rotor podem ser encontrados no apêndice A.

Simulou-se inicialmente o rotor girando à 10 Hz, distante da sua primeira velocidade crítica. As figuras 6.6, 6.7 e 6.8 mostram a ação do regulador síncrono. Pode-se perceber que a cada quatro iterações, o controle adaptativo ótimo atualiza a matriz de influência e corrige adequadamente o vetor de controle dos atuadores, reduzindo a vibração (o erro) onde estão presentes os mancais magnéticos. Só não houve o cancelamento completo pois a matriz $\mathbf{R}$ de penalização do vetor de controle não é nula, resultando num erro residual dado pela equação 5.32. Pelo que se vê na figura 6.7, não houve alteração visível da vibração do mancal motor.

Figura 6.6: Resposta à 10 Hz do mancal superior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = \text{diag}(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = \text{diag}(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = \text{diag}(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = \text{diag}(0)$, $\gamma = 0, 5$)

Figura 6.7: Resposta à 10 Hz do mancal motor ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0,5$)

Figura 6.8: Resposta à 10 Hz do mancal inferior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0,5$)

A seguir, será observado o desempenho do regulador síncrono quando o rotor se encontra girando na sua primeira velocidade crítica (21,33 Hz). As figuras 6.9, 6.10 e 6.11 mostram o regulador também foi capaz de reduzir as vibrações onde existe atuação. Além disso, houve uma perturbação na vibração do mancal motor, sofrendo inicialmente um pequeno aumento de amplitude e depois decrescendo para cerca de 60% do valor inicial.

Figura 6.9: Resposta à 21,33 Hz do mancal superior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = \text{diag}(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = \text{diag}(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = \text{diag}(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = \text{diag}(0)$, $\gamma = 0, 5$)

Figura 6.10: Resposta à 21,33 Hz do mancal motor ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0,5$)

Figura 6.11: Resposta à 21,33 Hz do mancal inferior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0,5$)

As simulações seguintes mostram o efeito de diferentes matrizes de influência estimadas iniciais. As figuras 6.12, 6.13 e 6.14 mostram o caso em que foi usada uma matriz de influência inicial que é “mais rígida” que a usada na simulação anterior. Dos gráficos, ve-se que a ação do regulador foi bem agressiva, provocando grandes perturbações na planta e elevando consideravelmente a vibração nos pontos considerados durante a primeira etapa de estimação da matriz de influência. As figuras seguintes, 6.15, 6.16 e 6.17, mostram o caso em que utilizou-se uma matriz de influência inicial “mais flexível”. Não houve praticamente aumento da vibração nos mancais, porém a regulação precisou de mais iterações para conseguir a redução das mesmas.

Figura 6.12: Resposta à 21,33 Hz do mancal superior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(1 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0, 5$)

Figura 6.13: Resposta à 21,33 Hz do mancal motor ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(1 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0,5$)

Figura 6.14: Resposta à 21,33 Hz do mancal inferior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(1 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0,5$)

Figura 6.15: Resposta à 21,33 Hz do mancal superior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(1 \times 10^{-3})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0,5$)

Figura 6.16: Resposta à 21,33 Hz do mancal motor ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(1 \times 10^{-3})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0,5$)

Figura 6.17: Resposta à 21,33 Hz do mancal inferior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(1 \times 10^{-3})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0,5$)

A seguir, serão mostrados os resultados para diferentes matrizes de penalização do controle $\mathbf{R}$. Para uma matriz $\mathbf{R} = diag(1)$, os resultados obtidos são mostrados nas figuras 6.18, 6.19 e 6.20 enquanto que para $\mathbf{R} = diag(0)$, as figuras 6.21, 6.22 e 6.23 mostram a ação do controle. Como já foi explicado anteriormente, a matriz $\mathbf{R}$ pode ser usada para aumentar a robustez do controle frente a incerteza da matriz de influência. Nota-se que quanto maior a matriz $\mathbf{R}$, mais suave o controle, porém a o contraponto de não haver a redução total das vibrações nos nós atuados.

Figura 6.18: Resposta à 21,33 Hz do mancal superior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = \text{diag}(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = \text{diag}(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = \text{diag}(1)$, $\mathbf{S} = \text{diag}(0)$, $\gamma = 0, 5$)

Figura 6.19: Resposta à 21,33 Hz do mancal motor ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = \text{diag}(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = \text{diag}(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = \text{diag}(1)$, $\mathbf{S} = \text{diag}(0)$, $\gamma = 0, 5$)

Figura 6.20: Resposta à 21,33 Hz do mancal inferior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1)$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0,5$)

Figura 6.21: Resposta à 21,33 Hz do mancal superior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(0)$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 0,5$)

Figura 6.22: Resposta à 21,33 Hz do mancal motor ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = \text{diag}(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = \text{diag}(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = \text{diag}(0)$, $\mathbf{S} = \text{diag}(0)$, $\gamma = 0,5$)

Figura 6.23: Resposta à 21,33 Hz do mancal inferior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = \text{diag}(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = \text{diag}(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = \text{diag}(0)$, $\mathbf{S} = \text{diag}(0)$, $\gamma = 0,5$)

Finalmente, simulou-se o sistema para diferentes valores do coeficiente γ . Relembrando, este coeficiente controla o comportamento da fase de estimação da matriz de influência. Quando $\gamma = 1$, o controle adaptativo irá agir individualmente em cada sinal do vetor de atuação a cada iteração, e ter-se-á a máxima relação sinal-ruído, permitindo uma estimação precisa da matriz de influência. Se γ se aproxima de zero, haverá a alteração simultânea de todos os sinais do vetor de atuação e a estimação apresentará uma incerteza grande. A seguir, serão mostrados os resultados para diferentes matrizes de penalização do controle $\mathbf{R}$. As figuras 6.24, 6.25 e 6.26 mostram o caso em que $\gamma = 0, 1$. Vê-se que o controle é bem suave mas a estimação da matriz de influência é demorada e muito imprecisa, o que não permite a eliminação das vibrações. Quando $\gamma = 1$, o controle perturba muito o sistema, produzindo grandes variações de amplitude das vibrações, porém a estimação correta da matriz de influência é feita logo nas primeiras iterações do regulador, conforme pode ser visto nas figuras 6.27, 6.28 e 6.29.

Figura 6.24: Resposta à 21,33 Hz do mancal superior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = \text{diag}(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = \text{diag}(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = \text{diag}(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = \text{diag}(0)$, $\gamma = 0, 1$)

Figura 6.25: Resposta à 21,33 Hz do mancal motor ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = \text{diag}(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = \text{diag}(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = \text{diag}(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = \text{diag}(0)$, $\gamma = 0, 1$)

Figura 6.26: Resposta à 21,33 Hz do mancal inferior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = \text{diag}(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = \text{diag}(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = \text{diag}(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = \text{diag}(0)$, $\gamma = 0, 1$)

Figura 6.27: Resposta à 21,33 Hz do mancal superior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = \text{diag}(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = \text{diag}(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = \text{diag}(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = \text{diag}(0)$, $\gamma = 1$)

Figura 6.28: Resposta à 21,33 Hz do mancal motor ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = \text{diag}(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = \text{diag}(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = \text{diag}(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = \text{diag}(0)$, $\gamma = 1$)

Figura 6.29: Resposta à 21,33 Hz do mancal inferior ($\hat{\mathbf{C}}_{inicial} = diag(3 \times 10^{-4})$, $\mathbf{Q} = diag(1 \times 10^9)$, $\mathbf{R} = diag(1 \times 10^{-1})$, $\mathbf{S} = diag(0)$, $\gamma = 1$)

Capítulo 7

Conclusão

Neste trabalho foi realizado uma análise teórica do desempenho da regulação sincronizada aplicada na redução de vibrações de um sistema rotativo utilizando mancais magnéticos. Tal regulador foi estudado em [24], onde ficou demonstrado as suas características de robustez e estabilidade aplicado à sistemas SISO.

Foi realizada uma revisão da literatura sobre os métodos de redução de vibrações de rotores, tendo interesse especial aqueles em que os mancais magnéticos eram usados como atuadores. Também foram revisados diversos trabalhos sobre a modelagem de rotores pelo método de elementos finitos.

A regulação sincronizada foi reapresentada e ficou demonstrado que tal técnica é análoga ao método de redução de vibrações usando coeficiente de influência. A partir dos resultados de [6], o módulo de regulação foi alterado de forma a se tornar um regulador MIMO ótimo adaptativo síncrono. Isso permitiu que a regulação sincronizada fosse aplicada em sistemas rotativos com vários sensores e atuadores e onde o modelo da planta não fosse conhecido *a priori*.

Um modelo de rotor utilizando o método de elementos finitos foi obtido e várias simulações numéricas foram realizadas. tais simulações mostram que o regulador implementado apresenta boas características de robustez e possui parâmetros que permitem contrabalançar a velocidade da adaptação e a “agressividade” do regulador. Também é sugerido um algoritmo para a aplicação da regulação sincronizada em sistemas rotativos.

Algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Realizar uma análise experimental a fim de comparar os dados experimentais com os dados obtidos por simulação;
- Verificar a capacidade da regulação sincronizada em reduzir a corrente de controle i_c aplicada nos mancais magnéticos. Neste caso, como entradas seriam usadas os sinais das correntes de controle dos mancais magnéticos e as saídas do regulador síncrono seriam somadas aos sinais dos sensores de erro e os sinais resultantes seriam aplicadas às entradas dos controles de estabilização;
- Analisar sistemas rotativos onde o número de sensores é superior ao numero de atuadores.

Referências Bibliográficas

- [1] ALVES, J. S. *Otimização teórico-experimental da passagem por velocidades críticas de um rotor flexível contínuo*. Dissertação de mestrado, USP, São Paulo, Brasil, agosto de 2004.
- [2] CAVALCA, K. L. *Estudo de um dispositivo de redução de amplitude na passagem de um rotor pela velocidade crítica*. Dissertação de mestrado, UNICAMP, Campinas, Brasil, julho de 1988.
- [3] CHIACCHIARINI, H. G. E MANDOLESI, P. S. Unbalance compensation for active magnetic using ilc. In *IEEE International Conference on Control Applications*, p. 58-63, Cidade do México, México, setembro de 2001.
- [4] CHIBA, A.; FUKAO, T.; ICHIKAWA, O.; OSHIMA, M.; TAKEMOTO, M. E DORREL, D. G. *Magnetic bearings and bearingless drives*. Newnes, 2005.
- [5] CLEMENTS, J. R. *The experimental testing of an active magnetic bearing/rotor system undergoing base excitation*. Master thesis, Virginia Tech, 2000.
- [6] DYER, S. W. *Adaptive optimal control of active balancing systems for high-speed rotating machinery*. Phd thesis, University of Michigan, 1999.
- [7] FERNANDES, J. R. M.; PEREIRA DA SILVA, P. S. E ROCHA, P. H. Balanceamento ativo de rotor usando regulação sincronizada. In *X DINCON*, p. 691-694, Águas de Lindóia, Brasil, agosto de 2011.
- [8] GENTA, G. *Dynamics of rotating systems*. Springer, 2005.

- [9] HERZOG, R.; BÜHLER, P.; GÄHLER, C. E LARSONNEUR, R. Unbalance compensation using generalized notch filters in the multivariable feedback of magnetic bearings. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* v.4, n.5, p. 580-586, setembro de 1996.
- [10] HIPÓLITO, S. A. *Controle ativo de vibração de rotores em condições de velocidades críticas*. Dissertação de mestrado, UNESP, Ilha Solteira, Brasil, dezembro de 2005.
- [11] KNOSPE, C. R. E TAMER, S. M. Robust adaptive control of unbalance response for a flexible rotor. *JSME* v.40, n.4, 1997.
- [12] KNOSPE, C. R. E TAMER, S. M. Experiments in robust control of rotor unbalance response using magnetic bearings. *Mechatronics* v.7, n.3, p. 217-229, 1997.
- [13] KNOSPE, C. R.; TAMER, S. M. E FITTO, R. Rotor synchronous response control: approaches for addressing speed dependence. *Journal of Vibration and Control* v.3, p. 435-458, 1997.
- [14] KRAMER, E. *Dynamics of rotors and foundations*. Springer-Verlag, New York, USA, 1993.
- [15] LALANNE, M. E FERRARIS, G. *Rotordynamics prediction in engineering*. John Wiley and Sons, 1998.
- [16] LEWIS, F. L. *Applied optimal control and estimation: digital desing and implemetation*. Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1992.
- [17] LIANG, T. E YIQING, C. Model development and adaptive imbalance vibration control of magnetic suspended system. *Chinese Journal of Aeronautics* v.20, p. 434-442, 2007.
- [18] LIU, Z.-H.; NONAMI, K. E ARIGA, Y. Adaptive unbalance vibration control of magnetic bearing systems with rotational synchronizing and asynchronizing harmonic disturbance. *JSME* v.45, n.1, p. 142-149, 2002.

- [19] LUM, K.-Y.; COPPOLA, V. T. E BERNESTEIN, D. S. Adaptive auto-centering control for an active magnetic bearing supporting a rotor with unknow mass inbalance. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* v.4, n.5, p. 587-597, 1996.
- [20] MARKERT, R.; SKRICKA, N. E ZHANG, X. Unbalance compensation on flexible rotors by magnetic bearings using transfer functions. In *8th International Symposium on Magnetic Bearings*, p. 417-422, Mito, Japan, agosto de 2002.
- [21] MARSHALL, S. V. E SKITEK, G. G. *Eletromagnetic concepts and applications*. Prentice-Hall International, London, England, UK, 1987.
- [22] MIZUNO, T. An unified approach to controls for unbalance compensation in active magnetic bearings. In *International Conference on Control Applications*, p. 1063-1067, Trieste, Italia, setembro de 1998.
- [23] SCHWEITZER, G. E MASLEN, E. H. *Magnetic bearings - theory, design and application to rotating machinery*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2009.
- [24] SEGURA, V. I. C. *Regulação sincronizada de distúrbios senoidais*. Dissertação de mestrado, USP, São Paulo, Brasil, 1999.
- [25] SHI, J.; ZMOOD, R. E QIN, L. J. The direct method for adaptive feed-forward vibration control of magnetic bearing systems. In *7th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*, p. 675-680, Singapore, Singapore, dezembro de 2002.
- [26] SHI, J.; ZMOOD, R. E QIN, L. J. Synchronous disturbance attenuation in magnetic bearing systems using adaptive compensating signals. *Control Engineering Practice* v.12, p. 283-290, 2004.
- [27] TAMISIER, V.; FONT, S. E CARRERE, F. A new anti-vibration algorithm for active magnetic bearings application. In *IEEE International Conference on Control Applications*, p. 168-173, Glasgow, Scotland, UK, setembro de 2002.

- [28] TANAKA, N.; WATANABE, T. E SETO, K. Levitation and vibration control of a flexible rotor by using magnetic bearing. In *11th International Symposium on Magnetic Bearings*, p. 75-82, Nara, Japan, 2008.
- [29] ZHOU, S. E SHI, J. Optimal one-plane active balancing of a rigid rotor during acceleration. *Journal of Sound and Vibration v.249*, p. 196-205, 2002.
- [30] ZHOU, S. E SHI, J. Active balancing and vibration control of rotating machinery: a survey. *The Shock and Vibration Digest v.33*, n.4, p. 361-371, 2001.

Apêndice A

Características do rotor modelado

O rotor é constituído de elementos de três materiais: aço, ferro-silício (material magnético) e alumínio. A tabela A.1 lista os valores utilizados para a modelagem pelo método de elementos finitos:

Material	Densidade (kg/m ³)	Módulo de elasticidade (N/m ²)	Coefficiente de Poisson
Aço e Fe-Si	7850	$2,05 \times 10^{11}$	0,3
Alumínio	2766	$6,9 \times 10^{10}$	0,3

Tabela A.1: Propriedades dos materiais

O eixo do rotor é uma barra cilíndrica de aço de 337,5 mm de comprimento e 3,2 mm de diâmetro. Para a modelagem, o eixo foi dividido em 12 segmentos de viga conectados, totalizando 13 nós. Todos os nós foram localizados no eixo de forma que correspondessem ao centro de massa de cada elemento de disco. Partindo da extremidade superior do rotor, as posições dos nós são dadas na tabela A.2.

Figura A.1: Localização dos elementos de disco no rotor

Cada um dos “corpos” do rotor foi decomposto em vários elementos de disco mais simples, conforme pode ser visto na figura A.1. A tabela A.3 mostra as dimensões e o material de cada um dos elementos de disco.

Nó	Posição (mm)
1	0
2	1,5
3	7,5
4	34
5	40
6	46
7	147,5
8	234
9	240
10	246
11	330
12	336
13	337,5

Tabela A.2: Localização dos nós

Elemento	Posição (nó)	Material	Ø externo (mm)	Ø interno (mm)	Espessura (mm)
1	1	Alumínio	18	0	1
2	2	Aço	50	3,2	3
3	3	Aço	16	3,2	8
4	4	Alumínio	63	50	12
5	5	Alumínio	50	16	4
6	5	Alumínio	16	3,2	12
7	6	Fe-Si	63	58	12
8	6	Alumínio	58	50	12
9	7	Alumínio	16	3,2	12
10	7	Alumínio	50	16	4
11	7	Alumínio	58	50	12
12	7	Fe-Si	62,4	58	12
13	8	Alumínio	63	50	12
14	9	Alumínio	50	16	4
15	9	Alumínio	16	3,2	12
16	10	Fe-Si	63	58	12
17	10	Alumínio	58	50	12
18	11	Aço	16	3,2	8
19	12	Aço	50	3,2	3
20	13	Alumínio	18	0	1

Tabela A.3: Localização dos elementos de disco

Os dois mancais magnéticos são idênticos e os valores de rigidez e amortecimento equivalentes foram calculados conforme exposto nas seções 2.2-2.4. Os valores e os nós de aplicação da força magnética estão na tabela A.4.

Mancal	Posição (nó)	Rigidez (N/m)	Amortecimento (N.s/m)
superior	6	17000	30
inferior	10	17000	30

Tabela A.4: Rigidez e amortecimento equivalentes dos mancais

Os desbalanceamentos estão concentrados em três nós e dispostos de tal forma que o rotor apresenta balanceamento estático perfeito (tabela A.5).

Desbalanceamento (kg.m)	Posição (Nó)
$3 \times 10^{-6}/180^\circ$	5
$6 \times 10^{-6}/0^\circ$	7
$3 \times 10^{-6}/180^\circ$	9

Tabela A.5: Desbalanceamentos

Apêndice B

Diagramas para *Simulink*

Figura B.1: Diagrama geral do sistema

Figura B.2: Rotor e mancal magnético

Figura B.3: Planta do Rotor

Figura B.4: Regulador MIMO com estimação em tempo real da matriz de influência

Figura B.5: Modulo de sincronismo

Figura B.6: Modulo de filtragem

Figura B.7: Modulo de regulaco

Figura B.8: Modulo de geraco de sinal

Apêndice C

Programas para *Matlab*

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Programa criamodelo.m (Cria o modelo de elementos finitos do rotor)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all;
close all;
format short g;
clc;

% =====
% Propriedades dos Materiais
%
% MATERIAL = [ E rho nu ]
%
% E - Modulo de Elasticidade (de Young) [N/m^2]
% rho - Densidade [kg/m^3]
% nu - Coeficiente de Poisson
% =====

MATERIAL = [ 205e9 7850 0.3;
             69e9 2766 0.3 ];

% =====
% Definicao dos Nos
%
% NO = [ y0 y1 y2 ... yn ]
%
% y0, y1, ... yn - Posicao do No [m]
% =====

NO = [ 0.000 0.0015 0.0075 0.034 0.040 0.046 0.1475 0.234 0.240 0.246 0.330 0.336 0.3375 ];

% =====
% Definicao dos Elementos de Eixo
%
% ELEMENTO = [ n_i n_f Do Di Mat ]
%
% n_i, n_f - No inicial e final
% Do, Di - Diametro externo e interno [m]
% Mat - Material (conforme numero da linha da matriz MATERIAL)
% =====
```

```

ELEMENTO = [ 1 2 0.0032 0.000 1;
              2 3 0.0032 0.000 1;
              3 4 0.0032 0.000 1;
              4 5 0.0032 0.000 1;
              5 6 0.0032 0.000 1;
              6 7 0.0032 0.000 1;
              7 8 0.0032 0.000 1;
              8 9 0.0032 0.000 1;
              9 10 0.0032 0.000 1;
              10 11 0.0032 0.000 1;
              11 12 0.0032 0.000 1;
              12 13 0.0032 0.000 1 ];

% =====
% Definicao dos Discos
%
% DISCO = [ N Do Di L Mat ]
%
% N      - No onde esta definido o disco
% Do, Di - Diametro externo e interno [m]
% L      - Espessura [m]
% Mat    - Material (conforme numero da linha da matriz MATERIAL)
% =====

DISCO = [ 1 0.018 0.0000 0.001 2      % disco de aluminio
          2 0.050 0.0032 0.003 1
          3 0.016 0.0032 0.009 1

          4 0.063 0.050 0.012 2
          5 0.050 0.016 0.004 2
          5 0.016 0.0032 0.012 2
          6 0.063 0.058 0.012 1      % area ferromagnetica
          6 0.058 0.050 0.012 2

          7 0.016 0.0032 0.012 2
          7 0.050 0.016 0.004 2
          7 0.058 0.050 0.012 2
          7 0.0624 0.058 0.012 1

          8 0.063 0.050 0.012 2
          9 0.050 0.016 0.004 2
          9 0.016 0.0032 0.012 2
          10 0.063 0.058 0.012 1     % area ferromagnetica
          10 0.058 0.050 0.012 2

          11 0.016 0.0032 0.009 1
          12 0.050 0.0032 0.003 1
          13 0.018 0.0000 0.001 2 ]; % disco de aluminio

% =====
% Definicao da Rigidez dos Mancais
%
% RIGID = [ N kxx kzz kxz kzx ]
%
% N      - No onde esta definida a rigidez
% kxx, kzz kxz, kzx - Rigidez [N/m]

```

```

% =====

RIGID = [ 6 17000 17000 0 0
          10 17000 17000 0 0 ];

% =====
% Definicao do Amortecimento dos Mancais
%
% AMORTEC = [ N cxx czz cxz czx ]
%
% N          - No onde esta definido o amortecimento
% cxx, czz cxz, czx - Amortecimento [N/m/s]
% =====

AMORTEC = [ 6 30 30 0 0
            10 30 30 0 0 ];

% =====
% Definicao do Desbalanceamento de Massa
%
% DESBAL = [ N md fase ]
%
% N      - No onde esta definido desbalanco
% md     - Desbalanceamento = produto massa x distancia [kg.m]
% fase   - angulo de fase da localizacao do desbalanceamento
% =====

DESBAL = [ 5 1e-4*30e-3 pi
           7 2e-4*30e-3 0
           9 1e-4*30e-3 pi ];

% =====
% Cria as matrizes globais do modelo de elementos finitos
% =====

[M G K C Km Cm] = ROT_FEM(MATERIAL, NO, ELEMENTO, DISCO, RIGID, AMORTEC);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Funcao ROT_FEM.m (Cria as matrizes de elementos finitos do rotor)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [ M G K C Km Cm ] = ROT_FEM( Mat,No,Elem,Dis,Rig,Amort )

% [M, G, K, C, Km, Cm] = ROT_FEM(Mat, No, Elem, Dis, Rig, Amort)
%
% Constroi as matrizes que descrevem um rotor a partir do
% Metodo dos Elementos Finitos.
%
% Mat   = Descricao de materiais
% No    = Descricao de nos
% Elem  = Descricao de elementos de eixo
% Dis   = Descricao de elementos de disco
% Rig   = Descricao de elementos de rigidez
% Amort = Descricao de elementos de amortecimento
%
% M      = Matriz de massa (inercia)
% G      = Matriz giroscopica
% K      = Matriz de rigidez

```

```

% C      = Matriz de amortecimento
% Km     = Matriz de rigidez com o efeito dos mancais
% Cm     = Matriz de amortecimento com o efeito dos mancais

n = length(No);      % numero de nos do modelo
nt = n*4;            % dimensao das matrizes = 4 gdl * num. de nos

M = zeros(nt);       % matriz de inercia
K = zeros(nt);       % matriz de rigidez
C = zeros(nt);       % matriz de amortecimento
G = zeros(nt);       % matriz giroscopica

% =====
% Matrizes M, K, G e C dos elementos de viga (eixo)
% =====

ne = size(Elem,1);    % numero de elementos de viga

for c1 = 1:ne
    l1 = No(Elem(c1,1));
    l2 = No(Elem(c1,2));
    do = Elem(c1,3);
    di = Elem(c1,4);
    E = Mat(Elem(c1,5),1);
    rho = Mat(Elem(c1,5),2);
    nu = Mat(Elem(c1,5),3);

    L = l2 - l1;      % comprimento de um elemento [m]
    area = pi * (do^2 - di^2)/4; % area = pi * (D^2 - d^2)/4 [m^2]
    massa = rho * area * L; % massa = densidade * area * comprimento [kg]
    Jx = pi/64 * (do^4 - di^4); % Momento Polar de Inercia (elemento de eixo)
    % = pi * (D^4-d^4)/64 [m^4]

    % Matriz de Massa devido a Inercia Translacional (simetrica)
    mte_b = ...
        [ 156      0      0    22*L    54      0      0   -13*L; ...
          0    156   -22*L      0      0    54    13*L      0; ...
          0   -22*L    4*L^2      0      0   -13*L   -3*L^2      0; ...
        22*L      0      0    4*L^2    13*L      0      0   -3*L^2; ...
          54      0      0    13*L    156      0      0   -22*L; ...
          0     54   -13*L      0      0    156    22*L      0; ...
          0    13*L   -3*L^2      0      0    22*L    4*L^2      0; ...
        -13*L      0      0   -3*L^2   -22*L      0      0    4*L^2];

    mte_b = mte_b * massa/420;

    % Matriz de Massa devido a Inercia Rotacional (simetrica)
    mre_b = ...
        [ 36      0      0     3*L   -36      0      0     3*L; ...
          0     36    -3*L      0      0   -36    -3*L      0; ...
          0    -3*L    4*L^2      0      0     3*L    -L^2      0; ...
         3*L      0      0    4*L^2   -3*L      0      0    -L^2; ...
        -36      0      0    -3*L     36      0      0   -3*L; ...
          0    -36     3*L      0      0     36     3*L      0; ...
          0    -3*L    -L^2      0      0     3*L    4*L^2      0; ...
         3*L      0      0    -L^2   -3*L      0      0    4*L^2];

```



```

mre_b = mre_b * rho * area * (do^2 - di^2)/4 /(120*L);

% Matriz Giroscopica matrix (anti-simetrica)
g_b = ...
    [    0    -36    3*L     0     0    36    3*L     0; ...
      36     0     0    3*L   -36     0     0    3*L; ...
    -3*L     0     0  -4*L^2    3*L     0     0    L^2; ...
      0   -3*L    4*L^2     0     0    3*L   -L^2     0; ...
      0    36   -3*L     0     0   -36   -3*L     0; ...
    -36     0     0   -3*L    36     0     0   -3*L; ...
    -3*L     0     0    L^2    3*L     0     0  -4*L^2; ...
      0   -3*L   -L^2     0     0    3*L    4*L^2     0];

g_b = g_b * 2 * rho * area * (do^2 - di^2)/4/(120*L);

% Matriz de Rigidez (simetrica)
k_b = ...
    [    12     0     0    6*L   -12     0     0    6*L; ...
      0     12   -6*L     0     0   -12   -6*L     0; ...
      0   -6*L    4*L^2     0     0    6*L    2*L^2     0; ...
    6*L     0     0    4*L^2   -6*L     0     0    2*L^2; ...
    -12     0     0   -6*L    12     0     0   -6*L; ...
      0   -12    6*L     0     0    12    6*L     0; ...
      0   -6*L    2*L^2     0     0    6*L    4*L^2     0; ...
    6*L     0     0    2*L^2   -6*L     0     0    4*L^2 ];

k_b = k_b * E * Jx / L^3;

c2 = (c1*4-3):((c1+1)*4);
M(c2,c2) = M(c2,c2) + mte_b + mre_b;
G(c2,c2) = G(c2,c2) + g_b;
K(c2,c2) = K(c2,c2) + k_b;

end

C = alfa*M + beta*K;          % Cria a Matriz de Amortecimento Proporcional

% =====
% Matrices M e G dos Discos
% =====

ne = size(Dis,1);              % numero de discos

for c1 = 1:ne                  % Loop para cada definicao de disco

    no = Dis(c1,1);            % No onde sera definido o disco
    do = Dis(c1,2);            % Diametro externo do disco
    di = Dis(c1,3);            % Diametro interno do disco
    L  = Dis(c1,4);            % Espessura do disco
    E  = Mat(Dis(c1,5),1);      % Modulo de elasticidade do material do disco
    rho = Mat(Dis(c1,5),2);     % densidade do material do disco
    nu = Mat(Dis(c1,5),3);      % Coeficiente de Poisson do material do disco

    area = pi*(do^2 - di^2)/4; % area = pi * (D^2 - d^2)/4 [m^2]
    massa = rho * area * L;     % massa = densidade * area * comprimento [kg]

    Idx = massa/12*(3*(do/2)^2+3*(di/2)^2+L^2); % Momento de inercia na dir. x e z

```

```

Idy = massa/2*((do/2)^2+(di/2)^2);          % Momento de inercia na dir. y

% Matriz de Inercia do disco
mt_c = [ massa      0      0      0; ...
         0 massa      0      0; ...
         0      0 Idx      0; ...
         0      0      0 Idx ];

% Matriz Giroscopica do disco
g_c = [ 0      0      0      0; ...
        0      0      0      0; ...
        0      0      0 -Idy; ...
        0      0 Idx      0 ];

% Soma as matrizes de inercia e giroscopica do disco com as matrizes globais
c2 = no*4 - 3:no*4;
M(c2,c2) = M(c2,c2) + mt_c;
G(c2,c2) = G(c2,c2) + g_c;
end

% =====
% Influencia dos Mancais
% =====

Km = K;          % Km e Cm serao as matrizes do sistema com
Cm = C;          % o efeito dos mancais

ne = size(Rig,1); % numero de molas (rigidez)

for c1 = 1:ne
    no = Rig(c1,1);
    kk(1,1) = Rig(c1,2); % kxx
    kk(2,2) = Rig(c1,3); % kzz

    % Soma as matrizes de rigidez dos mancais com as matrizes globais
    c2 = no*4-3:no*4-2;
    Km(c2,c2) = Km(c2,c2) + kk;
end

for c1 = 1:ne
    no = Amort(c1,1);
    cc(1,1) = Amort(c1,2); % cxx
    cc(2,2) = Amort(c1,3); % czz

    % Soma as matrizes de amortecimento dos mancais com as matrizes globais
    c2 = no*4-3:no*4-2;
    Cm(c2,c2) = Cm(c2,c2) + cc;
end

end

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Programa Inicializacao.m
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
global L m T T1 r N n iter subiter Cest Wa W Wn Wx E Ex errsinc Q R S Tc beta J
global deltaE deltaW flag Sing

% velocidades criticas: 21.33, 36.16, 40.08 e 85.72 Hz

```

```

w = 21.33 *2*pi;      % Velocidade de rotacao [rad/s]
L = 50;               % numero de amostras em um ciclo de perturbacao
m = 42;               % numero de ciclos amostrados (deve ser par!)
T = 2*pi/w;          % periodo de um ciclo da perturbacao
T1 = T/L;             % periodo da amostragem
r = m*L-1;           % (numero de amostras - 1) a serem obtidas
N = m*L/2;           % numero de amostras desprezadas (fase transitoria)
n = m/2;              % numero de ciclos usados para calculo da DFT

% dimensao do sistema de controle (numero de atuadores e sensores)
p = 4;

% Matriz de influencia estimada
Cest = (3e-4)*eye(4);

% define as Matrizes Q, R e S
Q = 1.0e+9 * eye(p);   % Penalizacao dos sensores de erro
R = 1.0e0 * eye(p);    % Penalizacao do controle
S = 0.0e+0 * eye(p);   % Penalizacao da taxa de mudancao do controle

% Preenche a Matriz Tc (pag. 100 tese de Stephen Dyer)
gama = 0.5;
a = 1 / (p - p*gama + gama);
b = (1-gama) / (p - p*gama + gama);
Tc = eye(p);
for k1 = 1:1:p
    for k2 = 1:1:p
        if k1==k2
            Tc(k1,k2) = a;
        else
            Tc(k1,k2) = b;
        end
    end
end

beta = 0.95;          % fator de esquecimento do estimador

W = zeros(4,1);        % vetor de controle
Wa = zeros(4,1);       % vetor de controle anterior
Wn = zeros(4,1);       % vetor de controle posterior
E = zeros(4,1);        % vetor de saida da planta

Wx = zeros(4,5);
Ex = zeros(4,5);

deltaE = zeros(4,4);
deltaW = zeros(4,4);

flag = 0;               % flag que indica se o controle esta monitorando ou estimando Cest
iter = 0;               % indice de iteracao
subiter = 1;            % indice de subiteracao
J = 0;                  % funcao objetivo (aloca a variavel na memoria)
Sing = 1e9;             % valores singulares de Cest

errsinc = 1.00;         % erro de sincronismo, 1=sincronizado, >1=acel, <1=desacel

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Funcao comp.m (Modulo de Sincronismo)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [out] = comp(x)

xa = x(1);
r = x(2);

if xa==r
    out(1) = 0;
    out(2) = 1;
else
    out(1) = xa+1;
    out(2) = 0;
end;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Funcao filtro.m (Modulo de Filtragem)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [out]=filtro(e)
global m L N n errsinc

l = e(1);
yk = e(2);
Sra = e(3);
Sia = e(4);

% h = n*(l-N)/N;
h = mod(l,L)/L * errsinc;

if l<N
    Sr = 0;
    Si = 0;
end
if l>=N

    Sr = Sra + 2/N * yk * cos(2*pi*h);
    Si = Sia - 2/N * yk * sin(2*pi*h);

    % Sr = Sra + 2/N * yk * cos(2*pi*n*(l-N)/N);
    % Si = Sia - 2/N * yk * sin(2*pi*n*(l-N)/N);
end
if l==(m*L-1)
    Er = Sr;
    Ei = Si;
else
    Er = Sra;
    Ei = Sia;
end

out(1) = Er;
out(2) = Ei;
out(3) = Sr;
out(4) = Si;
out(5) = h;

```

```

% Funcao geracao.m (Modulo de Geracao de Sinal)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [out]=geracao(h)
global L errsinc

l = h(1);
Ur = h(2);
Ui = h(3);

Am = norm(Ur + 1i*Ui);
Fa = phase(Ur + 1i*Ui);

% h = 1/L;
h = mod(1,L)/L * errsinc;          % impoe um erro de sincronismo
% uk = Am*cos(2*pi*h + Fa);
uk = Am*cos(2*pi*h + Fa + pi/L);    % o termo pi/L corrige o atraso devido a amostragem

out(1) = uk;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Funcao regul_multi.m (Modulo de Regulacao)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [out] = regul_multi(z)

global L m iter subiter Tc Cest J Wa W Wn Wx E Ex deltaW deltaE Q R S flag beta Sing

l = z(1);

% le na entrada o vetor de perturbacao

Er1 = z(2);
Ei1 = z(3);
Er2 = z(4);
Ei2 = z(5);
Er3 = z(6);
Ei3 = z(7);
Er4 = z(8);
Ei4 = z(9);

if l==(m*L-1)
    % Forma o vetor de erro
    E = [ Er1 + 1i*Ei1;
          Er2 + 1i*Ei2;
          Er3 + 1i*Ei3;
          Er4 + 1i*Ei4 ];
    %
    if flag==1          % Modo de estimacao de Cest
        %
        if subiter==(4+1) % realizou todas as subiteracoes?
            %
            Wx(:,subiter) = W;
            Ex(:,subiter) = E;
            %
            for p=1:4
                deltaW(:,p) = Wx(:,p+1) - Wx(:,p);
                deltaE(:,p) = Ex(:,p+1) - Ex(:,p);
            end
        end
    end
end

```

```

    % Estima a nova matriz de coeficientes de influencia
    Svd1 = svd(Cest);
    Cest2 = (1-beta)*Cest + beta * deltaE / deltaW;
    %
    Svd2 = svd(Cest2);
    Sing2 = norm(Svd2 - Svd1);
    % If Sing2 < Sing
        Cest = Cest2;
        Sing = Sing2;
    % end
    flag = 0;
    iter = iter+1;
    %
end

if (subiter>1 && subiter<(4+1))
    %
    Wx(:,subiter) = W;
    Ex(:,subiter) = E;
    v = Tc(:,subiter);
    Wx(:,subiter+1) = Wx(:,subiter) + diag(v)*(Wn - Wa);
    W = Wx(:,subiter+1);
    %
    subiter = subiter+1;
    %
end

if subiter==1
    % Determina o proximo vetor de controle
    H = Cest'*Q*Cest;
    Wn = (H + R + S) \ ((H + S)*W - Cest'*Q*E);
    %
    Wx(:,subiter) = W;
    Ex(:,subiter) = E;
    v = Tc(:,subiter);
    Wx(:,subiter+1) = Wx(:,subiter) + diag(v)*(Wn - W);
    Wa = W;
    W = Wx(:,subiter+1);
    %
    subiter = subiter+1;
    %
end
%
end
%
if flag==0      % Modo de monitoracao
    % calcula o valor da funcao objetivo
    % J = abs( 1/2*E'*Q*E + 1/2*W'*R*W + 1/2*(W-Wa)'*S*(W-Wa) );
    flag = 1;
    subiter = 1;
end
%
end
%
% Envia para as saidas o vetor de controle
out(1) = real(W(1));
out(2) = imag(W(1));

```

```
out(3) = real(w(2));  
out(4) = imag(w(2));  
out(5) = real(w(3));  
out(6) = imag(w(3));  
out(7) = real(w(4));  
out(8) = imag(w(4));
```