UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

RODRIGO TAKASHI OKIMURA

Controle Ótimo Multi-Período de Média-Variância
para Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos e
Ruídos Multiplicativos

São Paulo
2009

RODRIGO TAKASHI OKIMURA[†]

**Controle Ótimo Multi-Período de Média-Variância
para Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos e
Ruídos Multiplicativos**

Tese apresentada ao Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Engenharia de Sistemas
Orientador: Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa

**São Paulo
2009**

[†]email: okimura@usp.br, rodrigo.okimura@gmail.com

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ESCOLA POLITÉCNICA - USP

Okimura, Rodrigo Takashi

Controle ótimo multi-período de média-variância para sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos e ruídos multiplicativos / R.T. Okimura. – São Paulo, 2009

97 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle.

1. Controle estocástico 2. Sistemas discretos 3. Administração de carteiras 4. Processos de Markov. I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle II. t

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Oswaldo L.V. Costa pela imensa contribuição e ensino para o meu conhecimento e pela oportunidade para a realização deste trabalho ao longo do doutorado, além de considerá-lo um exemplo de dedicação e excelência acadêmica a ser seguido.

À banca examinadora pela análise e contribuições para este estudo.

Aos professores do programa de pós-graduação em engenharia da Escola Politécnica pelo ensino e conhecimento.

Ao Prof. Dr. José Roberto Securato (FEA-USP) e ao Prof. Dr. Keyler Rocha (FEA-USP) pelo incentivo no ingresso ao doutorado.

Aos coordenadores, docentes, pesquisadores e funcionários do Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle - PTC e do Laboratório de Automação e Controle - LAC.

À minha família pelo apoio e convivência durante o período do doutorado.

Um agradecimento especial à Cris, pelo apoio sempre incondicional, companheirismo, carinho e paciência, principalmente nos períodos difíceis. Agradeço também à sua família pelo apoio.

Agradeço ao Dr. Junio Fuentes pelo auxílio no início da pesquisa e a Elton Takimoto pelo apoio e convivência durante o período de pesquisa. Agradeço aos amigos e colegas que de alguma forma contribuíram direta ou indiretamente para este trabalho.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro parcial durante o período do doutorado.

Resumo

OKIMURA, R.T. **Controle ótimo multi-período de média-variância para sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos e ruídos multiplicativos.** 2009. 109 f. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

Este estudo considera o problema de controle ótimo multi-período de média-variância para sistemas em tempo discreto com saltos markovianos e ruídos multiplicativos. Inicialmente considera-se um critério de desempenho formado por uma combinação linear da variância final e valor esperado da saída do sistema. É apresentada uma solução analítica na obtenção da estratégia ótima para este problema. Em seguida são considerados os casos onde os critérios de desempenho são minimizar a variância final sujeito a uma restrição no valor esperado ou maximizar o valor esperado final sujeito a uma restrição na variância final da saída do sistema. As estratégias ótimas de controle são obtidas de um conjunto de equações de diferenças acopladas de Riccati. Os resultados obtidos neste estudo generalizam resultados anteriores da literatura para o problema de controle ótimo com saldos markovianos e ruídos multiplicativos, apresentando condições explícitas e suficientes para a otimalidade da estratégia de controle. São apresentados modelos e simulações numéricas em otimização de carteiras de investimento e estratégias de gestão de ALM (*asset liabilities management*).

Palavras-chave: Controle por média-variância. Sistemas com saltos markovianos. Ruídos multiplicativos. Controle ótimo estocástico.

Abstract

OKIMURA, R.T. **Multi-period mean-variance optimal control of Markov jumps linear systems with multiplicative noise.** 2009. 109 f. Thesis (Doctoral) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

This thesis focuses on the stochastic optimal control problem of discrete-time linear systems subject to Markov jumps and multiplicative noise under three kinds of performance criterions related to the final value of the expectation and variance of the output. In the first problem it is desired to minimize the final variance of the output subject to a restriction on its final expectation, in the second one it is desired to maximize the final expectation of the output subject to a restriction on its final variance, and in the third one it is considered a performance criterion composed by a linear combination of the final variance and expectation of the output of the system. The optimal control strategies are obtained from a set of interconnected Riccati difference equations and explicit sufficient conditions are presented for the existence of an optimal control strategy for these problems, generalizing previous results in the literature. Numerical simulations of investment portfolios and asset liabilities management models for pension funds with regime switching are presented.

Keywords: Mean variance control. Markov jump systems. Multiplicative noise. Stochastic optimal control.

Sumário

Lista de Figuras	iii
Lista de Tabelas	v
1 Introdução	1
1.1 Objetivo do Estudo	1
1.2 Justificativa do Tema	2
1.3 Estrutura do Trabalho	2
2 Revisão da Literatura	3
2.1 Sistemas Lineares com Saltos Markovianos em Tempo Discreto	3
2.2 Modelos de Otimização de Carteiras	7
3 Problema de Controle Ótimo para Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos e Ruídos Multiplicativos	11
3.1 Notação e Definições	11
3.2 Resultados Auxiliares	12
3.3 Formulação dos Problemas Propostos	15

4	Solução de Média-Variância em Tempo Discreto para Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos e Ruídos Multiplicativos	18
4.1	Solução do Problema Auxiliar $A(\lambda, \nu)$	18
4.2	Resultados Auxiliares	24
4.3	Fórmula Explícita para a Média e Variância	28
4.4	Condições Suficientes e Solução para os Problemas $P1(\sigma^2)$, $P2(\epsilon)$ e $P3(\nu)$	30
5	Modelos de Otimização de Carteiras de Investimento e ALM de Fundos de Pensão com Saltos Markovianos	33
5.1	Preliminares	33
5.2	Modelo uni-período de Média-Variância	35
5.3	Modelo de Otimização de Carteiras de Investimento com Ativos de Risco e <i>Benchmark</i>	37
5.4	Modelo de Otimização de Carteiras de Investimento com Ativo Livre de Risco e <i>Benchmark</i>	41
5.5	Modelo de ALM para Fundos de Pensão	44
6	Resultado das Simulações Numéricas	47
6.1	Séries de Dados	47
6.2	Modos de Operação	49
6.3	Simulação de Carteiras com apenas Ativos de Risco para atingir um <i>Benchmark</i>	51
6.4	Simulação de Carteiras com Ativo Livre de Risco e <i>Benchmark</i>	59
6.5	Simulação de ALM - <i>Asset Liabilities Management</i>	64

7	Considerações Finais	72
	Referências Bibliográficas	74
	Apêndice A - Dados de Entrada dos Modos de Operação	78
	Apêndice B - Resultados da Simulação da Seção 6.3	83
	Apêndice C - Resultados da Simulação da Seção 6.4	88
	Apêndice D - Resultados da Simulação da Seção 6.5	92

Lista de Figuras

6.1	Simulação de MC de carteira com ativos de risco para atingir um <i>benchmark</i> para o problema $P1(\sigma^2)$	57
6.2	Estratégias de investimento da simulação de MC de carteira com ativos de risco para atingir um <i>benchmark</i> para o problema $P1(\sigma^2)$	58
6.3	Fronteira eficiente da simulação de MC de carteira com ativos de risco para atingir um <i>benchmark</i> para o problema $P1(\sigma^2)$	58
6.4	Simulação de MC de carteira com ativo livre de risco para atingir um <i>benchmark</i> para o problema $P3(\nu)$	62
6.5	Estratégias de investimento da simulação de MC de carteira com ativo livre de risco para atingir um <i>benchmark</i> para o problema $P3(\nu)$	63
6.6	Fronteira eficiente da simulação de MC de carteira com ativo livre de risco para atingir um <i>benchmark</i> para o problema $P3(\nu)$	63
6.7	Simulação de MC de ALM para o problema $P2(\epsilon)$	67
6.8	Fund Ratio da simulação de MC de ALM para o problema $P2(\epsilon)$	68
6.9	Sequência de valores de $D(t)$ da simulação de MC de ALM para o problema $P2(\epsilon)$	68
6.10	Estratégias de investimento da simulação de MC de ALM para o problema $P2(\epsilon)$	69
6.11	Fronteira eficiente da simulação de MC de ALM para o problema $P2(\epsilon)$. . .	70

6.12	Simulação de MC de ALM para o problema $P2(\epsilon)$ - T=104 semanas. . . .	71
------	--	----

Lista de Tabelas

6.1	Lista de ações selecionadas da Bovespa.	48
6.2	Lista de índices de mercado.	48
6.3	Lista de séries financeiras adicionais.	49
6.4	Variáveis da simulação com ativos de risco.	52
6.5	Variáveis da simulação com ativo livre de risco.	59
6.6	Variáveis da simulação de ALM.	64
7.1	Vetor de retornos dos ativos por modo.	79
7.2	Matriz de probabilidades de transição $[p_{i,j}]$	79
7.3	Matriz de covariâncias dos ativos - modo 1.	80
7.4	Matriz de covariâncias dos ativos - modo 2.	81
7.5	Matriz de covariâncias dos ativos - modo 3.	82
7.6	Valores das estratégias de investimento - problema $P1(\sigma^2)$	84
7.7	Valores das estratégias de investimento - problema $P1(\sigma^2)$ - modelo uni-período.	85
7.8	Valores de $X(t)$, $X(t)_{Uni-per}$ e $B(t)$ - problema $P1(\sigma^2)$	86

7.9	Modos da simulação e valores de μ_i para o modelo uni-período - problema $P1(\sigma^2)$	87
7.10	Modos da simulação e valores de μ_i para o modelo uni-período - problema $P1(\sigma^2)$	87
7.11	Valores das estratégias de investimento - problema $P3(\nu)$	88
7.12	Valores das estratégias de investimento - problema $P3(\nu)$ - modelo uni-período.	89
7.13	Valores de $X(t)$, $X(t)_{Uni-per}$ e $B(t)$ - problema $P3(\nu)$	90
7.14	Modos da simulação e valores de μ_i para o modelo uni-período - problema $P3(\nu)$	91
7.15	Modos da simulação e valores de μ_i para o modelo uni-período - problema $P3(\nu)$	91
7.16	Valores das estratégias de investimento - problema $P2(\epsilon)$	93
7.17	Valores das estratégias de investimento - problema $P2(\epsilon)$ - modelo uni-período.	94
7.18	Valores de $X(t)$, $X(t)_{Uni-per}$, $Y(t)$ e $D(t)$ - problema $P2(\epsilon)$	95
7.19	Modos da simulação e valores de μ_i para o modelo uni-período - problema $P2(\epsilon)$	96
7.20	Modos da simulação e valores de μ_i para o modelo uni-período - problema $P2(\epsilon)$	97

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objetivo do Estudo

O objetivo deste estudo é desenvolver um modelo de controle ótimo multi-período em tempo discreto de sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos e ruídos multiplicativos, utilizando-se como critério de desempenho a média e variância da saída do sistema.

Na obtenção da solução de controle, será utilizado o conceito de equações de diferenças acopladas de Riccati e equações recursivas, de modo a obter condições suficientes para a otimalidade da estratégia de controle. Em seguida, esse modelo será aplicado na análise de carteiras de investimentos financeiros em situações de gerenciamento de riscos e na modelagem de fundos de pensão para gerenciamento de ativos e passivos.

Os resultados obtidos neste estudo generalizam o caso escalar obtido em Cakmak e Ozeckici (2006) para o problema de alocação ótima com saltos markovianos e em Li e Ng (2000) para o caso sem saltos markovianos, apresentando condições explícitas e suficientes para a otimalidade da estratégia de controle. Os principais resultados foram apresentados e publicados em Costa e Okimura (2007a), Costa e Okimura (2007b) e Costa e Okimura (2009).

1.2 Justificativa do Tema

Os sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos e ruídos multiplicativos têm recebido grande atenção dos estudiosos nos últimos anos. Isso se deve ao fato dessa classe de modelos encontrar grande aplicação em engenharia e finanças, como em problemas de fissão nuclear, transferência de calor, modelos populacionais e imunologia, otimização de carteiras etc. A presença de saltos markovianos e ruídos multiplicativos na variável de estado e/ou na variável de controle geram perturbações no sistema de modo que a obtenção de soluções analíticas para problemas de controle de tais sistemas não é ainda totalmente desenvolvida.

Na aplicação de problemas de otimização de carteiras de investimento e gestão de fundos de pensão, objetivo deste estudo também, o uso de um modelo desse tipo se justifica pelo fato dessas carteiras e fundos apresentarem uma dinâmica caracterizada não somente por variáveis de mercado (como retornos dos ativos e taxa de juros) mas também por variáveis dos participantes (como contribuições e benefícios), sendo que todas essas variáveis estão sujeitas a variações de acordo com o "humor" de mercado. Além disso, os estudos sempre levam em conta horizontes de tempo de longo prazo, o que também justifica uma abordagem por multi-períodos, inserindo um grau maior de complexidade. Dessa forma, a aplicação de um modelo de controle multi-período sujeito a saltos markovianos e ruídos é aplicável e adequado no contexto de carteiras de investimentos e fundos de pensão.

1.3 Estrutura do Trabalho

A estrutura dessa tese abriga 7 capítulos. No capítulo 2 é apresentada uma breve porém importante revisão dos principais tópicos que envolvem o estudo. O capítulo 3 apresenta a formulação geral do problema e no capítulo 4 é apresentada a solução proposta. Esses resultados são apresentados de forma genérica. No capítulo 5 são propostos modelos aplicados à otimização de carteiras de investimentos e fundos de pensão, particularizando-se o modelo genérico apresentado nos capítulos 3 e 4. No capítulo 6 são apresentadas as simulações numéricas e análise de resultados. Por fim, no capítulo 7 são feitas as considerações finais.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

2.1 Sistemas Lineares com Saltos Markovianos em Tempo Discreto

Em engenharia, um dos objetivos principais é a de se modelar a evolução de processos e fenômenos observados através da descrição por funções matemáticas ou equações variantes no tempo, tanto de forma contínua ou discreta. Além disso, um objetivo tão importante quanto a modelagem é a de intervir - ou controlar - na evolução do processo modelado, sendo que para isso são projetados sistemas para desempenhar certos objetivos.

Dentro deste contexto geral, ao longo das últimas décadas surgiram estudos com enfoque em sistemas lineares estocásticos para uma classe de problemas de otimização linear-quadrático (LQ), isto é, a dinâmica dos sistemas estudados é descrita por um conjunto de equações lineares e o custo é representado por um funcional quadrático.

Uma classe desses sistemas é a de sistemas lineares em tempo discreto sujeito a saltos markovianos. Este tipo de sistema, de forma geral, pode ser descrito pelas seguintes

equações de diferenças com coeficientes lineares:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k), \\y(k) &= C_{\theta(k)}x(k) + D_{\theta(k)}u(k), \\x(0) &= x_0, k = 0, 1, \dots, T\end{aligned}$$

onde $x(k)$ é denominado de estado do sistema no instante k , x_0 é chamado de condição inicial do sistema, $u(k)$ denota o controle ou entrada do sistema e $y(k)$ a saída do sistema no instante k . As matrizes $A_{\theta(k)}$, $B_{\theta(k)}$, $C_{\theta(k)}$ e $D_{\theta(k)}$ são matrizes reais constantes com as dimensões apropriadas em que $\theta(k)$ representam saltos aleatórios do sistema. Esse sistema irá representar um comportamento estocástico pois há uma incerteza associada a cada instante de tempo em relação ao cenário associado pelo parâmetro $\theta(k)$, sendo esses cenários também denominados na literatura por *modos de operação*.

A denominação "salto" é utilizada para se representar uma mudança abrupta e os saltos serão markovianos quando modelados por uma Cadeia de Markov. Dessa forma temos um Sistema Linear com Saltos Markovianos (ou do termo em inglês *Markov Jumps Linear System* - MJLS). Esses sistemas constituem uma importante classe de sistemas lineares sujeitos a variações abruptas, onde as variações são modeladas por uma cadeia de Markov $\theta(k)$ com estados no espaço $\{1, \dots, N\}$. Por essa definição, entende-se que o sistema altera-se de forma abrupta em certos instantes aleatórios e se comporta como um sistema linear entre estes instantes. Observa-se que há uma componente estocástica sobre o sistema e vários conceitos para casos determinísticos não se aplicam diretamente.

Esse tipo de sistema encontra aplicações como em sistemas aeronáuticos, sistemas robóticos, receptores térmicos solares, modelos macroeconômicos, entre outros, e tem sido estudado de forma extensa na literatura e como referência temos Costa *et al.* (2005) e as referências nela citadas.

Uma extensão desse tipo de sistema é a inserção de ruídos multiplicativos, tanto na variável de estado quanto na variável de controle. Esse tipo de sistema difere da primeira

da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \left(\bar{A}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon^x} \tilde{A}_{\theta(k),s}(k) w_s^x(k) \right) x(k) + \left(\bar{B}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon^u} \tilde{B}_{\theta(k),s}(k) w_s^u(k) \right) u(k), \\ y(k) &= C_{\theta(k)} x(k) + D_{\theta(k)} u(k), \\ x(0) &= x_0, k = 0, 1, \dots, T \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde as matrizes $\tilde{A}_{\theta(k),s}$, $\tilde{B}_{\theta(k),s}$ são matrizes reais constantes com as dimensões apropriadas e $\{w_s^x(k), w_s^u(k); s = 1, \dots, \varepsilon^u, k = 0, 1, \dots, T-1\}$ são variáveis aleatórias com média zero e variância igual a 1. Esse tipo de sistema que considera a presença de ruídos multiplicativos têm recebido maior atenção nos últimos anos pois sua aplicabilidade tem sido feita em modelos de fissão nuclear, modelos populacionais e imunológicos, otimização de carteiras etc., e muitos resultados relacionados ao controle desses sistemas foram desenvolvidos.

Em Dombrovskii e Lyashenko (2003), os autores apresentam o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \left(A_0(k) + \sum_{j=1}^p A_{j,\theta(k)}(k) w_j(k) \right) x(k) + \\ &\quad \left(B_0(k) + \sum_{j=1}^p B_{j,\theta(k)}(k) w_j(k) \right) u(k) + D_{1,\theta(k)}(k) w_1(k) \\ y(k) &= \left(C_0(k) + \sum_{j=1}^p C_{j,\theta(k)}(k) w_j(k) \right) x(k) + D_{2,\theta(k)}(k) w_2(k) \end{aligned} \quad (2.2)$$

com a lei de controle dada pela saída estática:

$$u(k) = K(k)y(k)$$

e com o seguinte funcional:

$$J = E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k) R_1(k) x(k) + u^T(k) R_2(k) u(k)] + x^T(N) R_1(N) x(N) \right\},$$

onde $R_1(k) \geq 0$ e $R_2(k) \geq 0$ são matrizes simétricas de peso dadas e a solução é obtida por um sistema de matrizes interrelacionadas.

Em Boukas e Liu (2004), os autores apresentam o problema de estabilidade para sistemas lineares com saltos markovianos e atraso no tempo em tempo contínuo, estabelecendo condições suficientes utilizando-se de desigualdades matriciais lineares (ou *Linear Matrix Inequalities* - LMI). Outros trabalhos nesse sentido, analisando além da estabilidade mas também a observabilidade e detectabilidade de sistemas lineares estocásticos incluem Elliott *et al.* (2005), Dragan e Morozan (2006a) e Dragan e Morozan (2006b).

Em Beghi e D'Alessandro (1998), os autores apresentam a derivação da lei de controle ótimo através do estudo de equação diferencial generalizada de Riccati e o comportamento assintótico da solução para o sistema:

$$x(t+1) = A_t x(t) + B_t u(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t) G^i(t) v(t) + D(t) w(t)$$

onde $v(t)$ e $w(t)$ são ruídos branco gaussianos independentes de $x(0)$, com o seguinte funcional como índice de desempenho a ser minimizado:

$$J = \frac{1}{2} E \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)] + x^T(N) M x(N) \right\}.$$

As soluções estacionárias são obtidas utilizando-se de solução de uma equação algébrica generalizada em tempo-discreto de Riccati (ver De Souza e Fragoso (1990)):

$$P = A^T P A - A^T P B [R + B^T P B + \Omega(P)]^{-1} B^T P A + C^T C.$$

Em Chen *et al.* (1998), os autores demonstram que alguns problemas de reguladores linear-quadrático (ou *Linear Quadratic Regulator* - LQR) não são triviais quando a matriz de peso de controle é indefinida, especificamente, negativa definida, se o termo de difusão na equação de estado é dependente do controle. Essa situação corresponde ao caso onde os controles influenciam a variância dos distúrbios no sistema. Isso pode ser mostrado pelo exemplo do mesmo estudo, a seguir. Considere o problema determinístico LQR:

$$\begin{cases} \text{minimizar } J = \int_0^1 \frac{1}{2} [x^2(t) - r(t) u^2(t)] dt + \frac{1}{2} x^2(1) \\ \text{sujeito a } \begin{cases} dx(t)/dt = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (2.3)$$

onde $r(t) < 0$. O sistema (2.3) não é um problema bem posto, pois $J = \int_0^1 \frac{1}{2} r(t) u^2(t) dt \rightarrow -\infty$ quando $|u(t)| \rightarrow +\infty$. Por outro lado, considere uma versão estocástica do sistema (2.3):

$$\begin{cases} \text{minimizar } J = E \left[\int_0^1 \frac{1}{2} [x^2(t) + r(t)u^2(t)] dt + \frac{1}{2}x^2(1) \right] \\ \text{sujeito a } \begin{cases} dx(t) = u(t)dW(t) \\ x(0) = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (2.4)$$

Substituindo $x(t) = \int_0^t u(s)dW(s)$ no funcional de custo, obtém-se:

$$J = \frac{1}{2} E \int_0^1 [r(t) + (2-t)] u^2(t) dt \quad (2.5)$$

e assim o problema é bem posto com o controle ótimo $u^*(t) = 0$.

Outros trabalhos, seguindo essa linha e que tratam da matriz de peso indefinido são Lim e Zhou (1999), Moore *et al.* (1999), Ait Rami e Zhou (2000), Zhou e Li (2000), Ait Rami *et al.* (2002) e Zhu (2005). Em Ait Rami *et al.* (2001), os autores investigam o problema LQ indefinido estocástico em tempo discreto com matrizes indefinidas de peso na função custo. O sistema apresentado é sujeito a perturbações externas, isto é, com presença de ruídos multiplicativos e aditivos nos parâmetros do modelo, tanto no estado quanto no controle. A solução é apresentada através de uma equação generalizada de diferenças de Riccati, ao mesmo tempo com condições de desigualdades matriciais lineares (LMI) necessárias e suficientes para a solução da equação. É mostrado que quando o problema é bem posto, a acessibilidade do problema LQ, a viabilidade do LMI e a solucionalibilidade da equação de Riccati são equivalentes.

2.2 Modelos de Otimização de Carteiras

A aplicabilidade dos sistemas lineares com saltos markovianos e ruídos multiplicativos (2.1) para o problema de alocação de carteiras de investimentos se insere pelo fato da abordagem seminal por média-variância de Markowitz (Markowitz (1952), Markowitz (1959)) ser colocado como um problema de otimização. Na época, os trabalhos de Markowitz propuseram a idéia de que é possível realizar uma alocação ótima de investimentos entre ativos com risco utilizando as teorias de otimização comumente empregadas em pesquisa

operacional até então.

Segundo essa abordagem, a carteira ótima de um investidor é obtida através da minimização da variância do retorno da carteira sujeita a um retorno médio esperado. Markowitz demonstrou que investidores poderiam otimizar (e assim reduzir) o risco formando carteiras diversificadas confirmando a crença popular "não coloque todos os ovos na mesma cesta". A formulação final do problema é maximizar o retorno esperado para um dado nível de risco ou minimizar o risco esperado para um dado nível de retorno esperado.

Pela abordagem de média-variância, o investidor forma uma carteira eficiente em um amplo universo de ativos com risco. Tobin (1958) posteriormente inseriu o conceito de alavancagem financeira com um ativo livre de risco para o modelo de média-variância e demonstrou que todo investidor manteria uma combinação de apenas duas carteiras: uma carteira composta por 100% de ativo livre de risco e uma particular carteira eficiente de ativos com risco. Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966) apresentaram posteriormente o modelo de equilíbrio para todo o mercado financeiro baseado na abordagem de média-variância de Markowitz e o na combinação com o ativo livre de risco apresentado por Tobin, sendo o modelo atualmente conhecido por CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) ou modelo de apreamento de ativos financeiros.

A versão original do modelo de média-variância de Markowitz não lida com o lado dos passivos (*liability*) do balanço patrimonial do investidor. Sharpe e Tint (1990) propõem um modelo estendido da média-variância para o superávit (*surplus*) definido como o valor dos ativos menos o valor dos passivos. No modelo de gerenciamento do superávit de Sharpe e Tint (1990) o investidor minimiza a variância do retorno do superávit dado um nível de retorno médio do superávit. O principal resultado é a de que a política ótima de investimento depende da covariância entre os retornos dos ativos e dos passivos. A tendência do investidor é aceitar um retorno esperado menor nos ativos que apresentam uma maior covariância com o retorno dos passivos.

Atualmente há uma vasta literatura sobre o tema, com algumas extensões, como pode ser visto em Elton e Gruber (1995), Costa e Paiva (2002), Costa e Nabholz (2002), Hanza e Janssen (1998), Howe e Rustem (1997), Howe *et al.* (1996), Jorion (1992), Roll (1992), Rustem *et al.* (1995) entre outros estudos.

Além disso, o modelo original de média-variância de Markowitz considera apenas

um único período sem oportunidades de se alterar a estratégia de investimentos intertemporal. A maioria dos problemas atuais de otimização de investimentos e de gestão de fundos de pensão cobrem um longo período de tempo do planejamento até o horizonte final. Por exemplo, o horizonte de planejamento para a maioria dos produtos de seguros se estende além de uma década, para fundos de pensão é mais do que 30 anos, e para planos de seguridade social ele pode ir até 50. É claramente inapropriado modelar várias décadas no futuro em um único período sem permitir as transações de rebalanceamento do portfolio de investimentos.

Muitos autores estudaram modelos que superam a restrição de um único período do modelo de média-variância. Mossin (1968), Samuelson (1969) e Hakansson (1970) estudaram o problema de consumo-investimento multi-período para investidores maximizando a expectativa de uma função utilidade exponencial de riqueza ao final de seu horizonte, sob a premissa de retornos distribuídos independentemente no tempo. Uma função utilidade exponencial tem a propriedade de um coeficiente de aversão relativa ao risco constante e como resultado a alocação das carteiras é idêntica em cada período, independente da idade e riqueza do indivíduo. As políticas de investimentos são consideradas "míopes" pois o investidor se comporta identicamente a um investidor em um único período. Mossin (1968) mostrou que a sequência de modelos míopes são ótimas para um investidor multi-período sob as condições de retornos independentes no tempo, sem custos de transações e sem fluxos de aportes e saques. Hakansson (1969) e Hakansson (1971) generaliza os resultados de Mossin para funções utilidades logarítmicas para adicionar uma variável de renda estocástica, uma variável de retornos de ativos serialmente correlacionada e incerteza sobre o tempo de vida dos indivíduos.

A abordagem multi-períodos do problema de média-variância tem sido estudada nos últimos anos tanto em tempo contínuo quanto em tempo discreto. A versão do modelo de Markowitz em tempo contínuo foi apresentada em Zhou e Li (2000) usando a teoria linear quadrática estocástica desenvolvida em Chen *et al.* (1998), com soluções eficientes de forma fechada com uma solução explícita da fronteira eficiente. Em Cajueiro (2002) é apresentado a inserção de saltos markovianos nas variáveis de mercado a partir dos estudos de Merton (1969) e Merton (1971).

A versão em tempo discreto da alocação de carteiras por média-variância foi estudada em Li e Ng (2000) e posteriormente generalizada por Zhu *et al.* (2004) para o controle de

risco perante falência (*bankruptcy*), Costa e Nabholz (2007) para o caso com restrições intermediárias e em Leippold *et al.* (2004) foi considerado o caso considerando passivos no portfólio. Em Yin e Zhou (2004), Zhou e Yin (2003) é apresentado a alocação de carteiras de Markowitz por média-variância com mudança de regimes, solucionado através de um problema auxiliar de controle linear quadrático indefinido de um sistema linear com saltos markovianos e ruído multiplicativo.

Por outro lado, em Cakmak e Ozeckici (2006) os autores consideraram o problema de alocação por média-variância multiperíodo em tempo discreto para o caso dos parâmetros sujeitos a saltos markovianos seguindo uma abordagem semelhante à Li e Ng (2000). Uma generalização da formulação de carteiras de média-variância com saltos markovianos foi apresentada em Costa e Araujo (2008).

Nesta tese, o objetivo é obter uma solução explícita para um sistema da classe (2.1) através de um conjunto de equações de diferenças de Riccati, com critério de desempenho por média-variância relacionado ao modelo e soluções apresentadas em Li e Ng (2000). Aplica-se na sequência essa teoria em modelos de otimização de carteiras de investimento em tempo discreto e multi-período considerando saltos markovianos e ruídos multiplicativos.

Assim, os resultados obtidos neste estudo generalizam o caso escalar obtido em Cakmak e Ozeckici (2006) para o problema de alocação ótima com saldos markovianos e em Li e Ng (2000) para o caso sem saltos markovianos, apresentando condições explícitas e suficientes para a otimalidade da estratégia de controle. Os principais resultados foram apresentados e publicados em Costa e Okimura (2007b), Costa e Okimura (2007a) e Costa e Okimura (2009).

Capítulo 3

Problema de Controle Ótimo para Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos e Ruídos Multiplicativos

Ao longo deste estudo serão utilizadas algumas notações, definições e resultados auxiliares que serão apresentados nas seções 3.1 e 3.2. Em seguida, na seção 3.3, será apresentado formalmente o problema proposto para este estudo.

3.1 Notação e Definições

Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço Euclidiano n -dimensional e $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ o espaço linear normado limitado de todas as $m \times n$ matrizes reais, com $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n) := \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Para a matriz $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\text{Ker}(A)$ representa o espaço nulo de A , $\text{Im}(A)$ o espaço imagem de A e A' representa a transposta de A , sendo $\text{Im}(A) = \text{Ker}(A')^\perp$, onde $\mathcal{X}^\perp$ representa o complementar ortogonal do subespaço linear $\mathcal{X}$. A matriz identidade será representada por I .

Como notação padrão adotamos que para $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, $A \geq 0$ ($A > 0$ respectivamente) indica que a matriz A será positiva semi-definida (positiva definida) e $\text{tr}(A)$ representa o traço da matriz A .

Seja $\mathbb{H}^{n,m}$ o espaço linear formado por todas as N -seqüências de matrizes reais $V = (V_1, \dots, V_N)$ com $V_i \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $i = 1, \dots, N$ e por simplicidade, seja $\mathbb{H}^n := \mathbb{H}^{n,n}$.

Definimos $V = (V_1, \dots, V_N) \in \mathbb{H}^{n+}$ se $V \in \mathbb{H}^n$ e para cada $i = 1, \dots, N$, V_i é uma matriz positiva semi-definida. O espaço linear limitado de todos os operadores de $\mathbb{H}^n$ a $\mathbb{H}^m$ será representado por $\mathbb{B}(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^m)$ e, em particular, $\mathbb{B}(\mathbb{H}^n) := \mathbb{B}(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^n)$.

Dizemos que $\mathcal{T} \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^{n+}, \mathbb{H}^{m+})$ se $\mathcal{T} \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^m)$ de tal forma que $\mathcal{T}(V) \in \mathbb{H}^{m+}$ sempre que $V \in \mathbb{H}^{n+}$.

Para uma seqüência de matrizes quadradas n -dimensionais $A(0), \dots, A(T)$, usamos a seguinte notação:

$$\prod_{\ell=s}^t A(\ell) = \begin{cases} A(t) \dots A(s) & \text{para } t \geq s \\ I & \text{para } t < s \end{cases}.$$

Para um conjunto S , considera-se 1_S como a função pertinência, isto é, $1_S(\omega) = 1$ se $\omega \in S$, zero caso contrário. O operador valor esperado será representado por $E(\cdot)$.

A seguinte definição é necessária para o desenvolvimento do problema (ver Saberi *et al.* (1995), pg. 12-13).

Definição 1 Para uma matriz $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, a inversa generalizada (ou inversa de Moore-Penrose) de A é definida como a única matriz $A^\dagger \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ tal que

- i) $AA^\dagger A = A$,
- ii) $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$,
- iii) $(AA^\dagger)' = AA^\dagger$,
- iv) $(A^\dagger A)' = A^\dagger A$.

3.2 Resultados Auxiliares

Apresentamos o seguinte resultado (ver Boyd *et al.* (1994), pg. 28) que será utilizado no desenvolvimento da solução do problema:

PROPOSIÇÃO 1 (*Complemento de Schur*) *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) $Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{pmatrix} \geq 0$,
- b) $Q_{22} \geq 0$, $Q_{12} = Q_{12}Q_{22}^\dagger Q_{22}$ e $Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^\dagger Q'_{12} \geq 0$,
- c) $Q_{11} \geq 0$, $Q_{12} = Q_{11}Q_{11}^\dagger Q_{12}$ e $Q_{22} - Q'_{12}Q_{11}^\dagger Q_{12} \geq 0$.

As seguintes proposições serão utilizadas no desenvolvimento do problema no Capítulo 4.

PROPOSIÇÃO 2 *Considere $Y \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ e $M \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^m)$ com $Y \geq 0$. Sejam A e B matrizes estocásticas (isto é, cada elemento da matriz é uma variável aleatória) em $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathbb{B}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, respectivamente. Então*

$$E(A'YA) - E(A'YB) \left(E(B'YB) + M \right)^\dagger E(B'YA) \geq 0 \quad (3.1)$$

e

$$E(A'YB) = E(A'YB) \left(E(B'YB) + M \right)^\dagger \left(E(B'YB) + M \right). \quad (3.2)$$

Prova. (ver Proposição 3 em Costa e de Paulo (2007), pg. 592) Considere a matriz estocástica

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & YB \\ B'Y & R \end{pmatrix},$$

onde

$$R = B'YB + M.$$

De forma direta temos $Q_{11} = Y \geq 0$ e $Q_{12} = YB = Q_{11}Q_{11}^\dagger Q_{12} = YY^\dagger YB$, este último da Definição 1 onde $YY^\dagger Y = Y$. Além disso, usando novamente $YY^\dagger Y = Y$ temos

$$Q_{22} - Q'_{12}Q_{11}^\dagger Q_{12} = R - B'YY^\dagger YB = R - B'YB = M \geq 0.$$

Assim, pelo complemento de Schur (Proposição 1), $Q \geq 0$ e consequentemente

$$\begin{pmatrix} A'YA & A'YB \\ B'YA & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} Y & YB \\ B'Y & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \geq 0.$$

Fazendo o valor esperado da equação acima temos

$$\begin{pmatrix} \tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{12} \\ \tilde{Q}_{12}' & \tilde{Q}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(A'YA) & E(A'YB) \\ E(B'YA) & E(R) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Novamente a partir do complemento de Schur (Proposição 1), temos que

$$0 \leq \tilde{Q}_{11} - \tilde{Q}_{12}\tilde{Q}_{22}^\dagger\tilde{Q}_{12}' = E(A'YA) - E(A'YB)E(R)^\dagger E(B'YA)$$

e

$$\tilde{Q}_{12} = E(A'YB) = \tilde{Q}_{12}\tilde{Q}_{22}^\dagger\tilde{Q}_{22} = E(A'YB)E(R)^\dagger E(R),$$

obtendo o resultado desejado. ■

PROPOSIÇÃO 3 Para $G = G' \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ e $H \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ temos que $H(I - GG^\dagger) = 0$ se e somente se $\text{Ker}(G) \subseteq \text{Ker}(H)$.

Prova. (ver Lema 4.2 em Ait Rami *et al.* (2002), pg. 253) A implicação que $H(I - GG^\dagger) = 0 \Rightarrow \text{Ker}(G) \subseteq \text{Ker}(H)$ é direta. Por outro lado, a implicação reversa pode ser obtida pela decomposição de valor singular de G :

$$G = V \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V',$$

onde Σ é uma matriz diagonal não singular e V é uma matriz onde $VV' = I$. Além disso, V é decomposta como $V = [V_1 \ V_2]$ onde as colunas da matriz V_2 formam a base de $\text{Ker}(G)$. A partir disso, podemos obter $G^\dagger$ dado por

$$G^\dagger = V \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V'.$$

Por manipulação temos $H(I - GG^\dagger) = HV_2V_2'$. Como $GV_2 = 0$ temos $HV_2 = 0$ e assim obtemos a prova. ■

3.3 Formulação dos Problemas Propostos

Em um espaço probabilístico $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ consideramos o seguinte sistema linear com salto markoviano e ruído multiplicativo

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \left(\bar{A}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon^x} \tilde{A}_{\theta(k),s}(k) w_s^x(k) \right) x(k) + \left(\bar{B}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon^u} \tilde{B}_{\theta(k),s}(k) w_s^u(k) \right) u(k), \\ x(0) &= x_0, \theta(0) = \theta_0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $\theta(k)$ é uma cadeia de Markov variante no tempo assumindo valores em $\{1, \dots, N\}$ com matriz de probabilidade de transição $\mathbb{P}(k) = [p_{ij}(k)]$, $\{w_s^x(k); s = 1, \dots, \varepsilon^x, k = 0, 1, \dots, T-1\}$ são variáveis aleatórias com média zero e variância igual a 1 e $E(w_i^x(k)w_j^x(k)) = 0$ para todo k e $i \neq j$ e independente da cadeia de Markov $\{\theta(k)\}$. Analogamente $\{w_s^u(k); s = 1, \dots, \varepsilon^u, k = 0, 1, \dots, T-1\}$ são variáveis aleatórias com média zero e variância igual a 1 e $E(w_i^u(k)w_j^u(k)) = 0$ para todo k e $i \neq j$ e independente da cadeia de Markov $\{\theta(k)\}$. Assumem-se que as condições iniciais θ_0 e x_0 são independentes de $\{w_s^x(k)\}$ e $\{w_s^u(k)\}$, com x_0 sendo um vetor aleatório n -dimensional com momentos de segunda ordem finitos. Definimos $\mu_i(0) = E(x_0 1_{\{\theta_0=i\}})$, $\mu(0) \in \mathbb{R}^{Nn}$ como

$$\mu(0) = \begin{pmatrix} \mu_1(0) \\ \vdots \\ \mu_N(0) \end{pmatrix},$$

e $Q_i(0) = E(x(0)x(0)' 1_{\{\theta_0=i\}})$, $Q(0) = (Q_1(0), \dots, Q_N(0)) \in \mathbb{H}^{n+}$.

A correlação mútua entre $w_{s_1}^x(k)$ e $w_{s_2}^u(k)$ é representada por

$$E(w_{s_1}^x(k)w_{s_2}^u(k)) = \rho_{s_1,s_2}(k).$$

Sem perda de generalidade considera-se que $\varepsilon = \varepsilon^x = \varepsilon^u$. Para $k = 0, 1, \dots, T-1$ temos também

$$\begin{aligned} \bar{A}(k) &= (\bar{A}_1(k), \dots, \bar{A}_N(k)) \in \mathbb{H}^n, \\ \tilde{A}_s(k) &= (\tilde{A}_{s,1}(k), \dots, \tilde{A}_{s,N}(k)) \in \mathbb{H}^n, s = 1, \dots, \varepsilon, \\ \bar{B}(k) &= (\bar{B}_1(k), \dots, \bar{B}_N(k)) \in \mathbb{H}^{m,n}, \\ \tilde{B}_s(k) &= (\tilde{B}_{s,1}(k), \dots, \tilde{B}_{s,N}(k)) \in \mathbb{H}^{m,n}, s = 1, \dots, \varepsilon. \end{aligned}$$

Definimos

$$\pi_i(k) = P(\theta(k) = i),$$

e

$$\pi(k) = \begin{pmatrix} \pi_1(k) \\ \vdots \\ \pi_N(k) \end{pmatrix}.$$

Considere $\mathcal{F}_t$ como o σ -campo gerado por $\{(\theta(s), x(s)); s = 0, \dots, \tau\}$ e representamos

$$\mathbb{U}(\tau) = \{u_\tau = (u(\tau), \dots, u(T-1)); u(k) \text{ é um vetor aleatório } m\text{-dimensional com} \\ \text{momentos de segunda ordem finitos e } \mathcal{F}_k\text{-mensurável para} \\ \text{cada } k = \tau, \dots, T-1\}.$$

Considera-se a seguinte saída escalar do sistema (3.3):

$$y(t) = L_{\theta(t)}x(t), \tag{3.4}$$

onde $L = (L_1, \dots, L_N) \in \mathbb{H}^{n,1}$.

Por simplicidade iremos escrever $\mathbb{U} = \mathbb{U}(0)$. O índice u irá indicar que a lei de controle u está sendo aplicada a (3.3) e (3.4).

Os problemas multi-período de média-variância têm como objetivos a escolha de um $u \in \mathbb{U}$ de forma que apresente:

1. o máximo valor terminal esperado da saída $E(y^u(T))$ dada uma saída máxima terminal σ^2 da variância $Var(y^u(T))$; ou
2. que obtenha a menor saída terminal da variância $Var(y^u(T))$ dado um valor esperado mínimo terminal de ϵ para a saída $E(y^u(T))$.

A rigor, estes problemas definidos como $P1(\sigma^2)$ e $P2(\epsilon)$ podem ser representados por:

$$\begin{aligned} P1(\sigma^2) : & \max_{u \in \mathbb{U}} E(y^u(T)) \\ \text{sujeito a : } & Var(y^u(T)) \leq \sigma^2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} P2(\epsilon) : & \min_{u \in \mathbb{U}} Var(y^u(T)) \\ \text{sujeito a : } & E(y^u(T)) \geq \epsilon. \end{aligned} \quad (3.6)$$

No problema $P1(\sigma^2)$ o parâmetro de entrada é σ^2 que especifica a restrição final sobre a variância de saída, enquanto que no problema $P2(\epsilon)$ o parâmetro de entrada é ϵ que especifica a restrição final na esperança da saída.

Um terceiro problema sem restrições que será considerado, definido como $P3(\nu)$ é:

$$P3(\nu) : \min_{u \in \mathbb{U}} \nu Var(y^u(T)) - E(y^u(T)), \quad (3.7)$$

onde $\nu \in (0, \infty)$ é o parâmetro de entrada para este problema e pode ser interpretado como um coeficiente de aversão ao risco, permitindo uma preferência de equilíbrio (*trade-off*) entre a esperança final (saída) e o nível de risco (variância).

Como o problema $P3(\nu)$ envolve uma função não-linear do termo de esperança em $Var(y^u(t)) = E(y^u(t)^2) - E(y^u(t))^2$, ele não pode ser solucionado diretamente por programação dinâmica. Será utilizada a mesma abordagem apresentada em Li e Ng (2000) e Zhu *et al.* (2004) que consideram o seguinte problema auxiliar, porém tratável, nesse caso definido por $A(\lambda, \nu)$:

$$A(\lambda, \nu) : \min_{u \in \mathbb{U}} E\{\nu y^u(T)^2 - \lambda y^u(T)\}. \quad (3.8)$$

Para o problema $A(\lambda, \nu)$, os parâmetros de entrada são λ e ν . No capítulo seguinte, primeiramente iremos mostrar a solução do problema auxiliar $A(\lambda, \nu)$ e posteriormente a solução dos problemas $P1(\sigma^2)$, $P2(\epsilon)$ e $P3(\nu)$.

Capítulo 4

Solução de Média-Variância em Tempo Discreto para Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos e Ruídos Multiplicativos

Este capítulo descreve o desenvolvimento da solução para os problemas propostos no capítulo 3. A primeira seção apresenta a solução do problema auxiliar $A(\lambda, \nu)$ (3.8). Nas seções posteriores é descrito como os parâmetros λ e ν podem ser utilizados para a obtenção da solução dos problemas $P3(\nu)$, $P1(\sigma^2)$ e $P2(\epsilon)$. Esses resultados representam os principais resultados teóricos da tese, sintetizados no Teorema 2.

4.1 Solução do Problema Auxiliar $A(\lambda, \nu)$

Vamos considerar os seguintes problemas intermediários para o problema (3.8). Para cada tempo $k \in \{0, \dots, T-1\}$, seja

$$J(x(k), \theta(k), k) = \min_{u_k \in \mathbb{U}(k)} E \left\{ \nu y^{u_k}(T)^2 - \lambda y^{u_k}(T) \mid \mathcal{F}_k \right\}. \quad (4.1)$$

Em seguida, vamos considerar para $k = 0, \dots, T-1$ os seguintes operadores $\mathcal{E}(k, \cdot) \in$

$\mathbb{B}(\mathbb{H}^n)$, $\mathcal{A}(k, \cdot) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n)$, $\mathcal{G}(k, \cdot) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^{n,m})$, $\mathcal{K}(k, \cdot) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^m)$, $\mathcal{R}(k, \cdot) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^m)$, $\mathcal{P}(k, \cdot) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n)$ que serão utilizados na sequência. Para $X \in \mathbb{H}^n$ e $i = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i(k, X) &= \sum_{j=1}^N p_{ij}(k) X_j, \\ \mathcal{A}_i(k, X) &= \bar{A}_i(k)' \mathcal{E}_i(k, X) \bar{A}_i(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \tilde{A}_{i,s}(k)' \mathcal{E}_i(k, X) \tilde{A}_{i,s}(k), \\ \mathcal{G}_i(k, X) &= \left(\bar{A}_i(k)' \mathcal{E}_i(k, X) \bar{B}_i(k) + \sum_{s_1=1}^{\varepsilon} \sum_{s_2=1}^{\varepsilon} [\rho_{s_1, s_2}(k) \tilde{A}_{i,s_1}(k)' \mathcal{E}_i(k, X) \tilde{B}_{i,s_2}(k)] \right)', \\ \mathcal{R}_i(k, X) &= \bar{B}_i(k)' \mathcal{E}_i(k, X) \bar{B}_i(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \tilde{B}_{i,s}(k)' \mathcal{E}_i(k, X) \tilde{B}_{i,s}(k), \\ \mathcal{K}_i(k, X) &= \mathcal{R}_i(k, X)^{\dagger} \mathcal{G}_i(k, X), \\ \mathcal{P}_i(k, X) &= \mathcal{A}_i(k, X) - \mathcal{G}_i(k, X)' \mathcal{R}_i(k, X)^{\dagger} \mathcal{G}_i(k, X).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Pode-se observar que $\mathcal{E}(k, \cdot) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^{n+})$, $\mathcal{A}(k, \cdot) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^{n+})$ e $\mathcal{R}(k, \cdot) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^{n+}, \mathbb{H}^{m+})$.

Além disso, considere os seguintes operadores $\mathcal{V}(k, \cdot, \cdot) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^{n,1}, \mathbb{H}^{n,1})$, $\mathcal{D}(k, \cdot, \cdot, \cdot) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^{n,1} \times \mathbb{H}^1, \mathbb{H}^1)$, e $\mathcal{H}(k, \cdot) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^{n,1}, \mathbb{H}^{n,m})$ definidos como a seguir.

Para $X \in \mathbb{H}^n$, $V \in \mathbb{H}^{n,1}$, $\gamma \in \mathbb{H}^1$, e $i = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_i(k, X, V) &= \mathcal{E}_i(k, V) \left(\bar{A}_i(k) - \bar{B}_i(k) \mathcal{K}_i(k, X) \right), \\ \mathcal{D}_i(k, X, V, \gamma) &= \mathcal{E}_i(k, \gamma) - \frac{1}{4} \mathcal{E}_i(k, V) \bar{B}_i(k) \mathcal{R}_i(k, X)^{\dagger} \bar{B}_i(k)' \mathcal{E}_i(k, V)', \\ \mathcal{H}_i(k, V) &= \bar{B}_i(k)' \mathcal{E}_i(k, V)'. \end{aligned}\tag{4.3}$$

Iremos utilizar esses operadores na equação de otimalidade de Bellman para resolver o problema (3.8). As seguintes proposições auxiliares serão úteis para justificar a definição dos operadores.

PROPOSIÇÃO 4 Se $P = (P_1, \dots, P_N) \in \mathbb{H}^{n+}$, $V = (V_1, \dots, V_N) \in \mathbb{H}^{n,1}$ e $\gamma \in \mathbb{H}^1$ então $\mathcal{P}(k, P) \in \mathbb{H}^{n+}$ e

$$\mathcal{G}_i(k, P)' = \mathcal{G}_i(k, P)' \mathcal{R}_i(k, P)^{\dagger} \mathcal{R}_i(k, P).\tag{4.4}$$

Prova. Aplicando na Proposição 2

$$M = 0$$

$$A = \bar{A}_i(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \tilde{A}_{i,s}(k) w_s^x(k),$$

$$B = \bar{B}_i(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \tilde{B}_{i,s}(k) w_s^u(k),$$

$$Y = \mathcal{E}_i(P),$$

e considerando as hipóteses sobre $\{w_s^x(k)\}$ e $\{w_s^u(k)\}$ feitas na seção 3.3 temos que

$$E(A'YA) = \mathcal{A}_i(k, P),$$

$$E(A'YB) = \mathcal{G}_i(k, P)',$$

$$E(B'YB) = \mathcal{R}_i(k, P),$$

$$\mathcal{P}_i(k, P) = E(A'YA) - E(A'YB) \left(E(B'YB) \right)^\dagger E(B'YA).$$

Assim obtemos pela equação (3.1) da Proposição 2 a equação

$$\mathcal{P}_i(k, P) = \bar{A}_i(k)' \mathcal{E}_i(P) \bar{A}_i(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \tilde{A}_{i,s}(k)' \mathcal{E}_i(P) \tilde{A}_{i,s}(k) - \mathcal{G}_i(k, P)' \mathcal{R}_i(k, P)^\dagger \mathcal{G}_i(k, P) \geq 0$$

ou seja, $\mathcal{P}_i(k, P) \geq 0$. ■

PROPOSIÇÃO 5 Se $P = (P_1, \dots, P_N) \in \mathbb{H}^{n+}$, $V = (V_1, \dots, V_N) \in \mathbb{H}^{n,1}$, $\gamma \in \mathbb{H}^1$ e para cada $i = 1, \dots, N$,

$$\mathcal{H}_i(k, V) \in \text{Im}(\mathcal{R}_i(k, P)), \quad (4.5)$$

então para qualquer $u_k \in \mathbb{U}(k)$,

$$\begin{aligned} E \left(\nu x(k+1)' P_{\theta(k+1)} x(k+1) - \lambda V_{\theta(k+1)} x(k+1) + \frac{\lambda^2}{\nu} \gamma_{\theta(k+1)} | \mathcal{F}_k \right) = \\ \nu \left\{ x(k)' \mathcal{P}_{\theta(k)}(k, P) x(k) \right. \\ \left. + (u(k) + a_{\theta(k)}(x(k)))' \mathcal{R}_{\theta(k)}(k, P) (u(k) + a_{\theta(k)}(x(k))) \right\} \\ - \lambda \mathcal{V}_{\theta(k)}(k, P, V) x(k) + \frac{\lambda^2}{\nu} \mathcal{D}_{\theta(k)}(k, P, V, \gamma), \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde para $i = 1, \dots, N$,

$$a_i(x) = \mathcal{R}_i(k, P)^\dagger \left(\mathcal{G}_i(k, P)x - \frac{\lambda}{2\nu} \mathcal{H}_i(k, V) \right). \quad (4.7)$$

Prova. A equação (4.4) é válida pela Proposição 2, equação (3.2). Temos que

$$\begin{aligned} E \left(x(k+1)' P_{\theta(k+1)} x(k+1) | \mathcal{F}_k \right) = \\ x(k)' \left(\bar{A}_{\theta(k)}(k)' \mathcal{E}_{\theta(k)}(k, P) \bar{A}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \tilde{A}_{\theta(k),s}(k)' \mathcal{E}_{\theta(k)}(k, P) \tilde{A}_{\theta(k),s}(k) \right) x(k) + \\ 2x(k)' \left(\bar{A}_{\theta(k)}(k)' \mathcal{E}_{\theta(k)}(k, P) \bar{B}_{\theta(k)}(k) \right. \\ \left. + \sum_{s_1=1}^{\varepsilon} \sum_{s_2=1}^{\varepsilon} \rho_{s_1, s_2}(k) \tilde{A}_{\theta(k),s_1}(k)' \mathcal{E}_{\theta(k)}(k, P) \tilde{B}_{\theta(k),s_2}(k) \right) u(k) \\ \left. + u(k)' \left(\bar{B}_{\theta(k)}(k)' \mathcal{E}_{\theta(k)}(k, P) \bar{B}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \tilde{B}_{\theta(k),s}(k)' \mathcal{E}_{\theta(k)}(k, P) \tilde{B}_{\theta(k),s}(k) \right) u(k), \quad (4.8) \right. \end{aligned}$$

e

$$E \left(V_{\theta(k+1)} x(k+1) | \mathcal{F}_k \right) = \mathcal{E}_{\theta(k)}(k, V) \left(\bar{A}_{\theta(k)}(k)x(k) + \bar{B}_{\theta(k)}(k)u(k) \right), \quad (4.9)$$

$$E \left(\gamma_{\theta(k+1)} | \mathcal{F}_k \right) = \mathcal{E}_{\theta(k)}(k, \gamma). \quad (4.10)$$

As equações (4.8), (4.9) e (4.10) resultam em

$$\begin{aligned} E \left(\nu x(k+1)' P_{\theta(k+1)} x(k+1) - \lambda V_{\theta(k+1)} x(k+1) + \frac{\lambda^2}{\nu} \gamma_{\theta(k+1)} | \mathcal{F}_k \right) = \\ \nu \left\{ x(k)' \mathcal{A}_{\theta(k)}(k, P) x(k) + 2x(k)' \mathcal{G}_{\theta(k)}(k, P)' u(k) + u(k)' \mathcal{R}_{\theta(k)}(k, P) u(k) \right\} - \\ \lambda \left\{ \mathcal{E}_{\theta(k)}(k, V) \left(\bar{A}_{\theta(k)}(k)x(k) + \bar{B}_{\theta(k)}(k)u(k) \right) \right\} + \frac{\lambda^2}{\nu} \mathcal{E}_{\theta(k)}(k, \gamma). \quad (4.11) \end{aligned}$$

Por simplicidade, podemos denotar $x(k) = x$, $u(k) = u$, $\theta(k) = i$, e escrevendo agora no lado direito da equação (4.11) apenas os termos dependentes em u como $f(u)$ obtemos

$$f(u) = \nu u' \mathcal{R}_i(k, P) u + 2\nu \left(x' \mathcal{G}_i(k, P)' - \frac{\lambda}{2\nu} \mathcal{E}_i(k, V) \bar{B}_i(k) \right) u. \quad (4.12)$$

Como $\text{Im}(\mathcal{R}_i(k, P)) = \text{Im}(\mathcal{R}_i(k, P)^\dagger)$ e $\text{Im}(\mathcal{R}_i(k, P)^\dagger) = \text{Ker}(\mathcal{R}_i(k, P)^\dagger)^\perp$, temos a partir de (4.5) que $\mathcal{H}_i(k, V) \in \text{Im}(\mathcal{R}_i(k, P)^\dagger)$, e assim $\text{Ker}(\mathcal{R}_i(k, P)^\dagger) \subseteq \text{Ker}(\mathcal{H}_i(k, V)')$. Da

Proposição 3 segue que

$$\mathcal{H}_i(k, V)' = \mathcal{H}_i(k, V)' \mathcal{R}_i(k, P)^\dagger \mathcal{R}_i(k, P). \quad (4.13)$$

Assim, de (4.4) e (4.13) e considerando a definição de $a_i(x)$ em (4.7) temos que (4.12) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} f(u) &= \nu u' \mathcal{R}_i(k, P)u + 2\nu \left(x' \mathcal{G}_i(k, P)' - \frac{\lambda}{2\nu} \mathcal{E}_i(k, V) \bar{B}_i(k) \right) \mathcal{R}_i(k, P)^\dagger \mathcal{R}_i(k, P)u \\ &= \nu [(u + a_i(x))' \mathcal{R}_i(k, P)(u + a_i(x)) - a_i(x)' \mathcal{R}_i(k, P)a_i(x)]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Observe que

$$\begin{aligned} -a_i(x)' \mathcal{R}_i(k, P)a_i(x) &= - \left(x' \mathcal{G}_i(k, P)' \mathcal{R}_i(k, P)^\dagger \mathcal{G}_i(k, P)x \right. \\ &\quad - \frac{\lambda}{\nu} \mathcal{E}_i(k, V) \bar{B}_i(k) \mathcal{R}_i(k, P)^\dagger \mathcal{G}_i(k, P)x \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^2}{4\nu^2} \mathcal{E}_i(k, V) \bar{B}_i(k) \mathcal{R}_i(k, P)^\dagger (\mathcal{E}_i(k, V) \bar{B}_i(k))' \right), \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde foi considerado o fato de que $\mathcal{R}_i(k, P)^\dagger \mathcal{R}_i(k, P) \mathcal{R}_i(k, P)^\dagger = \mathcal{R}_i(k, P)^\dagger$. Assim temos que

$$\begin{aligned} &\nu [x' \mathcal{A}_i(k, P)x + 2x' \mathcal{G}_i(k, P)'u + u' \mathcal{R}_i(k, P)u] \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{\nu} \mathcal{E}_i(k, \gamma) - \lambda \mathcal{E}_i(k, V) [\bar{A}_i(k)x + \bar{B}_i(k)u] = \\ &\nu x' \mathcal{A}_i(k, P)x - \lambda \mathcal{E}_i(k, V) \bar{A}_i(k)x + \frac{\lambda^2}{\nu} \mathcal{E}_i(k, \gamma) + f(u) = \nu [x' (\mathcal{A}_i(k, P) - \\ &\mathcal{G}_i(k, P)' \mathcal{R}_i(k, P)^\dagger \mathcal{G}_i(k, P))x - \lambda [\mathcal{E}_i(k, V) \bar{A}_i(k) - \mathcal{E}_i(k, V) \bar{B}_i(k) \mathcal{R}_i(k, P)^\dagger \mathcal{G}_i(k, P)]x + \\ &\nu (u + a_i(x))' \mathcal{R}_i(k, P)(u + a_i(x)) + \frac{\lambda^2}{\nu} [\mathcal{E}_i(k, \gamma) \\ &\quad - \frac{1}{4} \mathcal{E}_i(k, V) \bar{B}_i(k) \mathcal{R}_i(k, P)^\dagger (\mathcal{E}_i(k, V) \bar{B}_i(k))'] = \\ &\nu x' \mathcal{P}_i(k, P)x - \lambda \mathcal{V}_i(k, P, V)x + \frac{\lambda^2}{\nu} \mathcal{D}_i(k, P, V, \gamma) + \nu (u + a_i(x))' \mathcal{R}_i(k, P)(u + a_i(x)), \end{aligned}$$

demonstrando (4.6) e completando a prova da proposição. ■

Agora, considere as seguintes sequências para $k = T, T - 1, \dots, 0$,

$$P(k) = \mathcal{P}(k, P(k+1)), \quad P(T) = (L'_1 L_1, \dots, L'_N L_N), \quad (4.16)$$

$$V(k) = \mathcal{V}(k, P(k+1), V(k+1)), \quad V(T) = (L_1, \dots, L_N), \quad (4.17)$$

$$\gamma(k) = \mathcal{D}(k, P(k+1), V(k+1), \gamma(k+1)), \quad \gamma(T) = 0. \quad (4.18)$$

A partir da Proposição 5 temos o seguinte teorema que desenvolve a solução para o problema auxiliar $A(\lambda, \nu)$.

TEOREMA 1 *Se para cada $k = 0, 1, \dots, T - 1$,*

$$\mathcal{H}_i(k, V(k+1)) \in \text{Im}(\mathcal{R}_i(k, P(k+1))) \quad (4.19)$$

então as funções valor $J(x(k), \theta(k), k)$ do problema (3.8) são dadas por

$$J(x(k), \theta(k), k) = \nu x(k)' P_{\theta(k)}(k) x(k) - \lambda V_{\theta(k)}(k) x(k) + \frac{\lambda^2}{\nu} \gamma_{\theta(k)}(k), \quad (4.20)$$

e a lei de controle ótimo é obtida por

$$u(k) = -\mathcal{R}_{\theta(k)}(k, P(k+1))^\dagger \left(\mathcal{G}_{\theta(k)}(k, P(k+1)) x(k) - \frac{\lambda}{2\nu} \mathcal{H}_{\theta(k)}(k, V(k+1)) \right). \quad (4.21)$$

Prova. Para $k = T$ não há controle a ser obtido e assim

$$J(x(T), \theta(T), T) = \nu x(T)' L_{\theta(T)} L'_{\theta(T)} x(T) - \lambda L_{\theta(T)} x(T)$$

demonstrando (4.20) a partir da definição de $P(T)$, $V(T)$ e $\gamma(T) = 0$. Suponha pela hipótese de indução que (4.20)-(4.21) seja válida para $k+1$. Da equação de Bellman e

(4.11), (4.6), temos que para $x(k) = x$, $\theta(k) = i$,

$$\begin{aligned}
 J(x, i, k) &= \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \left\{ E \left(J(x(k+1), \theta(k+1), k+1) | \mathcal{F}_k \right) \right\} \\
 &= \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \left\{ \nu E \left(x(k+1)' P_{\theta(k+1)}(k+1) x(k+1) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \lambda V_{\theta(k+1)}(k+1) x(k+1) + \frac{\lambda^2}{\nu} \gamma_{\theta(k+1)}(k+1) | \mathcal{F}_k \right) \right\} \\
 &= \nu x' \mathcal{P}_i(k, P(k+1)) x - \lambda \mathcal{V}_i(k, P(k+1), V(k+1)) x + \frac{\lambda^2}{\nu} \mathcal{D}_i(k, P, V, \gamma),
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

com um valor mínimo obtido em $u(k)$ como em (4.21). A partir de (4.16), (4.17), (4.18) e (4.22) obtemos o resultado. ■

4.2 Resultados Auxiliares

Ao longo do desenvolvimento desta e das próximas seções, assume-se que (4.19) seja verdadeiro.

Sejam $\Pi(P1(\sigma^2))$, $\Pi(P2(\epsilon))$, $\Pi(P3(\nu))$ e $\Pi(A(\lambda, \nu))$, respectivamente, o conjunto de soluções ótimas dos problemas $P1(\sigma^2)$, $P2(\epsilon)$, $P3(\nu)$ e $A(\lambda, \nu)$. Em seguida, será obtida uma condição suficiente para a existência de uma estratégia ótima de controle $u \in \Pi(P3(\nu))$.

Seja definido o conjunto de estratégias de controle $\mathcal{U}^*$ como a seguir. Dizemos que $u^\lambda \in \mathcal{U}^*$ se ele pode ser escrito como

$$u^\lambda(k) = -\mathcal{R}_{\theta(k)}(k, P(k+1))^\dagger \left(\mathcal{G}_{\theta(k)}(k, P(k+1)) x(k) - \frac{\lambda}{2\nu} \mathcal{H}_{\theta(k)}(k, V(k+1)) \right), \tag{4.23}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Do Teorema 1, $u^\lambda \in \Pi(A(\lambda, \nu))$. Considere para qualquer $u \in \mathcal{U}$ o custo $\mathcal{C}(u)$ como

$$\mathcal{C}(u) = \nu \text{Var}(y^u(T)) - E(y^u(T)). \tag{4.24}$$

PROPOSIÇÃO 6 *Se $u^\lambda \in \mathcal{U}^*$ de forma que $\mathcal{C}(u^\lambda) = \min_{u^\varsigma \in \mathcal{U}^*} \mathcal{C}(u^\varsigma)$ então $u^\lambda \in \Pi(P3(\nu))$.*

Prova. Será demonstrado que para qualquer $u \in \mathbb{U}$ pode-se encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ de forma que $u^\lambda \in \mathbb{U}^*$ e

$$\mathcal{C}(u^\lambda) \leq \mathcal{C}(u). \quad (4.25)$$

Na verdade, considere $\lambda = 1 + 2\nu E(y^u(T))$ e defina u^λ como em (4.23). Do Teorema 1 e (4.21) temos que

$$E\left(\nu y^{u^\lambda}(T)^2 - \lambda y^{u^\lambda}(T)\right) \leq E\left(\nu y^u(T)^2 - \lambda y^u(T)\right). \quad (4.26)$$

Assim temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(u^\lambda) &= E\left(\nu y^{u^\lambda}(T)^2 - \lambda y^{u^\lambda}(T)\right) - \nu \left\{ E(y^{u^\lambda}(T))^2 - 2E(y^u(T))E(y^{u^\lambda}(T)) \right\} \\ &= E\left(\nu y^{u^\lambda}(T)^2 - \lambda y^{u^\lambda}(T)\right) - \nu \left\{ E(y^{u^\lambda}(T)) - E(y^u(T)) \right\}^2 + \nu E(y^u(T))^2, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\mathcal{C}(u) = E\left(\nu y^u(T)^2 - \lambda y^u(T)\right) + \nu E(y^u(T))^2. \quad (4.28)$$

De (4.26), (4.27) e (4.28), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(u^\lambda) &\leq \mathcal{C}(u^\lambda) + \nu \left\{ E(y^{u^\lambda}(T)) - E(y^u(T)) \right\}^2 \\ &= E\left(\nu y^{u^\lambda}(T)^2 - \lambda y^{u^\lambda}(T)\right) + \nu E(y^u(T))^2 \\ &\leq E\left(\nu y^u(T)^2 - \lambda y^u(T)\right) + \nu E(y^u(T))^2 \\ &= \mathcal{C}(u) \end{aligned}$$

demonstrando (4.25). Se $u^\lambda \in \mathbb{U}^*$ é de tal forma que para qualquer $u^\varsigma \in \mathbb{U}^*$ nós temos que $\mathcal{C}(u^\lambda) \leq \mathcal{C}(u^\varsigma)$ então de (4.25), para qualquer $u \in \mathbb{U}$ podemos obter $\varsigma \in \mathbb{R}$ de forma que $u^\varsigma \in \mathbb{U}^*$ e $\mathcal{C}(u^\varsigma) \leq \mathcal{C}(u)$, e assim $\mathcal{C}(u^\lambda) \leq \mathcal{C}(u^\varsigma) \leq \mathcal{C}(u)$, ou seja, $\mathcal{C}(u^\lambda) \leq \min_{u \in \mathbb{U}} \mathcal{C}(u)$. Como $u^\lambda \in \mathbb{U}^* \subseteq \mathbb{U}$ temos que $\mathcal{C}(u^\lambda) \geq \min_{u \in \mathbb{U}} \mathcal{C}(u)$, e assim $\mathcal{C}(u^\lambda) = \min_{u \in \mathbb{U}} \mathcal{C}(u)$, demonstrando que $u^\lambda \in \Pi(P3(\nu))$ e completando a prova. ■

Agora, consideramos as seguintes definições: para $i = 1, \dots, N$, faça

$$\begin{aligned}
 K_i(k) &= \mathcal{K}_i(k, P(k+1)), \\
 U_i(k) &= \mathcal{R}_i(k, P(k+1))^\dagger \mathcal{H}_i(k, V(k+1)), \\
 A_i^{cl}(k) &= \bar{A}_i(k) - \bar{B}_i(k) K_i(k), \\
 \mathbb{A}(k) &= \begin{pmatrix} p_{11}(k) A_1^{cl}(k) & \dots & p_{N1}(k) A_N^{cl}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N}(k) A_1^{cl}(k) & \dots & p_{NN}(k) A_N^{cl}(k) \end{pmatrix}, \\
 \mathbb{V}(k) &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \pi_i(k) p_{i1}(k) \bar{B}_i(k) U_i(k) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N \pi_i(k) p_{iN}(k) \bar{B}_i(k) U_i(k) \end{pmatrix}, \\
 \mathbb{L} &= \begin{pmatrix} L_1 & \dots & L_N \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

e

$$\begin{aligned}
 a &= \mathbb{L} \left(\prod_{\ell=0}^{T-1} \mathbb{A}(\ell) \right) \mu(0), \quad b = \frac{1}{2} \mathbb{L} \left(\sum_{t=0}^{T-1} \left(\prod_{\ell=t+1}^{T-1} \mathbb{A}(\ell) \right) \mathbb{V}(t) \right), \\
 c &= \sum_{i=1}^N \text{tr}(P_i(0) Q_i(0)), \quad d = \sum_{i=1}^N V_i(0) \mu_i(0), \quad e = \sum_{i=1}^N \pi_i(0) \gamma_i(0).
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

PROPOSIÇÃO 7 *As seguintes identidades são válidas: $a = d$ e $e = -\frac{1}{2}b$.*

Prova. Considere o vetor $\mathcal{T}(k) \in \mathbb{R}^{Nn}$ como:

$$\mathcal{T}(k) = \begin{pmatrix} V_1(k)' \\ \vdots \\ V_N(k)' \end{pmatrix}.$$

Então é possível observar que $\mathcal{T}(k) = \mathbb{A}(k)' \mathcal{T}(k+1)$, e assim

$$\mathcal{T}(t) = \left(\prod_{k=T-1}^t \mathbb{A}(k)' \right) \mathbb{L}', \tag{4.31}$$

lembrando que $\mathcal{T}(T) = \mathbb{L}'$. Segue que:

$$d = \mu(0)' \mathcal{T}(0) = \mathcal{T}(0)' \mu(0) = \mathbb{L} \left(\prod_{k=0}^{T-1} \mathbb{A}(k) \right) \mu(0) = a$$

demonstrando a primeira identidade.

A partir de (4.31) temos que $b = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{T-1} \mathcal{T}(t+1)' \mathbb{V}(t)$. Manipulando, obtemos $\mathcal{T}(t+1)' \mathbb{V}(t) = \pi(t)' v(t)$ onde $v(t) \in \mathbb{R}^N$ é definido como

$$v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_N(t) \end{pmatrix}, \quad v_i(t) = \mathcal{H}_i(t, V(t+1))' \mathcal{R}_i(t, P(t+1))^\dagger \mathcal{H}_i(t, V(t+1)).$$

Por consequência, temos que

$$b = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{T-1} \pi(t)' v(t). \quad (4.32)$$

Por outro lado, fazendo $\delta(t)' = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) & \dots & \gamma_N(t) \end{pmatrix}$ obtemos um $\delta(t)$ que satisfaz à seguinte equação recursiva (ver (4.3) e (4.18))

$$\delta(t) = \mathbb{P}(t) \delta(t+1) - \frac{1}{4} v(t), \quad \delta(T) = 0.$$

Assim temos que

$$\delta(T-k) = -\frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^k \left(\prod_{s=\ell+1}^k \mathbb{P}(T-s) \right) v(T-\ell),$$

e em particular

$$\delta(0) = -\frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^T \left(\prod_{s=\ell+1}^T \mathbb{P}(T-s) \right) v(T-\ell). \quad (4.33)$$

Lembrando que $\pi(k+1)' = \pi(k)' \mathbb{P}(k)$ temos

$$\pi(k+1)' = \pi(0)' \prod_{\ell=k}^0 \mathbb{P}(\ell). \quad (4.34)$$

Combinando as equações (4.32), (4.33), (4.34) e da definição de e temos que

$$\begin{aligned}
 e &= \pi(0)' \delta(0) = -\frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^T \pi(0)' \left(\prod_{s=\ell+1}^T \mathbb{P}(T-s) \right) v(T-\ell) \\
 &= -\frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^T \pi(0)' \left(\prod_{s=T-\ell-1}^0 \mathbb{P}(s) \right) v(T-\ell) \\
 &= -\frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^T \pi(T-\ell)' v(T-\ell) \\
 &= -\frac{1}{4} \sum_{k=0}^{T-1} \pi(k)' v(k) = -\frac{1}{2} b.
 \end{aligned}$$

demonstrando a segunda identidade. ■

4.3 Fórmula Explícita para a Média e Variância

Nesta seção apresentamos a fórmula explícita para $E(y^u(T))$ e $Var(y^u(T))$ em termos de λ , a , b , c quando a estratégia de controle (4.21) é aplicada ao sistema (3.3).

PROPOSIÇÃO 8 *Suponha que a estratégia de controle (4.21) seja aplicada ao sistema (3.3). Então*

$$E(y^u(T)) = a + \frac{\lambda}{\nu} b, \quad (4.35)$$

$$Var(y^u(T)) = c - a^2 - \left(\frac{\lambda}{\nu} \right) \left(\frac{b}{2} \right) \left[4a - \left(\frac{\lambda}{\nu} \right) (1 - 2b) \right]. \quad (4.36)$$

Prova. Aplicando a lei de controle (4.21) em (3.3) temos que

$$\begin{aligned}
 x^u(k+1) &= \left(A_{\theta(k)}^{cl}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \left(\tilde{A}_{\theta(k),s}(k) w_s^x(k) - \tilde{B}_{\theta(k),s}(k) K_{\theta(k)}(k) w_s^u(k) \right) \right) x^u(k) + \\
 &\quad \frac{\lambda}{2\nu} \left(\bar{B}_{\theta(k)}(k) + \sum_{s=1}^{\varepsilon} \tilde{B}_{\theta(k),s}(k) w_s^u(k) \right) U_{\theta(k)}(k).
 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Definindo $z_i^u(k) = x^u(k)1_{\{\theta(t)=i\}}$ e $\mu_i(k) = E(z_i^u(k))$, $\mu(k)' = (\mu_1(k) \cdots \mu_N(k))$, e a partir de Costa *et al.* (2005) temos

$$\mu_j(k+1) = \sum_{i=1}^N p_{ij}(k) A_i^{cl}(k) \mu_i(k) + \frac{\lambda}{2\nu} \sum_{i=1}^N p_{ij}(k) \pi_i(k) \bar{B}_i(k) U_i(k),$$

ou, em outras palavras,

$$\mu(k+1) = \mathbb{A}(k) \mu(k) + \frac{\lambda}{2\nu} \mathbb{V}(k). \quad (4.38)$$

Iterando (4.38) temos que

$$\mu(k) = \left(\prod_{\ell=0}^{k-1} \mathbb{A}(\ell) \right) \mu(0) + \frac{\lambda}{2\nu} \sum_{t=0}^{k-1} \left(\prod_{\ell=t+1}^{k-1} \mathbb{A}(\ell) \right) \mathbb{V}(t). \quad (4.39)$$

A partir de (4.39) temos que

$$\begin{aligned} E(y^u(T)) &= E\left(\sum_{i=1}^N L_i z_i^u(T)\right) = \sum_{i=1}^N L_i E(z_i^u(T)) = \sum_{i=1}^N L_i \mu_i(T) = \mathbb{L} \mu(T) \\ &= \mathbb{L} \left(\prod_{\ell=0}^{T-1} \mathbb{A}(\ell) \right) \mu(0) + \frac{\lambda}{2\nu} \sum_{t=0}^{T-1} \mathbb{L} \left(\prod_{\ell=t+1}^{T-1} \mathbb{A}(\ell) \right) \mathbb{V}(t) \\ &= a + \frac{\lambda}{\nu} b, \end{aligned}$$

demonstrando (4.35). Para demonstrar (4.36) observe em (4.20) que,

$$\begin{aligned} E(\nu y^u(T)^2 - \lambda y^u(T)) &= E\left(\nu x(0)' P_{\theta(0)}(0) x(0) - \lambda V_{\theta(0)}(0) x(0) + \frac{\lambda^2}{\nu} \gamma_{\theta(0)}(0)\right) \\ &= \nu \sum_{i=1}^N \text{tr}(P_i(0) Q_i(0)) - \lambda \sum_{i=1}^N V_i(0) \mu_i(0) \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{\nu} \sum_{i=1}^N \pi_i(0) \gamma_i(0) = \nu c - \lambda d + \frac{\lambda^2}{\nu} e. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Portanto, de (4.35) e (4.40) temos que

$$\begin{aligned}
 Var(y^u(T)) &= E(y^u(T)^2) - E(y^u(T))^2 \\
 &= \frac{1}{\nu} \left\{ \nu E(y^u(T)^2) - \lambda E(y^u(T)) + \lambda E(y^u(T)) - \nu E(y^u(T))^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{\nu} \left\{ \nu c - \lambda d + \frac{\lambda^2}{\nu} e + \left(\lambda - \nu \left(a + \frac{\lambda}{\nu} b \right) \right) \left(a + \frac{\lambda}{\nu} b \right) \right\} \\
 &= c - a^2 - \left(\frac{\lambda}{\nu} \right) \left(\frac{b}{2} \right) \left[\frac{2(d-a)}{b} + 4a - \left(\frac{\lambda}{\nu} \right) \left(2 \left(1 + \frac{e}{b} - b \right) \right) \right]
 \end{aligned}$$

e (4.36) é demonstrado a partir das identidades $a = d$ e $e = -\frac{1}{2}b$ estabelecidas na Proposição 7. ■

4.4 Condições Suficientes e Solução para os Problemas $P1(\sigma^2)$, $P2(\epsilon)$ e $P3(\nu)$

O teorema a seguir fornece as condições suficientes para a existência de uma estratégia ótima de controle para os problemas $P3(\nu)$, $P1(\sigma^2)$ e $P2(\epsilon)$. Esse mesmo teorema também fornece a fronteira eficiente, isto é, uma equação relacionando $Var(y^u(T))$ e $E(y^u(T))$ quando uma lei de controle ótimo u é aplicada para esses problemas.

Inicialmente, apresentamos os seguintes resultados (ver Li e Ng (2000)).

PROPOSIÇÃO 9 *Seja $u \in \Pi(A(\lambda, \nu))$. Se $\lambda = 1 + 2\nu E(y^u(T))$ então $u \in \Pi(P3(\nu))$.*

PROPOSIÇÃO 10 *Suponha que $\nu > 0$ e $u \in \Pi(P3(\nu))$.*

- a) Se $Var(y^u(T)) = \sigma^2$ então $u \in \Pi(P1(\sigma^2))$.*
- b) Se $E(y^u(T)) = \epsilon$ então $u \in \Pi(P2(\epsilon))$.*

O principal resultado deste estudo está a seguir.

TEOREMA 2 *Se (4.19) é válido para cada $k = 0, \dots, T-1$ e $0 < b < \frac{1}{2}$ então uma estratégia ótima de controle para o problema $P3(\nu)$ é dado por (4.23) com*

$$\lambda = \frac{1 + 2\nu a}{1 - 2b}. \quad (4.41)$$

A mesma lei de controle é ótima para os problemas $P1(\sigma^2)$ e $P2(\epsilon)$, com ν dado por

$$\nu = \begin{cases} \sqrt{\frac{b}{2a^2 - 2(1-2b)(c-\sigma^2)}} & \text{para o problema } P1(\sigma^2) \\ \frac{b}{\epsilon(1-2b)-a} & \text{para o problema } P2(\epsilon) \end{cases}$$

desde que $\sigma^2 > c - \frac{a^2}{1-2b}$ para o problema $P1(\sigma^2)$ e $\epsilon > \frac{a}{1-2b}$ para o problema $P2(\epsilon)$. A fronteira eficiente é dada pela equação de hipérbole

$$Var(y(T)) = \left(c - \frac{a^2}{1-2b}\right) + \frac{(1-2b)}{2b} \left(E(y(T)) - \frac{a}{1-2b}\right)^2. \quad (4.42)$$

Prova. Suponha que (4.19) seja válido para cada $k = 0, \dots, T-1$ and $0 < b < \frac{1}{2}$. A partir da Proposição 6 precisamos encontrar u^λ de forma a minimizar $\mathcal{C}(u^\lambda)$. De acordo com (4.35) e (4.36) temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(u^\lambda) &= \nu Var(y^u(T)) - E(y^u(T)) \\ &= \nu \left\{ c - a^2 - \left(\frac{\lambda}{\nu}\right) \left(\frac{b}{2}\right) \left[4a - \left(\frac{\lambda}{\nu}\right) (1-2b) \right] \right\} - \left\{ a + \frac{\lambda}{\nu} b \right\}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Assim temos que encontrar λ de forma que minimize (4.43). Fazendo a primeira derivada em λ obtemos:

$$\frac{d\mathcal{C}(u^\lambda)}{d\lambda} = -b(2a + \frac{1}{\nu}) + \frac{\lambda}{\nu} b(1-2b) \quad (4.44)$$

e assim (4.41) deve ser válido. Fazendo a segunda derivada em λ obtemos:

$$\frac{d^2\mathcal{C}(u^\lambda)}{d\lambda^2} = \frac{b}{\nu}(1-2b) > 0 \quad (4.45)$$

e assim (4.41) é na realidade um mínimo para $\mathcal{C}(u^\lambda)$. A partir da Proposição 6, $u^\lambda \in \Pi(P3(\nu))$.

Para o problema $P1(\sigma^2)$, a partir da Proposição 10 e (4.36) temos que ν deve satisfazer a seguinte equação

$$\sigma^2 = Var(y^{u^\lambda}(T)) = c - \frac{a^2}{(1-2b)} + \frac{b}{2\nu^2(1-2b)}, \quad (4.46)$$

e assim, pela hipótese de que $\sigma^2 > c - \frac{a^2}{1-2b}$, temos que a igualdade acima é satisfeita com $\nu = \sqrt{\frac{b}{2a^2 - 2(1-2b)(c-\sigma^2)}}$.

Para o problema $P2(\epsilon)$ temos a partir da Proposição 10 e (4.35) que ν deve satisfazer a

$$\epsilon = E\left(y^{u^\lambda}(T)\right) = \frac{a\nu + b}{\nu(1-2b)}, \quad (4.47)$$

e assim, da hipótese de que $\epsilon > \frac{a}{1-2b}$, temos que a igualdade acima é satisfeita com $\nu = \frac{b}{\epsilon(1-2b)-a}$. Finalmente, pela combinação de (4.35) e (4.36) e eliminando o parâmetro ν , temos (4.42), completando a prova. ■

Capítulo 5

Modelos de Otimização de Carteiras de Investimento e ALM de Fundos de Pensão com Saltos Markovianos

5.1 Preliminares

Problemas de gestão de carteiras de investimento podem ser considerados como decisões multi-períodos no tempo, em que as transações ou alocações ocorrem em instantes no tempo discreto. Em cada um desses instantes, o gestor da carteira necessita avaliar as condições de mercado e a diversificação de sua carteira. Em sua decisão, o gestor necessita incorporar novas informações e expectativas futuras atualizadas, além de possibilidades de alavancagem financeira e venda de ativos. Assim, as execuções de transações estão sujeitas a um intenso fluxo de informações a cada instante no tempo. Dessa forma, a idéia otimização através de programação estocástica se assemelha muito com a dinâmica do gerenciamento de investimentos e ativos de uma carteira.

A seleção de ativos (*assets*) - ou investimentos - de forma apropriada para a melhor obtenção de retornos ou para assegurar o compromisso de passivos (*liabilities*) - ou pagamentos - é um conceito já muito utilizado ao longo do tempo, principalmente por instituições financeiras bancárias e que pode ser encontrada na literatura econômica financeira por outros termos como imunização ou *hedging*. A modelagem do que atualmente se de-

nomina por *asset liability management* (ALM) para fundos de pensão nada mais é do que a formalização dessas mesmas idéias utilizando modelos matemáticos.

Além disso, a modelagem de ALM para fundos de pensão também se baseia nas idéias originais da teoria de carteiras de Markowitz (1959) já que em ALM sempre se desejou maximizar o retorno em investimentos e minimizar o risco. A teoria de carteiras de otimização por média-variância proposta por Markowitz se tornou a base para a análise em um período do tempo (ou de forma "estática") de carteiras, e ao longo dos anos, as abordagens multi-período também se desenvolveram baseadas nas mesmas idéias mas levando em conta a dinâmica das variáveis ao longo do tempo. Como as modelagens de ALM devem levar em conta um horizonte de tempo de longo prazo, esse estudo considera uma extensão do modelo de média-variância multi-período proposto por Li e Ng (2000).

Os fundos de pensão normalmente são classificados pela literatura em dois tipos: planos de benefício definido e planos de contribuição definida (ver Cairns (2004)). Estes dois tipos de planos são comuns em países como Canadá, EUA, Reino Unido e Austrália. A diferença básica está no fato de que nos planos de benefício definido o risco é em sua maior parte assumido pelo empregador (ou patrocinador) enquanto que nos planos de contribuição definida o risco é assumido pelo próprio participante (empregado ou contribuinte).

Os fundos de pensão de benefício definido (BD) proporcionam aos contribuintes benefícios em termos de uma porcentagem do salário final do contribuinte durante um prazo definido. Nesse plano, após a aposentadoria do contribuinte, o benefício não depende do desempenho do investimento passado. Os modelos apresentados na literatura levam em conta principalmente o risco associado ao nível de ativos, uma vez que esse nível deve garantir a aposentadoria futura desejada. Dessa forma, as variáveis que podem afetar, entre outras, são a estratégia e período de amortização (ou período de acúmulo), estratégia de alocação de ativos, crescimento do salário e inflação - uma vez que os benefícios tem como objetivo proporcionar em parte o nível de renda de antes da aposentadoria.

Por outro lado, nos fundos de pensão de contribuição definida (CD), os benefícios na aposentadoria não são dependentes do nível do salário final e sim do nível de contribuições que foram realizadas e dos retornos obtidos, movendo dessa forma o risco para o participante do fundo. Enquanto em um fundo de BD o administrador do fundo tem a possibilidade de "suavizar" os retornos ao longo dos anos, no caso de fundos de contribuição definida os contribuintes estão sujeitos às variações e oscilações ao longo do

tempo.

O objetivo das próximas seções é o de formular problemas de otimização de carteiras de investimento e ALM como problemas de controle ótimo, conforme definidos nos capítulos 3 e 4.

5.2 Modelo uni-período de Média-Variância

A seguir, apresentaremos o modelo de otimização de carteiras de Markowitz denominado aqui de modelo uni-período e que será utilizado para comparação dos modelos com saltos markovianos e ruídos multiplicativos desenvolvidos neste estudo. Denominamos o modelo de Markowitz descrito aqui de uni-período pelo fato de considerar apenas um período de tempo como horizonte para o problema de otimização. Um desenvolvimento mais extenso e formal pode ser encontrado em Costa e Assunção (2005), de onde a seguinte dedução foi baseada. Inicialmente, iremos considerar apenas carteiras com ativos de risco. Considere uma carteira com retorno P composta por n ativos com retornos $R_1, \dots, R_n$, retorno esperado $r_1, \dots, r_n$ e matriz de covariância Σ . Investe-se uma proporção ω_i no ativo com retorno R_i , de modo que:

$$P = \sum_{i=1}^n \omega_i R_i, \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

com a seguinte notação vetorial:

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = E(R) = \begin{pmatrix} E(R_1) \\ \vdots \\ E(R_n) \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \text{cov}(R) = E((R - r)(R - r)').$$

Segue que a média do retorno P , denotada por μ é dada por

$$\mu = E(P) = E(\omega' R) = \omega' E(R) = \omega' r$$

e a variância de P , denotada por σ^2 , é dada por

$$\sigma^2 = \omega' \Sigma \omega.$$

Deseja-se resolver o seguinte problema de otimização. Para um dado valor de μ (rentabilidade desejada) temos:

$$\min \omega' \Sigma \omega \tag{5.1}$$

sujeito a

$$\omega' r = \mu$$

$$\omega' e = 1$$

$$\omega \in \mathbb{R}^n.$$

Assume-se que $\Sigma > 0$ e que r não é múltiplo de e ($r \neq ae$). Definem-se as seguintes variáveis:

$$\alpha = e' \Sigma^{-1} e \tag{5.2}$$

$$\gamma = r' \Sigma^{-1} r \tag{5.3}$$

$$\psi = e' \Sigma^{-1} r \tag{5.4}$$

$$\delta = \alpha \gamma - \psi^2. \tag{5.5}$$

TEOREMA 3 *A solução do problema de média-variância (5.1) é dada por*

$$\omega = h\mu + g, \tag{5.6}$$

em que h e g , não-dependentes de μ , são dados por,

$$h = \frac{\alpha}{\delta} \Sigma^{-1} r - \frac{\psi}{\delta} \Sigma^{-1} e \tag{5.7}$$

$$g = \frac{\gamma}{\delta} \Sigma^{-1} e - \frac{\psi}{\delta} \Sigma^{-1} r. \tag{5.8}$$

Prova. Ver Costa e Assunção (2005), pg. 20. ■

Para o caso com a presença de um ativo livre de risco, temos como anteriormente, ω representando o vetor de pesos dos ativos de risco, com a ressalva de que neste caso o somatório dos seus elementos não precisa valer 1, pois introduzimos um ativo livre de risco, cujo retorno sera dado por r_f . Analogamente ao que foi apresentado na subseção anterior e considerando $r \neq r_f e$, deseja-se resolver o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & \omega' \Sigma \omega \\ \text{sujeito a} \quad & \\ & \omega' r + (1 - \omega' e) r_f = \mu \\ & \omega \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{5.9}$$

TEOREMA 4 *A solução do problema de média-variância (5.9) é dada por*

$$\omega = \frac{(\mu - r_f)}{(r - r_f e)' \Sigma^{-1} (r - r_f e)} \Sigma^{-1} (r - r_f e). \tag{5.10}$$

Prova. Ver Costa e Assunção (2005), pg. 32. ■

5.3 Modelo de Otimização de Carteiras de Investimento com Ativos de Risco e *Benchmark*

Nesta seção apresentamos um modelo de otimização de carteiras de investimentos com apenas ativos de risco e com o objetivo de atingir um *benchmark* no período final. Como premissa iremos considerar que os parâmetros de mercado dependem do modo de mercado, que por sua vez varia de acordo com uma cadeia de Markov com um número finito de estados. Assim, esse problema é definido como um problema de controle ótimo linear-quadrático (LQ) com saltos markovianos e ruídos multiplicativos com custos lineares e quadráticos de modo que os resultados da seção 4.3 poderão ser aplicados.

Iremos considerar um modelo financeiro em que existem n ativos de risco representados pelo vetor aleatório de preços $S(t) \in \mathbb{R}^n$. Os componentes de $S(t)$ serão representados

por $S_\ell(t)$, $\ell = 1, \dots, n$, isto é,

$$S(t) = \begin{pmatrix} S_1(t) \\ \vdots \\ S_n(t) \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Seja $\{\theta(t); t = 0, 1, \dots, T-1\}$ uma cadeia de Markov com valores em um conjunto finito $\{1, \dots, N\}$ com matriz de probabilidade de transição $\mathbb{P} = [p_{ij}]$. O parâmetro $\theta(t)$ irá caracterizar o modo de mercado no instante t e definir como os preços variam do tempo t até $t+1$.

Assumiremos uma sequência de valores $\{B(t); t = 0, \dots, T-1\}$ como um *benchmark* para a carteira de investimentos. Para $\ell = 1, \dots, n$, as seguintes equações recursivas da evolução de $S(t)$ e $B(t)$ são verdadeiras:

$$S_\ell(t+1) = R_{\theta(t), \ell}(t) S_\ell(t) \quad (5.12)$$

$$B(t+1) = R_{\theta(t), n+1}(t) B(t) \quad (5.13)$$

onde os vetores de retorno, para $i = 1, \dots, N$,

$$R_i(t) = \begin{pmatrix} R_{i,1}(t) \\ \vdots \\ R_{i,n+1}(t) \end{pmatrix}$$

podem ser decompostos por

$$R_i(t) = \eta_i(t) + \Sigma_i(t) w^S(t), \quad (5.14)$$

onde $\Sigma(t) = (\Sigma_1(t), \dots, \Sigma_N(t)) \in \mathbb{H}^{(n+1)+}$ para cada $t = 0, \dots, T-1$, $\{w^S(t); t = 0, \dots, T-1\}$ são vetores aleatórios independentes de média nula e $(n+1)$ -dimensionais com matriz de covariância igual à matriz identidade e independentes da cadeia de Markov $\{\theta(t); t = 0, 1, \dots, T-1\}$. Os vetores $\eta_i(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ são determinísticos para cada $t = 0, \dots, T-1$, $i = 1, \dots, N$.

Iremos denotar para $i = 1, \dots, N$,

$$\Sigma_i(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{i,1,1}(t) & \cdots & \sigma_{i,1,n+1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{i,n+1,1}(t) & \cdots & \sigma_{i,n+1,n+1}(t) \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

$$\eta_i(t) = \begin{pmatrix} \eta_{i,1}(t) \\ \vdots \\ \eta_{i,n+1}(t) \end{pmatrix}, \quad w^S(t) = \begin{pmatrix} w_1^S(t) \\ \vdots \\ w_{n+1}^S(t) \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Denote por $\Sigma_i^s(t)$ a s -ésima coluna da matriz $\Sigma_i(t)$. É conveniente fazer a seguinte decomposição:

$$R_i(t) = \begin{pmatrix} R_{i,1}(t) \\ \widehat{R}_i(t) \\ R_{i,n+1}(t) \end{pmatrix}, \quad \eta_i(t) = \begin{pmatrix} \eta_{i,1}(t) \\ \widehat{\eta}_i(t) \\ \eta_{i,n+1}(t) \end{pmatrix}, \quad \Sigma_i^s(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{i,1,s}(t) \\ \widehat{\Sigma}_i^s(t) \\ \sigma_{i,n+1,s}(t) \end{pmatrix}.$$

Seja $U_\ell(t)$ o montante de riqueza investido no ativo de risco ℓ no instante t . Podemos escrever

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ \widehat{U}(t) \end{pmatrix}, \quad \widehat{U}(t) = \begin{pmatrix} U_2(t) \\ \vdots \\ U_n(t) \end{pmatrix}.$$

e representar por $X^U(t)$ o valor da carteira associada à estratégia de investimento U (por simplicidade o índice U será omitido quando não houver confusão). Considere que e representa o vetor $n-1$ dimensional com valores unitários em seus elementos. Temos que

$$X(t) = U_1(t) + \widehat{U}(t)'e$$

e considerando estratégias auto financiáveis, temos que

$$X(t+1) = R_{\theta(t),1}(t)U_1(t) + \widehat{R}_{\theta(t)}(t)'\widehat{U}(t), \quad (5.17)$$

levando a:

$$X(t+1) = R_{\theta(t),1}(t)X(t) + \widehat{P}_{\theta(t)}(t)' \widehat{U}(t) \quad (5.18)$$

onde para cada $i = 1, \dots, N$, $\widehat{P}_i(t) = \widehat{R}_i(t) - R_{i,1}(t)e$. Considere $\mathcal{F}_t$ o σ -campo gerado pelas variáveis aleatórias $\{(\theta(k), X(k), B(k)); k = 0, \dots, t\}$. Para cada k queremos encontrar a variável de controle $\widehat{U}(k)$, $\mathcal{F}_k$ mensurável, de forma a maximizar $E(X(T) - B(T))$ que é o erro de rastreamento no instante final, sujeita à restrição na variância final $Var(X(T) - B(T)) \leq \sigma^2$, onde σ^2 é uma entrada dada correspondendo ao risco máximo admissível. Considere

$$x(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ B(t) \end{pmatrix}, \quad u(t) = \widehat{U}(t). \quad (5.19)$$

Definimos para $i = 1, \dots, N$,

$$\bar{A}_i(t) = \begin{pmatrix} \eta_{i,1}(t) & 0 \\ 0 & \eta_{i,n+1}(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_i(t) = \begin{pmatrix} (\widehat{\eta}_i(t) - \eta_{i,1}(t)e)' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

e para $s = 1, \dots, n+1$,

$$\tilde{A}_{i,s}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{i,1,s}(t) & 0 \\ 0 & \sigma_{i,n+1,s}(t) \end{pmatrix}, \quad w_s^x(t) = w_s(t), \quad (5.21)$$

$$\tilde{B}_{i,s}(t) = \begin{pmatrix} (\widehat{\Sigma}_i^s(t) - \sigma_{i,1,s}(t)e)' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_s^u(t) = w_s(t). \quad (5.22)$$

Temos de (5.13), (5.18), (5.19), (5.20), (5.21) e (5.22) que

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \left(\bar{A}_{\theta(t)}(t) + \sum_{s=1}^{n+1} \tilde{A}_{\theta(t),s}(k) w_s^x(t) \right) x(t) + \left(\bar{B}_{\theta(t)}(t) + \sum_{s=1}^{n+1} \tilde{B}_{\theta(t),s}(k) w_s^u(t) \right) u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

e portanto o problema pode ser reescrito como em (3.3) e (3.5).

5.4 Modelo de Otimização de Carteiras de Investimento com Ativo Livre de Risco e *Benchmark*

Nesta seção iremos inserir a presença de um ativo livre de risco no universo de ativos da carteira de investimento.

Iremos considerar um modelo financeiro em que existem um ativo livre de risco RF e $n - 1$ ativos de risco representados pelo vetor aleatório de preços $S(t) \in \mathbb{R}^n$. Os componentes de $S(t)$ serão representados por $S_\ell(t)$, $\ell = 1, \dots, n$ e iremos considerar $\ell = 1 = RF$, isto é,

$$S(t) = \begin{pmatrix} S_{RF}(t) \\ S_2(t) \\ \vdots \\ S_n(t) \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Novamente, seja $\{\theta(t); t = 0, 1, \dots, T - 1\}$ uma cadeia de Markov com valores em um conjunto finito $\{1, \dots, N\}$ com matriz de probabilidade de transição $\mathbb{P} = [p_{ij}]$.

Assumiremos também uma sequência de valores $\{B(t); t = 0, \dots, T - 1\}$ como um *benchmark* para a carteira de investimentos e para $\ell = 1, \dots, n$, as seguintes equações recursivas da evolução de $S(t)$ e $B(t)$ são verdadeiras:

$$S_\ell(t + 1) = R_{\theta(t), \ell}(t) S_\ell(t) \quad (5.24)$$

$$B(t + 1) = R_{\theta(t), n+1}(t) B(t) \quad (5.25)$$

com o vetor

$$R_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} R_{\theta(t), RF}(t) \\ R_{\theta(t), 2}(t) \\ \vdots \\ R_{\theta(t), n+1}(t) \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

decomposto como

$$R_{\theta(t)}(t) = \eta_{\theta(t)}(t) + \Sigma_{\theta(t)}(t) w^S(t) \quad (5.27)$$

onde $\Sigma(t) = (\Sigma_1(t), \dots, \Sigma_N(t)) \in \mathbb{H}^{(n+1)+}$ para cada $t = 0, \dots, T - 1$, $\{w^S(t); t = 0, \dots, T - 1\}$ são vetores aleatórios independentes de média nula e $(n + 1)$ -dimensionais

com matriz de covariância igual à matriz identidade e independentes da cadeia de Markov $\{\theta(t); t = 0, 1, \dots, T-1\}$. Os vetores $\eta_i(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ são determinísticos para cada $t = 0, \dots, T-1$, $i = 1, \dots, N$.

Vamos denotar para $i = 1, \dots, N$,

$$\Sigma_i(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{i,2,2}(t) & \cdots & \sigma_{i,2,n+1}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \sigma_{i,n+1,2}(t) & \cdots & \sigma_{i,n+1,n+1}(t) \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

$$\eta_i(t) = \begin{pmatrix} \eta_{i,RF}(t) \\ \eta_{i,2}(t) \\ \vdots \\ \eta_{i,n+1}(t) \end{pmatrix}, \quad w^S(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ w_2^S(t) \\ \vdots \\ w_{n+1}^S(t) \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Denote por $\Sigma_i^s(t)$ a s -ésima coluna da matriz $\Sigma_i(t)$. É conveniente fazer a seguinte decomposição:

$$R_i(t) = \begin{pmatrix} R_{i,RF}(t) \\ \widehat{R}_i(t) \\ R_{i,n+1}(t) \end{pmatrix}, \quad \eta_i(t) = \begin{pmatrix} \eta_{i,RF}(t) \\ \widehat{\eta}_i(t) \\ \eta_{i,n+1}(t) \end{pmatrix}, \quad \Sigma_i^s(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{\Sigma}_i^s(t) \\ \sigma_{i,n+1,s}(t) \end{pmatrix}.$$

Seja $U_\ell(t)$ o montante de riqueza investido no ativo de risco ℓ no instante t . Podemos escrever

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_{RF}(t) \\ \widehat{U}(t) \end{pmatrix}, \quad \widehat{U}(t) = \begin{pmatrix} U_2(t) \\ \vdots \\ U_n(t) \end{pmatrix}.$$

e representar por $X^U(t)$ o valor da carteira associada à estratégia de investimento U . Lembrando que e representa o vetor $n-1$ dimensional com valores unitários em seus elementos, temos que

$$X(t) = U_{RF}(t) + \widehat{U}(t)'e$$

e considerando estratégias auto financiáveis temos que

$$X(t+1) = R_{\theta(t), RF}(t)U_{RF}(t) + \widehat{R}_{\theta(t)}(t)' \widehat{U}(t), \quad (5.30)$$

levando a:

$$X(t+1) = R_{\theta(t), RF}(t)X(t) + \widehat{P}_{\theta(t)}(t)' \widehat{U}(t) \quad (5.31)$$

onde para cada $i = 1, \dots, N$, $\widehat{P}_i(t) = \widehat{R}_i(t) - R_{i, RF}(t)e$. Considere $\mathcal{F}_t$ o σ -campo gerado pelas variáveis aleatórias $\{(\theta(k), X(k), B(k)); k = 0, \dots, t\}$.

Para cada k queremos encontrar a variável de controle $\widehat{U}(k)$, $\mathcal{F}_k$ mensurável, de forma a minimizar $\nu Var(X(T) - B(T)) - E(X(T) - B(T))$ onde $\nu \in (0, \infty)$ é o parâmetro de entrada para este problema e pode ser interpretado como um coeficiente de aversão ao risco, permitindo uma preferência de equilíbrio (*trade-off*) entre a esperança final de saída e o nível de risco admissível para o erro de rastreamento. Considere

$$x(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ B(t) \end{pmatrix}, \quad u(t) = \widehat{U}(t). \quad (5.32)$$

Definimos para $i = 1, \dots, N$,

$$\bar{A}_i(t) = \begin{pmatrix} \eta_{i, RF}(t) & 0 \\ 0 & \eta_{i, n+1}(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_i(t) = \begin{pmatrix} (\widehat{\eta}_i(t) - \eta_{i, RF}(t)e)' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

e para $s = 1, \dots, n+1$,

$$\tilde{A}_{i,s}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{i, n+1, s}(t) \end{pmatrix}, \quad w_s^x(t) = w_s(t), \quad (5.34)$$

$$\tilde{B}_{i,s}(t) = \begin{pmatrix} (\widehat{\Sigma}_i^s(t)e)' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_s^u(t) = w_s(t). \quad (5.35)$$

Temos de (5.25), (5.31), (5.32), (5.33), (5.34) e (5.35) que

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \left(\bar{A}_{\theta(t)}(t) + \sum_{s=1}^{n+1} \tilde{A}_{\theta(t), s}(k) w_s^x(t) \right) x(t) + \left(\bar{B}_{\theta(t)}(t) + \sum_{s=1}^{n+1} \tilde{B}_{\theta(t), s}(k) w_s^u(t) \right) u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

e portanto o problema pode ser reescrito como em (3.3) e (3.7).

5.5 Modelo de ALM para Fundos de Pensão

Nesta seção apresentamos um modelo de otimização de *asset liability management* (ALM) para fundos de pensão com mudança de regime. Novamente como premissa devemos considerar que os parâmetros de mercado dependem do modo de mercado que varia de acordo com uma cadeia de Markov com um número finito de estados.

Iremos considerar um modelo financeiro em que existem um ativo livre de risco RF e $n - 1$ ativos de risco representados pelo vetor aleatório de preços $S(t) \in \mathbb{R}^n$ como em (5.23).

Assumiremos uma sequência de valores $\{D(t); t = 0, \dots, T - 1\}$ que pode representar um fluxo líquido de riqueza, ou seja, o total de saques ou benefícios pagos menos o total de aportes ou contribuições recebidas em cada $t = 0, \dots, T - 1$, e uma sequência de valores de passivo $\{Y(t); t = 0, \dots, T - 1\}$.

Iremos considerar também que para cada $\ell = 1, \dots, n$, as seguintes equações recursivas da evolução de $S_\ell(t)$, $Y(t)$ e $D(t)$ são verdadeiras:

$$S_\ell(t + 1) = R_{\theta(t), \ell}(t) S_\ell(t), \quad (5.36)$$

$$Y(t + 1) = R_{\theta(t), n+1}(t) Y(t) - D(t), \quad (5.37)$$

$$D(t + 1) = R_{\theta(t), n+2}(t) D(t) \quad (5.38)$$

com o vetor

$$R_{\theta(t)}(t) = \begin{pmatrix} R_{\theta(t), RF}(t) \\ R_{\theta(t), 2}(t) \\ \vdots \\ R_{\theta(t), n+2}(t) \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

decomposto como

$$R_{\theta(t)}(t) = \eta_{\theta(t)}(t) + \Sigma_{\theta(t)}(t) w^S(t) \quad (5.40)$$

onde $\Sigma(t) = (\Sigma_1(t), \dots, \Sigma_N(t)) \in \mathbb{H}^{(n+2)+}$ para cada $t = 0, \dots, T - 1$, $\{w^S(t); t =$

$0, \dots, T-1$ são vetores aleatórios independentes de média nula e $(n+2)$ -dimensionais com matriz de covariância igual à matriz identidade e independentes da cadeia de Markov $\{\theta(t); t = 0, 1, \dots, T-1\}$. Os vetores $\eta_i(t) \in \mathbb{R}^{n+2}$ são determinísticos para cada $t = 0, \dots, T-1$, $i = 1, \dots, N$.

Vamos denotar para $i = 1, \dots, N$,

$$\Sigma_i(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{i,2,2}(t) & \cdots & \sigma_{i,2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \sigma_{i,n,2}(t) & \cdots & \sigma_{i,n,n}(t) \end{pmatrix}, \quad \eta_i(t) = \begin{pmatrix} \eta_{i,RF}(t) \\ \eta_{i,2}(t) \\ \vdots \\ \eta_{i,n}(t) \end{pmatrix}, \quad w^S(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ w_2^S(t) \\ \vdots \\ w_n^S(t) \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

Denote por $\Sigma_i^s(t)$ a s -ésima coluna da matriz $\Sigma_i(t)$. É conveniente fazer a seguinte decomposição:

$$R_i(t) = \begin{pmatrix} R_{i,RF}(t) \\ \widehat{R}_i(t) \\ R_{i,n+1}(t) \\ R_{i,n+2}(t) \end{pmatrix}, \quad \eta_i(t) = \begin{pmatrix} \eta_{i,RF}(t) \\ \widehat{\eta}_i(t) \\ \eta_{i,n+1}(t) \\ \eta_{i,n+2}(t) \end{pmatrix}, \quad \Sigma_i^s(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{\Sigma}_i^s(t) \\ \sigma_{i,n+1,s}(t) \\ \sigma_{i,n+2,s}(t) \end{pmatrix}.$$

Seja $U_\ell(t)$ o montante de riqueza investido no ativo ℓ . Podemos escrever

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_{RF}(t) \\ \widehat{U}(t) \end{pmatrix}, \quad \widehat{U}(t) = \begin{pmatrix} U_2(t) \\ \vdots \\ U_n(t) \end{pmatrix}.$$

e representar por $X^U(t)$ o valor da carteira associada à estratégia de investimento U . Lembrando que e representa o vetor $n-1$ dimensional valores unitários em seus elementos. Considerando que

$$X(t) - D(t) = U_{RF}(t) + \widehat{U}(t)'e$$

e que as estratégias são auto financiáveis, temos que

$$X(t+1) = R_{\theta(t),RF}(t)U_{RF}(t) + \widehat{R}_{\theta(t)}(t)'\widehat{U}(t),$$

levando a:

$$X(t+1) = R_{\theta(t), RF}(t)X(t) - R_{\theta(t), RF}(t)D(t) + \widehat{P}_{\theta(t)}(t)' \widehat{U}(t) \quad (5.42)$$

onde para cada $i = 1, \dots, N$, $\widehat{P}_i(t) = \widehat{R}_i(t) - R_{i,1}(t)e$. Considere $\mathcal{F}_t$ o σ -campo gerado pelas variáveis aleatórias $\{(\theta(k), X(k), Y(k), D(k)); k = 0, \dots, t\}$. Para cada k queremos encontrar a variável de controle $\widehat{U}(k)$ e $C(k)$, $\mathcal{F}_k$ mensurável de forma a minimizar $Var(X(T) - Y(T))$ sujeita à restrição na saída final $E(X(T) - Y(T)) \geq \epsilon$, onde ϵ é uma entrada para o retorno mínimo admissível. Considere

$$x(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ D(t) \end{pmatrix}, \quad u(t) = \widehat{U}(t). \quad (5.43)$$

Definimos para $i = 1, \dots, N$,

$$\bar{A}_i(t) = \begin{pmatrix} \eta_{i,RF}(t) & 0 & -\eta_{i,RF}(t) \\ 0 & \eta_{i,n+1}(t) & -1 \\ 0 & 0 & \eta_{i,n+2}(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_i(t) = \begin{pmatrix} (\widehat{\eta}_i(t) - \eta_{i,RF}(t)e)' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

e para $s = 1, \dots, n+2$,

$$\widetilde{A}_{i,s}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{i,n+1,s}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{i,n+2,s}(t) \end{pmatrix}, \quad w_s^x(t) = w_s(t), \quad (5.45)$$

$$\widetilde{B}_{i,s}(t) = \begin{pmatrix} (\widehat{\Sigma}_i^s(t)e)' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_s^u(t) = w_s(t). \quad (5.46)$$

Temos de (5.37), (5.38), (5.42), (5.43), (5.44), (5.45) e (5.46) que

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \left(\bar{A}_{\theta(t)}(t) + \sum_{s=1}^{n+2} \widetilde{A}_{\theta(t),s}(k) w_s^x(t) \right) x(t) + \left(\bar{B}_{\theta(t)}(t) + \sum_{s=1}^{n+2} \widetilde{B}_{\theta(t),s}(k) w_s^u(t) \right) u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

sendo que o problema pode ser reescrito como em (3.3) e (3.6).

Capítulo 6

Resultado das Simulações Numéricas

Neste capítulo são apresentadas as simulações numéricas para os três modelos de otimização apresentados no capítulo 5. Inicialmente, a seção 6.1 descreve as séries de dados selecionadas e os critérios considerados. Em seguida, a seção 6.2 descreve a metodologia e critérios para determinação dos valores de entrada, inclusive a criação dos *modos de operação* para a modelagem dos saltos markovianos. Por fim, as três últimas seções apresentam as simulações numéricas de cada um dos modelos das seções 5.3, 5.4 e 5.5, respectivamente, em conjunto com o modelo uni-período da seção 5.2 como comparação.

6.1 Séries de Dados

Neste estudo, foram consideradas algumas séries de dados financeiros para a realização das simulações numéricas que serão reapresentados resumidamente em cada aplicação nas seções seguintes. Aqui, iremos descrever algumas considerações e as séries efetivamente utilizadas. Foram considerados seis tipos de séries de dados: preços de ações, índices, taxa de juros, moeda, preço de commodities e taxa de desemprego.

Para as séries de preços de ações, selecionamos dez (10) ações representativas da Bovespa - Bolsa de Valores de São Paulo. O critério para seleção das ações foi o tamanho de mercado da empresa, sendo que como pré-requisito a ação deve apresentar liquidez relevante. Como tamanho de mercado da empresa consideramos o valor de capitalização

de mercado (*Market Capitalization*) em 31 de Dezembro de 2007 e como liquidez relevante consideramos um índice de liquidez no ano de 2007 maior que 1.0. Ambas as medidas, assim como as séries de dados foram coletadas no sistema Economática®.

As ações selecionadas estão listadas na Tabela 6.1 com os respectivos códigos de negociação na Bovespa. Sempre que houver referência aos códigos neste estudo, estará sendo considerada a ação em questão.

Tabela 6.1: Lista de ações selecionadas da Bovespa.

Código Bovespa	Empresa
PETR4	Petrobrás PN
VALE5	Cia. Vale do Rio Doce PNA
BBDC4	Bradesco PN
ITAU4	Itaú PN
AMBV4	Ambev PN
BBAS3	Banco do Brasil ON
UBBR11	Unibanco Units
ITSA4	Itausa PN
CSNA3	Cia. Siderúrgica Nacional ON
GGBR4	Gerdau PN

Os índices considerados neste estudo foram três (3), sendo cada um deles um indicador de mercados distintos. Como índice do mercado acionário brasileiro, selecionamos o índice Bovespa, da própria Bolsa de Valores de São Paulo, uma vez que é o indicador de referência no mercado local para se acompanhar o desempenho da bolsa de valores como um todo. Um outro índice considerado foi o índice de inflação oficial do Brasil representado pelo IPCA - Índice de Preços ao Consumidor. E por último, foi considerado um índice de renda fixa, que é um indicador da rentabilidade média de títulos de renda fixa no Brasil. As três séries de dados foram coletadas no sistema Economática®. Os índices selecionados estão listados na Tabela 6.2 com as respectivas siglas. Sempre que houver referência às siglas neste estudo, estará sendo considerado o índice em questão.

Tabela 6.2: Lista de índices de mercado.

Sigla	Descrição do Índice
IBOV	Índice Bovespa (Ibovespa)
IPCA	Índice de Preços ao Consumidor
IRFM	Índice de Renda Fixa

Como série de taxa de juros, foi considerada a série do CDI - Certificado de Depósito

Interbancário. Essa série será a única do estudo a ser considerada como ativo livre de risco. Apesar dessa série não representar exatamente um rendimento pré-fixado do ponto de vista rigoroso de expectativa de retorno em comparação ao horizonte de projeção das simulações numéricas, consideramos como um direcionador do retorno livre de risco por ser de fácil acesso e liquidez praticamente imediata. Os dados foram coletados no sistema Economática®.

Para a série de taxa cambial foi considerada a série de cotações do dólar americano em reais brasileiro, sendo considerada especificamente a cotação do tipo PTAX - oficial de venda da moeda. Já como série de preços de commodity, foi considerada a série de cotações do ouro. Ambas as séries de dados foram coletadas no sistema Economática®.

Por fim, para a série de taxas de desemprego foi considerada a variação do índice de desemprego calculado pelo IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, sendo a fonte dos dados o próprio IBGE.

As séries de taxa de juros, moeda, commodity e taxa de desemprego estão listados na Tabela 6.3 com as respectivas siglas. Sempre que houver referência às siglas neste estudo, estará sendo considerada a série em questão.

Tabela 6.3: Lista de séries financeiras adicionais.

Sigla	Descrição do Índice
CDI	Certificado de Depósito Interbancário
PTAX	Dólar EUA em Reais - Ptax Venda
OZ10000	Ouro
IBGE	Variação da taxa de Desemprego

6.2 Modos de Operação

Para a aplicação dos modelos de otimização apresentados no capítulo 5 é necessário se determinar o modo ou regime de mercado que o sistema se encontra em cada período. Dessa forma, é necessário se especificar parâmetros para cada modo de mercado.

A determinação dos parâmetros de cada modo de mercado foi realizada através de procedimento similar ao apresentado por Mcqueen e Thorley (1991) conforme descrito a

seguir. Aqui serão considerados retornos semanais das séries financeiras consideradas na seção 6.1.

Considere R_t o t -ésimo retorno de uma série temporal estacionária de T retornos e considere $\theta(t)$ o modo de mercado no instante t dado por:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } R_t \leq (\bar{R} - \sigma_R) \\ 2 & \text{para } (\bar{R} - \sigma_R) < R_t < (\bar{R} + \sigma_R) \\ 3 & \text{para } R_t \geq (\bar{R} + \sigma_R) \end{cases} \quad (6.1)$$

onde $\bar{R}$ é uma medida de retorno esperado e σ_R é o desvio-padrão de R , sendo ambos os parâmetros calculados para se dividir a série de dados em semanas de mercado em baixa ($\theta(t) = 1$), mercado em condições normais ($\theta(t) = 2$) e mercado em alta ($\theta(t) = 3$). Como medida de expectativa ex-ante de retorno ($\bar{R}$) foi considerado a média móvel simples de 12 semanas anteriores à semana testada, assim como o desvio-padrão móvel do mesmo período (σ_R).

Esse teste foi aplicado à série de retornos do Ibovespa para se determinar o modo de mercado no instante das observações. A janela de período para a coleta dos dados foi de 1º de Janeiro de 2003 a 30 de Outubro de 2008. Uma vez que o modo de mercado foi determinado pelo comportamento do Ibovespa na semana observada como sendo $\theta(t) = i$, os dados de todas as outras séries financeiras na mesma semana são considerados como sendo do mesmo cenário (ou modo) $\theta(t) = i$ definido.

A partir da separação dos dados em regimes de mercado, os elementos do vetor de retornos esperados $\eta_i(t)$ e da matriz de covariâncias $\Sigma_i^2(t)$ de cada estado de mercado $i = \{1, 2, 3\}$ são calculados para as n séries financeiras por:

$$\eta_{i,\ell} = \frac{1}{I_{i,\ell}} \sum_{k=1}^{I_{i,\ell}} R_{i,\ell,k} \text{ com } \ell = 1, \dots, n, \quad (6.2)$$

$$\Sigma_{i,s,p} = \frac{1}{I_{i,\ell} - 1} \sum_{k=1}^{I_{i,\ell}} (R_{i,s,k} - \eta_{i,s})(R_{i,p,k} - \eta_{i,p}) \text{ com } s = p = 1, \dots, n, \quad (6.3)$$

em que $I_{i,\ell}$ é o conjunto de retornos do ativo ℓ relacionado ao modo i e $R_{i,\ell,k}$ é a taxa de

retorno do ativo l calculada por

$$R_{i,\ell,k} = \ln\left(\frac{S_{i,\ell}(k)}{S_{i,\ell}(k-1)}\right), \quad k = 1, \dots, I_{i,\ell}. \quad (6.4)$$

Os elementos da matriz de probabilidades de transição $p_{i,j}$ são calculadas por

$$p_{i,j} = \frac{\sum_{t=2}^T \mathbb{M}_{i,j}(t)}{\sum_{t=2}^T \mathbb{M}_i(t)} \text{ com } i = j = 1, 2, 3, \quad (6.5)$$

em que

$$\mathbb{M}_{i,j}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } \theta(t) = j \text{ e } \theta(t-1) = i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.6)$$

e

$$\mathbb{M}_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } \theta(t-1) = i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.7)$$

com $t = 2, \dots, T$.

Os parâmetros calculados para cada série financeira e para cada modo de mercado conforme descrito nesta seção estão apresentados no Apêndice. Nas simulações seguintes, em cada caso serão apresentados os vetores η_i e matrizes $\Sigma_i^2(t)$ que serão utilizados.

6.3 Simulação de Carteiras com apenas Ativos de Risco para atingir um *Benchmark*

Nesta seção iremos aplicar o modelo apresentado na seção 5.3, ou seja, a simulação de carteiras de investimento com alocações em ativos de risco com o objetivo de se atingir um *benchmark* de mercado. Para isso, iremos considerar o universo de ativos de risco formado pelas dez ações da seção 6.1 e como *benchmark* iremos considerar o índice Ibovespa, descrito na mesma seção, sendo que os parâmetros de mercado seguem uma cadeia de Markov com $N = 3$ e definidos de acordo com a seção 6.2. Na tabela 6.4 temos a correspondência das variáveis do problema com as respectivas séries de dados utilizadas.

A seguir, temos os vetores de retornos médios semanais η_i e as matrizes de covariância Σ_i^2 de cada modo de mercado:

Tabela 6.4: Variáveis da simulação com ativos de risco.

Variável	Descrição
$\ell = 1$	Petrobrás PN
$\ell = 2$	Cia. Vale do Rio Doce PNA
$\ell = 3$	Bradesco PN
$\ell = 4$	Itaú PN
$\ell = 5$	Ambev PN
$\ell = 6$	Banco do Brasil ON
$\ell = 7$	Unibanco Units
$\ell = 8$	Itausa PN
$\ell = 9$	Cia. Siderúrgica Nacional ON
$\ell = 10$	Gerdau PN
$B(t)$	Ibovespa

$$\eta_1(t) = \begin{pmatrix} 0.9468 & 0.9527 & 0.9561 & 0.9537 & 0.9701 & 0.9504 & 0.9526 & 0.9541 & 0.9445 & 0.9389 & 0.9485 \end{pmatrix}' \quad (6.8)$$

$$\eta_2(t) = \begin{pmatrix} 1.0096 & 1.0095 & 1.0083 & 1.0078 & 1.0065 & 1.0076 & 1.0067 & 1.0098 & 1.0133 & 1.0114 & 1.0072 \end{pmatrix}' \quad (6.9)$$

$$\eta_3(t) = \begin{pmatrix} 1.0532 & 1.0424 & 1.0503 & 1.0521 & 1.0290 & 1.0619 & 1.0582 & 1.0519 & 1.0582 & 1.0637 & 1.0532 \end{pmatrix}' \quad (6.10)$$

$$\Sigma_1^2(t) = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 0.230971 & 0.112971 & 0.144071 & 0.148484 & 0.065418 & 0.183106 & 0.158630 & 0.141784 & 0.166605 & 0.196012 & 0.138171 \\ 0.112971 & 0.222624 & 0.104215 & 0.109928 & 0.034238 & 0.119946 & 0.131044 & 0.104901 & 0.209693 & 0.168421 & 0.092689 \\ 0.144071 & 0.104215 & 0.225783 & 0.223906 & 0.086881 & 0.157921 & 0.212857 & 0.216785 & 0.116460 & 0.106714 & 0.126868 \\ 0.148484 & 0.109928 & 0.223906 & 0.279108 & 0.108445 & 0.190634 & 0.230999 & 0.270746 & 0.159338 & 0.147661 & 0.140786 \\ 0.065418 & 0.034238 & 0.086881 & 0.108445 & 0.141622 & 0.077707 & 0.055698 & 0.116097 & 0.039206 & 0.058699 & 0.063057 \\ 0.183106 & 0.119946 & 0.157921 & 0.190634 & 0.077707 & 0.373502 & 0.181793 & 0.210417 & 0.226958 & 0.232814 & 0.170571 \\ 0.158630 & 0.131044 & 0.212857 & 0.230999 & 0.055698 & 0.181793 & 0.290919 & 0.220983 & 0.178512 & 0.131977 & 0.142626 \\ 0.141784 & 0.104901 & 0.216785 & 0.270746 & 0.116097 & 0.210417 & 0.220983 & 0.299932 & 0.175452 & 0.152140 & 0.147688 \\ 0.166605 & 0.209693 & 0.116460 & 0.159338 & 0.039206 & 0.226958 & 0.178512 & 0.299932 & 0.175452 & 0.452972 & 0.297894 \\ 0.196012 & 0.168421 & 0.106714 & 0.147661 & 0.058699 & 0.232814 & 0.131977 & 0.152140 & 0.297894 & 0.398567 & 0.164428 \\ 0.138171 & 0.092689 & 0.126868 & 0.140786 & 0.063057 & 0.170571 & 0.142626 & 0.147688 & 0.160470 & 0.164428 & 0.123599 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_2^2(t) = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 0.126542 & 0.028032 & 0.006440 & 0.001320 & 0.002570 & 0.006474 & 0.016219 & 0.005428 & 0.034818 & 0.027294 & 0.034231 \\ 0.028032 & 0.137791 & 0.013844 & 0.021797 & 0.006358 & 0.008462 & 0.027910 & 0.022160 & 0.068542 & 0.043989 & 0.029396 \\ 0.006440 & 0.013844 & 0.135411 & 0.090175 & 0.040339 & 0.056348 & 0.088246 & 0.081845 & 0.042254 & 0.058687 & 0.037933 \\ 0.001320 & 0.021797 & 0.090175 & 0.129229 & 0.043884 & 0.055284 & 0.093543 & 0.113624 & 0.023135 & 0.044294 & 0.032552 \\ 0.002570 & 0.006358 & 0.040339 & 0.043884 & 0.121247 & 0.015119 & 0.038684 & 0.036725 & 0.014100 & 0.027573 & 0.018697 \\ 0.006474 & 0.008462 & 0.056348 & 0.055284 & 0.015119 & 0.212056 & 0.052315 & 0.068888 & 0.020158 & 0.017790 & 0.036263 \\ 0.016219 & 0.027910 & 0.088246 & 0.093543 & 0.038684 & 0.052315 & 0.165141 & 0.086879 & 0.046314 & 0.044244 & 0.039302 \\ 0.005428 & 0.022160 & 0.081845 & 0.113624 & 0.036725 & 0.068888 & 0.086879 & 0.129366 & 0.025713 & 0.045735 & 0.036639 \\ 0.034818 & 0.068542 & 0.042254 & 0.023135 & 0.014100 & 0.020158 & 0.046314 & 0.025713 & 0.225820 & 0.089934 & 0.045952 \\ 0.027294 & 0.043989 & 0.058687 & 0.044294 & 0.027573 & 0.017790 & 0.044244 & 0.045735 & 0.089934 & 0.184889 & 0.045759 \\ 0.034231 & 0.029396 & 0.037933 & 0.032552 & 0.018697 & 0.036263 & 0.039302 & 0.036639 & 0.045952 & 0.045759 & 0.039895 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_3^2(t) = \begin{pmatrix} 0.093956 & 0.042009 & 0.039135 & 0.047429 & 0.019809 & 0.017833 & 0.045009 & 0.045454 & 0.025122 & 0.026319 & 0.035279 \\ 0.042009 & 0.191849 & 0.027888 & 0.051450 & 0.043151 & 0.005639 & 0.047666 & 0.047776 & 0.088742 & 0.065763 & 0.039648 \\ 0.039135 & 0.027888 & 0.182404 & 0.183281 & 0.025388 & 0.090014 & 0.198514 & 0.184426 & 0.037106 & 0.037575 & 0.060671 \\ 0.047429 & 0.051450 & 0.183281 & 0.243068 & 0.029246 & 0.100982 & 0.222458 & 0.243592 & 0.051240 & 0.054349 & 0.078401 \\ 0.019809 & 0.043151 & 0.025388 & 0.029246 & 0.247662 & -0.004193 & 0.018686 & 0.032900 & 0.007905 & 0.002027 & 0.018589 \\ 0.017833 & 0.005639 & 0.090014 & 0.100982 & -0.004193 & 0.247835 & 0.106751 & 0.097155 & -0.012972 & 0.022396 & 0.035961 \\ 0.045009 & 0.047666 & 0.198514 & 0.222458 & 0.018686 & 0.106751 & 0.284491 & 0.229822 & 0.041188 & 0.066928 & 0.078593 \\ 0.045454 & 0.047776 & 0.184426 & 0.243592 & 0.032900 & 0.097155 & 0.229822 & 0.293513 & 0.076263 & 0.073315 & 0.087103 \\ 0.025122 & 0.088742 & 0.037106 & 0.051240 & 0.007905 & -0.012972 & 0.041188 & 0.076263 & 0.201312 & 0.063600 & 0.045615 \\ 0.026319 & 0.065763 & 0.037575 & 0.054349 & 0.002027 & 0.022396 & 0.066928 & 0.073315 & 0.063600 & 0.160049 & 0.043608 \\ 0.035279 & 0.039648 & 0.060671 & 0.078401 & 0.018589 & 0.035961 & 0.078593 & 0.087103 & 0.045615 & 0.043608 & 0.045413 \end{pmatrix} / 100$$

A matriz de probabilidades de transição $[p_{i,j}]$ calculada conforme a seção 6.2 é:

$$p_{ij}(t) = \begin{pmatrix} 0.14 & 0.64 & 0.22 \\ 0.22 & 0.61 & 0.17 \\ 0.13 & 0.74 & 0.13 \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Nesta simulação iremos considerar o problema $P1(\sigma^2)$, isto é:

$$\begin{aligned} P1(\sigma^2) : & \max_{u \in \mathbb{U}} E(X^u(T) - B(T)) \\ \text{sujeito a} : & Var((X^u(T) - B(T))) \leq \sigma^2. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Assim, o objetivo é o de se maximizar a esperança da riqueza acima do *benchmark* sujeito a uma variância máxima. O parâmetro σ^2 que especifica a restrição de variância da saída foi considerado como $\sigma^2 = 0.0174 * 0.1$, equivalente a 10% da variância do índice Ibovespa apurado para o mesmo período. É importante notar que esse valor também foi definido considerando a condição $\sigma^2 > c - \frac{a^2}{1-2b}$. O valor $X(0)$ e o de $B(0)$ foram considerados como sendo iguais a 1 e o horizonte de simulação é de $T = 20$ semanas.

Como comparação, realizamos a aplicação do modelo de Markowitz Uni-período da seção 5.2. Considerando (5.1) neste problema, o modelo de Markowitz realiza a otimização da carteira em cada instante sendo conhecido o modo, isto é, considera-se a otimização considerando os mesmos vetores $\eta_i(t)$ e matrizes $\Sigma_i^2(t)$ separadamente pelo modo do instante de otimização, porém com o objetivo de se atingir um retorno pré-determinado com apenas 1 período de tempo de horizonte de projeção.

Esse retorno pré-determinado foi considerado como sendo equivalente ao retorno do *benchmark* acrescido do rendimento final observado da simulação de Monte Carlo do problema $P1(\sigma^2)$, decomposto proporcionalmente pela quantidade de períodos. Para a aplicação em (5.1) temos assim:

$$\mu_i = \eta_{i,n+1} [1 + (X(T) - B(T))]^{(1/T)} \quad (6.16)$$

Observe que para comparação seria menos adequado utilizar a restrição de σ^2 em (5.1) pois o problema de otimização $P1(\sigma^2)$ considera a variância de $(X(T) - B(T))$ apenas no instante final, o que impossibilita sua aplicação direta em (5.1).

Figura 6.1: Simulação de MC de carteira com ativos de risco para atingir um *benchmark* para o problema $P1(\sigma^2)$.

Na figura 6.1 é apresentada uma simulação numérica de Monte Carlo (MC) para o modelo considerado nesta seção. Como comparação na mesma figura é apresentada a simulação numérica de Monte Carlo para o modelo clássico de Markowitz uni-período. Podemos observar nessa figura que o objetivo de se superar o *benchmark* é atingido pelo modelo, através da diferença positiva de $(X(t) - B(t))$ em $t = T$. O modelo uni-período também atinge esse objetivo pois $(X(t)_{Uni-per} - B(t)) = 0.0233$, porém sem atingir o mesmo rendimento da estratégia multi-períodos.

Na figura 6.2 são apresentadas as estratégias de controle ao longo do horizonte de simulação. Podemos observar que ao longo do tempo, as estratégias indicam a alocação de riqueza de forma alavancada, isto é, $u_i(t) < 0$. Por outro lado, a estratégia de investimento é determinada sob a condição da restrição de $\sigma^2 \leq 0.00174$ ou $\sigma \leq 0.0417$.

É possível observar esta restrição na figura 6.3 que apresenta a fronteira eficiente (equação (4.42)) para o modelo aqui proposto. O eixo horizontal corresponde à volatilidade (raiz da variância) de $(X(T) - B(T))$ enquanto que o eixo vertical corresponde à $E(X(T) - B(T))$. Através da localização de $P(Vol(T), E(T))$ na figura, observa-se que a volatilidade corresponde à restrição imposta ($\sigma = 0.0417$) e a um $E(X(T) - B(T)) = 0.1173$, sendo que o valor observado na simulação é de $(X(T) - B(T)) = 0.1404$.

Figura 6.2: Estratégias de investimento da simulação de MC de carteira com ativos de risco para atingir um *benchmark* para o problema $P1(\sigma^2)$.

Figura 6.3: Fronteira eficiente da simulação de MC de carteira com ativos de risco para atingir um *benchmark* para o problema $P1(\sigma^2)$.

6.4 Simulação de Carteiras com Ativo Livre de Risco e *Benchmark*

Nesta seção iremos considerar o modelo apresentado na seção 5.4, ou seja, a simulação de carteiras de investimento com alocações em um ativo livre de risco e em ativos de risco, com o objetivo de se atingir um *benchmark* de mercado.

Para tanto, iremos considerar um universo de ativos formado pelo CDI, representando o ativo livre de risco, e como ativos de risco o índice Ibovespa, a taxa cambial do dólar americano, o índice de renda fixa (IRF-M) e o ativo real Ouro (OZ10000). Esse tipo de alocação - em ativos de mercados distintos - se assemelha muito a fundos domésticos de carteira livre, conhecidos popularmente de fundos multimercados ou internacionalmente de *hedge funds*. O *benchmark* escolhido para desempenho nesta situação é o IPCA - Índice de Preços ao Consumidor.

O resumo das variáveis está listado na tabela 6.5 e os parâmetros de mercado seguem uma cadeia de Markov com $N = 3$ e definidos de acordo com a seção 6.2.

Tabela 6.5: Variáveis da simulação com ativo livre de risco.

Variável	Código e Descrição
$\ell = 1$	CDI
$\ell = 2$	Dólar EUA/Reais - PTAX Venda
$\ell = 3$	IBOV
$\ell = 4$	IRF-M - Índ. de Renda Fixa
$\ell = 5$	OZ10000 - Ouro
$B(t)$	IPCA - Benchmark

A seguir, temos os vetores de retornos médios semanais η_i e as matrizes de covariância Σ_i^2 de cada modo de mercado:

$$\eta_1(t) = \begin{pmatrix} 1.0028 & 1.0171 & 0.9485 & 1.0012 & 1.0053 & 1.0013 \end{pmatrix}' \quad (6.17)$$

$$\eta_2(t) = \begin{pmatrix} 1.0028 & 0.9975 & 1.0072 & 1.0029 & 1.0031 & 1.0012 \end{pmatrix}' \quad (6.18)$$

$$\eta_3(t) = \begin{pmatrix} 1.0030 & 0.9827 & 1.0532 & 1.0048 & 0.9892 & 1.0011 \end{pmatrix}' \quad (6.19)$$

$$\Sigma_1^2(t) = \begin{pmatrix} 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.069893 & -0.068943 & -0.007130 & 0.059497 & 0.000175 \\ 0.000000 & -0.068943 & 0.123599 & 0.010023 & -0.068339 & -0.000084 \\ 0.000000 & -0.007130 & 0.010023 & 0.001923 & -0.005671 & 0.000029 \\ 0.000000 & 0.059497 & -0.068339 & -0.005671 & 0.196188 & 0.000886 \\ 0.000000 & 0.000175 & -0.000084 & 0.000029 & 0.000886 & 0.000119 \end{pmatrix} / 100 \quad (6.20)$$

$$\Sigma_2^2(t) = \begin{pmatrix} 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.027001 & -0.012694 & -0.001016 & 0.024360 & -0.000287 \\ 0.000000 & -0.012694 & 0.039895 & 0.001096 & -0.004149 & 0.000176 \\ 0.000000 & -0.001016 & 0.001096 & 0.000404 & -0.001215 & 0.000020 \\ 0.000000 & 0.024360 & -0.004149 & -0.001215 & 0.085829 & -0.000285 \\ 0.000000 & -0.000287 & 0.000176 & 0.000020 & -0.000285 & 0.000079 \end{pmatrix} / 100 \quad (6.21)$$

$$\Sigma_3^2(t) = \begin{pmatrix} 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.027825 & -0.019637 & -0.001377 & 0.021354 & -0.000055 \\ 0.000000 & -0.019637 & 0.045413 & 0.002119 & -0.018538 & 0.000194 \\ 0.000000 & -0.001377 & 0.002119 & 0.000382 & -0.001370 & 0.000019 \\ 0.000000 & 0.021354 & -0.018538 & -0.001370 & 0.072926 & -0.000662 \\ 0.000000 & -0.000055 & 0.000194 & 0.000019 & -0.000662 & 0.000044 \end{pmatrix} / 100 \quad (6.22)$$

A matriz de probabilidades de transição $[p_{i,j}]$ determinada conforme a seção 6.2 é:

$$p_{ij}(t) = \begin{pmatrix} 0.14 & 0.64 & 0.22 \\ 0.22 & 0.61 & 0.17 \\ 0.13 & 0.74 & 0.13 \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

Nesta simulação iremos considerar o problema $P3(\nu)$, isto é:

$$P3(\nu) : \min_{u \in \mathbb{U}} \nu \text{Var}(X^u(T) - B(T)) - E(X^u(T) - B(T)), \quad (6.24)$$

onde $\nu \in (0, \infty)$ é o parâmetro de entrada para este problema e pode ser interpretado como um coeficiente de aversão ao risco, permitindo uma preferência de equilíbrio (*trade-off*) entre a esperança final (saída) e o nível de risco (variância). O parâmetro ν que especifica esse problema foi considerado como $\nu = 5.0\text{E}+5$. Os valores de $X(0)$ e de $B(0)$ foram considerados como sendo iguais a 1.0 e o horizonte de simulação é de $T = 20$ semanas.

Como comparação, realizamos a aplicação do modelo de Markowitz uni-período da seção 5.2. Considerando (5.9) neste problema, o modelo de Markowitz realiza a otimização da carteira em cada instante sendo conhecido o modo, isto é, considera-se a otimização considerando os mesmos vetores $\eta_i(t)$ e matrizes $\Sigma_i^2(t)$ separadamente pelo modo do instante de otimização, porém com o objetivo de se atingir um retorno pré-determinado com apenas 1 período de tempo de horizonte de projeção.

Esse retorno pré-determinado foi considerado como sendo equivalente ao retorno do *benchmark* acrescido do rendimento final observado da simulação de Monte Carlo do problema $P3(\nu)$, decomposto proporcionalmente pela quantidade de períodos. Para a aplicação em (5.9) temos assim:

$$\mu_i = \eta_{i,n+1}[1 + (X(T) - B(T))]^{(1/T)} \quad (6.25)$$

Observe que para esta comparação não podemos aplicar diretamente o parâmetro ν do problema $P3(\nu)$.

Na figura 6.4 é apresentada uma simulação numérica de Monte Carlo (MC) para o modelo considerado nesta seção. Como comparação na mesma figura é apresentada a simulação numérica de Monte Carlo para o modelo clássico de Markowitz uni-período. Podemos observar nessa figura que o objetivo de se superar um *benchmark* é atingido pelo modelo, através da diferença positiva de $(X(t) - B(t))$ em $t = T$, enquanto que o modelo uni-período também atinge esse objetivo pois $(X(t)_{\text{Uni-per}} - B(t)) > 0$.

Na figura 6.5 são apresentadas as estratégias de controle ao longo do horizonte de

Figura 6.4: Simulação de MC de carteira com ativo livre de risco para atingir um *benchmark* para o problema $P3(\nu)$.

simulação. Podemos observar que ao longo do tempo, as estratégias indicam a alocação de riqueza de forma alavancada, isto é, $u_i(t) < 0$, porém com predominância de valores de $u_1(t)$ próximos a 100%. Isto é esperado considerando que o IPCA como *benchmark* sugere carteiras de risco reduzido.

Além disso, a estratégia de investimento é determinada sob a condição da restrição de $\nu = 5.0E+5$. É conveniente traduzir esse número, através das equações (4.46) e (4.47) respectivamente em $\sigma^2 = 2.0590E-6$ e $\epsilon = 0.0506$. Essa preferência entre risco e retorno no instante final T , representado pelo número ν pode ser interpretado como uma preferência em se reduzir aproximadamente 5 vezes o risco em relação ao ganho de retorno, já que a grandeza de $Var(X(T) - B(T))$ é de 10^{-6} enquanto que a de $E(X(T) - B(T))$ é de 10^{-2} . É possível observar este *trade-off* na figura 6.6 que apresenta a fronteira eficiente para o modelo aqui proposto.

O eixo horizontal da figura 6.6 corresponde à volatilidade de $(X(T) - B(T))$ enquanto que o eixo vertical corresponde à $E(X(T) - B(T))$. Através da localização de $P(Vol(T), E(T))$ na figura, observa-se que a volatilidade corresponde à restrição imposta ($\sigma = 0.014$) e a um $E(X(T) - B(T)) = 0.0506$, sendo que o valor observado na simulação é de $(X(T) - B(T)) = 0.0532$.

Figura 6.5: Estratégias de investimento da simulação de MC de carteira com ativo livre de risco para atingir um *benchmark* para o problema $P3(\nu)$.

Figura 6.6: Fronteira eficiente da simulação de MC de carteira com ativo livre de risco para atingir um *benchmark* para o problema $P3(\nu)$.

6.5 Simulação de ALM - *Asset Liabilities Management*

Nesta seção iremos considerar o modelo apresentado na seção 5.5, ou seja, a simulação de carteiras de investimento com alocações em um ativo livre de risco e em ativos de risco, representando os ativos de um fundo de pensão. O objetivo é atingir um nível mínimo exigido de riqueza de forma a cobrir os passivos ou um prêmio positivo de rentabilidade acima da correção dos passivos. Nessa situação ainda é levado em conta a dinâmica dos fluxos dos participantes no fundo de pensão, pois a cada instante será considerado um fluxo líquido de saques e/ou benefícios.

Nesse modelo iremos considerar um universo de ativos formado pelo CDI, representando o ativo livre de risco, e como ativos de risco o índice Ibovespa, a taxa cambial do dólar americano, o índice de renda fixa IRF-M e o ativo real Ouro (OZ10000). Os passivos são reajustados pelo IPCA - Índice de Preços ao Consumidor e a dinâmica dos fluxos dos participantes seguirá a série de variação do índice de desemprego do IBGE. O resumo das variáveis está listado na tabela 6.6 e os parâmetros de mercado seguem uma cadeia de Markov com $N = 3$ e definidos de acordo com a seção 6.2.

Tabela 6.6: Variáveis da simulação de ALM.

Variável	Código e Descrição
$\ell = 1$	CDI
$\ell = 2$	Dólar EUA/Reais - PTAX Venda
$\ell = 3$	IBOV
$\ell = 4$	IRF-M - Índ. de Renda Fixa
$\ell = 5$	OZ10000 - Ouro
$Y(t)$	IPCA - Passivos
$D(t)$	Variação do Índ. de Desemprego IBGE

A seguir, temos os vetores de retornos médios semanais η_i e as matrizes de covariância Σ_i^2 de cada modo de mercado:

$$\eta_1(t) = \begin{pmatrix} 1.0028 & 1.0171 & 0.9485 & 1.0012 & 1.0053 & 1.0013 & 1.0022 \end{pmatrix}' \quad (6.26)$$

$$\eta_2(t) = \begin{pmatrix} 1.0028 & 0.9975 & 1.0072 & 1.0029 & 1.0031 & 1.0012 & 0.9977 \end{pmatrix}' \quad (6.27)$$

$$\eta_3(t) = \begin{pmatrix} 1.0030 & 0.9827 & 1.0532 & 1.0048 & 0.9892 & 1.0011 & 0.9999 \end{pmatrix}' \quad (6.28)$$

$$\Sigma_1^2(t) = \begin{pmatrix} 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.069893 & -0.068943 & -0.007130 & 0.059497 & 0.000175 & -0.006549 \\ 0.000000 & -0.068943 & 0.123599 & 0.010023 & -0.068339 & -0.000084 & -0.000521 \\ 0.000000 & -0.007130 & 0.010023 & 0.001923 & -0.005671 & 0.000029 & 0.000511 \\ 0.000000 & 0.059497 & -0.068339 & -0.005671 & 0.196188 & 0.000886 & -0.005317 \\ 0.000000 & 0.000175 & -0.000084 & 0.000029 & 0.000886 & 0.000119 & 0.000400 \\ 0.000000 & -0.006549 & -0.000521 & 0.000511 & -0.005317 & 0.000400 & 0.016097 \end{pmatrix} / 100 \quad (6.29)$$

$$\Sigma_2^2(t) = \begin{pmatrix} 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.027001 & -0.012694 & -0.001016 & 0.024360 & -0.000287 & -0.002254 \\ 0.000000 & -0.012694 & 0.039895 & 0.001096 & -0.004149 & 0.000176 & -0.001052 \\ 0.000000 & -0.001016 & 0.001096 & 0.000404 & -0.001215 & 0.000020 & 0.000316 \\ 0.000000 & 0.024360 & -0.004149 & -0.001215 & 0.085829 & -0.000285 & -0.000511 \\ 0.000000 & -0.000287 & 0.000176 & 0.000020 & -0.000285 & 0.000079 & 0.000190 \\ 0.000000 & -0.002254 & -0.001052 & 0.000316 & -0.000511 & 0.000190 & 0.017474 \end{pmatrix} / 100 \quad (6.30)$$

$$\Sigma_3^2(t) = \begin{pmatrix} 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.027825 & -0.019637 & -0.001377 & 0.021354 & -0.000055 & 0.000873 \\ 0.000000 & -0.019637 & 0.045413 & 0.002119 & -0.018538 & 0.000194 & 0.002971 \\ 0.000000 & -0.001377 & 0.002119 & 0.000382 & -0.001370 & 0.000019 & 0.000087 \\ 0.000000 & 0.021354 & -0.018538 & -0.001370 & 0.072926 & -0.000662 & 0.007916 \\ 0.000000 & -0.000055 & 0.000194 & 0.000019 & -0.000662 & 0.000044 & 0.000132 \\ 0.000000 & 0.000873 & 0.002971 & 0.000087 & 0.007916 & 0.000132 & 0.016222 \end{pmatrix} / 100 \quad (6.31)$$

A matriz de probabilidades de transição $[p_{i,j}]$ calculada conforme a seção 6.2 é:

$$p_{ij}(t) = \begin{pmatrix} 0.14 & 0.64 & 0.22 \\ 0.22 & 0.61 & 0.17 \\ 0.13 & 0.74 & 0.13 \end{pmatrix}. \quad (6.32)$$

Nesta simulação iremos considerar o problema $P2(\epsilon)$, isto é:

$$\begin{aligned} P2(\epsilon) : \min_{u \in \mathbb{U}} \text{Var}(X^u(T) - Y(T)) \\ \text{sujeito a} : E(X^u(T) - Y(T)) \geq \epsilon, \end{aligned} \quad (6.33)$$

onde ϵ é o parâmetro de entrada para este problema que especifica a restrição final na esperança da saída e foi considerado como $\epsilon = 0.05$, respeitando-se a condição de $\epsilon > \frac{a}{1-2b}$. O valor $X(0)$ foi considerado igual a 0.95, o valor de $Y(0)$ igual a 1.00 e o valor de $D(0)$ foi considerado igual a 0.0005. Assim, o objetivo é a de atingir um $E(X(T) - Y(T)) \geq \epsilon = 0.05 > 0$ partindo-se de um $(X(0) - Y(0)) = -0.05 < 0$. Para isso foi considerado um horizonte de simulação de $T = 52$ semanas que é o equivalente a 1 ano, constituindo um horizonte de médio prazo compatível para simulações de carteiras de fundo de pensão.

Como comparação, realizamos a aplicação do modelo de Markowitz uni-período da seção 5.2. Considerando a equação (5.1) neste problema, de forma análoga aos modelos anteriores, o modelo de Markowitz realiza a otimização da carteira em cada instante sendo conhecido o modo, isto é, considera-se a otimização considerando os mesmos vetores $\eta_i(t)$ e matrizes $\Sigma_i^2(t)$ separadamente pelo modo do instante de otimização, porém com o objetivo de se atingir um retorno pré-determinado com apenas 1 período de tempo de horizonte de projeção.

Esse retorno pré-determinado foi considerado como sendo equivalente à correção dos passivos acrescido do rendimento final observado da simulação de Monte Carlo do problema $P2(\epsilon)$, decomposto proporcionalmente pela quantidade de períodos. Para a aplicação em (5.1) temos assim:

$$\mu_i = \eta_{i,n+1}[1 + (X(T) - Y(T))]^{(1/T)} \quad (6.34)$$

Na figura 6.7 é apresentada uma simulação numérica de Monte Carlo (MC) para o

Figura 6.7: Simulação de MC de ALM para o problema $P2(\epsilon)$.

modelo considerado nesta seção. Na mesma figura é apresentada a simulação numérica de Monte Carlo do modelo de Markowitz uni-período para a carteira de ativos. Podemos observar nessa figura que o objetivo de se atingir uma diferença positiva de $E((X(t) - Y(t))) \geq \epsilon = 0.05$ em $t = T$ é alcançado com $(X(T) - Y(T)) = 0.0505$, enquanto que o modelo uni-período apresenta um valor de $(X(t)_{Uni-per} - Y(t)) = -0.0140 < 0$ em $t = T$ e assim não atinge o objetivo. Isso pode ser observado também pelo *Fund Ratio* apresentado na figura 6.8 em que o objetivo de fundos de pensão é sempre manter o índice acima de determinado nível, preferencialmente do valor unitário, pois dessa forma estaria com o nível de ativos ($X(t)$) compatível com o nível de passivos ($Y(t)$). O *Fund Ratio* é calculado por:

$$\text{Fund Ratio}(t) = \frac{X(t)}{Y(t)} \text{ com } t = 0, \dots, T, \quad (6.35)$$

A figura 6.9 apresenta a sequência de fluxos líquidos $D(t)$. Os valores correspondem a saques e/ou benefícios pagos aos participantes do fundo. Essa sequência representa de forma estocástica o comportamento dinâmico dos contribuintes que por sua vez se reflete como uma perturbação no sistema e por consequência na alocação das carteiras, já que pelas equações recursivas (5.37) e (5.42) ela impacta tanto em $X(t)$ quanto em $Y(t)$.

Na figura 6.10 são apresentadas as estratégias de controle ao longo do horizonte de

Figura 6.8: Fund Ratio da simulação de MC de ALM para o problema $P2(\epsilon)$.

Figura 6.9: Sequência de valores de $D(t)$ da simulação de MC de ALM para o problema $P2(\epsilon)$.

simulação. Podemos observar que ao longo do tempo, as estratégias indicam a alocação de riqueza de forma alavancada, isto é, $u_i(t) < 0$, porém com uma predominância de valores de $u_1(t)$ próximos a 100%. Isto é esperado considerando que o IPCA é o índice de correção dos passivos e sugere carteiras com risco reduzido. Entretanto, a presença de alavancagem nas estratégias de investimento é uma questão relevante nesta simulação, pois usualmente os gestores desse tipo de fundo desejam se utilizar de estratégias não alavancadas, tanto por aversão ao risco quanto por questões regulatórias. Observa-se que predominantemente nos períodos iniciais essa questão é mais crítica pela própria natureza de atuação do controle.

Figura 6.10: Estratégias de investimento da simulação de MC de ALM para o problema $P2(\epsilon)$.

Além disso, a estratégia de investimento é determinada sob a condição da restrição de $\epsilon \geq 0.05$. É possível observar esta restrição na figura 6.11 que apresenta a fronteira eficiente para o modelo aqui proposto. O eixo horizontal corresponde à volatilidade de $(X(T) - Y(T))$ enquanto que o eixo vertical corresponde à $E(X(T) - Y(T))$. Através da localização de $P(Vol(T), E(T))$ na figura, observa-se que ϵ corresponde a um valor de $E(X(T) - B(T)) = 0.05$ com uma volatilidade de $\sigma = 0.0014$.

Como exemplo para ilustrar o efeito do controle por um período mais longo e com ativos de maior volatilidade, para o mesmo modelo de ALM, apresentamos na figura 6.12 a simulação de Monte Carlo de uma carteira de ativos pelo período de $T = 104$ semanas,

Figura 6.11: Fronteira eficiente da simulação de MC de ALM para o problema $P2(\epsilon)$.

equivalente a 2 anos. Os ativos dessa simulação são as 10 ações da seção 6.3 e o CDI. O passivo neste caso é corrigido pelo Ibovespa e o fluxo de saques e pagamentos segue a variação do índice de desemprego. Os valores de $X(0)$, $Y(0)$ e $D(0)$ são 0.95, 1.00 e 0.001, respectivamente.

Na figura 6.12 é considerado o problema de otimização $P2(\epsilon)$, porém com $\epsilon = 0.60$, respeitando-se a condição de $\epsilon > \frac{a}{1-2b}$. Assim, o objetivo é a de atingir um $E(X(T) - Y(T)) \geq \epsilon = 0.60 > 0$ partindo-se de um $(X(0) - Y(0)) = -0.05 < 0$. Podemos observar nessa figura que o objetivo de se atingir uma diferença positiva de $E((X(t) - Y(t))) \geq \epsilon = 0.60$ em $t = T$ é praticamente alcançado com $(X(T) - Y(T)) = 0.5979$, enquanto que o modelo uni-período, apesar de apresentar um valor $(X(t)_{Uni-per} - Y(t)) > 0$ em $t = T$, não atinge o objetivo pois $(X(t)_{Uni-per} - Y(t)) = 0.3978$.

Figura 6.12: Simulação de MC de ALM para o problema $P2(\epsilon)$ - $T=104$ semanas.

Capítulo 7

Considerações Finais

Este estudo considerou o problema de controle ótimo estocástico de sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos e ruídos multiplicativos. Os critérios de desempenho considerados foram de média-variância, especificamente a minimização da variância final da saída sujeita a uma restrição no valor final, a maximização do valor esperado final sujeito a uma restrição na variância final e uma combinação linear da variância final e valor esperado do sistema. A lei de controle ótima é descrita por um estado recursivo adicionado por uma sequência determinística (equação (4.21)). Esta solução é derivada de um conjunto de equações de diferenças acopladas de Riccati (equação (4.16)) e de um conjunto de equações recursivas acopladas (equações (4.17) e (4.18)) e relacionadas às equações de Riccati. Os resultados obtidos neste estudo generalizam resultados anteriores da literatura para o problema de alocação ótima com saltos markovianos e ruídos multiplicativos, apresentando condições explícitas e suficientes para a otimalidade da estratégia de controle. São apresentadas simulações numéricas em otimização de carteiras de investimento e estratégias de gestão de ALM (*asset liabilities management*), descrevendo as condições de controle em situações próximas às do mercado brasileiro.

Como perspectivas futuras podemos considerar:

1. Restrição nas variáveis de controle. Pelos resultados obtidos e testes realizados, podemos observar que a inclusão de restrições nas variáveis de controle pertinentes à não-negatividade seria um avanço principalmente de forma prática, uma vez que dependendo dos parâmetros de entrada, os problemas os controles assumiram valores

negativos (que representam alavancagem para carteiras de investimento). Por outro lado, é uma complexidade maior para a obtenção de soluções analíticas para o problema de média-variância com saltos markovianos e ruídos multiplicativos. É um tópico relevante na literatura e os estudos até então ainda não incorporam essa restrição de forma a solucionar analiticamente ou mesmo numericamente a questão.

2. Geração dos Cenários. A inserção de saltos e ruídos no sistema dificulta a estabilidade dos controles do ponto de vista de programação dinâmica, principalmente para horizontes extensos. Uma forma de contornar esse problema seria o enfoque na melhoria da geração dos cenários utilizados. Por outro lado, o próprio conceito de inserção de saltos markovianos é uma dificuldade por si só nessa questão, pois a geração de cenários futuros aumenta proporcionalmente com o aumento do horizonte na programação dinâmica.

Referências Bibliográficas

- Ait Rami, M. e X. Y. Zhou (2000). Linear matrix inequalities, Riccati equations, and indefinite stochastic linear quadratic controls. *IEEE Transactions on Automatic Control* **45**, 1131–1143.
- Ait Rami, M., J. B. Moore e X. Y. Zhou (2001). Indefinite stochastic linear quadratic control and generalized differential Riccati equation. *SIAM Journal on Control and Optimization* **40**, 1296–1311.
- Ait Rami, M., X. Chen e X. Y. Zhou (2002). Discrete-time indefinite LQ control with state and control dependent noises. *Journal of Global Optimization* **23**, 245–265.
- Beghi, A. e D. D'Alessandro (1998). Discrete-time optimal control with control-dependent noise and generalized Riccati difference equations. *Automatica* **34**, 1031–1034.
- Boukas, E.K. e Z.K. Liu (2004). Delay-dependent stabilization of singularly perturbed jump linear systems. *International Journal of Control* **77**, 310–319.
- Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron e V. Balakrishnan (1994). *Linear Matrix Inequalities and Control Theory*. SIAM, Philadelphia.
- Cairns, A.J.G. (2004). Pension-fund mathematics. *Encyclopaedia of Actuarial Science*.
- Cajueiro, D.O. (2002). Stochastic optimal control of jumping Markov parameter processes with applications to finance. PhD thesis. Instituto Tecnológico de Aeronáutica.
- Cakmak, U. e S. Ozeckici (2006). Portfolio optimization in stochastic markets. *Mathematical Methods of Operations Research* **63**, 151–168.
- Chen, S., X. Li e X.Y. Zhou (1998). Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs. *SIAM Journal on Control and Optimization* **36**, 1685–1702.

- Costa, O. L. V. e A. C. Paiva (2002). Robust portfolio selection using linear matrix inequalities. *Journal of Economic Dynamics and Control* **26**, 889–909.
- Costa, O. L. V. e R. B. Nabholz (2007). Multiperiod mean-variance optimization with intertemporal restrictions. *Journal of Optimization Theory and Applications* **134**, 257–274.
- Costa, O.L.V. e H.G.V. Assunção (2005). *Análise de Risco e Retorno em Investimentos Financeiros*. Manole.
- Costa, O.L.V. e M. V. Araujo (2008). A generalized multi-period mean-variance portfolio optimization with Markov switching parameters. *Automatica* **44**, 2487–2497.
- Costa, O.L.V. e R. B. Nabholz (2002). A linear matrix inequalities approach to robust mean semi-variance portfolio optimization. In: *Computational Methods in Decision-Making, Economics and Finance* (Berc Rustem Erricos John Kontoghiorghes e Stavros Siokos, Eds.). Vol. 74. pp. 87–105. Kluwer Applied Optimization Series.
- Costa, O.L.V. e R. Okimura (2007a). Mean variance optimal control of Markov jump with multiplicative noise systems. In: *Proceedings of the European Control Conference 2007*. Kos, Greece. pp. 5044–5051.
- Costa, O.L.V. e R. Okimura (2007b). Multi-period mean variance optimal control of Markov jump with multiplicative noise systems. *Mathematical Reports* **9**, 21–34.
- Costa, O.L.V. e R. Okimura (2009). Discrete-time mean variance optimal control of linear systems with Markovian jumps and multiplicative noise. *International Journal of Control* **82**, 256–267.
- Costa, O.L.V. e W. L. de Paulo (2007). Indefinite quadratic with linear cost optimal control of Markovian jump with multiplicative noise systems. *Automatica* **43**, 587–597.
- Costa, O.L.V., M.D. Fragoso e R.P. Marques (2005). *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*. Springer-Verlag.
- De Souza, C. E. e M. D. Fragoso (1990). On the existence of maximal solution for generalized algebraic Riccati equations arising in stochastic control. *Systems and Control Letters* **14**, 233–239.

- Dombrovskii, V. V. e E. A. Lyashenko (2003). A linear quadratic control for discrete systems with random parameters and multiplicative noise and its application to investment portfolio optimization. *Automatic and Remote Control* **64**, 1558–1570.
- Dragan, V. e T. Morozan (2006a). Mean square exponential stability for some stochastic linear discrete-time systems. *European Journal of Control* **11**, 1–23.
- Dragan, V. e T. Morozan (2006b). Observability and detectability of a class of discrete-time stochastic linear systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information* **23**, 371–394.
- Elliott, R.J., F. Dufour e W.P. Malcolm (2005). State and mode estimation for discrete-time jump Markov systems. *SIAM Journal on Control and Optimization* **44**, 1081–1104.
- Elton, E. J. e M. J. Gruber (1995). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. Wiley, New York.
- Hakansson, N.H. (1969). Optimal investment and consumption strategies under risk, an uncertain lifetime and insurance. *International Economic Review* **10**, 443–466.
- Hakansson, N.H. (1970). Optimal investment and consumption strategies under risk for a class of utility functions. *Econometrica* **38**, 587–607.
- Hakansson, N.H. (1971). On optimal myopic portfolio policies, with and without serial correlation of yields. *Journal of Business* **44**, 324–334.
- Hanza, F. e J. Janssen (1998). The mean-semivariances approach to realistic portfolio optimization subject to transactions costs. *Applied Stochastics Models and Data Analysis* **14**, 275–283.
- Howe, M. A., B. Rustem e M. J. P. Selby (1996). Multi-period minimax hedging strategies. *European Journal of Operational Research* **93**, 185–204.
- Howe, M. A. e B. Rustem (1997). A robust hedging algorithm. *Journal of Economic Dynamics and Control* **21**, 1065–1092.
- Jorion, P. (1992). Portfolio optimization in practice. *Financial Analysts Journal (January-February)* **1**, 68–74.

- Leippold, Markus, Fabio Trojani e Paolo Vanini (2004). A geometric approach to multiperiod mean variance optimization of assets and liabilities. *Journal of Economic Dynamics and Control* **28**, 1079–1113.
- Li, Duan e Wan-Lung Ng (2000). Optimal dynamic portfolio selection: Multiperiod mean-variance formulation. *Mathematical Finance* **10**, 387–406.
- Lim, A. e X.Y. Zhou (1999). Stochastic optimal control LQR control with integral quadratic constraints and indefinite control weights. *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**, 1359–1369.
- Lintner, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics* **47**, 425–442.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance* **7**, 77–91.
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. John Wiley, New York.
- Mcqueen, G. e S. Thorley (1991). Are stock returns predictable? A test using Markov chains. *The Journal of Finance* **46**, 239–263.
- Merton, R.C. (1969). Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous case. *The Review of Economics and Statistics* **51**, 247–257.
- Merton, R.C. (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model. *Journal of Economic Theory* **3**, 373–413.
- Moore, J. B., X. Y. Zhou e A. E. B. Lim (1999). Discrete-time LQG controls with control dependent noise. *Systems & Control Letters* **36**, 199–206.
- Mossin, J. (1966). Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica* **34**, 261–276.
- Mossin, J. (1968). Optimal multiperiod portfolio policies. *Journal of Business* **41**, 215–229.
- Roll, R. (1992). A mean/variance analysis of tracking error. *The Journal of Portfolio Management* **18**, 13–22.
- Rustem, B., R. G. Becker e W. Marty (1995). Robust min-max portfolio strategies for rival forecast and risk scenarios. *Journal of Economic Dynamics and Control* **24**, 1591–1621.

- Saberi, A., P. Sannuti e B. M. Chen (1995). *H₂-Optimal Control*. Prentice Hall.
- Samuelson, P.A. (1969). Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. *Review of Economics and Statistics* **51**, 239–246.
- Sharpe, W.F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance* **19**, 425–442.
- Sharpe, W.F. e L.G. Tint (1990). Liabilities - a new approach. *Journal of Portfolio Management* **Winter**, 5–10.
- Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior toward risk. *Review of Economic Studies* **25**, 65–86.
- Yin, G. e X.Y. Zhou (2004). Markowitz's mean-variance portfolio selection with regime switching: From discrete-time models to their continuous-time limits. *IEEE Trans. Automatic Control* **49**, 349–360.
- Zhou, X.Y. e D. Li (2000). Continuous-time mean-variance portfolio selection: A stochastic LQ framework. *Appl. Math. Optim.* **42**, 19–33.
- Zhou, X.Y. e G. Yin (2003). Markowitz's mean-variance portfolio selection with regime switching: A continuous-time model. *SIAM J. Control and Optim.* **42**, 1466–1482.
- Zhu, J. (2005). On stochastic Riccati equations for the stochastic LQR problem. *Systems & Control Letters* **54**, 119–124.
- Zhu, S., D. Li e S. Wang (2004). Risk control over bankruptcy in dynamic portfolio selection: a generalized mean-variance formulation. *IEEE Transactions on Automatic Control* **49**, 447–457.

Apêndice A

Dados de Entrada dos Modos de Operação

Tabela 7.1: Vetor de retornos dos ativos por modo.

Ativo	η_1	η_2	η_3
PETR4	0.9468	1.0096	1.0532
VALE5	0.9527	1.0095	1.0424
BBDC4	0.9561	1.0083	1.0503
ITAU4	0.9537	1.0078	1.0521
AMBV4	0.9701	1.0065	1.0290
BBAS3	0.9504	1.0076	1.0619
UBBR11	0.9526	1.0067	1.0582
ITSA4	0.9541	1.0098	1.0519
CSNA3	0.9445	1.0133	1.0582
GGBR4	0.9389	1.0114	1.0637
CDI	1.0028	1.0028	1.0030
PTAX	1.0171	0.9975	0.9827
IBOV	0.9485	1.0072	1.0532
IRFM	1.0012	1.0029	1.0048
IPCA	1.0013	1.0012	1.0011
OZ10000	1.0053	1.0031	0.9892
IBGE	1.0022	0.9977	0.9999

Tabela 7.2: Matriz de probabilidades de transição $[p_{i,j}]$.

$$p_{ij}(t) = \begin{pmatrix} 0.14 & 0.64 & 0.22 \\ 0.22 & 0.61 & 0.17 \\ 0.13 & 0.74 & 0.13 \end{pmatrix}$$

Tabela 7.3: Matriz de covariâncias dos ativos - modo 1.

Σ_1^2	PETR4	VALE5	BBD4	ITAU4	AMV4	BBAS3	UBBR11	ITSA4	CSNA3	GGBR4	CDI	PTAX	IBOV	IRFM	IPCA	OZ10000	IBGE
PETR4	0.2310	0.1130	0.1441	0.1485	0.0654	0.1831	0.1586	0.1418	0.1666	0.1960	0.0004	-0.0675	0.1382	0.0081	-0.0003	-0.0676	-0.0166
VALE5	0.1130	0.2226	0.1042	0.1099	0.0342	0.1199	0.1310	0.1049	0.2097	0.1684	0.0011	-0.0327	0.0927	0.0052	0.0013	0.0023	0.0036
BBD4	0.1441	0.1042	0.2258	0.2239	0.0869	0.1579	0.2129	0.2168	0.1165	0.1067	0.0010	-0.0669	0.1269	0.0119	0.0005	-0.0530	-0.0025
ITAU4	0.1485	0.1099	0.2239	0.2791	0.1084	0.1906	0.2310	0.2707	0.1593	0.1477	0.0011	-0.0779	0.1408	0.0157	0.0004	-0.0516	0.0016
AMV4	0.0654	0.0342	0.0869	0.1084	0.1416	0.0777	0.0557	0.1161	0.0392	0.0587	0.0004	-0.0232	0.0631	0.0077	-0.0004	-0.0455	-0.0111
BBAS3	0.1831	0.1199	0.1579	0.1906	0.0777	0.3735	0.1818	0.2104	0.2270	0.2328	0.0003	-0.0947	0.1706	0.0143	-0.0002	-0.0877	0.0017
UBBR11	0.1586	0.1310	0.2129	0.2310	0.0557	0.1818	0.2909	0.2210	0.1785	0.1320	0.0009	-0.0862	0.1426	0.0139	0.0005	-0.0547	-0.0026
ITSA4	0.1418	0.1049	0.2168	0.2707	0.1161	0.2104	0.2210	0.2999	0.1755	0.1521	0.0011	-0.0842	0.1477	0.0179	0.0006	-0.0598	0.0026
CSNA3	0.1666	0.2097	0.1165	0.1593	0.0392	0.2270	0.1785	0.1755	0.4530	0.2979	0.0011	-0.0764	0.1605	0.0147	0.0005	-0.0433	0.0159
GGBR4	0.1960	0.1684	0.1067	0.1477	0.0587	0.2328	0.1320	0.1521	0.2979	0.3986	0.0006	-0.0838	0.1644	0.0108	0.0005	-0.0568	0.0135
CDI	0.0004	0.0011	0.0010	0.0011	0.0004	0.0003	0.0009	0.0001	0.0011	0.0006	0.0000	-0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0003	0.0001
DOLOF	-0.0675	-0.0327	-0.0669	-0.0779	-0.0232	-0.0947	-0.0862	-0.0842	-0.0764	-0.0838	-0.0001	0.0699	-0.0689	-0.0071	0.0002	0.0595	-0.0065
IBOV	0.1382	0.0927	0.1269	0.1408	0.0631	0.1706	0.1426	0.1477	0.1605	0.1644	0.0003	-0.0689	0.1236	0.0100	-0.0001	-0.0683	-0.0005
IRFM	0.0081	0.0052	0.0119	0.0157	0.0077	0.0143	0.0139	0.0179	0.0147	0.0108	0.0001	-0.0071	0.0100	0.0019	0.0000	-0.0057	0.0005
IPCA	-0.0003	0.0013	0.0005	0.0004	-0.0004	-0.0002	0.0005	0.0006	0.0005	0.0005	0.0000	0.0002	-0.0001	0.0000	0.0001	0.0009	0.0004
OZ10000	-0.0676	0.0023	-0.0530	-0.0516	-0.0455	-0.0877	-0.0547	-0.0598	-0.0433	-0.0568	0.0003	0.0595	-0.0683	-0.0057	0.0009	0.1962	-0.0053
Desemp	-0.0166	0.0036	-0.0025	0.0016	-0.0111	0.0017	-0.0026	0.0026	0.0159	0.0135	0.0001	-0.0065	-0.0005	0.0005	0.0004	-0.0053	0.0161

Tabela 7.4: Matriz de covariâncias dos ativos - modo 2.

Σ_2^2	PETR4	VALE5	BBD4	ITAU4	AMV4	BBAS3	UBBR11	ITSA4	CSNA3	GGBR4	CDI	PTAX	IBOV	IRFM	IPCA	OZI0000	IBGE
PETR4	0.1265	0.0280	0.0064	0.0013	0.0026	0.0065	0.0162	0.0054	0.0348	0.0273	0.0001	-0.0075	0.0342	0.0000	0.0003	0.0195	-0.0023
VALE5	0.0280	0.1378	0.0138	0.0218	0.0064	0.0085	0.0279	0.0222	0.0685	0.0440	0.0001	0.0002	0.0294	-0.0006	-0.0003	0.0166	-0.0044
BBD4	0.0064	0.0138	0.1354	0.0902	0.0403	0.0563	0.0882	0.0818	0.0423	0.0587	0.0001	-0.0164	0.0379	0.0016	0.0002	-0.0271	-0.0024
ITAU4	0.0013	0.0218	0.0902	0.1292	0.0439	0.0553	0.0935	0.1136	0.0231	0.0443	0.0001	-0.0083	0.0326	0.0015	0.0000	-0.0138	-0.0035
AMV4	0.0026	0.0064	0.0403	0.0439	0.1212	0.0151	0.0387	0.0367	0.0141	0.0276	0.0002	-0.0038	0.0187	0.0023	0.0000	-0.0049	0.0028
BBAS3	0.0065	0.0085	0.0563	0.0553	0.0151	0.2121	0.0523	0.0689	0.0202	0.0178	0.0005	-0.0190	0.0363	0.0024	0.0006	-0.0198	-0.0027
UBBR11	0.0162	0.0279	0.0882	0.0935	0.0387	0.0523	0.1651	0.0869	0.0463	0.0442	0.0002	-0.0107	0.0393	0.0019	0.0002	-0.0155	-0.0038
ITSA4	0.0054	0.0222	0.0818	0.1136	0.0367	0.0689	0.0869	0.1294	0.0257	0.0457	0.0002	-0.0123	0.0366	0.0015	0.0001	-0.0144	-0.0006
CSNA3	0.0348	0.0685	0.0423	0.0231	0.0141	0.0202	0.0463	0.0257	0.2258	0.0899	0.0003	-0.0174	0.0460	-0.0007	0.0004	-0.0021	0.0010
GGBR4	0.0273	0.0440	0.0587	0.0443	0.0276	0.0178	0.0442	0.0457	0.0899	0.1849	0.0003	-0.0071	0.0458	0.0006	0.0002	0.0062	-0.0022
CDI	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0005	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0001	-0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	-0.0001	0.0002
DOLOF	-0.0075	0.0002	-0.0164	-0.0083	-0.0038	-0.0190	-0.0107	-0.0123	-0.0174	-0.0071	-0.0001	0.0270	-0.0127	-0.0010	-0.0003	0.0244	-0.0023
IBOV	0.0342	0.0294	0.0379	0.0326	0.0187	0.0363	0.0393	0.0366	0.0460	0.0458	0.0001	-0.0127	0.0399	0.0011	0.0002	-0.0041	-0.0011
IRFM	0.0000	-0.0006	0.0016	0.0015	0.0023	0.0024	0.0019	0.0015	-0.0007	0.0006	0.0001	-0.0010	0.0011	0.0004	0.0000	-0.0012	0.0003
IPCA	0.0003	-0.0003	0.0002	0.0000	0.0000	0.0006	0.0002	0.0001	0.0004	0.0002	0.0000	-0.0003	0.0002	0.0000	0.0001	-0.0003	0.0002
OZI0000	0.0195	0.0166	-0.0271	-0.0138	-0.0049	-0.0198	-0.0155	-0.0144	-0.0021	0.0062	-0.0001	0.0244	-0.0041	-0.0012	-0.0003	0.0858	-0.0005
Desemp	-0.0023	-0.0044	-0.0024	-0.0035	0.0028	-0.0027	-0.0038	-0.0006	0.0010	-0.0022	0.0002	-0.0023	-0.0011	0.0003	0.0002	-0.0005	0.0175

Tabela 7.5: Matriz de covariâncias dos ativos - modo 3.

Σ_3^2	PETR4	VALE5	BBD4	ITAU4	AMBV4	BBAS3	UBBR11	ITSA4	CSNA3	GGBR4	CDI	PTAX	IBOV	IRFM	IPCA	OZI0000	IBGE
PETR4	0.0940	0.0420	0.0391	0.0474	0.0198	0.0178	0.0450	0.0455	0.0251	0.0263	-0.0003	-0.0139	0.0353	-0.0001	-0.0002	0.0094	0.0042
VALE5	0.0420	0.1918	0.0279	0.0514	0.0432	0.0056	0.0477	0.0478	0.0857	0.0658	-0.0013	-0.0036	0.0396	-0.0006	-0.0010	0.0127	-0.0036
BBD4	0.0391	0.0279	0.1824	0.1833	0.0254	0.0900	0.1985	0.1844	0.0371	0.0376	-0.0006	-0.0198	0.0607	0.0027	-0.0001	-0.0288	0.0020
ITAU4	0.0474	0.0514	0.1833	0.2431	0.0292	0.1010	0.2225	0.2436	0.0512	0.0543	-0.0005	-0.0230	0.0784	0.0042	0.0003	-0.0394	0.0015
AMBV4	0.0198	0.0432	0.0254	0.0292	0.2477	-0.0042	0.0187	0.0329	0.0079	0.0020	-0.0003	-0.0056	0.0186	0.0009	-0.0003	0.0116	-0.0126
BBAS3	0.0178	0.0056	0.0900	0.1010	-0.0042	0.2478	0.1068	0.0972	-0.0130	0.0224	-0.0003	-0.0338	0.0360	0.0015	0.0000	-0.0335	0.0000
UBBR11	0.0450	0.0477	0.1985	0.2225	0.0187	0.1068	0.2845	0.2298	0.0412	0.0669	-0.0006	-0.0211	0.0786	0.0033	0.0004	-0.0434	0.0052
ITSA4	0.0455	0.0478	0.1844	0.2436	0.0329	0.0972	0.2298	0.2935	0.0763	0.0733	-0.0005	-0.0309	0.0871	0.0053	0.0005	-0.0568	0.0011
CSNA3	0.0251	0.0887	0.0371	0.0512	0.0079	-0.0130	0.0412	0.0763	0.2013	0.0636	-0.0007	-0.0049	0.0456	0.0011	-0.0001	0.0006	0.0187
GGBR4	0.0263	0.0658	0.0376	0.0543	0.0020	0.0224	0.0669	0.0733	0.0636	0.1600	-0.0008	-0.0304	0.0436	0.0020	-0.0003	-0.0278	0.0026
CDI	-0.0003	-0.0013	-0.0006	-0.0005	-0.0003	-0.0003	-0.0006	-0.0005	-0.0007	-0.0008	0.0001	0.0002	-0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001
DOLOF	-0.0139	-0.0036	-0.0198	-0.0230	-0.0056	-0.0338	-0.0211	-0.0309	-0.0049	-0.0304	0.0002	0.0278	-0.0196	-0.0014	-0.0001	0.0214	0.0009
IBOV	0.0353	0.0396	0.0607	0.0784	0.0186	0.0360	0.0786	0.0871	0.0456	0.0436	-0.0003	-0.0196	0.0454	0.0021	0.0002	-0.0185	0.0030
IRFM	-0.0001	-0.0006	0.0027	0.0042	0.0009	0.0015	0.0033	0.0053	0.0011	0.0020	0.0001	-0.0014	0.0021	0.0004	0.0000	-0.0014	0.0001
IPCA	-0.0002	-0.0010	-0.0001	0.0003	-0.0003	0.0000	0.0004	0.0005	-0.0001	-0.0003	0.0000	-0.0001	0.0002	0.0000	0.0000	-0.0007	0.0001
OZI0000	0.0094	0.0127	-0.0288	-0.0394	0.0116	-0.0335	-0.0434	-0.0568	0.0006	-0.0278	0.0000	0.0214	-0.0185	-0.0014	-0.0007	0.0729	0.0079
Desemp	0.0042	-0.0036	0.0020	0.0015	-0.0126	0.0000	0.0052	0.0011	0.0187	0.0026	0.0001	0.0009	0.0030	0.0001	0.0001	0.0079	0.0162

Apêndice B

Resultados da Simulação da Seção 6.3

Tabela 7.6: Valores das estratégias de investimento - problema $P1(\sigma^2)$.

T	PETR4	VALE5	BBDC4	ITAU4	AMBV4	BBAS3	UBBR11	ITSA4	CSNA3	GGBR4
0	26.6725	9.0259	11.3356	-30.7128	1.6711	5.0401	-7.5987	50.7005	19.1473	14.7186
1	43.6113	-37.7810	-48.7924	30.9459	-18.0927	25.8070	44.5945	-25.9199	41.2689	44.3585
2	-28.9533	-4.1486	34.6874	-49.5733	104.2870	23.2239	38.1164	-16.0945	13.1120	-14.6570
3	60.2703	-85.9952	-115.9398	59.5105	-49.6047	45.6390	94.8019	-61.0913	73.2766	79.1326
4	4.1159	-0.6065	25.5920	-31.5480	47.0067	14.1935	23.4278	2.5346	8.5380	6.7460
5	11.1186	0.3424	23.5913	-27.7102	35.0622	12.1870	20.3072	6.3632	7.5079	11.2303
6	25.2501	12.4090	10.0793	-3.3467	12.2861	11.4069	4.6157	11.1042	6.3245	9.8710
7	25.4533	11.9166	10.2635	-7.2652	10.7517	10.4999	2.8840	16.7634	8.1596	10.5732
8	25.5650	11.6505	10.3624	-9.4148	9.9171	10.0001	1.9255	19.8730	9.1667	10.9543
9	25.6651	11.4142	10.4499	-11.3379	9.1738	9.5518	1.0640	22.6575	10.0680	11.2935
10	25.9639	10.7208	10.7048	-17.0719	6.9777	8.2086	-1.5289	30.9746	12.7567	12.2936
11	26.1126	10.3680	10.8357	-19.9313	5.8698	7.5429	-2.8066	35.1128	14.0967	12.7994
12	39.5296	-25.9537	-32.2919	23.9231	-10.3516	20.9513	32.2600	-17.3148	33.4166	35.8314
13	25.9904	10.6397	10.7376	-17.5973	6.7446	8.0959	-1.7283	31.7135	13.0009	12.4030
14	25.8518	10.9699	10.6149	-14.9301	7.7800	8.7162	-0.5389	27.8549	11.7512	11.9301
15	25.8535	10.9678	10.6154	-14.9615	7.7711	8.7078	-0.5568	27.9026	11.7661	11.9338
16	40.2443	-28.0673	-35.3275	25.2256	-11.7683	21.7911	34.5193	-18.7840	34.8215	37.3453
17	32.1272	-4.6469	-2.8570	11.4304	3.4826	12.1103	10.2237	-1.5834	19.2764	20.4366
18	25.3637	12.0800	10.2100	-5.5858	11.3230	10.9168	3.7294	14.2754	7.3672	10.3203
19	30.8198	-0.8810	2.3505	9.2196	5.9297	10.5493	6.3257	1.1930	16.7771	17.7162

Tabela 7.7: Valores das estratégias de investimento - problema $P1(\sigma^2)$ - modelo uni-período.

T	PETR4	VALE5	BBD4	ITA4	AMV4	BBAS3	UBBR11	ITSA4	CSNA3	GGBR4
0	13.6246	28.1112	11.2846	9.6678	-53.3183	2.0653	-3.2109	-28.6451	90.0521	30.3687
1	27.3847	37.8630	-11.4882	7.0769	4.8710	6.4770	21.2104	5.0319	-21.9161	23.4895
2	20.7632	27.2864	24.4724	9.5043	-14.9918	25.3619	-3.5286	10.8126	2.3847	-2.0651
3	29.1350	36.9503	-11.2113	6.9064	4.7536	6.3209	20.6991	4.9106	-21.3879	22.9233
4	23.4220	26.3709	23.6513	9.1854	-14.4888	24.5109	-3.4102	10.4497	2.3047	-1.9958
5	16.7477	28.6692	25.7126	9.9859	-15.7516	26.6472	-3.7074	11.3605	2.5056	-2.1697
6	12.1855	28.5796	11.4726	9.8289	-54.2067	2.0997	-3.2644	-29.1223	91.5524	30.8746
7	13.3289	28.2075	11.3233	9.7009	-53.5009	2.0724	-3.2219	-28.7431	90.3604	30.4726
8	13.1084	28.2793	11.3521	9.7256	-53.6370	2.0776	-3.2301	-28.8163	90.5903	30.5502
9	13.6730	28.0955	11.2783	9.6624	-53.2884	2.0641	-3.2091	-28.6290	90.0016	30.3516
10	10.9208	28.9912	11.6379	9.9704	-54.9874	2.1299	-3.3114	-29.5418	92.8711	31.3193
11	13.8101	28.0509	11.2604	9.6470	-53.2038	2.0609	-3.2040	-28.5836	89.8587	30.3034
12	28.2570	37.4081	-11.3502	6.9919	4.8125	6.3992	20.9556	4.9714	-21.6529	23.2073
13	17.2636	26.9269	10.8092	9.2605	-51.0721	1.9783	-3.0757	-27.4383	86.2582	29.0892
14	19.2141	26.2921	10.5544	9.0422	-49.8680	1.9316	-3.0032	-26.7914	84.2247	28.4035
15	20.4937	25.8757	10.3872	8.8989	-49.0782	1.9010	-2.9556	-26.3670	82.8906	27.9536
16	32.2382	35.3323	-10.7203	6.6039	4.5454	6.0441	19.7927	4.6956	-20.4513	21.9195
17	37.7188	32.4745	-9.8533	6.0698	4.1778	5.5552	18.1919	4.3158	-18.7972	20.1466
18	30.5811	22.5927	9.0693	7.7699	-42.8513	1.6598	-2.5806	-23.0217	72.3738	24.4069
19	42.1373	30.1707	-9.1542	5.6392	3.8814	5.1611	16.9013	4.0096	-17.4636	18.7173

Tabela 7.8: Valores de $X(t)$, $X(t)_{Uni-per}$ e $B(t)$ - problema $P1$ (σ^2).

T	$X(t)$	$X(t)_{Uni-per}$	$B(t)$
0	1.0000	1.0000	1.0000
1	1.0080	0.9973	1.0073
2	1.0373	1.0488	1.0663
3	0.9932	1.0220	1.0515
4	1.1519	1.0852	1.1111
5	1.1015	0.9982	1.0377
6	1.1027	0.9836	1.0253
7	1.1210	0.9966	1.0502
8	1.1261	0.9941	1.0572
9	1.1275	1.0006	1.0598
10	1.0906	0.9696	1.0314
11	1.0920	1.0022	1.0361
12	1.0922	1.0095	1.0424
13	1.1513	1.0440	1.0853
14	1.1651	1.0692	1.0893
15	1.1700	1.0864	1.0907
16	1.1763	1.0688	1.1196
17	1.2997	1.1628	1.2037
18	1.3471	1.2443	1.2340
19	1.3515	1.2516	1.2413
20	1.4917	1.3746	1.3513

Tabela 7.9: Modos da simulação e valores de μ_i para o modelo uni-período - problema $P1(\sigma^2)$.

T	modo	μ
0	2	1.0128
1	3	1.0591
2	1	0.9538
3	3	1.0591
4	1	0.9538
5	1	0.9538
6	2	1.0128
7	2	1.0128
8	2	1.0128
9	2	1.0128
10	2	1.0128
11	2	1.0128
12	3	1.0591
13	2	1.0128
14	2	1.0128
15	2	1.0128
16	3	1.0591
17	3	1.0591
18	2	1.0128
19	3	1.0591

Tabela 7.10: Modos da simulação e valores de μ_i para o modelo uni-período - problema $P1(\sigma^2)$.

Parâmetro	Valor
a	0.003367
b	0.461517
c	0.001436
d	0.003367
e	-0.230758
λ	20.121059
ν	81.482655
$E(X(T) - B(T))$	0.117332
$Var(X(T) - B(T))$	0.001740
$Vol(X(T) - B(T))$	0.041713
σ_{min}^2	0.001288

Apêndice C

Resultados da Simulação da Seção 6.4

Tabela 7.11: Valores das estratégias de investimento - problema $P3(\nu)$.

T	CDI	PTAX	IBOV	IRFM	OZ10000
0	154.8199	-34.3639	6.1858	-36.3235	9.6817
1	126.4024	-17.4326	3.1020	-16.8421	4.7702
2	101.4797	0.6001	10.9355	-12.8392	-0.1761
3	98.1897	1.2416	2.7496	-3.0638	0.8828
4	95.8126	0.7932	-0.2175	4.1286	-0.5168
5	96.4656	0.9389	-0.5595	4.2331	-1.0782
6	95.6285	0.9954	-2.4792	7.0841	-1.2287
7	98.2774	1.2783	2.8479	-3.3012	0.8976
8	96.0923	0.3639	0.3972	2.6172	0.5294
9	95.5288	0.1280	-0.2348	4.1435	0.4344
10	99.8279	-1.5992	0.2182	1.3759	0.1772
11	95.2778	0.0231	-0.5162	4.8231	0.3922
12	101.0486	-2.3266	0.3507	0.5392	0.3881
13	100.8233	-2.1924	0.3263	0.6936	0.3492
14	93.6091	-0.6752	-2.3875	9.3426	0.1111
15	96.3034	0.9499	-0.9311	4.7852	-1.1074
16	94.5679	1.5347	-0.3526	4.9819	-0.7320
17	99.2723	1.6948	3.9641	-5.9965	1.0653
18	91.5297	3.3450	-0.6823	7.0646	-1.2571
19	98.5903	1.4093	3.1989	-4.1489	0.9503

Tabela 7.12: Valores das estratégias de investimento - problema $P3(\nu)$ - modelo uni-período.

T	CDI	PTAX	IBOV	IRFM	OZ10000
0	124.1968	-14.4055	2.6242	-16.5961	4.1807
1	124.0385	-14.3113	2.6071	-16.4876	4.1534
2	100.5296	-0.0362	1.2091	-1.7980	0.0956
3	98.0885	-0.8025	-2.1498	5.1874	-0.3236
4	123.7927	-14.1650	2.5804	-16.3190	4.1109
5	100.5248	-0.0359	1.1982	-1.7818	0.0947
6	100.5231	-0.0358	1.1944	-1.7761	0.0944
7	98.1107	-0.7931	-2.1248	5.1270	-0.3198
8	98.1172	-0.7904	-2.1175	5.1093	-0.3187
9	98.1244	-0.7874	-2.1094	5.0898	-0.3175
10	123.3296	-13.8893	2.5302	-16.0014	4.0309
11	98.1368	-0.7822	-2.0954	5.0561	-0.3154
12	123.1658	-13.7917	2.5124	-15.8890	4.0026
13	123.0975	-13.7511	2.5050	-15.8422	3.9908
14	98.1565	-0.7739	-2.0733	5.0027	-0.3120
15	100.5068	-0.0347	1.1571	-1.7207	0.0915
16	122.8428	-13.5995	2.4774	-15.6675	3.9468
17	98.1734	-0.7668	-2.0543	4.9570	-0.3092
18	122.7251	-13.5294	2.4646	-15.5868	3.9264
19	98.1835	-0.7626	-2.0429	4.9295	-0.3075

Tabela 7.13: Valores de $X(t)$, $X(t)_{Uni-per}$ e $B(t)$ - problema $P3(\nu)$.

T	$X(t)$	$X(t)_{Uni-per}$	$B(t)$
0	1.0000	1.0000	1.0000
1	1.0120	1.0066	1.0027
2	1.0159	1.0103	1.0036
3	1.0265	1.0142	1.0043
4	1.0295	1.0170	1.0067
5	1.0324	1.0195	1.0085
6	1.0355	1.0228	1.0087
7	1.0382	1.0261	1.0090
8	1.0405	1.0297	1.0111
9	1.0432	1.0336	1.0124
10	1.0464	1.0372	1.0142
11	1.0495	1.0405	1.0153
12	1.0530	1.0445	1.0176
13	1.0558	1.0476	1.0185
14	1.0591	1.0516	1.0207
15	1.0633	1.0558	1.0215
16	1.0663	1.0593	1.0218
17	1.0695	1.0613	1.0218
18	1.0713	1.0648	1.0223
19	1.0743	1.0673	1.0234
20	1.0765	1.0707	1.0234

Tabela 7.14: Modos da simulação e valores de μ_i para o modelo uni-período - problema $P3(\nu)$.

T	modo	μ
0	2	1.003675
1	2	1.003675
2	3	1.003575
3	1	1.003775
4	2	1.003675
5	3	1.003575
6	3	1.003575
7	1	1.003775
8	1	1.003775
9	1	1.003775
10	2	1.003675
11	1	1.003775
12	2	1.003675
13	2	1.003675
14	1	1.003775
15	3	1.003575
16	2	1.003675
17	1	1.003775
18	2	1.003675
19	1	1.003775

Tabela 7.15: Modos da simulação e valores de μ_i para o modelo uni-período - problema $P3(\nu)$.

Parâmetro	Valor
a	0.000002109
b	0.499969290
c	0.000002115
d	0.000002109
e	-0.249984645
λ	50618.179157187
ν	500000.000000000
$E(X(T) - B(T))$	0.050617179
$Var(X(T) - B(T))$	0.000002059
$Vol(X(T) - B(T))$	0.001434922

Apêndice D

Resultados da Simulação da Seção 6.5

Tabela 7.16: Valores das estratégias de investimento - problema $P2(\epsilon)$.

T	CDI	PTAX	IBOV	IRFM	OZ10000
0	144.1525	-28.0631	5.0268	-28.9698	7.8537
1	146.6741	-29.5628	5.3005	-30.7006	8.2887
2	85.1588	-4.2339	-11.8874	32.2771	-1.3146
3	93.0184	2.4106	-0.5220	6.0792	-0.9863
4	96.9163	0.0898	-0.0989	3.4059	-0.3131
5	93.3644	2.2087	-0.4843	5.8389	-0.9277
6	98.2624	1.2543	2.8141	-3.2248	0.8940
7	94.5146	-0.3137	-1.3889	6.9256	0.2625
8	94.1648	1.7367	-0.3973	5.2866	-0.7908
9	97.2093	0.8153	1.6347	-0.3759	0.7167
10	96.5890	0.5565	0.9400	1.3022	0.6123
11	103.9267	-4.0760	0.6622	-1.4083	0.8954
12	103.8376	-4.0216	0.6526	-1.3481	0.8796
13	90.8170	-1.8571	-5.5311	16.9312	-0.3600
14	96.9301	0.0967	-0.0969	3.3852	-0.3151
15	95.0831	-0.0699	-0.7442	5.3718	0.3592
16	97.2532	0.8863	1.3057	1.4815	-0.9266
17	97.0045	0.9031	0.7337	2.3305	-0.9718
18	98.1886	-0.6481	0.0399	2.5187	-0.0991
19	96.1559	0.9604	-1.2162	5.2251	-1.1252
20	96.3234	0.4521	0.6501	2.0059	0.5685
21	99.5817	-1.4749	0.1911	1.5613	0.1408
22	95.1046	-0.0568	-0.7156	5.3045	0.3633
23	99.6798	-1.5309	0.2019	1.4922	0.1570
24	94.9880	-0.1042	-0.8446	5.6169	0.3439
25	97.7491	1.0521	2.2529	-1.8632	0.8091
26	94.9012	1.3203	-0.3166	4.7651	-0.6701
27	96.0397	0.3379	0.3369	2.7643	0.5212
28	96.1308	0.3765	0.4396	2.5164	0.5366
29	93.6181	-0.6747	-2.3782	9.3216	0.1133
30	97.8055	-0.4061	-0.0013	2.7712	-0.1693
31	99.7702	-1.5758	0.2120	1.4236	0.1700
32	93.5499	-0.7018	-2.4529	9.5027	0.1020
33	103.9942	-4.0911	0.6704	-1.4732	0.8997
34	107.8452	-6.3849	1.0884	-4.1137	1.5650
35	105.9847	-5.2756	0.8865	-2.8389	1.2432
36	102.0647	-2.9394	0.4611	-0.1520	0.5656
37	96.0269	0.9693	-1.5473	5.7068	-1.1557
38	101.0566	-2.3375	0.3517	0.5382	0.3910
39	94.5801	-0.2684	-1.2951	6.7076	0.2758
40	96.3799	0.9454	-0.7416	4.5091	-1.0929
41	95.7272	0.9895	-2.2395	6.7333	-1.2105
42	99.3580	-1.3231	0.1674	1.7010	0.0967
43	96.6888	0.9245	-0.0365	3.4611	-1.0378
44	102.1688	-2.9972	0.4725	-0.2265	0.5824
45	102.9248	-3.4473	0.5545	-0.7450	0.7129
46	108.1888	-6.5835	1.1258	-4.3538	1.6227
47	107.8675	-6.3918	1.0909	-4.1336	1.5671
48	97.1940	0.8905	1.1197	1.7433	-0.9475
49	99.6217	-1.4785	0.1961	1.5188	0.1418
50	95.8562	0.9808	-1.9485	6.2997	-1.1882
51	93.7850	1.9994	-0.4373	5.5198	-0.8671

Tabela 7.17: Valores das estratégias de investimento - problema $P2(\epsilon)$ - modelo uni-período.

T	CDI	PTAX	IBOV	IRFM	OZ10000
0	80.7814	11.4418	-2.0843	13.1817	-3.3206
1	80.8344	11.4102	-2.0786	13.1453	-3.3114
2	101.1689	0.4907	1.3147	-3.1722	0.1979
3	80.8621	11.3938	-2.0756	13.1264	-3.3066
4	80.8406	11.4065	-2.0779	13.1411	-3.3103
5	80.8178	11.4201	-2.0804	13.1567	-3.3143
6	101.1674	0.4901	1.3129	-3.1680	0.1976
7	101.1660	0.4895	1.3113	-3.1641	0.1974
8	80.9041	11.3688	-2.0710	13.0976	-3.2994
9	101.1644	0.4888	1.3096	-3.1599	0.1971
10	101.1626	0.4881	1.3075	-3.1550	0.1968
11	80.9751	11.3265	-2.0633	13.0489	-3.2871
12	81.0083	11.3067	-2.0597	13.0261	-3.2814
13	101.1587	0.4864	1.3031	-3.1443	0.1961
14	81.0283	11.2948	-2.0575	13.0124	-3.2779
15	101.1568	0.4856	1.3010	-3.1392	0.1958
16	99.0730	0.0634	-2.1166	3.1475	-0.1673
17	99.0745	0.0633	-2.1132	3.1424	-0.1670
18	81.1276	11.2357	-2.0468	12.9442	-3.2608
19	99.0781	0.0631	-2.1049	3.1300	-0.1664
20	101.1463	0.4812	1.2892	-3.1109	0.1940
21	81.2238	11.1784	-2.0364	12.8783	-3.2442
22	101.1434	0.4800	1.2859	-3.1029	0.1935
23	81.2783	11.1460	-2.0304	12.8409	-3.2347
24	101.1381	0.4778	1.2799	-3.0884	0.1926
25	101.1357	0.4768	1.2773	-3.0820	0.1922
26	81.4139	11.0653	-2.0157	12.7479	-3.2113
27	101.1313	0.4749	1.2723	-3.0699	0.1915
28	101.1298	0.4743	1.2706	-3.0659	0.1912
29	101.1276	0.4734	1.2682	-3.0600	0.1909
30	81.5408	10.9897	-2.0020	12.6608	-3.1894
31	81.5774	10.9679	-1.9980	12.6357	-3.1831
32	101.1239	0.4718	1.2640	-3.0498	0.1902
33	81.6136	10.9463	-1.9941	12.6109	-3.1768
34	81.6554	10.9214	-1.9895	12.5822	-3.1696
35	81.6725	10.9113	-1.9877	12.5705	-3.1666
36	81.6788	10.9075	-1.9870	12.5662	-3.1655
37	99.1056	0.0612	-2.0422	3.0368	-0.1614
38	81.7688	10.8539	-1.9772	12.5045	-3.1500
39	101.1103	0.4661	1.2488	-3.0132	0.1879
40	99.1102	0.0609	-2.0316	3.0212	-0.1606
41	99.1112	0.0608	-2.0292	3.0176	-0.1604
42	81.8820	10.7866	-1.9650	12.4268	-3.1304
43	99.1160	0.0605	-2.0184	3.0015	-0.1595
44	81.9859	10.7247	-1.9537	12.3556	-3.1125
45	82.0402	10.6924	-1.9478	12.3183	-3.1031
46	82.0498	10.6866	-1.9468	12.3117	-3.1014
47	82.0717	10.6736	-1.9444	12.2967	-3.0976
48	99.1221	0.0601	-2.0045	2.9808	-0.1584
49	82.1039	10.6545	-1.9409	12.2747	-3.0921
50	99.1225	0.0600	-2.0035	2.9793	-0.1584
51	82.1158	10.6474	-1.9396	12.2665	-3.0900

Tabela 7.18: Valores de $X(t)$, $X(t)_{Uni-per}$, $Y(t)$ e $D(t)$ - problema $P2(\epsilon)$.

T	$X(t)$	$X(t)_{Uni-per}$	$Y(t)$	$D(t) * 10^3$
0	0.9500	0.9500	1.0000	0.5000
1	0.9511	0.9526	1.0002	0.4918
2	0.9591	0.9525	1.0004	0.4855
3	0.9672	0.9540	0.9991	0.4910
4	0.9688	0.9529	1.0001	0.4929
5	0.9710	0.9518	0.9998	0.4840
6	0.9733	0.9538	1.0001	0.4798
7	0.9729	0.9550	1.0005	0.4848
8	0.9764	0.9561	1.0006	0.4864
9	0.9783	0.9562	1.0010	0.4963
10	0.9797	0.9577	1.0011	0.4944
11	0.9817	0.9597	1.0037	0.5023
12	0.9841	0.9613	1.0046	0.5065
13	0.9872	0.9610	1.0076	0.5145
14	0.9927	0.9624	1.0082	0.5111
15	0.9948	0.9625	1.0094	0.5143
16	0.9970	0.9644	1.0107	0.5100
17	0.9998	0.9660	1.0115	0.5205
18	1.0025	0.9674	1.0118	0.5233
19	1.0048	0.9698	1.0120	0.5378
20	1.0066	0.9713	1.0121	0.5435
21	1.0083	0.9724	1.0130	0.5452
22	1.0107	0.9738	1.0137	0.5491
23	1.0140	0.9752	1.0154	0.5434
24	1.0166	0.9784	1.0163	0.5450
25	1.0186	0.9804	1.0148	0.5312
26	1.0200	0.9823	1.0150	0.5274
27	1.0224	0.9843	1.0164	0.5211
28	1.0241	0.9855	1.0162	0.5140
29	1.0260	0.9874	1.0181	0.5261
30	1.0294	0.9891	1.0184	0.5240
31	1.0317	0.9910	1.0196	0.5186
32	1.0344	0.9907	1.0215	0.5296
33	1.0365	0.9930	1.0221	0.5244
34	1.0387	0.9953	1.0237	0.5278
35	1.0420	0.9962	1.0247	0.5180
36	1.0453	0.9965	1.0251	0.5288
37	1.0475	0.9996	1.0239	0.5361
38	1.0495	1.0015	1.0256	0.5432
39	1.0520	1.0028	1.0262	0.5377
40	1.0545	1.0048	1.0261	0.5300
41	1.0569	1.0060	1.0258	0.5190
42	1.0587	1.0077	1.0271	0.5114
43	1.0610	1.0114	1.0276	0.5069
44	1.0636	1.0135	1.0292	0.5226
45	1.0657	1.0166	1.0298	0.5250
46	1.0688	1.0171	1.0326	0.5371
47	1.0720	1.0184	1.0339	0.5304
48	1.0760	1.0184	1.0343	0.5194
49	1.0792	1.0202	1.0351	0.5117
50	1.0823	1.0189	1.0351	0.4935
51	1.0847	1.0209	1.0351	0.4886
52	1.0873	1.0228	1.0368	0.4903

Tabela 7.19: Modos da simulação e valores de μ_i para o modelo uni-período - problema $P2(\epsilon)$.

T	modo	μ
0	2	1.00214
1	2	1.00214
2	1	1.00224
3	2	1.00214
4	2	1.00214
5	2	1.00214
6	1	1.00224
7	1	1.00224
8	2	1.00214
9	1	1.00224
10	1	1.00224
11	2	1.00214
12	2	1.00214
13	1	1.00224
14	2	1.00214
15	1	1.00224
16	3	1.00204
17	3	1.00204
18	2	1.00214
19	3	1.00204
20	1	1.00224
21	2	1.00214
22	1	1.00224
23	2	1.00214
24	1	1.00224
25	1	1.00224
26	2	1.00214
27	1	1.00224
28	1	1.00224
29	1	1.00224
30	2	1.00214
31	2	1.00214
32	1	1.00224
33	2	1.00214
34	2	1.00214
35	2	1.00214
36	2	1.00214
37	3	1.00204
38	2	1.00214
39	1	1.00224
40	3	1.00204
41	3	1.00204
42	2	1.00214
43	3	1.00204
44	2	1.00214
45	2	1.00214
46	2	1.00214
47	2	1.00214
48	3	1.00204
49	2	1.00214
50	3	1.00204
51	2	1.00214

Tabela 7.20: Modos da simulação e valores de μ_i para o modelo uni-período - problema $P2(\epsilon)$.

Parâmetro	Valor
Parâmetro	Valor
a	-0.0000000055
b	0.4999999987
c	0.0000021038
d	-0.0000000055
e	-0.2499999993
λ	8929934.558
ν	89299335.578
$E(X(T) - B(T))$	0.0500000000
$Var(X(T) - B(T))$	0.0000021044
$Vol(X(T) - B(T))$	0.0014506562
ϵ_{min}	-2.0827042163