ELISA YOSHIKO TAKADA

**ANÁLISE DO EFEITO DO JITTER DE FASE NA OPERAÇÃO DE MALHAS
DE SINCRONISMO DE FASE**

TESE APRESENTADA À ESCOLA
POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO PARA OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE DOUTOR EM ENGENHARIA

São Paulo
2006

ELISA YOSHIKO TAKADA

**ANÁLISE DO EFEITO DO JITTER DE FASE NA OPERAÇÃO
DE MALHAS DE SINCRONISMO DE FASE**

TESE APRESENTADA À ESCOLA
POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE
SÃO PAULO PARA OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE DOUTOR EM ENGENHARIA.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:
ENGENHARIA ELÉTRICA

ORIENTADOR:
PROF. TITULAR
JOSÉ ROBERTO CASTILHO PIQUEIRA

São Paulo
2006

FICHA CATALOGRÁFICA

Takada, Elisa Yoshiko

**Análise do efeito do *jitter* de fase na operação de malhas de sincronismo de fase / E.Y. Takada. -- São Paulo, 2006.
p.**

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle.

1.Redes de telecomunicações 2.Sistemas dinâmicos 3.Aproximação de função I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle II.t.

Dedico à minha mãe, Nobuko, e à minha avó, Ayako.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. José Roberto Castilho Piqueira, pela orientação, pelo incentivo, pela paciência e pela ajuda durante o nosso convívio no LAC.

Agradeço aos meus queridos amigos da Matemática, Jorge Tadashi Hiratuka, Fernanda Cardona, Cristina Barufi, Henrique Guzzo, Maria Eiko Nagaoka e Elizabeth Santos, sempre presentes em todos os momentos, pelo carinho e pelo eterno incentivo.

Agradeço aos meus colegas do LAC, Antonio Carlos Rosso Junior, Carlos N. Marmo e Fábio Fialho, pelo apoio e companheirismo.

RESUMO

O jitter de fase é um fenômeno inerente nos sistemas elétricos. O crescente interesse pelo jitter deve-se à degradação que causa em sistemas de transmissão de alta velocidade. Seus efeitos fazem-se sentir ao afetar o processo de recuperação de dados, causando aumento na taxa de erros por bit. Neste trabalho, o jitter é modelado como uma perturbação periódica e seu efeito na operação de PLLs é analisado. Deduzimos uma fórmula para o cálculo da amplitude do jitter envolvendo somente os parâmetros do PLL e do jitter e identificamos as regiões do espaço de parâmetros com os comportamentos dinâmicos do PLL.

ABSTRACT

Phase jitter or timing jitter is an inherent phenomenon on electrical systems. Jitter growing interest is due to degradation it causes in high-speed transmission systems. It affects the data recovering process and it causes an increase in the bit error rate. In this work, jitter is modelled as a periodic perturbation and its effects in the operation of a PLL are analysed. We deduce a formula that measures jitter amplitude by PLL and jitter parameters and we identify the regions of parameter space according to the system dynamical behaviour.

Sumário

Introdução	1
1 Sincronização	4
1.1 A sincronização em redes digitais	4
1.2 Técnicas de sincronização	7
1.3 Rede mestre-escravo	9
2 Malha de sincronismo (PLL)	11
2.1 Modelagem de um PLL	12
3 Jitter de fase	17
3.1 O que é o jitter?	18
3.2 PLL e o jitter de fase	22
4 Aproximação Assintótica	25
4.1 Múltiplas escalas	26
4.2 Δt_{jitter}	34
5 Simulações	38
5.1 Simulando o jitter periódico	38
5.2 Comparando os modelos de jitter	46
Conclusão	51
Referências Bibliográficas	53

Lista de Figuras

1.1	Classificação de redes segundo a distribuição de sinais de tempo. . .	7
1.2	Estratégias de sincronização.	8
1.3	Topologias de rede mestre-escravo.	9
1.4	Redes OWMS cadeia e estrela.	10
1.5	Redes TWMS cadeia, estrela e enlace.	10
2.1	Diagrama em blocos de um PLL	12
2.2	Diagrama de bifurcação	16
3.1	(a) Sinal sem jitter. (b) Sinal com jitter. (c) Jitter.	18
3.2	Amplitude e frequência do jitter.	19
3.3	Medidas de jitter	21
3.4	Comparações entre o jitter de período, ciclo-a-ciclo e o TIE.	22
4.1	Recomendação G.823 – Figura 1.	35
4.2	Recomendação G.823 – Tabela 1.	36
4.3	Recomendação G.823 – Figura 3.	37
5.1	Erro de frequência para $\bar{G} = 1$ e $200\text{Hz} \leq f_j \leq 2 \cdot 10^4\text{Hz}$	39
5.2	Erro de fase para $\bar{G} = 1$ e $200\text{Hz} \leq f_j \leq 2 \cdot 10^4\text{Hz}$	40
5.3	Retrato de fase para $\bar{G} = 1$ e $200\text{Hz} \leq f_j \leq 2 \cdot 10^4\text{Hz}$	40
5.4	Erro de frequência periódico e o estado síncrono não é alcançado no caso de jitter, com $\bar{G} = 1$ e $f_j = 10^5\text{Hz}$	41
5.5	Erro de fase torna-se periódico e o estado síncrono não é alcançado para o caso de jitter, com $\bar{G} = 1$ e $f_j = 10^5\text{Hz}$	42
5.6	O estado síncrono é alcançado para $f_j = 500\text{Hz}$ e $0,01 \leq \bar{G} \leq 0,5$ com erro de frequência nulo no caso jitter.	43

5.7	O estado síncrono é alcançado para $f_j = 500\text{Hz}$ e $0,01 \leq \bar{G} \leq 0,5$ com erro de fase não-nulo, com aumento no tempo de acomodação no caso no caso jitter. . . .	43
5.8	O estado síncrono é alcançado para $f_j = 500\text{Hz}$ e $0,01 \leq \bar{G} \leq 0,5$ com erro de frequência nulo no caso sem jitter.	44
5.9	O estado síncrono é alcançado para $f_j = 500\text{Hz}$ e $0,01 \leq \bar{G} \leq 0,5$ com erro de fase não-nulo, com aumento no tempo de acomodação no caso sem jitter.	44
5.10	O estado síncrono atingido para $f_j = 500\text{Hz}$ e $1 \leq \bar{G} \leq 100$ com erro de frequência nulo.	45
5.11	O estado síncrono atingido para $f_j = 500\text{Hz}$ e $1 \leq \bar{G} \leq 100$ com erro de fase nulo.	46
5.12	Erro de frequência nulo para $\bar{G} = 1$ e $f_j = 500\text{Hz}$ nos casos jitter periódico e gaussiano.	47
5.13	Erro de fase nulo para $\bar{G} = 1$ e $f_j = 500\text{Hz}$ nos casos jitter periódico e gaussiano.	47
5.14	Erro de frequência nulo para $\bar{G} = 1$ e $f_j = 10.000\text{Hz}$ somente no caso jitter periódico.	48
5.15	Erro de fase constante para $\bar{G} = 1$ e $f_j = 10.000\text{Hz}$ somente no caso jitter periódico.	48
5.16	Erro de frequência nulo para $\bar{G} = 10$ e $f_j = 500\text{Hz}$ nos casos jitter periódico e gaussiano.	49
5.17	Erro de fase nulo para $\bar{G} = 10$ e $f_j = 500\text{Hz}$ nos casos jitter periódico e gaussiano.	49
5.18	Erro de frequência nulo para $\bar{G} = 0,1$ e $f_j = 500\text{Hz}$ nos casos jitter periódico e gaussiano.	50
5.19	Erro de fase constante para $\bar{G} = 0,1$ e $f_j = 500\text{Hz}$ nos casos jitter periódico e gaussiano.	50

Introdução

A velocidade de transmissão em sistemas de comunicação digital atinge os gigahertz e causa preocupação aos projetistas, pois, concomitantemente, aumenta a necessidade de métodos de transmissão complexos, técnicas de sincronização perfeita e estabilidade nas fontes de clock e de sinais de dados.

Fatores como jitter e wander, considerados somente em projetos de sistemas analógicos, influenciam o desempenho de sistemas digitais provocando, por exemplo, aumento na taxa de erros por bit (BER – *Bits Error Rate*).

Imperfeições no processo de modulação e no meio de transmissão, como linha cruzada, ruído, interferência intersimbólica, são algumas das causas do jitter, que aparece como uma modulação de fase sobreposta ao sinal original. É importante que parâmetros que minimizem seus efeitos sejam analisados já que, na prática, é impossível evitar sua ocorrência [Lucky et al, 1968].

A União Internacional de Telecomunicações, UIT, setor de padronização de telecomunicações, (ITU-T – *International Telecommunications Union*), define o jitter e estabelece especificações a serem seguidas pelo projetistas de equipamentos para transmissão de sinais em sistemas baseados nos padrões PDH – *Plesiochronous Digital Hierarchy* e SDH – *Synchronous Digital Hierarchy* [Sexton e Reid, 1992]. No entanto, críticas em relação a essas recomendações têm sido feitas tanto pelos projetistas como pelos fabricantes. Angrisani mostra como os requisitos de precisão dessas recomendações podem afetar os resultados dos testes conduzidos nesses equipamentos, induzindo a erros, por exemplo, ao classificar como inaceitável um equipamento que poderia ser declarado aceitável [Angrisani et al, 2001].

Sistemas de telecomunicações nos padrões PDH/SDH utilizam, em suas redes, malhas de sincronismo de fases que são circuitos elétricos conhecidos por PLLs – *Phase-Locked Loops* – para extrair sinais de tempo. São elementos essenciais no processo de sincronização de sinais devido à sua capacidade de controlar a fase de um sinal de saída utilizando a fase de um sinal de entrada como referência.

A sincronização propicia uma distribuição precisa dos sinais de tempo em redes de telecomunicações, mantendo a continuidade e integridade dos fluxos de in-

formação [Kartaschoff, 1991]. A escolha da estratégia para a distribuição do relógio na rede depende do custo, da precisão requerida, da confiabilidade e da segurança operacional [Piqueira e Takada, 2005a]. Dentre as técnicas de sincronização, destacamos a mestre-escravo hierárquica e a mutuamente sincronizada. No primeiro caso, a rede é centralizada de modo que um relógio atômico preciso atua como o sinal mestre e controla a frequência dos nós, implementados com PLLs. No segundo, a rede opera de modo descentralizada e todos os nós, também implementados com PLLs, contribuem para a determinação da frequência de toda a rede. Assim, em situações práticas, o PLL é o principal elemento do processo de sincronização em redes de telecomunicação.

Porém, o PLL é sensível ao jitter, o qual é definido, de modo geral, como as variações de curto prazo de um sinal digital em relação às suas posições ideais no tempo. Em aplicações reais, o jitter tem componentes aleatórias e as abordagens clássicas são feitas do ponto de vista espectral, utilizando-se técnicas de transformadas de Fourier [Panter, 1965], [Trischitta e Varma, 1989].

Nesta tese, modelamos matematicamente o jitter de fase como uma perturbação periódica na fase de entrada de um PLL, obtendo uma equação não-linear. Nosso problema é estudar o efeito do jitter na operação de um PLL analisando a equação obtida na modelagem.

Problemas práticos oriundos da física ou da engenharia frequentemente apresentam não-linearidades que, modelados matematicamente, levam a equações cuja solução analítica exata não é conhecida. Inúmeras técnicas para obter aproximações numéricas ou analíticas já foram desenvolvidas para as soluções. Na teoria das perturbações, o objetivo é obter aproximações assintóticas para a solução de problemas que envolvem parâmetros pequenos ou grandes (veja os trabalhos de [Nayfeh, 1973], [Verhulst, 2000], [Kevorkian e Cole, 1981]). Um atrativo de tais aproximações é a possibilidade de estudar a influência dos parâmetros na solução do problema. A contribuição deste trabalho está na utilização da aproximação assintótica para derivar uma medida de jitter em termos dos parâmetros do problema.

Os objetivos desta tese são:

- utilizar a teoria das perturbações a fim de obter uma solução assintótica para o problema do PLL com jitter na entrada;
- analisar o comportamento dinâmico do sistema a fim de obter indicações sobre como ajustar adequadamente os dispositivos de sincronização e atenuar os efeitos do jitter;
- fazer simulações computacionais para comparar com os resultados teóricos e com as especificações da UIT.

Nosso trabalho está organizado da seguinte maneira:

- no Capítulo 1, fazemos uma introdução sobre a sincronização em redes de comunicação;
- no Capítulo 2, modelamos matematicamente o PLL;
- no Capítulo 3, apresentamos a modelagem matemática do PLL com o jitter de fase periódico;
- no Capítulo 4, utilizamos a aproximação assintótica para obter uma solução analítica do problema do PLL com jitter de fase e deduzimos uma fórmula para calcular o jitter de fase;
- no Capítulo 5, fazemos simulações do PLL com o Simulink (Matlab), considerando-se dois tipos de entrada, a saber, o jitter periódico e um ruído Gaussiano. A fórmula deduzida no capítulo anterior é utilizada para estimar o jitter.

Capítulo 1

Sincronização

O problema da distribuição de sinais de tempo em redes consiste em alinhar as bases de tempo de relógios espalhados ao longo de certa área. O objetivo é sincronizar as escalas de fase e de frequência dos osciladores localizados nos nós da rede utilizando-se a capacidade de comunicação dos circuitos interconectados à rede. Este problema tem várias aplicações [Lindsey et al, 1985], como:

- Estabelecer um sistema mundial de distribuição de sinais de tempo;
- Sincronizar os relógios localizados em diferentes pontos de uma rede de telecomunicações digital;
- Distribuir sinais de tempo em uma rede a fim de controlar e monitorar o desempenho em tempos específicos;
- Estabelecer sincronismo para um supercomputador, constituído de múltiplos processadores.

Estes itens são suficientes para justificar a relevância do problema da distribuição de sinais de tempo em aplicações de engenharia de controle e comunicações e a necessidade de um tratamento matemático preciso.

1.1 A sincronização em redes digitais

A sincronização em redes de telecomunicações passou a ter importância a partir do uso da tecnologia digital na transmissão de sinais e na comutação de canais.

Na década de 50, a transmissão digital ganhou impulso com o advento da modulação por código de pulsos, indicado por PCM – *Pulse Code Modulation*, em que o sinal analógico é convertido em sinal digital. Assim, ao invés da transmissão integral do sinal, são enviadas amostras do sinal retiradas a certos intervalos de tempo na forma de bits. A vantagem dessa técnica está na recuperação integral do sinal ao longo da rede, além da melhora na capacidade de conexão entre as centrais comutadoras de áreas urbanas.

A transmissão PCM consiste em canais de informação de 64 kbits/s utilizados para transmitir voz, dados, e tudo o que puder ser convertido em informação binária. Inicialmente surgiram duas hierarquias de sistemas PCM. Nos EUA, foi adotado o agrupamento de 24 canais com transmissão de 1,544 Mbits/s; na Europa, foi adotado o agrupamento de 32 canais de 2,048 Mbits/s. Posteriormente, com o desenvolvimento das telecomunicações, níveis superiores de hierarquias foram criados, combinando-se canais de nível inferior.

A necessidade de explorar esses canais físicos levou ao desenvolvimento da multiplexação por divisão no tempo, TDM – *Time Division Multiplexation*, em que os sinais são multiplexados através da intercalação de bits (ou bytes). Nas extremidades de cada canal de um sistema PCM, faz-se necessário um dispositivo controlado por um relógio (*clock*); uma amostra de sinal codificada num certo intervalo de tempo deve ser recuperada com o mesmo intervalo de tempo na outra extremidade do canal. Os vários relógios envolvidos nesse processo precisam estar sincronizados.

Não havia a necessidade de sincronização nas primeiras redes de telefonia, pois estas utilizavam a técnica dos bits de justificação em cada multiplexador. Nessa técnica, bits extras, são adicionados aos feixes que chegam ao multiplexador de modo a uniformizar a taxa de bits. Esses bits de justificação são removidos na demultiplexação, sendo o sinal reconstituído à sua forma original, exceto pelo jitter na taxa do relógio introduzido na operação de multiplexação/demultiplexação. O jitter se refere às imperfeições de tempo e de frequência, e deve ser controlado para minimizar erros de bits em linhas de transmissão individualizados [Bellamy, 1995].

Devido à dificuldade técnica de se obter a sincronização, o CCITT – *International Consultative Committtee on Telephony and Telegraphy* propôs, através da recomendação G702, a adoção do padrão de Hierarquia Digital Plesiócrona, indicada por PDH – *Plesiochronous Digital Hierarchy*, para transmissão em redes de telefonia digital [Bregni, 1998]. Esse padrão consiste em uma série de níveis hierárquicos de taxas de bits para transmissão. As redes com sistema PDH têm os relógios de seus

multiplexadores operando de modo independente com frequência perto de valores nominais e dentro de intervalos de tolerância padronizados.

A pressão pela digitalização das centrais comutadoras começou a aumentar à medida que aumentavam os requisitos por maior flexibilidade e velocidade de transmissão. Com a digitalização da voz, bits de voz, dados, etc., são transmitidos independentemente, a taxas cada vez maiores, possibilitando a prestação de vários serviços em uma rede digital de serviços integrados ISDN – *Integrated Services Digital Network*, substituindo as várias redes que operavam isoladamente.

A multiplexação plesiócrons começou a se mostrar ineficiente com a introdução da comutação digital. Na comutação analógica, era necessário sincronizar somente os relógios das extremidades de um mesmo sistema PCM. Com a comutação digital, a necessidade e a importância da sincronização é maior pois os sistemas PCM e as centrais comutadoras digitais precisam de uma referência de tempo muito precisa a fim de evitar escorregamento de intervalo de tempo, o que leva à perda de bits, alterando a amostra original do sinal.

Na década de 80, o padrão SONET – *Synchronous Optical Network* – foi desenvolvido nos EUA a fim de estabelecer padrões para a interação dos equipamentos de transmissão ótica de vários fabricantes. Baseado no SONET, a UIT propôs, em 1988, a Hierarquia Digital Síncrona, indicada por SDH – *Synchronous Digital Hierarchy*, estabelecendo padrões para compatibilizar as duas hierarquias através das Recomendações G707, G708 e G709.

A demanda crescente por serviços, como o tráfego de dados via IP – *Internet Protocol*, por exemplo, levou à necessidade de se desenvolver redes de maior capacidade de transmissão. No início dos anos 90, foi desenvolvido o sistema DWDM – *Dense Wavelength Division Multiplexing*, baseado na multiplexação densa por divisão em comprimentos de onda [Motta, 2004]. Este sistema opera com velocidades de até 10Gb/s para cada comprimento de onda.

O jitter é um fenômeno inerente a todos esses sistemas, seja pela ação do ajuste de ponteiros, pelo ruído térmico, pela interferência nas linhas de transmissão, entre outros motivos. Taxas de transmissão cada vez mais altas potencializam o efeito prejudicial do jitter no desempenho do sistema. Por exemplo, um nanosegundo de jitter a uma taxa de transmissão de 100Mb/s corresponde a uma incerteza de dados de 10%. Dobrando a velocidade de transmissão, o mesmo jitter corresponde a uma incerteza de 20%. Esse efeito danoso sobre as redes é um dos motivos pelos quais o jitter deve ser estudado, caracterizado, modelado e quantificado. Conhecer os

parâmetros do jitter, como a frequência e a amplitude, pode auxiliar na identificação das causas do jitter e estabelecer em que medida o jitter deve ser atenuado.

A importância da sincronização vai além das necessidades das redes com tecnologia SDH/SONET. As redes síncronas estão sendo utilizadas também em sistemas veiculares [Chen e Lindsey,1999], em processos de controle industrial [Lee et al], em comunicação celular padrão CDMA [Mazzenga et al, 2002] e em equipamentos de processamento de dados de alta capacidade [Shao, 2000].

1.2 Técnicas de sincronização

Diz-se que uma rede de telecomunicações é síncrona quando a sincronização decorre da interação entre os osciladores da rede. Uma rede com um mecanismo de relógio prioritário é chamada de rede mestre-escravo e, se todos os relógios tiverem a mesma relevância na determinação da frequência, a rede é mutuamente sincronizada. A figura 1.1 ilustra as várias técnicas de sincronização de redes, que também podem incluir técnicas de compensação de atrasos [Lindsey et al, 1985].

Figura 1.1: Classificação de redes segundo a distribuição de sinais de tempo.

Quando sincronização precisa não é um ponto crítico do projeto, pode-se optar por redes plesiócronas. A rede plesiócrona (figura 1.2.a) é associada à anarquia [Bregni, 1998], pois cada central opera com uma base de tempo independente.

Assim, cada nó (ou central) da rede tem um relógio de alta precisão independente dos outros, que são ajustadas manualmente. Como não ocorre distribuição de sinais de tempo entre os nós, o bom desempenho da rede depende da precisão dos relógios em cada nó. Apesar da facilidade de implementação e da tolerância a falhas nos relógios, atualmente essa técnica é preterida devido às exigências de melhor desempenho pelas novas técnicas digitais.

Figura 1.2: Estratégias de sincronização.

Entre as redes síncronas, temos a mutuamente sincronizada e a mestre-escravo hierárquica, conforme citado anteriormente. As redes mutuamente sincronizadas operam de modo descentralizado, sendo associadas à democracia, pois todos os nós contribuem para a determinação da escala de tempo e da frequência de toda a rede (figura 1.2c). Cada nó da rede é implementada com um PLL que opera em uma frequência média, que é idêntica para todos os nós. Uma vantagem dessa rede é a extrema confiabilidade conferida pela ausência do nó-mestre; como desvantagem, podemos citar a dificuldade de modelagem e a complexidade de implementação [Lindsey et al, 1985].

A rede com hierarquia mestre-escravo (figura 1.2b) pressupõe uma ou mais centrais de maior hierarquia que determinam a base de tempo das centrais subordinadas. A hierarquia é adotada a fim de evitar que a falha de um nó-mestre comprometa o funcionamento do resto da rede. O nó-mestre tem um relógio atômico de alta precisão e envia sua base de tempo aos nós-escravos. Cada nó é implementado com uma malha de sincronismo de fase que utiliza a fase e a frequência do sinal de referência para determinar a sua base de tempo, sincronizada com a do nó-mestre. Essa base de tempo pode servir de referência para os nós abaixo de sua hierarquia. O fato

do nó-escravo ser implementado com um PLL garante a estabilidade da frequência, evitando que alterações bruscas de fase ou frequência no sinal de referência sejam transferidas para outros nós. Essa técnica é associada ao despotismo e é utilizada especialmente em redes de telecomunicação digital devido ao excelente desempenho e confiabilidade obtidos a baixo custo.

Lembrando que cada nó-escravo é implementado com malhas de sincronismo de fase, as redes mestre-escravo podem ser modeladas matematicamente através de equações diferenciais. Em [Piqueira e Takada, 2005a], o Teorema da Variedade Central da teoria dos sistemas dinâmicos foi utilizado para estudar o comportamento das soluções próximo dos estados síncronos. Na próxima seção, vamos apresentar os diversos tipos de redes mestre-escravo de acordo com a topologia.

1.3 Rede mestre-escravo

As redes mestre-escravo são classificadas em redes via única (OWMS – *One-Way Master-Slave*) ou via dupla (TWMS – *Two-Way Master-Slave*), de acordo com o sentido de distribuição das bases de tempo. A figura 1.3 resume as topologias para essas redes.

Figura 1.3: Topologias de rede mestre-escravo.

A fase dos osciladores locais, φ , é dada por

$$\varphi = \omega t + \theta(t) + P(t),$$

sendo ωt um termo de livre curso, $\theta(t)$ um termo forçante e $P(t)$ uma perturbação.

A figura 1.4 ilustra duas topologias no caso OWMS, em que o nó-mestre M tem uma base de tempo própria e independente. No caso estrela simples, as bases de tempo dos nós-escravos dependem de um único nó e, na cadeia simples, do nó-mestre ou mesmo de outro nó-escravo.

Figura 1.4: Redes OWMS cadeia e estrela.

A figura 1.5 ilustra as redes TWMS nas topologias cadeia e estrela dupla, enlace simples e duplo. O nó-mestre tem uma base de tempo própria mas o sinal de controle enviado aos nós-escravos é ajustado em função da base de tempo dos outros nós. Os nós-escravos podem ter sua base de tempo dependendo de mais de um nó.

Figura 1.5: Redes TWMS cadeia, estrela e enlace.

Capítulo 2

Malha de sincronismo (PLL)

Uma distribuição precisa de sinais de tempo é um fator importante para manter a continuidade e a integridade dos fluxos de informação digital; assim, uma rede de comunicação digital deve conter vários dispositivos de sincronização que interagem para estabelecer e manter o controle de tempo e frequência de todos os relógios dentro de padrões previamente estabelecidos [Kartaschoff, 1991].

Um dispositivo largamente utilizado é o PLL — *Phase-Locked Loop*, uma malha de sincronismo de fase projetada para extrair sinais de tempo de canais de transmissão. A primeira aplicação do PLL data de 1932 com H. de Bellescize em um trabalho sobre a recepção de sinais de rádio [Bellescize, 1932], [Best, 1999]. A popularização começou com os aparelhos de televisão; atualmente são utilizados especialmente em redes de telecomunicações para obter a sincronização, o rastreamento (*tracking*) e a demodulação de sinais de informação. Podemos citar aplicações também em telemetria, radares e sistemas de instrumentação, entre outros [Lindsey et al Simon, 1978], [Gardner, 1979]. Redes de neurônios também têm sido modelados com PLLs no artigo [Piqueira et al, 2003].

A importância do PLL deve-se à sua capacidade de remover ruídos de sinais portadores de informação. A malha sincroniza um sinal gerado por um oscilador com um sinal de entrada tanto em fase como em frequência; após um certo intervalo de tempo, a diferença de fases dos sinais torna-se constante e a diferença de frequências se anula. Se a diferença de fases aumenta, um mecanismo de controle atua no oscilador de modo a reduzi-la ao mínimo; assim, o papel do PLL é reproduzir o sinal

original removendo o máximo de ruído possível.

2.1 Modelagem de um PLL

Vários autores já se dedicaram aos PLLs, como Viterbi (1966), Lindsey et al (1976), Gardner (1979), Best (1999), entre outros. Nestes estudos, o funcionamento e as principais propriedades dos PLLs são descritos em detalhes. Nesta seção, o PLL é modelado utilizando-se as ferramentas da teoria dos sistemas dinâmicos [Piqueira, 1987].

O PLL é um circuito em malha fechada conectando basicamente três elementos: um detetor de fases PD – *phase detector*, um filtro F – *filter* e um oscilador VCO – *voltage-controlled oscillator*, conforme ilustrado na figura 2.1.

Figura 2.1: Diagrama em blocos de um PLL

Neste trabalho, utilizamos o detetor de fases modelado como um multiplicador devido à sua simplicidade e, também, por ser uma boa aproximação em casos práticos. O detetor de fases PD é alimentado por dois sinais de tensão: $v_i(t)$ que é o sinal de entrada (ou de referência) e $v_o(t)$ que é o sinal gerado pelo VCO.

A tensão de saída do detetor, $v_d(t)$, é uma função da diferença de fases de $v_i(t)$ e $v_o(t)$, que chamamos de erro de fases.

Um filtro passa-baixas elimina os termos de frequência dupla de $v_d(t)$ e fornece um sinal de controle $v_c(t)$ para o VCO que, por sua vez, altera a sua frequência de modo que o erro de fases seja reduzido. Quando a frequência de v_o é igual à do sinal de entrada, ou seja, quando o erro de fase é constante, dizemos que a malha está em estado síncrono. Em inglês, escreve-se *phase-locked state*, de onde segue a denominação da malha.

Os sinais de entrada e de saída do PLL, em quadratura de fase, são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} v_i(t) &= V_i \sin[w_0 t + \theta_i(t)] \\ \text{e } v_o(t) &= V_o \cos[w_0 t + \theta_o(t)]. \end{aligned}$$

Nessas expressões,

- w_0 é a frequência angular central,
- V_i é a amplitude do sinal de entrada,
- V_o é a amplitude do sinal de saída do VCO,
- $\theta_i(t)$ e $\theta_o(t)$ são as fases dos sinais $v_i(t)$ e $v_o(t)$, respectivamente.

Por simplicidade, indicaremos as fases por θ_i e θ_o .

O detetor de fases PD compara a fase do sinal de entrada com a fase do sinal do VCO e fornece uma saída dada por:

$$v_d(t) = K_m v_i(t) v_o(t),$$

sendo K_m o ganho do multiplicador (em volt^{-1}). Assim,

$$\begin{aligned} v_d(t) &= K_m V_i \sin(w_0 t + \theta_i) V_o \cos(w_0 t + \theta_o) \\ &= \frac{K_m V_i V_o}{2} \left[\sin(\theta_i - \theta_o) + \sin(2w_0 t + \theta_i + \theta_o) \right]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

O filtro no PLL é um passa-baixas que elimina o termo de frequência dupla de v_d . Assim,

$$v_d(t) = \frac{K_m V_i V_o}{2} \sin(\theta_i - \theta_o). \quad (2.2)$$

Em [Piqueira e Monteiro, 2003a], é discutido como o termo de frequência dupla afeta o desempenho do PLL provocando oscilações que impedem que se atinja o estado síncrono.

O sinal v_d e o sinal de saída do filtro v_c são relacionados através da equação

$$F(s) = \frac{V_c(s)}{V_d(s)}, \quad (2.3)$$

sendo $F(s)$ a função de transferência do filtro, $V_c(s)$ e $V_d(s)$ as transformadas de Laplace dos sinais $v_c(t)$ e $v_d(t)$, respectivamente.

Seja o filtro F um passa-baixas estável de ordem $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, com função de transferência dada por:

$$F(s) = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0},$$

com b_i , $i = 0, \dots, n-1$, constantes positivas [Blinchikoff, 1982], [Ogata, 1997]. Segue-se por (2.2) e (2.3) que:

$$\frac{d^n}{dt^n}v_c(t) + b_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}v_c(t) + \dots + b_0v_c(t) = b_0K_d \sin(\theta_i - \theta_o), \quad (2.4)$$

sendo $K_d = \frac{K_m V_i V_o}{2}$ (em volt).

A fase do sinal de saída do VCO é controlada por $v_c(t)$ através da relação

$$\dot{\theta}_o = K_0 v_c,$$

sendo K_0 o ganho do VCO (em radianos por volt por segundo) [Gardner, 1979]. Assim, a equação (2.4) pode ser reescrita como:

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\theta_o(t) + b_{n-1}\frac{d^n}{dt^n}\theta_o(t) + \dots + b_0\frac{d}{dt}\theta_o(t) = b_0K_0K_d \sin(\theta_i - \theta_o). \quad (2.5)$$

Tomando o erro de fase $\varphi(t) = \theta_i - \theta_o$ como a variável dinâmica e considerando $L(\cdot)$ o operador diferencial linear de ordem n :

$$L(\cdot) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}(\cdot) + b_{n-1}\frac{d^n}{dt^n}(\cdot) + \dots + b_0\frac{d}{dt}(\cdot),$$

a equação (2.5) pode ser reescrita:

$$L(\varphi) + b_0 G \sin \varphi = L(\theta_i), \quad (2.6)$$

considerando $\varphi, \theta_i \in \mathcal{C}^{n+1}$, definidas em um intervalo da reta.

A constante $G = K_0 K_d$ (em rad/s) é chamada de ganho de malha do PLL.

A ordem de um PLL é a ordem da equação diferencial obtida acima, ou seja, a ordem do filtro mais um.

Para um filtro do tipo lag passa-baixas de primeira ordem com função de transferência

$$F(s) = \frac{w_0}{2\pi s + w_0},$$

a equação dinâmica (2.6), para a malha de segunda ordem, é:

$$\ddot{\varphi} + f_0 \dot{\varphi} + f_0 G \sin \varphi = \ddot{\theta}_i + f_0 \dot{\theta}_i, \quad (2.7)$$

com $f_0 = w_0/2\pi$ representando a frequência de corte do filtro.

O PLL assim descrito está em estado síncrono se φ , com $\dot{\varphi} = 0$, é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável da equação.

Em [Piqueira, 1987], a dinâmica dos PLLs de segunda ordem foi analisada qualitativamente através dos métodos analíticos estudados na teoria das bifurcações [Guckenheimer e Holmes, 1983], [Wiggins, 1990]. Para entradas do tipo rampa, os PLLs de segunda ordem não produzem erros de fase oscilantes ou caóticos. Assim, se $\theta_i(t) = \Omega t$, com $0 \leq \Omega \leq G$, os estados síncronos de (2.7) são dados por φ tal que

$$\sin \varphi = \Omega/G$$

$$\text{e } \dot{\varphi} = 0.$$

Consideramos $\varphi \in (-\pi, \pi]$, dado que a superfície de fases do sistema é cilíndrica.

Quando $0 \leq \Omega < G$, a equação (2.7) admite dois estados síncronos φ_1 e φ_2 tais que:

$$\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2 = \Omega/G$$

$$\text{e } \varphi_1 + \varphi_2 = \pi,$$

sendo φ_1 assintoticamente estável e φ_2 instável. Uma bifurcação sela-nó ocorre, portanto, quando $\Omega = G$. O conjunto dos valores de Ω tal que $0 \leq \Omega < G$ é chamado de faixa de captura do PLL e a figura 2.2 ilustra o diagrama de bifurcações correspondente.

Figura 2.2: Diagrama de bifurcação

Apesar de PLLs de ordem maior poderem apresentar melhor resposta transitória, vamos considerar somente PLLs de segunda ordem, pois atratores periódicos e caóticos para os erros de fase e de frequência podem aparecer para filtros de ordem maior.

Capítulo 3

Jitter de fase

A preocupação com o jitter de fase justifica-se pelo impacto causado no desempenho de sistemas de comunicação. Quando o jitter é excessivo, dados podem ser perdidos durante o processo de transmissão.

Os primeiros sistemas de comunicação eram analógicos, transmitindo dados a taxas relativamente baixas. A influência do jitter era desprezível. A demanda por serviços de alta velocidade levaram ao desenvolvimento tecnológico desses sistemas, que passaram a transmitir dados em sinais digitais a velocidades cada vez maiores. Neste cenário, a degradação provocada pelo jitter é significativa. Por este motivo, é importante entender o fenômeno jitter e identificar as suas diversas causas. Modelar o jitter matematicamente permite que seu efeito no sistema seja atenuado através da identificação e do ajuste dos parâmetros envolvidos.

A terminologia envolvendo o jitter não é padronizada, ou seja, é comum encontrar na literatura termos como jitter, jitter de fase, timing jitter, jitter periódico, entre outros. Por vezes, tipos diferentes de jitter são descritos pelo mesmo termo, ou então, um certo jitter admite várias denominações.

Na seção 3.1, fazemos uma rápida e informal introdução sobre o jitter com algumas das denominações e caracterizações mais comumente utilizadas, citadas em [Bellamy, 1995]. Na seção 3.2, apresentamos a modelagem matemática do jitter como uma perturbação periódica.

3.1 O que é o jitter?

Em uma linguagem informal, o jitter é um tipo de oscilação no instante de tempo em que é esperada a ocorrência de um evento qualquer.

Em um sistema digital de transmissão ideal a duração dos pulsos de um sinal é sempre a mesma ao longo do tempo. Porém, no caso real, a duração desses pulsos variam. Segundo Trischitta (1989), essas variações são modulações indesejáveis definidas como jitter. Assim, o jitter é uma medida do quanto o sinal oscilou em relação à sua posição ideal, conforme ilustrado na figura 3.1.

Figura 3.1: (a) Sinal sem jitter. (b) Sinal com jitter. (c) Jitter.

O interesse pelo jitter é relativamente recente. Apesar de inerente em sistemas elétricos, passou a desempenhar papel importante devido à degradação que causa em sistemas de comunicação de alta velocidade. Livros e artigos sobre têm sido publicados, como [Trischitta e Varma, 1989], [Shimanouchi, 2001], [Mehrotra, 2002], [Yamaguchi et al, 2003], estes últimos propondo técnicas de medição de jitter utilizando processos estocásticos. Comparações entre as várias denominações do jitter e estudos mostrando equivalências ou relações entre elas podem ser encontrados nos artigos [Chin e Cantoni, 1998] e [Shimanouchi, 2001]. Projetistas de equipamentos de transmissão também se preocupam com as especificações de jitter e propõem métodos alternativos de medição no artigo [Angrisani et al, 2001]. Em [Motta, 2004], temos

um estudo detalhado sobre o acúmulo de jitter em redes DWDM — *Dense Wavelength Division Multiplexing*.

Segundo a União Internacional de Telecomunicações, o jitter é definido como as variações de curto prazo dos instantes significativos em relação às suas posições ideais no tempo [ITUa, 1993]. Aplica-se a denominação jitter quando a frequência das variações é maior do que 10Hz e wander quando a frequência é menor do que 10Hz.

O jitter pode ser especificado como a amplitude pico-a-pico de um sinal com jitter e expressa como uma fração ideal do relógio, ou seja, uma fração de UI, como veremos a seguir.

Os parâmetros do jitter são a frequência e a amplitude (figura 3.2). A frequência do jitter é dada em hertz. A amplitude do jitter pode ser expressa em:

- UI — *Unit Intervals*, com 1 UI correspondendo a um ciclo completo do pulso (período normalizado);
- tempo absoluto, descrevendo a magnitude do jitter em uma ordem de grandeza apropriada como picosegundos;
- em graus, radianos ou UI ao quadrado.

Figura 3.2: Amplitude e frequência do jitter.

Bellamy (1995) e Bregni (1998) citam, como possíveis fontes de jitter em sistemas de telecomunicações, as seguintes:

- a linha cruzada e o ruído nos meios de transmissão;
- a interferência intersimbólica;
- a distorção de sinal;
- o ruído térmico;
- a imperfeição nos processos de modulação;
- a imperfeição na extração de relógio;
- o jitter intrínseco nos elementos de sincronização como os PLLs.

O jitter pode ser separado em duas categorias: o de origem aleatória (*random jitter*) e a determinística (*deterministic jitter*) [Shimanouchi, 2001].

O jitter de origem determinística está associado a uma função de densidade de probabilidade não-Gaussiana e tem a amplitude limitada. É caracterizado pelo seu valor pico-a-pico. Suas causas estão relacionadas com imperfeições no meio de transmissão, modulação de sinais, entre outras.

O jitter de origem aleatória não é limitado e tem como uma de suas causas o ruído térmico. Por este motivo, pode ser descrito por uma distribuição de probabilidade Gaussiana pois uma das fontes desse tipo de ruído em circuitos elétricos tem distribuição Gaussiana.

Existem algumas medidas relativas ao jitter, em geral, bastante intuitivas. A figura 3.3 [Tektronix] ilustra três dessas medidas, a saber, o jitter de período (*period jitter*), o jitter ciclo-a-ciclo (*cycle-cycle jitter*) e o TIE (*Time Interval Error*).

O jitter de período, indicado na figura 3.3 por P1, P2 e P3, mede o período de cada ciclo.

O jitter ciclo-a-ciclo, indicado por C2 e C3, é a medida do quanto o período mudou entre dois ciclos adjacentes. Nestas duas medidas, as posições ideais dos ciclos não são requeridas.

Figura 3.3: Medidas de jitter

O TIE está indicado na mesma figura, e mostra o quão distante cada ciclo ficou de sua posição ideal. Apesar de ser uma medida difícil de ser feita por necessitar da posição ideal dos ciclos, é importante por mostrar o efeito acumulativo do jitter de período ao longo do tempo. O valor do TIE igual a $\pm 0,5UI$ provoca um aumento considerável na taxa de erros por bit (BER), o que prejudica de modo excessivo a transmissão correta dos sinais de dados [Angrisani et al, 2001].

Na figura 3.4 [Tektronix], pode-se observar a forma de cada uma dessas medidas para um dado sinal de período nominal de $1 \mu s$.

Algumas especificações de jitter podem ser utilizadas para avaliar o desempenho de um PLL em um sistema de comunicações, como, por exemplo, a geração, a tolerância e a transferência de jitter.

A geração de jitter é a medida do jitter instrínseco produzido por um PLL; um sinal de referência livre de jitter é aplicado na malha e o jitter é medido na saída da malha.

A tolerância mede a habilidade do PLL de funcionar sem sair do sincronismo na presença de jitter de várias amplitudes e várias frequências. É determinada pela habilidade de recuperação de relógio de um sinal com jitter.

A transferência refere-se à magnitude do jitter na saída da malha por conta do jitter na entrada da malha. Neste caso, o jitter medido no sinal de entrada deve ser maior do que o jitter intrínseco de modo que a transferência, e não a geração de jitter, seja medida.

Não existe um único critério para a escolha de uma determinada especificação de

Figura 3.4: Comparações entre o jitter de período, ciclo-a-ciclo e o TIE.

jitter, faz-se necessário identificar as suas causas e avaliar caso a caso as necessidades e os requisitos de desempenho do sistema.

3.2 PLL e o jitter de fase

Nesta seção, analisamos um modelo matemático do PLL sob o efeito do jitter de fase na entrada do circuito. Vamos assumir que o jitter de fase aparece como uma variação periódica adicionada à fase $\theta_i = \Omega t$, com amplitude A em radianos, e frequência angular ω_j em radianos por segundo [Lucky et al, 1968], [Piqueira, 1987]. Esta caracterização de jitter foi estudada por Gardner (1979), que considerou uma modulação de fase senoidal na entrada de um PLL. É uma abordagem diferente da abordagem estatística, sendo que a descrição do jitter por componentes senoidais permite uma caracterização mais simples da resposta ao jitter de um extrator de relógio, no nosso caso, um PLL.

Um PLL de segunda ordem foi modelado no capítulo 2 pela equação

$$\ddot{\varphi} + f_0 \dot{\varphi} + f_0 G \sin \varphi = \ddot{\theta}_i + f_0 \dot{\theta}_i.$$

Considerando $\theta_i(t) = \Omega t + A \sin(\omega_j t)$, obtemos:

$$\ddot{\varphi} + f_0 \dot{\varphi} + f_0 G \sin \varphi = f_0 \Omega + f_0 \omega_j A \cos(\omega_j t) - \omega_j^2 A \sin(\omega_j t), \quad (3.1)$$

A fim de simplificar os cálculos, vamos utilizar uma variável adimensional $\tau = f_0 t$. Assim,

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\tau} f_0 \quad \text{e} \quad \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} f_0^2$$

e, usando linhas (ι) para indicar as derivadas em relação a τ , a equação (3.1) fica:

$$\varphi'' + \varphi' + \bar{G} \sin \varphi = \bar{\Omega} + \bar{\omega}_j A \cos(\bar{\omega}_j \tau) - (\bar{\omega}_j)^2 A \sin(\bar{\omega}_j \tau). \quad (3.2)$$

As barras sobre G , Ω e ω_j indicam uma divisão pela frequência de corte f_0 do filtro, a qual vamos supor ser igual à frequência de livre-curso do VCO e à frequência média do sinal de linha [Gardner, 1979].

A equação (3.2) pode ser modificada colocando-se os termos periódicos como:

$$\varphi'' + \varphi' + \bar{G} \sin \varphi = \bar{\Omega} + \bar{\omega}_j A \sqrt{1 + (\bar{\omega}_j)^2} \cos(\bar{\omega}_j \tau + \tan^{-1} \bar{\omega}_j).$$

Se o ganho do PLL é nulo e $\bar{\omega}_j$ é uma contante, a solução periódica imposta pelo jitter externo pode ser facilmente obtida. Neste caso, a equação (3.2) fica:

$$\varphi'' + \varphi' = \bar{\Omega} + \bar{\omega}_j A \cos(\bar{\omega}_j \tau) - (\bar{\omega}_j)^2 A \sin(\bar{\omega}_j \tau),$$

com solução exata dada por:

$$\varphi(\tau) = c_1 - c_2 e^{-\tau} + A \sin(\bar{\omega}_j \tau),$$

com c_1 e c_2 constantes. O estado síncrono nunca é alcançado e o erro de fase comporta-se como uma função periódica cujo o período é o do sinal do jitter de

fase.

Para as condições iniciais $\varphi(0) = a$ e $\varphi'(0) = b$, com a e b constantes, temos:

$$c_1 = a + b - A \bar{w}_j \text{ e } c_2 = b - A \bar{w}_j .$$

Quando $\tau \rightarrow \infty$, a solução estacionária é uma função periódica com período $2\pi / \bar{w}_j$ que oscila ao redor de c_1 com amplitude A .

Se o ganho aumenta, o jitter se reduz e o estado síncrono φ aparece como um estado-limite assintoticamente estável tal que:

$$\sin \varphi = \bar{\Omega} / \bar{G} \text{ e } \varphi' = 0.$$

No capítulo 5, utilizamos o Simulink do Matlab para simular o PLL com o jitter periódico conforme modelado na equação (3.2).

Capítulo 4

Aproximação Assintótica

A idéia das aproximações assintóticas já era conhecida desde o século XVII. Ao estudar o movimento da Terra ao redor do Sol segundo as leis de Newton, os astrônomos depararam-se com pequenos desvios em relação às observações feitas desse sistema. Tais desvios foram atribuídos a perturbações provocadas, entre outros motivos, pela presença da lua ou de planetas como Júpiter e Saturno. A idéia básica das aproximações é levar em consideração essas perturbações. O movimento do planeta é descrito através de uma expansão em séries de potências em que o primeiro termo corresponde ao problema sem a perturbação, e os outros termos correspondem às correções do movimento até a ordem desejada.

Essa técnica de expansão em série de potências em torno de um pequeno parâmetro, chamada de regular, não se revelou precisa para períodos longos de tempo em várias aplicações. A aproximação da solução era válida uniformemente somente por um período finito de tempo. Poincaré apresentou, em 1886, uma definição das expansões assintóticas e, em 1892, desenvolveu em seu trabalho na mecânica celeste, uma técnica para determinar soluções periódicas que ficou conhecida, mais tarde, como método de Poincaré-Lindstedt [Sanders e Verhulst, 1985].

Poincaré observou que a não-uniformidade da aproximação regular ocorria devido a contribuições do segundo termo dessa aproximação, que foi denominado termo secular. São termos que, de modo geral, ficam ilimitados quando o tempo t tende a infinito e sua eliminação é feita na tentativa de tornar a aproximação uniformemente válida para todo t . O nome ‘secular’ deve-se ao fato de que, no estudo dos movi-

mentos celestes, a escala de tempo é tão grande que o efeito de um termo secular não seria notado antes de várias centenas de anos.

A partir do século XX, a teoria das perturbações sofreu grandes avanços com o desenvolvimento de vários métodos de aproximação assintótica, utilizados não só em equações diferenciais como em equações a derivadas parciais. Em [Nayfeh, 1973], [Kevorkian e Cole, 1981] e [Verhulst, 2000], são apresentadas aplicações dessa teoria em várias áreas de pesquisa como física-matemática, mecânica dos fluidos, astrofísica, entre outros.

Neste capítulo, vamos utilizar o método das múltiplas escalas conforme descrito em [Nayfeh, 1973] e [Kevorkian e Cole, 1981]. É um método de aproximação assintótica aplicado em equações diferenciais com parâmetros, cujas soluções exibem características diferentes em escalas de tempo também diferentes. Um exemplo clássico é o do sistema massa-mola amortecido, em que uma solução exhibe ao mesmo tempo uma oscilação em uma escala de tempo rápida e um amortecimento associado a uma escala de tempo mais lenta. A escolha do método nesta tese deve-se à analogia que podemos fazer entre as equações que regem um PLL e um pêndulo matemático [Best, 1999].

Na seção 4.1 mostramos como obter uma solução aproximada da equação (3.2) e, na seção 4.2, é deduzida uma nova medida de jitter de fase em termos de seus parâmetros e os do PLL.

4.1 Múltiplas escalas

Vamos utilizar o símbolo $\mathcal{O}$ para indicar a ordem de magnitude de grandezas, no seguinte sentido:

$$f(t, \varepsilon) = \mathcal{O}(g(t, \varepsilon)), \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.1)$$

se existir k e $\varepsilon_0 > 0$ constantes tais que

$$|f(t, \varepsilon)| \leq k|g(t, \varepsilon)|, \text{ para } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

ou, de modo equivalente,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f(t, \varepsilon)}{g(t, \varepsilon)} \right| < \infty.$$

A condição $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ pode ser entendida como ε suficientemente pequeno. Se k e ε_0 independem de t , dizemos que (4.1) vale uniformemente.

Dizemos que uma soma da forma $\sum_{n=0}^N a_n(t)\varepsilon^n$, com a_n independente de ε , é uma expansão assintótica de N termos de $f(t, \varepsilon)$ em relação à sequência $\{\varepsilon^n\}$ se

$$f(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{M-1} a_n(t)\varepsilon^n + \mathcal{O}(\varepsilon^M), \quad (4.2)$$

com $\varepsilon \rightarrow 0$, para cada $M = 2, \dots, N$.

Também podemos escrever que

$$f(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\varepsilon^n \quad \text{para } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

A condição de uniformidade vale para (4.2) se o termo $a_n\varepsilon^n$ for uma pequena correção de $a_{n-1}\varepsilon^{n-1}$, para $n \geq 1$.

Sejam $T_0 = t$ e $T_1 = \varepsilon t$ as escalas de tempo. Segundo o método das múltiplas escalas, no nosso caso duas escalas, a expansão assintótica da solução $\varphi(t, \varepsilon)$ de uma equação diferencial ordinária $G(t, \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n)}) = 0$ é dada por:

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi(T_0, T_1, \varepsilon) = \varphi_0(T_0, T_1) + \varepsilon\varphi_1(T_0, T_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

As funções $\varphi_m(T_0, T_1)$, $m = 0, 1$, são tais que o termo $\varepsilon\varphi_1$ é uma correção para o termo φ_0 e a aproximação é válida para tempos até $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$.

Na equação que descreve o PLL com jitter de fase, obtida no capítulo anterior:

$$\varphi'' + \varphi' + \bar{G} \sin \varphi = \bar{\Omega} + \bar{\omega}_j A \cos(\bar{\omega}_j \tau) - (\bar{\omega}_j)^2 A \sin(\bar{\omega}_j \tau),$$

com as condições iniciais $\varphi(0) = a$ e $\varphi'(0) = b$, consideramos $\bar{\omega}_j$ como o parâmetro de perturbação e procuramos por uma aproximação assintótica da solução na forma:

$$\varphi(\tau, \varepsilon) = \varphi_0(\tau) + \varepsilon\varphi_1(\tau) + \varepsilon^2\varphi_2(\tau) + \dots, \quad (4.3)$$

sendo $\varepsilon = \bar{\omega}_j$.

Fazendo $\sin \varphi \approx \varphi$ e $\bar{G} > 0$, temos

$$\varphi'' + \varphi' + \bar{G} \varphi = \bar{\Omega} + \varepsilon A \cos(\varepsilon \tau) - \varepsilon^2 A \sin(\varepsilon \tau). \quad (4.4)$$

Esta é uma equação diferencial linear com solução analítica

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{\bar{\Omega}}{\bar{G}} + e^{-(1+\sqrt{1-4\bar{G}})\tau/2} \left[c_1 + c_2 e^{\tau\sqrt{1-4\bar{G}}} \right] \\ &+ \frac{A\varepsilon}{\varepsilon^2 + (\varepsilon^2 - \bar{G})^2} \left[\bar{G} \cos(\varepsilon \tau) + \varepsilon(1 + \varepsilon^2 - \bar{G}) \sin(\varepsilon \tau) \right]. \end{aligned}$$

No entanto, utilizando a aproximação assintótica, vamos mostrar que é possível perceber melhor a influência do parâmetro ε na solução.

Daqui em diante, vamos considerar $\bar{\Omega} = 0$, pois a única influência deste termo é transladar o estado síncrono da origem.

A fim de obter uma expansão assintótica uniformemente válida, vamos adotar duas escalas de tempo:

$$\xi = \varepsilon \tau \text{ (slow time)} \quad \text{e} \quad \eta = \tau \text{ (fast time)}.$$

Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \text{e } \varphi'' &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Considerando que $\varphi \in \mathcal{C}^2$, a equação (4.4) fica:

$$\left[\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right] + \left[\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right] + \bar{G} \varphi = \varepsilon A \cos \xi - \varepsilon^2 A \sin \xi. \quad (4.5)$$

A introdução dessas escalas de tempo aparentemente dificultou a resolução do nosso problema inicial por transformar uma equação diferencial ordinária em uma equação a derivadas parciais. No entanto, a justificativa para este procedimento

tornar-se-á evidente nos cálculos a seguir.

A solução $\varphi(\tau, \varepsilon)$ é escrita como:

$$\varphi(\tau, \varepsilon) = \varphi(\xi, \eta, \varepsilon) = \varphi_0(\xi, \eta) + \varepsilon \varphi_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 \varphi_2(\xi, \eta) + \dots \quad (4.6)$$

Substituindo (4.6) em (4.5), temos:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi^2} + \dots \right] + 2\varepsilon \left[\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi \partial \eta} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi \partial \eta} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi \partial \eta} + \dots \right] \\ & + \left[\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \eta^2} + \dots \right] + \varepsilon \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} + \dots \right] \\ & + \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + \varepsilon^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} + \dots \right] + \bar{G} [\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots] \\ & = \varepsilon A \cos \xi - \varepsilon^2 A \sin \xi. \end{aligned}$$

Igualamos os coeficientes das potências de ε , obtendo as equações:

$$\varepsilon^0 : \quad \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} + \bar{G} \varphi_0 = 0, \quad (4.8)$$

$$\varepsilon^1 : \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + \bar{G} \varphi_1 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta \partial \xi} = A \cos \xi, \quad (4.9)$$

$$\varepsilon^2 : \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} + \bar{G} \varphi_2 + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} = -A \sin \xi. \quad (4.10)$$

Temos em (4.8) uma equação a derivadas parciais com solução geral

$$\varphi_0(\xi, \eta) = A_0(\xi) e^{(-1 - \sqrt{1 - 4\bar{G}})\eta/2} + B_0(\xi) e^{(-1 + \sqrt{1 - 4\bar{G}})\eta/2}, \quad (4.11)$$

com $\bar{G} \neq 1/4$.

A solução obtida não é única, devemos impor condições sobre φ_0 que, além de garantir a unicidade, vão eliminar eventuais termos seculares.

As funções $A_0(\xi)$ e $B_0(\xi)$ são funções arbitrárias que podem ser determinadas substituindo (4.11) em (4.9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + \bar{G} \varphi_1 &= -A'_0(\xi) \left[\frac{1 - \sqrt{1 - 4\bar{G}}}{2} \right] e^{(-1 - \sqrt{1 - 4\bar{G}})\eta/2} \\ &\quad - B'_0(\xi) \left[\frac{1 + \sqrt{1 - 4\bar{G}}}{2} \right] e^{(-1 + \sqrt{1 - 4\bar{G}})\eta/2} \\ &\quad + A \cos \xi. \end{aligned} \quad (4.12)$$

As funções exponenciais que aparecem em (4.12) são soluções da equação homogênea associada, de modo que as soluções particulares correspondentes são da forma:

$$p_2(\eta) e^{(-1 - \sqrt{1 \pm 4\bar{G}})\eta/2},$$

com p_2 um polinômio de ordem 2 em η . As parcelas de (4.12) que contém essas exponenciais são chamadas de termos seculares [Nayfeh, 1973]. São termos que fazem com que a aproximação obtida não seja uniformemente válida, pois φ_1/φ_0 fica ilimitado para $\eta \rightarrow \infty$.

Como queremos que a série (4.3) seja uma expansão uniformemente válida, os termos seculares podem ser evitados impondo-se que $A'_0(\xi) = 0$ e $B'_0(\xi) = 0$, $\forall \xi \geq 0$. Em nosso caso, $A_0(\xi)$ e $B_0(\xi)$ são funções constantes que podem ser determinadas pelas condições iniciais do problema. O termo $A \cos \xi$ não será eliminado da equação pois não é um termo secular. Assim, a equação (4.12) fica:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + \bar{G} \varphi_1 = A \cos \xi,$$

cuja solução geral é:

$$\varphi_1(\xi, \eta) = A_1(\xi) e^{(-1 - \sqrt{1 - 4\bar{G}})\eta/2} + B_1(\xi) e^{(-1 + \sqrt{1 - 4\bar{G}})\eta/2} + \frac{A}{\bar{G}} \cos \xi. \quad (4.13)$$

As funções $A_1(\xi)$ e $B_1(\xi)$ podem ser determinadas substituindo-se φ_0 e φ_1 na equação (4.10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} + \bar{G} \varphi_2 &= A_1'(\xi) \sqrt{1 - 4\bar{G}} e^{(-1 - \sqrt{1 - 4\bar{G}})\eta/2} \\ &\quad - B_1'(\xi) \sqrt{1 - 4\bar{G}} e^{(-1 + \sqrt{1 - 4\bar{G}})\eta/2} \\ &\quad + \left[\frac{1}{\bar{G}} - 1 \right] A \sin \xi. \end{aligned}$$

Como os termos com $A_1'(\xi)$ e $B_1'(\xi)$ também produzem termos seculares, serão considerados nulos. Assim, $A_1(\xi)$ e $B_1(\xi)$ são funções constantes.

Vamos agora determinar $A_j(\xi)$ e $B_j(\xi)$, para $j = 0, 1$. Considerando as condições iniciais $\varphi(\tau) = a$ e $\varphi'(\tau) = b$ para $\tau = 0$ em:

$$\varphi(\tau, \varepsilon) = \varphi(\xi, \eta, \varepsilon) = \varphi_0(\xi, \eta) + \varepsilon \varphi_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 \varphi_2(\xi, \eta) + \dots,$$

temos:

$$\varphi(0, 0, \varepsilon) = \varphi_0(0, 0) + \varepsilon \varphi_1(0, 0) + \varepsilon^2 \varphi_2(0, 0) + \dots = a,$$

logo

$$\varphi_0(0, 0) = a \text{ e } \varphi_j(0, 0) = 0, \quad j \geq 1. \quad (4.14)$$

Por outro lado, derivando (4.6) parcialmente em relação a ξ e η , temos:

$$\varphi'(\tau) = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, \eta) + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(\xi, \eta).$$

Fazendo $\tau = 0$, temos:

$$\varphi'(0) = \varepsilon \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi}(0, 0) + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}(0, 0) + \dots \right] + \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta}(0, 0) + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}(0, 0) + \dots \right].$$

Como $\varphi'(0) = b$, obtemos as condições:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta}(0,0) = b \text{ e } \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \xi}(0,0) + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta}(0,0) = 0, \quad j \geq 1. \quad (4.15)$$

Aplicando (4.14) e (4.15) nas soluções (4.11) e (4.13), temos:

$$\begin{aligned} A_0(\xi) = a_0 &= \frac{-a - 2b + a\sqrt{1-4\bar{G}}}{2\sqrt{1-4\bar{G}}} \quad \text{e} \quad B_0(\xi) = b_0 = \frac{a + 2b + a\sqrt{1-4\bar{G}}}{2\sqrt{1-4\bar{G}}}, \\ A_1(\xi) = a_1 &= \frac{A - A\sqrt{1-4\bar{G}}}{2\bar{G}\sqrt{1-4\bar{G}}} \quad \text{e} \quad B_1(\xi) = b_1 = \frac{-A - A\sqrt{1-4\bar{G}}}{2\bar{G}\sqrt{1-4\bar{G}}}. \end{aligned}$$

De acordo com (4.6), uma solução aproximada da equação (4.4) é dada por:

$$\varphi(\tau) = \varphi_0(\xi, \eta) + \varepsilon \varphi_1(\xi, \eta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Como fizemos $\xi = \varepsilon\tau = \bar{w}_j \tau$ e $\eta = \tau$, podemos expressar a solução em termos de τ como se segue:

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= \left[a_0 e^{(-1-\sqrt{1-4\bar{G}})\tau/2} + b_0 e^{(-1+\sqrt{1-4\bar{G}})\tau/2} \right] \\ &+ \bar{w}_j \left[a_1 e^{(-1-\sqrt{1-4\bar{G}})\tau/2} + b_1 e^{(-1+\sqrt{1-4\bar{G}})\tau/2} + \frac{A}{\bar{G}} \cos \bar{w}_j \tau \right] \\ &+ \mathcal{O}\left(\bar{w}_j^2\right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Se $\bar{G} = 1/4$, uma aproximação assintótica de $\varphi(\tau)$ pode ser obtida repetindo-se os mesmos passos a partir das equações (4.8), (4.9) e (4.10). Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned}\varphi(\tau) = & \left[a + \left(b - \frac{a}{2} \right) \tau \right] e^{-\tau/2} \\ & + \bar{w}_j \left[-2A(2 + \tau)e^{-\tau/2} + 4A \cos \bar{w}_j \tau \right] \\ & + \mathcal{O}\left(\bar{w}_j^2\right).\end{aligned}\tag{4.17}$$

Todos os cálculos feitos até aqui são válidos se considerarmos $\varepsilon = \bar{w}_j \ll 1$ e $\bar{w}_j < \bar{G}$. As aproximações acima são válidas para tempos até ordem $\mathcal{O}(1/\bar{w}_j)$. As simulações feitas na seção seguinte consideram tais restrições, pois correspondem ao caso real nas redes de telecomunicações.

Quando $\tau \rightarrow \infty$ em (4.16) e (4.17), temos

$$e^{(-1 \pm \sqrt{1-4\bar{G}})\tau/2} \rightarrow 0,$$

qualquer que seja o valor de $\bar{G} > 0$. Então a resposta estacionária consiste de uma função periódica correspondente à resposta ao jitter:

$$\varphi_s(\tau) = \frac{\bar{w}_j}{\bar{G}} A \cos \bar{w}_j \tau.\tag{4.18}$$

Nota-se que a amplitude da solução estacionária é proporcional à frequência angular do jitter de fase e inversamente proporcional ao ganho do PLL. O período é inversamente proporcional a $\bar{w}_j$; assim, para um dado $\bar{G}$ fixado, o estado síncrono é alcançado quando a frequência angular do sinal do jitter de fase é pequena.

A solução estacionária descrita acima é extremamente simples e interessante por apresentar em sua fórmula os parâmetros envolvidos neste trabalho, a saber, o ganho do PLL, a amplitude e a frequência angular do jitter.

4.2 Δt_{jitter}

Nesta seção, vamos deduzir uma fórmula que caracteriza o jitter e que depende somente dos parâmetros do jitter e da malha [Piqueira et al, 2005]. A sua dedução foi possível utilizando-se a solução estacionária obtida na seção anterior.

Lembramos que o jitter de fase é definido como os desvios dos intervalos significativos de tempo de um sinal em relação às suas posições ideais. Em [Shimanouchi, 2001], um extrator de relógio, no nosso caso um PLL, com jitter no sinal de entrada também é modelado por uma senóide modulada em fase. Naquele artigo, o autor define o jitter de fase como:

$$\Delta t_{jitter} = \frac{\theta(t)}{\omega_0},$$

considerando que a entrada é da forma $\cos(\omega_0 t + \theta(t))$, com $\theta(t)$ proporcional a uma modulação de sinal.

Utilizando a equação 4.18, temos:

$$\Delta t_{jitter} = \frac{\varphi_s^{max}}{\omega_0}.$$

Normalizamos a expressão, obtendo:

$$\Delta t_{jitter} = \frac{\bar{w}_j A}{\bar{w}_0 \bar{G}}. \quad (4.19)$$

Esta fórmula é interessante pela sua simplicidade e por depender exclusivamente dos parâmetros do problema, a saber, $\bar{w}_j$, $\bar{G}$ e A . Podemos utilizá-la para estimar o valor de $\bar{G}$ que corresponde a um desempenho aceitável de jitter tanto em redes de arquitetura SONET como SDH [Sexton e Reid, 1992], recomendadas pela UIT.

As Recomendações G.703 e G.823 da UIT, [ITU, 1993] e [ITUa, 1993], fornecem parâmetros para controlar o jitter em arquiteturas baseadas em multiplexadores primários com taxa de transmissão de 2.048kbit/s. Examinando-se a tabela 1 e as figuras 1 e 3 da Recomendação G.823 (figuras 4.1 a 4.3), pode-se, por exemplo, obter o valor máximo de Δt_{jitter} para uma dada frequência de jitter e assim estabelecer um valor desejável de ganho para manter o sincronismo nas redes.

A título de ilustração, vamos antecipar os resultados da simulação de um PLL

com jitter periódico feito no capítulo 5, considerando uma frequência de jitter igual a 100.000Hz e $\bar{G} = 1$. Para esta escolha de parâmetros, verificamos que o estado síncrono não é alcançado pelo PLL. De fato, para esses valores, temos $\Delta t_{jitter} = 0,3141\text{UI}$ e o PLL não opera dentro da faixa de amplitude especificada pela máscara de aceitação de jitter (figura 4.3). Pela fórmula de Δt_{jitter} , podemos concluir que a amplitude máxima de jitter é ultrapassada para frequências maiores do que 63.662Hz.

Figura 4.1: Recomendação G.823 – Figura 1.

Parameter value →	Network limit		Measurement filter bandwidth		
	B1 unit interval peak-to-peak	B2 unit interval peak-to-peak	Band-pass filter having lower cut-off frequency f1 or f3 and upper cut-off frequency f4		
			f1	f3	f4
Digital rate (kbits/s) ↓					
64 (Note 1)	0.25	0.05	20 Hz	3 kHz	20 kHz
2 048	1.5	0.2	20 Hz	18 kHz (700 Hz)	100 kHz
8 448	1.5	0.2	20 Hz	3 kHz (80 kHz)	400 kHz
31 368	1.5	0.15	100 Hz	10 kHz	800 kHz
139 261	1.5	0.075	200 Hz	10 kHz	3500 kHz
<div>NOTES</div> <div>1. For the coreditional interfaces only.</div> <div>2. The frequency values shown in parenthesis only apply to certain national interfaces.</div> <div>3. UI Unit Interval:<div><div>for 64kbits/s</div><div>1UI = 15.6</div></div><div><div>for 2048kbits/s</div><div>1UI = 488ns</div></div><div><div>for 8448kbits/s</div><div>1UI = 118ns</div></div><div><div>for 31368kbits/s</div><div>1UI = 29.1ns</div></div><div><div>for 139261kbits/s</div><div>1UI = 7.18ns</div></div></div>					

Figura 4.2: Recomendação G.823 – Tabela 1.

Figura 3 da Recomendação G.823 - UIT.

Figura 4.3: Recomendação G.823 – Figura 3.

Capítulo 5

Simulações

Neste capítulo, a equação que descreve o sistema formado pelo PLL e o jitter periódico na entrada da malha é resolvida numericamente com o software Simulink (Matlab) através método Runge-Kutta com passo variável e tolerância absoluta de 10^{-6} . Os parâmetros do jitter, a frequência angular $\bar{\omega}_j$, a amplitude A e o ganho $\bar{G}$ da malha foram escolhidos de modo a atender os requisitos da arquitetura de redes SONET e SDH, recomendadas pela ITU-T. Também apresentamos as simulações do PLL considerando-se dois tipos de entrada: o jitter periódico e um ruído Gaussiano.

5.1 Simulando o jitter periódico

Nesta seção, vamos simular o PLL com jitter conforme modelado no capítulo 3:

$$\varphi'' + \varphi' + \bar{G} \sin \varphi = \bar{\Omega} + \bar{\omega}_j A \cos(\bar{\omega}_j \tau) - (\bar{\omega}_j)^2 A \sin(\bar{\omega}_j \tau).$$

Lembramos que $\bar{G} > \bar{\Omega}$, conforme indicado no capítulo 2, e que $\bar{\Omega} = 0$, pois a única influência de $\bar{\Omega}$ é transladar o estado síncrono da origem,

O problema que queremos investigar inicialmente é como o PLL tolera o jitter de fase para um dado ganho de malha $\bar{G}$. Ao mesmo tempo, comparamos os resultados obtidos nas simulações com a solução estacionária obtida no capítulo 4:

$$\varphi_s(\tau) = \frac{\bar{\omega}_j}{\bar{G}} A \cos \bar{\omega}_j \tau.$$

Vamos denotar a frequência de jitter em Hz por f_j , sendo $\bar{f}_j = \bar{w}_j / 2\pi$. Observamos que a solução estacionária tem amplitude $2\pi \bar{w}_j$ e período $1/\bar{f}_j$, para fins de comparação com as simulações. Queremos mostrar que a função acima é uma aproximação razoável para a solução do nosso problema.

Primeiro, o ganho de malha será fixado em $\bar{G} = 1$, isto é, perto da frequência de corte do VCO, considerada 2MHz, e a amplitude do jitter em $A = 2\pi$, correspondendo a um escorregamento de ciclo completo devido ao jitter. Variando f_j , podemos observar a evolução no tempo dos erros de fase e de frequência.

Consideremos inicialmente f_j com valores típicos, entre 200Hz e 500Hz. Neste caso, a ordem de grandeza de $\bar{f}_j$ é de 10^{-4} . As simulações mostram que o PLL alcança o estado síncrono com erros de fase e frequência oscilando em torno de zero, com uma amplitude muito pequena e um período grande, conforme se observa pelas figuras 5.1 a 5.3. Analisando $\varphi_s(\tau)$ com esses valores de parâmetros, observa-se que a solução estacionária obtida tem amplitude, dada por $2\pi \bar{w}_j$, realmente pequena, da ordem $\mathcal{O}(10^{-4})$. O seu período, por outro lado, é grande, da ordem $\mathcal{O}(10^4)$ unidades de tempo normalizado.

Figura 5.1: Erro de frequência para $\bar{G} = 1$ e $200\text{Hz} \leq f_j \leq 2.10^4\text{Hz}$.

Figura 5.2: Erro de fase para $\bar{G} = 1$ e $200\text{Hz} \leq f_j \leq 2 \cdot 10^4\text{Hz}$.

Figura 5.3: Retrato de fase para $\bar{G} = 1$ e $200\text{Hz} \leq f_j \leq 2 \cdot 10^4\text{Hz}$.

Quando a frequência do jitter é aumentada, mesmo para frequências até 20.000Hz, um estado síncrono é alcançado com erro de frequência nulo (figura 5.1), mas com um erro de fase constante não-nulo (figura 5.2).

Aumentando consideravelmente o valor de f_j , por exemplo, para 100.000 Hz, temos $\bar{f}_j = 0,05$. Os erros de fase e de frequência tornam-se periódicos e o estado síncrono nunca é alcançado (figuras 5.4 e 5.5).

Vamos utilizar a fórmula Δt_{jitter} para estimar a amplitude do jitter em UI, considerando $\bar{G} = 1$ e os parâmetros:

$$f_j = 200\text{Hz} \Rightarrow \Delta t_{jitter} = 6,281 \cdot 10^{-4} \text{UI}$$

$$f_j = 20.000\text{Hz} \Rightarrow \Delta t_{jitter} = 6,281 \cdot 10^{-2} \text{UI}$$

$$f_j = 100.000\text{Hz} \Rightarrow \Delta t_{jitter} = 0,3141 \text{UI}$$

Como já foi comentado rapidamente no final do capítulo 4, somente no terceiro caso a amplitude máxima do jitter é ultrapassada, segundo a máscara ilustrada na figura 4.3.

Figura 5.4: Erro de frequência periódico e o estado síncrono não é alcançado no caso de jitter, com $\bar{G} = 1$ e $f_j = 10^5 \text{Hz}$.

Figura 5.5: Erro de fase torna-se periódico e o estado síncrono não é alcançado para o caso de jitter, com $\bar{G} = 1$ e $f_j = 10^5 \text{Hz}$.

Um outro fenômeno a ser investigado na presença do jitter de fase é a influência do ganho do PLL em relação ao aparecimento do estado síncrono.

Fixando a frequência do jitter em 500Hz, vamos considerar variações no valor de $\bar{G}$. Quando $\bar{G} = 1$, o estado síncrono para erros de fase e de frequência é alcançado, como já foi visto nas figuras 5.1 a 5.3.

As figuras 5.6 a 5.9 ilustram as simulações feitas considerando-se o ganho $\bar{G}$ diminuindo de 0,5 a 0,01, nos casos com e sem jitter. Nota-se que o tempo de acomodação [Ogata, 1997] aumenta consideravelmente e que o sistema atinge o estado síncrono nos casos com e sem jitter, mas o limite do erro de fase, para $\tau \rightarrow \infty$, é diferente de zero, como pode ser observado nas figuras 5.7 e 5.9.

Figura 5.6: O estado síncrono é alcançado para $f_j = 500\text{Hz}$ e $0,01 \leq \bar{G} \leq 0,5$ com erro de frequência nulo no caso jitter.

Figura 5.7: O estado síncrono é alcançado para $f_j = 500\text{Hz}$ e $0,01 \leq \bar{G} \leq 0,5$ com erro de fase não-nulo, com aumento no tempo de acomodação no caso no caso jitter.

Figura 5.8: O estado síncrono é alcançado para $f_j = 500\text{Hz}$ e $0,01 \leq \bar{G} \leq 0,5$ com erro de frequência nulo no caso sem jitter.

Figura 5.9: O estado síncrono é alcançado para $f_j = 500\text{Hz}$ e $0,01 \leq \bar{G} \leq 0,5$ com erro de fase não-nulo, com aumento no tempo de acomodação no caso sem jitter.

Considerando $f_j = 500\text{Hz}$, e variando o ganho, temos:

$$\bar{G} = 0,50 \Rightarrow \Delta t_{jitter} = 3,1416.10^{-3}\text{UI}$$

$$\bar{G} = 0,05 \Rightarrow \Delta t_{jitter} = 3,1416.10^{-2}\text{UI}$$

$$\bar{G} = 0,01 \Rightarrow \Delta t_{jitter} = 1,5708\text{UI}$$

Quando o ganho $\bar{G}$ aumenta de 1 para 100, o estado síncrono é alcançado nos casos com e sem jitter, como pode ser observado nas figuras 5.10 e 5.11, com diferentes sobressinais e tempos de acomodação.

Pode-se notar que, quando $\bar{G} \rightarrow \infty$ e $\bar{f}_j$ é fixado em 500Hz, a equação (4.16) mostra que, para uma condição inicial próxima de zero, φ tende assintoticamente ao estado síncrono $\varphi = 0$. Também pode-se observar que o valor de Δt_{jitter} diminui à medida que $\bar{G}$ aumenta, para a frequência de jitter fixada.

Figura 5.10: O estado síncrono atingido para $f_j = 500\text{Hz}$ e $1 \leq \bar{G} \leq 100$ com erro de frequência nulo.

Figura 5.11: O estado síncrono atingido para $f_j = 500\text{Hz}$ e $1 \leq \bar{G} \leq 100$ com erro de fase nulo.

5.2 Comparando os modelos de jitter

Considerando que o jitter também pode ser descrito como um ruído de distribuição Gaussiana[Shimanouchi, 2001], [Mehrotra, 2002], nesta seção, são feitas simulações do PLL com a entrada do sistema adicionada a um ruído branco de banda limitada a 30dB abaixo do sinal e que são comparadas com as do PLL com o jitter periódico, já apresentadas na seção anterior.

Sejam $\bar{G} = 1$ e $f_j = 500\text{Hz}$. As figuras 5.12 e 5.13 ilustram a simulação do PLL considerando-se como entrada o jitter periódico e o ruído. Os resultados obtidos são semelhantes para os dois modelos e o sistema apresenta um ponto de equilíbrio assintoticamente estável correspondendo ao estado síncrono.

Aumentando f_j para 10.000Hz, o modelo da perturbação periódica já simulado na seção anterior apresenta um estado síncrono assintoticamente estável com erro de fase constante. No entanto, o sistema não atinge o estado síncrono para a entrada Gaussiana, conforme se observa nas figuras 5.14 e 5.15.

Fixando agora f_j em 500Hz, as simulações da malha com $\bar{G} = 0, 1$ estão ilustradas nas figuras 5.18 e 5.19, e com $\bar{G} = 10$, nas figuras 5.16 e 5.17. Verificamos que as

duas formulações são equivalentes mesmo aumentando ou diminuindo o ganho $\bar{G}$, com o sistema apresentando um estado síncrono assintoticamente estável .

Figura 5.12: Erro de frequência nulo para $\bar{G} = 1$ e $f_j = 500\text{Hz}$ nos casos jitter periódico e gaussiano.

Figura 5.13: Erro de fase nulo para $\bar{G} = 1$ e $f_j = 500\text{Hz}$ nos casos jitter periódico e gaussiano.

Figura 5.14: Erro de frequência nulo para $\bar{G} = 1$ e $f_j = 10.000\text{Hz}$ somente no caso jitter periódico.

Figura 5.15: Erro de fase constante para $\bar{G} = 1$ e $f_j = 10.000\text{Hz}$ somente no caso jitter periódico.

Figura 5.16: Erro de frequência nulo para $\bar{G} = 10$ e $f_j = 500\text{Hz}$ nos casos jitter periódico e gaussiano.

Figura 5.17: Erro de fase nulo para $\bar{G} = 10$ e $f_j = 500\text{Hz}$ nos casos jitter periódico e gaussiano.

Figura 5.18: Erro de frequência nulo para $\bar{G} = 0,1$ e $f_j = 500\text{Hz}$ nos casos jitter periódico e gaussiano.

Figura 5.19: Erro de fase constante para $\bar{G} = 0,1$ e $f_j = 500\text{Hz}$ nos casos jitter periódico e gaussiano.

Conclusão

Nesta tese consideramos o jitter de fase como uma perturbação periódica provocando variações no sinal de tensão. Modelamos matematicamente através de uma equação diferencial uma malha de sincronismo de fase de segunda ordem com jitter, considerada uma modulação de fase acidental, sobreposta ao sinal de entrada. A análise das equações e as simulações permitem-nos estimar o ganho dos PLLs de acordo com os parâmetros do jitter de modo que requisitos de sincronização sejam satisfeitos.

Os resultados analíticos mostraram que a saída de um PLL submetida a um jitter de fase em seu sinal de entrada depende diretamente da amplitude e da frequência do jitter, e inversamente do ganho de malha. Nas simulações do capítulo 5, comparamos os gráficos dos erros de frequência e de fase considerando-se a malha com e sem jitter. O comportamento dessas funções condizem com a solução estacionária φ_s deduzida no capítulo 4 para os vários parâmetros considerados. Vimos, pelas simulações, que o PLL é robusto para atingir o estado síncrono em uma rede de comunicações, mesmo impondo-se um jitter de fase muito forte.

No capítulo 4, obteve-se uma fórmula para estimar o jitter de fase, Δt_{jitter} , que depende basicamente do ganho da malha e dos parâmetros do jitter. A amplitude do jitter foi estimada através de Δt_{jitter} para os valores de parâmetros considerados nas simulações, mostrando que a detecção do estado síncrono sempre é possível para as regiões do espaço de parâmetros correspondendo aos valores típicos de parâmetros encontrados usualmente em redes de telecomunicações e recomendados pela UIT. Os resultados obtidos no capítulo 5 mostram a utilidade da fórmula obtida pela sua simplicidade.

Como propostas de trabalhos futuros, sugere-se:

- a extensão do estudo feito no capítulo 4 para PLLs de ordem 3, considerando-se que PLLs de ordem maior ou igual a três apresentam melhor resposta transitória [Gardner, 1979];
- a comparação da medida de jitter deduzida no capítulo 4 com outras medidas;

- analisar a influência da frequência dupla, que é atenuada pela ação do filtro na modelagem matemática do PLL, na geração de jitter, considerando-se a discussão no artigo [Piqueira e Monteiro, 2003a];
- estudar analiticamente a ação do jitter de fase em uma rede mestre-escravo com PLLs em seus nós.

Referências Bibliográficas

- [Angrisani et al, 2001] ANGRISANI, L.; BACCIGALUPI, A.; D'ANGIOLO, G. Problems with jitter measurement in PDH/SDH-based digital telecommunication systems. IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, p.1672-1677, 2001.
- [Bellamy, 1995] BELLAMY, J.C. Digital network synchronization. IEEE Communications Magazine, p.70-83, 1995.
- [Bellescize, 1932] BELLESCIZE, H. De. La reception synchrone, Onde Electrique, v.11, p.230-240, 1932.
- [Best, 1999] BEST, R.E. **Phase-locked loops:** Theory and Implementation. 4.ed. New York: McGraw Hill, 1999.
- [Blinchikoff, 1982] BLINCHIKOFF, H.J. All-pole phase-locked tracking filters. IEEE Transactions on Communications, vol. COM-30, n.10, p.2312-2318, 1982.
- [Bregni, 1998] BREGNI, C.S. A historical perspective on telecommunications network synchronization. IEEE Communications Magazine, p.158-166, 1998.
- [Chen e Lindsey,1999] CHEN, J.H.; LINDSEY, W.C. Synchronization performance for arbitrarily connected network architectures. Proceedings of the IEEE Vehicular Technology Conference, p.932-937, 1999.

- [Chin e Cantoni, 1998] CHIN, J.; CANTONI, A. Phase Jitter $\equiv$ Timing Jitter? IEEE Communications Letters, v.2, n.2, p.54-56, 1998.
- [Gardner, 1979] GARDNER, F.M. **Phaselock Techniques**. New York: John Wiley & Sons. 1979.
- [Green, 1985] GREEN, D.N. Lock-in, tracking, and acquisition of AGC-aided phase-locked loops. IEEE Transactions on Circuits and Systems, CAS-32, p.559-568, 1985.
- [Guckenheimer e Holmes, 1983] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. **Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields**. Applied Mathematical Sciences **42**, , New York: Springer, 1983.
- [Gupta, 1975] GUPTA, S.C. Phase-Locked Loops. Proceedings of the IEEE, v.63-2, p.291-306, 1975.
- [ITU, 1993] INTERNATIONAL TELECOMMUNICATION UNION. **Recomendation G.703, Physical /Electrical Characteristics of Hierarchical Digital Interfaces**. Helsinki: ITU-Press, 1993.
- [ITUa, 1993] INTERNATIONAL TELECOMMUNICATION UNION. **Recomendation G.823, The Control of Jitter and Wander within Digital Networks Which are Based on the 2048kb/s Hierarchy**. Helsinki: ITU-Press, 1993.
- [Kartaschoff, 1991] KARTASCHOFF, P. Synchronization in digital communications networks. Proceedings of the IEEE, v.79-7, p.1019-1028, 1991.
- [Kevorkian e Cole, 1981] KEVORKIAN, J.; COLE, J.D. **Perturbation Methods in Applied Mathematics**. New York: Springer-Verlag, 1981.

- [Lee et al] LEE, W.C.; LEE, J.; CHOI, D.; KIM, M.; LEE, C. The distributed controller architecture for a masterarm and its application to teleoperation with force feedback. Proceedings of the IEEE International Conference on Robotis and Automation, p. 213-218, 1999.
- [Lindsey et al Simon, 1978] LINDSEY, W.C.; SIMON, M.K. **Phase-Locked Loops and their applications**. New York: IEEE Press, 1978.
- [Lindsey et al, 1985] LINDSEY, W.C. et al. Network Synchronization. Proceedings of the IEEE, p. 1445-1467, 1985.
- [Lucky et al, 1968] LUCKY, R.W.; SALZ, J.; WELDON Jr., E.J. **Principle of Data Communications**. New York: McGraw Hill, 1968.
- [Mazzenga et al, 2002] MAZZENGA, F.; VATALARO, F.; WHEATLEY, C.E. Performance evaluation of a network synchronization technique for CDMA cellular communication. IEEE Transactions on Wireless Communication, vol.1, p. 323-332, 2002.
- [Mehrotra, 2002] MEHROTRA, A. Noise analysis of Phase-Locked Loops. IEEE Transactions on Circuits and Systems I, vol. 49, n.9, p. 1309-1316, 2003.
- [Motta, 2004] MOTTA, M.I. **Modelos dinâmicos para a supressão de jitter em redes DWDM**. 2004. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2004.
- [Nayfeh, 1973] NAYFEH, A. **Perturbation Methods**. New York: John Wiley & Sons, 1973.

- [Ogata, 1997] OGATA, K. **Modern Control Engineering**. New Jersey: Prentice Hall, 1997.
- [Panter, 1965] PANTER, J.A.; **Modulation, Noise and Spectral Analysis**. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [Piqueira, 1987] PIQUEIRA, J.R.C. **Aplicação da teoria qualitativa de equações diferenciais a problemas de sincronismo de fase**. 1987. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 1987.
- [Piqueira et al, 2003] PIQUEIRA, J.R.C.; ORSATTI, F.M.; MONTEIRO, L.H.A. Computing with Phase-Locked Loops: choosing gains and delays. *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 14, n.1, p. 243- 247, 2003.
- [Piqueira e Monteiro, 2003a] PIQUEIRA, J.R.C.; MONTEIRO, L.H.A. Considering second-harmonic terms in the operation of the phase detector for second order phase-locked loop. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 50, n.6, p.805-809, 2003.
- [Piqueira et al, 2005] PIQUEIRA, J.R.C.; TAKADA, E.Y.; MONTEIRO, L.H.A. Analysing the effect of the phase-jitter in the operations of second order phase-locked loops. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 52, n.6, p. 331-335, 2005.
- [Piqueira e Takada, 2005a] PIQUEIRA, J.R.C.; TAKADA, E.Y. Processing and transmission of timing signals in synchronous networks. *Computational and Applied Mathematics*, vol. 24, n.1, p. 27-49, 2005.

- [Sanders e Verhulst, 1985] SANDERS, J.A.; VERHULST, F. **Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems**. New York: Springer-Verlag, 1985.
- [Sexton e Reid, 1992] SEXTON, M.; REID, A. **Transmission Networking: SONET and Synchronous Digital Hierarchy**. Norwood: Artech House, 1992.
- [Shao, 2000] SHAO, G.; BERMAN, F.; WOLSKI, R. Master/slave computing on the grid, Proceedings of the IEEE COMPSAC, 2000.
- [Shimanouchi, 2001] SHIMANOUCI, M. An approach to consistent jitter modelling for various jitter aspects and measurement methods. Proceedings IEEE International Test Conference, p. 848-857, 2001.
- [Tektronix] A GUIDE to understanding and characterizing timing jitter. Disponível em <http://www.tektronix.com>.
- [Trischitta e Varma, 1989] TRISCHITTA, J.A.; VARMA, E.L. **Jitter in Digital Transmission Systems**. New York: Artech-House, 1989.
- [Verhulst, 2000] VERHULST, F. **Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems**. Berlin: Springer-Verlag, 2000.
- [Viterbi, 1966] VITERBI, A.J. **Principles of Coherent Communication**. New York: McGraw-Hill, 1966.
- [Yamaguchi et al, 2003] YAMAGUCHI, T. J.; SOMA, M.; ISHIDA, M.; WATANABE, T.; OHMI, T. Extraction of instantaneous and RMS sinusoidal jitter using an analytic signal method. IEEE Transactions on Circuits and Systems II, vol. 50, n.6, p. 288-298, 2003.

[Well e Bernhard, 1996]

WELL, A.L.; BERNHARD, U.P. Stability requirements of oscillators used for synchronization loops in communication systems. European Transactions on Telecommunications v.7, p.61-70, 1996.

[Wiggins, 1990]

WIGGINS, S.; **Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos**. New York: Springer-Verlag, 1990.