YURI PERIM

**Contribuições para o
balanceamento eletrônico de rotores**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Mestre em Ciências

São Paulo
2018

YURI PERIM

**Contribuições para o
balanceamento eletrônico de rotores**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Mestre em Ciências

Área de concentração:
Engenharia de Sistemas

Orientador:
Prof. Dr. Paulo Sérgio Pereira da Silva

São Paulo
2018

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 30 de novembro de 2018

Assinatura do autor: Yuri Perim

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Perim, Yuri

Contribuições para o balanceamento eletrônico de rotores / Y. Perim --
versão corr. -- São Paulo, 2018.

120 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São
Paulo. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle.

1.Rotor 2.Rotor (Controle) 3.Vibrações de máquinas (Controle) 4.Controle
(Teoria de sistemas e controle) I.Universidade de São Paulo. Escola
Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle II.t.

Aos meus pais,
Paulo Roberto e Rosa Helena.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Paulo Roberto Pereira e Rosa Helena Perim, pelo apoio e incentivo durante a realização deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Paulo Sérgio Pereira da Silva, pela sua paciência e dedicação durante todo o período de orientação.

Ao Prof. Dr. José Jaime da Cruz e ao Prof. Dr. Bruno Augusto Angélico, pela prontidão em atender minhas dúvidas.

Ao MSc. Eng. André Marcorin de Oliveira e ao MSc. Eng. Fabio Barbieri, pelas conversas e pela disposição em dividir comigo seus conhecimentos na área de teoria de controle.

Ao Eng. Erick Assis Lima, pela amizade e pelo suporte prestado.

À Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, pela oportunidade de realização do curso de mestrado.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

Saber e não fazer ainda não é saber.
(Lao-Tsé)

RESUMO

Este trabalho se insere no contexto de redução de vibrações de rotores via mancais ativos. Essas vibrações são causadas pelo desbalanceamento do próprio rotor e possuem frequência igual à frequência de rotação desse rotor. O desbalanceamento pode ser modelado como uma força de perturbação girante, sendo que uma técnica bastante conhecida para anular o efeito dessa perturbação é o balanceamento eletrônico, também chamado de compensação síncrona de desbalanceamento ou de regulação sincronizada. A presente dissertação traz duas contribuições para o tema. A primeira é a simplificação do compensador síncrono através de considerações de simetria do rotor e de isotropia dos mancais, e a segunda é a obtenção do modelo exato do sistema discreto resultante da aplicação da metodologia de compensação síncrona. Tais contribuições se valem da descrição do modelo em coordenadas complexas. À transformação de coordenadas reais para coordenadas complexas deu-se o nome de complexificação. Assim sendo, a complexificação do modelo permite dividir por dois a dimensão das variáveis do sistema (estados, entradas e saídas), além de dar sentido físico à separação entre os distúrbios diretos (caso do desbalanceamento) e os distúrbios retrógrados. Essa complexificação reduz o tempo de identificação da matriz de influência feita no balanceamento eletrônico, e o modelo complexificado obtido através das hipóteses de simetria e isotropia permite desacoplar completamente a compensação das perturbações diretas da compensação das perturbações retrógradadas.

Palavras-chave: Balanceamento eletrônico; Compensação de desbalanceamento; Regulação sincronizada; Controle de rotores; Mancais magnéticos.

ABSTRACT

This work is inserted in the context of active attenuation of rotor vibrations. These vibrations are caused by the rotor's own unbalance and have a frequency equal to the rotor's rotation frequency. The unbalance can be modeled as a rotating disturbance force, and a well-known technique for cancelling the effect of such a disturbance is the so-called active balancing, also known as synchronous unbalance compensation or synchronized regulation. The present dissertation brings two contributions to the theme. The first one is the simplification of the synchronous compensator through considerations of rotor symmetry and bearing isotropy, and the second one is to obtain the exact model of the discrete system resulting from the application of the synchronous compensation methodology. These contributions make use of the model described in complex coordinates. The transformation from real coordinates to complex coordinates is defined as a complexification. Thus, the complexification of the model allows the division in half of the dimension of the system variables (states, inputs and outputs), as well as giving a physical sense to the separation between forward disturbances (case of the rotor unbalance) and backward disturbances. This complexification reduces the time of identification of the influence matrix made in active balancing, and the complexified model obtained through symmetry and isotropy hypotheses allows the completely uncouple of the forward disturbances compensation from the backward disturbances compensation.

Keywords: Active balancing; Unbalance compensation; Synchronized regulation; Rotor control; Magnetic bearings.

LISTA DE FIGURAS

1	Esquema da compensação síncrona de desbalanço	2
2	Esquema da compensação síncrona de desbalanço - Sistema equivalente	3
3	Sistema massa-mola-amortecedor	7
4	Topologia da malha de controle	9
5	Sistema aumentado	10
6	Topologia do compensador interno	11
7	Resposta em frequência do sistema massa-mola-amortecedor	12
8	Resposta temporal do sistema em malha fechada	14
9	Resposta em frequência do sistema em malha fechada	14
10	Regulação síncrona - Distúrbio na entrada do sistema	17
11	Regulação síncrona - Distúrbio na entrada do módulo de geração de sinal	22
12	Regulação síncrona - Sistema equivalente	23
13	Regulação síncrona complexificada - Malha completa de controle . . .	30
14	Regulação síncrona complexificada - Malha de controle direto	32
15	Regulação síncrona complexificada - Desacoplamento	39
16	Regulação síncrona complexificada - Sistema equivalente	40
17	Regulação síncrona complexificada - Efeito da anisotropia dos mancais	46
18	Sistema com entrada $\tilde{u}_k$ e saída $\tilde{y}_k$	50
19	Esboço de $\tilde{u}_k(t)$ no tempo	52
20	Esboço de $\tilde{u}(t)$ no tempo	52
21	Perturbação $d(t)$ na entrada do sistema (A, B, C)	55
22	Perturbação $\tilde{D}_k$ na entrada do bloco $\mathcal{O}$	56

23	Sistema discreto equivalente $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ em malha fechada	56
24	Sistema com entradas $\tilde{u}_k$ e $\tilde{u}_{r,k}$ e saídas $\tilde{y}_k$ e $\tilde{y}_{r,k}$	60
25	Sistemas discretos equivalentes	62
26	Sistema discreto equivalente $(\overline{A}_r, \overline{B}_r, \overline{C}_r)$ em malha fechada	63
27	Esboço de um rotor disposto verticalmente	66
28	Referencial inercial $OXYZ$ e sistemas de coordenadas auxiliares . . .	67
29	Eixos principais de inércia e sistemas de coordenadas auxiliares	68
30	Diagrama de Campbell	72
31	Taxa de decaimento	73
32	Magnitudes da saída e da entrada na seção 1	75
33	Magnitudes da saída e da entrada na seção 2	76
34	Erro de identificação	76
35	Magnitudes da saída e da entrada na seção 1 na presença de ruído ($\beta = 1$)	77
36	Magnitudes da saída e da entrada na seção 2 na presença de ruído ($\beta = 1$)	78
37	Erro de identificação na presença de ruído ($\beta = 1$)	78
38	Magnitudes da saída e da entrada na seção 1 na presença de ruído ($\beta = 0, 4$)	79
39	Magnitudes da saída e da entrada na seção 2 na presença de ruído ($\beta = 0, 4$)	79
40	Erro de identificação na presença de ruído ($\beta = 0, 4$)	80
41	Magnitude da saída na seção 1	81
42	Magnitude da saída na seção 2	81
43	Mancais anisotrópicos - Magnitude da saída na seção 1	83
44	Mancais anisotrópicos - Magnitude da entrada na seção 1	83

45	Mancais anisotrópicos - Magnitude da saída na seção 2	84
46	Mancais anisotrópicos - Magnitude da entrada na seção 2	84
47	Sistema discreto equivalente $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ em malha fechada (vide figura 23)	92
48	Regulação síncrona - Sistema equivalente (vide figura 12)	93
49	Regulação síncrona complexificada - Sistema equivalente - Malha de controle direto (vide figura 16(a))	93
50	Regulação síncrona complexificada - Efeito da anisotropia dos mancais (vide figura 17)	94

LISTA DE ABREVIações

CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

MIMO *Multiple Input Multiple Output*

SISO *Single Input Single Output*

USP Universidade de São Paulo

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Matriz de estados do sistema estabilizado
$\bar{A}$	Matriz de estados do sistema discreto equivalente
$\hat{A}$	Matriz de estados do sistema aumentado
$\tilde{A}$	Matriz de estados
A_c	Matriz de estados do sistema de controle estabilizante
A_{ma}	Matriz de estados do modelo do rotor em malha aberta
A_Ω	Matriz de estados do sistema auxiliar
A_η	Amplitude da série de Fourier na forma harmônica
$\bar{A}_r$	Matriz de estados do sistema discreto equivalente
$\tilde{A}_r$	Matriz de estados
$\mathcal{A}$	Matriz de estados do sistema massa-mola-amortecedor
a	Distância entre o centro de massa do rotor e o mancal inferior
B	Matriz de entradas do sistema estabilizado
$\bar{B}$	Matriz de entradas do sistema discreto equivalente
$\hat{B}$	Matriz de entradas do sistema aumentado
B_c	Matriz de entradas do sistema de controle estabilizante
B_d	Matriz de distúrbios do sistema estabilizado
B_Ω	Matriz de entradas do sistema auxiliar
$\bar{B}_r$	Matriz de entradas do sistema discreto equivalente
$\mathcal{B}$	Matriz de entradas do sistema massa-mola-amortecedor
b	Distância entre o centro de massa do rotor e o mancal superior
C	Matriz de saídas do sistema estabilizado
$\bar{C}$	Matriz de saídas do sistema discreto equivalente

$\hat{C}$	Matriz de saídas do sistema aumentado
C_c	Matriz de saídas do sistema de controle estabilizante
C_{ma}	Matriz de saídas do modelo do rotor em malha aberta
C_Ω	Matriz de saídas do sistema auxiliar
$\overline{C}_r$	Matriz de saídas do sistema discreto equivalente
C	Matriz de saídas do sistema massa-mola-amortecedor
$\mathcal{C}_i^X$	Sistema de controle na direção X do plano i
$\mathcal{C}_i^Y$	Sistema de controle na direção Y do plano i
c	Coeficiente de amortecimento viscoso do sistema massa-mola-amortecedor
c_η	Coeficiente da série de Fourier na forma complexa
D	Vetor de parâmetros do desbalanceo
$\widetilde{D}$	Vetor de amplitudes complexas da componente direta do distúrbio
D_c	Matriz de transição direta do sistema de controle estabilizante
$\widetilde{D}_k$	Vetor de amplitudes complexas da componente direta do distúrbio
d	Vetor de desbalanceo/Distúrbio generalizado complexo
$\tilde{d}$	Amplitude complexa da componente direta
d_X	Distúrbio generalizado real
d_Y	Distúrbio generalizado real
d_b	Distúrbio do sistema massa-mola-amortecedor
E_c	Matriz de ponderação da componente de controle síncrono do sistema de controle estabilizante
E_l	Erro de identificação
e_b	Sinal de erro do sistema massa-mola-amortecedor
F_1	Vetor da força complexificada na extremidade inferior do rotor
F_{1X}	Componente na direção X da força na extremidade inferior do rotor

F_{1Y}	Componente na direção Y da força na extremidade inferior do rotor
F_2	Vetor da força complexificada na extremidade superior do rotor
F_{2X}	Componente na direção X da força na extremidade superior do rotor
F_{2Y}	Componente na direção Y da força na extremidade superior do rotor
$\mathcal{F}$	Filtro (integral de Fourier) para controle das componentes diretas
$\mathcal{F}_r$	Filtro (integral de Fourier) para controle das componentes retrógradadas
f	Frequência de rotação do rotor
$f(t)$	Limite inferior dependente do tempo de uma integração
G	Matriz giroscópica do rotor
$G(s)$	Matriz de transferência do sistema estabilizado
$G(j\Omega)$	Matriz de influência
G_{DC}	Ganho em baixa frequência
G_l	Estimativa da matriz de influência
$G_{r,DC}$	Ganho em baixa frequência
$\mathcal{G}(s)$	Matriz de transferência do sistema massa-mola-amortecedor
$g(t)$	Limite superior dependente do tempo de uma integração
H	Matriz de ponderação das forças generalizadas
H	Operação matricial hermitiana
$\widehat{H}_c$	Matriz do observador de estados
$\mathcal{H}$	Controlador discreto (malha de controle das componentes diretas)
$\mathcal{H}_r$	Controlador discreto (malha de controle das componentes retrógradadas)
h	Período de amostragem
I	Matriz identidade
J	Função objetivo
J_p	Momento polar de inércia do rotor

J_t	Momento transversal de inércia do rotor
j	Unidade imaginária
K	Matriz de rigidez do rotor
K_c	Matriz de realimentação de estados
$\widehat{K}_c$	Matriz de realimentação de estados do observador
k	Amostra
k_{p1}	Constante elástica equivalente do mancal inferior
k_{p2}	Constante elástica equivalente do mancal superior
k_{v1}	Coeficiente de amortecimento viscoso equivalente do mancal inferior
k_{v2}	Coeficiente de amortecimento viscoso equivalente do mancal superior
L	Distância entre o mancal inferior e o mancal superior
l	Quantidade de saídas/Índice das atuações de controle
M	Massa do rotor/Matriz de inércia do rotor
M_1	Matriz de ponderação do modelo de anisotropia
M_2	Matriz de ponderação do modelo de anisotropia
m	Quantidade de entradas
m_b	Massa do bloco do sistema massa-mola-amortecedor
N	Período da série discreta
n	Quantidade de estados/Amostra
$\mathcal{O}$	Conversor digital-analógico para controle das componentes diretas
$\mathcal{O}_r$	Conversor digital-analógico para controle das componentes retrógradas
p	Posição do sistema massa-mola-amortecedor
Q	Matriz de ponderação da saída
q	Autovetor/Coordenada generalizada complexa
q_X	Coordenada generalizada real

q_Y	Coordenada generalizada real
R	Matriz de ponderação da ação de controle
$\tilde{R}$	Vetor de amplitudes complexas da componente retrógrada do distúrbio
$\tilde{R}_k$	Vetor de amplitudes complexas da componente retrógrada do distúrbio
r	Vetor da posição complexificada do centro de massa do rotor
$\tilde{r}$	Amplitude complexa da componente retrógrada
r_b	Referência do sistema massa-mola-amortecedor
r_1	Vetor da posição complexificada do plano inferior de atuação/medição
r_2	Vetor da posição complexificada do plano superior de atuação/medição
S	Matriz de ponderação da taxa de mudança da ação de controle
s	Variável complexa
T	Período de rotação do rotor
t_n	Período de amostragem
t_0	Tempo inicial
U_b	Transformada de Laplace da entrada do sistema massa-mola-amortecedor
u	Vetor de entradas do sistema estabilizado/Componente de controle síncrono do vetor de entradas u_T
$\hat{u}$	Vetor de entradas do sistema aumentado
$\tilde{u}$	Vetor de entradas
u_T	Vetor de entradas do modelo do rotor em malha aberta/Força generalizada complexa
u_T^X	Ação de controle na direção X de todos os planos de atuação
u_T^Y	Ação de controle na direção Y de todos os planos de atuação
u_X	Força generalizada real
u_Y	Força generalizada real
u_b	Entrada do sistema massa-mola-amortecedor

u_{est}	Componente de estabilização do vetor de entradas u_T
u_n	Amostra do vetor de entradas
$u_{\overline{n}}$	Vetor u_n mantido constante num intervalo de amostragem
u_r	Entrada retrógrada do sistema estabilizado
u_{Ω}	Vetor de entradas do sistema auxiliar
$\hat{u}_l$	Sinal de controle
$\hat{u}_l^j$	Passo de identificação
$\tilde{u}_k$	Fasor de entrada do sistema discreto equivalente
$\tilde{u}_{\overline{k}}$	Fasor $\tilde{u}_k$ mantido constante num intervalo de amostragem
$\tilde{u}_k^c$	Fasor de saída do controlador direto
$\tilde{u}_k^p$	Fasor de entrada do bloco $\mathcal{O}$
$\tilde{u}_{r,k}$	Fasor de entrada retrógrada
$\tilde{u}_{r,k}^c$	Fasor de saída do controlador retrógrado
$\tilde{u}_{r,k}^p$	Fasor de entrada do bloco $\mathcal{O}_r$
v_b	Sinal auxiliar do sistema massa-mola-amortecedor
X	Coordenada do centro de massa do rotor
x	Vetor de estados do sistema estabilizado
$\hat{x}$	Vetor de estados do sistema aumentado
$\tilde{x}$	Vetor de estados
x_b	Vetor de estados do sistema massa-mola-amortecedor
x_c	Vetor de estados do sistema de controle estabilizante
x_{Ω}	Vetor de estados do sistema auxiliar
x_0	Vetor de condições iniciais
$\bar{x}_k$	Vetor de estados do sistema discreto equivalente
$\bar{x}_{r,k}$	Vetor de estados do sistema discreto equivalente

$\tilde{x}_k$	Vetor de estados
Y	Coordenada do centro de massa do rotor
Y_b	Transformada de Laplace da saída do sistema massa-mola-amortecedor
y	Vetor de saídas do sistema estabilizado
$\hat{y}$	Vetor de saídas do sistema aumentado
$\tilde{y}$	Vetor de saídas
y_b	Saída do sistema massa-mola-amortecedor
y_n	Amostra do vetor de saídas
y_Ω	Vetor de saídas do sistema auxiliar
$\hat{y}_l$	Saída correspondente a um sinal de controle
$\hat{y}_l^j$	Saída correspondente a um passo de identificação
$\tilde{y}_k$	Fasor de saída do sistema discreto equivalente
$\tilde{y}_{r,k}$	Fasor de saída retrógrada
α	Desbalanço angular do rotor
α_η	Fase da série de Fourier na forma harmônica
$\bar{\alpha}_l$	Parâmetro do algoritmo de identificação
$\bar{\alpha}_{min}$	Parâmetro do algoritmo de identificação
β	Fator de esquecimento
Γ	Matriz de base para algoritmo de identificação
γ	Parâmetro de construção da matriz de base Γ
δ	Ângulo de fase do desbalanço
ϵ	Desbalanço do rotor
ζ	Coeficiente de amortecimento
η	Contador
θ	Ângulo de giro do rotor

κ	Constante elástica da mola do sistema massa-mola-amortecedor
Λ	Conjunto de autovalores
λ	Autovalor da matriz de estados do sistema estabilizado
$\tilde{\lambda}$	Autovalor da matriz de estados $\tilde{A}$
ν	Sinal do modelo com anisotropia dos mancais
σ	Taxa de decaimento
τ	Variável de integração
v	Sinal do modelo com anisotropia dos mancais
ϕ	Sinal auxiliar
$\tilde{\phi}$	Sinal auxiliar
ϕ_n	Amostra do sinal auxiliar
φ	Vetor da posição angular complexificada do rotor
$\varphi_{X'}$	Posição angular do rotor
φ_y	Posição angular do rotor
χ	Desbalanço angular do rotor
Ω	Velocidade/Frequência angular do rotor
ω	Frequência amortecida
ω_n	Frequência natural
A/D	Conversor analógico-digital
D/A	Conversor digital-analógico
$\Delta\hat{U}_l$	Matriz das diferenças dos vetores de controle
$\Delta\hat{Y}_l$	Matriz das diferenças dos vetores de saída
$CX'Y'Z'$	Sistema de coordenadas inercial
$CX'yz^*$	Sistema de coordenadas auxiliar
$Cxyz$	Sistema de coordenadas solidário aos movimentos laterais do rotor

$C\xi\eta z$	Sistema de coordenadas auxiliar
$OXYZ$	Sistema de coordenadas inercial
$P\xi'\eta'z'$	Sistema de coordenadas auxiliar
$P123$	Eixos principais de inércia

SUMÁRIO

1	Introdução	1
2	Compensação Síncrona de Desbalanço	7
2.1	Um Exemplo de Regulação Tradicional	7
2.2	Regulação Síncrona	16
2.2.1	Topologia da Malha de Controle	16
2.2.2	Módulo de Filtragem	20
2.2.3	Módulo de Geração de Sinal	21
2.2.4	Módulo de Regulação	21
2.2.4.1	Algoritmo de Identificação	25
2.2.4.2	Lei de Controle Ótimo	27
2.3	Regulação Síncrona Complexificada	28
2.3.1	Topologia de Separação Direta/Retrógrada	29
2.3.2	Bloco $\mathcal{F}$	33
2.3.2.1	Definição do Operador $\mathcal{F}$	35
2.3.2.2	Propriedades do Operador $\mathcal{F}$	35
2.3.2.3	Aplicação do Operador $\mathcal{F}$	37
2.3.3	Bloco $\mathcal{O}$	37
2.3.4	Controlador Discreto $\mathcal{H}$	38
2.3.4.1	Algoritmo de Identificação	42
2.3.4.2	Lei de Controle Ótimo	47

3	Modelo Discreto Equivalente	50
3.1	Subsistema Contínuo	50
3.2	Sistema Discreto Equivalente	54
3.3	Estabilidade	59
3.4	Desacoplamento entre as Dinâmicas Direta e Retrógrada	60
4	Simulações	65
4.1	Sistema Estabilizado	65
4.2	Aplicação da Regulação Síncrona Complexificada	74
4.3	Comparação entre Tempos de Identificação	80
4.4	Efeito da Anisotropia dos Mancais	82
5	Conclusões	85
	Referências	87
	Apêndice A - Complexificação	89
	Apêndice B - Diagramas para Simulink®	92
	Apêndice C - Programas para MATLAB®	95

1 INTRODUÇÃO

As aplicações de mancais magnéticos ao controle de máquinas rotativas é um campo de pesquisa que já apresentou muitos resultados importantes. Um problema relevante é a estabilização do sistema, pois a força magnética é naturalmente instável por ser inversamente proporcional ao quadrado da distância (SCHWEITZER; MASLEN, 2009). A estabilização somente via controladores lineares e eventualmente linearização exata da força magnética não é capaz de eliminar completamente as vibrações devidas ao desbalanceamento do rotor (SCHWEITZER; MASLEN, 2009). Os modelos dos rotores são comumente complexificados, sendo obtidos através da consideração, entre outras hipóteses, de que a velocidade de rotação do rotor (Ω) é constante (GENTA, 2005). O desbalanceamento é modelado como uma força de perturbação girante da forma $d(t) = D\Omega^2 e^{j\Omega t}$, em geral com D desconhecido, sendo $D \in \mathbb{C}^m$ um vetor que representa a ação do desbalanceamento ao longo dos planos transversais à rotação, e gerado pelas assimetrias geométricas e de distribuição de massa com relação ao eixo de rotação (GENTA, 2005).

Técnicas tradicionais de regulação não são efetivas para eliminar as vibrações devidas ao desbalanceamento do rotor, porque a regulação tradicional produz soluções sintonizadas com a rotação e pouco robustas com relação às incertezas no modelo da planta e à variação da frequência (MIZUNO, 1998). Técnicas de controle robusto, por sua vez, tornam difícil o problema de regulação devido ao fato de rotores possuírem frequências críticas incertas, problema que é agravado para a classe de rotores pouco amortecidos (ver capítulo 2). Uma técnica bastante utilizada é o balanceamento eletrônico de rotores (HERZOG et al., 1996), (LUM; COPPOLA; BERNSTEIN, 1996), (KNOSPE; TAMER; FITTRO, 1997), (KNOSPE; TAMER, 1997a), (KNOSPE; TAMER, 1997b), (MIZUNO, 1998), (DYER, 1999), (CLEMENTS, 2000), (ZHOU; SHI, 2001), (LIU; NONAMI; ARIGA, 2002), (MARKERT; SKRICKA; ZHANG, 2002), (SHI; ZMOOD; QIN, 2002), (TAMISIER; FONT; CARRERE, 2002), (SHI; ZMOOD; QIN, 2004), (CHIBA et al., 2005), (LIANG; YIQING, 2007), (TANAKA; WATANABE; SETO, 2008), (FERNANDES; PEREIRA DA SILVA; ROCHA, 2011). Essa técnica, chamada neste trabalho de compensação síncrona de desbalanceamento, consiste no esquema da figura 1.

Figura 1: Esquema da compensação síncrona de desbalanceo

Fonte: Autor.

Considera-se que o sistema (A, B, C) , linear e invariante no tempo, seja estável, hipótese que não deve ser considerada uma limitação da técnica de compensação síncrona de desbalanceo, uma vez que essa técnica consiste de um controle externo a um sistema previamente estabilizado. O objetivo do controlador discreto externo $\mathcal{H}$ (compensador síncrono) é eliminar as vibrações devidas ao desbalanceo do rotor, além, é claro, de garantir a estabilidade da malha fechada externa. Dessa forma, a estabilização da planta original, assim como o atendimento a critérios de desempenho e robustez, são características atribuídas ao controlador interno projetado previamente.

Ainda se considerando a figura 1, tem-se que o bloco de geração de sinal transforma o fasor $\tilde{u}_k$ no sinal $u(t)$, cujo objetivo é anular o efeito do distúrbio $d(t)$; enquanto o bloco de filtragem determina, através de uma integral de Fourier, a componente de frequência angular Ω do sinal $y(t)$, componente essa denominada $\tilde{y}_k$, que também é um fasor. Isso é feito a cada período de amostragem h , onde h é alto o suficiente para que a resposta permanente de $y(t)$ tenha se estabelecido, de forma que o sistema discreto com entrada $\tilde{u}_k$ e com saída $\tilde{y}_k$ possa ser aproximado por um sistema equivalente, conforme indicado na figura 2.

Figura 2: Esquema da compensação síncrona de desbalanço - Sistema equivalente

Fonte: Autor.

Na figura 2, $G(j\Omega) = G(s)|_{s=j\Omega}$ é a matriz de influência na velocidade angular de rotação Ω , onde $G(s)$ é a matriz de transferência do sistema (A, B, C) ; e $\widetilde{D}_k$ é um fasor que modela o efeito do desbalanço do rotor. Observa-se que a única dinâmica do sistema equivalente é um atraso unitário.

Cumprе ressaltar que, neste trabalho, considera-se a velocidade angular Ω do rotor conhecida com baixa incerteza, sendo fornecida à malha de controle através de um sinal de sincronismo com a rotação. Assim sendo, a frequência e o período do distúrbio também são conhecidos, pois esse distúrbio é causado pelo desbalanço do rotor e possui a mesma frequência f e o mesmo período T da rotação desse rotor.

Ainda se considerando a figura 2, supondo-se que o distúrbio $\widetilde{D}_k$ seja constante e igual a $\widetilde{D}$, tem-se um problema de regulação de um sistema discreto sujeito a um distúrbio constante. A lei de controle utilizada neste trabalho para se resolver esse problema envolve o conhecimento de $G(j\Omega)$. É por essa razão que tal lei de controle é combinada com uma estratégia de identificação de $G(j\Omega)$.

Apresentada a ideia geral da técnica de compensação síncrona de desbalanço, o presente trabalho traz duas contribuições para o tema. A primeira contribuição é a redução do tempo de identificação através de uma transformação de coordenadas reais para coordenadas complexas, o que se chamou, neste trabalho, de complexificação (ver apêndice A). A segunda contribuição é a obtenção do modelo exato do sistema discreto com entrada $\widetilde{u}_k$ e com saída $\widetilde{y}_k$.

Para resumir a primeira contribuição (explicada com detalhes no capítulo 2, seção 2.3), considere, como exemplo, um rotor vertical com dois planos de atuação. Esse rotor possui dois atuadores no plano inferior e dois atuadores no plano superior (4 entradas). Além disso, sensores de vibração são posicionados nesses planos, de forma que sejam medidos dois deslocamentos no plano inferior e dois deslocamentos no plano superior (4 saídas). Isso significa que a identificação da matriz de influência implica na determinação de uma matriz 4×4 , ou seja, na determinação de 16 elementos.

Caso esse mesmo rotor seja descrito em coordenadas complexas, o sistema (A, B, C) passa a ter 2 entradas e 2 saídas (GENTA, 2005). Considerando o modelo complexificado, o distúrbio devido ao desbalanceo é uma perturbação de natureza direta, ou seja, uma perturbação que gira no mesmo sentido de rotação do rotor. Também pode estar presente no sistema uma perturbação de natureza retrógrada, ou seja, uma perturbação que gira no sentido contrário ao da rotação do rotor. Uma causa desse tipo de perturbação pode ser, por exemplo, a anisotropia dos mancais. Um modelo simplificado dessa anisotropia faz aparecer, do ponto de vista da malha de controle, uma componente retrógrada na entrada do sistema. Para anular o efeito dessa componente, é construída uma segunda malha de controle semelhante à da figura 1, mas com alterações nos blocos de filtragem e de geração de sinal.

É importante ressaltar que, considerando-se hipóteses de simetria axial do rotor e de isotropia dos mancais, há um desacoplamento entre a dinâmica direta e a retrógrada, como será evidenciado na seção 3.4. Esse desacoplamento direto-retrógrado, em conjunto com o uso de um modelo complexificado, permite que a primeira malha de controle identifique uma matriz de influência direta, enquanto que a segunda malha identifique uma matriz de influência retrógrada. Cada uma dessas matrizes tem ordem 2, possuindo 4 elementos cada, o que implica em um total de 8 elementos a identificar, reduzindo a complexidade da identificação pela metade. Além disso, a identificação das duas matrizes pode ser feita em paralelo e em apenas dois passos, enquanto que, no esquema tradicional, a identificação requer quatro passos em sequência. Portanto, a identificação no esquema proposto pode ser realizada na metade do tempo da do esquema tradicional.

A segunda contribuição importante desta dissertação (explicada com detalhes no capítulo 3) é a obtenção do modelo exato do sistema discreto com entrada $\tilde{u}_k$ e com saída $\tilde{y}_k$. Através de considerações heurísticas, a literatura afirma que, se o período de amostragem h for suficientemente alto, então esse modelo se aproxima do sistema equivalente da figura 2. No capítulo 3, mostra-se uma técnica de obtenção desse modelo discreto que considera o sistema completo, incluindo o controlador interno de estabilização. Mostra-se, formalmente, que a dinâmica desse modelo tende para $z^{-1}G(j\Omega)$ quando h tende para infinito. A principal utilidade desse resultado é obter uma ferramenta extremamente rápida e eficiente para a simulação do esquema de compensação síncrona de desbalanço, permitindo avaliar a escolha de h sem a necessidade de se simular um complexo modelo em malha fechada, que possui componentes analógicas e discretas, sendo, portanto, um modelo híbrido.

Por fim, a presente dissertação foi organizada em 5 capítulos, e um breve resumo de cada capítulo é dado a seguir.

No capítulo 2, discute-se o porquê de técnicas de regulação tradicional e de técnicas de controle robusto não serem efetivas para eliminar as vibrações devidas ao desbalanço do rotor. Em seguida, é apresentado um resumo da técnica de compensação síncrona de desbalanço utilizada por Fernandes (2012) em seu trabalho. O capítulo é encerrado apresentando-se a técnica de compensação síncrona de desbalanço utilizada nesta dissertação, que constitui a primeira das duas contribuições principais deste trabalho.

No capítulo 3, obtém-se o modelo discreto equivalente do sistema dinâmico com entrada $\tilde{u}_k$ e com saída $\tilde{y}_k$, que constitui a segunda das duas contribuições principais deste trabalho. Esse modelo permite mostrar alguns resultados interessantes como, por exemplo, o fato de que h não precisa ser um múltiplo inteiro de T , como afirmado por alguns autores (veja, por exemplo, Mizuno (1998), Segura (1999), Fernandes (2012)). Na sequência, são apresentados dois teoremas que garantem a estabilidade da metodologia proposta. Ao final do capítulo, mostra-se o desacoplamento entre a compensação das perturbações diretas e a compensação das perturbações retrógradas.

No capítulo 4, é apresentado o modelo de um rotor, assim como um projeto simplificado do controlador interno de estabilização para esse modelo, obtendo-se uma planta estabilizada, na qual é aplicada a metodologia de compensação síncrona de desbalanço apresentada neste trabalho.

Finalmente, o capítulo 5 apresenta as conclusões e as sugestões de estudos futuros.

2 COMPENSAÇÃO SÍNCRONA DE DESBALANÇO

O objetivo deste capítulo é justificar e descrever o uso da metodologia de regulação síncrona para eliminar as vibrações devidas ao desbalanço do rotor.

Inicialmente, apontam-se as limitações da regulação tradicional através de um exemplo. Em seguida, apresenta-se a técnica de compensação síncrona de desbalanço utilizada por Fernandes (2012). A partir dessa técnica, apresenta-se, por fim, a metodologia utilizada neste trabalho, que consiste em se modelar matematicamente cada componente da malha de controle de compensação síncrona. Essa modelagem, apresentada na seção 2.3, consiste numa das contribuições deste trabalho e, no capítulo 3, mostra-se que, sob certas condições, o modelo proposto recupera o modelo utilizado tradicionalmente.

2.1 Um Exemplo de Regulação Tradicional

Considere o sistema massa-mola-amortecedor representado na figura 3.

Figura 3: Sistema massa-mola-amortecedor

Fonte: Autor.

Na figura 3, m_b é a massa do bloco, κ é a constante da mola e c é o coeficiente de atrito viscoso do amortecedor. Tem-se, ainda, as forças $u_b(t)$ e $d_b(t)$, consideradas a entrada e o distúrbio do sistema, respectivamente.

A variável $p(t)$ descreve a posição do bloco no tempo. Considerando-se que em $p(t) = 0$ a mola está em seu estado não-deformado, uma descrição desse sistema em espaço de estados é dada por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{p}(t) \\ \ddot{p}(t) \end{bmatrix}}_{x_b(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{m_b} & -\frac{c}{m_b} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix}}_{x_b(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_b} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} u_b(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_b} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} d_b(t)$$

Admite-se, ainda, que a posição $p(t)$ do bloco possa ser medida, fazendo com que a saída do sistema, denotada por $y_b(t)$, seja dada por:

$$y_b(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_c \underbrace{\begin{bmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix}}_{x_b(t)}$$

A teoria de regulação, tratada neste trabalho como regulação tradicional, trata do problema de se projetar um sistema de controle que elimine assintoticamente o efeito de uma perturbação $d_b(t)$ na saída $y_b(t)$ do sistema. Conforme mostrado em Pereira da Silva (2007), a solução do problema de regulação está diretamente ligada ao princípio do modelo interno, que consiste, em termos amplos, em se incorporar ao sistema original um modelo da perturbação.

A hipótese usual da teoria da regulação é que toda perturbação $d_b(t)$ admissível seja a saída de um sistema linear autônomo conhecido, dado pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \dot{x}_\Omega(t) = A_\Omega x_\Omega(t) \\ y_\Omega(t) = C_\Omega x_\Omega(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

Assim sendo, tem-se que $y_\Omega(t) = d_b(t)$ para alguma condição inicial $x_\Omega(t_0)$ do sistema (2.1).

Para se projetar um sistema de controle que elimine o efeito da perturbação $d_b(t)$, é utilizada a metodologia apresentada em Pereira da Silva (2007). O passo inicial consiste em se definir a topologia da malha de controle. A figura 4 ilustra a topologia escolhida.

Figura 4: Topologia da malha de controle

Fonte: Autor.

Na figura 4, identificam-se os sinais $u_b(t)$, $y_b(t)$ e $d_b(t)$, já definidos. O sistema massa-mola-amortecedor, por sua vez, é representado pelo sistema $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$. O sinal $r_b(t)$ se trata da referência que esse sistema deve seguir. Para o problema de regulação, $r_b(t)$ é identicamente nulo, pois se deseja anular o efeito do distúrbio $d_b(t)$ na saída $y_b(t)$. Tem-se, também, o sinal de erro $e_b(t)$, dado pela diferença entre $r_b(t)$ e $y_b(t)$. Ainda na figura 4, observa-se o compensador de regulação, constituído de dois elementos internos, a saber: um sistema auxiliar $(A_\Omega, B_\Omega, C_\Omega)$ e um compensador interno.

O sistema auxiliar se encarrega justamente de se incorporar ao sistema $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ o modelo da perturbação $d_b(t)$. Por hipótese essa perturbação é desconhecida, mas obedece uma equação linear autônoma conhecida, o que é suficiente para se construir as matrizes A_Ω , B_Ω e C_Ω . A conexão do sistema auxiliar $(A_\Omega, B_\Omega, C_\Omega)$ ao sistema $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ forma o chamado sistema aumentado, conforme ilustra a figura 5.

Figura 5: Sistema aumentado

Fonte: Autor.

Na figura 5, observa-se que o sistema auxiliar $(A_\Omega, B_\Omega, C_\Omega)$ possui entrada $u_\Omega(t)$ e saída $y_\Omega(t)$. Observa-se, também, que o sistema aumentado $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ possui entrada $\hat{u}(t)$ e saída $\hat{y}(t)$. A entrada $\hat{u}(t)$ é um vetor composto pelos sinais $v_b(t)$ e $u_\Omega(t)$, em que $v_b(t)$ é tal que $u_b(t) = (v_b(t) + y_\Omega(t))$. A saída $\hat{y}(t)$, por sua vez, coincide com $y_b(t)$.

Considerando-se $x_\Omega(t)$ o estado do sistema auxiliar, as equações do sistema aumentado podem ser obtidas com o auxílio da figura 5. Essas equações são dadas por:

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_b(t) \\ \dot{x}_\Omega(t) \end{bmatrix}}_{\hat{\dot{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}C_\Omega \\ 0 & A_\Omega \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_b(t) \\ x_\Omega(t) \end{bmatrix}}_{\hat{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{B} & 0 \\ 0 & B_\Omega \end{bmatrix}}_{\hat{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_b(t) \\ u_\Omega(t) \end{bmatrix}}_{\hat{u}(t)} + \begin{bmatrix} \mathcal{B} \\ 0 \end{bmatrix} d_b(t) \\ \hat{y}(t) = y_b(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{C} & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_b(t) \\ x_\Omega(t) \end{bmatrix}}_{\hat{x}(t)} \end{cases}$$

Definidas as matrizes $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, o passo final para se construir o compensador de regulação é se projetar o compensador interno. Conforme demonstrado em Pereira da Silva (2007), para se resolver o problema de regulação, basta se projetar um compensador interno baseado em observador de estados que estabilize o sistema aumentado $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$. Assim sendo, é suficiente verificar se o par $(\hat{A}, \hat{B})$ é estabilizável e se o par $(\hat{A}, \hat{C})$ é detectável para que se tenha uma solução desse problema. A topologia do compensador interno baseado em observador de estados é dada pela figura 6.

Figura 6: Topologia do compensador interno

Fonte: Autor.

Na figura 6 são identificados os sinais $e_b(t)$ e $\hat{u}(t)$, já definidos. A matriz I se trata da matriz identidade, enquanto as matrizes $\hat{K}_c$ e $\hat{H}_c$ se tratam dos parâmetros livres do compensador, devendo ser projetadas de tal modo que $(\hat{A} - \hat{B}\hat{K}_c)$ e $(\hat{A} - \hat{H}_c\hat{C})$ sejam estáveis. A prova de que a topologia apresentada na figura 6 permite o projeto de $\hat{K}_c$ e de $\hat{H}_c$ separadamente (Teorema da Separação Determinística) pode ser encontrada em Cruz (1996).

Para ilustrar a metodologia apresentada, lança-se mão de um exemplo numérico. As constantes do sistema massa-mola-amortecedor são arbitradas em $m_b = 1$ kg, $\kappa = 1$ N/m e $c = 0,1$ N·s/m. Na ausência do distúrbio $d_b(t)$, a função de transferência desse sistema, denotada por $\mathcal{G}(s)$, é dada por:

$$\mathcal{G}(s) = \frac{Y_b(s)}{U_b(s)} = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} = \frac{1}{s^2 + 0,1s + 1}$$

Em que $U_b(s)$ e $Y_b(s)$ são, respectivamente, as transformadas de Laplace da entrada $u_b(t)$ e da saída $y_b(t)$. Com o auxílio da função de transferência $\mathcal{G}(s)$, os polos do sistema massa-mola-amortecedor podem ser calculados, sendo dados por, aproximadamente, $(-0,05 \pm 0,9987j)$. Como a parte real desses polos é negativa, conclui-se que esse sistema é estável. Sabendo-se disso, e ainda se desconsiderando o distúrbio, determina-se a resposta em frequência desse sistema, apresentada na figura 7.

Figura 7: Resposta em frequência do sistema massa-mola-amortecedor

Fonte: Autor.

Agora, considera-se o distúrbio como sendo da forma:

$$d_b(t) = d_1 \cos(\Omega t) + d_2 \sin(\Omega t) \quad (2.2)$$

Na equação (2.2), tem-se que Ω é conhecido, mas d_1 e d_2 não o são. É possível verificar que essa equação satisfaz à seguinte equação autônoma:

$$\ddot{d}_b(t) + \Omega^2 d_b(t) = 0$$

Dessa forma, conforme mostrado em Pereira da Silva (2007), constrói-se o seguinte sistema auxiliar:

$$A_\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & 0 \end{bmatrix} \quad B_\Omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Considerando-se, por exemplo, $\Omega = 1$ rad/s, e conectando-se o sistema auxiliar $(A_\Omega, B_\Omega, C_\Omega)$ ao sistema (A, B, C) , obtém-se o sistema aumentado $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$, cujas matrizes são dadas por:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -0,1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por fim, parte-se para o projeto do compensador interno, feito através da determinação das matrizes $\hat{K}_c$ e $\hat{H}_c$. Pode-se verificar que o par $(\hat{A}, \hat{B})$ é controlável e que o par $(\hat{A}, \hat{C})$ é observável. Dessa forma, calcula-se $\hat{K}_c$ de tal forma que os autovalores de $(\hat{A} - \hat{B}\hat{K}_c)$ formem o conjunto $\{-3, -2, -1 \pm 1j\}$, enquanto $\hat{H}_c$ é calculada de tal forma que os autovalores de $(\hat{A} - \hat{H}_c\hat{C})$ formem o conjunto $\{-6, -5, -4 \pm 1j\}$. A escolha desses conjuntos é arbitrária. Obtém-se, assim:

$$\hat{K}_c = \begin{bmatrix} 0,7824 & 2,7482 & -1,9428 & -1,4384 \\ 1,8623 & 0,5107 & 2,6578 & 4,1518 \end{bmatrix} \quad \hat{H}_c = \begin{bmatrix} 18,90 \\ 131,11 \\ 408,00 \\ 376,00 \end{bmatrix}$$

Para se verificar o comportamento do sistema em malha fechada, considere novamente a figura 4. O distúrbio $d_b(t)$ tem a forma da equação (2.2), em que, para o exemplo em questão, já se arbitrou $\Omega = 1$ rad/s. Considera-se, ainda, $d_1 = d_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ N. Assim sendo, a saída $y_b(t)$ do sistema pode ser simulada, sendo apresentada na figura 8.

Figura 8: Resposta temporal do sistema em malha fechada

Fonte: Autor.

Observa-se que o compensador de regulação projetado anula o efeito da perturbação $d_b(t)$. Para se fazer uma análise da robustez da regulação desse compensador, determina-se a resposta em frequência do sistema em malha fechada, considerando-se $d_b(t)$ como entrada e $y_b(t)$ como saída. A figura 9 apresenta essa resposta em frequência.

Figura 9: Resposta em frequência do sistema em malha fechada

Fonte: Autor.

Nota-se que o controlador proposto é pouco robusto em relação à regulação, porque pequenas variações na frequência do distúrbio resultam em grandes variações no ganho de malha fechada. Além disso, mesmo os parâmetros do sistema estão sujeitos a incertezas e a variações, de forma que tanto o pico da figura 7 quanto a frequência em que o mesmo ocorre não são perfeitamente conhecidos, podendo variar dentro de uma determinada faixa.

Essas considerações sugerem o uso da teoria de controle robusto no projeto do compensador de regulação. Nessa teoria, há um compromisso entre desempenho e estabilidade (CRUZ, 1996), compromisso esse que exige um ganho alto na banda de frequências em que se deseja efetivamente controlar o sistema e um ganho baixo na banda de frequências em que se tem elevadas incertezas de modelagem.

Entretanto, para se contornar esses problemas, não se utilizou a teoria de controle robusto neste trabalho, optando-se pela teoria de regulação síncrona (explicada nas seções 2.2 e 2.3). A principal motivação para essa escolha se deve à incerteza com relação à frequência em que ocorre o pico de ressonância. Em dinâmica de rotores, além das incertezas de modelagem e dos erros devidos à linearização, ocorre ainda o efeito giroscópico, que implica na dependência das frequências críticas com a própria rotação do rotor (GENTA, 2005).

Em resumo, o projeto do compensador de regulação utilizando a teoria de controle robusto se torna um problema difícil. A variação da frequência de perturbação exige um reprojetado do compensador para cada frequência, respeitando-se critérios de robustez de desempenho e de estabilidade. Além disso, para a classe de rotores pouco amortecidos, as frequências críticas incertas podem gerar ganho de malha alto em uma banda de frequências com elevado erro de modelagem. Isso torna o desempenho e a robustez do controlador critérios muito conflitantes, levando a uma solução robusta com baixo desempenho ou a uma solução pouco robusta com bom desempenho.

2.2 Regulação Síncrona

Vistas as limitações da regulação tradicional, apresenta-se, nesta seção, a técnica de compensação síncrona de desbalanço utilizada por Fernandes (2012).

A regulação síncrona consiste numa alternativa para se anular o efeito das vibrações presentes num rotor causadas pelo seu desbalanço. Para explicar essa técnica, a abordagem adotada neste trabalho é a de apresentar a topologia da malha de controle utilizada, explicando e interpretando cada elemento dessa malha.

Com o objetivo de manter a uniformidade de notação ao longo da presente dissertação, assim como construir um paralelismo entre a metodologia utilizada por Fernandes (2012) e a utilizada neste trabalho, algumas alterações são deliberadamente realizadas tanto em relação à notação utilizada quanto em relação ao conteúdo apresentado por Fernandes (2012). Dessa forma, a explicação apresentada aqui não é suficiente para reproduzir a metodologia proposta por Fernandes (2012), devendo o leitor recorrer ao trabalho desse autor para tal fim.

2.2.1 Topologia da Malha de Controle

Considere um sistema (A, B, C) estável, com uma entrada e com uma saída (sistema SISO, da sigla em inglês *Single Input Single Output*), sujeito a um distúrbio $d(t)$. O número de entradas está relacionado à quantidade de planos de ação dos atuadores, enquanto o número de saídas está relacionado à quantidade de sensores de vibração. A malha de regulação síncrona utilizada para anular o efeito desse distúrbio é apresentada na figura 10.

Figura 10: Regulação síncrona - Distúrbio na entrada do sistema

Fonte: Autor.

A hipótese de que o sistema (A, B, C) seja estável é necessária para o funcionamento do módulo de filtragem, conforme é mostrado na seção 2.2.2. Entretanto, essa condição não deve ser entendida como uma limitação da regulação síncrona, uma vez que essa técnica se trata de um controle externo a um rotor previamente estabilizado, com o objetivo de eliminar completamente as vibrações devidas ao desbalanço desse rotor, além, é claro, de garantir a estabilidade da malha fechada externa.

Assim sendo, o sistema (A, B, C) é considerado conhecido, mas possivelmente incerto. Em outras palavras, o projeto do controlador interno de estabilização não é tratado no trabalho de Fernandes (2012), cujo foco é o projeto do controlador externo (regulador síncrono).

Considere novamente a figura 10. Observa-se, além do sistema (A, B, C) , a presença do bloco A/D (conversor analógico-digital, amostrador), a do bloco D/A (conversor digital-analógico, sendo este um segurador de ordem zero), a do módulo de filtragem (explicado na seção 2.2.2), a do módulo de geração de sinal (explicado na seção 2.2.3), a do módulo de regulação (explicado na seção 2.2.4) e, finalmente, a do módulo de sincronismo.

É importante frisar que a taxa de amostragem dos conversores A/D e D/A, correspondente aos sinais discretos y_n e u_n , é diferente da taxa de amostragem do módulo de regulação, correspondente aos sinais discretos $\tilde{y}_k$ e $\tilde{u}_k$. O módulo de regulação tem um período de amostragem h , onde h é alto o bastante para que a resposta permanente de $y(t)$ tenha se estabelecido com precisão suficiente nesse intervalo h . Já os conversores têm um período de amostragem t_n , que é uma pequena fração de h .

O módulo de sincronismo, por sua vez, tem a função de gerar um sinal de sincronismo com a rotação. Isso é feito através de algum processo físico, sendo os mais comuns processos óticos ou magnéticos. Um exemplo da geração desse sinal por processo ótico é descrito a seguir. Considere a área lateral do rotor. Faz-se a marcação de um ponto dessa área lateral com algum material opaco. Posiciona-se um feixe de luz de forma a incidir sobre esse ponto, assim como se posiciona um sensor que meça a reflexão desse feixe. À medida que o rotor gira, o ponto opaco interrompe a reflexão da luz do feixe luminoso, gerando o chamado pulso de sincronismo. A diferença entre os dois últimos instantes do pulso de sincronismo é o período de rotação do rotor, denominado T .

Determinado o período T de rotação do rotor, o cálculo de sua frequência f e de sua velocidade angular Ω é imediato. Cada elemento da malha de controle ao qual o módulo de sincronismo está conectado pode fazer uso de uma ou mais dessas informações.

Cumprе ressaltar que o distúrbio $d(t)$ não é qualquer, pois se trata da modelagem do desbalanço do rotor, assumindo a forma $d(t) = D\Omega^2 \cos(\Omega t + \delta)$. Os parâmetros $D, \delta \in \mathbb{R}$ são desconhecidos, mas $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ é conhecido e se trata da própria velocidade angular do rotor. Além disso, ressalta-se também que o período de amostragem h do módulo de regulação deve ser maior que o período T do distúrbio, enquanto o período de amostragem t_n dos conversores é uma fração de T .

Em linhas gerais, o objetivo do regulador síncrono é gerar um sinal $u(t)$ que tenha a mesma frequência f do distúrbio, com mesma amplitude mas com fase tal que cancele esse distúrbio, anulando a saída $y(t)$. Para gerar esse sinal, o módulo de regulação fica a cargo de fornecer as informações de amplitude e fase, enquanto o módulo de geração de sinal é responsável por construir um sinal cossenoidal de frequência f .

com a amplitude e a fase fornecidas. As informações de amplitude e fase são fornecidas pelo módulo de regulação a cada período de h segundos, na forma de um sinal discreto complexo $\tilde{u}_k$, de modo que $u(t)$ é dado por:

$$u(t) = |\tilde{u}_k| \cos(\Omega t + \angle \tilde{u}_k), \quad t \in [kh, (k+1)h), \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

Na equação (2.3), $|\tilde{u}_k|$ é o módulo do número complexo $\tilde{u}_k$ e representa a amplitude de $u(t)$, enquanto $\angle \tilde{u}_k$ é o argumento principal de $\tilde{u}_k$ e representa a fase de $u(t)$.

Dessa forma, como a entrada do sistema (A, B, C) é a soma dos sinais $u(t)$ e $d(t)$, ambos cossenoidais de frequência f , e como esse mesmo sistema é estável, sua saída $y(t)$ é dada por:

$$y(t) = \underbrace{|\tilde{y}_k| \cos(\Omega t + \angle \tilde{y}_k)}_{\text{resposta permanente}} + \text{resposta transitória}, \quad t \in [kh, (k+1)h), \quad k \in \mathbb{N}$$

Para h suficientemente alto, $y(t)$ tende para sua resposta permanente, que também é cossenoidal de frequência f , mas com amplitude $|\tilde{y}_k|$ e fase $\angle \tilde{y}_k$. A função do módulo de filtragem é justamente extrair as informações de amplitude e fase dessa resposta permanente, armazenadas na forma do sinal discreto complexo $\tilde{y}_k$. Para isso, o módulo de filtragem faz uso de elementos da Teoria de Séries Discretas de Fourier, uma vez que tem como entrada apenas amostras de $y(t)$, denotadas por y_n , conforme indicado na figura 10.

Por fim, caso se tenha um sistema (A, B, C) com múltiplas entradas e com múltiplas saídas (sistema MIMO, da sigla em inglês *Multiple Input Multiple Output*), basta que se construam tantos módulos de geração de sinal quantos forem os atuadores, assim como tantos módulos de filtragem quantos forem os sensores de vibração.

Apresentada a ideia geral da técnica de compensação síncrona de desbalanço utilizada por Fernandes (2012), as próximas seções têm por objetivo dar uma explicação mais detalhada do módulo de filtragem, do módulo de geração de sinal e do módulo de regulação, respectivamente, ainda se considerando o sistema (A, B, C) SISO.

2.2.2 Módulo de Filtragem

Conforme já mencionado, o objetivo do módulo de filtragem é extrair as informações de amplitude e fase da saída $y(t)$, considerando-se um tempo suficientemente elevado para que a resposta transitória seja desprezível. Para isso, esse módulo faz uso de alguns aspectos da Teoria de Séries Discretas de Fourier, apresentados a seguir.

Seja $\phi(t)$ um sinal analógico, periódico de período T , amostrado em intervalos de tempo t_n , com $t_n = \frac{T}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$. Considere que $t_n < \frac{T}{2}$, ou seja, que o sinal $\phi(t)$ é amostrado de acordo com o que preconiza o Teorema da Amostragem. Sendo $\phi_n = \phi(t)|_{t=nt_n}$, tem-se que $\phi_{n+N} = \phi_n$, ou seja, N é o período da série discreta ϕ_n . Além disso, pode-se escrever:

$$\phi_n = \sum_{\eta=0}^{N-1} c_\eta e^{j\left(\eta \frac{2\pi}{N}\right)n} \quad (2.4)$$

Note que os números c_η são os coeficientes da série discreta de Fourier, com $c_\eta \in \mathbb{C}$, $\eta \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, podendo ser calculados através da seguinte expressão:

$$c_\eta = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \phi_n e^{-j\left(\eta \frac{2\pi}{N}\right)n} \quad (2.5)$$

Voltando-se ao problema de regulação síncrona, o objetivo do módulo de filtragem é extrair, a cada período de h segundos, as informações de amplitude e fase da resposta permanente de $y(t)$, cujo período é T . Para isso, o intervalo h é subamostrado em intervalos ainda menores, de tamanho t_n , gerando a série y_n . Como esse módulo tem acesso apenas às amostras y_n , o mesmo deve extrair a amplitude e a fase da componente de período N de y_n . Uma vez que a série y_n pode ser descrita de acordo com a equação (2.4), as informações de amplitude e fase da componente de período N de y_n podem ser obtidas fazendo-se $\eta = 1$ na equação (2.5). Posteriormente, faz-se $\tilde{y}_k = 2c_1$ (o motivo de se multiplicar c_1 por 2 é exposto na seção 2.3.2).

Na dissertação de Fernandes (2012), N não é o período fundamental de y_n , mas sim um múltiplo inteiro desse período. Essa mudança deve ser acompanhada de um ajuste adequado em η para que $\tilde{y}_k$ continue armazenando corretamente as informações de amplitude e fase da resposta permanente de $y(t)$.

Finalmente, para que a resposta transitória de $y(t)$ não influencie o cálculo de $\tilde{y}_k$, a primeira metade dos valores da série y_n é desconsiderada, utilizando-se apenas os valores da segunda metade dessa série no cálculo de $\tilde{y}_k$. Ressalta-se que esse cálculo é feito a cada intervalo de h segundos. No trabalho de Fernandes (2012), N é justamente a quantidade de amostras obtidas em uma metade do intervalo h .

2.2.3 Módulo de Geração de Sinal

A função do módulo de geração de sinal é produzir, a cada período de h segundos, um sinal da forma da equação (2.3). Para isso, esse módulo utiliza as informações de amplitude e fase fornecidas pelo módulo de regulação na forma do sinal discreto complexo $\tilde{u}_k$. Entretanto, o módulo de geração de sinal não produz o sinal contínuo dado pela equação (2.3), mas sim um sinal discreto u_n da forma:

$$u_n = |\tilde{u}_k| \cos \left(\frac{2\pi}{N}n + \angle \tilde{u}_k \right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.6)$$

Para se obter a equação (2.6), considera-se $u_n = u(t)|_{t=nt_n}$, com $u(t)$ dado pela equação (2.3); assim como $t_n = \frac{T}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $t_n < \frac{T}{2}$, consideração idêntica à realizada no módulo de filtragem.

Por fim, o conversor digital-analógico (segurador de ordem zero) transforma o sinal discreto u_n no sinal analógico $u_{\overline{n}}(t)$, dado por:

$$u_{\overline{n}}(t) = |\tilde{u}_k| \cos \left(\frac{2\pi}{N}n + \angle \tilde{u}_k \right), \quad t \in [nt_n, (n+1)t_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Vale lembrar que os valores de $|\tilde{u}_k|$ e $\angle \tilde{u}_k$ são atualizados a cada período de h segundos.

2.2.4 Módulo de Regulação

O módulo de regulação é responsável por fornecer o sinal $\tilde{u}_k$ ao módulo de geração de sinal, recebendo o sinal $\tilde{y}_k$ do módulo de filtragem. É no módulo de regulação que está presente a lei de controle, cujo objetivo é tornar nula a saída $y(t)$.

Para descrever esse módulo, considere novamente a figura 10. Lembrando-se que $d(t) = D\Omega^2 \cos(\Omega t + \delta)$, assumamos que o fasor $\widetilde{D}$ contenha as informações de amplitude e fase de $d(t)$. Suponha que, dadas as informações de amplitude e fase, o módulo de geração de sinal reconstrua perfeitamente a cossenoide de frequência f , com $f = \frac{\Omega}{2\pi}$. Suponha também que as características da perturbação (frequência, amplitude e fase) variem lentamente, sendo constantes dentro do intervalo de tempo h , mas podendo variar de um intervalo a outro. Dessa forma, o efeito da aplicação do distúrbio $d(t)$ na entrada do sistema (A, B, C) é o mesmo efeito da aplicação do distúrbio $\widetilde{D}_k$ na entrada do módulo de geração de sinal, conforme ilustra a figura 11.

Figura 11: Regulação síncrona - Distúrbio na entrada do módulo de geração de sinal

Fonte: Autor.

Como, por hipótese, o módulo de geração de sinal reconstrói perfeitamente a cossenoide de frequência f , os sinais discretos complexos $\tilde{u}_k$ e $\widetilde{D}_k$ geram perfeitamente os sinais $u(t)$ e $d(t)$, respectivamente.

Adicionalmente às hipóteses anteriores, suponha ainda que h seja suficientemente alto para que a resposta permanente tenha se estabelecido nesse intervalo h . Seja ainda $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ a função de transferência do sistema (A, B, C) , com $G(j\Omega) = G(s)|_{s=j\Omega}$ o respectivo coeficiente de influência na velocidade angular de rotação Ω . Dessa forma, pode-se considerar um sistema equivalente, com entrada $\tilde{u}_k$ e com saída $\tilde{y}_k$, dado pela figura 12 (em que se omitiu o módulo de sincronismo).

Figura 12: Regulação síncrona - Sistema equivalente

Fonte: Autor.

Percebe-se, da figura 12, que a única dinâmica do sistema equivalente se trata de um atraso unitário. Assim sendo, por vezes na presente dissertação, esse sistema equivalente é referido como um sistema estático.

No trabalho de Fernandes (2012), a substituição de toda a dinâmica presente na figura 11 pelo sistema equivalente estático da figura 12 é feita através de argumentação heurística. No capítulo 3 do presente trabalho, essa afirmação é demonstrada formalmente. Em ambos os trabalhos, a principal hipótese subjacente para realizar essa substituição é h ser suficientemente alto.

Construído o sistema equivalente, nota-se que o objetivo do módulo de regulação é anular o efeito do distúrbio $\widetilde{D}_k$, levando a saída $\widetilde{y}_k$ a zero. Para isso, é utilizada a lei de controle ótimo proposta por Dyer (1999), que, por sua vez, faz uso de estimativas de $G(j\Omega)$. Essas estimativas são calculadas através de um algoritmo de identificação. Como esse cálculo é realizado em tempo real, o controle é dito adaptativo.

Nas próximas duas seções, são apresentados, respectivamente, o algoritmo de identificação e a lei de controle utilizados por Fernandes (2012). Essa apresentação é feita já se considerando o sistema (A, B, C) MIMO, com m entradas e com l saídas. Dessa forma, $G(j\Omega)$ passa a ser uma matriz, chamada matriz de influência.

O módulo de regulação consiste, portanto, de duas estratégias complementares:

- Um algoritmo de identificação da matriz de influência $G(j\Omega)$.
- Um algoritmo de controle propriamente dito.

O algoritmo de identificação utiliza $(m + 1)$ passos, entre sinais de identificação e de controle, para obter uma estimativa de $G(j\Omega)$ (estimativa essa eventualmente filtrada, conforme mostrado na seção 2.2.4.1). A cada $(m - 1)$ passos de identificação, um sinal de controle é gerado. Assim sendo, os sinais $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_{m-1}$ perturbam a planta deliberadamente para poder identificá-la, e o sinal $\tilde{u}_m$ é um sinal de controle. Após isso, os sinais $\tilde{u}_{m+1}, \tilde{u}_{m+2}, \dots, \tilde{u}_{2m-1}$ perturbam a planta para poder identificá-la, o sinal $\tilde{u}_{2m}$ é um sinal de controle, e assim por diante.

Com o objetivo de simplificar a descrição dos algoritmos utilizados por Fernandes (2012), denotam-se os sinais de controle, assim como suas respectivas saídas, por:

$$\begin{cases} \hat{u}_l = \tilde{u}_{lm} \\ \hat{y}_l = \tilde{y}_{lm} \end{cases}, \quad l \in \mathbb{N}$$

Portanto, o índice das atuações de controle é $l \in \mathbb{N}$. Por sua vez, os sinais que perturbam a planta com o objetivo de identificá-la, assim como suas respectivas saídas, são denotados por:

$$\begin{cases} \hat{u}_l^j = \tilde{u}_{lm+j} \\ \hat{y}_l^j = \tilde{y}_{lm+j} \end{cases}, \quad j \in \{0, 1, \dots, m\}, \quad l \in \mathbb{N}$$

Com essa notação, tem-se $\hat{u}_l^0 = \hat{u}_l$ e $\hat{u}_l^m = \hat{u}_{l+1}$, bem como $\hat{y}_l^0 = \hat{y}_l$ e $\hat{y}_l^m = \hat{y}_{l+1}$. Para $m = 4$ e $l \in \{0, 1, 2\}$, por exemplo, obtém-se:

$$\begin{aligned} (\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4, \tilde{u}_5, \tilde{u}_6, \tilde{u}_7, \tilde{u}_8) &= (\hat{u}_0, \hat{u}_0^1, \hat{u}_0^2, \hat{u}_0^3, \hat{u}_1, \hat{u}_1^1, \hat{u}_1^2, \hat{u}_1^3, \hat{u}_2) \\ (\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \tilde{y}_4, \tilde{y}_5, \tilde{y}_6, \tilde{y}_7, \tilde{y}_8) &= (\hat{y}_0, \hat{y}_0^1, \hat{y}_0^2, \hat{y}_0^3, \hat{y}_1, \hat{y}_1^1, \hat{y}_1^2, \hat{y}_1^3, \hat{y}_2) \end{aligned}$$

Nesse exemplo, as entradas $\tilde{u}_0 = \hat{u}_0$, $\tilde{u}_4 = \hat{u}_1$ e $\tilde{u}_8 = \hat{u}_2$ são sinais de controle, com $\tilde{y}_0 = \hat{y}_0$, $\tilde{y}_4 = \hat{y}_1$ e $\tilde{y}_8 = \hat{y}_2$ suas respectivas saídas, enquanto as demais entradas são sinais de identificação, com suas respectivas saídas.

Pode-se optar, como em Dyer (1999) e em Fernandes (2012), em se utilizar duas entradas de controle consecutivas para se realizar a identificação, mas isso pode trazer problemas quando a entrada de controle convergir para o regime.

2.2.4.1 Algoritmo de Identificação

Considere novamente a figura 12. Suponha que o distúrbio $\widetilde{D}_k$ seja constante e igual a $\widetilde{D}$. Suponha também que $G(j\Omega)$ não varie. Escreve-se:

$$\hat{y}_l^{j+1} = G(j\Omega) (\hat{u}_l^j + \widetilde{D}) \quad (2.7)$$

$$\hat{y}_l^{j+2} = G(j\Omega) (\hat{u}_l^{j+1} + \widetilde{D}) \quad (2.8)$$

Subtraindo-se a equação (2.7) da equação (2.8), obtém-se:

$$\hat{y}_l^{j+2} - \hat{y}_l^{j+1} = G(j\Omega) (\hat{u}_l^{j+1} - \hat{u}_l^j) \quad (2.9)$$

A equação (2.9) é o princípio do algoritmo de identificação proposto. Para se calcular uma estimativa da matriz de influência, denotada por G_l , utiliza-se a seguinte equação:

$$G_l = (\Delta \hat{Y}_l) (\Delta \hat{U}_l)^{-1}, \quad l \in \mathbb{N}^* \quad (2.10)$$

Em que:

$$\Delta \hat{U}_l = \begin{bmatrix} \hat{u}_l^1 - \hat{u}_l^0 & \hat{u}_l^2 - \hat{u}_l^1 & \dots & \hat{u}_l^m - \hat{u}_l^{m-1} \end{bmatrix}$$

$$\Delta \hat{Y}_l = \begin{bmatrix} \hat{y}_l^2 - \hat{y}_l^1 & \hat{y}_l^3 - \hat{y}_l^2 & \dots & \hat{y}_l^{m+1} - \hat{y}_l^m \end{bmatrix}$$

As matrizes $\Delta \hat{U}_l$ e $\Delta \hat{Y}_l$ são matrizes cujas colunas são as variações dos vetores de entrada e de saída, respectivamente. Observa-se que $\Delta \hat{U}_l$ é quadrada ($m \times m$), enquanto $\Delta \hat{Y}_l$ é retangular ($l \times m$). São necessários $(m + 1)$ passos discretos para se construir $\Delta \hat{U}_l$, escolhidos de tal forma que essa matriz seja não singular para que a equação (2.10) esteja definida. Ainda em relação a essa equação, utilizam-se ambas as entradas de controle $\hat{u}_l^0 = \hat{u}_l$ e $\hat{u}_l^m = \hat{u}_{l+1}$ para realizar a identificação do sistema (DYER, 1999), (FERNANDES, 2012). Essa não é a escolha realizada neste trabalho, pois tal escolha implica em uma baixa efetividade da identificação quando o controle tender para o regime. Em regime, a diferença $(\hat{u}_{l+1} - \hat{u}_l)$ tende à zero, e isso implica que $\Delta \hat{U}_l$ tende para uma matriz singular, conforme mostrado a seguir.

No trabalho de Fernandes (2012), os sinais de identificação são gerados através da seguinte equação:

$$\hat{w}_l^j = \hat{w}_l^{j-1} + \text{diag}(\Gamma_j) (\hat{w}_{l+1} - \hat{w}_l), \quad j \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (2.11)$$

Na equação (2.11), $\text{diag}(\Gamma_j)$ é uma matriz diagonal cuja diagonal principal é formada pelos elementos da j -ésima coluna da matriz simétrica Γ , definida a seguir:

$$\Gamma_{m \times m} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m - m\gamma + \gamma} & \frac{1 - \gamma}{m - m\gamma + \gamma} & \cdots & \frac{1 - \gamma}{m - m\gamma + \gamma} \\ \frac{1 - \gamma}{m - m\gamma + \gamma} & \frac{1}{m - m\gamma + \gamma} & \cdots & \frac{1 - \gamma}{m - m\gamma + \gamma} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1 - \gamma}{m - m\gamma + \gamma} & \frac{1 - \gamma}{m - m\gamma + \gamma} & \cdots & \frac{1}{m - m\gamma + \gamma} \end{bmatrix}$$

Onde γ é um parâmetro que varia no intervalo $(0, 1]$ e define a independência dos sinais de identificação. Uma análise mais detalhada sobre o parâmetro γ é dada em Fernandes (2012).

Nota-se, da equação (2.11), o porquê de tal estratégia poder gerar problemas de identificação em regime. Conforme já mencionado, em regime, a diferença $(\hat{w}_{l+1} - \hat{w}_l)$ torna-se pequena, fazendo com que os sinais de identificação tendam à zero e, consequentemente, fazendo com que $\Delta \hat{U}_l$ tenda a uma matriz singular.

A equação (2.11) é utilizada para a determinação de $\hat{w}_l^j$ com $j \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$. Para $j = m$, a equação (2.11) se verifica, mas não é utilizada para se determinar $\hat{w}_l^j$, pois, nesse ponto, tem-se $\hat{w}_l^j = \hat{w}_l^m = \hat{w}_{l+1}$, ou seja, $\hat{w}_l^j$ é um sinal de controle, calculado de acordo com a lei de controle apresentada na próxima seção.

Por fim, Fernandes (2012) não utiliza a equação (2.10) para cada estimativa de $G(j\Omega)$. O resultado da equação (2.10), combinado com o resultado de uma estimativa imediatamente anterior, é atribuído a G_l . Essa combinação é feita através de um fator de esquecimento β , que varia no intervalo $[0, 1]$. A equação final fica:

$$G_l = (1 - \beta)G_{l-1} + \beta (\Delta \hat{Y}_l) (\Delta \hat{U}_l)^{-1}, \quad l \in \mathbb{N}^* \quad (2.12)$$

O parâmetro β deve ser escolhido pelo projetista, assim como a primeira estimativa G_0 . A equação (2.12), uma média móvel ponderada, é utilizada para se mitigar o efeito do ruído de medição das variáveis $\tilde{u}_k$ e $\tilde{y}_k$ (DYER, 1999). Valores baixos de β apresentam melhores resultados em sistemas com dinâmica lenta e com alto ruído de medição; enquanto valores altos de β podem ser utilizados em sistemas com dinâmica rápida com o propósito de se obter uma convergência de estimação mais rápida (FERNANDES, 2012).

2.2.4.2 Lei de Controle Ótimo

A lei de controle utilizada por Fernandes (2012) em seu trabalho, extraída do trabalho de Dyer (1999), é dada por:

$$\hat{u}_l = \left(G_{l-1}^H Q G_{l-1} + R + S \right)^{-1} \left[\left(G_{l-1}^H Q G_{l-1} + S \right) \hat{u}_{l-1} - G_{l-1}^H Q \hat{y}_l \right], \quad l \in \mathbb{N}^* \quad (2.13)$$

Na equação (2.13), H denota a operação matricial hermitiana (transposta da complexa conjugada). Essa equação se trata de uma lei de controle ótimo, obtida minimizando-se, com respeito ao vetor de controle $\hat{u}_l$, a seguinte função objetivo:

$$J = \frac{1}{2} \hat{y}_{l+1}^H Q \hat{y}_{l+1} + \frac{1}{2} \hat{u}_l^H R \hat{u}_l + \frac{1}{2} (\hat{u}_l - \hat{u}_{l-1})^H S (\hat{u}_l - \hat{u}_{l-1}) \quad (2.14)$$

No trabalho de Fernandes (2012) é apresentada toda a dedução que leva a equação (2.14) à equação (2.13). As matrizes Q , R e S são matrizes de ponderação da saída, da entrada e da taxa de mudança da entrada, respectivamente. Todas devem ser semidefinidas positivas, com ao menos uma delas definida positiva. Caso somente Q seja definida positiva, a matriz G_{l-1} deve ter posto completo.

Considere, agora, a equação (2.11), com $m = 4$. Para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $l = 0$, escreve-se:

$$\begin{aligned}\hat{u}_0^1 &= \hat{u}_0^0 + \text{diag}(\Gamma_1)(\hat{u}_1 - \hat{u}_0) = \hat{u}_0 + \text{diag}(\Gamma_1)(\hat{u}_1 - \hat{u}_0) \\ \hat{u}_0^2 &= \hat{u}_0^1 + \text{diag}(\Gamma_2)(\hat{u}_1 - \hat{u}_0) \\ \hat{u}_0^3 &= \hat{u}_0^2 + \text{diag}(\Gamma_3)(\hat{u}_1 - \hat{u}_0) \\ \hat{u}_0^4 &= \hat{u}_0^3 + \text{diag}(\Gamma_4)(\hat{u}_1 - \hat{u}_0) = \hat{u}_0 + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^4 \text{diag}(\Gamma_i)\right)}_I (\hat{u}_1 - \hat{u}_0) = \hat{u}_1\end{aligned}$$

Observa-se que, para $j = 4$, a equação (2.11) se reduz à identidade $\hat{u}_0^4 = \hat{u}_1$ independentemente do parâmetro γ da matriz Γ . Em outras palavras, a equação (2.11) se verifica, conforme já mencionado. Observa-se também que, para se determinar os sinais de identificação $\hat{u}_0^1$, $\hat{u}_0^2$ e $\hat{u}_0^3$, é necessário o conhecimento dos sinais de controle $\hat{u}_0$ e $\hat{u}_1$. O sinal $\hat{u}_0$ deve ser escolhido pelo projetista. O sinal $\hat{u}_1$, por sua vez, é calculado pela equação (2.13) conforme a seguir:

$$\hat{u}_1 = \left(G_0^H Q G_0 + R + S\right)^{-1} \left[\left(G_0^H Q G_0 + S\right) \hat{u}_0 - G_0^H Q \hat{y}_1\right]$$

Portanto, o cálculo do sinal de controle $\hat{u}_1$ não depende dos sinais de identificação $\hat{u}_0^1$, $\hat{u}_0^2$ e $\hat{u}_0^3$. Arbitrado $\hat{u}_0$ e calculado $\hat{u}_1$, podem-se calcular os sinais $\hat{u}_0^1$, $\hat{u}_0^2$ e $\hat{u}_0^3$. Assim sendo, arbitra-se e transmite-se para a planta o sinal de controle $\hat{u}_0$. Em seguida, apenas calcula-se o sinal $\hat{u}_1$. Após isso, são calculados e transmitidos para a planta os sinais de identificação $\hat{u}_0^1$, $\hat{u}_0^2$ e $\hat{u}_0^3$, em sequência. Só então é transmitido o sinal $\hat{u}_1$, já conhecido. O ciclo se repete depois da transmissão de $\hat{u}_1$, iniciando-se pelo cálculo de G_1 e de $\hat{u}_2$. Conhecidos $\hat{u}_1$ e $\hat{u}_2$, são calculados e transmitidos para a planta os sinais de identificação $\hat{u}_1^1$, $\hat{u}_1^2$ e $\hat{u}_1^3$, em sequência. Só então é transmitido o sinal já conhecido $\hat{u}_2$, e assim por diante.

2.3 Regulação Síncrona Complexificada

Apresenta-se, agora, a técnica de compensação síncrona de desbalanço utilizada neste trabalho, que foi baseada na técnica utilizada por Fernandes (2012), mas com duas diferenças principais. A primeira diferença foi se valer tanto da simetria dos mo-

delos de rotores quanto da isotropia dos modelos de mancais magnéticos. A segunda diferença foi dar um tratamento ainda mais teórico para os módulos de filtragem e de geração de sinal.

A simetria dos modelos de rotores e a isotropia dos modelos de mancais magnéticos faz com que, ao se realizar uma transformação de coordenadas reais para coordenadas complexas, a dimensão da matriz de influência seja reduzida à metade, embora ainda seja necessária a identificação de duas matrizes diferentes (uma direta e outra retrógrada, definidas na próxima seção). A essa transformação de coordenadas deu-se o nome de complexificação. Por se valer das propriedades da complexificação é que se denomina a técnica utilizada neste trabalho de regulação síncrona complexificada. Essa é uma das principais contribuições desta dissertação.

Assim como na seção 2.2, nesta seção apresenta-se a topologia da malha de controle utilizada, explicando-se cada elemento dessa malha.

2.3.1 Topologia de Separação Direta/Retrógrada

A princípio, considere um sistema (A, B, C) complexificado, estável, com m entradas e com l saídas, sujeito a um distúrbio $d(t)$. O apêndice A deste trabalho contém mais informações sobre a complexificação de modelos de rotores. O capítulo 4, por sua vez, ilustra a complexificação de um modelo de rotor e a estabilização desse modelo, obtendo-se o sistema (A, B, C) conforme requerido.

Da mesma forma que Fernandes (2012), considerou-se o sistema (A, B, C) estável. Essa hipótese não deve ser encarada como uma limitação da regulação síncrona complexificada, uma vez que essa metodologia se trata de um controle externo a um rotor previamente estabilizado, com o objetivo de eliminar completamente as vibrações devidas ao desbalanço desse rotor, além de garantir a estabilidade da malha fechada externa.

Dessa forma, o sistema (A, B, C) pode ser tanto o modelo do rotor em malha fechada com um controlador interno de estabilização, no caso em que a estabilização se dá por mancais ativos, quanto o modelo do rotor estabilizado por mancais passivos.

Qualquer que seja o caso, o sistema (A, B, C) é considerado conhecido, mas possivelmente incerto. Ou seja, o projeto do controlador interno de estabilização não é tratado neste trabalho, cujo foco é o projeto do controlador externo.

Em modelos complexificados de rotores, o estado, a entrada e a saída são vetores complexos, assim como o distúrbio. Considere, *a priori*, um distúrbio da seguinte forma:

$$d(t) = \underbrace{\widetilde{D}e^{j\Omega t}}_{\text{componente direta}} + \underbrace{\widetilde{R}e^{-j\Omega t}}_{\text{componente retrógrada}} \quad (2.15)$$

Com $\widetilde{D}, \widetilde{R} \in \mathbb{C}^m$. A abordagem proposta separa o tratamento das componentes direta e retrógrada do distúrbio, isto é, constrói-se uma malha de controle responsável por eliminar a componente direta e uma outra malha responsável por eliminar a componente retrógrada. A topologia do controlador completo (a menos do módulo de sincronismo) é dada pela figura 13.

Figura 13: Regulação síncrona complexificada - Malha completa de controle

Fonte: Autor.

Na figura 13, os blocos $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_r$ são modelos do módulo de filtragem, e os blocos $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}_r$ são modelos do módulo de geração de sinal.

No capítulo 3, mostra-se que, para um período de amostragem h suficientemente alto, o controlador discreto $\mathcal{H}$ (controlador direto) atua num sistema discreto equivalente com entrada $\tilde{u}_k$ e com saída $\tilde{y}_k$, cuja dinâmica é dada por $z^{-1}G(j\Omega)$, com $G(j\Omega) = C(sI - A)^{-1}B|_{s=j\Omega}$ sendo denominada matriz de influência direta; enquanto o controlador discreto $\mathcal{H}_r$ (controlador retrógrado) atua num sistema discreto equivalente com entrada $\tilde{u}_{r,k}$ e com saída $\tilde{y}_{r,k}$, cuja dinâmica é dada por $z^{-1}G(-j\Omega)$, com $G(-j\Omega) = C(sI - A)^{-1}B|_{s=-j\Omega}$ sendo denominada matriz de influência retrógrada. É importante frisar que, como o sistema (A, B, C) é complexo, $G(-j\Omega)$ não é a matriz complexa conjugada de $G(j\Omega)$.

Vale lembrar que o sistema complexo (A, B, C) foi obtido através das considerações de simetria do rotor e de isotropia dos mancais. O desacoplamento entre as dinâmicas direta e retrógrada ocorre porque, em conjunto com as hipóteses de simetria e isotropia, o bloco $\mathcal{F}$ filtra a componente direta da saída $y(t)$, enquanto o bloco $\mathcal{F}_r$ filtra a componente retrógrada dessa saída, conforme mostrado na seção 2.3.2.2. Matematicamente, isso significa que $\mathcal{F}(e^{-j\Omega t}) = 0$ e que $\mathcal{F}_r(e^{j\Omega t}) = 0$, ou seja, o bloco $\mathcal{F}$ anula a componente retrógrada e o bloco $\mathcal{F}_r$ anula a componente direta.

Ambos os controladores direto e retrógrado são idênticos, consistindo, cada um, de duas estratégias complementares:

- Um algoritmo de identificação da matriz de influência.
- Um algoritmo de controle propriamente dito.

Esses controladores trabalham em paralelo a cada intervalo h . É necessária a identificação de cada uma das matrizes de influência direta e retrógrada, pois essas matrizes não guardam nenhuma relação entre si. A título de reforço, essas matrizes não são um par de matrizes complexas conjugadas, conforme já mencionado. De todo modo, os algoritmos de identificação e controle, apresentados, respectivamente, nas seções 2.3.4.1 e 2.3.4.2, são utilizados tanto no controlador $\mathcal{H}$ quanto no controlador $\mathcal{H}_r$.

Considerando-se novamente a figura 13, tem-se que o distúrbio $d(t)$ não é qualquer, pois se trata da modelagem do desbalanço do rotor. Para modelos complexificados de rotores, o distúrbio assume a forma $d(t) = D\Omega^2 e^{j\Omega t}$, com $D \in \mathbb{C}^m$ desconhecido

(GENTA, 2005). Portanto, o distúrbio devido ao desbalanço tem natureza direta e, num primeiro momento, estuda-se a malha de regulação síncrona contendo apenas o controlador direto, malha essa apresentada na figura 14.

Figura 14: Regulação síncrona complexificada - Malha de controle direto

Fonte: Autor.

No final da seção 2.3.4.1, apresenta-se um modelo de anisotropia dos mancais, que pode provocar a necessidade da presença do controlador retrógrado. Na prática, sempre existe alguma assimetria, e o controlador retrógrado sempre deve ser implementado.

Considerando-se a figura 14, observa-se, além do sistema (A, B, C) , a presença do bloco A/D (amostrador), a do bloco $\mathcal{F}$ (explicado na seção 2.3.2), a do bloco $\mathcal{O}$ (explicado na seção 2.3.3), a do controlador discreto $\mathcal{H}$ (explicado na seção 2.3.4) e, finalmente, a do módulo de sincronismo.

O módulo de sincronismo tem a função de gerar um sinal de sincronismo com a rotação. Uma explicação do funcionamento desse módulo já foi dada na seção 2.2.1. A diferença entre os dois últimos instantes do sinal de sincronismo é o período T de rotação do rotor. Uma vez conhecido T , o cálculo da frequência f e da velocidade angular Ω é imediato.

Em linhas gerais, o objetivo do regulador síncrono complexificado é gerar um sinal $u(t)$ que cancele o distúrbio $d(t)$, anulando a saída $y(t)$. Para isso, o sinal $u(t)$ deve ter a mesma frequência do distúrbio, mas amplitude complexa oposta.

Para gerar o sinal $u(t)$, o controlador discreto $\mathcal{H}$ fornece a informação da amplitude complexa a cada período de h segundos, na forma de um sinal discreto complexo vetorial $\tilde{u}_k \in \mathbb{C}^m$. O bloco $\mathcal{O}$ fica a cargo de construir o sinal $u(t)$ de acordo com a seguinte equação:

$$u(t) = \mathcal{O}(\tilde{u}_k) = \tilde{u}_k e^{j\Omega t}, \quad t \in [kh, (k+1)h), \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.16)$$

Dessa forma, como a entrada do sistema (A, B, C) é a soma dos sinais $u(t)$ e $d(t)$, e como esse sistema é estável, sua saída $y(t)$ é dada por:

$$y(t) = \underbrace{\tilde{y}_k e^{j\Omega t}}_{\text{resposta permanente}} + \text{resposta transitória}, \quad t \in [kh, (k+1)h), \quad k \in \mathbb{N}$$

Para h suficientemente alto, $y(t)$ tende para sua resposta permanente. A função do bloco $\mathcal{F}$ é justamente extrair a amplitude complexa $\tilde{y}_k$ dessa resposta permanente, em que $\tilde{y}_k \in \mathbb{C}^l$ é um sinal discreto complexo vetorial.

Apresentada a ideia geral da técnica de compensação síncrona de desbalanço utilizada neste trabalho, as próximas seções têm por objetivo dar uma explicação mais detalhada do bloco $\mathcal{F}$, do bloco $\mathcal{O}$ e do controlador discreto $\mathcal{H}$, respectivamente.

2.3.2 Bloco $\mathcal{F}$

Considerando-se a figura 14, observa-se que o bloco $\mathcal{F}$ transforma o sinal $y(t)$ no sinal $\tilde{y}(t)$. A operação realizada pelo bloco $\mathcal{F}$ é inspirada na Teoria de Séries de Fourier. Dessa forma, apresentam-se alguns aspectos dessa teoria a fim de se uniformizar a linguagem utilizada neste trabalho.

Seja $\phi(t)$ um sinal analógico, periódico de período T , frequência f e velocidade angular Ω . Independentemente de $\phi(t)$ ser um sinal real ou complexo, sua expansão em série de Fourier, na forma complexa, é dada por:

$$\phi(t) = c_0 + c_1 e^{j\Omega t} + c_{-1} e^{j(-\Omega)t} + c_2 e^{j(2\Omega)t} + c_{-2} e^{j(-2\Omega)t} + \dots = \sum_{\eta=-\infty}^{+\infty} c_\eta e^{j(\eta\Omega)t}$$

Note que os números c_η são os coeficientes da série de Fourier na sua forma complexa, com $c_\eta \in \mathbb{C}$, $\eta \in \mathbb{Z}$, podendo ser calculados através da seguinte expressão:

$$c_\eta = \frac{1}{T} \int_T \phi(\tau) e^{-j(\eta\Omega)\tau} d\tau \quad (2.17)$$

A notação utilizada para a integral presente na equação (2.17) significa que a mesma deve ser calculada ao longo de um período.

Caso $\phi(t) \in \mathbb{R}$, tem-se, ainda, que c_η e $c_{-\eta}$ formam um par de números complexos conjugados. Ainda no caso real, a expansão de $\phi(t)$ em série de Fourier, na forma harmônica, é dada por:

$$\phi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\Omega t + \alpha_1) + A_2 \cos((2\Omega)t + \alpha_2) + \dots = \frac{A_0}{2} + \sum_{\eta=1}^{\infty} A_\eta \cos((\eta\Omega)t + \alpha_\eta)$$

Os números A_η e α_η são, respectivamente, os coeficientes e os ângulos de fase da série de Fourier na sua forma harmônica, com $A_\eta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_\eta \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{N}$, podendo ser calculados através da seguinte expressão:

$$A_\eta e^{j\alpha_\eta} = 2c_\eta \quad (2.18)$$

Diz-se, ainda, que A_η e α_η são, respectivamente, a amplitude e a fase do harmônico de ordem η de $\phi(t)$. Assim sendo, tem-se, por exemplo, que A_1 é a amplitude do primeiro harmônico (ou amplitude do harmônico fundamental) de $\phi(t)$.

2.3.2.1 Definição do Operador $\mathcal{F}$

Seja Ω a velocidade angular do rotor, assim como T e f seus respectivos período e frequência. Considere o sinal analógico $\phi(t)$. O operador $\mathcal{F}$ transforma o sinal $\phi(t)$ em um outro sinal $\tilde{\phi}(t)$, também analógico, de acordo com a seguinte equação:

$$\tilde{\phi}(t) = \mathcal{F}(\phi(t)) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \phi(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau \quad (2.19)$$

O operador $\mathcal{F}$ é o coeficiente do termo de frequência f da série de Fourier na sua forma complexa. Isso pode ser verificado fazendo-se $\eta = 1$ na equação (2.17) e escolhendo-se os limites de integração convenientemente. Para um sinal periódico $\phi(t) \in \mathbb{R}$, $\tilde{\phi}(t)$ carrega as informações de amplitude e fase do primeiro harmônico de $\phi(t)$, o que pode ser verificado fazendo-se $\eta = 1$ na equação (2.18).

Em relação aos limites de integração, como os mesmos são dependentes do tempo, mas sempre espaçados de uma distância T , diz-se que a integral presente na equação (2.19) é uma integral de janela deslizando.

2.3.2.2 Propriedades do Operador $\mathcal{F}$

Seja $\phi(t)$ um sinal dado pela seguinte equação:

$$\phi(t) = \underbrace{\tilde{d}e^{j\Omega t}}_{\text{componente direta}} + \underbrace{\tilde{r}e^{-j\Omega t}}_{\text{componente retrógrada}} \quad (2.20)$$

Com $\tilde{d}, \tilde{r} \in \mathbb{C}$. Aplicando-se o operador $\mathcal{F}$ em ambos os lados da equação (2.20), obtém-se:

$$\mathcal{F}(\phi(t)) = \tilde{d}$$

Dessa forma, observa-se que $\mathcal{F}$ extrai a amplitude da componente direta do sinal $\phi(t)$. Para se extrair a amplitude da componente retrógrada de $\phi(t)$, define-se o operador $\mathcal{F}_r$, dado pela seguinte equação:

$$\mathcal{F}_r(\phi(t)) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \phi(\tau) e^{j\Omega\tau} d\tau \quad (2.21)$$

Aplicando-se o operador $\mathcal{F}_r$ em ambos os lados da equação (2.20), obtém-se:

$$\mathcal{F}_r(\phi(t)) = \tilde{r}$$

Enuncia-se, assim, a primeira propriedade.

Propriedade 1: Seja $\phi(t)$ um sinal dado pela equação (2.20). O operador $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}_r$) filtra a amplitude da componente direta (retrógrada) do sinal $\phi(t)$. ■

Considere, agora, os sinais $\dot{\phi}(t)$, $\dot{\tilde{\phi}}(t)$ e $\tilde{\dot{\phi}}(t)$, assim definidos:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t) &= \frac{d\phi(t)}{dt} \\ \dot{\tilde{\phi}}(t) &= \frac{d\mathcal{F}(\phi(t))}{dt}\end{aligned}\tag{2.22}$$

$$\tilde{\dot{\phi}}(t) = \mathcal{F}(\dot{\phi}(t))\tag{2.23}$$

Considere, também, a regra de Leibniz (RUGH, 1996):

$$\frac{d}{dt} \int_{f(t)}^{g(t)} \phi(t, \tau) d\tau = \phi(t, g(t)) \dot{g}(t) - \phi(t, f(t)) \dot{f}(t) + \int_{f(t)}^{g(t)} \frac{\partial \phi(t, \tau)}{\partial t} d\tau\tag{2.24}$$

Na equação (2.24), tem-se que $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis. Com o auxílio dessa equação, desenvolve-se a equação (2.22), obtendo-se:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\phi}}(t) &= \frac{d\mathcal{F}(\phi(t))}{dt} \\ \dot{\tilde{\phi}}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{T} \int_{t-T}^t \phi(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau \right) \\ \dot{\tilde{\phi}}(t) &= \frac{1}{T} \left(\phi(t) e^{-j\Omega t} - \phi(t-T) e^{-j\Omega(t-T)} \right) \\ \dot{\tilde{\phi}}(t) &= \frac{1}{T} (\phi(t) - \phi(t-T)) e^{-j\Omega t}\end{aligned}\tag{2.25}$$

Por sua vez, desenvolvendo-se a equação (2.23) e com o resultado obtido na equação (2.25), tem-se:

$$\begin{aligned}\tilde{\dot{\phi}}(t) &= \mathcal{F}(\dot{\phi}(t)) \\ \tilde{\dot{\phi}}(t) &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \dot{\phi}(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau \\ \tilde{\dot{\phi}}(t) &= \frac{1}{T} \left(\phi(t) e^{-j\Omega t} - \phi(t-T) e^{-j\Omega(t-T)} \right) + j\Omega \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \phi(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau \\ \tilde{\dot{\phi}}(t) &= \dot{\tilde{\phi}}(t) + j\Omega \tilde{\phi}(t)\end{aligned}\tag{2.26}$$

Enuncia-se, assim, a segunda propriedade.

Propriedade 2: A relação entre os sinais $\tilde{\phi}(t)$ e $\tilde{\phi}(t)$, definidos, respectivamente, pelas equações (2.22) e (2.23), é dada pela equação (2.26). ■

2.3.2.3 Aplicação do Operador $\mathcal{F}$

Voltando-se ao problema de regulação síncrona complexificada, o objetivo do bloco $\mathcal{F}$ é extrair, a cada período de h segundos, a amplitude complexa da resposta permanente de $y(t)$. Para h suficientemente alto, tem-se $y(t) \simeq \tilde{y}_k e^{j\Omega t}$, e a propriedade 1 do operador $\mathcal{F}$ garante que esse operador extraia $\tilde{y}_k$.

Contudo, observa-se que o operador $\mathcal{F}$ atua continuamente sobre a saída $y(t)$, produzindo o sinal $\tilde{y}(t)$, que contém contribuição da resposta transitória. É por essa razão que se usa o bloco A/D, que amostra o sinal $\tilde{y}(t)$ a cada período de h segundos, com h escolhido de forma que a contribuição da resposta transitória no sinal $\tilde{y}(t)$ seja desprezível, aproximando a saída do bloco A/D do sinal $\tilde{y}_k$.

2.3.3 Bloco $\mathcal{O}$

A função do bloco $\mathcal{O}$ é produzir, a cada período de h segundos, um sinal da forma da equação (2.16). Para isso, esse bloco utiliza a informação de amplitude complexa fornecida pelo controlador discreto $\mathcal{H}$ na forma do sinal discreto complexo $\tilde{u}_k$, multiplicando essa amplitude por $e^{j\Omega t}$.

Assim sendo, observa-se que o bloco $\mathcal{O}$ transforma o sinal discreto complexo $\tilde{u}_k$ no sinal analógico complexo $u(t)$, tratando-se, portanto, de um tipo especial de conversor D/A. Apesar de não ser usual, tal conversor é particularmente útil para a explicação do problema de compensação síncrona de desbalanço, por razões evidenciadas na próxima seção.

Considerando-se a malha completa de controle apresentada na figura 13, é oportuno ressaltar que o bloco $\mathcal{O}_r$, analogamente ao bloco $\mathcal{O}$, produz o sinal $u_r(t)$, dado pela seguinte equação:

$$u_r(t) = \mathcal{O}_r(\tilde{u}_{r,k}) = \tilde{u}_{r,k} e^{-j\Omega t}, \quad t \in [kh, (k+1)h), \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.27)$$

Dessa forma, o bloco $\mathcal{O}_r$ também se trata de um conversor D/A.

2.3.4 Controlador Discreto $\mathcal{H}$

O controlador discreto $\mathcal{H}$ é responsável por fornecer o sinal $\tilde{u}_k$ ao bloco $\mathcal{O}$, recebendo o sinal $\tilde{y}_k$ do conjunto formado pelo bloco $\mathcal{F}$ e pelo bloco A/D. É no controlador discreto que está presente a lei de controle, cujo objetivo é tornar nula a saída $y(t)$.

Para descrever o controlador, considere novamente a figura 14, lembrando-se que $d(t) = D\Omega^2 e^{j\Omega t}$. Suponha que as características da perturbação (frequência e amplitude complexa) variem lentamente, sendo constantes dentro do intervalo de tempo h , mas podendo variar de um intervalo a outro. Dessa forma, o efeito da aplicação de um sinal analógico $d(t) = D\Omega^2 e^{j\Omega t}$ na entrada do sistema (A, B, C) é o mesmo efeito da aplicação do distúrbio $\tilde{D}_k = D\Omega^2$ na entrada do bloco $\mathcal{O}$, conforme mostra a figura 15(a). É por essa razão que se escolhe o operador $\mathcal{O}$ como conversor D/A, para que se possa fazer a mudança do sinal de distúrbio da entrada do sistema (A, B, C) para a entrada do bloco $\mathcal{O}$.

Caso o distúrbio seja da forma da equação (2.15), ou seja, contenha ambas as componentes direta e retrógrada, deve-se construir a malha completa de controle apresentada na figura 13. Devido à linearidade dessa malha e à propriedade de filtragem dos operadores $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_r$, o sistema completo pode ser desacoplado em dois subsistemas, a saber: uma malha de controle direto (figura 15(a)) e outra malha de controle retrógrado (figura 15(b)). Esse desacoplamento entre as dinâmicas direta e retrógrada é demonstrado no capítulo 3, seção 3.4.

Figura 15: Regulação síncrona complexificada - Desacoplamento

(a) Malha de controle direto - Distúrbio na entrada do bloco $\mathcal{O}$ (b) Malha de controle retrógrado - Distúrbio na entrada do bloco $\mathcal{O}_r$

Fonte: Autor.

Suponha que h seja suficientemente alto para que a resposta permanente tenha se estabelecido nesse intervalo h . Seja ainda $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ a matriz de transferência do sistema (A, B, C) ; com $G(j\Omega) = G(s)|_{s=j\Omega}$ a respectiva matriz de influência direta na velocidade angular de rotação Ω , e $G(-j\Omega) = G(s)|_{s=-j\Omega}$ a respectiva matriz de influência retrógrada nessa mesma velocidade angular. Considerando-se a figura 15(a), mostra-se, no capítulo 3, que se pode obter um sistema equivalente aproximado com entrada $\tilde{u}_k$ e com saída $\tilde{y}_k$, dado pela figura 16(a) (em que se omitiu o módulo de sincronismo). Considerando-se a figura 15(b), mostra-se, também no capítulo 3, que se pode obter um sistema equivalente aproximado com entrada $\tilde{u}_{r,k}$ e com saída $\tilde{y}_{r,k}$,

dado pela figura 16(b) (em que, novamente, omitiu-se o módulo de sincronismo).

Figura 16: Regulação síncrona complexificada - Sistema equivalente

Fonte: Autor.

Assim como na seção 2.2.4, percebe-se, da figura 16, que a única dinâmica de qualquer um dos sistemas equivalentes se trata de um atraso unitário. Por essa razão é que, por vezes na presente dissertação, esses sistemas equivalentes são referidos como sistemas estáticos.

Construído o sistema equivalente, nota-se que o objetivo do controlador discreto $\mathcal{H}$ ($\mathcal{H}_r$) é anular o efeito do distúrbio $\tilde{D}_k$ ($\tilde{R}_k$), levando a saída $\tilde{y}_k$ ($\tilde{y}_{r,k}$) a zero. Para isso, é utilizada a mesma lei de controle ótimo utilizada por Fernandes (2012). Essa lei faz uso de estimativas de $G(j\Omega)$ ($G(-j\Omega)$), estimativas essas calculadas através de um algoritmo de identificação.

Nas próximas duas seções, são apresentados, respectivamente, o algoritmo de identificação e a lei de controle utilizados neste trabalho. Nessa apresentação, para facilitar a notação, leva-se em conta apenas o controlador discreto $\mathcal{H}$.

O algoritmo de identificação utiliza $(m + 1)$ passos, entre sinais de identificação e de controle, para obter uma estimativa de $G(j\Omega)$ (estimativa essa eventualmente filtrada, conforme mostrado na seção 2.3.4.1). A cada m passos de identificação, um sinal de controle é gerado. Assim sendo, os sinais $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_m$ perturbam a planta deliberadamente para poder identificá-la, e o sinal $\tilde{u}_{m+1}$ é um sinal de controle. Após isso, os sinais $\tilde{u}_{m+2}, \tilde{u}_{m+3}, \dots, \tilde{u}_{2m+1}$ perturbam a planta para poder identificá-la, o sinal $\tilde{u}_{2m+2}$ é um sinal de controle, e assim por diante.

Com o objetivo de simplificar a descrição dos algoritmos utilizados neste trabalho, denotam-se os sinais de controle, assim como suas respectivas saídas, por:

$$\begin{cases} \hat{u}_l = \tilde{u}_{l(m+1)} \\ \hat{y}_l = \tilde{y}_{l(m+1)} \end{cases}, \quad l \in \mathbb{N}$$

Portanto, o índice das atuações de controle é $l \in \mathbb{N}$. Por sua vez, os sinais que perturbam a planta com o objetivo de identificá-la, assim como suas respectivas saídas, são denotados por:

$$\begin{cases} \hat{u}_l^j = \tilde{u}_{l(m+1)+j} \\ \hat{y}_l^j = \tilde{y}_{l(m+1)+j} \end{cases}, \quad j \in \{0, 1, \dots, m\}, \quad l \in \mathbb{N}$$

Com essa notação, tem-se $\hat{u}_l^0 = \hat{u}_l$ e $\hat{u}_l^{m+1} = \hat{u}_{l+1}$, bem como $\hat{y}_l^0 = \hat{y}_l$ e $\hat{y}_l^{m+1} = \hat{y}_{l+1}$. Para $m = 2$ e $l \in \{0, 1, 2\}$, por exemplo, obtém-se:

$$\begin{aligned} (\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4, \tilde{u}_5, \tilde{u}_6) &= (\hat{u}_0, \hat{u}_0^1, \hat{u}_0^2, \hat{u}_1, \hat{u}_1^1, \hat{u}_1^2, \hat{u}_2) \\ (\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \tilde{y}_4, \tilde{y}_5, \tilde{y}_6) &= (\hat{y}_0, \hat{y}_0^1, \hat{y}_0^2, \hat{y}_1, \hat{y}_1^1, \hat{y}_1^2, \hat{y}_2) \end{aligned}$$

Nesse exemplo, as entradas $\tilde{u}_0 = \hat{u}_0$, $\tilde{u}_3 = \hat{u}_1$ e $\tilde{u}_6 = \hat{u}_2$ são sinais de controle, com $\tilde{y}_0 = \hat{y}_0$, $\tilde{y}_3 = \hat{y}_1$ e $\tilde{y}_6 = \hat{y}_2$ suas respectivas saídas, enquanto as demais entradas são sinais de identificação, com suas respectivas saídas.

Em relação ao algoritmo de identificação proposto por Fernandes (2012), é necessário um sinal de identificação a mais no algoritmo utilizado neste trabalho. Isso ocorre porque, diferentemente de Dyer (1999) e Fernandes (2012), optou-se por não se utilizar duas entradas de controle consecutivas para se realizar a identificação, com o objetivo de se continuar identificando a matriz de influência sem nenhum problema mesmo quando a entrada de controle convergir para o regime. Os passos de identificação utilizados neste trabalho são, portanto, os $(m + 1)$ sinais $\hat{u}_l^0, \hat{u}_l^1, \dots, \hat{u}_l^m$.

2.3.4.1 Algoritmo de Identificação

Considere novamente a figura 16(a). Suponha que o distúrbio $\widetilde{D}_k$ seja constante e igual a $\widetilde{D}$. Suponha também que $G(j\Omega)$ não varie. Escreve-se:

$$\hat{y}_l^{j+1} = G(j\Omega) (\hat{u}_l^j + \widetilde{D}) \quad (2.28)$$

$$\hat{y}_l^{j+2} = G(j\Omega) (\hat{u}_l^{j+1} + \widetilde{D}) \quad (2.29)$$

Subtraindo-se a equação (2.28) da equação (2.29), obtém-se:

$$\hat{y}_l^{j+2} - \hat{y}_l^{j+1} = G(j\Omega) (\hat{u}_l^{j+1} - \hat{u}_l^j) \quad (2.30)$$

A equação (2.30) é o princípio do algoritmo de identificação proposto. Para se calcular uma estimativa da matriz de influência, denotada por G_l , utiliza-se a seguinte equação:

$$G_l = (\Delta \hat{Y}_l) (\Delta \hat{U}_l)^{-1}, \quad l \in \mathbb{N}^* \quad (2.31)$$

Em que:

$$\Delta \hat{U}_l = \begin{bmatrix} \hat{u}_l^1 - \hat{u}_l^0 & \hat{u}_l^2 - \hat{u}_l^1 & \dots & \hat{u}_l^m - \hat{u}_l^{m-1} \end{bmatrix}$$

$$\Delta \hat{Y}_l = \begin{bmatrix} \hat{y}_l^2 - \hat{y}_l^1 & \hat{y}_l^3 - \hat{y}_l^2 & \dots & \hat{y}_l^{m+1} - \hat{y}_l^m \end{bmatrix}$$

As matrizes $\Delta \hat{U}_l$ e $\Delta \hat{Y}_l$ são matrizes cujas colunas são as variações dos vetores de entrada e de saída, respectivamente. Observa-se que $\Delta \hat{U}_l$ é quadrada ($m \times m$), enquanto $\Delta \hat{Y}_l$ é retangular ($l \times m$). São necessários $(m + 1)$ passos discretos para se construir $\Delta \hat{U}_l$, escolhidos de tal forma que essa matriz seja não singular para que a equação (2.31) esteja definida.

A entrada $\hat{u}_l$, para $l \in \mathbb{N}$, é um sinal de controle e sua determinação é apresentada na próxima seção. As demais m entradas ($\hat{u}_l^1, \hat{u}_l^2, \dots, \hat{u}_l^m$) são sinais de identificação. Conforme já mencionado, esses sinais de identificação são enviados com o objetivo deliberado de perturbar o rotor. Medindo-se as saídas produzidas tanto pelos sinais de identificação quanto pelos sinais de controle, é possível estimar $G(j\Omega)$ através da equação (2.31).

Neste trabalho, os sinais de identificação são gerados através da seguinte equação:

$$\hat{u}_l^j = \hat{u}_l^{j-1} + \underbrace{0,05 \|\hat{u}_l\|}_{\bar{\alpha}_l} I_j, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (2.32)$$

Na equação (2.32), I_j é a j -ésima coluna da matriz identidade de ordem m . Nessa equação, tem-se, ainda, $\bar{\alpha}_l = 0,05 \|\hat{u}_l\|$, ou seja, $\bar{\alpha}_l$ é igual a 5% da norma do sinal de controle imediatamente anterior ao primeiro sinal de um ciclo de identificação. O valor de 5% é arbitrário e pode ser alterado pelo projetista. Na presença de ruído, pode ser que $\bar{\alpha}_l$ seja muito pequeno para se obter uma identificação razoável da matriz de influência. Dessa forma, atribui-se um valor mínimo para $\bar{\alpha}_l$, denotado por $\bar{\alpha}_{min}$. Caso se tenha $\bar{\alpha}_l < \bar{\alpha}_{min}$, impõe-se $\bar{\alpha}_l = \bar{\alpha}_{min}$.

Pode ser verificado que cada sinal de identificação atua num canal da entrada, de forma que $\Delta \hat{U}_l$ fica:

$$\Delta \hat{U}_l = \underbrace{\bar{\alpha}_l}_{I} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Substituindo-se a equação (2.33) na equação (2.31), tem-se:

$$G_l = (\bar{\alpha}_l)^{-1} (\Delta \hat{Y}_l), \quad l \in \mathbb{N}^* \quad (2.34)$$

Conforme já mencionado, o algoritmo de identificação proposto neste trabalho tem um sinal de identificação a mais entre dois sinais consecutivos de controle quando comparado com o algoritmo utilizado por Fernandes (2012). As vantagens de se realizar essa escolha são listadas a seguir:

- O entendimento do algoritmo é mais simples, pois não é necessário o conhecimento de dois sinais de controle consecutivos para se determinar os sinais de identificação intermediários.
- A lei de controle utiliza estimativas mais atualizadas da matriz de influência, conforme mostrado na seção 2.3.4.2.

- A identificação possui bom desempenho mesmo após o controle entrar em regime.

Entretanto, o sinal de identificação é uma perturbação deliberada do rotor, o que pode provocar uma vibração adicional no mesmo. Dessa forma, utilizar um algoritmo com mais sinais de identificação pode possuir esse inconveniente.

Contudo, esse problema é minimizado ao se utilizar um modelo complexificado do rotor em malha fechada com o controlador interno de estabilização. A título de exemplo, se um rotor simétrico controlado por mancais isotrópicos descrito em termos de variáveis reais tiver 4 entradas e 4 saídas, esse mesmo rotor descrito em termos de variáveis complexas tem 2 entradas e 2 saídas (GENTA, 2005). Além disso, a complexificação reduz a ordem da matriz de influência $G(j\Omega)$. No exemplo citado, essa matriz é 4×4 no caso real, enquanto é 2×2 no caso complexo.

Portanto, utilizando-se um mesmo algoritmo de identificação, o uso do modelo complexificado reduz em pelo menos à metade a quantidade necessária de sinais de identificação para se estimar $G(j\Omega)$. Mais que isso, a matriz de influência tem sua ordem reduzida pela metade, o que reduz à quarta parte a quantidade de termos a serem identificados. O custo dessa simplificação é a necessidade de se ter um rotor simétrico controlado por mancais isotrópicos, e que o sistema de controle não destrua essa simetria.

Do ponto de vista da malha de controle, a anisotropia dos mancais pode ser tratada de maneira simples, pois o efeito dessa anisotropia é a introdução de uma componente retrógrada na entrada do sistema. Para melhor entender essa afirmação, considere novamente a equação (2.16), que pode ser reescrita como se segue:

$$u(t) = \tilde{u}_k e^{j\Omega t} = I \operatorname{Re}\{u(t)\} + jI \operatorname{Im}\{u(t)\}, \quad t \in [kh, (k+1)h), \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.35)$$

Na equação (2.35), I é a matriz identidade de ordem m . A anisotropia dos mancais pode ser modelada através de matrizes de ponderação M_1 e M_2 , ambas de ordem m . Essas matrizes multiplicam, respectivamente, a parte real e a parte imaginária do sinal $u(t)$, dando origem ao sinal $v(t)$, definido a seguir:

$$\begin{aligned}
 v(t) &= M_1 \text{Re}\{u(t)\} + jM_2 \text{Im}\{u(t)\} = \\
 &= M_1 \left(\frac{\tilde{u}_k e^{j\Omega t} + \tilde{u}_k^* e^{-j\Omega t}}{2} \right) + jM_2 \left(\frac{\tilde{u}_k e^{j\Omega t} - \tilde{u}_k^* e^{-j\Omega t}}{2j} \right) = \\
 &= \underbrace{\left(\frac{M_1 + M_2}{2} \right) \underbrace{\tilde{u}_k e^{j\Omega t}}_{u(t)}}_{\text{componente direta}} + \underbrace{\left(\frac{M_1 - M_2}{2} \right) \underbrace{\tilde{u}_k^* e^{-j\Omega t}}_{u^*(t)}}_{\text{componente retrógrada}}, \quad t \in [kh, (k+1)h), \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.36)
 \end{aligned}$$

Na equação (2.36), $*$ denota a operação de conjugação. Essa equação evidencia o aparecimento da componente retrógrada na entrada do sistema. Para se eliminar o efeito dessa componente, constrói-se uma segunda malha de controle, dada pela figura 15(b). Cumpre ressaltar que a malha apresentada nessa figura também estaria sujeita à anisotropia dos mancais, dando origem ao sinal $v(t)$, definido a seguir:

$$\begin{aligned}
 v(t) &= M_1 \text{Re}\{u_r(t)\} + jM_2 \text{Im}\{u_r(t)\} = \\
 &= \underbrace{\left(\frac{M_1 - M_2}{2} \right) \underbrace{\tilde{u}_{r,k}^* e^{j\Omega t}}_{u_r^*(t)}}_{\text{componente direta}} + \underbrace{\left(\frac{M_1 + M_2}{2} \right) \underbrace{\tilde{u}_{r,k} e^{-j\Omega t}}_{u_r(t)}}_{\text{componente retrógrada}}, \quad t \in [kh, (k+1)h), \quad k \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Dessa forma, o efeito resultante da anisotropia dos mancais é apresentado na figura 17 (em que se omitiu o módulo de sincronismo).

Figura 17: Regulação síncrona complexificada - Efeito da anisotropia dos mancais

Fonte: Autor.

Na figura 17, os sinais $\tilde{u}_k^c$ e $\tilde{u}_{r,k}^c$ são, respectivamente, os sinais determinados pelos controladores $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_r$ e podem ser entendidos como os sinais de saída desses controladores. Já os sinais $\tilde{u}_k^p$ e $\tilde{u}_{r,k}^p$ são os sinais resultantes do efeito da anisotropia sobre as saídas dos controladores, e podem ser entendidos como os sinais de entrada da planta.

O controlador discreto $\mathcal{H}_r$ é idêntico ao controlador $\mathcal{H}$, ambos possuindo o mesmo algoritmo de identificação e a mesma lei de controle. A diferença entre eles é que $\mathcal{H}_r$ identifica a matriz $G_{r,l}$, que se trata de uma estimativa da matriz de influência $G(-j\Omega)$, estimativa essa utilizada na lei de controle.

O modelo proposto de anisotropia dos mancais é simplificado. Essa anisotropia também deveria provocar uma assimetria dos controladores, fato não considerado nessa modelagem.

Por fim, não se utiliza, neste trabalho, a equação (2.34) para cada estimativa de $G(j\Omega)$. O resultado da equação (2.34), combinado com o resultado de uma estimativa imediatamente anterior, é atribuído a G_l . Essa combinação é feita através de um fator de esquecimento β , que varia no intervalo $[0, 1]$. A equação final fica:

$$G_l = (1 - \beta)G_{l-1} + \beta (\bar{\alpha}_l)^{-1} (\Delta \hat{Y}_l), \quad l \in \mathbb{N}^* \quad (2.37)$$

O parâmetro β deve ser escolhido pelo projetista, assim como a primeira estimativa G_0 . Observações sobre esse parâmetro já foram realizadas na seção 2.2.4.1.

2.3.4.2 Lei de Controle Ótimo

A lei de controle utilizada neste trabalho é dada por:

$$\hat{u}_l = (G_l^H Q G_l + R + S)^{-1} [(G_l^H Q G_l + S) \hat{u}_{l-1} - G_l^H Q \hat{y}_l], \quad l \in \mathbb{N}^* \quad (2.38)$$

A equação (2.38) se trata da mesma equação utilizada por Fernandes (2012), mas com o devido ajuste nos índices, acarretado pela mudança no algoritmo de identificação utilizado, o que permite o uso de uma estimativa G_l mais atualizada na lei de controle. Cumpre ressaltar que a equação (2.38) é uma lei de controle ótimo, obtida minimizando-se, com respeito ao vetor de controle $\hat{u}_l$, a função objetivo dada pela equação (2.14). Comentários sobre essa lei de controle já foram realizados na seção 2.2.4.2, e mais detalhes sobre a mesma podem ser encontrados nos trabalhos de Fernandes (2012) e de Dyer (1999).

O uso de modelos complexificados, além de simplificar o algoritmo de identificação, tem a vantagem adicional de reduzir a ordem da lei de controle, uma vez que essa ordem está diretamente relacionada à ordem da matriz identificada G_l .

Considere, agora, a equação (2.32), com $m = 2$. Para $j \in \{1, 2\}$ e $l = 0$, escreva-se:

$$\hat{u}_0^1 = \hat{u}_0^0 + \underbrace{0,05 \|\hat{u}_0\|}_{\bar{\alpha}_0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{u}_0 + \bar{\alpha}_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{u}_0^2 = \hat{u}_0^1 + \underbrace{0,05 \|\hat{u}_0\|}_{\bar{\alpha}_0} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observa-se que, para se determinar os sinais de identificação $\hat{u}_0^1$ e $\hat{u}_0^2$, é necessário o conhecimento do sinal de controle $\hat{u}_0$, que deve ser arbitrado pelo projetista. O sinal $\hat{u}_0$ deve, ainda, ser diferente de zero, para que $\bar{\alpha}_0$ também seja diferente de zero. Transmítidos os sinais $\hat{u}_0^1$ e $\hat{u}_0^2$, pode-se determinar a estimativa G_1 da matriz de influência através da equação (2.37). Lembrando-se que $\beta \in [0, 1]$, a determinação de G_1 , para $\beta \neq 1$, depende da primeira estimativa G_0 da matriz de influência, estimativa essa que deve ser escolhida pelo projetista. Na sequência, o sinal de controle $\hat{u}_1$ é calculado pela equação (2.38) conforme a seguir:

$$\hat{u}_1 = (G_1^H Q G_1 + R + S)^{-1} [(G_1^H Q G_1 + S) \hat{u}_0 - G_1^H Q \hat{y}_1]$$

Após a transmissão do sinal $\hat{u}_1$ à planta, os sinais de identificação $\hat{u}_1^1$ e $\hat{u}_1^2$ são calculados pela equação (2.32) e dados a seguir:

$$\hat{u}_1^1 = \hat{u}_1^0 + \underbrace{0,05 \|\hat{u}_1\|}_{\bar{\alpha}_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{u}_1 + \bar{\alpha}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{u}_1^2 = \hat{u}_1^1 + \underbrace{0,05 \|\hat{u}_1\|}_{\bar{\alpha}_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transmitidos os sinais $\hat{u}_1^1$ e $\hat{u}_1^2$, calcula-se G_2 e, na sequência, calcula-se o sinal de controle $\hat{u}_2$ dado por:

$$\hat{u}_2 = \left(G_2^H Q G_2 + R + S \right)^{-1} \left[\left(G_2^H Q G_2 + S \right) \hat{u}_1 - G_2^H Q \hat{y}_2 \right]$$

Transmitido o sinal $\hat{u}_2$, calculam-se os sinais de identificação $\hat{u}_2^1$ e $\hat{u}_2^2$, e assim por diante.

3 MODELO DISCRETO EQUIVALENTE

Este capítulo é dedicado à obtenção do modelo discreto do sistema dinâmico com entrada $\tilde{u}_k$ e com saída $\tilde{y}_k$, conforme indicado pela figura 18. Essa é uma das principais contribuições do presente trabalho, pois permite a substituição da parte contínua do sistema por uma parte discreta. Isso possibilita a simulação de diferentes leis de controle sem prejuízo de nenhuma informação da dinâmica do sistema, com a vantagem de ser uma simulação mais rápida quando comparada à de toda a dinâmica híbrida contínua-discreta.

Figura 18: Sistema com entrada $\tilde{u}_k$ e saída $\tilde{y}_k$

Fonte: Autor.

Ressalta-se que o modelo obtido é válido para o sistema (A, B, C) complexificado e estável. O apêndice A deste trabalho contém considerações sobre o processo de complexificação de modelos de rotores, e a seção 4.1 apresenta um exemplo de complexificação e estabilização de um modelo de rotor. As hipóteses fundamentais para que o modelo discreto equivalente seja representativo da dinâmica discreta percebida pelo controlador direto $\mathcal{H}$ são a consideração de que todas as assimetrias do rotor são levadas em conta pela presença do desbalanceamento (GENTA, 2005), e a desconsideração de todas as anisotropias dos mancais.

3.1 Subsistema Contínuo

Considere a figura 18. Seja o sistema estável (A, B, C) , cujas equações de estado são dadas por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Onde $x(t) \in \mathbb{C}^n$, $u(t) \in \mathbb{C}^m$ e $y(t) \in \mathbb{C}^l$, com A , B e C matrizes complexas de dimensões compatíveis. Aplicando-se o operador $\mathcal{F}$ ao sistema de equações (3.1) e utilizando-se a propriedade 2 desse operador (propriedade essa apresentada na seção 2.3.2.2), esse sistema de equações pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \underbrace{(A - j\Omega I)}_{\tilde{A}} \tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

O sistema de equações (3.2) tem como estado $\tilde{x}(t)$, como entrada $\tilde{u}(t)$ e como saída $\tilde{y}(t)$. Para se obter o sistema com entrada $\tilde{u}_k$ e com saída $\tilde{y}_k$, o passo inicial é se desenvolver $\tilde{u}(t)$. Por definição, tem-se:

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{F}(u(t)) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau \quad (3.3)$$

O operador $\mathcal{O}$, por sua vez, transforma o sinal discreto complexo $\tilde{u}_k$ no sinal analógico complexo $u(t)$ conforme a equação (2.16). Seja $\tilde{u}_{\bar{k}}(t)$ o sinal analógico complexo definido através da seguinte equação:

$$\tilde{u}_{\bar{k}}(t) = \tilde{u}_k, \quad t \in [kh, (k+1)h), \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.4)$$

Em outras palavras, o sinal analógico $\tilde{u}_{\bar{k}}(t)$ é obtido do sinal discreto $\tilde{u}_k$ mantendo-se $\tilde{u}_k$ constante dentro de cada intervalo $[kh, (k+1)h)$.

Substituindo-se (2.16) em (3.3), e com o auxílio da definição (3.4), tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t (\tilde{u}_k e^{j\Omega\tau}) e^{-j\Omega\tau} d\tau \\ \tilde{u}(t) &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \tilde{u}_{\bar{k}}(\tau) d\tau \\ \tilde{u}(t) &= \underbrace{\frac{1}{T} \int_{t-T}^t \text{Re}\{\tilde{u}_{\bar{k}}(\tau)\} d\tau}_{\text{integral real}} + j \underbrace{\frac{1}{T} \int_{t-T}^t \text{Im}\{\tilde{u}_{\bar{k}}(\tau)\} d\tau}_{\text{integral real}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para se calcular as integrais reais presentes na equação (3.5), lança-se mão da figura 19, que esboça a forma de $\tilde{u}_{\bar{k}}(t)$ no tempo. A interpretação geométrica dessas integrais é que elas são numericamente iguais às áreas das figuras 19(a) e 19(b), respectivamente.

Figura 19: Esboço de $\tilde{u}_k(t)$ no tempo

Fonte: Autor.

Dessa forma, pode-se verificar que $\tilde{u}(t)$ é dado por:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} \tilde{u}_{k-1} + \frac{1}{T}(t - kh)(\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}), & t \in [kh, kh + T) \\ \tilde{u}_k & , t \in [kh + T, (k + 1)h) \end{cases}, k \in \mathbb{N} \quad (3.6)$$

A figura 20 esboça a forma de $\tilde{u}(t)$, de acordo com as equações apresentadas em (3.6).

Figura 20: Esboço de $\tilde{u}(t)$ no tempo

Fonte: Autor.

Determinado o comportamento de $\tilde{u}(t)$, o passo final para se obter o modelo com entrada $\tilde{u}_k$ e com saída $\tilde{y}_k$ é relacionar os estados $\tilde{x}(kh)$ e $\tilde{x}((k+1)h)$. Para isso, considere novamente o sistema de equações (3.1), admitindo-se ainda $t_0 = 0$ e condição inicial $x(t_0) = x_0$. A solução geral para o estado desse sistema é representada pela seguinte equação:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau \quad (3.7)$$

Lançando-se mão de algumas hipóteses simplificadoras, a integral da equação (3.7) pode ser calculada. Dois resultados oriundos desse cálculo são apresentados a seguir como lemas.

Lema 1: Seja o sistema (A, B, C) com A inversível, e seja $u(t)$ um vetor constante no tempo, denotado por u . Dessa forma, a integral da equação (3.7) é dada por:

$$\int_0^t e^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau = A^{-1}(e^{At} - I)Bu \quad \blacksquare$$

Lema 2: Seja o sistema (A, B, C) com A inversível, e seja $u(t)$ um vetor cuja primeira derivada, $\dot{u}(t)$, é constante no tempo, denotada por $\dot{u}$. Dessa forma, a integral da equação (3.7) é dada por:

$$\int_0^t e^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau = A^{-1}e^{At}Bu(0) - A^{-1}Bu(t) + (A^{-1})^2(e^{At} - I)B\dot{u} \quad \blacksquare$$

Considere, agora, o sistema de equações (3.2), que define o sistema $(\tilde{A}, B, C)$. Como, por hipótese, o sistema (A, B, C) é estável, todos os autovalores de A possuem parte real negativa. Consequentemente, $\tilde{A} = (A - j\Omega I)$ também possui todos os seus autovalores com parte real negativa, e o sistema $(\tilde{A}, B, C)$ também é estável. Adicionalmente, o fato de A e $\tilde{A}$ não possuírem autovalores nulos garante a existência das matrizes inversas A^{-1} e $\tilde{A}^{-1}$.

Dessa forma, considerando a entrada $\tilde{u}(t)$ dada pela equação (3.6), o estado $\tilde{x}(kh + T)$ pode ser determinado a partir do estado $\tilde{x}(kh)$, utilizando-se a solução geral apresentada em (3.7) e valendo-se do resultado apresentado no lema 2. Obtém-se, assim:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(kh + T) = & e^{\tilde{A}T} \tilde{x}(kh) + \frac{(\tilde{A}^{-1})^2}{T} \left(T \tilde{A} e^{\tilde{A}T} - e^{\tilde{A}T} + I \right) B \tilde{u}_{k-1} + \\ & + \frac{(\tilde{A}^{-1})^2}{T} \left(-T \tilde{A} + e^{\tilde{A}T} - I \right) B \tilde{u}_k \end{aligned} \quad (3.8)$$

Analogamente, pode-se determinar o estado $\tilde{x}((k+1)h)$ a partir de $\tilde{x}(kh + T)$, valendo-se agora do resultado apresentado no lema 1. Obtém-se, então:

$$\tilde{x}((k+1)h) = e^{\tilde{A}(h-T)} \tilde{x}(kh + T) + \tilde{A}^{-1} \left(e^{\tilde{A}(h-T)} - I \right) B \tilde{u}_k \quad (3.9)$$

Substituindo-se (3.8) em (3.9), obtém-se, finalmente, uma relação entre $\tilde{x}((k+1)h)$ e $\tilde{x}(kh)$, dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{x}((k+1)h) = & e^{\tilde{A}h} \tilde{x}(kh) + e^{\tilde{A}(h-T)} \frac{(\tilde{A}^{-1})^2}{T} \left(T \tilde{A} e^{\tilde{A}T} - e^{\tilde{A}T} + I \right) B \tilde{u}_{k-1} + \\ & + \left[e^{\tilde{A}(h-T)} \frac{(\tilde{A}^{-1})^2}{T} \left(e^{\tilde{A}T} - I \right) - \tilde{A}^{-1} \right] B \tilde{u}_k \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.2 Sistema Discreto Equivalente

O sistema discreto equivalente é construído a partir da equação (3.10). Denotando $\tilde{x}(kh)$ por $\tilde{x}_k$ e $\tilde{x}((k+1)h)$ por $\tilde{x}_{k+1}$, fica claro que essa equação se trata de uma equação a diferenças. Para se determinar o sistema em questão, define-se o estado aumentado $\bar{x}_k$:

$$\bar{x}_k = \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{u}_{k-1} \end{bmatrix}$$

Assim sendo, com o auxílio da equação (3.10), escreve-se a seguinte equação de estados:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_{k+1} \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix}}_{\bar{x}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{u}_{k-1} \end{bmatrix}}_{\bar{x}_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ I \end{bmatrix}}_{\bar{B}} \tilde{u}_k$$

Em que:

$$\begin{aligned}\bar{A}_{11} &= e^{\tilde{A}h} \\ \bar{A}_{12} &= e^{\tilde{A}(h-T)} \frac{(\tilde{A}^{-1})^2}{T} \left(T\tilde{A}e^{\tilde{A}T} - e^{\tilde{A}T} + I \right) B \\ \bar{B}_1 &= e^{\tilde{A}(h-T)} \frac{(\tilde{A}^{-1})^2}{T} \left(e^{\tilde{A}T} - I \right) B - \tilde{A}^{-1}B\end{aligned}$$

A saída do sistema discreto equivalente é $\tilde{y}_k$. Sabe-se, do sistema de equações (3.2), que $\tilde{y}_k = C\tilde{x}_k$. Em função do estado aumentado $\bar{x}_k$, essa saída pode ser reescrita como:

$$\tilde{y}_k = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{u}_{k-1} \end{bmatrix}}_{\bar{x}_k}$$

Dessa forma, as equações de estado do sistema discreto equivalente são dadas por:

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \bar{A}\bar{x}_k + \bar{B}\tilde{u}_k \\ \tilde{y}_k = \bar{C}\bar{x}_k \end{cases} \quad (3.11)$$

Assume-se, agora, que uma perturbação da forma $d(t) = D\Omega^2 e^{j\Omega t}$, com $D \in \mathbb{C}^m$, age na entrada do sistema (A, B, C) , de acordo com a figura 21.

Figura 21: Perturbação $d(t)$ na entrada do sistema (A, B, C)

Fonte: Autor.

Pode-se notar que, se $D\Omega^2$ variar lentamente, a perturbação $d(t)$ pode ser considerada como sendo da forma $d(t) \simeq \tilde{D}_k e^{j\Omega t}$, onde $\tilde{D}_k = D\Omega^2$ é constante nos intervalos $[kh, (k+1)h)$, $k \in \mathbb{N}$. Assim sendo, o sistema da figura 21 é equivalente ao sistema da figura 22, apresentada a seguir.

Figura 22: Perturbação $\widetilde{D}_k$ na entrada do bloco $\mathcal{O}$

Fonte: Autor.

Por fim, a figura 23 ilustra o sistema da figura 22 já em malha fechada com o controlador discreto $\mathcal{H}$.

Figura 23: Sistema discreto equivalente $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ em malha fechada

Fonte: Autor.

Vale lembrar que, na figura 23, o sistema $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ representa um bom modelo da dinâmica discreta percebida pelo controlador externo $\mathcal{H}$, em que o sistema (A, B, C) se trata de um modelo de um rotor simétrico suspenso por mancais isotrópicos, estabilizado por um controlador interno. Além disso, esse rotor está sujeito apenas à ação de seu desbalanço, que se trata de uma perturbação de natureza direta, ou seja, não se considerou a presença de uma perturbação de natureza retrógrada.

A partir do modelo apresentado em (3.11), são enunciadas e demonstradas algumas proposições.

Proposição 1: Se o conjunto dos polos do sistema estabilizado (A, B, C) é dado por $\Lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, então o conjunto dos polos do sistema discreto (3.11) é dado por:

$$\Lambda(\bar{A}) = \underbrace{\{e^{(\lambda_1 - j\Omega)h}, e^{(\lambda_2 - j\Omega)h}, \dots, e^{(\lambda_n - j\Omega)h}\}}_{\Lambda(\tilde{A}h)} \uplus \underbrace{\{0, 0, \dots, 0\}}_{m \text{ vezes}}$$

Onde n e m são, respectivamente, a dimensão do estado e da entrada do sistema (A, B, C) , e $\uplus$ denota união com repetição. Em particular, como o sistema (A, B, C) é estável, então o sistema discreto $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ também o é.

Demonstração: A matriz $\bar{A}$ é uma matriz bloco diagonal da seguinte forma:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Em que $\bar{A}_{11}$ e $\bar{A}_{22}$ são matrizes quadradas. Assim sendo, tem-se que $\det(\lambda I - \bar{A}) = \det(\lambda I - \bar{A}_{11}) \det(\lambda I - \bar{A}_{22})$ (MEYER, 2000), o que implica que $\Lambda(\bar{A}) = \Lambda(\bar{A}_{11}) \uplus \Lambda(\bar{A}_{22})$.

Para se determinar $\Lambda(\bar{A}_{11})$, considere λ um autovalor de A , com q seu respectivo autovetor. Pode-se mostrar que $(A - j\Omega I)q = (\lambda - j\Omega)q$, ou seja, que $\tilde{\lambda} = (\lambda - j\Omega)$ é autovalor de $\tilde{A}$. Além disso, pode-se mostrar que $\tilde{A}^n q = \tilde{\lambda}^n q$. Dessa forma, escreve-se:

$$\bar{A}_{11}q = e^{\tilde{A}h}q = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\tilde{A}h)^i}{i!} \right) q = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\lambda}h)^i}{i!} \right) q = e^{\tilde{\lambda}h}q = e^{(\lambda - j\Omega)h}q$$

Conclui-se, portanto, que se λ é autovalor de A , então $e^{(\lambda - j\Omega)h}$ é autovalor de $\bar{A}_{11}$.

A determinação de $\Lambda(\bar{A}_{22})$ é trivial, uma vez que $\bar{A}_{22}$ é uma matriz nula.

Ademais, como o sistema (A, B, C) é estável, tem-se que $\text{Re}\{\lambda\} < 0$ para qualquer λ autovalor de A . Uma consequência disso é que todos os autovalores de $\bar{A}$ estão contidos dentro da circunferência unitária, o que implica que o sistema discreto $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ é estável. ■

Proposição 2: Quando h tende para infinito, $\bar{A}_{11}$ e $\bar{A}_{12}$ tendem para matrizes nulas e $\bar{B}_1$ tende para $-\tilde{A}^{-1}B$. Assim sendo, o comportamento do sistema discreto dinâmico (3.11) se aproxima do comportamento do seguinte sistema discreto estático:

$$\tilde{y}_{k+1} = -C\tilde{A}^{-1}B\tilde{u}_k = G(j\Omega)\tilde{u}_k \quad (3.12)$$

Demonstração: Como a matriz $\tilde{A} = (A - j\Omega I)$ é estável, tem-se que $\lim_{h \rightarrow \infty} e^{\tilde{A}h} = 0$ (RUGH, 1996). Assim sendo, tem-se:

$$\begin{cases} \lim_{h \rightarrow \infty} \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \lim_{h \rightarrow \infty} \bar{B} = \begin{bmatrix} -\tilde{A}^{-1}B \\ I \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.13)$$

Utilizando-se o resultado (3.13) no sistema de equações (3.11), chega-se a:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = -\tilde{A}^{-1}B\tilde{u}_k \\ \tilde{y}_k = C\tilde{x}_k \end{cases}$$

Portanto, tem-se que $\tilde{y}_{k+1} = -C\tilde{A}^{-1}B\tilde{u}_k$.

Além disso, como $\tilde{A} = (A - j\Omega I)$ e $G(j\Omega) = G(s)|_{s=j\Omega} = C(j\Omega I - A)^{-1}B$, tem-se:

$$-C\tilde{A}^{-1}B = -C(A - j\Omega I)^{-1}B = C(j\Omega I - A)^{-1}B = G(j\Omega) \quad (3.14)$$

O resultado (3.14) permite escrever $\tilde{y}_{k+1} = G(j\Omega)\tilde{u}_k$. ■

Proposição 3: Quando h tende para infinito, o ganho em baixa frequência (ganho DC) do sistema (3.11), denotado por G_{DC} , é dado por:

$$G_{DC} = \bar{C} (zI - \bar{A})^{-1} \bar{B} \Big|_{z=1} = -C\tilde{A}^{-1}B = G(j\Omega)$$

Demonstração: Por definição, o ganho DC do sistema (3.11) é dado pela equação $G_{DC} = \bar{C} (zI - \bar{A})^{-1} \bar{B} \Big|_{z=1}$. Utilizando-se os resultados (3.13) e (3.14) apresentados na demonstração da proposição 2, escreve-se:

$$G_{DC} = \bar{C} (zI - \bar{A})^{-1} \bar{B} \Big|_{z=1} = z^{-1} \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tilde{A}^{-1}B \\ I \end{bmatrix} \Big|_{z=1} = -C\tilde{A}^{-1}B = G(j\Omega) \quad \blacksquare$$

É importante ressaltar que o modelo discreto (3.11) e as proposições anteriores implicam que:

- Não há nenhuma necessidade de se ter h igual a um múltiplo inteiro de T , pois para a validade dos resultados é necessário apenas que h seja maior do que T .
- Para valores altos de h , os polos do sistema discreto são muito rápidos, justificando a aproximação do sistema discreto dinâmico (3.11) pelo sistema discreto estático (3.12) quando h é suficientemente grande.
- Ainda se considerando valores altos de h , o ganho DC do sistema discreto é igual à matriz de transferência $G(s)$ do sistema (A, B, C) calculada em $s = j\Omega$.
- A tentativa de se usar o esquema tradicional de controle para tentar uma regulação rápida tem muitas limitações. De fato, por exemplo, mesmo ao se usar $h = T$, obtém-se em geral uma dinâmica discreta (3.11) “pouco controlável” e “pouco observável” no sentido de Moore (1981). Isso ocorre por subamostragem, principalmente quando o sistema tem polos de frequências comparáveis com as frequências de perturbação. Como o sistema discreto é estável, poderia ser tentada uma redução de ordem segundo Moore (1981).

3.3 Estabilidade

A partir do resultado apresentado na seção anterior, são feitas as seguintes afirmações, que garantem a efetividade da metodologia clássica de solução do problema de compensação de desbalanço:

- Considere a figura 23, inicialmente na ausência da perturbação. Assuma que o sistema (A, B, C) é assintoticamente estável. Se um sistema de controle discreto garantir a estabilidade exponencial do sistema discreto $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$, então o sistema híbrido contínuo-discreto em malha fechada da figura 14 também é exponencialmente estável.

- Considere novamente a figura 23. Se o controlador discreto $\mathcal{H}$ fornecer uma solução do problema de regulação para um distúrbio $\widetilde{D}_k = \widetilde{D}$ constante, então o esquema da figura 14 é uma solução para compensação assintótica do desbalanço $d(t)$ na frequência Ω .

Um esboço da demonstração dessas afirmações pode ser encontrado em Perim e Pereira da Silva (2016).

3.4 Desacoplamento entre as Dinâmicas Direta e Retrógrada

O modelo discreto obtido, representado pelas matrizes $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$, é útil para se determinar a qualidade da aproximação da dinâmica equivalente percebida pelo controlador $\mathcal{H}$ pela dinâmica $z^{-1}G(j\Omega)$. Quanto maior for o valor do período de amostragem h , mais próxima é a dinâmica equivalente da dinâmica aproximada $z^{-1}G(j\Omega)$.

Entretanto, esse modelo foi obtido considerando-se o distúrbio como sendo de natureza puramente direta. Caso o distúrbio seja da forma da equação (2.15), ou seja, contenha componentes direta e retrógrada, constrói-se a malha completa de controle apresentada na figura 13. Considere, então, a figura 24.

Figura 24: Sistema com entradas $\tilde{u}_k$ e $\tilde{u}_{r,k}$ e saídas $\tilde{y}_k$ e $\tilde{y}_{r,k}$

Fonte: Autor.

Através da figura 24, escrevem-se as equações de estado do sistema (A, B, C) , dadas por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + u_r(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.15)$$

Aplicando-se o operador $\mathcal{F}$ ao sistema de equações (3.15), obtém-se o próprio sistema de equações (3.2). Isso ocorre porque $\mathcal{F}(u_r(t)) = 0$, dado que $u_r(t)$ é um sinal de natureza retrógrada (vide equação (2.27)) e que o operador $\mathcal{F}$ anula componentes retrógradas (vide propriedade 1 do operador $\mathcal{F}$). Dessa forma, o sistema $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ continua sendo o sistema discreto equivalente que relaciona a entrada $\tilde{u}_k$ à saída $\tilde{y}_k$.

Considerando-se, agora, o operador $\mathcal{F}_r$ (vide equação (2.21)), pode-se demonstrar que esse operador possui uma propriedade análoga à propriedade 2 do operador $\mathcal{F}$, propriedade essa dada pela seguinte equação:

$$\mathcal{F}_r(\dot{\phi}(t)) = \frac{d\mathcal{F}_r(\phi(t))}{dt} - j\Omega\mathcal{F}_r(\phi(t)) \quad (3.16)$$

Lembrando-se de que $\phi(t)$ se trata de um sinal analógico qualquer. Aplicando-se o operador $\mathcal{F}_r$ ao sistema de equações (3.15) e utilizando-se a propriedade desse operador apresentada na equação (3.16), esse sistema de equações pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{F}_r(x(t))}{dt} = \underbrace{(A + j\Omega I)}_{\tilde{A}_r} \mathcal{F}_r(x(t)) + B\mathcal{F}_r(u_r(t)) \\ \mathcal{F}_r(y(t)) = C\mathcal{F}_r(x(t)) \end{cases} \quad (3.17)$$

Dado que $u(t)$ é um sinal de natureza direta (vide equação (2.16)) e que o operador $\mathcal{F}_r$ anula componentes diretas (vide propriedade 1 do operador $\mathcal{F}_r$), tem-se que $\mathcal{F}_r(u(t)) = 0$.

O sistema de equações (3.17) é análogo ao sistema de equações (3.2). Portanto, procedendo-se de maneira análoga, desenvolve-se $\mathcal{F}_r(u_r(t))$, encontrando-se:

$$\mathcal{F}_r(u_r(t)) = \begin{cases} \tilde{u}_{r,(k-1)} + \frac{1}{T}(t - kh)(\tilde{u}_{r,k} - \tilde{u}_{r,(k-1)}), & t \in [kh, kh + T) \\ \tilde{u}_{r,k} & , t \in [kh + T, (k+1)h) \end{cases}, k \in \mathbb{N} \quad (3.18)$$

Com o auxílio da equação (3.18) e dos lemas 1 e 2, relacionam-se os estados $\mathcal{F}_r(x(t))|_{t=kh}$ e $\mathcal{F}_r(x(t))|_{t=(k+1)h}$. Além disso, define-se o estado aumentado $\overline{x}_{r,k}$ como:

$$\overline{x}_{r,k} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_r(x(t))|_{t=kh} \\ \tilde{u}_{r,(k-1)} \end{bmatrix}$$

Dessa forma, as equações de estado do sistema discreto equivalente que relaciona a entrada $\tilde{u}_{r,k}$ à saída $\tilde{y}_{r,k}$ são dadas por:

$$\begin{cases} \bar{x}_{r,(k+1)} = \bar{A}_r \bar{x}_{r,k} + \bar{B}_r \tilde{u}_{r,k} \\ \tilde{y}_{r,k} = \bar{C}_r \bar{x}_{r,k} \end{cases} \quad (3.19)$$

Em que:

$$\bar{A}_r = \begin{bmatrix} \bar{A}_{r,11} & \bar{A}_{r,12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{B}_r = \begin{bmatrix} \bar{B}_{r,1} \\ I \end{bmatrix} \quad \bar{C}_r = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$$

Onde se tem:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{r,11} &= e^{\tilde{A}_r h} \\ \bar{A}_{r,12} &= e^{\tilde{A}_r(h-T)} \frac{(\tilde{A}_r^{-1})^2}{T} \left(T \tilde{A}_r e^{\tilde{A}_r T} - e^{\tilde{A}_r T} + I \right) B \\ \bar{B}_{r,1} &= e^{\tilde{A}_r(h-T)} \frac{(\tilde{A}_r^{-1})^2}{T} \left(e^{\tilde{A}_r T} - I \right) B - \tilde{A}_r^{-1} B \end{aligned}$$

Assim sendo, a dinâmica híbrida contínua-discreta da figura 24 pode ser substituída, sem prejuízos, por uma dinâmica puramente discreta, conforme ilustra a figura 25.

Figura 25: Sistemas discretos equivalentes

Fonte: Autor.

A figura 25 evidencia o desacoplamento entre as dinâmicas direta e retrógrada. A figura 23 ilustra a representação em diagrama de blocos do sistema $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ em malha fechada com o controlador discreto $\mathcal{H}$, já se considerando a componente direta do distúrbio $(\tilde{D}_k)$. A figura 26, mostrada a seguir, ilustra a representação em diagrama de blocos do sistema $(\bar{A}_r, \bar{B}_r, \bar{C}_r)$ em malha fechada com o controlador discreto $\mathcal{H}_r$, já se considerando a componente retrógrada do distúrbio $(\tilde{R}_k)$.

Figura 26: Sistema discreto equivalente $(\bar{A}_r, \bar{B}_r, \bar{C}_r)$ em malha fechada

Fonte: Autor.

A partir do modelo apresentado em (3.19), são enunciadas algumas proposições:

Proposição 4: Se o conjunto dos polos do sistema estabilizado (A, B, C) é dado por $\Lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, então o conjunto dos polos do sistema discreto (3.19) é dado por:

$$\Lambda(\bar{A}_r) = \underbrace{\left\{ e^{(\lambda_1 + j\Omega)h}, e^{(\lambda_2 + j\Omega)h}, \dots, e^{(\lambda_n + j\Omega)h} \right\}}_{\Lambda(\tilde{e}^{\bar{A}_r h})} \uplus \underbrace{\{0, 0, \dots, 0\}}_{m \text{ vezes}}$$

Onde n e m são, respectivamente, a dimensão do estado e da entrada do sistema (A, B, C) , e $\uplus$ denota união com repetição. Em particular, como o sistema (A, B, C) é estável, então o sistema discreto $(\bar{A}_r, \bar{B}_r, \bar{C}_r)$ também o é. ■

Proposição 5: Quando h tende para infinito, $\bar{A}_{r,11}$ e $\bar{A}_{r,12}$ tendem para matrizes nulas e $\bar{B}_{r,1}$ tende para $-\tilde{A}_r^{-1}B$. Assim sendo, o comportamento do sistema discreto dinâmico (3.19) se aproxima do comportamento do seguinte sistema discreto estático:

$$\tilde{y}_{r,(k+1)} = -C\tilde{A}_r^{-1}B\tilde{u}_{r,k} = G(-j\Omega)\tilde{u}_{r,k} \quad (3.20)$$

■

Proposição 6: Quando h tende para infinito, o ganho em baixa frequência (ganho DC) do sistema (3.19), denotado por $G_{r,DC}$, é dado por:

$$G_{r,DC} = \bar{C}_r \left(zI - \bar{A}_r \right)^{-1} \bar{B}_r \Big|_{z=1} = -C\tilde{A}_r^{-1}B = G(-j\Omega)$$

■

A demonstração de cada uma das proposições 4, 5 e 6 é análoga à demonstração de cada uma das proposições 1, 2 e 3, respectivamente. Em particular, a equação (3.20) da proposição 5 mostra que o modelo discreto $(\bar{A}_r, \bar{B}_r, \bar{C}_r)$ é útil para se determinar a qualidade da aproximação da dinâmica equivalente percebida pelo controlador $\mathcal{H}_r$ pela dinâmica $z^{-1}G(-j\Omega)$. Quanto maior for o valor do período de amostragem h , mais próxima é a dinâmica equivalente da dinâmica aproximada $z^{-1}G(-j\Omega)$.

Na dedução dos sistemas discretos equivalentes, as hipóteses de simetria do rotor e de isotropia dos mancais magnéticos não são aparentes. Entretanto, essas hipóteses estão implícitas quando se escreve, por exemplo, o sistema de equações (3.15). Em outras palavras, essas hipóteses são necessárias para a determinação do sistema (A, B, C) , considerado, neste capítulo, como conhecido. A validade dos resultados apresentados neste capítulo para modelos de rotores e de mancais que violem alguma dessas hipóteses está condicionada à obtenção de um sistema (A, B, C) , complexificado e estável, pertinente.

4 SIMULAÇÕES

Neste capítulo são aplicadas as metodologias apresentadas nos capítulos 2 e 3. Inicialmente, apresenta-se um modelo de rotor descrito em coordenadas reais, para o qual é feita uma transformação para coordenadas complexas e, em seguida, é feito um projeto simplificado de estabilização. De posse do modelo complexificado e estabilizado, determina-se o modelo discreto equivalente de acordo com a técnica deduzida no capítulo 3. Na sequência, é aplicada a técnica de regulação síncrona complexificada explicada no capítulo 2, seção 2.3, a fim de se avaliar a efetividade dessa técnica com relação à eliminação do efeito do distúrbio causado pelo desbalanço. Utilizando-se a dinâmica do sistema equivalente (figuras 12 e 16(a)), é feita uma comparação entre os tempos de identificação ao se utilizar um modelo não complexificado (abordagem adotada por Fernandes (2012)) e ao se utilizar um modelo complexificado (abordagem adotada nesta dissertação). Por fim, é feita uma simulação levando-se em conta um modelo simplificado da anisotropia dos mancais.

4.1 Sistema Estabilizado

O objetivo desta seção é apresentar o sistema complexificado e estabilizado (A, B, C) utilizado nas simulações. Parte-se de um modelo de rotor extraído de Genta (2005) e realiza-se um projeto simplificado de controle considerando-se esse rotor estabilizado por mancais magnéticos.

Considere um rotor rígido, simétrico em relação ao seu eixo de rotação e disposto verticalmente, cujo esboço é apresentado na figura 27.

Figura 27: Esboço de um rotor disposto verticalmente

Fonte: Autor.

Na figura 27, M é a massa do rotor e o par J_p e J_t são, respectivamente, os momentos polar e transversal de inércia desse rotor. Os comprimentos a e b são as distâncias entre o centro de massa do rotor e as seções transversais ① e ②, respectivamente. Tem-se, ainda, $L = (a + b)$. Essas seções transversais representam os planos em que se localizam tanto os mancais magnéticos (atuadores) quanto os sensores de vibração.

Ao se considerar o rotor um corpo rígido com momentos de inércia não nulos, obtém-se o modelo mais simples com o qual pode se verificar o efeito giroscópico, que implica na dependência das frequências amortecidas (parte imaginária dos autovalores do sistema) com a velocidade de rotação do rotor. O gráfico obtido ao se representar essas frequências amortecidas em função da velocidade angular do rotor é chamado de diagrama de Campbell. Quando a frequência da rotação do rotor for igual à frequência amortecida do mesmo, diz-se que o rotor atingiu uma velocidade crítica. No modelo de rotor de De Laval (ou de Jeffcott), muito difundido na literatura por ser o modelo mais simples a tratar de velocidade crítica, a frequência amortecida não depende da velocidade de rotação do rotor, e isso não é uma característica geral de rotores (GENTA, 2005).

Para se obter um modelo do rotor da figura 27, considere o sistema de coordenadas inercial $OXYZ$, apresentado na figura 28. O eixo Z desse sistema é paralelo ao eixo de simetria do rotor quando esse rotor se encontra em repouso. Ainda se considerando a figura 28, observa-se também o sistema inercial $CX'Y'Z'$, obtido através de uma translação do sistema $OXYZ$ para o ponto C (ponto definido pela intersecção entre o eixo de simetria do rotor e a seção transversal que passa pelo centro de massa do rotor). O sistema de coordenadas não inercial $CX'yz^*$, por sua vez, é obtido do sistema $CX'Y'Z'$ através de uma rotação $\varphi_{X'}(t)$ em torno do eixo X' , em que $\varphi_{X'}(t)$ é solidário ao movimento lateral do rotor. Finalmente, o sistema não inercial $Cxyz$ é obtido do sistema $CX'yz^*$ através de uma rotação $\varphi_y(t)$ em torno do eixo y , em que $\varphi_y(t)$ também é solidário ao movimento lateral do rotor.

Figura 28: Referencial inercial $OXYZ$ e sistemas de coordenadas auxiliares

Fonte: Autor.

Para se caracterizar o desbalanço, são definidos mais alguns sistemas de coordenadas, apresentados na figura 29. O sistema não inercial $C\xi\eta z$ é obtido de $Cxyz$ através de uma rotação $\theta(t)$ em torno do eixo z , em que $\dot{\theta}(t) = \Omega(t)$. Como, por hipótese, a velocidade angular Ω de rotação do rotor é constante, tem-se $\theta(t) = \Omega t$. O sistema não inercial $P\xi'\eta'z'$ é obtido de $C\xi\eta z$ através de uma translação do ponto C para o centro de massa do rotor, identificado pelo ponto P . Essa translação é caracterizada pelos parâmetros de desbalanço ϵ e α . Caso os eixos ξ' , η' e z' fossem os eixos principais de inércia, teria-se $\alpha = 0$. Pode haver, porém, um desbalanço angular χ entre os eixos principais de inércia ($P123$) e o sistema $P\xi'\eta'z'$, situação em que α não é necessariamente nulo.

Figura 29: Eixos principais de inércia e sistemas de coordenadas auxiliares

Fonte: Autor.

De posse desses sistemas de coordenadas, o modelo do rotor pode ser equacionado. Considerando-se um desacoplamento entre a dinâmica axial (ao longo do eixo Z) e a dinâmica lateral, o modelo linearizado do rotor rígido é dado por:

$$\begin{cases} M\ddot{X}(t) = M\epsilon\Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha) + F_{1X}(t) + F_{2X}(t) \\ M\ddot{Y}(t) = M\epsilon\Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha) + F_{1Y}(t) + F_{2Y}(t) \\ J_t\ddot{\varphi}_{X'}(t) + J_p\Omega\dot{\varphi}_y(t) = -(J_t - J_p)\chi\Omega^2 \sin(\Omega t) + aF_{1Y}(t) - bF_{2Y}(t) \\ J_t\ddot{\varphi}_y(t) - J_p\Omega\dot{\varphi}_{X'}(t) = (J_t - J_p)\chi\Omega^2 \cos(\Omega t) - aF_{1X}(t) + bF_{2X}(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

No sistema de equações (4.1), $F_{1X}(t)$ e $F_{1Y}(t)$ são as forças exercidas pelos mancais posicionados no plano de ação ①, enquanto $F_{2X}(t)$ e $F_{2Y}(t)$ são as forças exercidas pelos mancais posicionados no plano de ação ②.

Uma mudança de coordenadas reais para coordenadas complexas pode ser feita através dos seguintes conjuntos de transformações:

$$\begin{cases} r(t) = X(t) + jY(t) \\ \varphi(t) = \varphi_y(t) - j\varphi_{X'}(t) \end{cases} \quad \begin{cases} F_1(t) = F_{1X}(t) + jF_{1Y}(t) \\ F_2(t) = F_{2X}(t) + jF_{2Y}(t) \end{cases}$$

Obtém-se, assim, o modelo complexificado do rotor, dado por:

$$\begin{cases} M\ddot{r}(t) = M\epsilon\Omega^2 e^{j\alpha} e^{j\Omega t} + F_1(t) + F_2(t) \\ J_t\ddot{\varphi}(t) - jJ_p\Omega\dot{\varphi}(t) = (J_t - J_p)\chi\Omega^2 e^{j\Omega t} - aF_1(t) + bF_2(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

Para se obter uma descrição do sistema (4.2) em espaço de estados, definem-se o vetor de estados $x(t)$, o vetor de entradas $u_T(t)$ e o vetor de distúrbios $d(t)$ conforme a seguir:

$$x(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ \dot{r}(t) \\ \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} \quad u_T(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} \quad d(t) = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \Omega^2 e^{j\Omega t}$$

Assim sendo, obtém-se:

$$\dot{x}(t) = A_{ma}x(t) + Bu_T(t) + Bd(t) \quad (4.3)$$

Em que:

$$A_{ma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & j\frac{J_p}{J_t}\Omega \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & \frac{1}{M} \\ 0 & 0 \\ -\frac{a}{J_t} & \frac{b}{J_t} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Mb\epsilon e^{j\alpha} - (J_t - J_p)\chi}{L} \\ \frac{Ma\epsilon e^{j\alpha} + (J_t - J_p)\chi}{L} \end{bmatrix}$$

Considerando-se que os deslocamentos do rotor sejam medidos pelos sensores de vibração posicionados nos planos ① e ②, e linearizando-se esses deslocamentos, o vetor de saídas $y(t)$, em função do estado $x(t)$, é dado por:

$$y(t) = Cx(t)$$

Em que:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

Para se estabilizar o sistema (4.3), admite-se que $u_T(t)$ possa ser separado em duas componentes, uma componente de estabilização $u_{est}(t)$ e uma componente de controle síncrono $u(t)$, de modo que $u_T(t) = (u_{est}(t) + u(t))$. Além disso, lançam-se mão das seguintes hipóteses acerca dos mancais magnéticos:

- Cada mancal magnético se comporta como um mancal mecânico isotrópico, possuindo elasticidade equivalente e amortecimento viscoso equivalente. Essa simplificação considera as dinâmicas do mancal magnético e de seu controlador como dinâmicas não modeladas.
- Tanto a constante elástica quanto o coeficiente de amortecimento viscoso de cada mancal podem ser ajustados para valores desejados através de uma sintonia de ganhos do controlador do mancal.

Dessa forma, a estabilização do sistema (4.3) pode ser feita através de uma realimentação de estados $u_{est}(t) = -K_c x(t)$, onde K_c não é uma matriz qualquer, sendo dada por:

$$K_c = \begin{bmatrix} k_{p1} & k_{v1} & -ak_{p1} & -ak_{v1} \\ k_{p2} & k_{v2} & bk_{p2} & bk_{v2} \end{bmatrix}$$

Os parâmetros k_{p1} , k_{v1} , k_{p2} e k_{v2} sintetizam os ganhos dos controladores de cada mancal e permitem ajustar a constante elástica e o coeficiente de amortecimento viscoso de cada um desses mancais. Considerando-se a realimentação de estados, o sistema (4.3) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{(A_{ma} - BK_c)}_A x(t) + Bu(t) + Bd(t)$$

O sistema estabilizado é dado, então, por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Bd(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.4)$$

A estratégia de estabilização adotada foi sintonizar os coeficientes de K_c de forma a desacoplar os modos cilíndrico (1º modo) e cônico (2º modo), além de ajustar a frequência natural ω_n e o coeficiente de amortecimento ζ do modo cilíndrico para valores arbitrários, mas de tal forma que o sistema (A, B, C) fosse pouco amortecido. Algebricamente, essa estratégia se resume nas seguintes equações:

$$k_{p1} = \frac{Mb}{L}\omega_n^2, \quad k_{v1} = \frac{2Mb}{L}\zeta\omega_n, \quad k_{p2} = \frac{Ma}{L}\omega_n^2, \quad k_{v2} = \frac{2Ma}{L}\zeta\omega_n$$

A estratégia de estabilização adotada faz com que as frequências amortecidas do modo cilíndrico não dependam da velocidade de rotação Ω do rotor. Ainda assim, as frequências amortecidas do modo cônico dependem de Ω .

Para se obter um modelo numérico do sistema (4.4), os parâmetros desse sistema são arbitrados. Os parâmetros de inércia do rotor são dados por:

$$M = 3 \text{ kg} \quad J_p = 0,02 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \quad J_t = 0,015 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Os parâmetros geométricos do rotor, por sua vez, são fixados como:

$$a = 0,2 \text{ m} \quad b = 0,1 \text{ m}$$

Finalmente, os parâmetros de desbalanço do rotor são definidos por:

$$\epsilon = 0,012 \text{ m} \quad \alpha = 0,1 \text{ rad} \quad \chi = 0,1 \text{ rad}$$

Para o cálculo dos ganhos k_{p1} , k_{v1} , k_{p2} e k_{v2} bastam se escolher os valores de ω_n e ζ , arbitrados em:

$$\omega_n = 50 \text{ rad/s} \quad \zeta = 0,1$$

Conforme já mencionado, o sistema de equações (4.2), que descreve a dinâmica do rotor, foi obtido considerando-se Ω constante. O valor de Ω é fixado em:

$$\Omega = 50 \text{ rad/s}$$

Dessa forma, as matrizes do sistema (A, B, C) podem ser calculadas, sendo dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2500 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10000 & -40 + \frac{200}{3}j \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \\ -\frac{40}{3} & \frac{20}{3} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{bmatrix}$$

Seja λ um autovalor de A , com $\lambda = (\sigma + j\omega)$. A parte real de λ , denotada por σ , é chamada de taxa de decaimento e seu valor está relacionado à constante de tempo do sistema. A parte imaginária de λ , denotada por ω , já foi definida e é chamada de frequência amortecida. Em modelos complexificados de rotores, o sinal da frequência amortecida tem sentido físico. Para cada autovalor λ com $\omega > 0$, o sistema em questão apresenta uma componente da resposta que gira no mesmo sentido de giro do próprio rotor (componente direta). Analogamente, para cada autovalor λ com $\omega < 0$, o sistema em questão apresenta uma componente da resposta que gira no sentido contrário ao de giro do próprio rotor (componente retrógrada).

Para se verificar a dependência das frequências amortecidas do sistema (A, B, C) com a velocidade de rotação Ω do rotor, determina-se o diagrama de Campbell desse sistema, apresentado na figura 30. Nessa figura, o diagrama foi separado nas componentes diretas (figura 30(a)) e retrógradas (figura 30(b)).

Figura 30: Diagrama de Campbell

Fonte: Autor.

As curvas horizontais desse diagrama representam as frequências amortecidas dos modos cilíndricos, que não dependem de Ω devido à estratégia de estabilização adotada. As demais curvas representam as frequências amortecidas dos modos cônicos. Nesse diagrama, também são apresentadas, na forma de retas tracejadas, a bissetriz dos quadrantes ímpares (reta identidade) e a bissetriz dos quadrantes pares. As interseções das curvas representativas das frequências amortecidas com as retas tracejadas definem as velocidades críticas (frequências de ressonância).

Ainda se separando os autovalores desse sistema nas componentes diretas e retrógradas, determinam-se os gráficos da taxa de decaimento de cada uma dessas componentes em função da velocidade angular Ω de rotação do rotor. Esses gráficos são apresentados na figura 31.

Figura 31: Taxa de decaimento

Fonte: Autor.

Assim como na figura 30, as curvas horizontais dos gráficos da figura 31 representam as taxas de decaimento dos modos cilíndricos, enquanto as demais curvas representam as taxas de decaimento dos modos cônicos.

4.2 Aplicação da Regulação Síncrona Complexificada

Definido o sistema (A, B, C) , determina-se o sistema discreto equivalente $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ de acordo com o modelo (3.11), bastando-se, para isso, a escolha do período de amostragem h . Conforme já mencionado, h deve ser suficientemente alto para que a resposta permanente do sistema (A, B, C) tenha se estabelecido. As constantes de tempo desse sistema podem ser obtidas da figura 31. Para $\Omega = 50$ rad/s, a menor constante de tempo é dada por, aproximadamente, $\left|\frac{1}{\sigma}\right| = 0,2$ s. Dessa forma, escolhe-se $h = 1$ s, ou seja, h é cinco vezes maior que a menor constante de tempo do sistema.

Constrói-se, então, a malha de regulação síncrona complexificada conforme a figura 23. Em outras palavras, não se considera, *a priori*, a componente retrógrada do distúrbio, simulando-se apenas a malha de controle direto. As matrizes do sistema $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ são dadas por, aproximadamente:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0,0053 + 0,0014j & -0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1612 + 0,0438j & 0,0060 + 0,0016j & 0 & 0 & 0,0001 & 0,0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} -0,0007j & -0,0007j \\ 0,0330 + 0,0001j & 0,0330 + 0,0001j \\ -0,0012 + 0,0002j & 0,0006 - 0,0001j \\ -0,0110 - 0,0595j & 0,0055 + 0,0298j \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O distúrbio $\widetilde{D}_k$, por sua vez, é considerado constante e dado por:

$$\widetilde{D}_k = \widetilde{D} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \Omega^2 \simeq \begin{bmatrix} 34,0168 + 2,9950j \\ 55,5336 + 5,9900j \end{bmatrix}$$

Para simular o esquema de controle da figura 23, devem ser escolhidas as matrizes de ponderação Q , R e S da lei de controle ótimo, definidas como:

$$Q = 10^9 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 10^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Além disso, arbitra-se, inicialmente, $\beta = 1$ no algoritmo de identificação, o que faz com que a equação (2.37) se reduza à equação (2.34) e, conseqüentemente, não seja necessária, num primeiro momento, a escolha da primeira estimativa da matriz de influência (G_0). De todo modo, a primeira estimativa G_0 é inicializada, pois são realizadas, posteriormente, simulações para $\beta \neq 1$. Inicializa-se, também, a primeira entrada de controle ($\tilde{u}_0$). A matriz G_0 e o vetor $\tilde{u}_0$ ficam:

$$G_0 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{u}_0 = 10^{-2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nas figuras 32 e 33, são apresentados os resultados da simulação do esquema de controle da figura 23, ou seja, do sistema discreto equivalente $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ deduzido no capítulo 3 em malha fechada com o controlador discreto $\mathcal{H}$.

Figura 32: Magnitudes da saída e da entrada na seção ①

Fonte: Autor.

Figura 33: Magnitudes da saída e da entrada na seção ②

Fonte: Autor.

Nas figuras 32(a) e 33(a), r_1 e r_2 são, respectivamente, a primeira componente e a segunda componente do vetor $\tilde{y}_k$. Observa-se, dessas figuras, que o controlador discreto $\mathcal{H}$ anula o efeito do distúrbio $\tilde{D}$ na saída $\tilde{y}_k$, a menos dos instantes de identificação. Para mensurar a qualidade dessa identificação, define-se a seguinte equação de erro:

$$E_l = \frac{\|G_l - G(j\Omega)\|_F}{\|G(j\Omega)\|_F}, \quad l \in \mathbb{N}^* \quad (4.5)$$

Na equação (4.5), são calculadas as normas de Frobenius das matrizes indicadas. Para a simulação em questão, a figura 34 ilustra a evolução do erro de identificação, em que E_1 não aparece por ter ordem de grandeza muito diferente dos demais valores de E_l .

Figura 34: Erro de identificação

Fonte: Autor.

Nota-se que esse erro converge para, aproximadamente, 0,02. A identificação não é perfeita pois a dinâmica do sistema $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ tende para a dinâmica $z^{-1}G(j\Omega)$, mas é diferente dessa por haver uma contribuição residual dos termos transitórios. Cumpre ressaltar que o algoritmo de identificação utilizado assume que a dinâmica a ser identificada é $z^{-1}G(j\Omega)$, quando, na realidade, existe uma dinâmica discreta de função de transferência próxima a $z^{-1}G(j\Omega)$, mas diferente da mesma.

Mantendo-se todos os parâmetros definidos anteriormente, adiciona-se um ruído branco à saída $\tilde{y}_k$ do sistema discreto. A função desse ruído branco é modelar o ruído de medição da saída. Lembrando-se que a malha de controle da figura 23 foi obtida a partir da malha da figura 14, tem-se que o ruído de medição atua, na verdade, sobre a saída $y(t)$ do sistema estabilizado. Entretanto, a presença do bloco $\mathcal{F}$ (integral de Fourier) já se trata de um filtro. Portanto, o ruído branco adicionado à saída $\tilde{y}_k$ não precisa ser elevado. Os resultados da simulação se encontram nas figuras 35 e 36.

Figura 35: Magnitudes da saída e da entrada na seção ① na presença de ruído ($\beta = 1$)

Fonte: Autor.

Figura 36: Magnitudes da saída e da entrada na seção ② na presença de ruído ($\beta = 1$)

Fonte: Autor.

A figura 37 ilustra a evolução do erro de identificação para $\beta = 1$.

Figura 37: Erro de identificação na presença de ruído ($\beta = 1$)

Fonte: Autor.

Variando-se o fator de esquecimento β (vide equação (2.37)), nota-se que quanto menor o valor de β , menor é o valor do erro de identificação, mas maior é o tempo de regulação. A título de exemplo, os resultados da simulação para $\beta = 0,4$ são apresentados nas figuras 38 e 39.

Figura 38: Magnitudes da saída e da entrada na seção ① na presença de ruído ($\beta = 0,4$)

Fonte: Autor.

Figura 39: Magnitudes da saída e da entrada na seção ② na presença de ruído ($\beta = 0,4$)

Fonte: Autor.

Para $\beta = 0,4$, a figura 40 mostra a evolução do erro de identificação.

Figura 40: Erro de identificação na presença de ruído ($\beta = 0,4$)

Fonte: Autor.

Nota-se que, em regime, o erro mostrado na figura 40 é menor que o mostrado na figura 37. Entretanto, o tempo para se controlar efetivamente a vibração do rotor é maior. A figura 40 evidencia, ainda, a robustez da lei de controle utilizada, pois o sistema é regulado mesmo com estimativas ruins da matriz de influência. Por fim, apesar da robustez da lei de controle permitir o uso de estimativas não muito precisas, um menor erro de identificação pode ser desejado. Isso ocorre, por exemplo, num contexto em que, para se reduzir a vibração do rotor, a identificação é utilizada para se determinar os valores de massas de correção.

4.3 Comparação entre Tempos de Identificação

Partindo-se do sistema de equações (4.1), e procedendo-se de maneira análoga ao realizado para o sistema de equações (4.2), ou seja, determinando-se uma descrição do sistema (4.1) em espaço de estados e realizando-se um projeto simplificado de estabilização para esse sistema, pode-se determinar a matriz de influência do modelo não complexificado do rotor em conjunto com seu controlador interno de estabilização. Essa matriz de influência possui 4 entradas e 4 saídas, enquanto a matriz do modelo complexificado possui 2 entradas e 2 saídas.

Considerando-se, então, que h seja suficientemente alto, pode ser utilizada a aproximação do modelo não complexificado pelo sistema equivalente da figura 12, assim como a aproximação do modelo complexificado pelo sistema equivalente da figura 16(a). As figuras 12 e 16(a) são essencialmente iguais, mas a primeira leva em conta

a matriz de influência do modelo não complexificado, e a última leva em conta a matriz de influência do modelo complexificado. Em outras palavras, utiliza-se a dinâmica $z^{-1}G(j\Omega)$ para ambos os modelos, lembrando-se que a matriz de influência $G(j\Omega)$ tem, respectivamente, ordem 4 e ordem 2 para cada um deles. Ressalta-se, ainda, que apenas a malha de controle direto é simulada no caso complexificado, ou seja, apenas o distúrbio devido ao desbalanço é considerado. Dessa forma, os tempos de identificação para cada uma dessas abordagens podem ser comparados. Os resultados das simulações são apresentados nas figuras 41 e 42, em que se considerou $\beta = 1$ na equação de identificação (2.37) (ou, de forma equivalente, em que se utilizou a equação (2.34) para o cálculo das estimativas G_l da matriz de influência).

Figura 41: Magnitude da saída na seção ①

Fonte: Autor.

Figura 42: Magnitude da saída na seção ②

Fonte: Autor.

Observa-se, das figuras 41 e 42, que a identificação utilizando-se o modelo complexificado é realizada na metade do tempo da identificação utilizando-se o modelo não complexificado, resultado que está em concordância com o que era esperado. Mesmo que fosse considerado o distúrbio com componentes direta e retrógrada, ou seja, mesmo que fossem simuladas as malhas de controle direto e retrógrado no caso complexificado, a identificação ainda seria realizada na metade do tempo, pois as identificações das matrizes $G(j\Omega)$ e $G(-j\Omega)$ seriam realizadas em paralelo pelos controladores $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_r$, respectivamente.

Ainda se considerando as figuras 41 e 42, nota-se que a regulação síncrona complexificada apresenta um resultado final ligeiramente melhor em comparação com a regulação síncrona. Ademais, conforme já exposto nas seções 2.3.4.1 e 2.3.4.2, a complexificação reduz a ordem da matriz identificada pela metade, o que também reduz a ordem da lei de controle.

4.4 Efeito da Anisotropia dos Mancais

Conforme explicado na seção 2.3.4.1, a anisotropia dos mancais é modelada através da aparição de uma componente retrógrada no sistema em malha fechada. Assim sendo, constrói-se a malha de controle apresentada na figura 17 para se anular o efeito tanto do desbalanço quanto dessa componente retrógrada. As matrizes de ponderação M_1 e M_2 são escolhidas como pequenos desvios da matriz identidade e são dadas a seguir:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,01 & 0,99 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0,98 & 0,02 \\ 0,03 & 0,97 \end{bmatrix}$$

Cumprе ressaltar que esse modelo de anisotropia é simplificado, pois não se considerou seu efeito na determinação do sistema (A, B, C) . Em outras palavras, a anisotropia só é considerada na atuação do regulador síncrono, não sendo considerada na atuação do controlador interno de estabilização.

Ainda com relação à figura 17, vale lembrar que foram definidos os sinais de saída dos controladores $(\tilde{u}_k^c$ e $\tilde{u}_{r,k}^c)$ e os sinais de entrada da planta $(\tilde{u}_k^p$ e $\tilde{u}_{r,k}^p)$. Esses últimos são a consequência do efeito da anisotropia sobre aqueles primeiros.

Os resultados da simulação levando-se em conta o modelo simplificado de anisotropia dos mancais são apresentados nas figuras 43, 44, 45 e 46, em que se considerou $\beta = 1$ na equação de identificação (2.37), equação essa utilizada tanto no controlador $\mathcal{H}$ quanto no controlador $\mathcal{H}_r$.

Figura 43: Mancais anisotrópicos - Magnitude da saída na seção ①

Fonte: Autor.

Figura 44: Mancais anisotrópicos - Magnitude da entrada na seção ①

Fonte: Autor.

Figura 45: Mancais anisotrópicos - Magnitude da saída na seção ②

Fonte: Autor.

Figura 46: Mancais anisotrópicos - Magnitude da entrada na seção ②

Fonte: Autor.

Observa-se, das figuras 43 e 45, que o efeito da componente retrógrada na saída do sistema é muito menor que o efeito da componente direta. De todo modo, a malha de controle construída anula o efeito tanto do desbalanço quanto da componente retrógrada. Considerando-se, agora, as figuras 43(a), 44(a), 45(a) e 46(a), nota-se que as componentes diretas tanto da saída quanto da entrada não sofreram alterações significativas quando comparadas com as simulações realizadas considerando-se a isotropia dos mancais. Por fim, as figuras 44(b) e 46(b) mostram que, aos poucos, o sinal de saída do controlador retrógrado compensa o efeito cruzado causado pela anisotropia.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentadas duas contribuições para o tema de compensação síncrona de desbalanço. A primeira contribuição é a simplificação do compensador síncrono através de considerações de simetria do rotor e de isotropia dos mancais, além do uso de coordenadas complexas na descrição do modelo do rotor estabilizado por mancais magnéticos. Essa simplificação reduz a ordem da matriz de influência do sistema, diminuindo a quantidade de passos de identificação necessários para se determinar essa matriz, o que implica em um menor tempo de identificação. Além disso, a redução da ordem da matriz de influência também reduz a ordem da lei de controle. A segunda contribuição é a determinação do modelo exato do sistema discreto percebido pelo compensador síncrono. A utilidade desse resultado é a obtenção de uma ferramenta eficaz e eficiente para a simulação da malha de compensação síncrona. O modelo discreto proposto permite avaliar a escolha do período de amostragem sem a necessidade de se simular um modelo híbrido contínuo-discreto.

Cumprе ressaltar que as considerações de simetria e de isotropia, em conjunto com uma transformação de coordenadas reais para coordenadas complexas, permitem desacoplar o controle das perturbações diretas do controle das perturbações retrógradas. À essa transformação de coordenadas deu-se o nome de complexificação. Apesar desse desacoplamento não ser válido para sistemas com assimetrias ou anisotropias, o efeito de uma pequena anisotropia foi analisado em simulação, e o comportamento da malha de controle foi satisfatório.

Realizou-se, também, uma comparação entre os tempos de identificação ao se utilizar um modelo não complexificado (abordagem adotada por Fernandes (2012)) e ao se utilizar um modelo complexificado (abordagem adotada nesta dissertação), em que ficou clara a vantagem em se valer da complexificação.

A presença de um ruído de medição também foi considerada em simulação, em que se avaliou a influência do fator de esquecimento na mitigação do efeito desse ruído. O que se observou foi que valores baixos do fator de esquecimento fazem com que o controle efetivo do sistema seja mais lento, pois também se torna mais lenta a convergência das estimativas da matriz de influência. Entretanto, em regime, o valor baixo do fator de esquecimento diminui o erro dessas estimativas.

Em relação a estudos futuros, no âmbito teórico, citam-se as seguintes sugestões:

- Estudar a transformação de coordenadas reais para coordenadas complexas no caso de modelos de rotores assimétricos suspensos por mancais anisotrópicos, a fim de se estender os resultados obtidos neste trabalho;
- Avaliar o comportamento do sistema em malha fechada para valores crescentes da velocidade de rotação do rotor, simulando o momento de partida do mesmo até o momento de sua operação em regime;
- Utilizar um modelo de rotor flexível nas simulações, e avaliar o desempenho do compensador síncrono nas passagens desse rotor pelas suas velocidades críticas;
- Analisar sistemas em que as posições e/ou as quantidades de mancais (atuadores) e de sensores não coincida.

No âmbito prático, sugere-se uma análise experimental da metodologia proposta com o objetivo de se comparar os resultados experimentais com os dados obtidos em simulação.

REFERÊNCIAS

- CHIBA, A. et al. **Magnetic bearings and bearingless drives**. 1. ed. [S.l.]: Newnes, 2005.
- CLEMENTS, J. R. **The experimental testing of an active magnetic bearing/rotor system undergoing base excitation**. Dissertação (Mestrado) — Virginia Tech, Blacksburg, VA, Estados Unidos da América, 2000.
- CRUZ, J. J. **Controle robusto multivariável: o método LQG/LTR**. São Paulo: EDUSP, 1996.
- DYER, S. W. **Adaptive optimal control of active balancing systems for high-speed rotating machinery**. Tese (Doutorado) — University of Michigan, Ann Arbor, MI, Estados Unidos da América, 1999.
- FERNANDES, J. R. M. **Redução de vibrações de rotor usando regulação sincronizada**. Dissertação (Mestrado) — USP, São Paulo, SP, Brasil, 2012.
- FERNANDES, J. R. M.; PEREIRA DA SILVA, P. S.; ROCHA, P. H. Balanceamento ativo de rotor usando regulação sincronizada. In: **DINCON 2011 - X Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações**. Águas de Lindóia, SP, Brasil: [s.n.], 2011. p. 691–694.
- GENTA, G. **Dynamics of rotating systems**. [S.l.]: Springer, 2005.
- HERZOG, R. et al. Unbalance compensation using generalized notch filters in the multivariable feedback of magnetic bearings. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 4, n. 5, p. 580–586, 1996.
- KNOSPE, C. R.; TAMER, S. M. Experiments in robust control of rotor unbalance response using magnetic bearings. **Mechatronics**, v. 7, n. 3, p. 217–229, 1997.
- _____. Robust adaptive control of unbalance response for a flexible rotor. **JSME International Journal**, v. 40, n. 4, p. 599–606, 1997.
- KNOSPE, C. R.; TAMER, S. M.; FITTRO, R. Rotor synchronous response control: approaches for addressing speed dependence. **Journal of Vibration and Control**, v. 3, n. 4, p. 435–458, 1997.
- LIANG, T.; YIQING, C. Model development and adaptive imbalance vibration control of magnetic suspended system. **Chinese Journal of Aeronautics**, v. 20, n. 5, p. 434–442, 2007.
- LIU, Z.-h.; NONAMI, K.; ARIGA, Y. Adaptive unbalanced vibration control of magnetic bearing systems with rotational synchronizing and asynchronizing harmonic disturbance. **JSME International Journal**, v. 45, n. 1, p. 142–149, 2002.

- LUM, K.-Y.; COPPOLA, V. T.; BERNSTEIN, D. S. Adaptive autocentering control for an active magnetic bearing supporting a rotor with unknown mass imbalance. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 4, n. 5, p. 587–597, 1996.
- MARKERT, R.; SKRICKA, N.; ZHANG, X. Unbalance compensation on flexible rotors by magnetic bearings using transfer functions. In: **The Eighth International Symposium on Magnetic Bearings**. Mito, IB, Japão: [s.n.], 2002. p. 417–422.
- MEYER, C. D. **Matrix analysis and applied linear algebra**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- MIZUNO, T. An unified approach to controls for unbalance compensation in active magnetic bearings. In: **International Conference on Control Applications**. Trieste, TS, Itália: [s.n.], 1998. p. 1063–1067.
- MOORE, B. C. Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 26, n. 1, p. 17–32, 1981.
- PEREIRA DA SILVA, P. S. **Notas de aula em teoria da regulação e rastreamento**. 2007. Disponível em: <http://www.lac.usp.br/~paulo/cap4_8.pdf>. Acesso em: 13 jun. 2018.
- PERIM, Y.; PEREIRA DA SILVA, P. S. Estudo teórico das técnicas sincronizadas de compensação de desbalanço de rotores via teoria de sistemas. In: **CBA 2016 - XXI Congresso Brasileiro de Automática**. Vitória, ES, Brasil: [s.n.], 2016. p. 1775–1780.
- RUGH, W. J. **Linear system theory**. 2. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1996.
- SCHWEITZER, G.; MASLEN, E. H. **Magnetic bearings: theory, design, and application to rotating machinery**. [S.l.]: Springer, 2009.
- SEGURA, V. I. C. **Regulação sincronizada de distúrbios senoidais**. Dissertação (Mestrado) — USP, São Paulo, SP, Brasil, 1999.
- SHI, J.; ZMOOD, R.; QIN, L. Synchronous disturbance attenuation in magnetic bearing systems using adaptive compensating signals. **Control Engineering Practice**, v. 12, n. 3, p. 283–290, 2004.
- SHI, J.; ZMOOD, R.; QIN, L. J. The direct method for adaptive feed-forward vibration control of magnetic bearing systems. In: **7th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision**. Singapura, Singapura: [s.n.], 2002. p. 675–680.
- TAMISIER, V.; FONT, S.; CARRERE, F. A new anti-vibration algorithm for active magnetic bearings application. In: **IEEE International Conference on Control Applications**. Glasgow, Escócia, Reino Unido: [s.n.], 2002. p. 168–173.
- TANAKA, N.; WATANABE, T.; SETO, K. Levitation and vibration control of a flexible rotor by using active magnetic bearing. In: **The Eleventh International Symposium on Magnetic Bearings**. Nara, NR, Japão: [s.n.], 2008. p. 75–82.
- ZHOU, S.; SHI, J. Active balancing and vibration control of rotating machinery: a survey. **The Shock and Vibration Digest**, v. 33, n. 4, p. 361–371, 2001.

APÊNDICE A – COMPLEXIFICAÇÃO

Assume-se, inicialmente, que o rotor possui um modelo linear da seguinte forma (GENTA, 2005):

$$\begin{cases} M\ddot{q}_X(t) - \Omega G\dot{q}_Y(t) + Kq_X(t) = Hu_X(t) + d_X(t) \\ M\ddot{q}_Y(t) + \Omega G\dot{q}_X(t) + Kq_Y(t) = Hu_Y(t) + d_Y(t) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Esse modelo é válido para um rotor simétrico em relação ao seu eixo de rotação, operando numa velocidade angular Ω constante e sujeito a pequenos deslocamentos. A matriz M é a matriz de inércia do rotor, enquanto a matriz G modela o efeito giroscópico e a matriz K modela a elasticidade do rotor e/ou dos mancais. As matrizes M , G e K são todas reais, simétricas e de dimensão $n \times n$. Os vetores $q_X(t), q_Y(t) \in \mathbb{R}^n$, por sua vez, são as coordenadas generalizadas do modelo, os vetores $u_X(t), u_Y(t) \in \mathbb{R}^m$ são as forças generalizadas (atuações externas) e os vetores $d_X(t), d_Y(t) \in \mathbb{R}^n$ modelam o efeito do desbalanceamento. A matriz H é real, tem dimensão $n \times m$ e pondera a atuação externa.

Uma mudança de coordenadas reais para coordenadas complexas pode ser feita através do seguinte conjunto de transformações:

$$\begin{cases} q(t) = q_X(t) + jq_Y(t) \\ u_T(t) = u_X(t) + ju_Y(t) \\ d(t) = d_X(t) + jd_Y(t) \end{cases}$$

Dessa forma, o conjunto de equações (A.1) pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$M\ddot{q}(t) + j\Omega G\dot{q}(t) + Kq(t) = Hu_T(t) + d(t) \quad (\text{A.2})$$

À essa transformação de coordenadas deu-se o nome de complexificação, em que se tem $q(t), d(t) \in \mathbb{C}^n$ e $u_T(t) \in \mathbb{C}^m$. Conforme já mencionado, a matriz M é simétrica. Caso essa matriz também seja definida positiva, então ela é inversível e a equação matricial (A.2) pode ser representada em espaço de estados como se segue:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -j\Omega M^{-1}G \end{bmatrix}}_{A_{ma}} \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}H \end{bmatrix} u_T(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} d(t) \quad (\text{A.3})$$

As saídas do sistema são as medidas dos deslocamentos do rotor, medidas essas realizadas por sensores de vibração posicionados, por exemplo, nos mesmos planos de atuação dos mancais magnéticos. Assim sendo, essas saídas podem ser linearizadas e representadas por uma combinação linear dos estados do sistema. Matematicamente, essa representação é dada pela seguinte equação:

$$y(t) = C_{ma} \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

O vetor $u_T(t)$ é responsável pelo controle do sistema e pode ser decomposto em uma componente de estabilização ($u_{est}(t)$) e uma componente de controle síncrono ($u(t)$). A estratégia de controle consiste em estabilizar cada uma das equações do sistema (A.1), assim como anular o efeito de cada uma das componentes $d_X(t)$ e $d_Y(t)$ do distúrbio. Caso os mancais magnéticos sejam isotrópicos, e considerando que os sistemas de controle $\mathcal{C}_i^X$ e $\mathcal{C}_i^Y$ projetados para o i -ésimo plano nas direções X e Y sejam idênticos para todo plano i , pode-se complexificar as ações de controle, obtendo-se uma representação complexa do sistema de controle dada por:

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u_T(t) = C_c x_c(t) + D_c y(t) + E_c u(t) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Nota-se que $u_T(t) = (u_T^X(t) + ju_T^Y(t))$ é um vetor complexo cuja parte real corresponde às ações de controle na direção X de todos os planos, e cuja parte imaginária corresponde às ações de controle na direção Y de todos os planos.

As equações (A.3), (A.4) e (A.5) formam o sistema em malha fechada e, após manipulações algébricas, esse sistema pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_d d(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Nesse sistema, o estado $x(t)$ incorpora as variáveis de estado tanto do rotor quanto do controlador de estabilização. A matriz A é estável, resultante da matriz A_{ma} de malha aberta do modelo do rotor e da componente de estabilização do sistema de controle. Ressalta-se que a entrada $u(t)$ do sistema em malha fechada é a componente de controle síncrono. Por simplicidade de modelagem, supõe-se $B_d = B$, ou seja, o desbalanço atua nos mesmos pontos da atuação externa do sistema. Um tratamento mais geral poderia ser feito, mas não representaria vantagem teórica para a compreensão do problema. Assim sendo, tem-se, enfim, um sistema (A, B, C) complexificado e estável, dado a seguir:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + d(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

APÊNDICE B – DIAGRAMAS PARA SIMULINK®

Figura 47: Sistema discreto equivalente $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ em malha fechada (vide figura 23)

Fonte: Autor.

Figura 48: Regulação síncrona - Sistema equivalente (vide figura 12)

Fonte: Autor.

Figura 49: Regulação síncrona complexificada - Sistema equivalente - Malha de controle direto (vide figura 16(a))

Fonte: Autor.

Figura 50: Regulação síncrona complexificada - Efeito da anisotropia dos mancais (vide figura 17)

Fonte: Autor.

APÊNDICE C – PROGRAMAS PARA MATLAB®

- Regulação Tradicional

```

clear;
clc;

%Massa Mola Amortecedor
mb=1;
kappa=1;
c=0.1;

A=[0 1;-kappa/mb -c/mb];
B=[0;1/mb];
C=[1 0];
D=0;

sys=ss(A,B,C,D);
ft=tf(sys);
[num,den]=tfdata(ft,'v');

n=size(A,1);
m=size(B,2);
l=size(C,1);

ewi=-1;
ewf=1;
nw=2000;
w=logspace(ewi,ewf,nw);

mag=zeros(1,nw);
for i=1:nw
    mag(i)=20*log(abs(evalfr(ft,1j*w(i))));

```

```

end

%Distúrbio
Omega=1;

A0m=[0 1;-Omega^2 0];
B0m=[0;1];
C0m=[1 0];
D0m=0;

sys0m=ss(A0m,B0m,C0m,D0m);
ft0m=tf(sys0m);
[num0m,den0m]=tfdata(ft0m,'v');

n0m=size(A0m,1);
m0m=size(B0m,2);
l0m=size(C0m,1);

%Sistema Aumentado
Achap=[A B*C0m;zeros(n0m,n) A0m];
Bchap=[B zeros(n,m0m);zeros(n0m,m) B0m];
Cchap=[C zeros(1,n0m)];

nchap=size(Achap,1);
mchap=size(Bchap,2);
lchap=size(Cchap,1);

%Compensador Interno
ctr=(rank(ctrb(Achap,Bchap))==nchap);
obv=(rank(observ(Achap,Cchap))==nchap);

pc=[-3;-2;-1+1*1j;-1-1*1j];
Kcchap=place(Achap,Bchap,pc);

po=[-6;-5;-4+1*1j;-4-1*1j];
Hcchap=transpose(place(Achap',Cchap',po));

Ac=Achap-Bchap*Kcchap-Hcchap*Cchap;
Bc=-Hcchap;

```

```

Cc=-Kcchap;
Dc=zeros(size(Cc,1),size(Bc,2));

sysc=ss(Ac,Bc,Cc,Dc);
ftc=tf(sysc);
[numc1,denc1]=tfdata(ftc(1),'v');
[numc2,denc2]=tfdata(ftc(2),'v');
denc=denc1;

%Sistema com entrada db(t) e com saída yb(t)
%ftmf=ft/(1+ft*ftc(1)+ft*ft0m*ftc(2));
nummf=conv(num,conv(den0m,denc));
denmf=conv(den,conv(den0m,denc))+conv(num,conv(numc1,den0m))+conv(num,conv(num0m,numc2));
ftmf=tf(nummf,denmf);

%Tempo
ti=0;
tf=10;
dt=0.005;
nt=1+(tf-ti)/dt;
t=linspace(ti,tf,nt);

db=zeros(1,nt);
for i=1:nt
    db(i)=(sqrt(2)/2)*cos(Omega*t(i))+(sqrt(2)/2)*sin(Omega*t(i));
end

yb=lsim(ftmf,db,t);

%Frequência
magmf=zeros(1,nw);
for i=1:nw
    magmf(i)=20*log(abs(evalfr(ftmf,1j*w(i))));
end

%Gráficos
figure;
semilogx(w,mag,'-k');
grid;

```



```

xlabel('Frequência Angular (rad/s)');
ylabel('Magnitude (dB)');
%title('');

figure;
plot(t,db,'-.k',t,yb,'-k');
ylim([-1.1 1.1]);
legend('d_{b}(t) (N)', 'y_{b}(t) (m)');
grid;
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude');
%title('');

figure;
semilogx(w,magmf,'-k');
grid;
xlabel('Frequência Angular (rad/s)');
ylabel('Magnitude (dB)');
%title('');

```

• Sistema Estabilizado

```

clear;
clc;

%Dados do rotor
%Inerciais
M=3;
Jp=0.02;
Jt=0.015;
%Geométricos
a=0.2;
b=0.1;
l=a+b;

%Rotação
Omega_min=0;
Omega_max=500;
tam=501;
Omega=linspace(Omega_min,Omega_max,tam);

```

```

%Controle estabilizante
%Parâmetros
omega_n=50;
zeta=0.1;
%Ganhos
kp1=M*(b/l)*omega_n^2;
kp2=M*(a/l)*omega_n^2;
kv1=2*M*(b/l)*zeta*omega_n;
kv2=2*M*(a/l)*zeta*omega_n;

%Sistema estabilizado em malha fechada
A=zeros(4);
A(1,2)=1;
A(2,1)=(-kp1-kp2)/M;
A(2,2)=(-kv1-kv2)/M;
A(2,3)=(a*kp1-b*kp2)/M;
A(2,4)=(a*kv1-b*kv2)/M;
A(3,4)=1;
A(4,1)=(a*kp1-b*kp2)/Jt;
A(4,2)=(a*kv1-b*kv2)/Jt;
A(4,3)=(-(a^2)*kp1-(b^2)*kp2)/Jt;

p_real_dir=zeros(2,tam);
p_imag_dir=zeros(2,tam);
p_real_ret=zeros(2,tam);
p_imag_ret=zeros(2,tam);
flag=zeros(2,tam);
for i=1:tam
    A(4,4)=(1j*Jp*Omega(i)-(a^2)*kv1-(b^2)*kv2)/Jt;
    polos=roots(poly(A));
    i_dir=0;
    i_ret=0;
    for ii=1:4
        if imag(polos(ii))>=0
            i_dir=i_dir+1;
            p_real_dir(i_dir,i)=real(polos(ii));
            p_imag_dir(i_dir,i)=imag(polos(ii));
        else

```

```

        i_ret=i_ret+1;
        p_real_ret(i_ret,i)=real(polos(ii));
        p_imag_ret(i_ret,i)=imag(polos(ii));
    end
end
flag(:,i)=[i_dir;i_ret];
end

```

```
%Verificação
```

```
ver_dir=(sum(flag(1,:)==2)==tam);
```

```
ver_ret=(sum(flag(2,:)==2)==tam);
```

```
%Gráficos
```

```
figure;
```

```
hold on;
```

```
scatter(Omega,p_imag_dir(1,:),1,'k.');
```

```
scatter(Omega,p_imag_dir(2,:),1,'k.');
```

```
plot(Omega,Omega,'k--');
```

```
hold off;
```

```
grid;
```

```
set(gca,'YTick',0:50:700);
```

```
xlabel('\Omega (rad/s)');
```

```
ylabel('\omega (rad/s)');
```

```
%title('Diagrama de Campbell - Direta');
```

```
figure;
```

```
hold on;
```

```
scatter(Omega,p_imag_ret(1,:),1,'k.');
```

```
scatter(Omega,p_imag_ret(2,:),1,'k.');
```

```
plot(Omega,-Omega,'k--');
```

```
hold off;
```

```
grid;
```

```
set(gca,'YLim',[-100 -10],'YTick',-100:10:-10);
```

```
xlabel('\Omega (rad/s)');
```

```
ylabel('\omega (rad/s)');
```

```
%title('Diagrama de Campbell - Retrógrada');
```

```
figure;
```

```
hold on;
```

```

scatter(Omega,p_real_dir(1,:),1,'k. ');
scatter(Omega,p_real_dir(2,:),1,'k. ');
hold off;
grid;
xlabel('\Omega (rad/s)');
ylabel('\sigma (1/s)');
%title('Taxa de decaimento - Direta');

figure;
hold on;
scatter(Omega,p_real_ret(1,:),1,'k. ');
scatter(Omega,p_real_ret(2,:),1,'k. ');
hold off;
ylim([-25 0]);
grid;
set(gca,'YTick',-25:5:0);
xlabel('\Omega (rad/s)');
ylabel('\sigma (1/s)');
%title('Taxa de decaimento - Retrógrada');

```

• Regulação Síncrona

– Módulo de Regulação

```

function uh=idcont_re(yh)
global flag cont;
global u0_n u0 y1 y2 y3 y4 y Ge_ant Ge;
global beta;

%Inicialização
if flag==0
    uh=1*(10^(-2))*[1;1;1;1];
    u0=uh;
    u0_n=norm(u0);
    flag=1;
    cont=cont+1;
    cont=mod(cont,5);
else
    switch cont
        %Identificação

```

```

case 1
    y1=[yh(1);yh(2);yh(3);yh(4)];
    if u0_n<10^(-2)
        alpha=0.05*10^(-2);
    else
        alpha=0.05*u0_n;
    end
    uh=[yh(5);yh(6);yh(7);yh(8)]+alpha*[1;0;0;0];
    cont=cont+1;
    cont=mod(cont,5);
%Identificação
case 2
    y2=[yh(1);yh(2);yh(3);yh(4)];
    if u0_n<10^(-2)
        alpha=0.05*10^(-2);
    else
        alpha=0.05*u0_n;
    end
    uh=[yh(5);yh(6);yh(7);yh(8)]+alpha*[0;1;0;0];
    cont=cont+1;
    cont=mod(cont,5);
%Identificação
case 3
    y3=[yh(1);yh(2);yh(3);yh(4)];
    if u0_n<10^(-2)
        alpha=0.05*10^(-2);
    else
        alpha=0.05*u0_n;
    end
    uh=[yh(5);yh(6);yh(7);yh(8)]+alpha*[0;0;1;0];
    cont=cont+1;
    cont=mod(cont,5);
%Identificação
case 4
    y4=[yh(1);yh(2);yh(3);yh(4)];
    if u0_n<10^(-2)
        alpha=0.05*10^(-2);
    else
        alpha=0.05*u0_n;

```

```

        end
        uh=[yh(5);yh(6);yh(7);yh(8)]+alpha*[0;0;0;1];
        cont=cont+1;
        cont=mod(cont,5);
    %Controle
    otherwise
        y=[yh(1);yh(2);yh(3);yh(4)];
        if u0_n<10^(-2)
            alpha=0.05*10^(-2);
        else
            alpha=0.05*u0_n;
        end
        Ge=(1-beta)*Ge_ant+beta*(1/alpha)*[y2-y1 y3-y2 y4-y3 y-y4];
        Ge_ant=Ge;
        Q=(10^9)*eye(4);
        R=(10^(-1))*eye(4);
        S=zeros(4);
        uh=inv((Ge'*Q*Ge+R+S))*((Ge'*Q*Ge+S)*u0-Ge'*Q*y);
        u0=uh;
        u0_n=norm(u0);
        cont=cont+1;
        cont=mod(cont,5);
    end
end
end

```

– Programa para Simulação

```

clear;
clc;

%Dados do rotor
%Inerciais
M=3;
Jp=0.02;
Jt=0.015;
%Geométricos
a=0.2;
b=0.1;
l=a+b;
%De desbalanceamento

```

```
epsilon=1.2*10^(-2);
alpha=0.1;
chi=0.1;

%Rotação
global Omega;
Omega=50;
T=2*pi/Omega;

%Sistema em malha aberta
A=zeros(4);
A(1,2)=1;
A(3,4)=1;
A(4,4)=1j*Jp*Omega/Jt;

B=zeros(4,2);
B(2,1)=1/M;
B(2,2)=1/M;
B(4,1)=-a/Jt;
B(4,2)=b/Jt;

C=zeros(2,4);
C(1,1)=1;
C(1,3)=-a;
C(2,1)=1;
C(2,3)=b;

%Controle estabilizante
%Parâmetros
omega_n=50;
zeta=0.1;
%Ganhos
kp1=M*(b/l)*omega_n^2;
kp2=M*(a/l)*omega_n^2;
kv1=2*M*(b/l)*zeta*omega_n;
kv2=2*M*(a/l)*zeta*omega_n;
%Matriz Kc
Kc(1,1)=kp1;
Kc(1,2)=kv1;
```

```

Kc(1,3)=-a*kp1;
Kc(1,4)=-a*kv1;
Kc(2,1)=kp2;
Kc(2,2)=kv2;
Kc(2,3)=b*kp2;
Kc(2,4)=b*kv2;

%Sistema estabilizado
Aest=A-B*Kc;
Best=B;
Cest=C;

%Matrizes reais
Are=[real(Aest) -imag(Aest);imag(Aest) real(Aest)];
Bre=[Best zeros(size(Best));zeros(size(Best)) Best];
Cre=[Cest zeros(size(Cest));zeros(size(Cest)) Cest];

nre=size(Are,1);

Aretl=-1j*Omega*eye(nre)+Are;

%Entrada (distúrbio)
w1=M*(b/l)*epsilon*exp(1j*alpha)-(Jt-Jp)*chi/l;
w2=M*(a/l)*epsilon*exp(1j*alpha)+(Jt-Jp)*chi/l;
w=[w1;w2];

wre=[real(w1);real(w2);imag(w1);imag(w2)];

%Simulação
global flag cont;
global u0_n u0 y1 y2 y3 y4 y Ge_ant Ge;
global beta;

u0_n=0;
u0=[0;0;0;0];
y1=[0;0;0;0];
y2=[0;0;0;0];
y3=[0;0;0;0];
y4=[0;0;0;0];

```

```

y=[0;0;0;0];
%Ge_ant=zeros(4,4);
%Ge_ant=-Cre*inv(Aretil)*Bre;
Ge_ant=10^(-3)*[1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1];
Ge=zeros(4);
Gv=-Cre*inv(Aretil)*Bre;

beta=1.0;

flag=0;
cont=0;
h=1;
tf=200*h;
sim('cont_sinc_real');

util=zeros(length(u),2);
for i=1:length(u)
    util(i,1)=abs(u(i,1)+1j*u(i,3));
    util(i,2)=abs(u(i,2)+1j*u(i,4));
end

ytil=zeros(length(yy),2);
for i=1:length(yy)
    ytil(i,1)=abs(yy(i,1)+1j*yy(i,3));
    ytil(i,2)=abs(yy(i,2)+1j*yy(i,4));
end

%Gráficos
figure;
stairs(tout,ytil(:,1)/epsilon,'k-');
ylim([0 5.5]);
grid;
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude ( $|r_{1}|/\epsilon$ )');
%title('Mancal 1 - Saída');

figure;
stairs(tout,ytil(:,2)/epsilon,'k-');
ylim([0 5.5]);

```

```

grid;
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude ( $|r_2|/\epsilon$ )');
%title('Mancal 2 - Saída');

```

```

figure;
stairs(tout,util(:,1),'k-');
grid;
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude');
%title('Mancal 1 - Entrada');

```

```

figure;
stairs(tout,util(:,2),'k-');
ylim([0 65]);
grid;
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude');
%title('Mancal 2 - Entrada');

```

- Regulação Síncrona Complexificada

- Controlador Direto

```

function uh=idcont(yh)
global flag cont contc ee;
global u0_n u0 y1 y2 y Ge_ant Ge Gv;
global beta;

%Inicialização
if flag==0
    uh=1*(10^(-2))*[1;1];
    u0=uh;
    u0_n=norm(u0);
    flag=1;
    cont=cont+1;
    cont=mod(cont,3);
else
    switch cont
        %Identificação

```

```

case 1
    y1=[yh(1);yh(2)];
    if u0_n<10^(-2)
        alpha=0.05*10^(-2);
    else
        alpha=0.05*u0_n;
    end
    uh=[yh(3);yh(4)]+alpha*[1;0];
    cont=cont+1;
    cont=mod(cont,3);
%Identificação
case 2
    y2=[yh(1);yh(2)];
    if u0_n<10^(-2)
        alpha=0.05*10^(-2);
    else
        alpha=0.05*u0_n;
    end
    uh=[yh(3);yh(4)]+alpha*[0;1];
    cont=cont+1;
    cont=mod(cont,3);
%Controle
otherwise
    y=[yh(1);yh(2)];
    if u0_n<10^(-2)
        alpha=0.05*10^(-2);
    else
        alpha=0.05*u0_n;
    end
    Ge=(1-beta)*Ge_ant+beta*(1/alpha)*[y2-y1 y-y2];
    Ge_ant=Ge;
    contc=contc+1;
    ee(1,contc)=norm(Ge-Gv,'fro')/norm(Gv,'fro');
    Q=(10^9)*eye(2);
    R=(10^(-1))*eye(2);
    S=zeros(2);
    uh=inv((Ge'*Q*Ge+R+S))*((Ge'*Q*Ge+S)*u0-Ge'*Q*y);
    u0=uh;
    u0_n=norm(u0);

```

```

        cont=cont+1;
        cont=mod(cont,3);
    end
end

```

– Controlador Retrógrado

```

function uh=idcontr(yh)
global flagr contr contrcr eer;
global u0r_n u0r y1r y2r yr Ger_ant Ger Gvr;
global beta;

%Inicialização
if flagr==0
    yr=[yh(1);yh(2)];
    uh=1*(10^(-2))*[1;1];
    u0r=uh;
    u0r_n=norm(u0r);
    flagr=1;
    contr=contr+1;
    contr=mod(contr,3);
else
    switch contr
        %Identificação
        case 1
            y1r=[yh(1);yh(2)];
            if u0r_n<10^(-2)
                alpha=0.05*10^(-2);
            else
                alpha=0.05*u0r_n;
            end
            uh=[yh(3);yh(4)]+alpha*[1;0];
            contr=contr+1;
            contr=mod(contr,3);
        %Identificação
        case 2
            y2r=[yh(1);yh(2)];
            if u0r_n<10^(-2)
                alpha=0.05*10^(-2);
            else

```

```

        alpha=0.05*u0r_n;
    end
    uh=[yh(3);yh(4)]+alpha*[0;1];
    contr=contr+1;
    contr=mod(contr,3);
%Controle
otherwise
    yr=[yh(1);yh(2)];
    if u0r_n<10^(-2)
        alpha=0.05*10^(-2);
    else
        alpha=0.05*u0r_n;
    end
    Ger=(1-beta)*Ger_ant+beta*(1/alpha)*[y2r-y1r yr-y2r];
    Ger_ant=Ger;
    conctr=conctr+1;
    eer(1,conctr)=norm(Ger-Gvr,'fro')/norm(Gvr,'fro');
    Q=(10^9)*eye(2);
    R=(10^(-1))*eye(2);
    S=zeros(2);
    uh=inv((Ger'*Q*Ger+R+S))*((Ger'*Q*Ger+S)*u0r-Ger'*Q*yr);
    u0r=uh;
    u0r_n=norm(u0r);
    contr=contr+1;
    contr=mod(contr,3);
end
end
end

```

– Programa para Simulação

```

clear;
clc;

%Dados do rotor
%Inerciais
M=3;
Jp=0.02;
Jt=0.015;
%Geométricos
a=0.2;

```

```
b=0.1;
l=a+b;
%De desbalanceamento
epsilon=1.2*10^(-2);
alpha=0.1;
chi=0.1;

%Rotação
global Omega;
Omega=50;
T=2*pi/Omega;

%Sistema em malha aberta
A=zeros(4);
A(1,2)=1;
A(3,4)=1;
A(4,4)=1j*Jp*Omega/Jt;

B=zeros(4,2);
B(2,1)=1/M;
B(2,2)=1/M;
B(4,1)=-a/Jt;
B(4,2)=b/Jt;

C=zeros(2,4);
C(1,1)=1;
C(1,3)=-a;
C(2,1)=1;
C(2,3)=b;

%Controle estabilizante
%Parâmetros
omega_n=50;
zeta=0.1;
%Ganhos
kp1=M*(b/l)*omega_n^2;
kp2=M*(a/l)*omega_n^2;
kv1=2*M*(b/l)*zeta*omega_n;
kv2=2*M*(a/l)*zeta*omega_n;
```

```

%Matriz Kc
Kc(1,1)=kp1;
Kc(1,2)=kv1;
Kc(1,3)=-a*kp1;
Kc(1,4)=-a*kv1;
Kc(2,1)=kp2;
Kc(2,2)=kv2;
Kc(2,3)=b*kp2;
Kc(2,4)=b*kv2;

%Sistema estabilizado
Aest=A-B*Kc;
Best=B;
Cest=C;

n=size(A,1);
m=size(B,2);

%Sistema discreto equivalente
h=1;
%h=10*T;

%Subsistema direto
Atil=-1j*Omega*eye(n)+Aest;
iAtil=inv(Atil);

Abar11=expm(h*Atil);
Abar12=expm((h-T)*Atil)*((iAtil^2)/T)*(-expm(T*Atil)+eye(n)+T*Atil*expm(T*Atil))*Best;
Abar=[Abar11 Abar12;zeros(m,n) zeros(m,m)];

Bbar1=expm((h-T)*Atil)*((iAtil^2)/T)*(expm(T*Atil)-eye(n))*Best-iAtil*Best;
Bbar=[Bbar1;eye(m)];

Cbar=[Cest zeros(m,m)];

%Entrada (distúrbio)
w1=M*(b/l)*epsilon*exp(1j*alpha)-(Jt-Jp)*chi/l;
w2=M*(a/l)*epsilon*exp(1j*alpha)+(Jt-Jp)*chi/l;
w=[w1;w2];

```

```

%Simulação
global flag cont contc ee;
global u0_n u0 y1 y2 y Ge_ant Ge Gv;
global beta;

u0_n=0;
u0=[0;0];
y1=[0;0];
y2=[0;0];
y=[0;0];
%Ge_ant=zeros(2,2);
%Ge_ant=-Cest*inv(Atil)*Best;
Ge_ant=10^(-3)*[1 0;0 1];
Ge=zeros(2);
Gv=-Cest*iAtil*Best;

beta=0.4;

flag=0;
cont=0;
contc=0;
ee=zeros(1,1001);
tf=200*h;
sim('cont_sinc');

t=(m+1)*h:(m+1)*h:(m+1)*h*contc;
eef=zeros(1,contc);
for i=1:(contc)
    eef(i)=ee(i);
end

%Gráficos
figure;
stairs(tout,y_mod(:,1)/epsilon,'k-');
ylim([0 5.5]);
grid;
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude ( $|r_{1}|/\backslash\epsilon$ )');

```



```
%title('Mancal 1 - Saída');

figure;
stairs(tout,y_mod(:,2)/epsilon,'k-');
ylim([0 5.5]);
grid;
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude ( $|r_{\{2\}}|/\epsilon$ )');
%title('Mancal 2 - Saída');
```

```
figure;
stairs(tout,u_mod(:,1),'k-');
grid;
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude');
%title('Mancal 1 - Entrada');
```

```
figure;
stairs(tout,u_mod(:,2),'k-');
ylim([0 65]);
grid;
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude');
%title('Mancal 2 - Entrada');
```

```
figure;
stairs(t,eef,'k-');
xlim([0 200]);
%ylim([0 0.25]);
ylim([0 1]);
grid;
%set(gca,'YTick',0:0.025:0.25);
set(gca,'YTick',0:0.1:1);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('E_{1}');
```

– Programa para Simulação Incluindo o Modelo de Anisotropia

```
clear;
clc;
```

```
%Dados do rotor
%Inerciais
M=3;
Jp=0.02;
Jt=0.015;
%Geométricos
a=0.2;
b=0.1;
l=a+b;
%De desbalanceamento
epsilon=1.2*10(-2);
alpha=0.1;
chi=0.1;

%Rotação
global Omega;
Omega=50;
T=2*pi/Omega;

%Sistema em malha aberta
A=zeros(4);
A(1,2)=1;
A(3,4)=1;
A(4,4)=1j*Jp*Omega/Jt;

B=zeros(4,2);
B(2,1)=1/M;
B(2,2)=1/M;
B(4,1)=-a/Jt;
B(4,2)=b/Jt;

C=zeros(2,4);
C(1,1)=1;
C(1,3)=-a;
C(2,1)=1;
C(2,3)=b;

%Controle estabilizante
```

```

%Parâmetros
omega_n=50;
zeta=0.1;
%Ganhos
kp1=M*(b/l)*omega_n^2;
kp2=M*(a/l)*omega_n^2;
kv1=2*M*(b/l)*zeta*omega_n;
kv2=2*M*(a/l)*zeta*omega_n;
%Matriz Kc
Kc(1,1)=kp1;
Kc(1,2)=kv1;
Kc(1,3)=-a*kp1;
Kc(1,4)=-a*kv1;
Kc(2,1)=kp2;
Kc(2,2)=kv2;
Kc(2,3)=b*kp2;
Kc(2,4)=b*kv2;

%Sistema estabilizado
Aest=A-B*Kc;
Best=B;
Cest=C;

n=size(A,1);

%Subsistema direto
Atil=-1j*Omega*eye(n)+Aest;

%Subsistema retrógrado
Atilr=1j*Omega*eye(n)+Aest;

%Entrada (distúrbio)
w1=M*(b/l)*epsilon*exp(1j*alpha)-(Jt-Jp)*chi/l;
w2=M*(a/l)*epsilon*exp(1j*alpha)+(Jt-Jp)*chi/l;
w=[w1;w2];

%Matrizes de ponderação
%M1=eye(2);
M1=[0.95 0.05;0.01 0.99];

```

```

%M2=eye(2);
M2=[0.98 0.02;0.03 0.97];

SS=(M1+M2)/2;
SD=(M1-M2)/2;

%Simulação
%Comum
global beta;
%Direta
global flag cont contc ee;
global u0_n u0 y1 y2 y Ge_ant Ge Gv;
%Retrógrada
global flagr contr contcr eer;
global u0r_n u0r y1r y2r yr Ger_ant Ger Gvr;
%Inicialização de valores/dimensões
u0_n=0;
u0r_n=0;
u0=[0;0];
u0r=[0;0];
y1=[0;0];
y1r=[0;0];
y2=[0;0];
y2r=[0;0];
y=[0;0];
yr=[0;0];
Ge_ant=10^(-3)*[1 0;0 1];
Ger_ant=10^(-3)*[1 0;0 1];
Ge=zeros(2);
Ger=zeros(2);
Gv=-Cest*inv(Atil)*Best;
Gvr=-Cest*inv(Atilr)*Best;

beta=1.0;

flag=0;
flagr=0;
cont=0;
contr=0;

```

```

contc=0;
contcr=0;
ee=zeros(1,1001);
eer=zeros(1,1001);
h=1;
tf=200*h;
sim('cont_sinc_aniso');

%Gráficos
figure;
stairs(tout,y_mod(:,1)/epsilon,'k-');
ylim([0 5.5]);
grid;
set(gca,'YTick',0:0.5:5.5);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude ( $|r_{1}|/\epsilon$ )');
%title('Mancal 1 - Saída');

figure;
stairs(tout,y_mod(:,2)/epsilon,'k-');
ylim([0 5.5]);
grid;
set(gca,'YTick',0:0.5:5.5);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude ( $|r_{2}|/\epsilon$ )');
%title('Mancal 2 - Saída');

figure;
stairs(tout,y_modr(:,1)/epsilon,'k-');
%ylim([0 0.35]);
grid;
%set(gca,'YTick',0:0.05:0.35);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude ( $|r_{r,1}|/\epsilon$ )');
%title('Mancal 1 - Saída');

figure;
stairs(tout,y_modr(:,2)/epsilon,'k-');
%ylim([0 0.35]);

```

```

grid;
%set(gca,'YTick',0:0.05:0.35);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude ( $|r_{r,2}|/\epsilon$ )');
%title('Mancal 2 - Saída');

figure;
hold on;
stairs(tout,u_mod(:,1),'k-');
stairs(tout,u_moda(:,1),'b-');
hold off;
ylim([0 40]);
%legend({'x','y'},'Interpreter','latex');
legend('Saída controlador','Entrada planta');
grid;
set(gca,'YTick',0:10:40);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude');
%title('Mancal 1 - Entrada');

figure;
hold on;
stairs(tout,u_mod(:,2),'k-');
stairs(tout,u_moda(:,2),'b-');
hold off;
ylim([0 65]);
legend('Saída controlador','Entrada planta');
grid;
set(gca,'YTick',0:10:65);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude');
%title('Mancal 2 - Entrada');

figure;
hold on;
stairs(tout,u_modr(:,1),'k-');
stairs(tout,u_modra(:,1),'b-');
hold off;
%ylim([0 3.5]);

```

```
legend('Saída controlador','Entrada planta');  
grid;  
%set(gca,'YTick',0:0.5:3.5);  
xlabel('Tempo (s)');  
ylabel('Amplitude');  
%title('Mancal 1 - Entrada');
```

```
figure;  
hold on;  
stairs(tout,u_modr(:,2),'k-');  
stairs(tout,u_modra(:,2),'b-');  
hold off;  
%ylim([0 7]);  
legend('Saída controlador','Entrada planta');  
grid;  
%set(gca,'YTick',[0:0.5:7]);  
xlabel('Tempo (s)');  
ylabel('Amplitude');  
%title('Mancal 2 - Entrada');
```