RODRIGO JULIANI CORREA DE GODOY

SINTONIA ÓTIMA DE CONTROLADORES

Dissertação apresentada à
Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo
para obtenção do título de
Mestre em Engenharia

**São Paulo
2012**

RODRIGO JULIANI CORREA DE GODOY

SINTONIA ÓTIMA DE CONTROLADORES

Dissertação apresentada à
Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo
para obtenção do título de
Mestre em Engenharia

Área de Concentração:
Engenharia de Sistemas

Orientador:
Prof. Dr. Claudio Garcia

**São Paulo
2012**

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 11 de outubro de 2012.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Godoy, Rodrigo Juliani Correa de
Sintonia ótima de controladores / R.J.C. de Godoy. -- ed.rev.
-- São Paulo, 2012.
256 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle.

1. Controladores digitais (Especificações) 2. Controle ótimo I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle II. t.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a todos que contribuíram, direta ou indiretamente com a realização deste trabalho.

Ao orientador, professor e amigo, Professor Dr. Claudio Garcia, por todas as suas sugestões e contribuições para o desenvolvimento e melhorias do trabalho. Também agradeço como por todas as oportunidades e ensinamentos oferecidos nestes cinco anos em que trabalhamos juntos em diversas frentes, em especial no desenvolvimento do Laboratório de Controle de Processos Industriais, onde comecei a trabalhar com ele durante a graduação, na seção ISA-Poli da *International Society of Automation*, onde tive o prazer de participar da diretoria por diversos anos e no projeto de pesquisa e desenvolvimento em identificação *BR-Ident*, do qual participo há dois anos e que me propiciou grandes aprendizados.

Ao Professor Dr. José Jaime da Cruz, a quem conheci durante a graduação e que foi o professor com quem mais disciplinas cursei nos anos de graduação e pós-graduação, por sua grande dedicação em compartilhar parte de seu vasto conhecimento e pelas sugestões dadas para a melhoria do trabalho.

Ao amigo e colega do grupo de pesquisa, Professor Dr. Vitor Alex Oliveira Alves pelas sugestões dadas para a melhoria do trabalho e pelas divertidas manhãs criando soluções para problemas de identificação de sistemas.

Aos colegas e amigos do grupo de pesquisa em identificação de sistemas e do CETAI pelas sugestões dadas ao trabalho e pelo incentivo dado para seu desenvolvimento.

Finalmente, a todos os amigos e colegas que incentivaram meus trabalhos em pesquisa e desenvolvimento e a realização deste estudo.

*It is not the destination that matters.
It is the journey.*

(Kreia – Star Wars)

RESUMO

Estuda-se o problema de sintonia de controladores, objetivando-se a formulação do problema de sintonia ótima de controladores. Busca-se uma formulação que seja geral, ou seja, válida para qualquer estrutura de controlador e qualquer conjunto de especificações. São abordados dois temas principais: especificação de controladores e sintonia ótima de controladores. São compiladas as principais formas de especificação e avaliação de controladores e é feita a formulação do problema de sintonia de controladores como um problema padrão de otimização. A abordagem proposta e os conceitos apresentados são então aplicados em um conjunto de exemplos.

Palavras-chave: Sintonia de controladores, especificação de controladores, controle ótimo, controle robusto.

ABSTRACT

The problem of control tuning is studied, aiming the formulation of the optimal control tuning problem. A general formulation, valid for any controller structure and any set of specifications, is sought. Two main themes are addressed: controller specification and optimal controller tuning. The main ways of controller specification and assessment are compiled and the optimal controller tuning problem is formulated as a standard optimization problem. The proposed approach and the presented concepts are then applied in a set of examples.

Keywords: Controller tuning, controller specification, optimal control, robust control.

TÓPICOS

1	Introdução	1
1.1	Motivação	2
1.1	Temas e Objetivos.....	5
1.2	Definições.....	7
1.3	O Problema de Sintonia de Controladores	9
1.4	Organização da Dissertação	11
2	Sintonia Ótima de Controladores.....	13
2.1	Procedimento para Sintonia de Controladores	14
2.2	Formulação do Problema de Sintonia Ótima.....	14
2.3	Otimização de Múltiplos Índices de Desempenho	16
3	Especificação de Controladores	20
3.1	Modelos de Processos	21
3.2	Requisitos de Estabilidade	41
3.3	Requisitos de Desempenho	49
3.4	Requisitos de Robustez.....	69
3.5	Índices de Desempenho.....	77
4	Exemplos de Aplicações de Sintonia Ótima de Controladores.....	105
4.1	Sintonia de PID	105
4.2	Sintonia de LQG/LTR	176
4.3	Sintonia de MPC.....	208
5	Conclusão	225
5.1	Outras Aplicações	227
5.2	Comentários Finais.....	231
	Referências	232
Índice		237

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2-1 – Componentes do método de sintonia.....	13
Figura 2-2 – Otimização recursiva.....	19
Figura 3-1 – Malha de controle com perturbações.....	56
Figura 3-2 – Robustez da otimalidade.....	74
Figura 3-3 – Arquitetura de Controle	101
Figura 3-4 – Efeito da taxa de amostragem em índices de desempenho	102
Figura 4-1 – Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.....	107
Figura 4-2 – Respostas do processo com os controladores obtidos	110
Figura 4-3 – Respostas do processo com diferentes sintonias	113
Figura 4-4 – Respostas do processo com sintonias obtidas por busca.....	115
Figura 4-5 – Respostas ao degrau dos modelos admitidos.	117
Figura 4-6 – Respostas ao degrau em malha fechada dos modelos admitidos.	119
Figura 4-7 – Respostas ao degrau em malha fechada dos modelos admitidos com sintonia robusta.	121
Figura 4-8 – Coluna de destilação de Wood & Berry (Wood; Berry, 1973).	123
Figura 4-9 – Resposta ao degrau das sintonias com $T=10$	131
Figura 4-10 – Rejeição de perturbação das sintonias com $T=10$	132
Figura 4-11 – Resposta ao degrau das sintonias com $T=60$	132
Figura 4-12 – Rejeição de perturbação das sintonias com $T=60$	133
Figura 4-13 – Respostas ao Degrau.	150
Figura 4-14 – Rejeições de Perturbações.	150
Figura 4-15 – Respostas ao degrau na referência da composição de topo.	164
Figura 4-16 – Respostas ao degrau na referência da composição de fundo.	164
Figura 4-17 – Rejeição de perturbação.	165
Figura 4-18 – Influência de sintonias em sistemas MIMO.	167
Figura 4-19 – Dados coletados da Coluna de Wood and Berry para identificação.	168
Figura 4-20 – Respostas aos degraus dos modelos obtidos.....	169
Figura 4-21 – Respostas ao degrau na referência da composição de topo.	172
Figura 4-22 – Respostas ao degrau na composição de base.	173
Figura 4-23 – Rejeição de perturbações.	173

Figura 4-24 – Resposta da Coluna de Wood & Berry com controladores PI ótimos	175
Figura 4-25 – P&ID do processo.	178
Figura 4-26 – Valores singulares do modelo nominal.	183
Figura 4-27 – Valores singulares dos modelos admitidos.	184
Figura 4-28 – Erros de modelagem – valores singulares máximos (azul) e mínimos (verde).	185
Figura 4-29 – Barreira de robustez de estabilidade.....	186
Figura 4-30 – Barreiras de robustez da estabilidade e do desempenho.	188
Figura 4-31 – Planta com integrador.	189
Figura 4-32 – Valores singulares da planta com integrador.	190
Figura 4-33 – Malha objetivo em malha aberta.	195
Figura 4-34 – Malha objetivo em malha fechada.....	196
Figura 4-35 – Avaliação da robustez da estabilidade para a planta compensada...	199
Figura 4-36 – Avaliação da robustez do desempenho para a planta compensada.	199
Figura 4-37 – Respostas ao degrau dos modelos admitidos com o controlador LQG/LTR.....	201
Figura 4-38 – Acompanhamento de referências senoidais dos modelos admitidos com o controlador LQG/LTR.	202
Figura 4-39 – Respostas ao degrau do modelo não-linear com incertezas controlado pelo LQG/LTR e PWM de 1 segundo.....	203
Figura 4-40 – Respostas ao degrau do modelo não-linear com incertezas controlado pelo LQG/LTR e PWM de 10 segundos.	204
Figura 4-41 – Respostas ao degrau do modelo não-linear com incertezas controlado pelo LQG/LTR e PWM de 30 segundos.	205
Figura 4-42 – Respostas ao degrau na referência da composição de topo com controles PID e MPC.....	216
Figura 4-43 - Respostas ao degrau na referência da composição de fundo com controles PID e MPC.....	217
Figura 4-44 – Rejeição de perturbações com controles PID e MPC.	217
Figura 4-45 – Variação do índice de desempenho com o horizonte de predição para o modelo OE.	221

Figura 4-46 – Respostas ao degrau na referência da composição de topo para controlador MPC com modelo identificado.....	221
Figura 4-47 – Respostas ao degrau na referência da composição de fundo para controlador MPC com modelo identificado.....	222
Figura 4-48 – Rejeição de perturbações para controlador MPC com modelo identificado.....	222
Figura 4-49 – Sensibilidade da sintonia do MPC com os horizontes de predição e de controle.	224
Figura 5-1 – Aplicação de sintonia ótima em auto sintonia.	229

SUMÁRIO

1	Introdução	1
1.1	Motivação	2
1.1	Temas e Objetivos	5
1.1.1	Requisitos de Desempenho de Controladores	6
1.1.2	Requisitos de Robustez de Controladores	6
1.1.3	Índices de Desempenho de Malhas de Controle	6
1.1.4	Sintonia Ótima de Controladores	7
1.1.5	Aplicações e Validação	7
1.2	Definições	7
1.3	O Problema de Sintonia de Controladores	9
1.4	Organização da Dissertação	11
2	Sintonia Ótima de Controladores	13
2.1	Procedimento para Sintonia de Controladores	14
2.2	Formulação do Problema de Sintonia Ótima	14
2.2.1	Formulação Matemática	15
2.3	Otimização de Múltiplos Índices de Desempenho	16
2.3.1	Otimização de Índice Composto	16
2.3.2	Otimização Recursiva	17
3	Especificação de Controladores	20
3.1	Modelos de Processos	21
3.1.1	Modelos e Sintonia de Controladores	21
3.1.2	Tipos de Modelos	23
3.1.3	Representações de Modelos	27
a.	Modelos Gráficos	28
b.	Resposta ao Impulso	28
c.	Resposta ao Degrau	29
d.	Resposta em Frequência	29

e.	Funções de Transferência	30
f.	Modelos Polinomiais.....	32
g.	Redes Neurais.....	33
h.	Modelos em Espaço de Estados	35
i.	Modelos Computacionais	38
j.	Outras Representações.....	38
3.1.4	Obtenção de Modelos.....	38
3.1.5	Considerações Finais sobre Modelos	39
3.2	Requisitos de Estabilidade.....	41
3.2.1	Definições de Estabilidade.....	41
a.	Estabilidade de Lyapunov ou Estabilidade Interna.....	41
b.	Estabilidade BIBO ou Estabilidade Entrada-Saída	43
3.2.2	Condições para Estabilidade	43
a.	Estabilidade de Sistemas Não-Lineares de Tempo Contínuo.....	44
b.	Estabilidade de Sistemas Não-Lineares de Tempo Discreto	45
c.	Estabilidade de Sistemas Lineares de Tempo Contínuo.....	46
d.	Estabilidade de Sistemas Lineares de Tempo Discreto	47
3.2.3	Considerações Finais sobre Estabilidade	47
3.3	Requisitos de Desempenho	49
3.3.1	Resposta ao Degrau.....	49
a.	Tempo de Subida	50
b.	Tempo de Acomodação.....	50
c.	Sobressinal.....	51
d.	Subsinal.....	51
3.3.2	Acompanhamento de Sinais de Referência.....	51
a.	Especificações de Acompanhamento de Sinais de Referência no Domínio do Tempo	52

b.	Especificações de Acompanhamento de Sinais de Referência no Domínio da Frequência ...	54
3.3.3	Rejeição de Perturbações.....	55
a.	Representação das Perturbações	55
b.	Especificações de Rejeição de Perturbações no Domínio do Tempo	57
c.	Especificações de Rejeição de Perturbações no Domínio da Frequência	59
3.3.4	Rejeição de Ruído de Medição.....	60
a.	Especificação de Rejeição de Ruído de Medição no Domínio do Tempo	61
b.	Especificação de Rejeição de Ruído de Medição no Domínio da Frequência	61
3.3.5	Resposta em Frequência.....	62
a.	Frequência de Corte e Banda Passante.....	62
b.	Margem de Ganho.....	63
c.	Margem de Fase	63
3.3.6	Restrições nos Estados	63
3.3.7	Restrições Construtivas	64
a.	Implementação Digital	64
b.	Taxa de Amostragem	65
c.	Valores Limites de Parâmetros.....	66
d.	Precisão dos Parâmetros	67
3.3.8	Esforço de Controle	67
3.3.9	Considerações Finais sobre Requisitos de Desempenho.....	68
3.4	Requisitos de Robustez.....	69
3.4.1	Representações de Incertezas de Modelagem.....	69
a.	Incetezas Estruturadas.....	70
b.	Incetezas Não Estruturadas	70
c.	Múltiplos Modelos.....	71
d.	Considerações Complementares sobre Representações de Incertezas de Modelos.....	71

3.4.2	Robustez da Estabilidade	72
3.4.3	Robustez de Desempenho	73
3.4.4	Robustez da Otimalidade.....	73
3.4.5	Considerações Finais sobre Requisitos de Robustez	75
3.5	Índices de Desempenho	77
3.5.1	Requisitos de Desempenho como Índices de Desempenho	79
a.	Resposta ao Degrau.....	79
b.	Acompanhamento de Sinais de Referência.....	80
c.	Rejeição de Perturbações	81
d.	Rejeição de Ruído de Medição.....	82
e.	Taxa de Amostragem	83
f.	Resposta em Frequência.....	83
3.5.2	Requisitos de Robustez como Índices de Desempenho	84
a.	Robustez da Estabilidade	84
b.	Robustez do Desempenho	84
c.	Robustez da Otimalidade	85
3.5.3	Índices de Desempenho Baseados na Integral do Erro	85
a.	Integrated Squared Error – ISE	86
b.	Integrated Absolute Error – IAE	86
c.	Integrated Time Squared Error – ITSE	86
d.	Integrated Time Absolute Error – ITAE	86
e.	Considerações sobre Índices Baseados na Integral do Erro	86
3.5.4	Índices de Desempenho Baseados no Somatório do Erro.....	87
a.	Summed Squared Error – SSE.....	88
b.	Summed Absolute Error – SAE	88
c.	Considerações sobre Índices Baseados no Somatório do Erro	88

3.5.5	Velocidade de Resposta	89
3.5.6	Esforço de Controle	90
a.	Esforço de Controle Quadrático	91
b.	Esforço de Controle Absoluto	92
c.	Desgaste de Atuadores	93
d.	Considerações Finais sobre Esforço de Controle...	93
3.5.7	Índice do Problema do Regulador Linear Quadrático	94
3.5.8	Variabilidade	95
3.5.9	Variância	96
3.5.10	Índices Baseados em Desempenho Ótimo	98
3.5.11	Índices de Desempenho Compostos	98
3.5.12	Custo de Operação	99
3.5.13	Observações sobre Índices de Desempenho de Tempo Discreto	100
a.	Exemplo do Efeito da Taxa de Amostragem em Índices de Desempenho de Tempo Discreto	101
3.5.14	Considerações Finais sobre Índices de Desempenho	103
4	Exemplos de Aplicações de Sintonia Ótima de Controladores.....	105
4.1	Sintonia de PID	105
4.1.1	Controlador PID	106
4.1.2	Exemplo: Sintonia de Controlador PID para Sistema Linear de Primeira Ordem com Tempo Morto.....	106
a.	Sintonia Clássica	107
b.	Sintonia Ótima	108
c.	Teste das Sintonias Obtidas.....	110

4.1.3	Exemplo: Sintonia de Controlador PID para Sistema Linear de Primeira Ordem com Tempo Morto e Polo Integrador	111
a.	Sintonia Clássica	112
b.	Sintonia Ótima	113
4.1.4	Exemplo: Sintonia Robusta de Controlador PID	116
a.	Sintonia Ótima para o Modelo Nominal	118
b.	Sintonia Ótimo-Robusta.....	119
c.	Observações e Comentários	121
4.1.5	Exemplo: Sintonia de PID para Coluna de Destilação de Wood and Berry	122
a.	Sintonia Ótima de PID SISO com Único Índice de Desempenho.....	124
b.	Sintonia Ótima Multiobjetivo de PID	139
c.	Sintonia Ótima Multiobjetivo Multivariável de PID	151
d.	Sintonia Ótimo-Robusta Multiobjetivo Multivariável de PID.....	168
e.	Conclusão.....	174
4.2	Sintonia de LQG/LTR	176
4.2.1	Técnica LQG/LTR	176
4.2.2	Exemplo: Sintonia de LQG/LTR para Controle Robusto de Vazão e Nível.....	177
a.	Processo.....	177
b.	Modelo do Processo	179
c.	Análise do Modelo Nominal	183
d.	Análise dos Modelos Admitidos pelo Modelo de Erro	184
e.	Avaliação do Erro de Modelagem.....	184
f.	Barreira de Robustez da Estabilidade	186
g.	Especificação do Desempenho do Controlador....	187
h.	Barreiras de Robustez do Desempenho	187
i.	Inclusão de Integradores na Entrada da Planta....	189
j.	Malha Objetivo.....	191

k.	Procedimento de Recuperação	196
l.	Controlador Resultante.....	200
m.	Avaliações do Controlador Obtido	200
n.	Observações e Comentários	206
o.	Procedimento de Sintonia Resumido	207
4.3	Sintonia de MPC	208
4.3.1	Controladores MPC	208
4.3.2	Exemplo: Sintonia de MPC para Coluna de Destilação de Wood and Berry	209
a.	Sintonia de Controlador MPC com Modelo Nominal.....	209
b.	Sintonia de Controlador MPC com Modelo Identificado	220
c.	Observações e Comentários	224
5	Conclusão	225
5.1	Outras Aplicações	227
5.1.1	Sintonia de Controladores de Sintonia Variável.....	227
5.1.2	Sintonia Automática (Auto-Tuning) de Controladores	228
5.1.3	Auto Sintonia (Self-Tuning) de Controladores	229
5.1.4	Sintonia de Controladores para Arquiteturas Complexas.....	230
5.1.5	Solução Analítica	230
5.2	Comentários Finais	231
	Referências	232
	Índice	237

1 Introdução

Sistema de controle é um componente ou conjunto de componentes, geralmente de software, que altera o comportamento dinâmico de um sistema controlado para que este comportamento siga, ou se aproxime de, determinada especificação. O controle de um processo é tipicamente realizado observando-se algumas variáveis deste processo e manipulando-se outras variáveis, a fim de manter todas em condições desejadas.

Pode-se analisar o projeto de um sistema de controle sob três aspectos principais: estrutura, arquitetura e sintonia.

A estrutura de um controlador refere-se à menor unidade funcional do sistema de controle, sendo escolhida de acordo com as necessidades do problema e recursos disponíveis. Algumas estruturas clássicas de controladores são: PID, LQR, LQG/LTR, MPC e Realimentação de Estados.

A arquitetura de um sistema de controle corresponde à forma como diversos controladores (todos com mesma estrutura ou com estruturas diferentes) são relacionados para controlar um processo. Como arquiteturas clássicas, pode-se citar controladores PID em cascata, controladores PID com desacoplamento e RTO, MPC e controladores PID em cascata.

A sintonia de um controlador é o ajuste de seus parâmetros a fim de se obter um desempenho desejado. Por exemplo, ao se utilizar um PID, devem ser ajustados os ganhos proporcional, derivativo e integrativo.

De forma mais ampla, a estratégia de controle encerra a determinação da arquitetura, da sintonia e das estruturas empregadas no sistema de controle, assim como outros fatores como determinação das variáveis controladas e manipuladas, requisitos de controle e modo de implementação dos controladores.

1.1 Motivação

A sintonia de controladores é um problema da Engenharia de Controle que persiste desde seu princípio, porém que ainda não possui uma solução definitiva.

Há diversos trabalhos realizados sobre estruturas de controladores e também há uma grande gama de estruturas e variações disponíveis para aplicação em projetos de sistemas de controle. O problema de sintonia ocorre para a grande maioria das estruturas já propostas. Apesar disso, não há uma técnica ou metodologia amplamente empregada para sua solução, ou mesmo uma formulação canônica e genérica para o problema.

No ambiente industrial a estrutura de controlador atualmente mais empregada é o PID, havendo um recente aumento do número de aplicações também de controladores MPC.

Os principais fatores que impedem a aplicação de outras estruturas de controle, que podem ser mais adequadas para a solução de alguns problemas, são dificuldades de implementação e a dificuldade de sintonia. A implementação geralmente pode ser resolvida com o desenvolvimento de softwares que executem os algoritmos de controle e que possam ser ajustados ao processo a ser controlado de maneira simples. Porém, a menos de sintonias pré-fixadas, a sintonia de tais controladores geralmente exige um profundo entendimento de seus algoritmos e das teorias nas quais se fundamentam.

As principais técnicas de sintonia existentes pode ser classificadas em: pré-sintonias, sintonias por cálculo direto, sintonia automática e sintonia manual.

Pré-sintonias são bastante comuns, principalmente para controladores mais complexos, como o MPC. São sintonias que garantem alguma propriedade, geralmente estabilidade, a sistemas em malha fechada mesmo havendo diferenças entre a dinâmica do processo controlado e aquela utilizada para obtenção da sintonia. Estas sintonias são boas por sua facilidade de aplicação, permitindo o uso de uma estrutura sem necessidade de ajustar seus parâmetros, porém não garantem robustez satisfatória ou desempenho ótimo ao sistema, ou seja, para um

dado processo há outra sintonia que melhore seu desempenho e sua robustez em relação à pré-sintonia.

Também é bastante comum, principalmente para controladores PID, a sintonia por cálculo direto baseado em características do processo, como tempo morto, ganho e constante de tempo. Tais técnicas de sintonia são melhores que as sintonias pré-fixadas, pois levam em consideração a dinâmica do processo a ser controlado, porém raramente são ótimas para o processo.

Diversos fabricantes de controladores fornecem softwares de sintonia automática, ou *Auto-Tuning*. Em geral, estes softwares realizam uma identificação do processo e utilizam o modelo ou parâmetros obtidos para aplicação de uma técnica de sintonia por cálculo direto. Este procedimento facilita bastante a sintonia de controladores, principalmente em sistemas onde estão presentes em grande número, porém dificilmente gera desempenhos ótimos.

Finalmente, é também bastante comum a sintonia manual de controladores, ou sintonia por *tentativa e erro*. Ou seja, a realização de um procedimento iterativo de variação de parâmetros do controlador, geralmente a partir de uma sintonia inicial obtida por pré-sintonia ou cálculo direto, até obter-se uma resposta do processo considerada boa.

Este trabalho busca a formulação do problema de sintonia de controladores de forma abrangente o suficiente para ser adaptado e utilizado com diferentes estruturas de controladores e precisa o suficiente para ser resolvido de forma automatizada.

A primeira questão que surge perante o problema da sintonia ótima de um controlador é a determinação de uma métrica de desempenho para o controlador, ou seja, definir o que é o desempenho ótimo de um controlador. Ou, de maneira mais geral: o que é um bom comportamento de um sistema dinâmico? Tem-se então um novo tópico para estudo neste trabalho: especificação de controladores.

A especificação de controladores pode ser estudada sob três aspectos: índices de desempenho, requisitos de desempenho e requisitos de robustez.

Índices de desempenho são indicadores quantitativos da qualidade do comportamento de um sistema. São pesquisados diversos índices de desempenho empregados em trabalhos acadêmicos, como controle ótimo, e em aplicações industriais, como análise de desempenho de malhas de controle, para identificar os critérios segundo os quais um controlador será avaliado e permitir que tais critérios sejam considerados na sintonia, a fim de otimizá-la para a aplicação.

Requisitos de desempenho são características dinâmicas que o comportamento de um sistema deve necessariamente apresentar para ser considerado aceitável, como sobressinal máximo.

Requisitos de robustez, por sua vez, encerram a especificação de que determinado sistema deve respeitar determinado conjunto de restrições mesmo que haja incertezas nas informações conhecidas do sistema e empregadas no processo de sintonia.

Dentre as técnicas de sintonia mais conhecidas, quase a totalidade delas é voltada a requisitos de desempenho e de robustez, fornecendo uma sintonia que atenda a alguns requisitos, como, por exemplo, estabilidade, tempo de acomodação, sobressinal máximo e robustez da estabilidade.

A utilização de requisitos de desempenho e de robustez, ou, de maneira mais sucinta, de restrições, no processo de sintonia de um controlador mostra-se então não apenas necessária, mas também favorável.

As restrições são necessárias porque a simples otimização de um índice de desempenho não garante a obtenção de um controlador aceitável. Por exemplo, a minimização do tempo de acomodação de uma malha pode gerar um controlador cuja resposta apresente sobressinal elevado e inaceitável para o processo, sendo então necessária a minimização do tempo de acomodação com a restrição de que o sobressinal máximo seja menor que determinado valor.

Levando-se em consideração as restrições durante a sintonia do controlador evita-se a obtenção de parâmetros do controlador que causem um comportamento que não respeite os limites de operação do processo, garantindo-se assim que seja

obtida uma sintonia que gere um comportamento aceitável da malha e também reduzindo o conjunto de sintonias possíveis a serem analisadas.

Deseja-se, portanto, permitir que a sintonia de controladores seja ótima para cada situação, buscando-se uma metodologia completa o suficiente para ser de fácil emprego, mas também versátil o suficiente para ser adaptada às diversas estruturas, processos e necessidades de cada aplicação.

Apresenta-se uma formulação para o problema de sintonia de controladores que pode ser aplicada para diferentes estruturas de controladores, com diferentes índices de desempenho e que leve em consideração restrições de desempenho e de robustez.

1.1 Temas e Objetivos

Esta dissertação tem por meta encontrar uma formulação do problema de sintonia ótima de controladores. Busca-se uma formulação que seja objetiva para ser solúvel e facilmente implementável e também versátil para ser aplicada a diferentes estruturas de controladores. Deseja-se poder otimizar diferentes índices de desempenho e respeitar restrições de desempenho e de robustez dos controladores.

A fim de atingir a meta proposta, estabelecem-se objetivos em cinco temas principais:

- T-1. Requisitos de desempenho de controladores;
- T-2. Requisitos de robustez de controladores;
- T-3. Índices de desempenho de malhas de controle;
- T-4. Sintonia ótima de controladores;
- T-5. Aplicações e validação.

Nota-se que os temas foram apresentados em ordem inversa àquela da apresentação do problema na seção anterior. Na seção anterior, apresentou-se o problema partindo de uma motivação prática. Aqui os objetivos são formulados a fim de resolver gradualmente o problema proposto.

A seguir, são apresentados objetivos para cada tema estabelecido.

1.1.1 Requisitos de Desempenho de Controladores

O primeiro tema abordado são os requisitos de desempenho, para o qual são estabelecidos os seguintes objetivos:

- D-1. Definir requisitos de desempenho;
- D-2. Identificar requisitos de desempenho típicos;
- D-3. Descrever os requisitos de desempenho identificados;
- D-4. Apresentar exemplos de aplicação de requisitos de desempenho em sintonia de controladores.

1.1.2 Requisitos de Robustez de Controladores

A seguir, são tratados os requisitos de robustez, estabelecendo-se os seguintes objetivos:

- R-1. Definir requisitos de robustez;
- R-2. Identificar requisitos de robustez típicos;
- R-3. Descrever os requisitos de robustez identificados;
- R-4. Apresentar exemplos de aplicação de requisitos de robustez em sintonia de controladores.

1.1.3 Índices de Desempenho de Malhas de Controle

Relacionados a índices de desempenho de malhas de controle, são definidos os seguintes objetivos:

- I-1. Definir índices de desempenho de malhas de controle;
- I-2. Identificar índices de desempenho de malhas de controle típicos;
- I-3. Descrever os índices identificados;
- I-4. Apresentar exemplos de aplicação dos índices de desempenho em sintonia ótima de controladores.

1.1.4 Sintonia Ótima de Controladores

O tema central da dissertação, que dá título à mesma, é a sintonia ótima de controladores, que reúne os temas anteriores para atingir a proposta do trabalho.

Os objetivos relacionados a este tema são:

- S-1. Definir sintonia ótima de controladores;
- S-2. Descrever representações de sistemas dinâmicos para utilização na formulação proposta;
- S-3. Formular o problema de sintonia ótima de controladores.

1.1.5 Aplicações e Validação

A fim de exemplificar e validar a formulação proposta, ela será aplicada a alguns exemplos. Para isto, estabelecem-se os seguintes objetivos:

- A-1. Apresentar algumas estruturas clássicas de controladores;
- A-2. Aplicar a formulação proposta às estruturas apresentadas;
- A-3. Realizar estudos de caso apresentando a aplicação da abordagem proposta.

1.2 Definições

Apresentam-se a seguir as definições dos principais termos empregados na dissertação.

Uma planta ou um processo é um sistema a ser controlado. Não são impostas restrições às características da planta para aplicação da metodologia proposta.

Um modelo matemático é uma representação dos aspectos essenciais de um sistema, que apresenta conhecimento desse sistema em uma forma utilizável (Eykhoff, 1974). Para a solução do problema proposto, supõe-se que se disponha de um modelo matemático da planta a ser controlada. São citadas as formas de obtenção de modelos de plantas.

Um controlador é um sistema que atua sobre uma planta de modo a fazê-la comportar-se da maneira desejada, ou seja, de modo que as especificações estabelecidas pelo projeto sejam atendidas (Monteiro, 2006). Aqui se consideram controladores de sintonia fixa, ou seja, cujos parâmetros permaneçam constantes durante seu funcionamento. São feitas considerações sobre controladores de sintonia variável e sobre o tratamento de sua sintonia.

Uma sintonia de um controlador é um conjunto de valores para seus parâmetros. A sintonia de um controlador pode ser fixa, ou seja, constante, ou variável, ou seja, que varie de acordo com o estado da planta ou do controlador.

Parâmetros de um controlador são quantidades cujos valores não dependem diretamente das entradas e saídas do controlador em nenhum instante de tempo.

Restrições ou requisitos são condições que devem ser respeitadas pelo comportamento do sistema controlado. São consideradas aqui restrições de desempenho e restrições de robustez.

Um requisito de desempenho ou uma restrição de desempenho é uma condição que deve ser obedecida pelo comportamento do sistema controlado.

Um requisito de robustez ou uma restrição de robustez é uma condição que deve ser obedecida pelo comportamento do sistema controlado mesmo que o modelo utilizado na obtenção da sintonia não represente exatamente o processo ou que a planta sofra alguma alteração ao longo do tempo.

Um índice de desempenho é uma função calculada sobre a evolução dos estados da planta e do controlador ao longo do tempo e que avalia a qualidade desta evolução.

O comportamento do sistema controlado refere-se à evolução dos estados da planta e do controlador ao longo do tempo.

O estado de um sistema dinâmico é um conjunto de variáveis tais que o conhecimento dessas variáveis em um instante, juntamente com o conhecimento das entradas do sistema no intervalo de tempo de interesse, determinam

completamente o comportamento do sistema para qualquer instante de tempo neste intervalo (Ogata, 2003).

Um sistema pode ser definido como um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto (Monteiro, 2006).

Um sistema dinâmico é um sistema no qual algumas variáveis que caracterizam seus objetos constituintes variam no tempo (Monteiro, 2006). No contexto desta dissertação, plantas e controladores são considerados sistemas dinâmicos.

Para um dado sistema dinâmico, variáveis de entrada são grandezas fornecidas ou impostas ao sistema, geralmente por outro sistema. De maneira análoga, variáveis de saída são grandezas geradas pelo sistema em resposta às variáveis de entrada impostas e aos estados do sistema.

As definições apresentadas serão empregadas nos capítulos seguintes e utilizadas na formulação da solução do problema apresentado.

1.3 O Problema de Sintonia de Controladores

A sintonia de controladores é um tema recorrente de trabalhos teóricos e de aplicação em Engenharia de Controle, sendo vasto o número de estudos e publicações na área.

O estudo de sintonia de controladores se estende para diferentes estruturas de controladores, mas é concentrado majoritariamente na sintonia de controladores PID. Algumas técnicas existentes buscam apenas um controlador estável de fácil obtenção, outras visam obedecer alguma restrição e algumas permitem a especificação de algum parâmetro de desempenho.

O mais conhecido trabalho sobre sintonia de controladores é (Ziegler; Nichols, 1942). Neste artigo, os autores propõem uma metodologia de obtenção de

parâmetros de sintonia para controladores PID a partir de um modelo simples do processo.

Além de ser o primeiro a propor um método de sintonia por cálculo direto, o artigo de Ziegler e Nichols apresenta uma abordagem que separa a escolha da estrutura do controlador da sintonia de seus parâmetros, ou seja, torna possível a utilização de estruturas padrão em diferentes processos ajustando-a ao processo controlado.

Estas duas abordagens, utilização de estruturas padrão e ajuste de parâmetros por cálculos simples, possibilitaram o amplo emprego de controladores PID nas mais diversas aplicações, sendo esta estrutura atualmente utilizada na grande maioria das aplicações de controle.

Após o trabalho de Ziegler e Nichols, diversos outros propuseram novos métodos de sintonia de controladores PID. Alguns dos mais significativos são (Chien; Hrones; Reswick, 1952), (Cohen; Coon, 1953), (Aström; Hägglund, 1984) e (Rivera; Morari; Skogestad, 1986).

Em (Chien; Hrones; Reswick, 1952) são propostas sintonias por cálculo direto com restrições, mais precisamente sintonias com sobressinal máximo de 20% ou sem sobressinal na resposta ao degrau.

Em (Cohen; Coon, 1953) é tratado o problema de sintonia de controladores PID para processos com tempos mortos grandes em relação ao tempo de acomodação, caso em que outras técnicas de sintonia não geram resultados satisfatórios.

Em (Aström; Hägglund, 1984) é proposto o método do relé, bastante aplicado atualmente, o qual permite a obtenção de parâmetros de sintonia de controladores PID a partir de um experimento em malha fechada para provocar oscilações limitadas no processo.

Em (Rivera; Morari; Skogestad, 1986) é proposta uma sintonia de controladores PID baseada em um modelo do processo e na qual se pode especificar um parâmetro de desempenho, a velocidade de resposta do controlador.

Mais recentemente, (Liu; Daley, 2001), (Sung; Lee; Park, 2002), (Oi; et al., 2008), (Fang; Chen, 2009) e (Morkos; Kamal, 2012) apresentam técnicas baseadas em otimização para a obtenção de sintonias ótimas segundo alguns critérios de desempenho clássicos, válidas para algumas estruturas de modelo.

Finalmente, (Campos; Teixeira, 2010) apresenta um compêndio de técnicas de sintonia de controladores PID e faz uma ampla apresentação de estratégias de controle envolvendo controladores PID, seus requisitos de desempenho e alguns métodos heurísticos para sintonia de controladores PID para processos específicos.

Além das citadas, diversas outras técnicas de controladores foram propostas para diferentes processos e especificações de desempenho. Busca-se no presente trabalho uma formulação geral para o problema de sintonia de controladores, de forma que possa ser aplicada com facilidade em diferentes contextos.

1.4 Organização da Dissertação

A dissertação está organizada da seguinte forma:

No capítulo 2, *Sintonia Ótima de Controladores*, é apresentada a formulação proposta para o problema de sintonia ótima e são feitas considerações sobre sua aplicação.

No capítulo 3, *Especificação de Controladores*, são apresentados elementos que podem ser empregados para especificar controladores a serem sintonizados. Este capítulo está organizado em cinco seções, descritas a seguir.

Na seção 3.1, *Modelos de Processos*, é abordado como processos podem ser representados para sintonia de controladores, apresentando-se as características gerais de modelos de processos e as principais representações utilizadas.

Na seção 3.2, *Requisitos de Estabilidade*, é definida a estabilidade de sistemas dinâmicos e apresentadas condições para verificação da estabilidade de sistemas. A estabilidade pode ser considerada o principal requisito de desempenho

de controladores, sendo uma especificação para quase todo controlador, razão pela qual é apresentada numa seção dedicada.

Na seção 3.3, *Requisitos de Desempenho*, são identificados e descritos os requisitos de desempenho tipicamente empregados para especificar controladores. Tais requisitos permitem classificar os controladores em “bons” ou “ruins”.

Na seção 3.4, *Requisitos de Robustez*, trata-se o problema de como incertezas de modelagem podem ser consideradas na sintonia de um controlador, abordando-se as representações de incertezas de modelagem e requisitos de robustez da estabilidade e de robustez do desempenho.

Na seção 3.5, *Índices de Desempenho*, são identificados e descritos os principais índices de desempenho tipicamente empregados para avaliar o desempenho de malhas de controle. Tais índices permitem classificar controladores como “melhores” ou “piores” e podem ser utilizados como função objetivo em problemas de sintonia ótima.

No capítulo 4, *Exemplos de Aplicação de Sintonia Ótima de Controladores*, são apresentados exemplos de aplicação da abordagem proposta. Este capítulo está organizado em três seções.

Na seção 4.1, *Sintonia de PID*, são apresentados exemplos de aplicação da metodologia para sintonia de controladores PID.

Na seção 4.2, *Sintonia de LQG/LTR*, é apresentado um exemplo de aplicação da metodologia proposta para construção de controlador pela técnica LQG/LTR.

Na seção 4.3, *Sintonia de MPC*, exemplos de sintonia de controladores MPC são apresentados.

Finalmente, no capítulo 5, *Conclusão*, conclusões sobre os resultados obtidos são traçadas.

2 Sintonia Ótima de Controladores

Define-se o problema de sintonia ótima de controladores por:

Dada uma planta e escolhida uma estrutura de controlador, deseja-se encontrar uma sintonia para o controlador tal que o comportamento do sistema controlado respeite um conjunto de restrições e seja ótimo segundo um índice de desempenho determinado.

O problema pode ser representado esquematicamente conforme a Figura 2-1.

Figura 2-1 – Componentes do método de sintonia

Esta formulação é geral para poder ser aplicada a qualquer estrutura de controlador e qualquer especificação.

Nas seções seguintes é apresentada a formulação matemática do problema.

2.1 Procedimento para Sintonia de Controladores

Para sintonizar um controlador qualquer utilizando a abordagem apresentada, deve-se proceder da seguinte forma:

1. Obter um modelo para o processo;
2. Determinar a estrutura do controlador a ser utilizado;
3. Determinar os requisitos de desempenho do sistema controlado;
4. Determinar os requisitos de robustez do sistema controlado;
5. Determinar um ou mais índice de desempenho para a malha de controle;
6. Representar matematicamente o problema de sintonia do controlador e
7. Obter a sintonia do controlador.

2.2 Formulação do Problema de Sintonia Ótima

Propõe-se formular o problema de sintonia de um controlador qualquer como um problema clássico de otimização, na forma:

$$\begin{array}{l} \text{Otimizar } \{ \text{Índice de Desempenho} \} \\ \text{sujeito a } \left\{ \begin{array}{l} \text{Modelo da Planta} \\ \text{Estrutura do Controlador} \\ \text{Restrições Construtivas do Controlador} \\ \text{Restrições de Desempenho} \\ \text{Restrições de Robustez} \end{array} \right. \end{array}$$

Ou seja, otimiza-se um índice de desempenho obedecendo-se a um conjunto de restrições de desempenho, de robustez e construtivas calculadas sobre dados obtidos a partir da simulação dinâmica da planta regulada pelo controlador ativo.

2.2.1 Formulação Matemática

Uma formulação matemática para o problema segue a formulação padrão de problemas de otimização, apresentada na seção anterior é:

$$\begin{array}{l}
 \min_S J = j(x_p(t), x_c(t), r(t), t) \\
 \text{sujeito a: } \left\{ \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_p(t) = a(x_p(t), u_p(t), t) \\ y_p(t) = h(x_p(t), u_p(t), t) \\ u_p(t) = y_c(t) \end{array} \right\} \text{ Modelo da Planta} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_c(t) = g_c(x_c(t), y_p(t), r(t), S) \\ y_c(t) = h_c(x_c(t), r(t), S) \end{array} \right\} \text{ Controlador} \\
 \{S \in \mathcal{S}\} \text{ Restrições Construtivas do Controlador} \\
 \{R_D(y_p(t), x_p(t), u_p(t)) \in \mathfrak{R}_D\} \text{ Restrições de Desempenho} \\
 \{R_R(y_p(t), x_p(t), u_p(t), \varepsilon_p) \in \mathfrak{R}_R\} \text{ Restrições de Robustez}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

onde cada termo corresponde a:

S : Parâmetros de Sintonia

J : Índice de Desempenho (Escalar)

$j(\cdot)$: Índice de Desempenho (Função)

x_p : Vetor de Estados da Planta

u_p : Vetor de Entradas da Planta

y_p : Vetor de Saídas da Planta

x_c : Vetor de Estados do Controlador

y_c : Vetor de Saídas do Controlador

r : Referência

t : tempo

$a(\cdot)$: Modelo dos Estados Planta

$h(\cdot)$: Modelo das Saídas da Planta

$g_c(\cdot)$: Função dos Estados do Controlador

$h_c(\cdot)$: Função das Saídas do Controlador

$\mathcal{S}$: Domínio dos Parâmetros de Sintonia

R_D : Função para Avaliação de Requisitos de Desempenho

R_R : Função para Avaliação de Requisitos de Robustez

$\mathfrak{R}_D$: Conjunto de Requisitos de Desempenho

$\mathfrak{R}_R$: Conjunto de Requisitos de Robustez

ε_p : Erros de Modelagem

Ou seja, deve-se resolver um problema de otimização que encontre um vetor de sintonia $\mathbf{S}$ pertencente ao domínio $\mathcal{S}$ que otimize um índice de desempenho $\mathbf{J}$ sujeito às restrições de desempenho $\mathfrak{R}_D$ e às restrições de robustez $\mathfrak{R}_R$.

Além da representação em espaço de estados, outras podem ser empregadas para a planta e para o controlador. Emprega-se aqui esta representação por ser a mais geral. Além disso, nem todos os estados da planta e do controlador precisam ser conhecidos, podendo também a função objetivo e as restrições serem calculadas apenas para alguns estados, como entradas e saídas do sistema e suas derivadas.

2.3 Otimização de Múltiplos Índices de Desempenho

Em diversas aplicações é desejável otimizar não apenas uma característica do comportamento de um processo, mas um conjunto de características. Entretanto, os algoritmos de otimização, e a teoria de otimização em geral, trata problemas de otimização de dimensão única, ou seja, é possível otimizar um único índice de desempenho.

É necessário então escolher um índice a ser otimizado em detrimento de outros, ou então se deve formular o problema de otimização como um problema de otimização de um único índice de desempenho.

Para solucionar o problema, pode-se empregar um índice de desempenho composto ou então realizar uma otimização recursiva. As duas alternativas são apresentadas em detalhes a seguir.

2.3.1 Otimização de Índice Composto

O uso de índices compostos, ou seja, de uma função que pondere diferentes índices de desempenho, é uma solução clássica para problemas de avaliação e otimização quando há múltiplos aspectos relevantes.

A ponderação dos componentes do índice pode ser tal que todos os termos do índice sejam expressos na mesma unidade, por exemplo, uma unidade monetária. Alternativamente, os índices parciais podem ser normalizados e podem ser adotados pesos relativos como parâmetros de ponderação do índice composto.

Em geral, esta é a solução adotada, pois é a mais simples, apesar de não ser a mais precisa.

Uma dificuldade para a aplicação desta solução ao problema de sintonia de controladores é a possibilidade de ter-se índices de diferentes naturezas a serem otimizados, como tempo de acomodação e esforço de controle, de forma a surgir um novo problema: a determinação das ponderações de cada termo considerado.

2.3.2 Otimização Recursiva

Como alternativa à abordagem clássica de otimização de múltiplos índices de desempenho através de um índice formado pela ponderação de tais índices, propõe-se realizar uma otimização recursiva.

Primeiramente, otimiza-se o índice de desempenho considerado mais importante, respeitando-se as restrições do problema.

Em seguida, reformula-se o problema de sintonia, impondo-se o índice de desempenho otimizado como requisito de desempenho, de modo que este índice deva estar próximo de seu valor ótimo conforme uma precisão desejada.

O próximo índice de desempenho mais relevante é então considerado como função objetivo do problema de otimização.

Em seguida este índice é convertido em restrição e o próximo é incluído como função objetivo, e assim sucessivamente até que todos os índices de desempenho de interesse tenham sido otimizados.

Ou seja, são otimizados múltiplos índices de desempenho, garantindo-se que os mais importantes estejam próximos de seus ótimos globais. O quão próximo devem os índices estar de seus ótimos torna-se então uma decisão de projeto.

De forma simplificada, obtém-se:

$$\min_s J_N$$

$$s. a. \begin{cases} |J_{N-1} - J_{N-1}^*| \leq \delta_{N-1} \\ \vdots \\ |J_2 - J_2^*| \leq \delta_2 \\ |J_1 - J_1^*| \leq \delta_1 \end{cases}$$

onde J_i é um índice de desempenho, J_i^* é o valor ótimo do índice de desempenho quando otimizado sujeito às restrições com os índices de desempenho mais importantes incluídos como restrições, δ_i é o máximo desvio aceitável do índice em relação a seu valor ótimo e i é o grau de importância de cada índice, sendo J_1 o índice de desempenho mais importante. É importante notar que os índices e seus valores ótimos devem ser obtidos considerando-se as restrições impostas ao problema.

Uma formulação matemática mais rigorosa é:

$$\begin{aligned} & \min_S J_N \\ & \text{s. a.} \left\{ \begin{array}{l} |J_{N-1} - J_{N-1}^*| \leq \delta_{N-1} \\ J_{N-1}^* = \min_S J_{N-1} \\ \left\{ \begin{array}{l} |J_{N-2} - J_{N-2}^*| \leq \delta_{N-2} \\ J_{N-2}^* = \min_S J_{N-2} \\ \left\{ \begin{array}{l} |J_{N-3} - J_{N-3}^*| \leq \delta_{N-3} \\ J_{N-3}^* = \min_S J_{N-3} \\ \vdots \\ |J_2 - J_2^*| \leq \delta_2 \\ J_2^* = \min_S J_2 \\ \dots \left\{ \begin{array}{l} |J_1 - J_1^*| \leq \delta_1 \\ J_1^* = \min_S J_1 \end{array} \right. \\ |J_1 - J_1^*| \leq \delta_1 \end{array} \right. \\ |J_{N-3} - J_{N-3}^*| \leq \delta_{N-3} \\ \vdots \\ |J_2 - J_2^*| \leq \delta_2 \\ |J_1 - J_1^*| \leq \delta_1 \end{array} \right. \\ |J_{N-2} - J_{N-2}^*| \leq \delta_{N-2} \\ |J_{N-3} - J_{N-3}^*| \leq \delta_{N-3} \\ \vdots \\ |J_2 - J_2^*| \leq \delta_2 \\ |J_1 - J_1^*| \leq \delta_1 \end{array} \right. \end{array}$$

Esta abordagem garante também a factibilidade do problema multiobjetivo caso a otimização do principal índice de desempenho seja factível, ou seja, caso as restrições originais do problema possam ser obedecidas.

O procedimento proposto de otimização recursiva pode ser representada na forma de um algoritmo, conforme a Figura 2-2.

Figura 2-2 – Otimização recursiva.

Nota-se que esta abordagem pode ser utilizada para encontrar uma única solução ótima para um problema de otimização multiobjetivo e também para determinar os valores limites das restrições do problema. Ou seja, utiliza-se um índice de desempenho como função objetivo do problema de otimização, encontra-se seu valor ótimo, converte-se este índice em uma restrição e então se impõe um valor limite para esta restrição conhecendo seu valor ótimo.

3 Especificação de Controladores

São apresentados aqui os elementos que podem ser empregados para a especificação de controladores, ou, mais especificamente, para a construção do problema de sintonia ótima de controladores como proposto.¹

Inicialmente é abordado o tópico de modelos de processos, tópico este utilizado para incluir uma representação da planta a ser controlada e do controlador no problema de sintonia ótima.

A seguir são apresentados requisitos de estabilidade, um conjunto particular de requisitos de desempenho descrito à parte uma vez que é uma especificação comum à grande maioria das aplicações.

Tratam-se então os requisitos de desempenho, que são empregados como restrições no problema de sintonia ótima e qualificam um controlador sintonizado como aceitável ou não.

São então apresentados requisitos de robustez, que podem ser inclusos na especificação do controlador para que a sintonia obtida atenda às especificações mesmo que não se disponha de um modelo exato e preciso do processo a ser controlado.

Finalmente tratam-se índices de desempenho, os quais correspondem a características desejadas para o sistema controlado e que podem ser otimizadas pelo procedimento de sintonia.

¹ Os itens são descritos supondo-se que o leitor possua algum conhecimento de sistemas dinâmicos, mas não necessariamente esteja familiarizado com todos os conceitos apresentados. Busca-se uma descrição com formalismo matemático mínimo para possibilitar o emprego preciso e sem ambiguidades dos conceitos na construção de um problema de sintonia ótima de controladores, porém não se tem por objetivo justificar ou demonstrar a obtenção dos conceitos e fórmulas apresentadas, podendo tais justificativas e demonstrações ser encontradas nas referências. Não se realiza, entretanto, apenas uma citação dos conceitos e respectivas referências por desejar-se disponibilizar uma *biblioteca* razoavelmente abrangente, clara e concisa de elementos para a construção de um problema de sintonia ótima de controladores.

3.1 Modelos de Processos

A fim de se determinar uma sintonia ótima de um controlador para determinada planta, deve-se ter algum conhecimento sobre esta planta. Esse conhecimento é geralmente representado por modelos.

Um modelo é uma aproximação de um processo real. Dessa forma, um modelo não pode incorporar todas as características, tanto macroscópicas como microscópicas, do processo real. Deve-se normalmente buscar um compromisso entre o custo de se ter o modelo, isto é, o tempo e o esforço requeridos para obtê-lo e verificá-lo, e o nível de detalhes no mesmo, bem como os benefícios esperados de sua aplicação. O propósito do modelo determina, em última análise, sua precisão (Garcia, 2005).

Serão abordados aqui os principais tipos de modelos utilizados em projeto e análise de sistemas de controle.

Inicialmente, antes de tratar os modelos propriamente ditos, é abordado o propósito dos modelos, ou seja, como poderão ser utilizados na sintonia de controladores e que características devem apresentar. A seguir são tratados os principais tipos de modelos e representações considerados neste estudo. Por fim, são feitas algumas considerações sobre métodos de obtenção de modelos.

3.1.1 Modelos e Sintonia de Controladores

Conforme apresentado anteriormente, ao se buscar uma sintonia para um controlador, deseja-se que o comportamento do sistema controlado apresente algumas propriedades determinadas. Portanto, as propriedades do sistema livre, ou seja, sem controlador, devem ser consideradas na determinação da sintonia do controlador.

As propriedades conhecidas da planta podem ser representadas na forma de modelos e utilizadas de duas maneiras: analítica ou para simulação.

A utilização de um modelo de forma analítica para determinação da sintonia de um controlador é bastante empregada, como, por exemplo, no método do modelo interno para sintonia de controladores PID.

Algumas técnicas de sintonia que utilizam um modelo de processo para obtenção direta de uma sintonia serão utilizadas como comparação em alguns exemplos, porém não serão consideradas para obtenção de sintonias ótimas, uma vez que são pouco flexíveis, podendo ser utilizadas apenas para a estrutura de controlador para a qual foram desenvolvidas e gerando sintonias com algumas características específicas, sem permitir a escolha de outras características.

Outra possível aplicação de modelos para sintonia de controladores é na simulação do processo a ser controlado. Esta é a aplicação que será utilizada na formulação de sintonia ótima proposta.

Simulação de um processo é a obtenção da resposta temporal das variáveis de interesse (variáveis dependentes) de um modelo, quando se excitam suas variáveis de entrada com sinais desejados e se definem os valores das condições iniciais das variáveis dependentes (Garcia, 2005).

Através de simulação é possível variar os parâmetros de sintonia do controlador e simular o processo para cada sintonia testada, determinando-se assim a resposta esperada da planta e podendo-se utilizar esta resposta, ou índices calculados sobre esta resposta, em procedimentos de otimização.

Há ainda uma terceira utilização para modelos de processo, intermediária entre as duas aplicações citadas. O modelo pode ser utilizado para busca iterativa de uma sintonia ótima por obtenção analítica.

Neste procedimento de busca iterativa, melhor apresentado adiante em um exemplo, obtém-se uma sintonia por método analítico que lhe garanta algumas propriedades desejáveis e variam-se alguns parâmetros livres do problema para obtenção de características não fornecidas diretamente pelo método analítico. Por exemplo, controladores construídos com a técnica LQG/LTR podem ser sintonizados desta maneira.

Para gerar uma boa sintonia, o modelo de processo deve representar bem as características do processo que são relevantes para as restrições e o índice de desempenho escolhidos.

3.1.2 Tipos de Modelos

Definidos o que são modelos e como serão utilizados no contexto deste estudo, abordam-se agora os principais tipos de modelos. Não se pretende realizar um estudo aprofundado sobre modelos e suas propriedades, apenas descrever alguns conceitos básicos e apresentar algumas considerações computacionais. Para um estudo mais detalhado sobre modelos, ver (Garcia, 2005).

Quanto à memória, um modelo pode ser estático ou dinâmico (Monteiro, 2006):

- Estático (ou estacionário, ou instantâneo, ou sem memória): A resposta (ou saída) do modelo num dado instante depende apenas da excitação (ou entrada) do modelo nesse mesmo instante.
- Dinâmico (ou transiente, ou transitório, ou com memória): A resposta do modelo num dado instante de tempo depende dos valores das entradas passadas.

Do ponto de vista de sintonia de controladores, os modelos de interesse serão sempre dinâmicos, uma vez que se deseja otimizar ou restringir a resposta dinâmica do sistema controlado.

Quanto à linearidade, um modelo pode ser linear ou não linear:

- Linear: Um sistema é linear se tem o mesmo tipo de comportamento, independente do ponto de operação (Aguirre, 2007). Formalmente, um sistema é linear se vale para ele o *Princípio da Superposição de Efeitos*:

$$f(k_1 \cdot u_1 + k_2 \cdot u_2) = k_1 \cdot f(u_1) + k_2 \cdot f(u_2).$$
- Não Linear: Um sistema é não linear se não é linear. Em geral, não vale o *Princípio da Superposição de Efeitos* para sistemas não lineares (Monteiro, 2006).

A grande maioria dos processos reais é melhor representada por modelos não lineares. Apesar disso, modelos lineares podem representar satisfatoriamente suas principais características, e costumam ser mais fáceis de resolver, tanto analiticamente quanto computacionalmente. Para a sintonia de um controlador, e para outros fins também, é uma boa prática encontrar uma solução para uma aproximação linear de um modelo não linear e então validar e refinar a solução encontrada com um modelo não linear mais representativo.

Quanto ao número de entradas e saídas, um modelo pode ser monovariável (SISO) ou multivariável (SIMO, MISO ou MIMO) (Garcia, 2005):

- SISO (Single-Input, Single-Output): Modelos com uma entrada e uma saída.
- SIMO (Single-Input, Multiple-Output): Modelos com uma entrada e várias saídas.
- MISO (Multiple-Input, Single-Output): Modelos com várias entradas e uma saída.
- MIMO (Multiple-Input, Multiple-Output): Modelos com várias entradas e várias saídas.

Não há restrição quanto ao número de entradas e saídas no estudo realizado.

Quanto à invariância no tempo, um modelo pode ser invariante no tempo ou variante no tempo (Garcia, 2005):

- Invariante no Tempo: Modelos invariantes no tempo são aqueles cujos parâmetros permanecem fixos ao longo do tempo.
- Variante no Tempo: Modelos variantes no tempo são aqueles cujos parâmetros variam ao longo do tempo.

Não se impõem restrições sobre os parâmetros dos modelos utilizados, embora o caso mais frequente seja o uso de modelos invariantes no tempo.

Quanto ao domínio, um modelo pode ser expresso no domínio do tempo ou no domínio da frequência (Garcia, 2005):

- Domínio do Tempo: Um modelo está no domínio do tempo quando suas variáveis são definidas neste domínio.

- Domínio da Frequência: Um modelo está no domínio da frequência quando suas variáveis estão definidas neste domínio.

A escolha do domínio depende principalmente da estrutura do controlador e das formas disponíveis para a construção do modelo. Ainda, com o uso de ferramentas computacionais, é possível passar um modelo de um domínio a outro sem grandes dificuldades, assim como utilizar o modelo de um domínio em uma simulação no outro domínio.

Quanto à variável temporal, um modelo pode ser em tempo contínuo ou em tempo discreto (Garcia, 2005):

- Tempo Contínuo: Um modelo é dito a tempo contínuo se a variável temporal é definida em um domínio real.
- Tempo Discreto: Um modelo é dito a tempo discreto se a variável temporal é definida em um domínio inteiro.

Novamente não há restrições quanto ao domínio da variável temporal dos modelos utilizados, sua escolha fica então dependente da estrutura do controlador a ser sintonizado e dos métodos de obtenção de modelos aplicáveis ao caso. Além disso, é possível obter um modelo a tempo discreto de um modelo a tempo contínuo, e o contrário também. Ainda mais, é possível, em algumas ferramentas computacionais de simulação, simular sistemas com componentes contínuos junto a componentes discretos.

Quanto aos sinais, um modelo pode ser a sinais contínuos ou a sinais quantizados (Garcia, 2005):

- Sinais Contínuos: Modelos com sinais contínuos são aqueles cujos sinais (entradas, estados e saídas) podem assumir qualquer valor em um intervalo.
- Sinais Quantizados: Modelos com sinais quantizados são aqueles cujos sinais assumem apenas valores distintos no intervalo.

As mesmas considerações feitas para o domínio da variável temporal valem para o tipo de sinais de um modelo. Além disso, é possível ter-se modelos a tempo contínuo com sinais contínuos ou quantizados, e modelos a tempo discreto com sinais contínuos ou quantizados.

Quanto à concentração de parâmetros, um modelo pode ser a parâmetros concentrados ou a parâmetros distribuídos (Garcia, 2005):

- A Parâmetros Concentrados: Nos modelos a parâmetros concentrados, as variações espaciais são desprezadas: propriedades e estados do sistema são considerados homogêneos em todo o volume de controle.
- A Parâmetros Distribuídos: Nos modelos a parâmetros distribuídos, variações espaciais são consideradas no comportamento das variáveis.

Assim como os modelos lineares, os modelos a parâmetros concentrados são preferíveis por sua simplicidade e pela facilidade em se trabalhar com eles. Em casos onde a distribuição dos parâmetros não possa ser desprezada, pode-se tratar o sistema inicialmente com um modelo a parâmetros concentrados e então refinar a solução com o modelo a parâmetros distribuídos.

Modelos podem ser classificados também como determinísticos ou estocásticos (Garcia, 2005):

- Determinísticos: Em um modelo determinístico, a saída pode ser calculada de forma exata tão logo se conheça o sinal de entrada e as condições iniciais.
- Estocásticos: Um modelo estocástico contém termos aleatórios que tornam impossível um cálculo exato da saída. Os termos aleatórios do modelo podem ser encarados como uma descrição das perturbações.

Em geral, são utilizados apenas modelos determinísticos para sintonia de controladores. Porém, quando a sintonia for realizada pelo procedimento de sintonia ótima proposto e a resposta do sistema for simulada para avaliação de índices de desempenho e restrições, poderão ser utilizados modelos estocásticos.

Quanto às entradas, um modelo pode ser autônomo ou não autônomo (Monteiro, 2006):

- Autônomo: Um sistema é autônomo se suas funções de entrada não dependem explicitamente do tempo.
- Não Autônomo: Um sistema é não autônomo se o tempo aparece explicitamente em algum coeficiente e/ou em alguma função de entrada.

Em aplicações de controle, os modelos considerados são geralmente não autônomos, ou seja, possuem alguma entrada ou perturbação que seja função do tempo.

Quanto à sua representação, um modelo pode ser paramétrico ou não paramétrico (Garcia, 2005):

- Paramétrico: Um modelo paramétrico é representado por parâmetros organizados em uma estrutura.
- Não Paramétrico: Um modelo não paramétrico é representado por uma série de valores, por tabelas ou por gráficos.

Modelos paramétricos são formas mais concisas de apresentar informações sobre um processo e geralmente preferíveis para tratamentos analíticos. No contexto deste estudo, as duas formas podem ser utilizadas para representar o processo. Na seção seguinte serão descritas as principais representações de modelos.

3.1.3 Representações de Modelos

Descrevem-se agora as principais representações de modelos de processos, ou seja, a forma como as informações sobre o processo são apresentadas.

As representações descritas, são:

- Modelos Gráficos;
- Resposta ao Impulso;
- Resposta ao Degrau;
- Resposta em Frequência;
- Funções de Transferência;
- Modelos Polinomiais;
- Redes Neurais;
- Modelos em Espaço de Estados;
- Modelos Computacionais.

Cada uma dessas representações será descrita a seguir. Também serão feitos alguns comentários sobre sua utilização na sintonia de controladores.

a. Modelos Gráficos

Modelos gráficos são representações de propriedades de um sistema por gráficos ou tabelas numéricas. Resposta impulsiva, resposta ao degrau e resposta em frequência são alguns modelos gráficos para sistemas lineares. Algumas características não lineares de sistemas também podem ser representadas por modelos gráficos.

A forma gráfica desses modelos no domínio da frequência, como os diagramas de Bode, de Nyquist e de Nichols, é bastante empregada para análise dos sistemas e mesmo em alguns projetos de controladores, porém são pouco adequadas para emprego em implementações computacionais. Nestes casos, e nos casos tratados neste estudo, as representações numéricas desses modelos são mais apropriadas, como vetores de resposta em frequência.

Os modelos gráficos no domínio do tempo também são bastante utilizados, como a resposta impulsiva e a resposta ao degrau. Nesses casos citados, sua representação numérica pode ser utilizada tanto por vetores que representam toda a resposta, como também por parâmetros extraídos das respostas, como tempo de subida, tempo de acomodação e tempo morto.

Esses dois tipos de modelos, resposta impulsiva e resposta ao degrau, são bastante empregados em sintonias manuais e em sintonias por cálculo direto a partir de parâmetros conhecidos do processo. Para a maioria das implementações computacionais, outras formas de representação podem ser mais adequadas devido à sua maior concisão e facilidade de manipulação.

Para um estudo introdutório mais detalhado sobre modelos gráficos e sua aplicação em projeto de controladores, ver (Ogata, 2003).

b. Resposta ao Impulso

A resposta ao impulso, ou resposta impulsiva, descreve a evolução da saída de um sistema quando lhe é aplicado um impulso na entrada.

A resposta ao impulso de um modelo, principalmente em sua forma gráfica, fornece informação sobre a sua estabilidade BIBO e sobre a sua sensibilidade a distúrbios.

Na sua forma numérica, a resposta impulsiva pode ser utilizada para sintonia de controladores impulsivos e outros, embora outras representações possam ser mais adequadas para implementações computacionais.

c. *Resposta ao Degrau*

A resposta ao degrau é a evolução da saída de um modelo quando lhe é aplicado um degrau na entrada.

A resposta ao degrau é bastante utilizada em diversas técnicas de sintonia de controladores, em particular para sintonia de controladores PID, podendo ser utilizada integralmente ou para obtenção de propriedades da resposta ao degrau do sistema, como tempo morto, tempo de subida e tempo de acomodação.

A resposta ao degrau também é amplamente utilizada para avaliar o desempenho de controladores, tanto através de seu aspecto geral, como também através de suas propriedades, as já citadas e outras que serão abordadas adiante.

Em sua forma numérica, a resposta ao degrau pode ser utilizada para sintonia de controladores por cálculo direto, e também para simular a resposta da planta, embora, como na resposta impulsiva, outras formas de modelo sejam preferíveis para simulação.

d. *Resposta em Frequência*

O termo resposta em frequência significa a resposta em regime permanente de um sistema a uma entrada senoidal (Ogata, 2003).

A resposta em frequência é talvez o modelo gráfico mais amplo de um sistema, pois fornece informações sobre diversas propriedades suas, como ganho estacionário, região de ressonância e frequência de corte.

Algumas técnicas de projeto de controladores trabalham sobre a resposta em frequência de um sistema, como a LQG/LTR.

Assim como os demais modelos gráficos, a resposta em frequência pode não ser a melhor opção para simulação de uma planta, porém pode ser utilizada para avaliar diversas de suas características, como as já citadas. Além disso, a resposta em frequência pode ser utilizada para impor restrições à sintonia, como máximo ganho em altas frequências para que o sistema em malha fechada rejeite ruídos.

e. Funções de Transferência

Funções de transferência são funções que modelam o comportamento dinâmico de um par entrada-saída de um sistema, ou seja, descrevem como uma determinada entrada é dinamicamente “transferida” para a saída do sistema (Aguirre, 2007).

Funções de transferência são amplamente empregadas para representar sistemas dinâmicos. Sua principal vantagem é a sua concisão, ou seja, sua capacidade de representar a dinâmica de um sistema em uma simples fração de polinômios. Além disso, os polinômios fornecem propriedades importantes de um sistema, como seus polos e zeros, de onde se podem inferir informações sobre o comportamento dinâmico deste sistema, como sua estabilidade.

Uma desvantagem das funções de transferência é que não podem ser implementadas diretamente, ou seja, não podem ser construídas ou simuladas em sua forma original, sendo necessário encontrar uma realização apropriada. Apesar disso, diversas ferramentas computacionais permitem o uso de funções de transferência para simulação, encontrando realizações apropriadas automaticamente. Por conta desse recurso das ferramentas computacionais e de suas outras propriedades, as funções de transferência são amplamente empregadas para simulação de sistemas lineares invariantes no tempo.

Apenas sistemas lineares e invariantes no tempo podem ser representados por funções de transferência, podendo ser em tempo contínuo ou discreto. Alguns conceitos básicos sobre estas duas variedades são apresentados a seguir.

Função de Transferência em Tempo Contínuo

A função de transferência de um sistema linear, de tempo contínuo e invariante no tempo, representada por $H(s)$, é definida como a transformada de Laplace da resposta ao impulso $h(t)$ do sistema, para condições iniciais nulas (Aguirre, 2007).

A transformada de Laplace de um sinal $x(t)$ é definida da seguinte maneira (Aguirre, 2007):

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt \quad (3.1)$$

A transformada inversa de Laplace é definida como (Aguirre, 2007):

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) \cdot e^{st} ds \quad (3.2)$$

sendo $s = \sigma + j\omega$.

Para sinais de entrada com espectro suficientemente amplo, uma estimativa da função de transferência de um sistema pode ser obtida dividindo-se a transformada de Laplace da saída pela transformada de Laplace da entrada. Assim, funções de transferência são normalmente representadas como a razão de dois polinômios em s (Aguirre, 2007).

Função de Transferência em Tempo Discreto

A função de transferência de um sistema linear, de tempo discreto e invariante no tempo, representada por $H(z)$, é por definição a transformada Z da resposta ao impulso $h(z)$ do sistema, para condições iniciais nulas (Aguirre, 2007).

A transformada Z de uma sequência $x(k)$ é definida como (Aguirre, 2007):

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{k=0} x(k) \cdot z^{-k} \quad (3.3)$$

A transformada Z inversa é definida como (Aguirre, 2007):

$$x(k) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint X(z) \cdot z^{k-1} dz \quad (3.4)$$

sendo que $\oint$ representa a integral fechada, no sentido anti-horário, centrada na origem.

f. Modelos Polinomiais

Modelos gerados por técnicas de identificação de sistemas, citadas na seção 3.1.4, costumam apresentar modelos de sistemas lineares invariantes no tempo na forma de frações de polinômios que se enquadram na seguinte estrutura geral (Ljung, 1999):

$$A(q) \cdot y(t) = \frac{B(q)}{F(q)} \cdot u(t) + \frac{C(q)}{D(q)} \cdot e(t) \quad (3.5)$$

onde q^{-1} representa o operador de atraso, de forma que $y(t) \cdot q^{-1} = y(t-1)$; $u(t)$ é a entrada do sistema, $e(t)$ é uma perturbação na forma de ruído branco, t é a variável temporal, no domínio discreto, e $A(q)$, $B(q)$, $C(q)$, $D(q)$ e $F(q)$ são polinômios definidos a seguir (Aguirre, 2007):

$$A(q) = 1 - a_1 \cdot q^{-1} - \dots - a_{n_a} \cdot q^{-n_a} \quad (3.6)$$

$$B(q) = b_1 \cdot q^{-1} + \dots + b_{n_b} \cdot q^{-n_b} \quad (3.7)$$

$$C(q) = 1 + c_1 \cdot q^{-1} + \dots + c_{n_c} \cdot q^{-n_c} \quad (3.8)$$

$$D(q) = 1 + d_1 \cdot q^{-1} + \dots + d_{n_d} \cdot q^{-n_d} \quad (3.9)$$

$$F(q) = 1 + f_1 \cdot q^{-1} + \dots + f_{n_f} \cdot q^{-n_f} \quad (3.10)$$

A presença ou ausência desses polinômios pode gerar 32 estruturas diferentes, os casos mais comuns são apresentados na Tabela 3-1 (Ljung, 1999).

Tabela 3-1 – Principais Estruturas de Modelos Polinomiais

Polinômios Presentes	Nome da Estrutura de Modelo
B	FIR
AB	ARX
ABC	ARMAX
AC	ARMA
ABD	ARARX
ABCD	ARARMAX
BF	OE
BFCD	BJ

A estrutura geral (3.5), além de ser utilizada por diversas técnicas de identificação de sistemas, também inclui um modelo de perturbação. O termo que descreve a transferência da entrada $u(t)$ para a saída $y(t)$ é chamado de modelo do processo, $G(q)$, e o termo que descreve a transferência da perturbação $e(t)$ para a saída $y(t)$ é chamado de modelo de perturbação, $H(q)$. A estrutura pode ser então reescrita como:

$$y(t) = G(q) \cdot u(t) + H(q) \cdot e(t) \quad (3.11)$$

Assim como as funções de transferência clássicas, os modelos polinomiais podem ser utilizados para simulação de processos através de ferramentas computacionais.

g. Redes Neurais

Uma rede neural é um processador maciçamente paralelamente distribuído composto de unidades de processamento simples que possui uma propensão natural para armazenar conhecimento experiencial e torná-lo disponível para uso. Assemelha-se ao cérebro em dois aspectos (Haykin, 2009):

- Conhecimento é adquirido pela rede de seu meio por processos de aprendizagem.
- Forças de conexão interneurais, conhecidas por pesos sinápticos, são utilizadas para armazenar o conhecimento adquirido.

O poder de processamento das redes neurais advém de sua estrutura massivamente distribuída e de sua capacidade de aprendizagem e de generalização. Esta última refere-se à capacidade da rede de apresentar boas respostas quando é exposta a um conjunto de dados que não lhe foi apresentado durante o treinamento.

A utilização de modelos neurais é interessante para, e muitas vezes restrito a, representar não linearidades de processos, processos não lineares ou processos de muitas variáveis.

Dentre as propriedades e capacidades mais importantes das redes neurais e relevantes para representação de processos, citam-se (Haykin, 2009):

- Não-Linearidade: O emprego de neurônios não lineares na construção da rede neural torna-a não linear. Isto evita que a rede possa ser reduzida a um único elemento linear, além de ter-se a não linearidade distribuída. Esta propriedade é muito importante, principalmente se o processo ao qual a rede neural é aplicada é não linear.
- Mapeamento Entrada-Saída: O treinamento da rede neural constrói um mapeamento entrada-saída para o problema tratado. Esta é uma abordagem estatística não paramétrica, ou tábula rasa segundo uma abordagem biológica, de modo que não é necessário realizar suposições prévias sobre o modelo estatístico dos dados de entrada.
- Informação Contextual: O conhecimento é representado e armazenado pela estrutura da rede neural e seu estado de ativação. Consequentemente, redes neurais são capazes de naturalmente tratar informação contextual.
- Uniformidade de Análise e Projeto: Redes neurais desfrutam da universalidade como processadores de informação. Assim, a mesma notação é utilizada em todas as aplicações de redes neurais. Todas as redes neurais são baseadas em neurônios e é possível compartilhar teorias e algoritmos de treinamento entre diferentes aplicações de redes neurais. Isso é importante para diversas aplicações, pois torna possível a utilização de arquiteturas e algoritmos genéricos para a resolução do problema abordado.

- Analogia Neurobiológica: Projetos de redes neurais artificiais são motivados por analogias com o cérebro, que é uma prova de que processamento paralelo tolerante a falhas não é apenas fisicamente possível, mas também rápido e poderoso. A neurobiologia oferece à engenharia ideias e bases para a solução de problemas complexos e para o desenvolvimento de soluções com melhores propriedades que as técnicas clássicas.

Para simulação de processos, redes neurais podem ser utilizadas como modelos caixa-preta, ou seja, que recebem entradas e fornecem saídas, embora geralmente não forneçam informações claras sobre os estados internos do modelo simulado.

Para um estudo detalhado sobre redes neurais artificiais, ver (Haykin, 2009).

h. Modelos em Espaço de Estados

Um modelo em espaço de estados é um modelo determinado por n variáveis de estado, tal que o conhecimento destas variáveis em um instante, juntamente com o conhecimento das entradas do sistema no intervalo de tempo de interesse, determinam completamente o comportamento do sistema para qualquer instante de tempo neste intervalo. É imediato que a evolução de cada variável de estado deve ser descrita por uma equação de primeira ordem ou por uma combinação algébrica das demais variáveis de estado.

A representação de modelos em espaço de estados é a mais geral, sendo possível converter qualquer das representações matemáticas anteriormente apresentadas em um modelo em espaço de estados.

Uma vantagem da representação em espaço de estados é que ela é implementável, ou seja, encontrada uma realização de um modelo em espaço de estados, é possível construir algo, como um simulador, que apresente o comportamento descrito pelo modelo.

Modelos em espaço de estados são definidos no domínio do tempo, podendo este ser contínuo ou discreto. Também podem ser lineares ou não lineares. Estas variações são brevemente apresentadas a seguir.

Pela sua generalidade e facilidade de implementação e também por fornecer diretamente informação sobre o estado do modelo, a representação em espaço de estados é vantajosa em relação às demais para diversas aplicações. Além disso, ferramentas computacionais comumente oferecem recursos para obtenção de modelos em espaço de estados a partir de outras representações.

Modelos em Espaço de Estados Lineares de Tempo Contínuo

Um modelo linear de tempo contínuo em espaço de estados é definido pelas duas seguintes equações (Hespanha, 2009):

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t) \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^k \quad (3.12)$$

$$y(t) = C(t) \cdot x(t) + D(t) \cdot u(t) \quad y \in \mathbb{R}^m \quad (3.13)$$

onde os sinais:

$$u: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad x: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad y: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

são, respectivamente, entradas, estados e saídas do sistema e o tempo t é definido em um conjunto contínuo. A equação de primeira ordem (3.12) é chamada de equação de estados e (3.13) é chamada de equação de saída (Hespanha, 2009).

A, B, C e D são matrizes. O sistema é invariante no tempo se essas matrizes forem constantes, e é variante no tempo se ao menos uma delas for função do tempo.

Modelos em Espaço de Estados Lineares de Tempo Discreto

Um modelo linear de tempo discreto em espaço de estados é definido pelas duas seguintes equações (Hespanha, 2009):

$$x(t+1) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t) \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^k \quad (3.14)$$

$$y(t) = C(t) \cdot x(t) + D(t) \cdot u(t) \quad y \in \mathbb{R}^m \quad (3.15)$$

onde os sinais:

$$u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

$$x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$y: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

são, respectivamente, entradas, estados e saídas do sistema e o tempo t é definido em um conjunto discreto. A equação de primeira ordem (3.14) é chamada de equação de estados e (3.15) é chamada de equação de saída (Hespanha, 2009).

Assim como no caso contínuo, o sistema é invariante no tempo se as matrizes A, B, C e D forem constantes, e variante no tempo se ao menos uma delas for função do tempo.

Modelos em Espaço de Estados Não-Lineares de Tempo Contínuo

Um modelo, linear ou não linear, de tempo contínuo em espaço de estados pode ser descrito por:

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t) \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^k \quad (3.16)$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), t) \quad y \in \mathbb{R}^m \quad (3.17)$$

onde os sinais:

$$u: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

$$x: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$y: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

são, respectivamente, entradas, estados e saídas do sistema, sendo que $a(\cdot)$ e $h(\cdot)$ são funções de primeira ordem ou algébricas, variantes ou invariantes no tempo. O tempo t é definido em um conjunto contínuo.

Esta é a representação mais geral de um sistema em tempo contínuo.

Modelos em Espaço de Estados Não-Lineares de Tempo Discreto

Um modelo, linear ou não linear, de tempo discreto em espaço de estados pode ser descrito por:

$$x(t+1) = a(x(t), u(t), t) \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^k \quad (3.18)$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), t) \quad y \in \mathbb{R}^m \quad (3.19)$$

onde os sinais:

$$u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

$$x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$y: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

são, respectivamente, entradas, estados e saídas do sistema, sendo que $a(\cdot)$ e $h(\cdot)$ são funções de primeira ordem ou algébricas, variantes ou invariantes no tempo. O tempo t é definido em um conjunto discreto.

Esta é a representação mais geral de um sistema em tempo discreto.

i. Modelos Computacionais

O modelo utilizado em uma simulação computacional de um sistema é um programa. Para sistemas complexos, este programa pode ser construído por muitas sub-rotinas interconectadas e tabelas, e pode não ser possível sintetizá-lo analiticamente como um modelo matemático. Utiliza-se o termo modelo computacional para tais descrições (Ljung, 1999).

Modelos computacionais podem ser implementações das representações anteriormente descritas, ou podem ser compostas de combinações delas. Todas as aplicações consideradas no presente estudo utilizam modelos computacionais.

j. Outras Representações

Além das representações descritas, há outras que podem ser utilizadas para apresentar informações sobre um sistema, como modelos fuzzy e modelos de redes complexas. Apesar de não tratados neste capítulo, tais modelos podem ser utilizados para simular processos em um procedimento de sintonia de controladores.

As representações apresentadas foram selecionadas por serem as mais comuns em aplicações de controle.

3.1.4 Obtenção de Modelos

Modelos de processos podem ser obtidos basicamente de duas formas: por modelagem fenomenológica ou por identificação de sistemas.

A modelagem fenomenológica, ou teórica, é desenvolvida aplicando-se os princípios básicos das ciências que estudam o processo em investigação. Neste caso, divide-se o sistema em subsistemas, cujas propriedades sejam bem compreendidas de experiências anteriores. Isso basicamente significa que se empregam “leis da natureza” e outras relações bem definidas que são baseadas em trabalhos experimentais anteriores (relações constitutivas). Esses subsistemas são então agregados matematicamente e um modelo do sistema completo é obtido. Ao se desenvolver um modelo teórico há a necessidade de se conhecer certos parâmetros do processo, os quais usualmente devem ser avaliados a partir de experimentos feitos no processo ou então obtidos de dados operacionais do mesmo. Na modelagem fenomenológica modela-se normalmente o processo propriamente dito. No entanto, é mais difícil se obter os modelos das perturbações, que são igualmente importantes. Esses modelos frequentemente têm que ser obtidos a partir de experimentos. Como modelos para perturbações raramente podem ser determinados a partir de princípios básicos, significa que frequentemente a única forma de obter modelos para as perturbações é experimentalmente (Garcia, 2005).

A identificação de sistemas é um procedimento alternativo e mais simples que se propõe a obter um modelo matemático que explique, pelo menos em partes e de forma aproximada, a relação de causa e efeito presente em dados do processo (Aguirre, 2007).

Para uma abordagem abrangente e detalhada sobre modelagem fenomenológica, ver (Garcia, 2005). Para uma abordagem abrangente e detalhada sobre identificação de sistemas, ver (Aguirre, 2007) e (Ljung, 1999).

3.1.5 Considerações Finais sobre Modelos

Neste estudo, modelos de processos serão utilizados para obter sintonias para controladores a serem utilizados nos processos representados por tais modelos.

Modelos podem ser utilizados para obtenção de sintonias por cálculos diretos, seja em procedimentos clássicos ou iterativos, e por simulação da resposta da

planta. Portanto, no caso de cálculos diretos, o modelo utilizado deve representar bem as características consideradas pelo método de sintonia e, no caso de sintonia por busca ou otimização envolvendo a simulação do processo, o modelo deve ser confiável nas condições em que o controlador deverá atuar.

Modelos de perturbação e modelos de erro, ou seja, modelos que descrevem a incerteza do modelo desenvolvido, embora não sejam utilizados na maior parte das técnicas de sintonia de controladores, podem ser utilizados para impor restrições de desempenho e de robustez aos procedimentos de sintonia ótima proposto, gerando melhores sintonias.

3.2 Requisitos de Estabilidade

Informalmente, um sistema é estável se suas variáveis de interesse não divergem com o passar do tempo, permanecendo confinadas a um conjunto finito de valores.

Pode-se dizer que a estabilidade é o principal requisito de desempenho de um sistema de controle, estando presente em praticamente todos os projetos de controladores.

São abordadas a seguir as principais definições e condições para verificação de estabilidade de sistemas dinâmicos.

3.2.1 Definições de Estabilidade

Há duas formas principais de definir-se a estabilidade de um sistema: a estabilidade de Lyapunov e a estabilidade BIBO.

A estabilidade de Lyapunov determina a estabilidade do sistema livre, ou seja, perante suas condições iniciais, e a estabilidade BIBO determina a estabilidade do sistema forçado, ou seja, para entradas não nulas.

Para a sintonia de controladores, é importante que o sistema seja estável segundo Lyapunov na região de trabalho desejada e BIBO-estável para as entradas a que estará sujeito.

a. *Estabilidade de Lyapunov ou Estabilidade Interna*

A estabilidade de uma solução de um sistema dinâmico é determinada pelo comportamento das soluções cujas condições iniciais pertencem à sua vizinhança (Monteiro, 2006). A esta estabilidade, chama-se estabilidade segundo Lyapunov ou estabilidade interna do sistema.

Um ponto de equilíbrio x^* é *assintoticamente estável* se todas as trajetórias $x(t)$ cujas condições iniciais estejam contidas em uma bola² de raio δ com centro em x^* tendem a x^* conforme o tempo passa (Monteiro, 2006), ou seja, para uma condição inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, tem-se (Hespanha, 2009):

$$x(t) \rightarrow x^* \quad p/ \quad t \rightarrow \infty \quad (3.20)$$

Um ponto de equilíbrio x^* é *exponencialmente estável* se todas as trajetórias $x(t)$ cujas condições iniciais estejam contidas numa bola de raio δ com centro em x^* tendem exponencialmente a x^* conforme o tempo passa, ou seja, se existem constantes $c, \lambda > 0$ tal que, para uma condição inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, tem-se (Hespanha, 2009):

$$||x(t) - x^*|| \leq c \cdot e^{\lambda(t-t_0)} \cdot ||x(t_0)|| \quad \forall t \geq 0 \quad (3.21)$$

Um ponto de equilíbrio x^* é *neutralmente* ou *marginalmente estável* se existe uma bola de raio δ centrada em x^* tal que, para qualquer trajetória com condição inicial $x(0)$ pertencente a essa bola, então $x(t)$ permanece dentro de outra bola de raio ϵ centrada em x^* conforme o tempo passa (Monteiro, 2006), ou seja, para uma condição inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, tem-se:

$$||x(t) - x^*|| \leq \epsilon \quad \forall t \geq 0 \quad (3.22)$$

Um ponto de equilíbrio x^* é *instável* se não existe uma bola de raio δ centrada em x^* tal que todas as trajetórias cujas condições iniciais pertençam a essa bola fiquem confinadas no interior de uma segunda bola de raio ϵ com centro em x^* , ou seja, há pelo menos uma trajetória com condição inicial $x(0)$ pertencente à bola de raio δ que deixa a bola de raio ϵ num tempo finito. Portanto, para uma condição inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, tem-se:

$$||x(t) - x^*|| \rightarrow \infty \quad p/ \quad t \rightarrow \infty \quad (3.23)$$

² Uma bola de raio δ centrada em x é um conjunto de pontos cuja distância a x segundo a métrica do domínio é menor que δ .

Uma bola é aberta se seus pontos de fronteira não pertencem ao conjunto, ou seja:

$$B(x, \delta) = \{y \in X : d(x, y) < \delta\}$$

Uma bola é fechada se seus pontos de fronteira pertencem ao conjunto, ou seja:

$$B(x, \delta) = \{y \in X : d(x, y) \leq \delta\}$$

b. Estabilidade BIBO ou Estabilidade Entrada-Saída

A estabilidade BIBO, “*Bounded-Input, Bounded-Output*”, de um sistema determina o efeito das entradas do sistema no seu comportamento dinâmico.

Seja x^* o ponto de equilíbrio de um sistema livre, diz-se que, na vizinhança de x^* , o sistema forçado apresenta estabilidade BIBO se, para $x(t_0) = x^*$, então uma entrada limitada produz uma solução $x(t)$ que também é limitada (Monteiro, 2006). Ou seja, existe uma constante g tal que, para qualquer entrada limitada $u(\cdot)$, a saída forçada $y_f(\cdot)$ do sistema é limitada segundo (Hespanha, 2009):

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|y_f(t)\| \leq g \cdot \sup_{t \in [0, \infty)} \|u(t)\| \quad (3.24)$$

3.2.2 Condições para Estabilidade

As definições de estabilidade apresentadas são baseadas nas respostas de um sistema dinâmico, seja em função das condições iniciais ou de entradas forçadas, mas não permitem determinar se um sistema será estável analisando apenas o modelo, sem suas respostas.

Para determinar se um sistema é estável a partir de seu modelo, há diversas técnicas de análise. Em geral, essas técnicas são utilizadas em estudos analíticos de sistemas dinâmicos, podendo as definições de estabilidade ser aplicadas diretamente nas respostas simuladas do sistema controlado durante o processo de sintonia.

Porém, alguns critérios de estabilidade permitem determinar, de maneira simples, os limites de estabilidade de um sistema, ou seja, conjuntos de valores de parâmetros para os quais o sistema é estável, o que pode ser bastante útil para limitar o conjunto de busca na obtenção de uma sintonia para um controlador.

Os critérios de estabilidade mais relevantes para a formulação do problema de sintonia de controladores são citados a seguir.

a. Estabilidade de Sistemas Não-Lineares de Tempo Contínuo

O estudo da estabilidade de sistemas não lineares é o mais geral, e pode ser aplicado também a sistemas lineares.

Para o estudo da estabilidade de sistemas não lineares de tempo contínuo, empregam-se comumente o método direto de Lyapunov e a análise do sistema linearizado.

Método Direto de Lyapunov para Sistemas de Tempo Contínuo

O método direto de Lyapunov permite a determinação da estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema diretamente a partir de seu modelo, podendo ser aplicado também a casos em que a estabilidade do sistema linearizado não corresponda à estabilidade do sistema não linear. Este método é o mais completo para determinação de estabilidade de um ponto de equilíbrio.

O método direto de Lyapunov pode ser enunciado como (Khalil, 2002):

Seja $x^* = 0$ um ponto de equilíbrio para $\dot{x} = f(x)$ e seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio contendo $x^* = 0$. Seja $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável e definida positiva, ou seja:

$$V(0) = 0 \quad \text{e} \quad V(x) > 0 \text{ em } D - \{0\} \quad (3.25)$$

$x^* = 0$ é marginalmente estável se $\dot{V}$ é semi-definida negativa, ou seja:

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ em } D \quad (3.26)$$

E $x^* = 0$ é assintoticamente estável se $\dot{V}$ é definida negativa, ou seja:

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ em } D - \{0\} \quad (3.27)$$

Para pontos de equilíbrio x^* fora da origem, a definição anterior pode ser aplicada realizando-se uma mudança de variáveis dada por (Khalil, 2002):

$$x' = x - x^* \quad (3.28)$$

Análise da Estabilidade por Linearização

A análise de estabilidade por linearização consiste em linearizar o sistema em torno do ponto de equilíbrio e analisar a estabilidade do sistema linearizado por técnicas mais simples que o método direto de Lyapunov.

Segundo o teorema de Hartman-Grobman, o comportamento do ponto de equilíbrio do sistema não linear é qualitativamente equivalente ao comportamento do sistema linearizado quando o ponto é hiperbólico, ou seja, quando todos os autovalores calculados para o modelo linearizado neste ponto têm parte real não nula (Monteiro, 2006).

b. Estabilidade de Sistemas Não-Lineares de Tempo Discreto

De maneira análoga ao caso dos sistemas de tempo contínuo, a estabilidade de sistemas não lineares de tempo discreto pode ser estudada pelo método direto de Lyapunov e pela análise do sistema linearizado.

Método Direto de Lyapunov para Sistemas de Tempo Discreto

O método direto de Lyapunov para sistemas de tempo discreto é análogo ao caso de sistemas de tempo contínuo, podendo ser enunciado como (Ogata, 1995), (Monteiro, 2006):

Seja $x^* = 0$ um ponto fixo para o sistema $\Delta x(t + 1) = f(x(t))$ e seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio contendo $x^* = 0$. Então, se existir uma função de Lyapunov $V(x)$ tal que:

$$\begin{aligned} V(0) = 0 \quad , \quad V(x) > 0 \text{ em } D - \{0\} \quad \text{e} \\ V(x) \rightarrow \infty \text{ p/ } ||x|| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.29)$$

O ponto fixo é marginalmente estável se:

$$\Delta V(x) = V(x(t + 1)) - V(x(t)) \leq 0 \text{ em } D - \{0\} \quad (3.30)$$

O ponto fixo é assintoticamente estável se:

$$\Delta V(x) = V(x(t+1)) - V(x(t)) < 0 \text{ em } D - \{0\} \quad (3.31)$$

Para pontos de equilíbrio x^* fora da origem, a definição anterior pode ser aplicada realizando-se uma mudança de variáveis, de maneira análoga ao caso contínuo.

Análise da Estabilidade por Linearização

Assim como no caso contínuo, a estabilidade dos pontos fixos de um sistema de tempo discreto pode ser analisada qualitativamente a partir da linearização do sistema em torno do ponto fixo.

Segundo o teorema de Hartman-Grobman, esta análise por linearização é válida se o ponto fixo é hiperbólico, ou seja, se o subespaço central gerado pelos autovetores cujos autovalores sejam iguais a 1 seja vazio (Monteiro, 2006).

c. *Estabilidade de Sistemas Lineares de Tempo Contínuo*

A estabilidade de Lyapunov de sistemas lineares de tempo contínuo pode ser verificada de maneira mais simples que pelo método direto.

Seja A a matriz da equação de estados de um modelo linear invariante no tempo, as seguintes condições são equivalentes (Hespanha, 2009):

- O sistema é assintoticamente estável;
- O sistema é exponencialmente estável;
- Todos os autovalores de A têm parte real estritamente negativa;
- Todos os polos do sistema estão no semi-plano esquerdo;
- Para toda matriz Q simétrica positiva definida, existe uma única solução P , simétrica e definida positiva, para a seguinte equação de Lyapunov:

$$A' \cdot P + P \cdot A = -Q \quad (3.32)$$

- Existe uma matriz P simétrica definida positiva para a qual a seguinte inequação matricial de Lyapunov tem solução:

$$A' \cdot P + P \cdot A < 0 \quad (3.33)$$

Também, para sistemas lineares, a estabilidade do sistema é definida pela estabilidade da origem.

d. Estabilidade de Sistemas Lineares de Tempo Discreto

Assim como no caso contínuo, a estabilidade de sistemas lineares de tempo discreto pode ser fácil e diretamente verificada.

Seja A a matriz da equação de estados de um modelo linear invariante no tempo, as seguintes condições são equivalentes (Hespanha, 2009):

- O sistema é assintoticamente estável;
- O sistema é exponencialmente estável;
- Todos os autovalores de A têm módulo estritamente menor que 1;
- Todos os polos do sistema estão dentro do círculo unitário;
- Para toda matriz Q simétrica positiva definida, existe uma única solução P , simétrica e definida positiva, para a seguinte equação de Stein, ou equação de Lyapunov de tempo discreto:

$$A' \cdot P \cdot A - P = -Q \quad (3.34)$$

- Existe uma matriz P simétrica definida positiva para a qual a seguinte inequação matricial de Lyapunov tem solução:

$$A' \cdot P \cdot A - P < 0 \quad (3.35)$$

Novamente, para sistemas lineares de tempo discreto, a estabilidade do sistema é definida pela estabilidade da origem.

3.2.3 Considerações Finais sobre Estabilidade

Estabilidade é um dos principais requisitos de sistemas de controle, estando presente em virtualmente todos os projetos de controladores.

Muitas vezes, a estabilidade está implícita em outros requisitos de desempenho, como erro estacionário nulo na resposta ao degrau, não sendo necessário explicitar uma condição de estabilidade na formulação do problema de

sintonia do controlador. Porém, mesmo nestes casos, a estabilidade pode ser utilizada para delimitar o domínio de busca do processo de sintonia, o que facilita a solução do problema de sintonia.

Além das citadas, há outras formas de verificar a estabilidade de um sistema, como os critérios de Routh e de Jury. Optou-se por abordar as mais comuns, gerais e adequadas formas de verificação de estabilidade de sistemas, porém outras também podem ser empregadas na formulação do problema de sintonia de controladores.

3.3 Requisitos de Desempenho

Requisitos de desempenho são restrições que devem ser obedecidas pelo sistema controlado para que seu comportamento seja considerado aceitável.

Requisitos de desempenho correspondem à principal, e frequentemente à única, especificação para sintonia de controladores. Pré-sintonias e técnicas de sintonia por cálculo direto são baseadas em requisitos de desempenho.

São abordados aqui os principais requisitos de desempenho típicos e como podem ser considerados na obtenção da sintonia de um controlador.

Os requisitos de desempenho tratados são agrupados nas seguintes categorias:

- Resposta ao degrau;
- Acompanhamento de sinais de referência;
- Rejeição de perturbações;
- Rejeição de ruído de medição;
- Restrições nos estados;
- Restrições construtivas;
- Esforço de controle.

3.3.1 Resposta ao Degrau

A resposta ao degrau é uma das formas mais comuns de avaliação do desempenho de um controlador, e também de especificação de requisitos de desempenho de uma malha de controle. Corresponde ao comportamento da saída do sistema quando é aplicado um degrau em sua entrada.

Apresentam-se a seguir os principais índices associados à resposta ao degrau e que são comumente empregados para especificar requisitos de desempenho de controladores. Os índices abordados são:

- Tempo de subida;
- Tempo de acomodação;
- *Overshoot* ou sobressinal;

➤ *Undershoot* ou subsinal.

a. Tempo de Subida

Tempo de subida (rise time), t_r , é definido como o tempo necessário para a resposta ao degrau crescer de 10% a 90% do valor de estado estacionário. Alternativamente, o tempo de subida pode ser definido de 5% a 95% do valor de estado estacionário (Levine, 2011). O tempo de subida também pode ser definido como o tempo necessário para que a variável do processo atinja pela primeira vez o novo valor de estado estacionário (Seborg, et al., 2004), porém esta última definição não pode ser aplicada se a resposta não apresentar sobressinal.

O tempo de subida pode ser utilizado como restrição para sintonia de controladores para garantir uma velocidade mínima de resposta do controlador. Também é possível utilizar este parâmetro como índice de desempenho para otimização, como será abordado adiante, porém, em geral, a redução do tempo de subida além de certo limite implica no aumento do tempo de acomodação ou no aumento do sobressinal da resposta.

b. Tempo de Acomodação

Tempo de acomodação (settling time), t_s , é definido como o mínimo tempo a partir do qual a resposta permanece a 5% do valor de estado estacionário (Levine, 2011). Também é comum a utilização de 2% e 1% na definição de tempo de acomodação.

O tempo de acomodação é um dos principais requisitos de desempenho de controladores, pois estabelece o tempo necessário para que a planta estabilize no valor desejado. Assim como o tempo de subida, o tempo de acomodação pode ser utilizado em procedimentos de otimização e impacta nas outras propriedades da resposta ao degrau.

c. Sobressinal

Sobressinal, ou *overshoot*, corresponde ao maior valor que a resposta transitória assume. Pode ser expresso em valor relativo à amplitude do degrau ou em unidades de engenharia.

O sobressinal é um importante requisito de desempenho, pois garante que a saída do processo não ultrapassará um valor desejado, evitando problemas como perda de produto ou dano a equipamentos. Para a sintonia de controladores, o sobressinal máximo desejável pode também ser representado por uma restrição de desigualdade aplicada a toda a resposta da planta.

d. Subsinal

Subsinal, ou *undershoot*, corresponde ao menor valor que a resposta transitória assume. Pode ser expresso em porcentagem com relação ao valor final de estado estacionário ou em unidades de engenharia.

Assim como o sobressinal, o subsinal como requisito de desempenho limita os valores que a saída da planta pode assumir, também podendo ser representado por uma restrição de desigualdade aplicada a toda a resposta da planta.

Para sistemas lineares, o subsinal ocorre apenas em sistemas de fase não mínima.

3.3.2 Acompanhamento de Sinais de Referência

A capacidade de acompanhamento de sinais de referência de malhas de controle pode ser avaliada no domínio do tempo e da frequência. No domínio do tempo, observa-se o erro de estado estacionário do sistema para diferentes classes de sinais de excitação. No domínio da frequência, observa-se o ganho da resposta em frequência do sistema na região de interesse.

a. Especificações de Acompanhamento de Sinais de Referência no Domínio do Tempo

No domínio do tempo, o acompanhamento de sinais de referência é avaliado pelo erro de estado estacionário do sistema controlado.

O erro de estado estacionário, e_{ss} , de um sistema é determinado pela diferença entre a referência e a saída do sistema em estado estacionário.

O erro de estado estacionário é dependente do tipo de sinal de entrada aplicado à planta, ou seja, cada classe de sinais de entrada resultará em diferentes erros de estado estacionário.

Em um grande número de aplicações é desejável que o sistema controlado apresente erro de estado estacionário nulo ou menor que um valor determinado, ou seja, que o sistema de controle seja capaz de levar a planta ao estado desejado com uma precisão especificada. Em geral, erro de estado estacionário nulo (ou “pequeno”) é uma especificação de desempenho tão importante quanto a estabilidade. Para qualquer classe de sinais de referência, a restrição sobre o erro de estado estacionário pode ser expressa por:

$$e_{ss} \leq \varepsilon_{ss} \quad (3.36)$$

Erros de Estado Estacionário em Sistemas Lineares

Para sistemas lineares, o erro de estado estacionário pode ser calculado analiticamente com facilidade para sinais de entrada dos tipos degrau, rampa e parábola.

Seja a função de transferência de malha aberta do sistema expressa na forma (Levine, 2011):

$$G_0(s) = \frac{k(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{s^N(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (3.37)$$

As constantes de erro de estado estacionário para sinais de entrada do tipo degrau (erro de posição), K_p , rampa (erro de velocidade), K_v e parábola (erro de aceleração), K_a , são (Levine, 2011):

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) \quad (3.38)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_0(s) \quad (3.39)$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G_0(s) \quad (3.40)$$

Os erros de estado estacionário do sistema para estes tipos de sinais de entrada podem então ser calculados a partir das respectivas constantes de erro da forma (Levine, 2011):

$$e_{ssp} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (3.41)$$

$$e_{ssv} = \frac{1}{K_v} \quad (3.42)$$

$$e_{ssa} = \frac{1}{K_a} \quad (3.43)$$

A depender do tipo do sistema, ou seja, do número de polos na origem que possua, pode-se calcular o erro de estado estacionário a partir do ganho de malha aberta K da forma (Ogata, 2003):

Tabela 3-2 – Cálculo analítico de erros de estado estacionário

	Degrau $r(t) = 1$	Rampa $r(t) = t$	Parábola $r(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2$
Sistema tipo 0	$\frac{1}{1 + K}$	∞	∞
Sistema tipo 1	0	$\frac{1}{K}$	∞
Sistema tipo 2	0	0	$\frac{1}{K}$

A partir desta definição, pode-se formular diretamente uma restrição estrutural para as constantes de erro de estado estacionário ou para o ganho de malha aberta do sistema.

Ainda mais, pode-se determinar o menor número de integradores que o controlador deve ter para que apresente erro estacionário nulo para os sinais de referência de interesse.

b. Especificações de Acompanhamento de Sinais de Referência no Domínio da Frequência

A capacidade de acompanhamento de sinais de referência de um sistema de controle pode ser especificada no domínio da frequência.

Seja Ω_r um conjunto de frequências onde o sinal de referência $r(j\omega)$ possua a parte mais significativa de sua potência. A capacidade de acompanhamento deste sinal pelo sistema será tanto melhor quanto mais próximo da unidade for o ganho da resposta em frequência entre a referência e a saída do sistema em malha fechada no conjunto Ω_r .

Portanto, para o acompanhamento de uma referência sem erro estacionário, o ganho de malha fechada do sistema controlado deve ser unitário na região de interesse. Esta condição pode ser expressa por:

$$|G_{MF_r}(j\omega)| = 1 \quad , \omega \in \Omega_r \quad (3.44)$$

onde $G_{MF_r}(j\omega)$ é a resposta em frequência que mapeia o efeito da referência na saída do sistema em malha fechada.

Caso seja aceitável um erro de estado estacionário, mas se deseje que seja menor que um determinado limite ε_r , pode-se impor a restrição:

$$-\varepsilon_r < |G_{MF_r}(j\omega)| - 1 \leq \varepsilon_r \quad , \omega \in \Omega_r \quad (3.45)$$

Pode-se também impor a restrição à resposta em frequência da referência para o erro da forma (Cruz, 1996):

$$\left| \frac{1}{1 + G_p(j\omega) \cdot G_c(j\omega)} \right| \leq \alpha_r(\omega) \quad , \omega \in \Omega_r \quad (3.46)$$

onde $G_P(j\omega)$ é a resposta em frequência do processo, $G_C(j\omega)$ a resposta em frequência do controlador e $\alpha_r(\omega)$ é uma função que determina os limites aceitáveis de erro tal que (Cruz, 1996):

$$\frac{|e(j\omega)|}{|r(j\omega)|} \leq \alpha_r(\omega) \quad , \omega \in \Omega_r \quad (3.47)$$

3.3.3 Rejeição de Perturbações

Rejeição de perturbações, ou rejeição de distúrbios, corresponde à capacidade do controlador de retornar a planta à condição desejada de operação quando lhe é aplicado um distúrbio. As perturbações podem ser nas entradas, nos estados ou nas saídas do sistema.

Assim como no caso do acompanhamento de sinais de referência, requisitos de rejeição de perturbações podem ser expressos no domínio do tempo e no domínio da frequência. Serão tratados os dois casos após uma breve apresentação da utilização das representações apresentadas na seção 3.1.3 para representação de modelos com perturbações.

a. *Representação das Perturbações*

Aqui serão consideradas perturbações como entradas adicionais ao modelo da planta que afetam seus estados.

Para modelos expressos na forma de espaço de estados representa-se o efeito das perturbações, para sistemas em tempo contínuo, da seguinte maneira:

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), w(t), t) \quad (3.48)$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), z(t), t) \quad (3.49)$$

Para modelos não lineares de tempo discreto, tem-se:

$$x(t+1) = a(x(t), u(t), w(t), t) \quad (3.50)$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), z(t), t) \quad (3.51)$$

Para modelos lineares de tempo contínuo, a representação pode ser simplificada para:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t) \quad (3.52)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) + z(t) \quad (3.53)$$

Para modelos lineares de tempo discreto, tem-se:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t) \quad (3.54)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) + z(t) \quad (3.55)$$

Assume-se que $w(t)$ e $z(t)$ sejam sinais quaisquer de características conhecidas, podendo ser gerados por outros modelos, como modelos de perturbação.

Para todas as demais representações, geralmente representam-se os distúrbios como sinais aditivos aplicados nas entradas e nas saídas do modelo, conforme exibido na Figura 3-1, onde $r(t)$ é o sinal de referência, $y(t)$ é a saída da planta, $y_m(t)$ é a saída medida da planta, $d_i(t)$ são os distúrbios na entrada do processo, $d_o(t)$ os distúrbios na saída do sistema e $n(t)$ o ruído de medição, tratado na próxima seção.

Figura 3-1 – Malha de controle com perturbações

Na representação em espaço de estados, mais geral que a representação em diagrama de blocos, $w(t)$ contém $d_i(t)$ da representação da Figura 5-1 e $z(t)$ corresponde a $d_o(t)$.

b. Especificações de Rejeição de Perturbações no Domínio do Tempo

No domínio do tempo, a rejeição de perturbações de uma malha de controle pode ser especificada de maneira similar às especificações de resposta ao degrau e acompanhamento de referências.

Rejeição de Perturbações do Tipo Degrau

A rejeição de perturbações do tipo degrau pode ser especificada pelos mesmos índices da resposta ao degrau, com interpretações diferentes:

- Tempo de acomodação;
- *Overshoot* ou sobressinal;
- *Undershoot* ou subsinal.

Estas definições podem ser aplicadas tanto a perturbações nas entradas quanto a perturbações nos estados ou nas saídas, porém não assumirão valores iguais para todos os tipos de perturbação.

Tempo de Acomodação

O tempo de acomodação, ou tempo de retorno, da rejeição à perturbação pode ser definido como o tempo necessário para que o sistema retorne ao estado estacionário quando lhe é aplicado uma perturbação do tipo degrau.

O tempo de acomodação do sistema pode ser definido a fim de limitar a duração da influência de perturbações na saída do sistema e tornar a resposta do controlador a perturbações mais ou menos rápida.

Sobressinal

O sobressinal, ou *overshoot*, do sistema perante perturbações corresponde ao maior valor que sua saída assume quando lhe é aplicada uma perturbação.

A especificação do sobressinal máximo aceitável em um procedimento de sintonia de controladores permite limitar a intensidade da influência de perturbações na saída do controlador.

Subsinal

O subsinal, ou *undershoot*, corresponde ao menor valor que a saída do sistema assume quando lhe é aplicada uma perturbação.

Juntamente com o sobressinal, a especificação do subsinal no procedimento de sintonia permite garantir que a saída do processo permaneça em determinada faixa de valores quando ocorram perturbações com as propriedades utilizadas na determinação da especificação.

Especificação de Rejeição de Outros Tipos de Perturbações

As especificações de rejeição de perturbações do tipo degrau podem ser generalizadas para outros tipos de perturbação. De maneira geral, pode-se especificar no domínio do tempo a rejeição de perturbações pelos índices descritos a seguir.

Tempo de Acomodação

A definição de tempo de acomodação, ou tempo de retorno, pode ser estendida a diferentes tipos de sinais, representando o tempo necessário para que a malha retorne ao estado estacionário quando é aplicado certo tipo de sinal a um tipo de perturbação.

Pode ser imposta à sintonia um tempo de acomodação geral, ou seja, qualquer que seja a perturbação, o sistema deve retornar ao estado estacionário após um tempo determinado.

Valores Máximo e Mínimo da Saída

Em geral, é desejável que a saída do sistema permaneça sempre dentro de determinada faixa de operação. Esta faixa pode ser utilizada como restrição de rejeição de perturbação, impondo-se que o controlador deva manter a saída dentro da faixa mesmo na presença de perturbações (o conjunto de perturbações que se especifica para serem rejeitadas geralmente é limitado em amplitude e frequência).

Erro de Estado Estacionário

Assim como é desejável que o sistema apresente erro de estado estacionário para acompanhamento de referências nulo ou baixo, é desejável que o erro de estado estacionário para perturbações também seja baixo ou nulo, ou seja, que o sistema retorne a um valor próximo à referência quando lhe é aplicada alguma perturbação.

O erro de estado estacionário pode ser definido de forma geral ou especificamente para alguns tipos de perturbação. Ou seja, pode-se determinar que a saída deva ficar próxima à referência com determinada precisão para qualquer perturbação e que, por exemplo, perturbações do tipo degrau sejam totalmente rejeitadas.

c. Especificações de Rejeição de Perturbações no Domínio da Frequência

Rejeição de perturbações pode ser especificada no domínio da frequência como requisitos de ganho da resposta em frequência do sistema em malha fechada.

Seja Ω_d um conjunto de frequências onde o sinal de perturbação $d(j\omega)$ possua a parte mais significativa de sua potência. A capacidade de rejeição deste sinal pelo sistema será tanto melhor quanto menor for o ganho de malha fechada do sistema controlado no conjunto Ω_d .

É importante notar que, no caso do acompanhamento de referências, a resposta em frequência a que se aplica a restrição é entre a referência e a saída da

planta, enquanto que no caso da rejeição de perturbações refere-se à resposta em frequência entre a perturbação e a saída.

Portanto, pode-se impor que:

$$|G_{MF_d}(j\omega)| \leq \alpha_d(\omega) \quad , \omega \in \Omega_d \quad (3.56)$$

onde $G_{MF_d}(j\omega)$ é a resposta em frequência que mapeia os efeitos da perturbação na saída do sistema em malha fechada e $\alpha_d(\omega)$ é uma função que determina os limites aceitáveis dos efeitos da perturbação tal que:

$$\frac{|y(j\omega)|}{|d(j\omega)|} \leq \alpha_d(\omega) \quad , \omega \in \Omega_r \quad (3.57)$$

Esta restrição pode ser aplicada a perturbações nos estados e nas saídas.

Pode-se também impor a restrição à resposta em frequência das perturbações na saída para o erro da forma (Cruz, 1996):

$$\left| \frac{1}{1 + G_p(j\omega) \cdot G_c(j\omega)} \right| \leq \alpha_d(\omega) \quad , \omega \in \Omega_d \quad (3.58)$$

onde $G_p(j\omega)$ é a resposta em frequência do processo, $G_c(j\omega)$ a resposta em frequência do controlador e $\alpha_d(\omega)$ é uma função que determina os limites aceitáveis de erro em função da perturbação na saída tal que (Cruz, 1996):

$$\frac{|e(j\omega)|}{|d(j\omega)|} \leq \alpha_d(\omega) \quad , \omega \in \Omega_d \quad (3.59)$$

3.3.4 Rejeição de Ruído de Medição

Por ruído de medição, refere-se a sinais aleatórios que interfiram na medição das variáveis do processo.

Na Figura 3-1, $n(t)$ corresponde ao ruído de medição. Diferentemente das perturbações nos estados e na saída, quando o sistema está em malha aberta, o ruído de medição não afeta o processo real diretamente, apenas as medições dele tomadas. Porém, quando há um controlador que utilize as medições das saídas do

processo para gerar entradas para o processo, controle em malha fechada, o ruído de medição passa a interferir nos estados reais do processo. Em geral, é desejável que esta interferência seja pequena, obtendo-se assim uma nova restrição de desempenho para sintonia de controladores.

Novamente, pode-se expressar a restrição sobre a rejeição de ruído de medição no domínio do tempo e no domínio da frequência.

a. Especificação de Rejeição de Ruído de Medição no Domínio do Tempo

No domínio do tempo, pode-se especificar a rejeição de ruído de medição impondo-se a faixa aceitável de variação da saída ou valor de variância ou valor de desvio padrão para a saída do processo na ausência de excitação e perturbações, mas com ruído de medição presente, ou seja:

$$\begin{cases} -\varepsilon_r \leq y(t) \leq +\varepsilon_r \\ Var(y(t)) \leq Var_{max} \\ \sigma(y(t)) \leq \sigma_{max} \end{cases}, r(t) \equiv cte, w(t) \equiv 0, z(t) \equiv 0, \forall t \quad (3.60)$$

onde $y(t)$ é a saída medida (simulada), ε o maior desvio aceitável do ponto de equilíbrio e Var_{max} e σ_{max} a maior variância e desvio padrão, respectivamente, aceitáveis para a saída na ausência de perturbações e excitações.

Esta especificação no domínio do tempo é particularmente útil para processos de sintonia em que o comportamento da planta em malha fechada seja simulado no domínio do tempo.

b. Especificação de Rejeição de Ruído de Medição no Domínio da Frequência

No domínio da frequência, seja Ω_n um conjunto de frequências onde o ruído de medição possua a parte mais significativa de sua potência, a rejeição de ruído de medição pode ser especificada como o módulo da resposta em frequência neste conjunto do sistema controlado em malha fechada, ou seja (Cruz, 1996):

$$\frac{|y(j\omega)|}{|n(j\omega)|} \leq \alpha_n(\omega) \quad , \omega \in \Omega_n \quad (3.61)$$

onde $\frac{|y(j\omega)|}{|n(j\omega)|}$ representa a função de transferência do ruído de medição para a saída do sistema em malha fechada e $\alpha_n(\omega)$ é a função que representa a transferência aceitável de potência do ruído para a saída real do sistema.

A especificação da rejeição do ruído de medição no domínio da frequência é bastante precisa e independente das condições de simulação da planta em um procedimento de sintonia de controladores, sendo apropriada sempre que disponível a resposta em frequência do sistema controlado.

3.3.5 Resposta em Frequência

No projeto de um controlador, é possível especificar-se algumas características desejáveis para a resposta em frequência do sistema controlado. Além das especificações no domínio da frequência já apresentadas, são também encontradas em algumas técnicas clássicas de projeto e sintonia de controladores especificações sobre a frequência de corte, a banda passante, a margem de ganho e a margem de fase do sistema.

São apresentadas a seguir cada uma destas propriedades.

a. **Frequência de Corte e Banda Passante**

A frequência ω_b na qual a amplitude da resposta em frequência de malha fechada é 3dB abaixo de seu valor na frequência zero é denominada frequência de canto ou frequência de corte (Ogata, 2003).

A frequência de corte de um sistema define sua banda passante, ou seja, a região de frequências em que os sinais aplicados à sua entrada são passados para a saída alterados apenas por um ganho.

b. Margem de Ganho

A margem de ganho de um sistema é definida como a máxima variação que se pode ter no ganho de malha aberta do sistema tal que o ganho da resposta em frequência na frequência em que a fase é de -180° não mude de direção.

c. Margem de Fase

A margem de fase de um sistema é o atraso de fase adicional, na frequência de cruzamento de ganho, necessária para que o sistema atinja o limiar de instabilidade. A frequência de cruzamento de ganho é a frequência na qual o módulo da função de transferência de malha aberta $|G(j\omega)|$ é unitário. A margem de fase é 180° mais o ângulo de fase ϕ da função de transferência na frequência de malha aberta de cruzamento de ganho (Ogata, 2003).

3.3.6 Restrições nos Estados

Os requisitos de desempenho apresentados foram tratados considerando apenas a saída do processo, ou seja, impõem-se restrições apenas ao comportamento da saída do processo. Em muitos casos, porém, é desejável que o comportamento dos estados obedeça a determinadas especificações. As restrições apresentadas podem então ser aplicadas também aos estados, sem necessidade de modificações.

Embora estados não medidos e não estimados não possam ser controlados diretamente pelo controlador, seu comportamento pode ser especificado e considerado no procedimento de sintonia.

3.3.7 Restrições Construtivas

Em aplicações reais, a implementação do controlador projetado para controlar o processo apresenta algumas limitações. As limitações tipicamente encontradas são:

- Implementação digital;
- Taxa de amostragem;
- Valores limites de parâmetros;
- Precisão de parâmetros.

Tais limitações devem ser consideradas no procedimento de sintonia através de restrições construtivas a fim de se obter uma sintonia que possa ser implementada sem necessidade de aproximações, o que pode causar um desvio do comportamento do controlador real em relação ao controlador projetado.

Essas restrições serão descritas a seguir.

a. *Implementação Digital*

Embora muitas técnicas de projeto de controladores sejam desenvolvidas em tempo contínuo, a implementação do controlador resultante tipicamente é digital, e sujeita a efeitos de discretização e quantização.

Estes efeitos devem ser considerados no processo de sintonia, pois, em geral, afetam de maneira significativa o comportamento do controlador. Isto pode ser feito de duas maneiras: inicialmente na realização contínua do controlador e então ajustando-se a sintonia para a realização discreta ou diretamente na realização digital do controlador.

O procedimento mais comumente adotado é a sintonia do controlador na realização contínua e então a conversão dos parâmetros para a realização discreta do controlador. O controlador digital é então testado e verifica-se se atende aos requisitos impostos inicialmente, realizando-se então os ajustes necessários à sintonia.

Esta abordagem indireta tem a vantagem de ser, em geral, mais simples de formular, porém o processo de adaptação dos parâmetros de sintonia pode demandar algum trabalho adicional. Em alguns casos, pode ser necessário formular um novo problema de sintonia com o controlador digital, utilizando-se a sintonia da realização contínua como condição inicial. O segundo problema de sintonia pode ser uma simplificação do primeiro, supondo-se que a nova sintonia não se distancie muito da sintonia inicial e preserve algumas de suas características, devendo a nova sintonia ser validada contra os requisitos originais.

A sintonia do controlador diretamente em sua versão digital consiste em formular e resolver o problema de sintonia considerando o controlador como será implementado no sistema real. Tem a vantagem de ser um método direto, fornecendo a sintonia pronta para ser utilizada no controlador final, porém pode requerer que algumas restrições sejam formuladas em tempo discreto.

Também é possível, com a utilização de ferramentas computacionais apropriadas, sintonizar o controlador utilizando sua realização digital com o modelo da planta em tempo contínuo e os requisitos também em tempo contínuo. Em geral, esta abordagem é a mais simples e também a mais versátil.

b. Taxa de Amostragem

A principal característica de controladores digitais é que operam em tempo discreto e a determinada taxa de amostragem.

Em alguns casos a taxa de amostragem é pré-determinada e não pode ser alterada, mas, em geral, pode-se configurar o controlador para operar a uma taxa de amostragem escolhida em um conjunto de valores possíveis definidos em um conjunto discreto fechado. Ou seja, a taxa de amostragem escolhida deve satisfazer:

$$T_{min} \leq T \leq T_{max} \quad (3.62)$$

$$T = N \cdot \varepsilon_T, \quad N \in \mathbb{Z}_+^* \quad (3.63)$$

onde T é a taxa de amostragem adotada para o controlador, T_{min} e T_{max} as taxas mínima e máxima permitidas, respectivamente, N um número inteiro positivo diferente de zero e ε_T a precisão suportada.

Comumente, utiliza-se uma alta taxa de amostragem para o controlador digital, de modo que seu comportamento seja próximo ao de seu equivalente analógico. Esta abordagem é válida, uma vez que a amostragem resulta em um aumento aparente do tempo morto da malha de aproximadamente metade do período de amostragem do controlador, ficando este valor desprezível quando o período de amostragem é baixo em relação ao tempo morto e às constantes de tempo da planta.

Entretanto, esta abordagem clássica tende a gerar controladores que operem a taxas muito maiores que o necessário para controlar satisfatoriamente o processo, de modo que uma melhor determinação das taxas de amostragem pode permitir a melhor alocação de recursos no sistema de controle, como a utilização de um único equipamento para controlar diversas malhas.

c. Valores Limites de Parâmetros

Na implementação de controladores, também pode ser limitado o conjunto de valores que os parâmetros de sintonia podem assumir, devendo isso ser considerado no processo de sintonia.

Embora dificilmente um parâmetro de sintonia assuma um valor limite (com exceção do valor zero), a consideração dos valores limite dos parâmetros limita o domínio da busca e pode reduzir o tempo de convergência do processo de sintonia.

Valores limites podem ser facilmente incluídos na formulação do problema de sintonia por:

$$K_{min} \leq K \leq K_{max} \quad (3.64)$$

onde K é o parâmetro a ser encontrado e K_{min} e K_{max} os limites mínimo e máximo, respectivamente, do parâmetro.

d. Precisão dos Parâmetros

Outra restrição típica da implementação digital de um controlador é a precisão finita de seus parâmetros. Esta restrição pode ser considerada através de:

$$K = N \cdot \varepsilon_K, N \in \mathbb{Z} \quad (3.65)$$

onde K é o parâmetro de sintonia, N um número inteiro e ε_K a precisão suportada para o parâmetro.

Embora esta restrição geralmente não afete muito o processo de sintonia, garante que seja gerado um resultado “pronto”, ou seja, que a sintonia obtida possa ser implementada diretamente, sem necessidade de aproximação dos valores dos parâmetros.

3.3.8 Esforço de Controle

Esforço de controle corresponde ao esforço realizado pelo controlador para manter a planta nas condições desejadas, sendo calculado por uma função da saída do controlador.

Em geral, o esforço de controle é limitado por características dos atuadores, ficando confinado a alguma faixa de valores, porém esta condição deve ser representada por fenômenos de saturação no modelo da planta, ou no modelo dos atuadores, não precisando sempre ser considerada na formulação do problema de sintonia.

Porém, pode ser desejável impor outras restrições ao esforço de controle, como, por exemplo, taxa máxima de variação. Estas condições podem ser obtidas pela estrutura do controlador, por exemplo, pela saturação da taxa de variação da saída, porém também podem ser impostas pela sintonia a fim de garanti-las em determinadas condições, sem a necessidade de adoção de uma estrutura mais complexa para o controlador.

Os requisitos de desempenho apresentados podem ser aplicados ao esforço de controle. O esforço de controle pode ser representado por alguns estados do

modelo da planta, que pode naturalmente contê-los ou pode ser estendido para tal, ou por uma função da saída do controlador.

3.3.9 Considerações Finais sobre Requisitos de Desempenho

Requisitos de desempenho são restrições que devem ser obedecidas pelo sistema controlado e permitem classificar controladores entre “bons” e “ruins”.

A inclusão de requisitos de desempenho como restrições ao problema de sintonia de controladores permite determinar uma sintonia “boa” ou então a necessidade da alteração dos requisitos ou da estrutura do controlador.

Caso exista uma solução para o problema e o procedimento de sintonia seja capaz de encontrá-la, a consideração das restrições garante que a solução encontrada atenda a todos os requisitos de desempenho determinados.

Caso não exista uma solução factível, o procedimento de sintonia permite determinar quais requisitos podem ou não ser atendidos, indicando quais restrições devem ser relaxadas ou que características devem ser buscadas em uma nova estrutura de controlador.

Abordaram-se nesta seção os principais requisitos de desempenho encontrados em problemas de controle, apresentando-se uma biblioteca de requisitos para a formulação de problemas de sintonia. Outros requisitos de desempenho também podem ser impostos ao problema seguindo as formulações propostas.

Alguns requisitos de desempenho podem também ser empregados como índices de desempenho de controladores para classificar, de forma relativa, diferentes estruturas e sintonias e também em procedimentos de sintonia ótima. Este assunto será tratado na seção 3.5.1.

3.4 Requisitos de Robustez

Robustez de um controlador é a capacidade do controlador de atender às especificações de estabilidade e desempenho na presença de incertezas de modelagem, ou seja, quando o modelo utilizado no projeto do controlador não corresponde exatamente ao processo real a ser controlado.

Uma sintonia é robusta quando o comportamento do sistema controlado atende às especificações de estabilidade e de robustez ainda que haja incertezas no modelo utilizado no procedimento de sintonia.

Requisitos de robustez são critérios considerados no procedimento de sintonia que visam à obtenção de uma sintonia robusta.

A consideração de requisitos de robustez no procedimento de sintonia torna-se ainda mais importante quando se busca uma sintonia ótima, pois técnicas de otimização pode levar o comportamento do sistema controlado a ao menos um limite imposto pelos requisitos de estabilidade e de desempenho, o que pode levar a restrição ativa a ser desobedecida pelo sistema controlado caso o modelo não seja exato.

Inicialmente são apresentadas representações de incertezas de modelos e sua utilização na simulação do processo. Abordam-se então requisitos de robustez da estabilidade e robustez de desempenho de controladores e o emprego de tais requisitos no procedimento de sintonia. Finalmente é proposto o conceito de robustez da otimalidade.

3.4.1 Representações de Incertezas de Modelagem

As diferenças entre um sistema real e seu modelo nominal correspondem às incertezas ou erros de modelagem deste modelo. A representação das incertezas é comumente referida como modelo de erro.

As incertezas podem ser estruturadas ou não estruturadas, podendo este segundo grupo ser separado entre incertezas aditivas e multiplicativas (Cruz, 1996).

Também é possível que se tenha múltiplos modelos para o processo, ou seja, modelos com estruturas ou parâmetros diferentes.

a. Incertezas Estruturadas

Incertezas estruturadas, ou incertezas paramétricas, são incertezas nos valores dos parâmetros do modelo nominal, ou seja, alguns (ou todos) parâmetros dos modelos podem assumir diferentes valores dentro de um conjunto definido.

Uma incerteza estruturada pode ser representada de algumas formas distintas:

$$\begin{cases} a \in [a_{\min} : a_{\max}] \\ a = a_{nom} \pm \Delta a, \Delta a \in [\Delta a_{\min} : \Delta a_{\max}] \\ a = a_{nom} \cdot \varepsilon_a, \varepsilon_a \in [\varepsilon_{a_{\min}} : \varepsilon_{a_{\max}}] \end{cases} \quad (3.66)$$

onde a é um parâmetro com incerteza, $a_{\min}$ e $a_{\max}$ os valores mínimo e máximo que a pode assumir, respectivamente; a_{nom} o valor nominal do parâmetro, Δa uma variação aditiva de a ; ε_a uma variação multiplicativa de a e $\varepsilon_{a_{\min}}$ e $\varepsilon_{a_{\max}}$ os valores mínimo e máximo, respectivamente, de ε_a .

A forma mais adequada para representar incertezas estruturadas depende do conhecimento que se tem sobre tal incerteza.

b. Incertezas Não Estruturadas

Incertezas não estruturadas correspondem a dinâmicas não modeladas do processo, podendo ser aditivas ou multiplicativas.

A incerteza aditiva de um modelo linear é descrita por (Cruz, 1996):

$$\varepsilon_A(s) = G_R(s) - G_N(s) \quad (3.67)$$

onde $\varepsilon_A(s)$ é a incerteza aditiva, $G_R(s)$ a planta real e $G_N(s)$ o modelo nominal da planta.

A incerteza multiplicativa de um modelo linear é uma medida relativa do erro de modelagem, descrita por (Cruz, 1996):

$$\varepsilon_M(s) = \frac{G_R(s) - G_N(s)}{G_N(s)} \quad (3.68)$$

onde $\varepsilon_M(s)$ é a incerteza multiplicativa do modelo.

c. *Múltiplos Modelos*

É possível que se tenha modelos com diferentes estruturas para um mesmo processo, cada um mais adequado com relação a determinada característica.

Nesse caso, todos os modelos escolhidos podem ser considerados na sintonia de um controlador. Isto pode ser realizado simulando-se o sistema em malha fechada diversas vezes, cada uma com um dos modelos considerados.

Uma forma alternativa de tratar o problema é encontrar uma estrutura capaz de representar as estruturas de todos os modelos considerados, traduzindo-se os múltiplos modelos em um único, na nova estrutura, com incertezas paramétricas.

A obtenção de múltiplos modelos ocorre, por exemplo, quando são utilizadas diferentes técnicas de identificação de sistemas para a obtenção dos modelos.

d. *Considerações Complementares sobre Representações de Incertezas de Modelos*

Para técnicas de sintonia de controladores que utilizem modelos do processo para simulação de seu comportamento dinâmico, incertezas não estruturadas são consideradas parte do modelo, enquanto incertezas estruturadas são consideradas como condições de simulação.

Incetezas não estruturadas podem ser incorporadas ao modelo nominal após uma sintonia inicial do controlador utilizando apenas o modelo nominal do processo. A sintonia inicial com um modelo simplificado permite uma aproximação da sintonia

desejada com menor custo computacional, fornecendo uma sintonia inicial para um refinamento utilizando um modelo mais completo.

Incertezas estruturadas podem ser consideradas diretamente na formulação inicial do problema de sintonia, ou utilizadas apenas no refinamento da sintonia inicialmente obtida apenas com um modelo nominal do processo.

A utilização de modelos com incertezas estruturadas para simulação do comportamento do sistema controlado é realizada por múltiplas simulações do modelo com diferentes valores dos parâmetros com incertezas. Em geral, é adequado adotar para os parâmetros seus valores nominal, mínimo e máximo e também valores aleatoriamente selecionados em uma simulação de Monte Carlo.

De maneira similar, quando se dispõe de múltiplos modelos para o processo, devem ser realizadas simulações com os diferentes modelos disponíveis. É possível também que estes modelos apresentem incertezas estruturadas, obtendo-se então um maior número de realizações para o modelo do processo. Nestes casos, para simplificar a representação, é recomendável a tradução dos múltiplos modelos em um único com estrutura mais complexa e com incertezas estruturadas.

3.4.2 Robustez da Estabilidade

Através da robustez da estabilidade, especifica-se que o sistema controlado deve ser estável mesmo que haja uma incerteza no modelo utilizado para a obtenção do controlador. Ou seja, os requisitos de estabilidade devem ser obedecidos para qualquer modelo admitido pelo modelo de erro.

Para obter-se a robustez da estabilidade, os requisitos de estabilidade devem ser testados para diferentes modelos e feitos os ajustes necessários no controlador. Para modelos com incertezas estruturadas, pode-se realizar a avaliação para os valores extremos dos parâmetros, ou então para uma distribuição uniforme dos parâmetros, ou ainda para uma escolha aleatória de parâmetros, ou uma combinação destas estratégias.

3.4.3 Robustez de Desempenho

De forma análoga à estabilidade, é desejável que os requisitos de desempenho impostos ao controlador sejam obedecidos por sua implementação real, mesmo que o modelo utilizado na sintonia apresente incertezas de modelagem.

Adotando-se o mesmo procedimento que sugerido para garantir a robustez da estabilidade, o sistema em malha fechada deve ser simulado com os diversos modelos admitidos e os parâmetros do controlador devem ser ajustados para garantir que os requisitos sejam obedecidos para todos os modelos testados.

3.4.4 Robustez da Otimalidade

Pode-se aplicar o conceito de robustez de desempenho a um desempenho otimizado em um problema de sintonia ótima, de forma a especificar que este desempenho deve se manter próximo a seu valor ótimo, mesmo na presença de incertezas de modelagem e esta aplicação do conceito chama-se robustez da otimalidade.

Define-se a robustez da otimalidade de uma sintonia como a manutenção do desempenho do controlador próximo ao seu desempenho ótimo, mesmo na ocorrência de incertezas no modelo empregado para a obtenção dos parâmetros de sintonia. Ou seja, havendo uma variação em um parâmetro do modelo, tanto melhor será a robustez da otimalidade da sintonia quanto menor for o desvio do desempenho do sistema de seu desempenho ótimo.

A Figura 3-2 apresenta este efeito de desvio do desempenho ótimo com uma variação em um parâmetro do modelo, onde Δ indica o erro no parâmetro do modelo, J um índice de desempenho qualquer e as curvas representam a variação do desempenho de duas sintonias com o erro do parâmetro.

Figura 3-2 – Robustez da otimalidade.

Observa-se na Figura 3-2 que uma sintonia apresenta um melhor (menor) valor para o índice de desempenho se o modelo estiver correto, mas este desempenho degrada rapidamente, enquanto que a segunda sintonia apresenta um desempenho inferior para pequenos erros, mas esse desempenho sofre uma degradação menor com o aumento do erro do parâmetro. Pode-se dizer que a primeira sintonia é melhor para o modelo nominal, porém a segunda sintonia possui melhor robustez da otimalidade.

No problema de sintonia de um controlador, a robustez da otimalidade pode ser considerada como restrição, ou seja, impõe-se um limite para a degradação do desempenho do sistema perante incertezas de modelagem, ou pode ser considerada como função objetivo, ou seja, busca-se uma sintonia cujo desempenho se mantenha o mais próximo possível do ótimo para um conjunto de modelos ou então próximo do ótimo com uma precisão desejada para o maior conjunto possível de modelos.

3.4.5 Considerações Finais sobre Requisitos de Robustez

Requisitos de robustez podem ser traduzidos de maneira bastante simples na sintonia de controladores, bastando considerar as incertezas do modelo do processo nas simulações de seu comportamento dinâmico.

A consideração das incertezas no procedimento de sintonia do controlador é importante para garantir que os requisitos impostos sejam obedecidos pelo sistema real em malha fechada.

É importante notar que a abordagem aqui sugerida é uma condição necessária para a robustez, porém não é uma condição suficiente para garanti-la. Mais confiável será o controlador obtido quão mais abrangentes forem os cenários simulados, ou seja, é necessário realizar um grande número de simulações, considerando diferentes modelos e condições, para se ter uma sintonia cuja robustez seja confiável. Em contrapartida, quão mais exato for o modelo de processo disponível, menos robusto precisará ser o desempenho e mais “livre” será sua sintonia, podendo, na maioria dos casos, obter-se uma sintonia de melhor desempenho.

Apesar dessa restrição com relação à representatividade das simulações, o procedimento sugerido é interessante para a sintonia de controladores cuja estrutura não garanta a robustez e as incertezas de modelagem sejam significativas, como por exemplo, para a sintonia de um controlador PID utilizando um modelo pouco exato, o que é bastante comum em aplicações práticas.

Para casos em que a robustez seja uma característica muito importante do controlador, é apropriado utilizar uma estrutura que garanta a robustez, como controladores LQG/LTR ou H_∞ . Nestes casos, a formulação do problema de sintonia de controladores abordada na dissertação também pode ser aplicada, porém a robustez será uma característica intrínseca da estrutura do controlador e não precisará ser incluída como restrição na sintonia.

Adicionalmente, é relevante citar que as robustez da estabilidade e de desempenho de controladores são tipicamente obtidas através de uma sintonia mais “suave” que a sintonia apropriada, ou seja, a fim de garantir a estabilidade e alguns

requisitos de desempenho como máximo sobressinal, o controlador é sintonizado para apresentar uma resposta “menos agressiva” para o modelo nominal.

Esse procedimento, comum a diversas estruturas de controladores, é satisfatório em algumas aplicações, porém, em geral, resulta em um desempenho abaixo do que poderia ser obtido por um procedimento que considere as incertezas de modelagem.

Isso decorre do fato de que a sensibilidade do comportamento do modelo de processo com relação a incertezas de modelagem é bastante dependente da estrutura do modelo e dos tipos e características das incertezas, ou seja, é possível que uma incerteza em um parâmetro, por exemplo, afete mais o comportamento dinâmico do sistema que a mesma incerteza em outro parâmetro do modelo.

Portanto, sintonias considerando uma sensibilidade do comportamento do modelo às incertezas de modelagem menor que a sensibilidade real resultam em controladores pouco robustos, enquanto que a consideração de uma sensibilidade maior que a sensibilidade real tende a resultar em controladores excessivamente conservadores, sendo possível a melhora de seu desempenho sem perda da robustez.

Deste modo, a consideração dos erros de modelagem na sintonia de um controlador é apropriada para gerar um controlador robusto e também para não limitar mais que o necessário o desempenho do sistema controlado.

3.5 Índices de Desempenho

Índices de desempenho de malhas de controle são indicadores da qualidade do comportamento da malha.

Através de um índice de desempenho é possível avaliar quantitativamente o desempenho da malha de controle e comparar diferentes controladores, ou diferentes sintonias, classificando-os.

Matematicamente, um índice de desempenho é uma função dos estados do sistema, de suas entradas e do tempo, definida por (Kirk, 1970):

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u_p(t), t) dt \quad (3.69)$$

onde t_0 e t_f são os instantes inicial e final da avaliação do índice de desempenho, respectivamente, $x(t_f)$ corresponde ao vetor de estados do sistema controlado no instante final da avaliação, $x(t)$ corresponde à evolução temporal dos estados do sistema durante a avaliação, $u_p(t)$ é o esforço de controle aplicado ao sistema durante a avaliação, t é a variável temporal e $h(\cdot)$ e $g(\cdot)$ são funções de desempenho. É importante notar que o valor ótimo de J pode variar de acordo com o conjunto de excitações, composto por sinais de referência e perturbações, aplicado ao sistema no intervalo de avaliação.

A equação (3.69) pode ser reescrita separando-se os estados do sistema entre estados do processo e estados do controlador e considerando como entrada um sinal de referência $r(t)$, resultando:

$$J = h(x_p(t_f), x_c(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x_p(t), x_c(t), r(t), t) dt \quad (3.70)$$

Um índice de desempenho análogo também pode ser definido em tempo discreto na forma geral descrita por:

$$J = h(x_p(t_f), x_c(t_f), t_f) + \sum_{t_0}^{t_f} g(x_p(t), x_c(t), r(t), t) \quad (3.71)$$

As equações (3.70) e (3.71) são representações genéricas dos índices de desempenho de malhas de controle em tempo contínuo e discreto, respectivamente. Estas equações podem ser integradas de modo a comportar termos em tempo contínuo e em tempo discreto na forma:

$$J = h(x_p(t_f), x_c(t_f), t_f) + \int_{t_{c0}}^{t_{cf}} g(x_p(t_c), x_c(t_c), r(t_c), t_c) dt_c + \sum_{t_{d0}}^{t_{df}} g(x_p(t_d), x_c(t_d), r(t_d), t_d) \quad (3.72)$$

onde t_c é a variável temporal contínua e t_d é a variável temporal discreta.

Embora a forma (3.72) não esteja definida em todo o domínio do tempo contínuo, é possível utilizá-la para análise de desempenho e sintonia ótima de controladores sem impedimentos, uma vez que, nestes casos, o índice J é uma grandeza escalar.

Um índice de desempenho pode ser utilizado para avaliar um controlador e também como função objetivo para a obtenção de controladores. Considerando-se que uma malha seja avaliada segundo um ou mais índices de desempenho, pode ser interessante que o controlador seja então projetado para otimizar tais índices empregando, por exemplo, a estratégia de otimização recursiva proposta na seção 2.3.2.

São apresentados nesta seção os principais índices de desempenho que poderão ser utilizados como funções objetivo para a obtenção de sintonias de controladores. Os índices de desempenho a seguir abordados podem ser agrupados nas seguintes categorias:

- Requisitos de desempenho;
- Requisitos de robustez;
- Índices de desempenho baseados na integral do erro;
- Velocidade de resposta;
- Esforço de controle;
- Índice do problema do regulador linear quadrático;
- Variabilidade;

- Variância;
- Índices baseados em desempenho ótimo;
- Índices de desempenho compostos;
- Custo de operação.

3.5.1 Requisitos de Desempenho como Índices de Desempenho

Os requisitos de desempenho e de robustez apresentados anteriormente podem ser aplicados como índices de desempenho para avaliação e também para sintonia de controladores.

A abordagem dos requisitos de desempenho e de robustez como restrições na sintonia de controladores é apropriada, pois, em geral, o comportamento do sistema controlado deve obedecer alguns limites estabelecidos. Porém, em muitos casos, pode ser desejável otimizar pelo menos uma das características do comportamento do sistema. Ou seja, impõe-se que diversas características devam obedecer a restrições, porém busca-se uma sintonia que otimize algumas delas.

Retomam-se a seguir os requisitos tratados anteriormente, abordando-se seu emprego como índices de desempenho.

a. *Resposta ao Degrau*

Como já mencionado, a resposta ao degrau é uma das principais formas de especificar e avaliar controladores. A partir dela é possível obter-se diretamente os seguintes índices:

- Tempo de subida;
- Tempo de acomodação;
- *Overshoot* ou sobressinal;
- *Undershoot* ou subsinal.

Estes índices podem ser utilizados como índices de desempenho, buscando-se a minimização de cada um, sendo 0 o valor mínimo de todos eles.

Em geral, a partir de certo desempenho crítico, a redução de um destes quatro índices implica no aumento de pelo menos um dos outros três, sendo importante que, qualquer que seja utilizado como índice de desempenho, todos estejam especificados como requisitos de desempenho.

b. Acompanhamento de Sinais de Referência

Geralmente, deseja-se que um sistema controlado apresente erro de estado estacionário nulo, porém isso nem sempre é possível. Quando este for o caso, é desejável que o erro de estado estacionário seja o mínimo possível, ou que seja limitado a certo limite.

A otimização da capacidade de acompanhamento de sinais de referência pode ser feita no domínio do tempo ou da frequência.

Otimização do Acompanhamento de Sinais de Referência no Domínio do Tempo

No domínio do tempo, aplica-se um sinal de referência ao controlador e observa-se o erro resultante, ou uma função do erro quando este não for constante, quando o sistema atinge o regime estacionário.

Os parâmetros de sintonia devem então ser variados de modo a minimizar este índice de erro.

É importante notar que, como o erro de estado estacionário é dependente do tipo de sinal empregado, a otimização deste índice torna o controlador bom para seguir o tipo de sinal escolhido, mas pode piorar seu desempenho para outros tipos de sinais. Esta polarização do desempenho do controlador pode ser ajustada impondo-se restrições ao erro de acompanhamento de sinais de referência para diversos sinais e escolhendo-se um tipo de sinal para ter o acompanhamento otimizado.

Otimização do Acompanhamento de Sinais de Referência no Domínio da Frequência

No domínio da frequência é possível melhorar a capacidade de acompanhamento de sinais de referência do controlador maximizando-se sua banda passante, ou seja, maximizando o conjunto Ω_r de frequências em que o ganho de malha fechada do sistema seja unitário.

É também possível buscar-se aproximar o máximo possível os ganhos da unidade num conjunto Ω_r de frequências de interesse.

Esta abordagem tende a aumentar a velocidade de resposta do sistema, porém pode resultar em um comportamento oscilatório devido à amplificação de ruídos de medição. É importante, portanto, impor uma restrição de rejeição de ruídos de medição à sintonia.

Outra característica desta segunda abordagem é a possibilidade de se obter um sistema com erro de regime estacionário, sendo interessante também impor uma restrição de acompanhamento de sinais de referência em baixas frequências.

Obtém-se neste segunda abordagem, portanto, uma formulação que busca maximizar a transferência do sistema mantendo-se erro de regime estacionário “baixo” ou nulo e “boa” rejeição de ruído de medição.

c. Rejeição de Perturbações

A rejeição de perturbações é, em alguns casos, a função principal do controlador. Para estes casos, é vantajoso sintonizar o controlador otimizando algum índice representativo de sua capacidade de rejeição de perturbações.

De forma análoga ao acompanhamento de sinais de referência, a rejeição de perturbações pode ser otimizada no domínio do tempo e no domínio da frequência.

Otimização da Rejeição de Perturbações no Domínio do Tempo

Alguns índices no domínio do tempo podem ser obtidos para a resposta do sistema controlado a perturbações e utilizados para sua sintonia. São eles, conforme apresentados anteriormente:

- Tempo de acomodação;
- Sobressinal ou *overshoot*;
- Subsinal ou *undershoot*;
- Erro de estado estacionário;
- Valores máximo e mínimo da saída.

É desejável que os quatro primeiros índices sejam minimizados, de forma a minimizar o efeito das perturbações no processo, e que os valores máximo e mínimo da saída se aproximem entre si e, de preferência, também se aproximem à referência da malha.

Otimização da Rejeição de Perturbações no Domínio da Frequência

No domínio da frequência, a rejeição de perturbações pode ser otimizada maximizando-se o conjunto Ω_d de frequências onde as perturbações são rejeitadas com a precisão desejada, ou então é possível minimizar os limites de transferência $\alpha_d(\omega)$ no conjunto de frequências de interesse.

d. Rejeição de Ruído de Medição

A rejeição de ruídos de medição pode ser otimizada minimizando-se a variância da saída do sistema controlado ou os ganhos de alta frequência de sua resposta em frequência.

Embora simples de expressar, este índice raramente é o mais importante a ser otimizado, permanecendo a rejeição de ruídos de medição como uma restrição para a sintonia do controlador.

e. *Taxa de Amostragem*

A taxa de amostragem de controladores digitais e de implementações digitais de controladores contínuos, embora restrita a um conjunto discreto, costuma ser um parâmetro a ser escolhido.

A utilização da maior taxa de amostragem possível permite obter um melhor desempenho do controlador segundo diversos critérios, porém é comum ter-se a necessidade de executar diversos controladores no mesmo sistema, sendo necessário deixar alguns controladores mais lentos para que seja possível implementar todos os controladores necessários com os recursos computacionais disponíveis. Outra possibilidade é a necessidade da especificação de um hardware para executar uma ou algumas malhas de controle, de modo que é desejável não comprar um sistema mais potente que o necessário, que também é, em geral, mais caro que um menos potente.

A taxa de amostragem de um controlador pode ser então encontrada maximizando-se o período de amostragem de modo a respeitar as restrições de estabilidade, desempenho e robustez impostas.

f. *Resposta em Frequência*

Em alguns casos, pode ser desejável otimizar algumas características da resposta em frequência de um sistema.

Pode-se buscar a maximização da banda passante do sistema a fim de se obter uma resposta mais rápida e uma melhor capacidade de acompanhamento de sinais de referência. Analogamente, pode-se desejar a minimização da banda passante de perturbações e ruídos para a saída do sistema.

Também é possível a maximização das margens de ganho e de fase do sistema a fim de melhorar sua robustez.

3.5.2 Requisitos de Robustez como Índices de Desempenho

Analogamente aos requisitos de desempenho, os requisitos de robustez também podem ser interpretados como índices da qualidade do controlador. Embora seja mais apropriado buscar um desempenho ótimo a uma máxima robustez, avaliar índices de robustez pode ser interessante para comparar sintonias ou estruturas de controladores diferentes com desempenhos similares e escolher aquele que seja mais robusto.

Apresenta-se a utilização da robustez da estabilidade, da robustez do desempenho e da robustez da otimalidade do controlador como índices de desempenho.

a. Robustez da Estabilidade

Pode-se avaliar a robustez da estabilidade de um controlador buscando-se o maior conjunto de modelos que o controlador é capaz de estabilizar.

Em geral, é interessante avaliar a manutenção da estabilidade perante a avaliação de alguns parâmetros principais do modelo, como ganho e constante de tempo.

Também se pode avaliar a manutenção da estabilidade perante o aumento de não linearidades, o que pode ocorrer quando a planta opera por um longo tempo sem manutenção.

b. Robustez do Desempenho

De forma análoga à robustez da estabilidade, a robustez do desempenho pode ser avaliada analisando-se o comportamento do desempenho do sistema perante variações do modelo.

Em geral, é preferível a obtenção de controladores cujo desempenho seja pouco sensível a variações na planta aos que apresentem um desempenho melhor para uma condição nominal, mas seu comportamento seja sensível a variações na

planta, ou seja, é interessante ter um controlador que apresente um desempenho “bom” para um grande conjunto de modelos admitidos que um controlador que apresente um desempenho ótimo para apenas um pequeno conjunto de modelos.

c. Robustez da Otimalidade

Da mesma forma que a robustez do desempenho, a robustez da otimalidade pode ser otimizada de modo a se buscar um controlador que esteja próximo ao ótimo para um maior conjunto de dinâmicas.

3.5.3 Índices de Desempenho Baseados na Integral do Erro

Uma forma clássica de avaliação de desempenho de malhas de controle em tempo contínuo é pelo cálculo de índices de desempenho baseados na integral do erro do sistema. Estes índices são descritos pela função geral:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} g(y_p(t) - r(t)) dt \quad (3.73)$$

onde $g(\cdot)$ é uma função da diferença entre a saída $y_p(t)$ da planta e da referência $r(t)$ aplicada ao sistema, ou do erro $e(t)$ resultante desta diferença, t_0 e t_f são, respectivamente, os instantes inicial e final do período de avaliação.

Quatro índices descritos na forma (3.73) são tipicamente aplicados para avaliar o desempenho de controladores. São eles:

- ISE – *Integrated Squared Error*;
- IAE – *Integrated Absolute Error*;
- ITSE – *Integrated Time Squared Error*;
- ITAE – *Integrated Time Absolute Error*.

A seguir são apresentadas as definições de cada índice e feitas algumas considerações sobre suas propriedades e sua aplicação.

a. *Integrated Squared Error – ISE*

O índice ISE, *Integrated Squared Error*, é definido como a integral dos erros quadráticos e calculado por:

$$ISE = \int_{t_0}^{t_f} e(t)^2 dt \quad (3.74)$$

b. *Integrated Absolute Error – IAE*

O índice IAE, *Integrated Absolute Error*, é definido como a integral dos erros absolutos e calculado por:

$$IAE = \int_{t_0}^{t_f} |e(t)| dt \quad (3.75)$$

c. *Integrated Time Squared Error – ITSE*

O índice ITSE, *Integrated Time Squared Error*, é definido como a integral dos erros quadráticos ponderados pelo tempo e calculado por:

$$ITSE = \int_{t_0}^{t_f} t \cdot e(t)^2 dt \quad (3.76)$$

d. *Integrated Time Absolute Error – ITAE*

O índice ITAE, *Integrated Time Absolute Error*, é definido como a integral dos erros absolutos ponderados pelo tempo e calculado por:

$$ITAE = \int_{t_0}^{t_f} t \cdot |e(t)| dt \quad (3.77)$$

e. *Considerações sobre Índices Baseados na Integral do Erro*

Os índices baseados na integral do erro são bastante empregados para avaliar o desempenho de controladores. Algumas técnicas de sintonia de controladores também buscam a otimização de tais índices.

A principal vantagem dos índices baseados na integral do erro é sua simplicidade de cálculo e os resultados obtidos poderem ser facilmente utilizados para comparar o desempenho de controladores.

Em contrapartida, estes índices são altamente sensíveis às condições de operação nas quais são calculados. Ou seja, tipo de excitação, presença de perturbações, presença de ruído de medição e a relação entre as potências de excitação, perturbação e ruído afetam significativamente o resultado, quantitativo e qualitativo, dos índices baseados na integral do erro.

Outra desvantagem de tais índices é que o resultado fornecido nem sempre tem um significado imediato, ou seja, nem sempre podem ser diretamente associados a uma característica ou custo de operação do processo.

3.5.4 Índices de Desempenho Baseados no Somatório do Erro

Os índices de desempenho baseados no somatório do erro são os análogos, para tempo discreto, aos índices baseados na integral do erro. Estes índices são descritos pela forma geral:

$$J = \sum_{t=t_0}^{t_f} g(y_p(t) - r(t)) \quad (3.78)$$

onde $g(\cdot)$ é uma função da saída $y_p(t)$ da planta e da referência $r(t)$ aplicada ao sistema e t_0 e t_f são, respectivamente, os instantes inicial e final do período de avaliação.

Dois índices descritos na forma (3.78) são tipicamente aplicados para avaliar o desempenho de controladores. São eles:

- SSE – *Summed Squared Error*,
- SAE – *Summed Absolute Error*.

a. Summed Squared Error – SSE

O índice SSE, *Summed Squared Error*, é definido como o somatório dos erros quadráticos e calculado por:

$$SSE = \sum_{t=t_0}^{t=t_f} e(t)^2 \quad (3.79)$$

b. Summed Absolute Error – SAE

O índice SAE, *Summed Absolute Error*, é definido como o somatório dos erros absolutos e calculado por:

$$SAE = \sum_{t=t_0}^{t=t_f} |e(t)| \quad (3.80)$$

c. Considerações sobre Índices Baseados no Somatório do Erro

Embora menos encontrados na literatura que seus correspondentes de tempo contínuo, os índices baseados no somatório do erro são os índices efetivamente utilizados para avaliar o desempenho de controladores a partir da evolução do erro no tempo, sendo empregados para estimar os correspondentes índices de tempo contínuo em sistemas cuja coleta de dados seja amostrada, o que corresponde a virtualmente todas as aplicações de controladores.

Assim como seus correspondentes de tempo contínuo, os índices baseados no somatório do erro têm as vantagens de serem simples de calcular e de fácil emprego para comparação entre controladores, porém as desvantagens de nem sempre terem um significado imediato e de seu resultado ser bastante sensível às condições de operação do processo no período de avaliação considerado.

3.5.5 Velocidade de Resposta

Uma propriedade comumente desejável de controladores é que seja o mais rápido possível, ou seja, que o sistema controlado seja levado para o estado desejado no menor tempo possível.

O índice de desempenho que pode ser utilizado para avaliar a velocidade de resposta de um controlador e também para obter uma sintonia rápida é definido como (Kirk, 1970):

$$J = \min \int_{t_0}^{t_f} dt = \min(t_f - t_0) \quad (3.81)$$

sujeito a: $x(t_f) = \bar{x}$

onde t_0 é o instante inicial do período de avaliação e t_f é o instante no qual o estado (total ou parcial) $x(t)$ da planta atinge o estado desejado $\bar{x}$.

Este índice de desempenho pode ser aplicado a sistemas de tempo contínuo e de tempo discreto.

De forma geral, a sintonia de um controlador buscando a maior velocidade de resposta possível pode ser expressa como um problema de otimização de tempo mínimo no qual se busca minimizar o índice (3.81).

É importante notar que o tempo mínimo depende das referências e perturbações aplicadas à planta no período de avaliação e que, conseqüentemente, a sintonia mais rápida possível obtida será sempre a mais rápida possível para o conjunto de excitações utilizado na sintonia, mas não necessariamente será a mais rápida possível para qualquer conjunto de excitações.

Caso o estado de referência seja definido apenas pelas saídas do processo, o índice torna-se o tempo de subida do sistema controlado, definido anteriormente. Ou seja, o índice indica o menor intervalo de tempo necessário para que as saídas do processo atinjam os valores de referência, porém é possível que as saídas oscilem em torno da referência após este instante.

Caso o estado de referência seja definido como um estado estacionário, então o índice torna-se o tempo de acomodação do sistema em malha fechada, como definido anteriormente. Neste caso, na ausência de novas perturbações, a saída da planta permanecerá nos valores de referência após o instante de tempo indicado pelo índice, porém o tempo necessário para que a saída atinja a referência pela primeira vez poderá ser maior que o período necessário quando se otimiza o tempo de subida.

Em geral, problemas de otimização de tempo mínimo, ou de sintonia de resposta mais rápida, resultam em elevados esforços de controle. Para evitar que o esforço de controle seja muito grande, ou mesmo não factível, é importante impor restrições ao esforço de controle gerado pela sintonia.

Além disso, a fim de evitar sobressinal e subsinal elevados, é interessante impor-se restrições a estas propriedades da resposta do processo, uma vez que sintonias rápidas tendem a ser “agressivas”, ou seja, tendem a gerar respostas com sobre ou subsinal de elevada amplitude.

Os fenômenos de esforço de controle elevado e da ocorrência de sobressinal, subsinal e oscilações estão relacionados, porém o controle de um pela imposição de restrições não garante o controle dos demais, sendo recomendável a imposição de restrições a todas estas características ao se buscar um controlador de resposta mais rápida possível.

3.5.6 Esforço de Controle

Esforço de controle, como definido anteriormente, corresponde ao esforço realizado pelo controlador para manter a planta nas condições desejadas, sendo calculado por uma função da saída do controlador.

De forma geral, o esforço de controle em tempo contínuo pode ser avaliado por um índice de desempenho descrito por:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} g(u_p(t), \bar{u}_p, t) dt \quad (3.82)$$

onde $g(\cdot)$ é uma função qualquer da saída $u_p(t)$ do controlador aplicada à planta e $\overline{u_p}$ é um conjunto de referência de saídas do controlador.

As referências das saídas $\overline{u_p}$ são utilizadas para tornar o argumento da integral incremental, mantendo o índice finito. Estas referências podem ser os valores nominais ou de estado estacionário da saída do controlador, o valor médio das saídas no intervalo avaliado ou 0.

Em tempo discreto, o índice (3.82) pode ser escrito como:

$$J = \sum_{t=t_0}^{t_f} g(u_p(t), \overline{u_p}, t) \quad (3.83)$$

Há três formas principais de avaliação do esforço de controle baseadas nas equações (3.82) e (3.83):

- Esforço de controle quadrático ou custo energético;
- Esforço de controle absoluto ou custo material;
- Desgaste de atuadores.

Índices baseados nestes conceitos são abordados a seguir.

a. Esforço de Controle Quadrático

O esforço de controle exercido por um controlador pode ser avaliado pelo seguinte índice de desempenho quadrático no domínio do tempo contínuo:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (u_p(t) - \overline{u_p})^2 dt \quad (3.84)$$

onde t_0 e t_f são, respectivamente, os instantes inicial e final do período de avaliação, u_p são as saídas do controlador injetadas na planta e $\overline{u_p}$ são as referências das saídas do controlador.

Em tempo discreto, o índice de desempenho torna-se:

$$J = \sum_{t=t_0}^{t_f} (u_p(t) - \overline{u_p})^2 \quad (3.85)$$

Por ser quadrático, este índice pode ser, em alguns casos, associado a alguma energia do sistema, representando um custo energético para controlar a planta em condições desejadas. Este índice pode ser encontrado na literatura nos problemas de controle ótimo de energia mínima (Kirk, 1970).

O índice também pode ser aplicado a modelos onde não seja possível associar uma energia a ele, porém, nestes casos, passa a ter valor apenas matemático, sem uma interpretação direta.

b. Esforço de Controle Absoluto

O esforço de controle exercido por um controlador pode ser avaliado pelo seguinte índice de desempenho no domínio do tempo contínuo:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} |u_p(t) - \overline{u_p}| dt \quad (3.86)$$

onde t_0 e t_f são, respectivamente, os instantes inicial e final do período de avaliação, u_p é o conjunto de saídas do controlador injetadas na planta, $\overline{u_p}$ é um conjunto referência de saídas do controlador.

Em tempo discreto, o índice de desempenho torna-se:

$$J = \sum_{t=t_0}^{t_f} |u_p(t) - \overline{u_p}| \quad (3.87)$$

O índice resultante pode ser associado, em alguns casos, a um gasto de material para controlar a planta em condições desejadas. Este índice pode ser encontrado na literatura nos problemas de controle ótimo de mínimo gasto de combustível (Kirk, 1970).

O índice também pode ser aplicado a modelos onde não seja possível associar um custo material, porém, nestes casos, passa a ter valor apenas matemático, sem uma interpretação direta.

c. *Desgaste de Atuadores*

Um atuador é um elemento da planta manipulado diretamente pelo controlador para controlar os estados da planta. Com o tempo, atuadores vão se desgastando devido a seu acionamento contínuo, o que implica em custos de manutenção e até mesmo em redução da qualidade do controle do sistema.

Pode ser interessante então a utilização de um controlador que não desgaste excessivamente os atuadores do sistema, ainda que haja uma pequena perda de desempenho do sistema em malha fechada.

Um controlador pode ser sintonizado de modo a minimizar o desgaste dos atuadores do sistema aplicando-se as equações (3.82) e (3.83) como índice de desempenho na sintonia e escolhendo-se uma função $g(\cdot)$ que quantifique bem o desgaste causado pelo acionamento dos atuadores. A escolha de uma função $g(\cdot)$ adequada depende do tipo de atuador utilizado, podendo ser baseada, por exemplo, no valor absoluto do esforço de controle, em suas derivadas, na oscilação da saída do controlador ou nas inversões de direção do esforço de controle, entre outras possibilidades.

d. *Considerações Finais sobre Esforço de Controle*

O esforço de controle é um índice importante de se observar e avaliar e, em muitas aplicações, de ser otimizado, uma vez que está diretamente associado ao custo de se manter o sistema nas condições desejadas.

É importante notar que, ao se buscar um controlador ou uma sintonia para um controlador que minimize o esforço de controle, devem-se incluir restrições de desempenho adequadas, especificando-se, por exemplo, tempo de acomodação e erro de estado estacionário. Tais restrições devem ser impostas porque o menor esforço de controle possível para um processo qualquer será geralmente obtido mantendo-se as saídas do controlador nulas ou iguais a uma referência, ou seja, o menor esforço de controle é obtido quando o controlador não atua no processo.

A otimização do esforço de controle é adequada especialmente quando se tem uma especificação de desempenho a ser seguida, porém um desempenho melhor que o especificado não traz ganhos significativos ao processo. Neste caso, é interessante buscar uma sintonia que resulte no menor custo possível para manter a planta nas condições especificadas.

3.5.7 Índice do Problema do Regulador Linear Quadrático

Ao se buscar um controlador ótimo, deseja-se muitas vezes maximizar o desempenho do sistema e minimizar o esforço de controle. Um índice de desempenho clássico que avalia estas duas grandezas é o índice do problema do regulador linear quadrático, definido por (Kirk, 1970):

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) H x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T R(t) u(t)] dt \quad (3.88)$$

onde t_0 e t_f são, respectivamente, os instantes inicial e final do período de avaliação, $x(t)$ é o estado do processo no instante t , H e Q são matrizes reais semi-definidas positivas simétricas e R é uma matriz real definida positiva simétrica.

Em tempo discreto, o índice de desempenho pode ser reescrito como:

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) H x(t_f) + \sum_{t=t_0}^{t_f} \frac{1}{2} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T R(t) u(t)] \quad (3.89)$$

É importante notar que as formas (3.88) e (3.89) levam os estados do sistema à origem, porém podem ser facilmente reescritas para casos onde o estado estacionário desejado não seja a origem realizando-se uma mudança de variáveis.

Este índice de desempenho apresenta a vantagem de avaliar, de maneira simples, a evolução dos estados (ou das saídas) do sistema, o esforço de controle e também o estado estacionário (ou erro de estado estacionário), porém é necessário escolher-se uma ponderação adequada para estas grandezas através das matrizes H , Q e R .

Outra característica deste índice de desempenho é que sua solução analítica ou numérica é simples para modelos lineares, razão pela qual é empregado como

função objetivo em alguns controladores, caso em que as matrizes de ponderação tornam-se parâmetros de sintonia deste controlador.

3.5.8 Variabilidade

A variabilidade de uma variável qualquer é uma relação entre seu desvio padrão e seu ponto ou região de operação, ou seja, a variabilidade pode ser considerada uma normalização da variância de uma variável de modo a permitir a comparação da sua dispersão em diferentes condições, seja em diferentes condições de operação ou com diferentes controladores atuando para controlá-la.

Do ponto de vista prático, *a variabilidade da malha reflete o quão próxima a variável de processo está da sua referência, independentemente de perturbações aleatórias. Ela é, portanto, uma medida estatística da dispersão desta variável controlada com respeito ao seu valor de referência* (Campos; Teixeira, 2010).

A variabilidade de uma variável de controle pode ser calculada com relação à sua média, ou ao valor de referência, se for fixo, segundo (Campos; Teixeira, 2010):

$$V = \frac{2 \cdot \delta}{\mu} \cdot 100\% \quad (3.90)$$

onde δ é o desvio padrão do erro no período de avaliação e μ é a média ou o valor de referência médio da variável no mesmo período.

Alternativamente, a variabilidade pode ser calculada com relação a uma faixa de valores aceitáveis para a variável, segundo (Campos; Teixeira, 2010):

$$V = \frac{2 \cdot \delta}{Range} \cdot 100\% \quad (3.91)$$

onde *Range* é a amplitude da faixa de valores aceitáveis para a variável controlada.

A variabilidade é uma boa medida do efeito de perturbações e não-linearidades no comportamento do sistema em malha fechada, sendo seu uso como índice de desempenho a ser otimizado adequado para sintonia de controladores que

atuem majoritariamente em modo regulatório, ou seja, com valor de referência fixo, e em processos em que o efeito de perturbações seja significativo.

Como muitos outros índices de desempenho, a variabilidade é dependente da condição de operação da planta, ou seja, dos valores de referência, das perturbações e dos ruídos presentes no intervalo de tempo em que foi calculada.

3.5.9 Variância

Um controlador de variância mínima é aquele que faz com que as variáveis controladas apresentem a mínima variância possível (Aström, 1970).

O índice de Harris é uma forma clássica de avaliação de controladores, indicando quão próximo estão as variâncias das variáveis controladas de suas variâncias mínimas, ou seja, indica quão próximo o comportamento de um controlador está do comportamento de um controlador de variância mínima.

O índice de Harris é definido por (Desborough; Harris, 1992):

$$\xi = \frac{\sigma_y^2 + \mu_y^2}{\sigma_{mv}^2} \quad (3.92)$$

onde $\xi(b)$ é o índice obtido, b é o tempo morto da variável, σ_y^2 é a variância da variável y avaliada, μ_y é o desvio médio da referência e σ_{mv}^2 é a mínima variância alcançável para a variável controlada.

O índice (3.92) é sempre maior que 1 e não possui limite superior, sendo valores menores melhores (Desborough; Harris, 1992).

O índice (3.92) pode ser alterado para ficar normalizado entre 0 e 1, assumindo a forma (Desborough; Harris, 1992):

$$\eta = 1 - \frac{\sigma_{mv}^2}{\sigma_y^2 + \mu_y^2} \quad (3.93)$$

onde $\eta(b)$ é o índice normalizado obtido.

A variância e o desvio médio da variável avaliada podem ser facilmente calculados, porém a estimação da mínima variância alcançável exige alguns cálculos adicionais. Algumas formas para a obtenção da variância mínima são apresentadas em (Harris, 1989), (Desborough; Harris, 1992) e (Harris, 1993). Uma forma de obtenção da mínima variância é através de (Desborough; Harris, 1992):

$$\sigma_{mv}^2 = Var(e_t) \quad (3.94)$$

onde e_t é o erro de predição b -passos à frente do modelo de perturbação, obtido por (Desborough; Harris, 1992):

$$e_t = Y_t - \mu_Y - \hat{y}_t \quad (3.95)$$

onde Y_t é a variável medida do processo num instante t , μ_Y é a média da variável medida e $\hat{y}_t$ é a predição b -passos à frente do modelo de perturbação identificado com os dados referentes a Y_t .

O índice de Harris permite não apenas comparar a variância de uma variável controlada por diferentes controladores, mas também permite avaliar, de maneira subjetiva, a redução que pode ser conseguida na variância se for alterada a sintonia ou a estrutura do controlador.

Da mesma forma que a variabilidade, o índice de Harris é apropriado para avaliação e sintonia de controladores que operem no modo regulatório, ou seja, que atuem para rejeitar perturbações em um processo.

É importante citar que a otimização do índice de Harris, ou seja, que a obtenção de um controlador que minimize a variância das saídas do processo, tende a gerar um controlador que aplique um intenso esforço de controle no processo e que responda rapidamente, de modo que é recomendável a imposição de restrições sobre a resposta ao degrau e o esforço de controle do controlador.

Apesar de desenvolvido inicialmente para ser aplicado às saídas do processo, o índice de Harris pode ser aplicado também a estados do processo ou a saídas do controlador, sem necessidade de alterações no seu cálculo além da substituição da variável sobre a qual é efetuado.

3.5.10 Índices Baseados em Desempenho Ótimo

Em algumas aplicações, deseja-se otimizar determinada característica de um sistema controlado e tem-se o conhecimento do melhor desempenho alcançável para tal característica.

Porém, este desempenho ótimo pode ser alcançável apenas por um controlador que não seja implementável, por um controlador que imponha outras características não desejáveis ao sistema, ou pode-se nem mesmo se dispor de um controlador que seja capaz de gerar tal comportamento, sendo o comportamento apenas teórico.

Pode-se então sintonizar um controlador que seja factível e comparar seu desempenho com o controlador de referência utilizando o seguinte índice de desempenho:

$$R = \left(\frac{J_{Ref}}{J_C} \right)^d \quad (3.96)$$

onde R é o índice de desempenho relativo obtido, J_{Ref} é o desempenho de referência, J_C é o desempenho do controlador avaliado e d é um parâmetro de ajuste que pode assumir os valores 1 ou -1.

A sintonia de um controlador otimizando este índice de desempenho relativo permite aproximar o seu desempenho de um valor de referência, assim como fornece a informação de quão próximo ou distante se está do desempenho ótimo do sistema, segundo o critério de desempenho escolhido.

3.5.11 Índices de Desempenho Compostos

Os índices de desempenho apresentados, a menos do índice do regulador linear quadrático, avaliam uma única característica do comportamento de uma planta, porém pode ser desejável compor um índice que avalie mais de uma característica do sistema controlado.

A forma clássica de construção de um índice de desempenho que avalie mais de uma dimensão do comportamento do sistema é através do cálculo de uma média ponderada dos índices de desempenho parciais considerados.

Um índice composto pela média aritmética ponderada de índices parciais é construído da seguinte forma:

$$J = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot J_i(x(t), u_p(t), t) \quad (3.97)$$

onde J é o índice composto, α_i são valores de ponderação dos índices parciais $J_i(\cdot)$, $x(t)$ é o vetor de estados do sistema, $u_p(t)$ os sinais aplicados à planta pelo controlador e t o tempo.

O índice do problema do regulador linear quadrático é um exemplo de índice composto que agrega erro e esforço de controle quadráticos através de uma média aritmética ponderada.

Os índices parciais podem ser de tempo discreto ou contínuo, e não necessitam serem todos do mesmo tipo caso o índice composto seja computado para um período de tempo.

A principal dificuldade da construção de índices compostos é a escolha dos parâmetros de ponderação, que muito influenciam no resultado do índice e pode ser encarado como um problema de sintonia por si só. A seção seguinte apresenta uma possível abordagem para escolha dos parâmetros de ponderação.

3.5.12 Custo de Operação

Na maioria das aplicações de otimização em sistemas de controle deseja-se minimizar um custo de operação do sistema controlado, ou maximizar o lucro por ele gerado.

Apresentam-se então como bons índices de desempenho para a avaliação do desempenho de malhas de controle e também para a sintonia de controladores

aqueles que quantifiquem os custos de operação do sistema em unidades monetárias.

Um índice de desempenho pode ser então definido segundo a forma (3.72), ou então se pode utilizar uma ponderação de índices na forma (3.97).

A utilização de uma função na forma (3.72) que avalie o custo de operação do sistema é interessante para avaliar o desempenho da malha e por representar diretamente o objetivo final da otimização. Entretanto, a obtenção de uma função que quantifique o custo de operação de um processo qualquer, principalmente de sistemas multimalhas, pode não ser fácil, exigindo-se a consideração de um número elevado de características.

Pode-se então utilizar uma avaliação aproximada do custo de produção, o que pode ser conseguido através da utilização de um índice composto na forma (3.97) de modo que os parâmetros de ponderação sejam tais que o índice composto obtido esteja em uma unidade monetária.

Esta segunda abordagem é menos precisa que a construção direta do índice de desempenho, porém é mais simples de ser empregada, sendo possível a utilização de índices clássicos de desempenho.

3.5.13 Observações sobre Índices de Desempenho de Tempo Discreto

Uma característica particular dos índices calculados em tempo discreto é que seu valor é dependente da taxa de amostragem utilizada, não sendo possível comparar diretamente índices calculados com dados coletados em diferentes taxas de amostragem. É recomendável, portanto, normalizar os índices para uma taxa de amostragem de referência, geralmente a menor taxa de amostragem dos dados ou 1.

Um fenômeno particular dos índices calculados com dados de tempo discreto é o mascaramento de desempenhos ruins devido ao uso de uma taxa de amostragem baixa na coleta dos dados utilizados para o cálculo do índice. Este

fenômeno é bastante frequente quando é avaliado o desempenho de controladores que operam a baixas taxas de amostragem sobre controladores mais rápidos, que agem diretamente sobre o processo, como um MPC enviando referências a um PID.

O exemplo a seguir demonstra os dois efeitos mencionados.

a. Exemplo do Efeito da Taxa de Amostragem em Índices de Desempenho de Tempo Discreto

Considera-se um sistema controlado (planta com controlador em malha fechada) descrito pela seguinte função de transferência em tempo contínuo:

$$G_{MF}(s) = \frac{1}{s^2 + 0,2 \cdot s + 1,01} \quad (3.98)$$

Sobre este sistema é colocado um controlador que atua enviando um novo valor de referência para o controlador regulatório (incluso no modelo) a cada 60 segundos, de acordo com o diagrama exibido na Figura 3-3.

Figura 3-3 – Arquitetura de Controle

Deseja-se avaliar o desempenho do sistema completo quando há uma mudança no valor de referência enviado para a malha regulatória. Para tal, calculam-se os índices SSE e SAE da resposta do processo.

A Figura 3-4 apresenta o registro do valor de referência, da resposta real do processo e de uma possível resposta vista pelo controlador da segunda camada.

Figura 3-4 – Efeito da taxa de amostragem em índices de desempenho

Como se pode observar, o sistema (Comportamento Real) responde de maneira bastante oscilatória a um degrau aplicado pelo controlador da segunda camada (Valor de Referência), mas atinge o estado estacionário antes da próxima atuação do controlador, de modo que este controlador não enxerga as oscilações (Dados Coletados), podendo mesmo perceber uma resposta superamortecida do sistema (Comportamento Aparente).

A Tabela 3-3 apresenta os índices SSE e SAE calculados para as respostas observadas, assim como suas versões normalizadas pela taxa de amostragem dos dados utilizados no cálculo.

Tabela 3-3 – Índices de desempenho para o sistema (3.98)

		Comportamento Real	Comportamento Discreto	Comportamento Contínuo Aparente
SSE	Original	26,1	1,0	44,5
	Normalizado	2,6	60,0	4,5
SAE	Original	71,3	1,0	89,5
	Normalizado	7,1	61,0	9,0

O primeiro fenômeno observado é a alta dependência dos índices em relação à taxa de amostragem utilizada, como era de se esperar. Reitera-se, portanto, a importância da normalização dos índices de desempenho em tempo discreto pela taxa de amostragem, a fim de tornar possível a comparação entre o mesmo índice calculado para sinais com diferentes taxas de amostragem.

O segundo fenômeno observado é a grande diferença entre os índices “reais” e os índices calculados para os dados coletados à taxa do controlador da segunda camada e também para o comportamento aparente visto por este controlador.

Como mencionado anteriormente, o correto seria a utilização dos índices normalizados calculados sobre o comportamento real do processo para avaliar o desempenho da malha regulatória e também do controlador da segunda camada.

Da mesma forma, ainda que o controlador da segunda camada atue a cada 60 segundos, deve-se sintonizá-lo considerando-se o comportamento real do sistema e não apenas o comportamento observado pelo controlador a cada 60 segundos.

3.5.14 Considerações Finais sobre Índices de Desempenho

Foram apresentados os principais índices de desempenho utilizados para avaliar o desempenho de malhas de controle, sugerindo-se sua utilização como função objetivo no problema de sintonia ótima de controladores.

A escolha dos índices de desempenho a serem utilizados em uma avaliação de desempenho ou para a sintonia de controladores é uma decisão de projeto, devendo-se buscar os índices que melhor representem o que se deseja do comportamento do sistema controlado.

Quando se busca uma sintonia que otimize um índice de desempenho, ou um conjunto de índices, é importante a consideração de requisitos de estabilidade e de desempenho, uma vez que a otimização tende a levar o comportamento do sistema a extremos.

É igualmente importante a consideração de requisitos de robustez, pois, devido a esta característica de obtenção de comportamentos extremos, a consideração apenas do modelo nominal no processo de sintonia pode gerar controladores pouco robustos. Conforme apresentado na seção de robustez de desempenho, uma alternativa à consideração de modelos com incerteza é a imposição de restrições conservadoras, embora a primeira opção seja preferível.

É também relevante notar que o valor ótimo de cada índice de desempenho e, conseqüentemente, a sintonia ótima correspondente, depende, em geral, do conjunto de excitações aplicadas ao sistema, composto por sinais de referência, perturbações e ruídos. Portanto, ao ser utilizado um modelo para simulação no processo de obtenção de sintonia para um controlador, a sintonia resultante dependerá dos cenários de simulação empregados no processo, devendo-se especificá-los adequadamente, ou seja, de acordo com as condições nas quais se deseja que o controlador opere de determinada maneira.

4 Exemplos de Aplicações de Sintonia Ótima de Controladores

Formulado o problema de sintonia ótima e apresentados os elementos que podem ser empregados para especificar o desempenho de um controlador, segue-se agora se apresentando alguns exemplos de aplicação da abordagem proposta.

Dentre as diversas estruturas de controlador disponíveis escolhe-se três, PID, LQG/LTR e MPC, para demonstração de aplicações da técnica. Para cada estrutura selecionada é feita uma breve descrição de suas características e são apresentados exemplos focando em diferentes aspectos do problema de sintonia.

4.1 Sintonia de PID

Sintonia de controladores PID é a aplicação mais comum de sintonia de controladores, havendo diversos trabalhos sobre o assunto, como (Ziegler; Nichols, 1942), (Chien; Hrones; Reswick, 1952), (Cohen; Coon, 1953), (Aström; Hägglund, 1984) e (Rivera; Morari; Skogestad, 1986) propondo técnicas de sintonia por cálculo direto e (Campos; Teixeira, 2010) apresentando aplicações práticas de sintonia de PID.

Conforme será exibido adiante, a sintonia de PID consiste na busca de ganhos e outros parâmetros auxiliares que resultem em um bom comportamento do sistema controlado.

É apresentada uma breve descrição da estrutura de controladores PID, realizando-se considerações sobre sua sintonia e, em seguida, são apresentados quatro exemplos: dois casos de sintonia simples para estruturas típicas de modelos, um caso de sintonia robusta e um estudo de caso mais extenso para um benchmark selecionado.

4.1.1 Controlador PID

A estrutura de um controlador PID clássico é:

$$u(t) = K_P \cdot e(t) + K_I \cdot \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + K_D \cdot \frac{d}{dt} e(t) \quad (4.1)$$

onde $u(t)$ é a ação de controle gerada, $e(t)$ é o erro entre a variável controlada e a referência e K_P , K_I e K_D são, respectivamente, os ganhos proporcional, integrativo e derivativo do controlador.

A ação de controle gerada é uma função do erro, da integral do erro e da derivada do erro, cada termo ponderado por um ganho independente.

Em tempo discreto o controlador PID é representado por::

$$u(t) = K_P \cdot e(t) + K_I \cdot \sum_{i=1}^t e(i) \cdot \Delta t + K_D \cdot \frac{e(t) - e(t-1)}{\Delta t} \quad (4.2)$$

Para as duas realizações, em tempo contínuo e discreto, o termo derivativo pode ser implementado de diferentes formas, assim como pode-se ter termos adicionais para melhorar alguma característica do controlador, como compensação da saturação da saída.

Os exemplos apresentados a seguir seguem essas duas implementações clássicas de controladores PID, uma vez que sua estrutura básica é encontrada em praticamente todas as implementações mais complexas.

4.1.2 Exemplo: Sintonia de Controlador PID para Sistema Linear de Primeira Ordem com Tempo Morto

Seja um sistema linear de tempo contínuo e invariante no tempo modelado por:

$$G(s) = \frac{5 \cdot e^{-0,8 \cdot s}}{2 \cdot s + 1} \quad (4.3)$$

Determina-se que o sistema deve ser controlado por um controlador PI de tempo discreto. A sintonia do controlador deve ser tal que:

- Quanto à estabilidade:
 - O deve ser estável sistema em malha fechada.
- Quanto ao controlador PI:
 - Deve ser implementável digitalmente;
 - A taxa de amostragem, T , deve estar entre 0,1 e 1 e ser múltipla de 0,05;
 - Os parâmetros de sintonia, K_P e K_I , devem estar entre 0 e 100;
- Quanto ao esforço de controle, u_p :
 - Deve ser sempre de módulo menor ou igual a 1.
- Quanto à resposta ao degrau do sistema em malha fechada:
 - Deve apresentar tempo de subida, t_r , menor ou igual a 5;
 - Deve apresentar sobressinal, M_p , menor ou igual a 20%;
 - Deve apresentar tempo de acomodação, t_s , menor ou igual a 10.

A representação do sistema em malha fechada na forma de diagrama de blocos é exibida na Figura 4-1.

Figura 4-1 – Diagrama de blocos do sistema em malha fechada

a. *Sintonia Clássica*

Sintoniza-se o controlador PI utilizando o método de sintonia CHR (Chien; Hrones; Reswick, 1952) para controlador servo com máximo sobressinal de 20%, dada por:

$$K_P = \frac{0,6 \cdot \tau}{K \cdot \theta} \quad (4.4)$$

$$T_I = \tau \quad (4.5)$$

$$K_I = \frac{K_P}{T_I} \quad (4.6)$$

Do modelo do processo, obtém-se:

$$\begin{cases} K = 5 \\ \tau = 2 \\ \theta = 0,8 \end{cases}$$

Aplicando o método CHR, resulta em:

$$\begin{cases} K_P = 0,3 \\ K_I = 0,15 \end{cases}$$

b. Sintonia Ótima

Escreve-se então o problema de sintonia na formulação proposta. Como função objetivo do problema de otimização adota-se a maximização do intervalo de amostragem do controlador, ou seja, busca-se o controlador mais lento que atenda às especificações.

O problema fica então formulado como:

$$\max_{\{K_P, K_I, T\}} T \quad (4.7)$$

sujeito a:

$$Y_p(s) = \frac{5 \cdot e^{-0,8 \cdot s}}{2 \cdot s + 1} \cdot U_p(s) \quad (4.8)$$

$$U_p(s) = \mathcal{L}\{u_p(t)\} \quad (4.9)$$

$$u_p(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_c(z)\} \quad (4.10)$$

$$y_p(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_p(s)\} \quad (4.11)$$

$$Y_c(z) = \left(K_P + K_I \cdot \frac{1}{z - 1} \right) \cdot U_c(z) \quad (4.12)$$

$$U_c(z) = \mathcal{Z}\{u_c(t), T\} \quad (4.13)$$

$$u_c(t) = r(t) - y_p(t) \quad (4.14)$$

$$-1 \leq u_p(t) \leq 1 \quad (4.15)$$

$$t_r(y_p(t)) \leq 5 \quad (4.16)$$

$$M_p(y_p(t)) \leq 1,2 \cdot r(\infty) \quad (4.17)$$

$$t_s(y_p(t)) \leq 10 \quad (4.18)$$

$$r(t) = H(t) \quad (4.19)$$

$$T = T_N \cdot 0,05 \quad (4.20)$$

$$T_N \in [2 : 20] \quad (4.21)$$

$$K_p \in [0 : 100] \quad (4.22)$$

$$K_I \in [0 : 100] \quad (4.23)$$

onde a equação (4.7) é a função objetivo otimizada, a maximização do intervalo de amostragem do controlador, as equações (4.8) a (4.11) correspondem ao modelo do processo, as equações (4.12) a (4.14) correspondem ao modelo do controlador, (4.15) a (4.18) representam as restrições de desempenho impostas ao problema, (4.19) define o cenário no qual a função objetivo e as restrições são avaliadas, a resposta ao degrau, e (4.20) a (4.23) definem o domínio das variáveis do problema.

Resolvendo o problema de otimização, obtêm-se os parâmetros de sintonia do controlador:

$$S = \begin{cases} K_p = 0,1661 \\ K_I = 0,0816 \\ T = 1 \end{cases}$$

c. *Teste das Sintonias Obtidas*

Testa-se as sintonias obtidas aplicando-se um degrau à referência do controlador com as duas sintonias. Para a sintonia obtida por cálculo direto, utiliza-se a menor e a maior taxa de amostragem permitida.

A Figura 4-2 apresenta a resposta do processo com as três configurações do controlador PI.

Figura 4-2 – Respostas do processo com os controladores obtidos

Pode-se observar que a sintonia obtida pelo método de cálculo direto CHR atende às especificações quando utilizada com taxa de amostragem de 0,1, porém este comportamento não é mantido se é utilizado 1 como taxa de amostragem, caso em que as restrições de sobressinal máximo e tempo de acomodação são violadas.

A sintonia ótima obtida atende às especificações mesmo com intervalo de amostragem no limite máximo, de valor 1.

Observa-se ainda que a sintonia CHR gera uma resposta com menor tempo de subida, porém com maior esforço de controle que a sintonia obtida por otimização.

4.1.3 Exemplo: Sintonia de Controlador PID para Sistema Linear de Primeira Ordem com Tempo Morto e Polo Integrador

Seja agora um sistema linear de tempo contínuo e invariante no tempo com polo integrador modelado por:

$$G(s) = \frac{0,8 \cdot e^{-0,5 \cdot s}}{s^2 + s}$$

Determina-se que o sistema deve ser controlado por um controlador PI de tempo discreto. A sintonia do controlador deve ser tal que:

- Quanto à estabilidade:
 - O sistema deve ser estável em malha fechada.
- Quanto ao controlador PI:
 - Deve ser implementável digitalmente;
 - O período de amostragem, T , deve estar entre 0,1 e 1;
 - O período de amostragem, T , deve ser múltiplo de 0,05;
 - O ganho proporcional, K_P , deve estar entre 0 e 100;
 - O ganho integral, K_I , deve estar entre 0 e 100;
- Quanto ao esforço de controle, u_p :
 - Deve ser sempre de módulo menor ou igual a 1.
- Quanto à resposta ao degrau do sistema em malha fechada:
 - Deve apresentar tempo de subida, t_r , menor ou igual a 10;
 - Deve apresentar sobressinal, M_p , menor ou igual a 10%;
 - Deve apresentar tempo de acomodação, t_s , menor ou igual a 20.

Obtém-se sintonias para o sistema empregando uma técnica clássica e o procedimento de sintonia ótima proposto.

a. **Sintonia Clássica**

Como primeira alternativa e para comparação, a malha é sintonizada utilizando a técnica clássica de sintonia em malha fechada por oscilações contínuas, proposta por Ziegler e Nichols.

Para o período de amostragem do controlador, utiliza-se o máximo valor permitido, 0,1 unidades de tempo, uma vez que o método de sintonia prevê que o controlador opere em tempo contínuo, ou o mais próximo possível disto.

Desabilitando o modo integral do controlador e aumentando seu ganho proporcional até a observação de oscilações contínuas (sistema em ciclo limite), obtêm-se os parâmetros para a sintonia:

$$\begin{cases} K_{PU} = 2,45 \\ P_U = 5,5 \end{cases}$$

A partir destes parâmetros são obtidas as sintonias para um controlador PI e também para um controlador P:

	K_P	K_I
Controlador P	1,225	0
Controlador PI	1,1025	0,2405

As respostas ao degrau do processo simulado com as duas sintonias são exibidas na Figura 4-3, onde também são apresentadas respostas do processo com sintonias obtidas no próximo item.

Como se pode observar, as duas sintonias obtidas pela técnica clássica não atendem às especificações inicialmente estabelecidas, sendo necessário um refinamento manual das mesmas, enquanto as sintonias obtidas pelo método de sintonia ótima, apresentadas a seguir, atendem todas as especificações. Além disso, a sintonia ótima fornece uma sintonia satisfatória que funciona em um controlador cuja frequência de amostragem é dez vezes mais lenta que a frequência utilizada na sintonia clássica.

Figura 4-3 – Respostas do processo com diferentes sintonias

b. Sintonia Ótima

O problema de sintonia pode ser escrito na formulação proposta, obtendo-se:

$$\max_{\{K_P, K_I, T\}} T \quad (4.24)$$

sujeito a:

$$Y_p(s) = \frac{0,8 \cdot e^{-0,5 \cdot s}}{s^2 + s} \cdot U_p(s) \quad (4.25)$$

$$U_p(s) = \mathcal{L}\{u_p(t)\} \quad (4.26)$$

$$u_p(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_c(z)\} \quad (4.27)$$

$$y_p(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_p(s)\} \quad (4.28)$$

$$Y_c(z) = \left(K_P + K_I \cdot \frac{1}{z-1} \right) \cdot U_c(z) \quad (4.29)$$

$$U_c(z) = \mathcal{Z}\{u_c(t), T\} \quad (4.30)$$

$$u_c(t) = r(t) - y_p(t) \quad (4.31)$$

$$-1 \leq u_p(t) \leq 1 \quad (4.32)$$

$$t_r(y_p(t)) \leq 10 \quad (4.33)$$

$$M_p(y_p(t)) \leq 1,1 \cdot r(\infty) \quad (4.34)$$

$$t_s(y_p(t)) \leq 20 \quad (4.35)$$

$$r(t) = H(t) \quad (4.36)$$

$$T = T_N \cdot 0,05 \quad (4.37)$$

$$T_N \in [2 : 20] \quad (4.38)$$

$$K_P \in [0 : 100] \quad (4.39)$$

$$K_I \in [0 : 100] \quad (4.40)$$

onde a equação (4.24) é a função objetivo otimizada, as equações (4.25) a (4.28) correspondem ao modelo da planta, (4.29) a (4.31) representam o controlador, (4.32) a (4.35) são as restrições do problema, (4.36) descreve o cenário avaliado e (4.37) a (4.40) definem o domínio dos parâmetros de sintonia.

Resolvendo o problema de otimização, obtêm-se os parâmetros de sintonia do controlador:

$$S = \begin{cases} K_P = 0,2944 \\ K_I = 0 \\ T = 1 \end{cases}$$

Ou seja, o controlador discreto que atende às especificações é um controlador proporcional discreto de ganho 0,2944 e taxa de amostragem 1.

A Figura 4-4 apresenta a resposta do processo com a sintonia obtida.

Como se pode observar, a sintonia obtida atende todas as especificações, incluindo a estabilidade.

Na resposta obtida, a única restrição ativa é o tempo de acomodação, o que indica que é possível tornar os requisitos mais restritivos para melhorar a qualidade da resposta ao degrau.

Figura 4-4 – Respostas do processo com sintonias obtidas por busca

Repete-se então o procedimento de sintonia, alterando-se as restrições da resposta ao degrau para:

A resposta ao degrau do sistema em malha fechada:

- Deve apresentar tempo de subida, t_r , menor ou igual a 5;
- Deve apresentar sobressinal, M_p , menor ou igual a 10%;
- Deve apresentar tempo de acomodação, t_s , menor ou igual a 15.

Resolvendo o problema com as novas restrições, obtêm-se os parâmetros de sintonia do controlador:

$$S = \begin{cases} K_p = 0,5116 \\ K_I = 0 \\ T = 0,1 \end{cases}$$

A nova solução leva a taxa de amostragem ao extremo permitido e aumenta o ganho do controlador, o que leva à redução do tempo de acomodação da malha, podendo isso ser verificado na Figura 4-4. Nesta nova sintonia, tempo de acomodação, máximo sobressinal e taxa de amostragem são restrições ativas, não sendo possível obter uma melhor resposta ao degrau com esta estrutura de controlador devido à utilização de todos os graus de liberdade do problema.

O problema de sintonia ótima formulado para encontrar a sintonia é de mais difícil solução que as técnicas de sintonia analítica ou por cálculo direto, porém garante que todas as especificações sejam obedecidas se houver uma solução factível. Além disso, caso não exista uma sintonia que atenda às especificações, a solução pode indicar quais restrições devem ser relaxadas.

Dispondo-se de ferramentas computacionais para solução do problema de otimização, esta forma de sintonia torna-se mais fácil, flexível e confiável que as sintonias típicas de controladores.

4.1.4 Exemplo: Sintonia Robusta de Controlador PID

Trata-se neste exemplo o problema de obter-se uma sintonia para um controlador na presença de erros de modelagem no modelo disponível para sintonia.

Considera-se um modelo de primeira ordem com tempo morto obtido a partir da resposta ao degrau da planta. O modelo nominal do sistema é:

$$G(s) = \frac{1}{50 \cdot s + 1} \cdot e^{-2} \quad (4.41)$$

Para descrever a incerteza do modelo, são consideradas incertezas estruturadas nos parâmetros do modelo, ganho, constante de tempo e tempo morto, e uma incerteza não estruturada correspondente a uma segunda constante de tempo não modelada. Tem-se, portanto, um modelo na estrutura descrita pela equação (4.42) e com valores de parâmetros segundo a Tabela 4-1.

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 \cdot s + 1) \cdot (\tau_2 \cdot s + 1)} \cdot e^{-\theta} \quad (4.42)$$

Tabela 4-1 – Parâmetros do modelo.

Parâmetro	Valor Mínimo	Valor Nominal	Valor Máximo
Ganho K	0.5	1	2
Constante de tempo dominante τ_1	40	50	60
Constante de tempo τ_2	0	0	5
Tempo morto θ	0	2	5

Para avaliação do impacto das incertezas do modelo em seu desempenho, a Figura 4-5 apresenta a resposta ao degrau unitário dos modelos admitidos pelo modelo de erro, com a resposta do modelo nominal destacada.

Figura 4-5 – Respostas ao degrau dos modelos admitidos.

Deseja-se sintonizar para este sistema um controlador PID de tempo discreto que opere com período de amostragem de 1 segundo. Deseja-se uma sintonia que minimize o tempo de acomodação (definição de 2%) do sistema e mantenha o sobressinal abaixo de 30%. O problema é resolvido para o modelo nominal e então para o modelo com as incertezas consideradas.

a. Sintonia Ótima para o Modelo Nominal

Inicialmente busca-se uma sintonia que atenda às especificações para o modelo nominal. O problema de sintonia ótima formulado para tal é:

$$\min_{\{K_P, K_I, K_D, N\}} t_s(y(t)) \quad (4.43)$$

sujeito a:

$$M_P = \frac{\max(y(t) - y(\infty))}{y(\infty) - y(0)} \leq 0,3 \quad , \forall t \quad (4.44)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \quad (4.45)$$

$$Y(s) = \frac{1}{50 \cdot s + 1} \cdot e^{-2} \cdot U(s) \quad (4.46)$$

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} \quad (4.47)$$

$$u(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{U(z)\} \quad (4.48)$$

$$U(z) = \left[K_P + K_I \cdot \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} + K_D \cdot \frac{N}{1 + N \cdot \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}} \right] \cdot (Y(z) - R(z)) \quad (4.49)$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(t)\} \quad (4.50)$$

$$R(z) = \mathcal{Z}\{r(t)\} \quad (4.51)$$

$$r(t) = 1 \cdot H(t) \quad (4.52)$$

$$K_P \in [0 : 100] \quad (4.53)$$

$$K_I \in [0 : 100] \quad (4.54)$$

$$K_D \in [0 : 100] \quad (4.55)$$

$$N \in [0 : 100] \quad (4.56)$$

$$T_s = 1 \quad (4.57)$$

Emprega-se o algoritmo Simplex (Lagarias, et al., 1998) para solucionar o problema, obtendo-se:

$$\begin{cases} K_P = 11,2205 \\ K_I = 0,1697 \\ K_D = 3,7131 \\ N = 4,6301 \\ T_s = 1 \end{cases}$$

A sintonia é então aplicada a todos os modelos admissíveis. A Figura 4-6 apresenta os comportamentos obtidos.

Figura 4-6 – Respostas ao degrau em malha fechada dos modelos admitidos.

Nota-se na Figura 4-6 que o sistema nominal, em destaque, controlado com a sintonia obtida apresenta tempo de acomodação de 30 segundos e sobressinal nulo, porém, para outros modelos admitidos pelo modelo de erro, o desempenho resultante degrada, gerando respostas altamente oscilatórias e mesmo comportamentos instáveis.

b. Sintonia Ótimo-Robusta

A fim de obter-se um controlador que mantenha o comportamento do sistema real nas especificações, deseja-se então uma sintonia robusta, ou seja, uma sintonia que atenda às especificações para todos os modelos admitidos pelo modelo de erro.

Para a obtenção da sintonia ótimo-robusta formula-se o seguinte problema de sintonia ótima:

$$\min_{\{K_P, K_I, K_D, N\}} \max \left(t_s \left(y_i(t) \right) \right) \quad (4.58)$$

sujeito a:

$$\max \left(\frac{\max(y_i(t) - y_i(\infty))}{y_i(\infty) - y_i(0)} \right) \leq 0,3 \quad , \forall t \quad (4.59)$$

$$y_i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_i(s)\} \quad (4.60)$$

$$Y_i(s) = \frac{K_i}{(\tau_{1i} \cdot s + 1) \cdot (\tau_{2i} \cdot s + 1)} \cdot e^{-\theta_i} \cdot U(s) \quad (4.61)$$

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} \quad (4.62)$$

$$u(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{U(z)\} \quad (4.63)$$

$$U(z) = \left[K_P + K_I \cdot \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} + K_D \cdot \frac{N}{1 + N \cdot \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}} \right] \cdot (Y(z) - R(z)) \quad (4.64)$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(t)\} \quad (4.65)$$

$$R(z) = \mathcal{Z}\{r(t)\} \quad (4.66)$$

$$r(t) = 1 \cdot H(t) \quad (4.67)$$

$$K = \{0,5 : 2\} \quad (4.68)$$

$$\tau_1 = \{40 : 60\} \quad (4.69)$$

$$\tau_2 = \{0 : 5\} \quad (4.70)$$

$$\theta = \{0 : 5\} \quad (4.71)$$

$$K_P \in [0 : 100] \quad (4.72)$$

$$K_I \in [0 : 100] \quad (4.73)$$

$$K_D \in [0 : 100] \quad (4.74)$$

$$N \in [0 : 100] \quad (4.75)$$

$$T_s = 1 \quad (4.76)$$

onde a função objetivo e a restrição são avaliadas para cada resposta y_i obtida para cada modelo admitido. A função objetivo é construída empregando o conceito de robustez da otimalidade, apresentado na seção 3.4.4, de modo a se buscar uma sintonia para a qual o pior tempo de acomodação dos modelos admitidos seja mínimo.

Resolvendo o problema de otimização através do algoritmo Simplex, obtém-se a seguinte sintonia para o controlador PID na forma paralela:

$$\begin{cases} K_P = 2,3670 \\ K_I = 0,0485 \\ K_D = 3,6358 \\ N = 10 \\ T_s = 1 \end{cases}$$

O desempenho do controlador é então avaliado. A Figura 4-7 apresenta as respostas ao degrau dos modelos admitidos pelo modelo de erro controlados por um controlador PID com a sintonia obtida.

Figura 4-7 – Respostas ao degrau em malha fechada dos modelos admitidos com sintonia robusta.

Como se pode observar, a sintonia obtida atende às especificações, destacadas no gráfico, para todos os modelos admitidos, mantendo o sobressinal abaixo de 30% e o tempo de acomodação inferior a 180 segundos para todos os modelos admitidos pelo modelo de erro.

c. Observações e Comentários

Este exemplo abordou o problema da sintonia robusta de controladores PID, ou seja, da obtenção de uma sintonia que seja adequada para um conjunto de modelos admitidos por um modelo com incertezas.

Demonstrou-se que a sintonia ótima para um modelo nominal pode gerar, caso o sistema controlado não seja exatamente representado pelo modelo disponível, comportamentos bastante inadequados, como respostas oscilatórias ou instáveis.

Face ao problema do não conhecimento do modelo exato de um processo, é uma prática comum o processo de dessintonia de controladores, ou seja, da redução dos ganhos do controlador sintonizado, a fim de obter-se uma sintonia mais robusta. Apesar de simples, esta abordagem é pouco confiável, uma vez que não há garantia da robustez ou do desempenho da sintonia, ou seja, pode-se gerar uma sintonia que não seja robusta o suficiente ou que seja muito mais conservadora que o necessário, resultando em uma considerável perda de eficiência do processo.

Para a obtenção de uma solução melhor, foi empregada a metodologia proposta, inserindo-se restrições de robustez na formulação do problema de sintonia ótima. Além de robustez da estabilidade e do desempenho como restrições, foi empregado o conceito de robustez da otimalidade para a escolha da função objetivo do problema. Obteve-se então uma sintonia robusto-ótima que é adequada para todos os modelos admitidos pelo modelo de erro considerado.

4.1.5 Exemplo: Sintonia de PID para Coluna de Destilação de Wood and Berry

Aplica-se a metodologia proposta para sintonia ótima de controladores ao modelo de coluna de destilação apresentado em (Wood; Berry, 1973), apresentando-se diversos casos de sintonia.

Este modelo descreve o comportamento das composições de topo e de fundo (variáveis controladas) de uma coluna de destilação em função das vazões de refluxo e de vapor (variáveis manipuladas) e da vazão de alimentação (variável de perturbação) do sistema. A Figura 4-8 apresenta um P&ID simplificado da coluna.

Figura 4-8 – Coluna de destilação de Wood & Berry (Wood; Berry, 1973).

A matriz de transferência do modelo do processo com a composição de topo e de fundo como primeira e segunda variável controlada, respectivamente, e a vazão de refluxo e de vapor como primeira e segunda variável manipulada, respectivamente, é descrita por:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{768}{1.002 \cdot s + 1} \cdot e^{-60} & \frac{396}{645 \cdot s + 1} \cdot e^{-420} \\ \frac{-1.134}{1.260 \cdot s + 1} \cdot e^{-180} & \frac{-1.164}{864 \cdot s + 1} \cdot e^{-180} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

A matriz de transferência do modelo de perturbação que descreve o efeito da vazão de alimentação nas composições é descrita por:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{228}{894 \cdot s + 1} \cdot e^{-480} \\ \frac{294}{792 \cdot s + 1} \cdot e^{-180} \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

Todas as funções de transferência são tais que as composições são expressas em %, as vazões em lb/s e o tempo em segundos.

Como valores nominais de operação, são adotados 96% e 0,5% para as composições de topo e de fundo, respectivamente, e 0,0325, 0,285 e 0,0408 lb/s para as vazões de refluxo, de vapor e de alimentação, respectivamente.

Inicialmente é sintonizado um controlador PI para controlar a composição de topo da coluna, otimizando-se um único índice de desempenho. São obtidas e avaliadas sintonias para diferentes índices de desempenho.

A seguir, a abordagem para sintonia ótima com múltiplos índices de desempenho elaborada na seção 2.3.2 é empregada para a obtenção de uma única sintonia que seja ótima para a composição de topo em um contexto mais geral.

Considera-se então o modelo completo do sistema, sintonizando controladores PI para operar simultaneamente, controlando composição de topo e de fundo da coluna.

Trata-se também o caso em que não se conhece o modelo do processo, realizando-se uma identificação da planta e empregando o modelo identificado para a obtenção de uma sintonia ótimo-robusta.

Por fim, os resultados obtidos são avaliados e são apresentadas breves conclusões sobre o exemplo.

a. Sintonia Ótima de PID SISO com Único Índice de Desempenho

Deseja-se sintonizar um controlador PI para a composição de topo da coluna de destilação, que é a variável principal do sistema, deixando-se a composição de fundo da coluna livre. A dinâmica desta variável controlada em função da vazão de refluxo, variável manipulada pelo controlador, é descrita por:

$$G_{11}(s) = \frac{768}{1.002 \cdot s + 1} \cdot e^{-60} \quad (4.79)$$

A composição de topo também é afetada por variações na vazão de alimentação, variável de perturbação, segundo a seguinte função de transferência:

$$H_1(s) = \frac{228}{894 \cdot s + 1} \cdot e^{-480} \quad (4.80)$$

São buscadas sintonias servo e regulatória, ou seja, sintonias apropriadas para acompanhar sinais de referência e para rejeitar perturbações, respectivamente.

Para o modo servo são buscadas sintonias que atendam individualmente (o problema multiobjetivo será tratado no item seguinte) às seguintes especificações:

- Mínimo tempo de acomodação sem sobressinal;

- Mínimo tempo de acomodação;
- Mínimo tempo de subida;
- Mínimo ISE servo;
- Mínimo IAE servo.

Para o modo regulatório são buscadas sintonias que atendam às seguintes especificações:

- Mínimo tempo de retorno;
- Mínimo desvio;
- Mínimo ISE regulatório;
- Mínimo IAE regulatório.

Deseja-se ainda obter sintonias para o controlador operando em tempo discreto com período de amostragem de 10 e 60 segundos.

Tem-se, portanto, 18 especificações distintas, que, junto com a sintonia de referência³ operando nas duas taxas de amostragem consideradas, totalizam 20 sintonias. Cada sintonia é avaliada com base em sua resposta a degraus de amplitudes absolutas 2 e 0,02⁴ na referência e na entrada do modelo de perturbação, respectivamente.

São empregados os seguintes índices de desempenho para avaliar as sintonias:

- Resposta ao degrau:
 - Tempo de acomodação (t_s);
 - Tempo de subida (t_r);
 - Sobressinal máximo (M_p);
 - *Integrated Square Error (ISE)*;
 - *Integrated Absolute Error (IAE)*;
 - Integral do esforço de controle quadrático (ISU);
 - Integral do esforço de controle (IU);

³ A sintonia de referência utilizada foi obtida por método de tentativa e erro em um projeto de pesquisa que utiliza o modelo empregado neste exemplo. Esta sintonia foi refinada ao longo de vários meses de utilização, sendo considerada uma sintonia muito boa.

⁴ As amplitudes de 2 e 0,02 foram selecionadas por serem as maiores que não causam saturações no sistema em malha aberta.

➤ Rejeição de perturbações:

- Tempo de retorno (t_{sd});
- Desvio máximo (Δ);
- *Integrated Square Error (ISE)*;
- *Integrated Absolute Error (IAE)*;
- Integral do esforço de controle quadrático (*ISU*);
- Integral do esforço de controle (*IU*);

Sintonias de Modo Servo

Para a obtenção das sintonias de modo servo, os índices de desempenho a serem otimizados são calculados sobre a resposta da planta a um degrau de valor absoluto de 2% (de 96% para 98%) na referência da composição de topo.

O problema de otimização resolvido em cada obtenção de sintonia ótima é descrito por:

$$\min_s J = f(y_p(t), r(t)) \quad (4.81)$$

sujeito a:

$$y_p(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_p(s)\} \quad (4.82)$$

$$\frac{Y_p(s)}{U(s)} = \frac{768}{1.002 \cdot s + 1} \cdot e^{-60} \quad (4.83)$$

$$U(s) = \mathcal{L}\{\mathcal{Z}^{-1}\{U(z)\}\} \quad (4.84)$$

$$|U(z)| \leq 0,0083 \quad (4.85)$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \left[K_P + K_I \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \right] \quad (4.86)$$

$$E(z) = \mathcal{Z}\{y_p(t) - r(t)\} \quad (4.87)$$

$$r(t) = 96 + 2 \cdot H(t) \quad (4.88)$$

$$K_P \in [0 : 100] \quad (4.89)$$

$$K_I \in [0 : 100] \quad (4.90)$$

$$T \in [10, 60] \quad (4.91)$$

$$M_p(y_p(t)) = \frac{\max(y_p(t) - y_p(\infty))}{y_p(\infty) - y_p(0)} \leq M_{p_{max}}, \forall t \quad (4.92)$$

em que as equações (4.82) a (4.85) representam o modelo da planta, o qual é simulado para a obtenção da resposta temporal y_p do sistema. As equações (4.86) e (4.87) representam o controlador PI, integrado ao modelo da planta para a obtenção das respostas simuladas e que pode operar com período de amostragem de 10 ou 60 segundos, conforme o domínio da variável T descrito na equação (4.91). A excitação $r(t)$ é um degrau, conforme descrito na equação (4.88). As equações (4.89) e (4.90) correspondem ao domínio dos parâmetros de sintonia K_p , ganho proporcional, e K_I , ganho integral. A equação (4.92) representa a restrição de desempenho considerada tal que $M_{p_{max}}$ é o maior sobressinal admitido. A equação (4.81) corresponde ao índice de desempenho otimizado em cada sintonia, podendo a função $j(\cdot)$ assumir as seguintes formas:

$$\begin{aligned} t_s &= \max(t) \\ \text{sujeito a:} \\ |y_p(t-1) - y_p(\infty)| &> 0,02 \cdot (y_p(\infty) - y_p(0)) \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} t_r &= \min(t) \\ \text{sujeito a:} \\ y_p(t) &\leq 0,98 \cdot y_p(\infty) \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$M_p = \frac{\max(y_p(t) - y_p(\infty))}{(y_p(\infty) - y_p(0))}, \forall t \quad (4.95)$$

$$ISE = \int_0^{t_f} (y_p(t) - r(t))^2 dt \quad (4.96)$$

$$IAE = \int_0^{t_f} |y_p(t) - r(t)| dt \quad (4.97)$$

em que t_f corresponde ao instante final da simulação, no qual o sistema deve ter atingido um estado estacionário.

Sintonias de Modo Regulatório

Para a obtenção das sintonias de modo regulatório, são otimizados índices de desempenho calculados sobre a resposta da planta a um degrau de -0,02 na variável de perturbação, valor este selecionado tal que a perturbação seja máxima sem que ocorram saturações no sistema após o transitório inicial.

Para a sintonia regulatória, o problema de otimização é formulado da seguinte forma:

$$\min_s J = f(y_p(t), r(t)) \quad (4.98)$$

sujeito a:

$$y_p(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_p(s)\} \quad (4.99)$$

$$\frac{Y_p(s)}{U(s)} = \frac{768}{1.002 \cdot s + 1} \cdot e^{-60} \quad (4.100)$$

$$U(s) = \mathcal{L}\{\mathcal{Z}^{-1}\{U(z)\}\} \quad (4.101)$$

$$\frac{Y_p(s)}{D(s)} = \frac{228}{894 \cdot s + 1} \cdot e^{-480} \quad (4.102)$$

$$D(s) = \mathcal{L}\{d(t)\} \quad (4.103)$$

$$|U(z)| \leq 0,0083 \quad (4.104)$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \left[K_P + K_I \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{z + 1}{z - 1} \right] \quad (4.105)$$

$$E(z) = \mathcal{Z}\{y_p(t) - r(t)\} \quad (4.106)$$

$$r(t) = 96 \quad (4.107)$$

$$d(t) = -0,02 \cdot H(t) \quad (4.108)$$

$$K_P \in [0: 100] \quad (4.109)$$

$$K_I \in [0: 100] \quad (4.110)$$

$$T \in [10, 60] \quad (4.111)$$

em que as equações (4.100) e (4.102) representam, respectivamente, as contribuições da variável manipulada e da variável de distúrbio para a saída $y_p(t)$ do sistema. A equação (4.107) representa a referência aplicada ao sistema e mantida constante durante a simulação, enquanto a equação (4.108) representa o degrau aplicado na variável de distúrbio. A função objetivo (4.98) pode assumir as seguintes formas:

$$t_{sd} = \max(t) \quad \text{sujeito a:} \quad (4.112)$$

$$|y_p(t - 1) - y_p(\infty)| > 0.02 \cdot y_p(\infty)$$

$$\Delta = \max(y_p(t) - r(t)) \quad (4.113)$$

$$ISE = \int_0^{t_f} (y_p(t) - r(t))^2 dt \quad (4.114)$$

$$IAE = \int_0^{t_f} |y_p(t) - r(t)| dt \quad (4.115)$$

em que a equação (4.112) representa o tempo de retorno ao estado estacionário, (4.113) representa o desvio máximo da saída em relação ao valor de referência e (4.114) e (4.115) correspondem, respectivamente, aos índices ISE e IAE.

Obtenção das Sintonias Ótimas

Para a obtenção das sintonias ótimas, os problemas de otimização formulados nas seções anteriores são implementados e solucionados em ambiente Matlab / Simulink.

Os modelos definidos pelas equações (4.82) a (4.88) e (4.99) a (4.108) são implementadas em ambiente Simulink para simulação e obtenção das respostas utilizadas para cálculo dos índices de desempenho e restrições.

Os problemas de otimização são então solucionados, utilizando algoritmos padrão de otimização disponíveis em ambiente Matlab. São empregados os algoritmos *Simplex search* (Lagarias, et al., 1998) e *Pattern search* (Hooke; Jeeves, 1961), (Davidon, 1991).

Sintonias Ótimas Obtidas

O problema de otimização definido pelas equações (4.81) a (4.92) e (4.98) a (4.111) são resolvidos, respectivamente, para as funções objetivo (4.93) a (4.97) e (4.112) a (4.115). As sintonias obtidas assim como a sintonia de referência são apresentadas nas Tabelas 4-2 e 4-3.

Tabela 4-2 – Sintonias Ótimas (T=10).

Sintonias para T = 10			
Função Objetivo		Parâmetros de Sintonia	
		K _P	K _I
Sintonia de Referência		0,0067	1,139E-5
Sintonias de Modo Servo	Mínimo tempo de acomodação sem sobressinal	0,0062	4,9E-6
	Mínimo tempo de acomodação	0,0102	4,7E-6
	Mínimo tempo de subida	0,0167	5,3E-6
	Mínimo ISE servo	0,0087	4,8E-6
	Mínimo IAE servo	0,0066	5,0E-6
Sintonias de Modo Regulatório	Mínimo tempo de retorno	0,0115	4,4E-5
	Mínimo desvio	0,0250	2,5E-5
	Mínimo ISE regulatório	0,0196	6,1E-5
	Mínimo IAE regulatório	0,0162	5,7E-5

Tabela 4-3 – Sintonias Ótimas (T=60).

Sintonias para T = 60			
Função Objetivo		Parâmetros de Sintonia	
		K _P	K _I
Sintonia de Referência		0,0067	1,139E-5
Sintonias de Modo Servo	Mínimo tempo de acomodação sem sobressinal	0,0033	3,3E-6
	Mínimo tempo de acomodação	0,0042	3,8E-6
	Mínimo tempo de subida	0,0067	4,4E-6
	Mínimo ISE servo	0,0050	3,9E-6
	Mínimo IAE servo	0,0041	3,9E-6
Sintonias de Modo Regulatório	Mínimo tempo de retorno	0,0060	1,4E-5
	Mínimo desvio	0,0119	1,6E-5
	Mínimo ISE regulatório	0,0098	1,7E-5
	Mínimo IAE regulatório	0,0080	1,6E-5

Desempenho das Sintonias Obtidas

Obtidas as sintonias ótimas, são analisados seus desempenhos. Inicialmente observa-se o comportamento do sistema com cada sintonia obtida, a seguir, seus desempenhos segundo os índices de avaliação selecionados são aferidos.

As Figuras 4-9 e 4-10 apresentam as respostas servo e regulatória do sistema, respectivamente, com as sintonias para período de amostragem de 10 unidades de tempo, e as Figuras 4-11 e 4-12 apresentam os mesmos resultados para os controladores com período de amostragem de 60 unidades de tempo.

Figura 4-9 – Resposta ao degrau das sintonias com T=10.

Figura 4-10 – Rejeição de perturbação das sintonias com $T=10$.

Figura 4-11 – Resposta ao degrau das sintonias com $T=60$.

Figura 4-12 – Rejeição de perturbação das sintonias com $T=60$.

Nota-se nas figuras apresentadas que as sintonias obtidas apresentam respostas bastante distintas, não sendo trivial a escolha por uma sintonia a ser aplicada.

Para uma comparação mais objetiva e sucinta das sintonias obtidas, são calculados índices de desempenho sobre as respostas do sistema com cada uma das sintonias avaliadas. As Tabelas 4-4 e 4-5 apresentam os desempenhos para as sintonias obtidas para, respectivamente, modo servo e modo regulatório com período de amostragem de 10 unidades de tempo, enquanto as Tabelas 4-6 e 4-7 apresentam os índices para as sintonias obtidas para controladores com período de amostragem de 60 unidades de tempo. Em cada uma das tabelas é destacado o melhor desempenho segundo cada critério de avaliação e para cada conjunto de sintonias.

Tabela 4-4 – Índices de Desempenho: Sintonias Servo (T=10).

T = 10							
Índices de Desempenho		Sintonias					
		Ref	t_r mínimo ($M_p = 0$)	t_s mínimo	t_r mínimo	ISE mínimo	IAE mínimo
Índices Servo (Resposta ao Degrau)	Tempo de Acomodação (s)	1859,6	597,15	450,3	748,84	470,39	554,29
	Tempo de Subida (s)	299,1	336,9	299,1	299,1	303,1	324,8
	Sobressinal (%)	37,1	0	4,05	16,01	1,15	0,01
	ISE	7996	7424,2	7379,2	7395,4	7379,2	7404,7
	IAE	7665	5224,4	5520,2	5238,6	5249,9	5120,0
	ISU	0,0950	0,0891	0,0906	0,0929	0,0902	0,0895
	IU	29,5487	28,1544	28,1256	28,2067	28,1401	28,1682
Índices Regulatório (Rejeição de Perturbação)	Tempo de Retorno (s)	2392,4	5690,8	9094,2	1181,9	7816,9	5894,4
	Desvio Máximo	0,3722	0,4022	0,3148	0,2648	0,3379	0,3886
	ISE	637,8	1391,5	912,2	512,2	1038,9	1291,8
	IAE	2653,8	6054,8	6217,6	5297,4	6142,6	5932,2
	ISU	0,0857	0,0830	0,0826	0,0834	0,0827	0,0831
	IU	28,4515	28,0022	27,9756	28,0886	27,9882	28,0180

Tabela 4-5 – Índices de Desempenho: Sintonias Regulatórias (T=10).

T=10						
Índices de Desempenho		Sintonias				
		Ref	Tempo de Retorno mínimo	Desvio mínimo	ISE _d mínimo	IAE _d mínimo
Índices Servo (Resposta ao Degrau)	Tempo de Acomodação (s)	1859,6	1387,0	3404,9	1899,8	1637,2
	Tempo de Subida (s)	299,1	299,1	299,1	299,1	299,1
	Sobressinal (%)	37,1	120,76	57,02	118,28	122,65
	ISE	7996	11004	8337	10544	10838
	IAE	7665,3	9359,4	8924,6	9587,4	9495,2
	ISU	0,0950	0,1101	0,1083	0,1145	0,1127
	IU	29,5487	28,7693	28,7107	28,7908	28,7869
Índices Regulatório (Rejeição de Perturbação)	Tempo de Retorno (s)	2392,4	929,6	4641,6	1927,4	1483,1
	Desvio Máximo	0,3722	0,289	0,2383	0,2501	0,2621
	ISE	637,8	152,1	139,3	88,8	98,8
	IAE	2653,8	755,4	1392,9	693,9	617,7
	ISU	0,0857	0,0875	0,0899	0,0884	0,0878
	IU	28,45	28,70	28,64	28,73	28,72

Tabela 4-6 – Índices de Desempenho: Sintonias Servo (T=60).

T = 60							
Índices de Desempenho		Sintonias					
		Ref	t_r mínimo ($M_p = 0$)	t_s mínimo	t_r mínimo	ISE mínimo	IAE mínimo
Índices Servo (Resposta ao Degrau)	Tempo de Acomodação (s)	1979,8	887,8	584,7	1128,0	834,5	588,5
	Tempo de Subida (s)	299,1	470,2	334,4	299,1	308,5	338,1
	Sobressinal (%)	81,02	0	2,93	25,83	10,44	3,69
	ISE	68407	62798	56581	56956	56416	56629
	IAE	61024	43860	38304	40727	39306	37724
	ISU	0,1012	0,0847	0,0890	0,0930	0,0904	0,0890
	IU	28,6406	27,9108	28,0460	28,1676	28,0688	28,0688
Índices Regulatório (Rejeição de Perturbação)	Tempo de Retorno (s)	2086,8	4623,3	4949,4	6283,6	5623,3	4685,3
	Desvio Máximo	0,5116	0,6515	0,5945	0,5184	0,5632	0,5996
	ISE	51151	21993	16081	9520	13546	16087
	IAE	15909	53981	46872	40387	45643	45674
	ISU	0,0871	0,0820	0,0827	0,0834	0,0827	0,0829
	IU	28,4811	27,6491	27,8033	27,9428	27,8295	27,8293

Tabela 4-7 – Índices de Desempenho: Sintonias Regulatório (T=60).

T=10						
Índices de Desempenho		Sintonias				
		Ref	Tempo de Retorno mínimo	Desvio mínimo	ISE _d mínimo	IAE _d mínimo
Índices Servo (Resposta ao Degrau)	Tempo de Acomodação (s)	1979,8	1302,7	5883,9	2965,0	1878,8
	Tempo de Subida (s)	299,1	299,1	299,1	299,1	299,1
	Sobressinal (%)	81,02	101,72	94,28	102,33	104,38
	ISE	68407	76631	74791	74696	75743
	IAE	61024	64391	86281	68350	65282
	ISU	0,1012	0,1047	0,1214	0,1096	0,1068
	IU	28,64	28,6961	28,7232	28,7388	28,7264
Índices Regulatório (Rejeição de Perturbação)	Tempo de Retorno (s)	2086,8	1916,6	7724,4	3271,8	2404,0
	Desvio Máximo	0,5116	0,5224	0,4550	0,4687	0,4824
	ISE	5115,1	5276,3	4490,3	3523,9	3912,5
	IAE	15909	14585	26596	14503	12789
	ISU	0,0871	0,0878	0,0935	0,0893	0,0883
	IU	28,48	28,54	28,58	28,59	28,58

Através das tabelas é possível avaliar as sintonias obtidas por diferentes critérios e de forma menos subjetiva do que apenas pelas respostas temporais das simulações. Assim é possível fazer uma escolha melhor embasada por uma sintonia, ou então por uma especificação mais completa de desempenho desejável para o sistema.

Observações e Comentários

Nesta parte do exemplo de aplicação foram estabelecidas algumas especificações para o controle da coluna de destilação de Wood & Berry, obtendo-se a sintonia ótima para cada especificação.

Ao todo foram obtidas 18 sintonias, mais uma sintonia de referência em duas implementações. Comportamentos simulados de resposta ao degrau e rejeição de perturbações foram apresentadas para cada uma das 20 sintonias avaliadas, sendo avaliados 13 índices de desempenho para cada uma.

Nas respostas apresentadas pode-se notar que a mesma estrutura de controlador com diferentes sintonias pode gerar comportamentos bastante distintos. Ainda mais, pode-se concluir que a escolha de uma sintonia apenas pela observação das respostas temporais do sistema pode ser não trivial, sendo mais objetiva uma escolha com base em índices de desempenho que avaliem características bem definidas do comportamento do sistema.

Das tabelas onde são apresentados os desempenhos das sintonias nota-se que as sintonias otimizadas são ótimas para o índice de desempenho otimizado, como esperado, porém nenhum dos índices garante desempenho ótimo para todos os demais. Esse fato demonstra que dificilmente um único índice de desempenho simples será o mais adequado para qualquer problema, sendo mais apropriada a especificação do desempenho desejado para um sistema através de um conjunto de características principais. Isso também mostra que nenhuma sintonia pré-estabelecida será sempre a melhor opção, sendo melhor a otimização da sintonia para cada aplicação.

No item seguinte são abordados os dois problemas previamente citados, a escolha de uma sintonia para o modelo em estudo e a especificação com múltiplas características para a determinação de tal sintonia.

De forma geral, este item ilustrou a aplicação da metodologia proposta para obtenção de sintonias de controladores PI de formas simples, ou seja, pela escolha de um índice de desempenho principal, ou pela escolha de uma sintonia observando

o desempenho de um conjunto de sintonias obtidas para diferentes índices de desempenho padrão.

Essa abordagem se apresenta como uma alternativa à forma clássica de sintonia baseada em cálculo direto, na qual se deve escolher uma forma de cálculo para a obtenção da sintonia. Como descrito, ao ser aplicada a metodologia proposta, a escolha a ser tomada para a obtenção dos parâmetros de sintonia deixa de ser qual fórmula de cálculo deve ser aplicada e passa a ser a determinação de quais as características desejáveis para o comportamento do processo, o que tende a gerar controladores de melhor qualidade e mais apropriados para cada aplicação.

b. Sintonia Ótima Multiobjetivo de PID

Ao se sintonizar um controlador, é comumente desejável que o sistema em malha fechada apresente um conjunto de características, e não apenas uma única característica. Nesta seção buscam-se sintonias que otimizem alguns conjuntos de especificações para a coluna de destilação de Wood & Berry.

Para a obtenção de sintonias ótimas segundo um conjunto de especificações, é aplicada a abordagem de otimização recursiva apresentada na seção 2.3.2.

Deseja-se a obtenção de sintonias que atendam simultaneamente, mas com diferentes prioridades, os seguintes requisitos:

- Tempo de acomodação;
- Tempo de subida;
- Sobressinal;
- Tempo de retorno;
- Desvio máximo;
- ISE servo;
- IAE servo;
- ISU servo;
- IU servo;
- ISE regulatório;
- IAE regulatório;

- ISU regulatório e
- IU regulatório.

Trata-se apenas o caso do controlador operando com período de amostragem de 10 unidades de tempo, uma vez que a variação da taxa de amostragem não afeta a formulação ou a solução do problema, objetivos principais do exemplo.

Sintonias Especificadas por Tempos e Amplitudes

Para a primeira sintonia multiobjetivo, especifica-se o desempenho desejável com a seguinte ordem de prioridade:

1. Tempo de acomodação;
2. Tempo de subida;
3. Sobressinal;
4. Tempo de retorno;
5. Desvio máximo.

Para a obtenção da sintonia multiobjetivo, aplica-se a abordagem proposta na seção 2.3.2.

Primeiro Passo

Inicialmente, busca-se uma sintonia que otimize o índice de desempenho mais importante, tempo de acomodação.

Da seção anterior tem-se que uma sintonia com período de amostragem de 10 segundos que minimiza o tempo de acomodação e o seus respectivos índices de desempenho é:

$$\begin{cases} K_p = 0,0102 \\ K_I = 4,7 \cdot 10^{-6} \\ T = 10 \\ t_s = 450,3 \\ t_r = 299,1 \\ M_p = 4,05\% \\ t_{sd} = 9.094,2 \\ \Delta = 0,3148 \end{cases}$$

Apesar de minimizar o tempo de acomodação do sistema, esta sintonia também minimiza o tempo de subida, uma vez que há saturação da saída do controlador no início da resposta.

Segundo Passo

No segundo passo da otimização recursiva os índices já otimizados são convertidos em restrições e é incluída uma nova função objetivo no problema. Formula-se, portanto, um novo problema de otimização:

$$\min t_{sd} (y_{p_{regulatório}}) \quad (4.116)$$

sujeito a:

$$y_{p_{servo}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{p_{servo}}(s)\} \quad (4.117)$$

$$\frac{Y_{p_{servo}}(s)}{U_{servo}(s)} = \frac{768}{1.002 \cdot s + 1} \cdot e^{-60} \quad (4.118)$$

$$U_{servo}(s) = \mathcal{L}\{Z^{-1}\{U_{servo}(z)\}\} \quad (4.119)$$

$$|U_{servo}(z)| \leq 0,0083 \quad (4.120)$$

$$\frac{U_{servo}(z)}{E_{servo}(z)} = \left[P + I \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{z + 1}{z - 1} \right] \quad (4.121)$$

$$E_{servo}(z) = Z\{y_p(t) - r(t)\} \quad (4.122)$$

$$r_{servo}(t) = 96 + 2 \cdot H(t) \quad (4.123)$$

$$y_{p_{regulatório}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{p_{regulatório}}(s)\} \quad (4.124)$$

$$\frac{Y_{p_{regulatório}}(s)}{U_{regulatório}(s)} = \frac{768}{1.002 \cdot s + 1} \cdot e^{-60} \quad (4.125)$$

$$\frac{Y_{p_{regulatório}}(s)}{D(s)} = \frac{228}{894 \cdot s + 1} \cdot e^{-480} \quad (4.126)$$

$$U_{regulatório}(s) = \mathcal{L}\{Z^{-1}\{U_{regulatório}(z)\}\} \quad (4.127)$$

$$|U_{regulatório}(z)| \leq 0,0083 \quad (4.128)$$

$$D(s) = \mathcal{L}\{d(t)\} \quad (4.129)$$

$$\frac{U_{regulatório}(z)}{E_{regulatório}(z)} = \left[P + I \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{z + 1}{z - 1} \right] \quad (4.130)$$

$$E_{regulatório}(z) = Z\{y_{p_{regulatório}}(t) - r_{regulatório}(t)\} \quad (4.131)$$

$$r_{regulatório}(t) = 96 \quad (4.132)$$

$$K_p \in [0: 1] \quad (4.133)$$

$$K_I \in [0: 1] \quad (4.134)$$

$$T = 10 \quad (4.135)$$

$$t_s(y_{p_{servo}}) \leq 1.000 \quad (4.136)$$

$$t_r(y_{p_{servo}}) \leq 500 \quad (4.137)$$

$$M_p(y_{p_{servo}}) \leq 10 \quad (4.138)$$

onde o tempo de retorno t_{sd} é definido em (4.112), o tempo de acomodação t_s em (4.93), o tempo de subida t_r em (4.94) e o sobressinal M_p em (4.95). A equação (4.116) é a função objetivo otimizada nesta iteração, as equações (4.117) a (4.123) representam o modelo que gera a resposta servo do sistema, as equações (4.124) a (4.132) representam o modelo que gera a resposta regulatória do sistema, as equações (4.133) a (4.135) definem o domínio de busca da otimização e as equações (4.136) a (4.138) são os índices de desempenho já otimizados e convertidos em restrições para o problema de otimização.

Assim como anteriormente, o problema de otimização é solucionado utilizando os algoritmos *Simplex search* (Lagarias, et al., 1998) e *Pattern search* (Hooke; Jeeves, 1961), (Davidon, 1991).

Resolvendo-se o problema obtém-se a nova sintonia:

$$\begin{cases} K_p = 0,0041 \\ K_I = 4,8 \cdot 10^{-6} \\ T = 10 \\ t_s = 765,9 \\ t_r = 458,8 \\ M_p = 3,97\% \\ t_{sd} = 3.839,5 \\ \Delta = 0,4996 \end{cases}$$

Incorporando os índices previamente otimizados como restrições e permitindo uma pequena variação em seu valor, pôde-se então obter uma nova sintonia especificada por mais dois índices de desempenho, o tempo de retorno do sistema e o máximo sobressinal.

Terceiro Passo

A seguir, incorpora-se a última especificação do controlador, o máximo desvio da variável controlada na presença de perturbações. Para tal, o tempo de retorno é convertido em uma restrição e o desvio é incluído como função objetivo do problema.

Tem-se, portanto:

$$\min \Delta(y_{p_{regulatório}}) \quad (4.139)$$

sujeito a:

$$y_{p_{servo}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{p_{servo}}(s)\} \quad (4.140)$$

$$\frac{Y_{p_{servo}}(s)}{U_{servo}(s)} = \frac{768}{1.002 \cdot s + 1} \cdot e^{-60} \quad (4.141)$$

$$U_{servo}(s) = \mathcal{L}\{Z^{-1}\{U_{servo}(z)\}\} \quad (4.142)$$

$$|U_{servo}(z)| \leq 0,0083 \quad (4.143)$$

$$\frac{U_{servo}(z)}{E_{servo}(z)} = \left[K_P + K_I \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \right] \quad (4.144)$$

$$E_{servo}(z) = Z\{y_p(t) - r(t)\} \quad (4.145)$$

$$r_{servo}(t) = 96 + 2 \cdot H(t) \quad (4.146)$$

$$y_{p_{regulatório}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{p_{regulatório}}(s)\} \quad (4.147)$$

$$\frac{Y_{p_{regulatório}}(s)}{U_{regulatório}(s)} = \frac{768}{1.002 \cdot s + 1} \cdot e^{-60} \quad (4.148)$$

$$\frac{Y_{p_{regulatório}}(s)}{D(s)} = \frac{228}{894 \cdot s + 1} \cdot e^{-480} \quad (4.149)$$

$$U_{regulatório}(s) = \mathcal{L}\{Z^{-1}\{U_{regulatório}(z)\}\} \quad (4.150)$$

$$|U_{regulatório}(z)| \leq 0,0083 \quad (4.151)$$

$$D(s) = \mathcal{L}\{d(t)\} \quad (4.152)$$

$$\frac{U_{regulatório}(z)}{E_{regulatório}(z)} = \left[K_P + K_I \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \right] \quad (4.153)$$

$$E_{regulatório}(z) = Z\{y_{p_{regulatório}}(t) - r_{regulatório}(t)\} \quad (4.154)$$

$$r_{regulatório}(t) = 96 \quad (4.155)$$

$$d(t) = -0,02 \cdot H(t) \quad (4.156)$$

$$K_P \in [0: 1] \quad (4.157)$$

$$K_I \in [0: 1] \quad (4.158)$$

$$T = 10 \quad (4.159)$$

$$t_s(y_{p_{servo}}) \leq 1.000 \quad (4.160)$$

$$t_r(y_{p_{servo}}) \leq 500 \quad (4.161)$$

$$M_p(y_{p_{servo}}) \leq 10 \quad (4.162)$$

$$t_{sd}(y_{p_{regulatório}}) \leq 4.000 \quad (4.163)$$

onde o desvio Δ é definido em (4.113) e utilizado na equação (4.139) como função objetivo otimizada nesta iteração, sujeito aos índices já otimizados e impostos como restrições nas equações (4.160) a (4.163).

Resolvendo-se o problema obtém-se a nova sintonia:

$$\begin{cases} K_P = 0,0042 \\ K_I = 4,8 \cdot 10^{-6} \\ T = 10 \\ t_s = 760,7 \\ t_r = 450,9 \\ M_p = 3,52\% \\ t_{sd} = 3.944,7 \\ \Delta = 0,4937 \end{cases}$$

Obtém-se então uma sintonia que otimiza todos os índices de desempenho especificados, priorizando os índices considerados mais importantes.

Análise do Impacto da Prioridade dos Índices de Desempenho na Sintonia

A fim de avaliar o impacto da ordem de prioridade escolhida para os índices de desempenho otimizados na sintonia obtida, resolve-se novamente o mesmo problema, porém com a seguinte prioridade:

1. Tempo de retorno;
2. Desvio máximo;
3. Tempo de acomodação;
4. Tempo de subida;
5. Sobressinal;

Com esta especificação, o novo problema resolvido no passo final é:

$$\min M_p(y_{p_{servo}}) \quad (4.164)$$

sujeito a:

$$y_{p_{servo}}(t) = 96 + \mathcal{L}^{-1}\{Y_{p_{servo}}(s)\} \quad (4.165)$$

$$\frac{Y_{p_{servo}}(s)}{U_{servo}(s)} = \frac{768}{1.002 \cdot s + 1} \cdot e^{-60} \quad (4.166)$$

$$U_{servo}(s) = \mathcal{L}\{Z^{-1}\{U_{servo}(z)\}\} \quad (4.167)$$

$$|U_{servo}(z)| \leq 0,0083 \quad (4.168)$$

$$\frac{U_{servo}(z)}{E_{servo}(z)} = \left[K_P + K_I \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \right] \quad (4.169)$$

$$E_{servo}(z) = Z\{y_p(t) - r(t)\} \quad (4.170)$$

$$r_{servo}(t) = 96 + 2 \cdot H(t) \quad (4.171)$$

$$y_{p_{regulatório}}(t) = 96 + \mathcal{L}^{-1}\{Y_{p_{regulatório}}(s)\} \quad (4.172)$$

$$\frac{Y_{p_{regulatório}}(s)}{U_{regulatório}(s)} = \frac{768}{1.002 \cdot s + 1} \cdot e^{-60} \quad (4.173)$$

$$\frac{Y_{p_{regulatório}}(s)}{D(s)} = \frac{228}{894 \cdot s + 1} \cdot e^{-480} \quad (4.174)$$

$$U_{regulatório}(s) = \mathcal{L}\{Z^{-1}\{U_{regulatório}(z)\}\} \quad (4.175)$$

$$|U_{regulatório}(z)| \leq 0,0083 \quad (4.176)$$

$$D(s) = \mathcal{L}\{d(t)\} \quad (4.177)$$

$$\frac{U_{regulatório}(z)}{E_{regulatório}(z)} = \left[K_P + K_I \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \right] \quad (4.178)$$

$$E_{regulatório}(z) = Z\{y_{p_{regulatório}}(t) - r_{regulatório}(t)\} \quad (4.179)$$

$$r_{regulatório}(t) = 96 \quad (4.180)$$

$$d(t) = -0,02 \cdot H(t) \quad (4.181)$$

$$K_P \in [0:1] \quad (4.182)$$

$$K_I \in [0:1] \quad (4.183)$$

$$T = 10 \quad (4.184)$$

$$t_{sd}(y_{p_{regulatório}}) \leq 1.100 \quad (4.185)$$

$$\Delta(y_{p_{regulatório}}) \leq 0,3 \quad (4.186)$$

$$t_s(y_{p_{servo}}) \leq 1.100 \quad (4.187)$$

$$t_r(y_{p_{servo}}) \leq 500 \quad (4.188)$$

Resolvendo o problema obtém-se:

$$\begin{cases} K_p = 0,0117 \\ K_I = 4,9 \cdot 10^{-5} \\ T = 10 \\ t_s = 1.098,8 \\ t_r = 299,1 \\ M_p = 62,3\% \\ t_{sd} = 1.087,7 \\ \Delta = 0,2867 \end{cases}$$

Comparando-se esta sintonia com aquela obtida no item anterior para o mesmo problema com diferentes prioridades para os índices de desempenho notam-se diferenças significativas nos parâmetros e nos correspondentes desempenhos, evidenciando a importância de escolher-se adequadamente a prioridade dos índices otimizados.

Sintonias Especificadas por Integrais Quadráticas das Respostas ao Degrau

Neste segundo exemplo de sintonia multiobjetivo, especifica-se o desempenho desejável para o controlador através dos seguintes índices de desempenho:

- ISE servo;
- ISU servo;
- ISE regulatório;
- ISU regulatório.

Para a obtenção desta sintonia, emprega-se um índice de desempenho composto conforme descrito na seção 3.5.11.

Para a ponderação do índice composto conforme a equação (3.97) adotam-se os pesos 0,9 e 0,1 para os termos referentes ao erro e aos esforços de controle, respectivamente, e os pesos 0,3 e 0,7 para a resposta ao degrau e a rejeição de perturbações, respectivamente, assumindo-se que a principal função do controlador é rejeitar perturbações.

Tem-se então o seguinte índice de desempenho a ser otimizado:

$$J = 0,3 \cdot \left(0,9 \cdot ISE(y_{p_{servo}}) + 0,1 \cdot ISU(u_{servo}) \right) + 0,7 \cdot \left(0,9 \cdot ISE(y_{p_{regulatório}}) + 0,1 \cdot ISU(u_{regulatório}) \right) \quad (4.189)$$

Para a obtenção da sintonia, formula-se o seguinte problema de otimização:

$$\min J = 0,3 \cdot \left(0,9 \cdot ISE(y_{p_{servo}}) + 0,1 \cdot ISU(u_{servo}) \right) + 0,7 \cdot \left(0,9 \cdot ISE(y_{p_{regulatório}}) + 0,1 \cdot ISU(u_{regulatório}) \right) \quad (4.190)$$

sujeito a:

$$y_{p_{servo}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{p_{servo}}(s)\} \quad (4.191)$$

$$u_{servo}(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{U_{servo}(z)\} \quad (4.192)$$

$$\frac{Y_{p_{servo}}(s)}{U_{servo}(s)} = \frac{768}{1.002 \cdot s + 1} \cdot e^{-60} \quad (4.193)$$

$$U_{servo}(s) = \mathcal{L}\{u_{servo}(t)\} \quad (4.194)$$

$$|U_{servo}(z)| \leq 0,0083 \quad (4.195)$$

$$\frac{U_{servo}(z)}{E_{servo}(z)} = \left[K_P + K_I \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \right] \quad (4.196)$$

$$E_{servo}(z) = \mathcal{Z}\{y_p(t) - r(t)\} \quad (4.197)$$

$$r_{servo}(t) = 96 + 2 \cdot H(t) \quad (4.198)$$

$$y_{p_{regulatório}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{p_{regulatório}}(s)\} \quad (4.199)$$

$$u_{regulatório}(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{U_{regulatório}(z)\} \quad (4.200)$$

$$\frac{Y_{p_{regulatório}}(s)}{U_{regulatório}(s)} = \frac{768}{1.002 \cdot s + 1} \cdot e^{-60} \quad (4.201)$$

$$\frac{Y_{p_{regulatório}}(s)}{D(s)} = \frac{228}{894 \cdot s + 1} \cdot e^{-480} \quad (4.202)$$

$$U_{regulatório}(s) = \mathcal{L}\{u_{regulatório}(t)\} \quad (4.203)$$

$$D(s) = \mathcal{L}\{d(t)\} \quad (4.204)$$

$$\frac{U_{regulatório}(z)}{E_{regulatório}(z)} = \left[K_P + K_I \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \right] \quad (4.205)$$

$$|U_{regulatório}(z)| \leq 0,0083 \quad (4.206)$$

$$E_{regulatório}(z) = \mathcal{Z} \{y_{p_{regulatório}}(t) - r_{regulatório}(t)\} \quad (4.207)$$

$$r_{regulatório}(t) = 96 \quad (4.208)$$

$$K_P \in [0:1] \quad (4.209)$$

$$K_I \in [0:1] \quad (4.210)$$

$$T = 10 \quad (4.211)$$

Resolvendo o problema, obtém-se:

$$\begin{cases} K_P = 0,023 \\ K_I = 1,0 \cdot 10^{-5} \\ T = 10 \\ ISE_{servo} = 7.574,7 \\ ISU_{servo} = 0,1327 \\ ISE_{regulatório} = 228,9 \\ ISU_{regulatório} = 0,1303 \\ J = 2.189,4 \end{cases}$$

Sintonias Especificadas por Integrais Absolutas das Respostas ao Degrau

Especifica-se aqui o desempenho desejável para o controlador através dos seguintes índices de desempenho:

- IAE servo;
- IU servo;
- IAE regulatório;
- IU regulatório.

Para a obtenção desta sintonia, emprega-se um índice de desempenho composto conforme descrito na seção 3.5.11.

Para a ponderação do índice composto conforme a equação (3.97), adotam-se os pesos 0,9 e 0,1 para os termos referentes ao erro e aos esforços de controle, respectivamente, representando os custos relacionados ao produto fora de especificação e ao gasto de materiais para alterar a composição das saídas da coluna. Os pesos 0,3 e 0,7 são adotados para ponderar a resposta ao degrau e a rejeição de perturbações, assumindo-se que a principal função do controlador é rejeitar perturbações.

Tem-se então o seguinte índice de desempenho a ser otimizado:

$$J = 0,3 \cdot \left(0,9 \cdot IAE(y_{p_{servo}}) + 0,1 \cdot IU(u_{servo}) \right) + 0,7 \cdot \left(0,9 \cdot IAE(y_{p_{regulatório}}) + 0,1 \cdot IU(u_{regulatório}) \right) \quad (4.212)$$

Atualizando o problema de otimização apresentado no item anterior e sintetizando as equações referentes ao modelo da planta, tem-se:

$$\min J = 0,3 \cdot \left(0,9 \cdot IAE(y_{p_{servo}}) + 0,1 \cdot IU(u_{servo}) \right) + 0,7 \cdot \left(0,9 \cdot IAE(y_{p_{regulatório}}) + 0,1 \cdot IU(u_{regulatório}) \right) \quad (4.213)$$

sujeito a:

$$\{y_{p_{servo}}(t), u_{servo}(t), y_{p_{regulatório}}(t), u_{regulatório}\} = Modelo(K_P, K_I, T, t) \quad (4.214)$$

$$K_P \in [0:1] \quad (4.215)$$

$$K_I \in [0:1] \quad (4.216)$$

$$T = 10 \quad (4.217)$$

onde a função *Modelo* encerra as equações (4.117) a (4.132).

Resolvendo o problema, obtém-se a seguinte sintonia:

$$\begin{cases} K_P = 0,0163 \\ K_I = 5,2 \cdot 10^{-5} \\ T = 10 \\ IAE_{servo} = 9.424,7 \\ IU_{servo} = 41,8020 \\ IAE_{regulatório} = 626,1 \\ IU_{regulatório} = 43,5603 \\ J = 1.981,2 \end{cases}$$

Respostas do Sistema com as Sintonias Obtidas

As Figuras 4-13 e 4-14 apresentam, respectivamente, as respostas ao degrau e a rejeição de perturbação do sistema controlado com as três sintonias obtidas.

Como esperado, os comportamentos obtidos são distintos, uma vez que atendem a diferentes especificações de desempenho.

Figura 4-13 – Respostas ao Degrau.

Figura 4-14 – Rejeições de Perturbações.

Observações e Comentários

Esta segunda parte do exemplo contemplou a sintonia multiobjetivo de controladores, uma forma mais abrangente e flexível para a obtenção de uma boa sintonia que a utilização de um único índice de desempenho.

A abordagem multiobjetivo permite também uma especificação iterativa do desempenho de um controlador, ou seja, escolhe-se um índice de desempenho e determina-se seu valor ótimo, então especifica-se o desempenho deste sistema sabendo o melhor valor atingível e, em seguida, faz-se o mesmo para outro índice de desempenho e assim sucessivamente até que todos os índices de interesse sejam contemplados. Esta abordagem é bastante útil quando se deseja sintonizar um controlador, mas não se tem uma especificação bem definida, ou não são conhecidos os limites do sistema.

Como, em geral, não se tem bem definidos valores desejados para todas as características dinâmicas de um sistema, não se sabe quais os valores limites para as restrições da sintonia tais que o problema tenha solução factível e/ou não se conhece os limites atingíveis, ainda que independentemente, para cada índice de desempenho considerado, a abordagem multiobjetivo permite não apenas solucionar o problema de otimizar múltiplos índices que não são facilmente combináveis, mas também o problema de determinar os valores de cada requisito da especificação da sintonia.

A seção seguinte estende a abordagem multiobjetivo para o problema multivariável.

c. Sintonia Ótima Multiobjetivo Multivariável de PID

Considera-se agora o modelo completo da coluna de destilação, com suas duas entradas e duas saídas e com dois controladores PI instalados para controle simultâneo das composições de topo e de fundo da coluna. Realiza-se então uma sintonia multivariável do sistema, ou seja, buscando-se parâmetros de sintonia para os dois controladores de modo a otimizar o desempenho global do sistema.

Para a obtenção das sintonias multivariáveis, inicialmente expande-se o modelo do processo utilizado na otimização, a seguir, especifica-se o desempenho desejado através de índices de desempenho quadráticos, índices absolutos e de tempos e amplitudes, resolvendo-se o problema de sintonia ótima para cada especificação.

Modelo Multivariável

Para a obtenção das respostas simuladas da planta, estende-se o modelo empregado nos itens anteriores para abranger todas as variáveis e cenários de interesse.

Tem-se, então:

$$y_1(t) = y_{1 \times u_1}(t) + y_{1 \times u_2}(t) + y_{1 \times d}(t) \quad (4.218)$$

$$y_2(t) = y_{2 \times u_1}(t) + y_{2 \times u_2}(t) + y_{2 \times d}(t) \quad (4.219)$$

$$y_{1 \times u_1}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{1 \times u_1}(s)\} \quad (4.220)$$

$$y_{1 \times u_2}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{1 \times u_2}(s)\} \quad (4.221)$$

$$y_{2 \times u_1}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{2 \times u_1}(s)\} \quad (4.222)$$

$$y_{2 \times u_2}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{2 \times u_2}(s)\} \quad (4.223)$$

$$y_{1 \times d}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{1 \times d}(s)\} \quad (4.224)$$

$$y_{2 \times d}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{2 \times d}(s)\} \quad (4.225)$$

$$\frac{Y_{1 \times u_1}(s)}{U_1(s)} = \frac{768}{1.002 \cdot s + 1} \cdot e^{-60} \quad (4.226)$$

$$\frac{Y_{1 \times u_2}(s)}{U_2(s)} = \frac{-1.134}{1.260 \cdot s + 1} \cdot e^{-180} \quad (4.227)$$

$$\frac{Y_{2 \times u_1}(s)}{U_1(s)} = \frac{396}{645 \cdot s + 1} \cdot e^{-420} \quad (4.228)$$

$$\frac{Y_{2 \times u_2}(s)}{U_2(s)} = \frac{-1.164}{864 \cdot s + 1} \cdot e^{-180} \quad (4.229)$$

$$\frac{Y_{1 \times d}(s)}{D(s)} = \frac{228}{894 \cdot s + 1} \cdot e^{-480} \quad (4.230)$$

$$\frac{Y_{2 \times d}(s)}{D(s)} = \frac{294}{792 \cdot s + 1} \cdot e^{-180} \quad (4.231)$$

$$U_1(s) = \mathcal{L}\{u_1(t)\} \quad (4.232)$$

$$U_2(s) = \mathcal{L}\{u_2(t)\} \quad (4.233)$$

$$u_1(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{U_1(z)\} \quad (4.234)$$

$$u_2(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{U_2(z)\} \quad (4.235)$$

$$|U_1(z)| \leq 0,0083 \quad (4.236)$$

$$|U_2(z)| \leq 0,0083 \quad (4.237)$$

$$\frac{U_1(z)}{E_1(z)} = \left[K_{P_1} + K_{I_1} \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \right] \quad (4.238)$$

$$\frac{U_2(z)}{E_2(z)} = \left[K_{P_2} + K_{I_2} \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \right] \quad (4.239)$$

$$E_1(z) = \mathcal{Z}\{y_1(t) - r_1(t)\} \quad (4.240)$$

$$E_2(z) = \mathcal{Z}\{y_2(t) - r_2(t)\} \quad (4.241)$$

$$D(s) = \mathcal{L}\{d(t)\} \quad (4.242)$$

onde $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são, respectivamente, a composição de topo e a composição de fundo da coluna, $u_1(t)$ e $u_2(t)$ são, respectivamente, as vazões de refluxo e de vapor, $r_1(t)$ e $r_2(t)$ são, respectivamente, as referências para a composição de topo e de fundo da coluna, $d(t)$ é a perturbação na vazão de alimentação e K_{P_1} , K_{I_1} , K_{P_2} e K_{I_2} são os parâmetros de sintonia dos controladores.

Para o cenário de mudança de referência da composição de topo da coluna, são aplicadas ao sistema as seguintes excitações:

$$r_{1servo_1}(t) = 96 + 2 \cdot H(t) \quad (4.243)$$

$$r_{2servo_1}(t) = 0,5 \quad (4.244)$$

$$d_{servo_1}(t) \equiv 0 \quad (4.245)$$

de onde se obtém, a partir do modelo, as respostas temporais $y_{1servo_1}(t)$, $y_{2servo_1}(t)$, $u_{1servo_1}(t)$ e $u_{2servo_1}(t)$.

Para a resposta do sistema à mudança de referência da composição de fundo da coluna, são aplicadas ao sistema as seguintes excitações:

$$r_{1servo_2}(t) = 96 \quad (4.246)$$

$$r_{2servo_2}(t) = 0,5 - 0,3 \cdot H(t) \quad (4.247)$$

$$d_{servo_2}(t) \equiv 0 \quad (4.248)$$

de onde se obtém, a partir do modelo, as respostas temporais $y_{1servo_2}(t)$, $y_{2servo_2}(t)$, $u_{1servo_2}(t)$ e $u_{2servo_2}(t)$.

Finalmente, para a rejeição de perturbações do sistema, são aplicadas ao sistema as seguintes excitações:

$$r_{1regulatório}(t) = 96 \quad (4.249)$$

$$r_{2regulatório}(t) = 0,5 \quad (4.250)$$

$$d_{regulatório}(t) = 0 + 0,01 \cdot H(t) \quad (4.251)$$

de onde se obtém, a partir do modelo, as respostas temporais $y_{1regulatório}(t)$, $y_{2regulatório}(t)$, $u_{1regulatório}(t)$ e $u_{2regulatório}(t)$.

Tem-se assim um modelo completo para ser utilizado na obtenção de sintonias de controladores PI para qualquer especificação multiobjetivo e multivariável para esta planta.

Sintonia Especificada por Integrais Quadráticas das Respostas ao Degrau

Como primeira especificação de desempenho, deseja-se obter uma sintonia que otimize uma ponderação dos índices de desempenho quadráticos, ISE e ISU, calculados para mudança de referência de cada uma das entradas e para ocorrência de perturbação.

Em cada cenário, adotam-se os pesos 0,9 e 0,1 para o ISE e o ISU, respectivamente. Para a composição de topo, adotam-se os pesos 0,3 para a sua resposta servo, 0,2 para a rejeição de perturbações causadas por mudanças na referência da composição de fundo e 0,5 para a rejeição de perturbações na vazão de alimentação. Para a composição de fundo, adotam-se os pesos 0,3 para a sua resposta servo, 0,1 para a rejeição de perturbações causadas por mudanças na referência da composição de topo e 0,6 para a rejeição de perturbações na vazão de alimentação. Para a geração do índice de desempenho final, ponderam-se os

índices parciais da composição de topo e de fundo com os pesos 0,7 e 0,3, respectivamente. Estas escolhas de pesos refletem a operação da planta na maior parte do tempo com referências fixas e a maior importância que se dá à manutenção da composição de topo no valor desejado.

Escrevendo os índices de desempenho parciais e global, tem-se:

$$\begin{aligned}
 J_{q_1} = & \\
 & 0,3 \cdot \left(0,9 \cdot ISE \left(y_{1_{servo_1}}(t) - r_{1_{servo_1}}(t) \right) + 0,1 \cdot ISU \left(u_{1_{servo_1}}(t) \right) \right) \\
 & + 0,2 \cdot \left(0,9 \cdot ISE \left(y_{1_{servo_2}}(t) - r_{1_{servo_2}}(t) \right) + 0,1 \cdot ISU \left(u_{1_{servo_2}}(t) \right) \right) \\
 & + 0,5 \cdot \left(0,9 \cdot ISE \left(y_{1_{regulatório}}(t) - r_{1_{regulatório}}(t) \right) + 0,1 \cdot ISU \left(u_{1_{regulatório}}(t) \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.252}$$

$$\begin{aligned}
 J_{q_2} = & \\
 & 0,1 \cdot \left(0,9 \cdot ISE \left(y_{2_{servo_1}}(t) - r_{2_{servo_1}}(t) \right) + 0,1 \cdot ISU \left(u_{2_{servo_1}}(t) \right) \right) \\
 & + 0,3 \cdot \left(0,9 \cdot ISE \left(y_{2_{servo_2}}(t) - r_{2_{servo_2}}(t) \right) + 0,1 \cdot ISU \left(u_{2_{servo_2}}(t) \right) \right) \\
 & + 0,6 \cdot \left(0,9 \cdot ISE \left(y_{2_{regulatório}}(t) - r_{2_{regulatório}}(t) \right) + 0,1 \cdot ISU \left(u_{2_{regulatório}}(t) \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.253}$$

$$J_{quad} = 0,7 \cdot J_{q_1} + 0,3 \cdot J_{q_2} \tag{4.254}$$

Formula-se então o seguinte problema de sintonia ótima:

$$\min J_{quad} \tag{4.255}$$

sujeito a:

$$\{y_{1_{servo_1}}(t), y_{2_{servo_1}}(t), u_{1_{servo_1}}(t), u_{2_{servo_1}}(t), r_{1_{servo_1}}, r_{1_{servo_1}}\} = \text{Modelo}\{\text{Servo}_1\} \tag{4.256}$$

$$\{y_{1_{servo_2}}(t), y_{2_{servo_2}}(t), u_{1_{servo_2}}(t), u_{2_{servo_2}}(t), r_{1_{servo_2}}, r_{1_{servo_2}}\} = \text{Modelo}\{\text{Servo}_2\} \tag{4.257}$$

$$\begin{aligned}
 & \{y_{1_{regulatório}}(t), y_{2_{regulatório}}(t), u_{1_{regulatório}}(t), u_{2_{regulatório}}(t), r_{1_{regulatório}}, r_{1_{regulatório}}\} \\
 & = \text{Modelo}\{\text{Regulatório}\}
 \end{aligned} \tag{4.258}$$

$$K_{P_1} \in [0: 1] \tag{4.259}$$

$$K_{I_1} \in [0: 1] \tag{4.260}$$

$$K_{P_2} \in [0: 1] \quad (4.261)$$

$$K_{I_2} \in [0: 1] \quad (4.262)$$

$$T = 10 \quad (4.263)$$

onde a função objetivo (4.255) é como definida em (4.252) a (4.254), as equações (4.256) a (4.258) representam o modelo definido pelas equações (4.218) a (4.242) com as excitações descritas por (4.243) a (4.245), (4.246) a (4.248) e (4.249) a (4.251), respectivamente, as equações (4.259) a (4.262) definem os limites dos parâmetros do controlador e a equação (4.263) determina o período de amostragem do controlador.

Resolvendo o problema de otimização determinado pelas equações (4.255) a (4.263), obtêm-se os seguintes parâmetros de sintonia e respectivos índices de desempenho:

$$\begin{cases} K_{P_1} = 0,023 \\ K_{I_1} = 1,2 \cdot 10^{-5} \\ K_{P_2} = 0,0027 \\ K_{I_2} = 4,8 \cdot 10^{-6} \\ T = 10 \\ J_{quad} = 2.228,4 \\ J_{abs} = 3.552,6 \end{cases}$$

Sintonia Especificada por Integrais Absolutas das Respostas ao Degrau

Especifica-se agora o desempenho desejado para o processo através de índices de desempenho baseados na integral absoluta do erro, IAE, e na integral do esforço de controle, IU, que mede o consumo de material do sistema.

Avaliam-se os mesmos cenários e adotam-se os mesmos pesos de ponderação utilizados no item anterior, tendo-se:

$$\begin{aligned} J_{a_1} = & 0,3 \cdot \left(0,9 \cdot IAE \left(y_{1_{servo_1}}(t) - r_{1_{servo_1}}(t) \right) + 0,1 \cdot IU \left(u_{1_{servo_1}}(t) \right) \right) \\ & + 0,2 \cdot \left(0,9 \cdot IAE \left(y_{1_{servo_2}}(t) - r_{1_{servo_2}}(t) \right) + 0,1 \cdot IU \left(u_{1_{servo_2}}(t) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.264)$$

$$\begin{aligned}
& +0,5 \cdot \left(0,9 \cdot IAE \left(y_{1_{regulatório}}(t) - r_{1_{regulatório}}(t) \right) + 0,1 \cdot IU \left(u_{1_{regulatório}}(t) \right) \right) \\
J_{a_2} = & \\
& 0,1 \cdot \left(0,9 \cdot IAE \left(y_{2_{servo_1}}(t) - r_{2_{servo_1}}(t) \right) + 0,3 \cdot IU \left(u_{2_{servo_1}}(t) \right) \right) \\
& +0,3 \cdot \left(0,9 \cdot IAE \left(y_{2_{servo_2}}(t) - r_{2_{servo_2}}(t) \right) + 0,1 \cdot IU \left(u_{2_{servo_2}}(t) \right) \right) \\
& +0,6 \cdot \left(0,9 \cdot IAE \left(y_{2_{regulatório}}(t) - r_{2_{regulatório}}(t) \right) + 0,1 \cdot IU \left(u_{2_{regulatório}}(t) \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.265}$$

$$J_{abs} = 0,7 \cdot J_{a_1} + 0,3 \cdot J_{a_2} \tag{4.266}$$

O problema de otimização resultante é:

$$\min J_{abs} \tag{4.267}$$

sujeito a:

$$\{y_{1_{servo_1}}(t), y_{2_{servo_1}}(t), u_{1_{servo_1}}(t), u_{2_{servo_1}}(t), r_{1_{servo_1}}, r_{1_{servo_1}}\} = \text{Modelo}\{\text{Servo}_1\} \tag{4.268}$$

$$\{y_{1_{servo_2}}(t), y_{2_{servo_2}}(t), u_{1_{servo_2}}(t), u_{2_{servo_2}}(t), r_{1_{servo_2}}, r_{1_{servo_2}}\} = \text{Modelo}\{\text{Servo}_2\} \tag{4.269}$$

$$\begin{aligned}
& \{y_{1_{regulatório}}(t), y_{2_{regulatório}}(t), u_{1_{regulatório}}(t), u_{2_{regulatório}}(t), r_{1_{regulatório}}, r_{1_{regulatório}}\} \\
& = \text{Modelo}\{\text{Regulatório}\}
\end{aligned} \tag{4.270}$$

$$K_{P_1} \in [0: 1] \tag{4.271}$$

$$K_{I_1} \in [0: 1] \tag{4.272}$$

$$K_{P_2} \in [0: 1] \tag{4.273}$$

$$K_{I_2} \in [0: 1] \tag{4.274}$$

$$T = 10 \tag{4.275}$$

Resolvendo o problema de otimização descrito por (4.267) a (4.275), obtêm-se os seguintes parâmetros de sintonia e respectivos índices de desempenho:

$$\begin{cases} K_{P_1} = 0,0221 \\ K_{I_1} = 1,2 \cdot 10^{-5} \\ K_{P_2} = 0,0019 \\ K_{I_2} = 4,8 \cdot 10^{-6} \\ T = 10 \\ J_{quad} = 2.350,1 \\ J_{abs} = 3.192,1 \end{cases}$$

Sintonia Especificada por Tempos e Amplitudes

Utiliza-se agora a abordagem proposta na seção 2.3.2 para a obtenção de uma sintonia que atenda a uma especificação construída progressivamente e baseada em tempos e amplitudes das respostas do sistema.

Parte-se inicialmente da especificação e respectivas sintonia obtidas anteriormente para a composição de topo da coluna, estendendo-se progressivamente a especificação para a composição de fundo.

Primeiro Passo

Inicialmente busca-se uma sintonia que atenda às especificações determinadas no item anterior, de sintonias multiobjetivo, para tempos e amplitudes, adaptada para considerar o modelo completo do sistema e o controlador da composição de fundo ativo.

Tem-se a seguinte formulação para o problema de sintonia ótima:

$$\min t_s(y_{1_{servo1}}) \quad (4.276)$$

sujeito a:

$$\{y_{1_{servo1}}(t), y_{2_{servo1}}(t), u_{1_{servo1}}(t), u_{2_{servo1}}(t), r_{1_{servo1}}, r_{1_{servo1}}\} = \text{Modelo}\{\text{Servo}_1\} \quad (4.277)$$

$$\{y_{1_{servo2}}(t), y_{2_{servo2}}(t), u_{1_{servo2}}(t), u_{2_{servo2}}(t), r_{1_{servo2}}, r_{1_{servo2}}\} = \text{Modelo}\{\text{Servo}_2\} \quad (4.278)$$

$$\begin{aligned} \{y_{1_{regulatório}}(t), y_{2_{regulatório}}(t), u_{1_{regulatório}}(t), u_{2_{regulatório}}(t), r_{1_{regulatório}}, r_{1_{regulatório}}\} \\ = \text{Modelo}\{\text{Regulatório}\} \end{aligned} \quad (4.279)$$

$$t_r(y_{1_{servo_1}}) \leq 500 \quad (4.280)$$

$$M_p(y_{1_{servo_1}}) \leq 50 \quad (4.281)$$

$$t_{sd}(y_{1_{servo_2}}) \leq 5.000 \quad (4.282)$$

$$\Delta(y_{1_{servo_2}}) \leq 0,5 \quad (4.283)$$

$$t_{sd}(y_{1_{regulatório}}) \leq 5.000 \quad (4.284)$$

$$\Delta(y_{1_{regulatório}}) \leq 0,5 \quad (4.285)$$

$$K_{P_1} \in [0: 1] \quad (4.286)$$

$$K_{I_1} \in [0: 1] \quad (4.287)$$

$$K_{P_2} \in [0: 1] \quad (4.288)$$

$$K_{I_2} \in [0: 1] \quad (4.289)$$

$$T = 10 \quad (4.290)$$

Resolvendo este problema de otimização, obtém-se a seguinte sintonia para os controladores:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{P_1} = 0,0056 \\ K_{I_1} = 1,3 \cdot 10^{-5} \\ K_{P_2} = 0,0009 \\ K_{I_2} = 4,1 \cdot 10^{-6} \\ T = 10 \\ t_s(y_{1_{servo_1}}) = 2.530,8 \\ t_r(y_{1_{servo_1}}) = 299,1 \\ M_p(y_{1_{servo_1}}) = 48,5 \\ t_{sd}(y_{1_{servo_2}}) = 3.238,4 \\ \Delta(y_{1_{servo_2}}) = 0,0852 \\ t_{sd}(y_{1_{regulatório}}) = 4.854,9 \\ \Delta(y_{1_{regulatório}}) = 0,2763 \\ J_{quad} = 3.313,3 \\ J_{abs} = 4.840,8 \end{array} \right.$$

Segundo Passo

Encontrado um desempenho ótimo para o controlador da composição de topo na presença do segundo controlador, inclui-se agora no problema o tempo de acomodação da composição de fundo como função objetivo. Escolhe-se minimizar o tempo de acomodação da segunda saída antes das suas demais características porque, quanto mais rápido esta saída estabilizar, mais rapidamente a primeira saída também estabilizará devido ao acoplamento das duas.

Tem-se agora:

$$\min t_s(y_{2_{servo2}}) \quad (4.291)$$

sujeito a:

$$\{y_{1_{servo1}}(t), y_{2_{servo1}}(t), u_{1_{servo1}}(t), u_{2_{servo1}}(t), r_{1_{servo1}}, r_{1_{servo1}}\} = \text{Modelo}\{\text{Servo}_1\} \quad (4.292)$$

$$\{y_{1_{servo2}}(t), y_{2_{servo2}}(t), u_{1_{servo2}}(t), u_{2_{servo2}}(t), r_{1_{servo2}}, r_{1_{servo2}}\} = \text{Modelo}\{\text{Servo}_2\} \quad (4.293)$$

$$\{y_{1_{regulatório}}(t), y_{2_{regulatório}}(t), u_{1_{regulatório}}(t), u_{2_{regulatório}}(t), r_{1_{regulatório}}, r_{1_{regulatório}}\} \\ = \text{Modelo}\{\text{Regulatório}\} \quad (4.294)$$

$$t_s(y_{1_{servo1}}) \leq 3.000 \quad (4.295)$$

$$t_r(y_{1_{servo1}}) \leq 500 \quad (4.296)$$

$$M_p(y_{1_{servo1}}) \leq 50 \quad (4.297)$$

$$t_{sd}(y_{1_{servo2}}) \leq 5.000 \quad (4.298)$$

$$\Delta(y_{1_{servo2}}) \leq 0,5 \quad (4.299)$$

$$t_{sd}(y_{1_{regulatório}}) \leq 5.000 \quad (4.300)$$

$$\Delta(y_{1_{regulatório}}) \leq 0,5 \quad (4.301)$$

$$K_{P_1} \in [0: 1] \quad (4.302)$$

$$K_{I_1} \in [0: 1] \quad (4.303)$$

$$K_{P_2} \in [0: 1] \quad (4.304)$$

$$K_{I_2} \in [0: 1] \quad (4.305)$$

$$T = 10 \quad (4.306)$$

Resolvendo o problema de sintonia ótima, resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{P_1} = 0,0055 \\ K_{I_1} = 1,2 \cdot 10^{-5} \\ K_{P_2} = 0,0009 \\ K_{I_2} = 4,1 \cdot 10^{-6} \\ T = 10 \\ t_s(y_{1_{servo1}}) = 2.537,3 \\ t_r(y_{1_{servo1}}) = 299,1 \\ M_p(y_{1_{servo1}}) = 42,7 \\ t_{sd}(y_{1_{servo2}}) = 3.251,4 \\ \Delta(y_{1_{servo2}}) = 0,0875 \\ t_{sd}(y_{1_{regulatório}}) = 5.072,9 \\ \Delta(y_{1_{regulatório}}) = 0,2783 \\ t_s(y_{2_{servo2}}) = 2.826,8 \\ J_{quad} = 3.283,1 \\ J_{abs} = 4.819,8 \end{array} \right.$$

Nota-se que a sintonia obtida já é praticamente a mesma da especificação anterior.

Terceiro Passo

Considerando a sintonia obtida satisfatória, passa-se a um processo de refinamento da mesma. Para tal, impõem-se todos os índices de desempenho de interesse como restrições para a otimização e seleciona-se o mais importante a ser otimizado novamente. A seguir, analisa-se o desempenho da sintonia obtida segundo cada índice selecionado, ajustando as restrições do problema para a obtenção da sintonia final.

Após a revisão, o problema de sintonia ótima obtido é:

$$\min t_s(y_{1_{servo1}}) \quad (4.307)$$

sujeito a:

$$\{y_{1_{servo1}}(t), y_{2_{servo1}}(t), u_{1_{servo1}}(t), u_{2_{servo1}}(t), r_{1_{servo1}}, r_{1_{servo1}}\} = \text{Modelo}\{\text{Servo}_1\} \quad (4.308)$$

$$\{y_{1_{servo2}}(t), y_{2_{servo2}}(t), u_{1_{servo2}}(t), u_{2_{servo2}}(t), r_{1_{servo2}}, r_{1_{servo2}}\} = \text{Modelo}\{\text{Servo}_2\} \quad (4.309)$$

$$\{y_{1_{regulatório}}(t), y_{2_{regulatório}}(t), u_{1_{regulatório}}(t), u_{2_{regulatório}}(t), r_{1_{regulatório}}, r_{1_{regulatório}}\} \\ = \text{Modelo}\{\text{Regulatório}\} \quad (4.310)$$

$$t_r(y_{1_{servo1}}) \leq 500 \quad (4.311)$$

$$t_r(y_{2_{servo2}}) \leq 500 \quad (4.312)$$

$$t_s(y_{2_{servo2}}) \leq 3.000 \quad (4.313)$$

$$t_{sd}(y_{1_{servo2}}) \leq 5.000 \quad (4.314)$$

$$t_{sd}(y_{1_{regulatório}}) \leq 5.000 \quad (4.315)$$

$$t_{sd}(y_{2_{servo1}}) \leq 5.000 \quad (4.316)$$

$$t_{sd}(y_{2_{regulatório}}) \leq 5.000 \quad (4.317)$$

$$M_p(y_{1_{servo1}}) \leq 50 \quad (4.318)$$

$$\Delta(y_{2_{servo1}}) \leq 2 \quad (4.319)$$

$$\Delta(y_{2_{regulatório}}) \leq 2 \quad (4.320)$$

$$K_{P_1} \in [0: 1] \quad (4.321)$$

$$K_{I_1} \in [0: 1] \quad (4.322)$$

$$K_{P_2} \in [0: 1] \quad (4.323)$$

$$K_{I_2} \in [0: 1] \quad (4.324)$$

$$T = 10 \quad (4.325)$$

Resolvendo o problema de sintonia ótima, obtém-se a sintonia final:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{P_1} = 0,0057 \\ K_{I_1} = 1,3 \cdot 10^{-5} \\ K_{P_2} = 0,0009 \\ K_{I_2} = 4,0 \cdot 10^{-6} \\ T = 10 \\ t_s(y_{1_{servo1}}) = 2.504,0 \\ t_s(y_{2_{servo2}}) = 2.808,7 \\ t_r(y_{1_{servo1}}) = 299,1 \\ t_r(y_{2_{servo2}}) = 426,5 \\ M_p(y_{1_{servo1}}) = 48,2 \\ t_{sd}(y_{1_{servo2}}) = 3.208,6 \\ \Delta(y_{1_{servo2}}) = 0,0831 \\ t_{sd}(y_{1_{regulatório}}) = 4.937,8 \\ \Delta(y_{1_{regulatório}}) = 0,2672 \\ t_{sd}(y_{2_{servo1}}) = 3.465,8 \\ \Delta(y_{2_{servo1}}) = 1,3826 \\ t_{sd}(y_{2_{regulatório}}) = 3.255,2 \\ \Delta(y_{2_{regulatório}}) = 1,1416 \\ J_{quad} = 3.300,3 \\ J_{abs} = 4.758,5 \end{array} \right.$$

Tem-se então uma sintonia ótima especificada por tempos e amplitudes.

Respostas do Sistema com as Sintonias Obtidas

As Figuras 4-15, 4-16 e 4-17 apresentam as respostas do sistema com as três sintonias multivariáveis obtidas, para índice de desempenho quadrático, índice absoluto e especificado por tempos e amplitudes.

Figura 4-15 – Respostas ao degrau na referência da composição de topo.

Figura 4-16 – Respostas ao degrau na referência da composição de fundo.

Figura 4-17 – Rejeição de perturbação.

Como é possível observar, as respostas obtidas são significativamente distintas, cada uma otimizando a respectiva especificação escolhida. Para uma comparação mais objetiva entre as sintonias obtidas, a Tabela 4-8 apresenta os índices de desempenho calculados para a sintonia ótima para índice quadrático, a sintonia para índice absoluto, a sintonia para tempos e amplitudes e a sintonia de referência. Na Tabela estão destacados os valores ótimos encontrados para cada índice de desempenho avaliado. Não foi incluído o sobressinal máximo da composição de fundo porque ele apresenta o mesmo valor para todas as sintonias devido à saturação da planta.

É possível confirmar que as sintonias otimizadas para os índices quadrático e absoluto realmente são as melhores para estes índices, como esperado.

A sintonia otimizada para tempos e amplitudes não é ótima para muitos índices de desempenho, o que se deve ao fato de que esta sintonia foi especificada de modo a prover um bom desempenho para múltiplos índices, mesmo não sendo trivial o agrupamento destes índices em um único. Esta sintonia é, de fato, uma sintonia ótima global, pois busca um ótimo equilibrado e não apenas o ótimo para uma única característica do comportamento do sistema.

Tabela 4-8 – Desempenho das sintonias multivariáveis.

Índices de Desempenho	Sintonias			
	Referência	Quadrática	Absoluta	Tempos
$t_s(CV_1)$ (s)	2.134,0	3.196,8	1.669,6	2.504,0
$t_s(CV_2)$ (s)	2.348,4	5.357,1	2.640,3	2.808,7
$t_r(CV_1)$ (s)	299,1	299,1	299,1	299,1
$t_r(CV_2)$ (s)	357,7	207,4	273,6	426,5
$M_p(CV_1)$ (% relativo)	36,7	33,9	33,9	48,2
$t_{sd}(CV_1 \times SP_2)$ (s)	2.297,7	6.521,1	6.850,5	3.208,6
$t_{sd}(CV_2 \times SP_1)$ (s)	3.105,8	5.995,9	3.336,3	3.465,8
$t_{sd}(CV_1 \times D)$ (s)	6.145,0	8.975,0	8.856,8	4.937,8
$t_{sd}(CV_2 \times D)$ (s)	2.894,6	5.047,4	2.340,3	3.255,2
$\Delta(CV_1 \times SP_2)$ (%)	0,0897	0,0816	0,0615	0,0831
$\Delta(CV_2 \times SP_1)$ (%)	1,3046	1,1594	1,2435	1,3826
$\Delta(CV_1 \times D)$ (%)	0,2107	0,1312	0,1371	0,2672
$\Delta(CV_2 \times D)$ (%)	1,0577	0,8986	0,9694	1,1416
J_{quad} (% ²)	2.826,9	2.228,4	2.350,1	3.300,3
J_{abs} (% ²)	4.095,5	3.552,6	3.192,1	4.758,5

Observações e Comentários

Este item abordou a obtenção de sintonias que otimizem múltiplos índices de desempenho calculados para múltiplas variáveis de um sistema multivariável.

Mostrou-se que a metodologia estudada pode ser aplicada, sem necessidade de alterações, para sintonizar múltiplos controladores em um sistema MIMO, mesmo que estes controladores sejam SISO.

Mostrou-se também a aplicação de índices compostos e da técnica de otimização recursiva para a construção e solução do problema de sintonia ótima.

Para reforçar a importância de uma abordagem multivariável na sintonia de controladores independentes que atuem em um sistema acoplado, a Figura 4-18 apresenta a relação entre o tempo de acomodação da composição de topo da coluna e os parâmetros de sintonia do controlador da composição de fundo, mantendo a sintonia do controlador da composição de topo nos valores ótimos encontrados pela especificação de tempos e amplitudes.

Figura 4-18 – Influência de sintonias em sistemas MIMO.

Como é possível observar, mesmo os controladores sendo independentes, a sintonia de um influencia bastante no desempenho do outro, o que ocorre devido ao acoplamento intrínseco do sistema. Assim sendo, uma abordagem de sintonia multivariável apresenta grande vantagem com relação a uma técnica clássica que não leve em consideração os acoplamentos do sistema, pois permite levar em consideração os efeitos causados por tais acoplamentos na determinação dos parâmetros de sintonia.

d. **Sintonia Ótimo-Robusta Multiobjetivo Multivariável de PID**

Considera-se agora o problema de obter uma sintonia para os controladores PID da coluna de destilação quando não se conhece o modelo exato da planta, mas apenas um modelo com incertezas, identificado a partir de dados coletados do processo.

Identificação do Sistema

Inicialmente é obtido um modelo da planta por técnicas de identificação de sistemas.

Aplicam-se ondas quadradas seguidas de sinais GBN (*Generalized Binary Noise*) ao sistema. São empregadas amplitudes de modo a obter uma relação sinal-ruído (SNR) 10 em variância. Realiza-se a coleta de dados com período de amostragem de 30 segundos. Os sinais de excitação e os dados coletados são então normalizados para a faixa de -0,5 a 0,5, a fim de melhorar a qualidade da identificação. A Figura 4-19 apresenta os sinais de excitação e as respostas da planta normalizados.

Figura 4-19 – Dados coletados da Coluna de Wood and Berry para identificação.

Os dados coletados são então empregados para a obtenção de modelos através dos seguintes algoritmos de identificação: ARX, ARMAX, OE e BJ (Ljung, 1999), Assintótico (Zhu, 1998), Filtragem-u (Hof; Schrama, 1993), Filtragem-y (Huang; Shah, 1997) e Dupla Filtragem (Alves; Garcia, 2010a), (Alves; Garcia, 2010b) e MRI (Gopaluni; Patwardhan; Shah, 2003), (Gopaluni; Patwardhan; Shah, 2004), alguns dos quais geram mais de um modelo.

Os modelos obtidos são então avaliados pela semelhança de suas respostas ao degrau com as respostas ao degrau da planta através do índice FIT (Ljung, 1999), excluindo-se os modelos cuja resposta difere muito da resposta da planta (modelos evidentemente ruins). Após a seleção dos modelos, tem-se 19 modelos considerados satisfatórios. A Figura 4-20 apresenta as respostas ao degrau unitário dos modelos em unidades de engenharia e as incertezas dos modelos que fornecem esta informação.

Figura 4-20 – Respostas aos degraus dos modelos obtidos.

Como se pode observar, os modelos apresentam comportamentos ligeiramente diferentes.

A fim de enfatizar a eficiência da abordagem de sintonia robusta, escolhe-se o modelo cujas respostas ao degrau apresentem maiores incertezas, o modelo OE. Este modelo não é considerado o melhor modelo (escolhido intencionalmente por isso), porém suas incertezas representam as respostas ao degrau de quase todos os modelos obtidos.

Tem-se então um modelo com estrutura OE para a sintonia dos controladores. Os polinômios do modelo obtido, com as respectivas incertezas, para a primeira saída são:

$$B_{11}(q) = 21,37(\pm 0,001304) \cdot q^{-3} \quad (4.326)$$

$$B_{12}(q) = -26,54(\pm 0,001654) \cdot q^{-7} \quad (4.327)$$

$$F_{11}(q) = 1 - 0,9724(\pm 0,003945) \cdot q^{-1} \quad (4.328)$$

$$F_{12}(q) = 1 - 0,9741(\pm 0,003831) \cdot q^{-1} \quad (4.329)$$

Para a segunda saída tem-se:

$$B_{21}(q) = 15,66(\pm 0,001223) \cdot q^{-15} \quad (4.330)$$

$$B_{22}(q) = -38,53(\pm 0,001308) \cdot q^{-7} \quad (4.331)$$

$$F_{21}(q) = 1 - 0,9598(\pm 0,004811) \cdot q^{-1} \quad (4.332)$$

$$F_{22}(q) = 1 - 0,9633(\pm 0,002139) \cdot q^{-1} \quad (4.333)$$

Sintonia Ótimo-Robusta Multiobjetivo Multivariável

Com um modelo identificado e as respectivas incertezas estruturadas disponíveis, busca-se uma sintonia que otimize os dois tempos de acomodação (para degrau na composição de topo e na composição de fundo) e os dois tempos de retorno (para degrau nas mesmas variáveis) do sistema para todos os modelos admitidos pelo modelo de erro.

Emprega-se a técnica de otimização recursiva para obtenção da sintonia. Após a determinação dos valores limites dos índices de desempenho, otimiza-se novamente o tempo de acomodação da composição de topo da coluna. O problema de sintonia ótima resolvido no passo final é descrito por:

$$\min t_s(y_1) \quad (4.334)$$

sujeito a:

$$y_1(t) = y_{1 \times u_1}(t) + y_{1 \times u_2}(t) \quad (4.335)$$

$$y_2(t) = y_{2 \times u_1}(t) + y_{2 \times u_2}(t) \quad (4.336)$$

$$y_{1 \times u_1}(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_{1 \times u_1}(z)\} \quad (4.337)$$

$$y_{1 \times u_2}(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_{1 \times u_2}(z)\} \quad (4.338)$$

$$y_{2 \times u_1}(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_{2 \times u_1}(z)\} \quad (4.339)$$

$$y_{2 \times u_2}(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_{2 \times u_2}(z)\} \quad (4.340)$$

$$\frac{Y_{1 \times u_1}(z)}{U_1(z)} = \frac{21,37(\pm 0,001304) \cdot z^{-3}}{1 - 0,9724(\pm 0,003945) \cdot z^{-1}} \quad (4.341)$$

$$\frac{Y_{1 \times u_2}(z)}{U_2(z)} = \frac{-26,54(\pm 0,001654) \cdot z^{-7}}{1 - 0,9741(\pm 0,003831) \cdot z^{-1}} \quad (4.342)$$

$$\frac{Y_{2 \times u_1}(z)}{U_1(z)} = \frac{15,66(\pm 0,001223) \cdot z^{-15}}{1 - 0,9598(\pm 0,004811) \cdot z^{-1}} \quad (4.343)$$

$$\frac{Y_{2 \times u_2}(z)}{U_2(z)} = \frac{-38,53(\pm 0,001308) \cdot z^{-7}}{1 - 0,9633(\pm 0,002139) \cdot z^{-1}} \quad (4.344)$$

$$|U_1(z)| \leq 0,0083 \quad (4.345)$$

$$|U_2(z)| \leq 0,0083 \quad (4.346)$$

$$\frac{U_1(z)}{E_1(z)} = \left[K_{P_1} + K_{I_1} \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \right] \quad (4.347)$$

$$\frac{U_2(z)}{E_2(z)} = \left[K_{P_2} + K_{I_2} \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \right] \quad (4.348)$$

$$t_s(y_2) \leq 2.000 \quad (4.349)$$

$$t_{sd}(y_1) \leq 5.000 \quad (4.350)$$

$$t_{sd}(y_2) \leq 5.000 \quad (4.351)$$

$$K_{P_1} \in [0: 1] \quad (4.352)$$

$$K_{I_1} \in [0: 1] \quad (4.353)$$

$$K_{P_2} \in [0: 1] \quad (4.354)$$

$$K_{I_2} \in [0: 1] \quad (4.355)$$

$$T = 30 \quad (4.356)$$

Resolvendo o problema para o conjunto de modelos admitidos obtém-se a sintonia ótimo-robusta:

$$\begin{cases} K_{P_1} = 0,0148 \\ K_{I_1} = 5,5 \cdot 10^{-6} \\ K_{P_2} = 0,0012 \\ K_{I_2} = 6,6 \cdot 10^{-6} \\ T = 30 \end{cases}$$

Avaliação da Sintonia Obtida

Aplica-se então a sintonia obtida, empregando-se períodos de amostragem de 30 e 10 segundos, ao sistema para avaliação e comparação com a sintonia ótima para tempos ($K_{P_1} = 0,0057$, $K_{I_1} = 1,3 \cdot 10^{-5}$, $K_{P_2} = 0,0009$, $K_{I_2} = 4,0 \cdot 10^{-6}$, $T = 10$), obtida anteriormente. As Figuras 4-21, 4-22 e 4-23 apresentam as respostas do sistema a degrau na referência da composição de topo, degrau na referência da composição de base e rejeição de perturbações.

Figura 4-21 – Respostas ao degrau na referência da composição de topo.

Figura 4-22 – Respostas ao degrau na composição de base.

Figura 4-23 – Rejeição de perturbações.

Observa-se que a sintonia ótimo-robusta resulta em um desempenho próximo à sintonia ótima, demonstrando a capacidade de obtenção de uma boa sintonia quando se dispõe de um modelo identificado do processo a ser controlado.

Observações e Comentários

Foi apresentado o problema da obtenção de uma sintonia ótima quando o modelo empregado possui incertezas. Embora seja prática comum a dessintonia de controladores, esta técnica não garante a robustez da sintonia e é altamente dependente da sensibilidade do sistema aos parâmetros de sintonia ou à sensibilidade da sintonia aos parâmetros do modelo. A abordagem apresentada gera uma sintonia mais confiável e permite melhor controle de sua robustez.

Apesar da boa confiabilidade dos resultados, a abordagem de sintonia robusta demanda elevado esforço computacional, uma vez que diversos modelos devem ser simulados. A fim de reduzir o esforço computacional, é então apropriado que o controlador seja sintonizado inicialmente para o modelo nominal disponível. Então a sensibilidade do desempenho para cada incerteza deve ser avaliada e a sintonia deve ser ajustada incluindo-se progressivamente as incertezas, iniciando da que mais influencia o comportamento do sistema em malha fechada. Deste modo, a sintonia tende a ir se aproximando da melhor solução e são necessárias menos iterações do algoritmo de sintonia quando são incluídas novas incertezas no problema.

e. Conclusão

Este exemplo apresentou diversas especificações e sintonias para a coluna de destilação de Wood & Berry.

Foi inicialmente tratado o caso de índices de desempenho único e problemas pré-formulados, em seguida, foi abordado o problema de sintonia multiobjetivo, o problema de sintonia multivariável dos controladores do sistema e, finalmente, a sintonia ótimo-robusta.

Apesar de terem sido apresentadas diversas especificações em uma ordem crescente de complexidade, apenas uma abordagem é necessária para a obtenção de uma sintonia, ou seja, pode-se escolher um dos casos estudados e aplicar a um processo para sintonia de seus controladores. As representações empregadas

também foram ligeiramente diferentes entre cada caso a fim de demonstrar algumas das possibilidades de postulação do problema.

Todas as sintonias apresentadas são ótimas no contexto de sua especificação, sendo a escolha de qual especificação é a mais adequada dependente do conhecimento do processo e de seus objetivos.

Por fim, escolhe-se uma das sintonias para aplicação no processo. Dentre as sintonias obtidas escolhe-se, numa decisão simplista, a especificação multiobjetivo e multivariável por tempos e amplitudes ($K_{P_1} = 0,0057$, $K_{I_1} = 1,3 \cdot 10^{-5}$, $K_{P_2} = 0,0009$, $K_{I_2} = 4,0 \cdot 10^{-6}$). A Figura 4-24 apresenta o comportamento da planta quando lhe são aplicadas ondas quadradas nas referências com perturbações e ruídos de medição presentes.

Figura 4-24 – Resposta da Coluna de Wood & Berry com controladores PI ótimos.

A Figura 4-24 demonstra o comportamento do sistema com a sintonia escolhida. Nota-se que o controlador da composição de topo acompanha melhor a referência e rejeita mais rapidamente as perturbações que o controlador da composição de fundo, conforme especificado para manter um melhor controle da composição de topo da coluna.

4.2 Sintonia de LQG/LTR

A técnica LQG/LTR visa à construção de um controlador que seja capaz de atender especificações de estabilidade e desempenho para um dado sistema na presença de incertezas no modelo utilizado para o projeto.

Apresenta-se um exemplo que segue a metodologia de projeto apresentada em (Cruz, 1996) para a construção de um controlador robusto. Não se objetiva apresentar uma descrição detalhada do procedimento, mas sim demonstrar como a abordagem de sintonia ótima apresentada pode ser aplicada a um controlador mais complexo.

4.2.1 Técnica LQG/LTR

A técnica LQG/LTR consiste na obtenção de um controlador linear e invariante no tempo a partir de um modelo nominal do processo, de um modelo de erro e de especificações de desempenho e robustez.

As principais características desta metodologia, sob o ponto de vista de sintonia, são a inclusão da robustez e de alguns requisitos de desempenho no projeto do controlador, dispensando sua consideração pelo procedimento de sintonia.

Além disso, como será visto no exemplo apresentado, a técnica possui poucos parâmetros livres para ajuste, o que torna o procedimento de simples execução e ainda permite o ajuste de algumas características não contempladas pelo procedimento.

O exemplo a seguir demonstrará uma aplicação da técnica LQG/LTR e como o procedimento de sintonia ótima pode ser aplicado para determinar seus parâmetros livres.

4.2.2 Exemplo: Sintonia de LQG/LTR para Controle Robusto de Vazão e Nível

Neste exemplo aplica-se a técnica LQG/LTR a uma planta piloto, que reproduz em ambiente controlado um processo real de larga escala, para controle de vazão e nível.

É inicialmente determinado o processo a ser controlado, realizando-se sua modelagem e determinando-se os erros de modelagem, os parâmetros do modelo e suas incertezas. A seguir, determinam-se as especificações do controlador, realizando-se seu projeto. O desenvolvimento do controlador segue a técnica LQG/LTR, projetando-se uma malha objetivo que atenda às especificações do projeto e recuperando-a com o controlador a ser implementado. O controlador desenvolvido é então validado, realizando-se simulações com as diversas plantas admitidas pelo modelo nominal e modelo de erro utilizados. Para validação final, utiliza-se um modelo não-linear do processo com o controlador obtido.

a. Processo

O P&ID (*Piping and Instrumentation Diagram*) do processo a ser controlado é exibido na Figura 4-25.

Deseja-se controlar o nível no Tanque Reator (TR) e a vazão de entrada neste tanque.

O Tanque Reator é onde ocorrem as principais reações do processo. Instalado neste tanque, o transmissor e indicador de nível LIT-10 mede e envia ao sistema de controle o valor do nível do tanque. A válvula solenoide LV-16A na base do tanque regula sua vazão de saída, sendo utilizada para controlar o nível do tanque.

A válvula de controle do tipo globo, FV-40, regula a vazão de fluido do tanque TBV para o TR, vazão que é medida pelo medidor de vazão FIT-34 e enviada ao sistema de controle. A abertura da válvula é controlada pelo conversor I/P (corrente / pressão) FY-43, que recebe o sinal de controle do controlador UC-130.

Figura 4-25 – P&ID do processo.

A válvula solenoide FV-31 regula a vazão de fluido do tanque TAPI para o TR, vazão medida pelo transmissor de vazão FIT-31. Esta vazão é considerada como perturbação pelo sistema de controle desenvolvido.

O controle de vazão e nível é importante para possibilitar o controle de outras variáveis da planta, como pH e condutividade, pois o nível altera significativamente a dinâmica destas. Tais variáveis são controladas pela injeção de base no tanque, que pode ser feita através da válvula de controle FV-40.

A vazão de entrada regulada pela válvula FV-40 e medida pelo transmissor FIT-34 é utilizada pela malha de controle de pH (podendo também ser utilizada por outras malhas, como condutividade), sendo sua referência proveniente desses controladores. Como a válvula FV-40 possui dinâmica não desprezível, é desejável a presença de um controlador que regule a pressão aplicada ao diafragma da válvula para controlar a vazão que passa por ela.

Uma descrição mais detalhada da planta é dada em (Juliani, 2010) e (Juliani, 2011).

b. Modelo do Processo

As entradas do modelo são os sinais de atuação enviados para as válvulas de controle LV-16A e FV-40 e as saídas são o nível medido pelo transmissor LIT-10 e a vazão medida pelo transmissor FIT-34. Para melhor clareza, as entradas serão referidas por LV e FV, correspondendo à LV-16A e à FV-40, respectivamente e as saídas serão representadas por h e Q, correspondendo ao nível do tanque reator e à vazão de entrada, respectivamente.

Para aplicação da metodologia LQG/LTR, modela-se a planta como um sistema linear. A matriz de transferência que descreve a influência da abertura das válvulas no nível e na vazão do sistema é:

$$\begin{bmatrix} H(s) \\ Q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{A^{-1}}{s} \cdot \frac{K_{LV}}{s \cdot \tau_{LV} + 1} & \frac{A^{-1}}{s} \cdot \frac{K_{FV}}{s \cdot \tau_{FV} + 1} \\ 0 & \frac{K_{FV}}{s \cdot \tau_{FV} + 1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} LV(s) \\ FV(s) \end{bmatrix} \quad (4.357)$$

Obtém-se então uma realização do sistema em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{A} & \frac{1}{A} \\ 0 & -\frac{1}{\tau_{LV}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_{FV}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{K_{LV}}{\tau_{LV}} & 0 \\ 0 & \frac{K_{FV}}{\tau_{FV}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.358)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{LIT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{FIT} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (4.359)$$

Os parâmetros do modelo são determinados experimentalmente, seus valores nominais e incertezas são apresentados na Tabela 4-9 nas unidades empregadas no modelo.

Tabela 4-9 – Valores dos parâmetros do modelo linear.

Nome	Parâmetro	Valor Mínimo	Valor Nominal	Valor Máximo
Área da base do tanque reator	A	0,61	0,6172	0,64
Constante de tempo da válvula LV	τ_{LV}	0,5	1	2,0
Constante de tempo da válvula FV	τ_{FV}	0,5	1	3,0
Ganho da válvula LV	K_{LV}	0,085	0,0927	0,100
Ganho da válvula FV	K_{FV}	0,022	0,0278	0,033
Ganho do medidor de vazão	K_{FIT}	-	3600	-
Ganho do transmissor de nível	K_{LIT}	-	1	-

Substituindo os parâmetros nominais no modelo do sistema obtém-se:

$$\begin{bmatrix} H(s) \\ Q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{0,15}{s^2 + s} & \frac{0,045}{s^2 + s} \\ 0 & \frac{100}{s + 1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} LV(s) \\ FV(s) \end{bmatrix} \quad (4.360)$$

E, em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1,62 & 1,62 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,0926 & 0 \\ 0 & 0,02778 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.361)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3600 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (4.362)$$

As regiões de operação das variáveis do sistema são apresentadas na Tabela 4-10.

Tabela 4-10 – Regiões de operação do sistema.

Variável	Região de Operação	Região de Operação em Variáveis Incrementais
h	[40 ; 60] (%)	[-20 ; 20] (%)
Q	[0 ; 100] (l/h)	[0 ; 100] (l/h)
FV	[0 ; 100] (%)	[0 ; 100] (%)
LV	[0 ; 100] (%)	[0 ; 100] (%)

A modelagem mais detalhada do processo é descrita em (Garcia; Juliani, 2011).

Erro de Modelagem

Os erros de modelagem devem-se majoritariamente à dinâmica dos atuadores, as duas válvulas de controle. Considera-se no modelo nominal as duas válvulas como sistemas lineares invariantes no tempo de primeira ordem, porém esta hipótese não corresponde exatamente ao sistema real.

Dinâmica da Válvula LV

A válvula LV-16A foi modelada como uma válvula contínua cuja vazão regulada independe do nível do tanque, porém estas duas hipóteses não são verificadas no sistema real.

A válvula LV-16A é uma válvula solenoide, de modo que pode estar apenas nos estados aberta e fechada, ou seja, em regime, a vazão que passa por ela é máxima ou nula. Esta válvula está instalada na base do tanque reator, de modo que a vazão que passa por ela depende da pressão do fluido e, conseqüentemente, do nível do tanque. A influência do nível do tanque na vazão que passa pela válvula é encerrada no modelo do corpo da válvula, dado por:

$$Q_{LV} = K v_{LV} \cdot X_{LV} \cdot \sqrt{g} \cdot \sqrt{h} \quad (4.363)$$

onde o ganho $K v_{LV}$ do corpo da válvula tem valor de 0,02.

A dinâmica do atuador da válvula é modelada por:

$$X_{FV}(s) = \frac{K_{atLV}}{\tau_{LV} \cdot s + 1} \cdot Y \quad (4.364)$$

onde Y é o estado de abertura da válvula, podendo assumir o valor de 0 ou 1 e o ganho K_{atLV} do atuador da válvula vale 0,01.

O comportamento da válvula é aproximado ao comportamento de uma válvula contínua pelo uso de *PWM* (Modulação por Largura de Pulso), que comuta a abertura da válvula de acordo com o esforço de controle desejado. O *PWM* é descrito por:

$$\begin{cases} X_{LV} = 1 \text{ p/ } 0 < t < D.T \\ X_{LV} = 0 \text{ p/ } D.T < t < T \end{cases} \quad (4.365)$$

onde X é o estado de abertura da válvula (aberta=1, fechada=0), D é o *duty cycle* do *PWM*, período em que a válvula permanece aberta e T é o período do *PWM*. O valor de D corresponde ao esforço de controle solicitado pelo controlador.

Dinâmica da válvula FV

A válvula de controle FV-40 foi modelada como uma válvula contínua, cuja vazão é suprida por um tanque com nível mantido constante.

Considera-se que a pressão de alimentação da válvula seja constante, de modo que o modelo do corpo da válvula resulta linear e constante:

$$Q_{FV} = K_{FV} \cdot X_{FV} \quad (4.366)$$

A dinâmica do atuador da válvula é modelada por:

$$\frac{X_{FV}(s)}{FV(s)} = \frac{K_{atFV}}{\tau_{FV} \cdot s + 1} \quad (4.367)$$

onde o ganho K_{atFV} da válvula tem valor de 0,01.

c. *Análise do Modelo Nominal*

Antes do projeto do controlador propriamente dito, realiza-se uma análise do modelo linear a ser utilizado.

Verifica-se inicialmente que o sistema é controlável e observável, condições necessárias para a técnica LQG/LTR. Observam-se então os autovalores do modelo nominal, que são: $\{0, -1, -1\}$. Nota-se que o sistema possui um polo na origem devido à malha de nível, que é integradora. O sistema não possui zeros de transmissão.

Observa-se então os valores singulares do sistema, exibidos na Figura 4-26.

Figura 4-26 – Valores singulares do modelo nominal.

Devido à presença do integrador na malha de nível, um conjunto de valores singulares do sistema em malha aberta apresenta decaimento de -20 dB/dec em baixas frequências. Devido à dinâmica dos atuadores, os valores singulares do sistema em malha aberta decrescem com adicionais 20 dB/dec a partir de 1 rad/s.

d. Análise dos Modelos Admitidos pelo Modelo de Erro

Verificam-se então os valores singulares dos modelos admitidos pelo modelo de erro, descrito pelas incertezas estruturadas apresentadas, comparando-os aos valores singulares do modelo nominal. A Figura 4-27 apresenta os valores singulares obtidos.

Figura 4-27 – Valores singulares dos modelos admitidos.

Observa-se que o modelo nominal distancia-se mais dos modelos admitidos em altas frequências.

e. Avaliação do Erro de Modelagem

Para avaliar o erro de modelagem, constroem-se os modelos das plantas admitidas. Adotando as faixas de valores apresentadas anteriormente para os parâmetros com incertezas e discretizando seus valores adequadamente, resultam 13.312 modelos para avaliação.

Para cada modelo avaliado calculam-se seus valores singulares, comparando-os com o modelo nominal do sistema para a obtenção, a partir do erro máximo, do modelo de erro, dado por (Cruz, 1996):

$$\varepsilon_M(\omega) = \left| \frac{G_R(\omega) - G_N(\omega)}{G_N(\omega)} \right| \quad (4.368)$$

onde $G_R(\omega)$ corresponde ao sistema real e $G_N(\omega)$ ao modelo nominal, de forma que, tomando-se o maior erro entre os modelos admitidos, pode-se obter $\varepsilon_M(\omega)$.

A Figura 10-24 apresenta os erros calculados para cada um dos modelos avaliados. Observa-se que há erro de modelagem em todas as frequências, mas é maior em altas frequências.

Figura 4-28 – Erros de modelagem – valores singulares máximos (azul) e mínimos (verde).

f. Barreira de Robustez da Estabilidade

A partir do modelo de erro constrói-se a barreira de estabilidade do sistema em malha fechada, dada por (Cruz, 1996):

$$\sigma_M[C_N(j\omega)] < \frac{1}{e_M(\omega)} \quad (4.369)$$

onde:

$$||\varepsilon_M(\omega)|| \leq e_M(\omega) \quad (4.370)$$

$$e_M(\omega)[dB] = 20 * \log_{10}(\max(|[G_R(\omega) - G_N(\omega)] \cdot G_N(\omega)^{-1}|)) \quad (4.371)$$

e $C_N(j\omega)$ é a matriz de transferência de malha fechada do sistema:

$$C_N(j\omega) = [G_N(j\omega) \cdot K(j\omega)] \cdot [I + G_N(j\omega) \cdot K(j\omega)]^{-1} \quad (4.372)$$

Portanto, o modelo $e_M(j\omega)$ é obtido dos valores máximos de $\varepsilon_M(\omega)$, avaliado para cada modelo de planta real admitida.

A barreira de robustez da estabilidade obtida para este sistema é exibida na Figura 4-29.

Figura 4-29 – Barreira de robustez de estabilidade.

Como observado no gráfico de valores singulares, o erro de modelagem está presente em todas as frequências, mas é maior em altas frequências, o que resulta em uma barreira de robustez da estabilidade mais restritiva em altas frequências.

g. Especificação do Desempenho do Controlador

Deseja-se que o controlador acompanhe sinais de referência e rejeite perturbações senoidais de período superior a 30 segundos com erro não superior a 10%, ou seja:

$$\frac{||e(j\omega)||}{||r(j\omega)||} < 0,1 = \alpha_r(\omega) \quad \omega \leq 0,2 \text{ rad/s} \quad (4.373)$$

$$\frac{||e(j\omega)||}{||d(j\omega)||} < 0,1 = \alpha_d(\omega) \quad \omega \leq 0,2 \text{ rad/s} \quad (4.374)$$

Deseja-se também rejeitar erros de medição com erro não superior a 1% para frequências superiores a 100Hz, ou seja:

$$\frac{||y(j\omega)||}{||n(j\omega)||} \leq 0,01 = \alpha_n(\omega) \quad \omega \geq 600 \text{ rad/s} \quad (4.375)$$

É também especificado que o sistema deve apresentar erro estacionário nulo para degrau.

h. Barreiras de Robustez do Desempenho

A condição de robustez do desempenho para baixas frequências é expressa por (Cruz, 1996):

$$\sigma_m[G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{p(\omega)}{1 - e_M(\omega)} \quad (4.376)$$

onde:

$$p(\omega) = \max\left\{\frac{1}{\alpha_r(\omega)}, \frac{1}{\alpha_d(\omega)}\right\} \quad (4.377)$$

A condição de robustez do desempenho para altas frequências é expressa por (Cruz, 1996):

$$\sigma_M[G_N(j\omega).K(j\omega)] \leq \frac{\alpha_n(\omega)}{1 + e_M(\omega)} \quad (4.378)$$

Aplicando-se as especificações do controlador às condições de robustez do desempenho para baixas e altas frequências, obtêm-se as barreiras de robustez do desempenho para o sistema:

$$\sigma_m[G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{10}{1 - e_M(\omega)} \quad \omega \leq 0,1 \text{ rad/s} \quad (4.379)$$

$$\sigma_M[G_N(j\omega).K(j\omega)] \leq \frac{0,03}{1 + e_M(\omega)} \quad \omega \geq 600 \text{ rad/s} \quad (4.380)$$

onde $e_M(\omega)$ é o modelo de erro, construído numericamente.

A Figura 4-30 apresenta as barreiras de robustez do desempenho obtidas, juntamente com a barreira de robustez da estabilidade obtida anteriormente.

Figura 4-30 – Barreiras de robustez da estabilidade e do desempenho.

i. Inclusão de Integradores na Entrada da Planta

A malha de nível possui um polo na origem, apresentando naturalmente erro nulo para entrada degrau em malha fechada.

A malha de vazão não possui autovalores nulos, sendo necessária a adição de um integrador na respectiva entrada para que a vazão apresente erro nulo ao degrau em malha fechada.

Com a inclusão do integrador, a planta passa a ser como na Figura 4-31.

Figura 4-31 – Planta com integrador.

Com a inclusão do integrador, a dimensão do modelo do sistema é aumentada. Define-se um novo vetor de estados:

$$x(t) = \begin{bmatrix} u_{2p}(t) \\ x_p(t) \end{bmatrix} \quad (4.381)$$

O modelo da planta aumentada resulta em:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{A} & -\frac{1}{A} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_{LV}} & 0 \\ \frac{K_{FV}}{\tau_{FV}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_{FV}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_{LV}}{\tau_{LV}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.382)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_{LIT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{FIT} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad (4.383)$$

Substituindo-se os parâmetros nominais do modelo, resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,62 & 1,62 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0,02778 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0,0926 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.384)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3600 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad (4.385)$$

A matriz de transferência correspondente é dada por:

$$G_I(s) = \begin{bmatrix} -\frac{0,15}{s^2 + s} & \frac{0,045}{s^3 + s^2} \\ 0 & \frac{100}{s^2 + s} \end{bmatrix} \quad (4.386)$$

A Figura 4-32 apresenta os valores singulares da planta com integrador.

Figura 4-32 – Valores singulares da planta com integrador.

j. **Malha Objetivo**

Deseja-se obter uma malha objetivo que atenda às especificações do projeto. Determinada esta malha, um procedimento de recuperação poderá ser aplicado para obter um controlador que faça a planta comportar-se como a malha objetivo.

Adotando-se a estrutura da malha objetivo comumente utilizada no procedimento LQG/LTR, deve-se determinar a matriz L e o parâmetro μ , que ajustam-na para atender as barreiras de robustez da estabilidade e de robustez do desempenho. Ou seja, as barreiras de robustez de desempenho e estabilidade devem ser respeitadas pelos valores singulares σ_i (Cruz, 1996):

$$\sigma_i \left[\frac{1}{\sqrt{\mu}} C(j\omega I - A)^{-1} L \right] \quad (4.387)$$

Nota-se que, até este ponto, todos os cálculos foram realizados a partir de especificações do desempenho desejado para o sistema e do procedimento LQG/LTR, porém, na obtenção da malha objetivo é necessária a determinação da matriz L e do parâmetro μ , que são, juntamente com o parâmetro ρ que será incluído adiante, considerados os parâmetros de sintonia do controlador.

Sintonia da Malha Objetivo

Para a obtenção dos parâmetros de sintonia, inicialmente são testadas técnicas clássicas de sintonia e então é aplicada a abordagem de sintonia ótima apresentada.

Observa-se que a matriz A do modelo é singular e, portanto, não-invertível, o que impede a aplicação dos métodos de casamento de valores singulares para a obtenção da matriz L .

Avaliam-se as outras opções de sintonia, que definem a matriz L por:

$$L_1 = -A * C' * (C * C')^{-1} \quad (4.388)$$

$$L_2 = C' * (C * C')^{-1} \quad (4.389)$$

$$L_3 = B \quad (4.390)$$

Verifica-se que a sintonia L_1 resulta, no próximo passo do projeto do controlador, em uma Equação Algébrica de Riccati que não pode ser resolvida, não podendo, portanto, ser empregada. Com as sintonias L_2 e L_3 é possível resolver a Equação Algébrica de Riccati e obter a matriz H de ganhos do filtro de Kalman, porém, a adoção destas matrizes L resulta em uma malha objetivo com valores singulares que não atendem as especificações do controlador, sendo necessário então a mudança das barreiras ou a obtenção de uma outra sintonia que respeite as barreiras definidas.

Sintonia da Matriz L

Deseja-se encontrar uma matriz L tal que os requisitos de desempenho e estabilidade sejam atendidos e que a distância entre os valores singulares mínimos e máximos da malha objetivo seja mínima. O problema de otimização resultante é:

$$\min_{L, \mu} \int_{\omega_0}^{\omega_f} \left(\sigma_M(G_{KF}(j\omega)) - \sigma_m(G_{KF}(j\omega)) \right) d\omega \quad (4.391)$$

sujeito a:

$$\sigma_m[G_{KF}(j\omega)] \geq \frac{10}{1 - e_M(\omega)} \quad \omega \leq 0,1 \text{ rad/s} \quad (4.392)$$

$$\sigma_M[G_{KF}(j\omega)] \leq \frac{0,03}{1 + e_M(\omega)} \quad \omega \geq 600 \text{ rad/s} \quad (4.393)$$

$$\sigma_M([I + G_{KF}(j\omega)]^{-1} G_{KF}(j\omega)) < \frac{1}{e_M} \quad \forall \omega \quad (4.394)$$

$$G_{KF}(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1} H \quad (4.395)$$

$$H = \frac{1}{\mu} \Sigma C' \quad (4.396)$$

$$0 = A\Sigma + \Sigma A' + LL' - \frac{1}{\mu} \Sigma C' C \Sigma \quad (4.397)$$

$$G_{KF}(j\omega) \cong \frac{1}{\sqrt{\mu}} C(j\omega I - A)^{-1} L \quad (4.398)$$

$$\mu \in \mathbb{R}_+^* \quad (4.399)$$

onde a função objetivo (4.391) é uma medida da distância entre os valores singulares mínimos e máximos da malha objetivo na região de frequências de

interesse, de 10^{-4} a 10^3 rad/s, as equações (4.392) e (4.393) são os requisitos de desempenho em baixas e altas frequências, respectivamente e a equação (4.394) corresponde ao requisito de robustez. As equações (4.395), (4.396) e (4.397) descrevem a obtenção da malha objetivo a partir dos parâmetros de sintonia e do modelo do processo e a equação (4.398) fornece uma aproximação desta função, válida quando $\mu \ll 1$ e $C \cdot L$ é não singular (Cruz, 1996), sendo interessante a utilização desta aproximação em substituição às equações (4.395) a (4.397) para a obtenção de uma primeira solução para o problema antes de um refinamento da solução com essas equações, a fim de reduzir o esforço computacional (oriundo da solução da equação algébrica de Riccati (4.397)). Finalmente, a equação (4.399) inclui o segundo parâmetro de sintonia no problema, deixando-o livre.

Resolve-se o problema de sintonia para o sistema considerado, obtendo-se:

$$L^* = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 \\ 0 & 0 \\ 12 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sintonia do Parâmetro μ

Enquanto a matriz L determina o “formato” dos valores singulares da malha objetivo, o parâmetro μ determina sua posição, ou seja, é um ganho aplicado a todas as frequências.

Para a determinação de μ resolve-se novamente o problema definido no item anterior, fixando $L = L^*$ e buscando μ que maximize os valores singulares (maior transferência em malha fechada), minimize os valores singulares (maior robustez e imunidade a ruído) ou que mantenha os valores singulares da malha objetivo equidistantes das barreiras (para facilitar o procedimento de recuperação aplicado a seguir).

Escolhe-se a maximização de μ , que minimiza os valores singulares da malha objetivo. O problema resultante fica:

$$\max_{\mu} \mu \quad (4.400)$$

sujeito a:

$$\sigma_m[G_{KF}(j\omega)] \geq \frac{10}{1 - e_M(\omega)} \quad \omega \leq 0,1 \text{ rad/s} \quad (4.401)$$

$$\sigma_M[G_{KF}(j\omega)] \leq \frac{0,03}{1 + e_M(\omega)} \quad \omega \geq 600 \text{ rad/s} \quad (4.402)$$

$$\sigma_M([I + G_{KF}(j\omega)]^{-1}G_{KF}(j\omega)) < \frac{1}{e_M} \quad \forall \omega \quad (4.403)$$

$$G_{KF}(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1}H \quad (4.404)$$

$$H = \frac{1}{\mu} \Sigma C' \quad (4.405)$$

$$0 = A\Sigma + \Sigma A' + LL' - \frac{1}{\mu} \Sigma C' C \Sigma \quad (4.406)$$

$$G_{KF}(j\omega) \cong \frac{1}{\sqrt{\mu}} C(j\omega I - A)^{-1}L \quad (4.407)$$

$$L = L^* \quad (4.408)$$

$$\mu \in \mathbb{R}_+^* \quad (4.409)$$

Resolvendo-se o problema de otimização com a matriz L^* encontrada no item anterior, obtém-se:

$$\mu^* = 31,25$$

Malha Objetivo Sintonizada

Utilizando L e μ obtidos, resolve-se a Equação Algébrica de Riccati:

$$0 = A\Sigma + \Sigma A' + LL' - \frac{1}{\mu} \Sigma C' C \Sigma \quad (4.410)$$

De onde se obtém a matriz de ganhos do Filtro de Kalman, dada por:

$$H = \frac{1}{\mu} \Sigma C' \quad (4.411)$$

Para os parâmetros do projeto, a matriz de ganhos do Filtro de Kalman obtida é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0.0447 \\ 1.8204 & 0.0003 \\ -1.0229 & 0.0001 \\ 0 & 0.0006 \end{bmatrix}$$

Verificação da Malha Objetivo

Resolvida a Equação Algébrica de Riccati, verifica-se se as condições de robustez da estabilidade são respeitadas por:

$$G_{KF}(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1}H \quad (4.412)$$

Os valores singulares correspondentes são apresentados na Figura 4-33. Conforme o desejado, a malha objetivo respeita as barreiras de desempenho em todas as frequências.

Figura 4-33 – Malha objetivo em malha aberta.

Verifica-se então a condição de robustez da estabilidade. Os valores singulares máximos do sistema em malha fechada devem estar abaixo da barreira de robustez da estabilidade, ou seja:

$$\sigma_M\{[I + G_{KF}(j\omega)]^{-1}G_{KF}(j\omega)\} < \frac{1}{e_M} \quad (4.413)$$

A Figura 4-34 exibe a barreira de robustez da estabilidade e os valores singulares do sistema em malha fechada. Como desejado, a malha objetivo respeita também a barreira de robustez da estabilidade.

Figura 4-34 – Malha objetivo em malha fechada.

k. Procedimento de Recuperação

Determinada a malha objetivo que atende às especificações do projeto, deve-se obter um controlador que recupere o comportamento da malha objetivo.

Para o cálculo da matriz de ganhos de realimentação de estados que recupere a malha objetivo, deve-se resolver a seguinte equação algébrica de Riccati:

$$0 = -KA - A'K - C'C + \frac{1}{\rho} KBB'K \quad (4.414)$$

Resolvida a equação, a matriz de ganhos da realimentação de estados é obtida por:

$$G = \frac{1}{\rho} B'K \quad (4.415)$$

A matriz de funções de transferência do compensador é então obtida por:

$$K(s) = G(sI - A + BG + HC)^{-1}H \quad (4.416)$$

O parâmetro livre das equações é ρ , que é o último parâmetro de sintonia do controlador.

Sintonia do Parâmetro ρ

O parâmetro ρ aproxima o sistema compensado da malha objetivo, devendo ser determinado de modo que a planta com compensador atenda às especificações do projeto.

Quanto menor o valor de ρ , mais os valores singulares da planta compensada são aproximados da malha objetivo, porém o controlador resultante apresenta maiores ganhos. Tem-se então que o valor ótimo de ρ é o maior valor para o qual o controlador resultante atenda às especificações. Ou seja, deseja-se obter um controlador com ganhos baixos e que atenda os requisitos do projeto.

Vale notar que a redução do valor de ρ aproxima o sistema compensado da malha objetivo, porém este é um meio de solução e não um objetivo do projeto. Ou seja, deseja-se obter um controlador que atenda às especificações e não que torne o comportamento do sistema exatamente igual ao comportamento da malha objetivo. De fato, um valor muito reduzido de ρ pode gerar um controlador com ganhos demasiadamente elevados, que causem problemas numéricos em sua implementação.

Escrevendo-se o problema da sintonia de ρ na forma de otimização, tem-se:

$$\max_{\rho} \rho \quad (4.417)$$

sujeito a:

$$\sigma_m[G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{10}{1 - e_M(\omega)} \quad \omega \leq 0,1 \text{ rad/s} \quad (4.418)$$

$$\sigma_M[G_N(j\omega)K(j\omega)] \leq \frac{0,03}{1 + e_M(\omega)} \quad \omega \geq 600 \text{ rad/s} \quad (4.419)$$

$$\sigma_M([I + G_N(j\omega)K(j\omega)]^{-1}G_N(j\omega)K(j\omega)) < \frac{1}{e_M} \quad \forall \omega \quad (4.420)$$

$$K(s) = G(sI - A + BG + HC)^{-1}H \quad (4.421)$$

$$G = \frac{1}{\rho} B'K \quad (4.422)$$

$$0 = -KA - A'K - C'C + \frac{1}{\rho} KBB'K \quad (4.423)$$

$$\rho \in \mathbb{R}_+^* \quad (4.424)$$

onde a função objetivo (4.417) determina a busca pelo máximo ρ . As equações (4.418) e (4.419) são as barreiras de robustez do desempenho para baixas e altas frequências, respectivamente, a equação (4.420) é a barreira de robustez da estabilidade, as equações (4.421), (4.422) e (4.423) correspondem ao procedimento de recuperação e a equação (4.424) define o domínio de ρ .

Resolvendo o problema de otimização do projeto, obtém-se:

$$\rho^* = 2,3842 \cdot 10^{-8}$$

A matriz de ganhos de realimentação de estados correspondente é então dada por:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -6476,3 & 465,3389 & -18,4188 \\ 1137,1 & 0,1271 & -0,0049 & 23273836 \end{bmatrix}$$

Verificação do Controlador Sintonizado

Finalmente, avalia-se o controlador obtido.

Verifica-se a condição de robustez da estabilidade da planta compensada. A Figura 4-35 apresenta os valores singulares do sistema compensado em malha fechada e a barreira de robustez da estabilidade. Como desejado, o sistema compensado respeita a barreira de robustez da estabilidade.

Figura 4-35 – Avaliação da robustez da estabilidade para a planta compensada.

A Figura 4-36 exibe os valores singulares da planta compensada e a barreira de robustez do desempenho. Como desejado, o sistema compensado respeita as barreiras de acompanhamento de referência e rejeição da perturbação e de rejeição do erro de medição. Ainda, o sistema compensado apresenta valores singulares de altas frequências menores que os valores singulares da malha objetivo, o que melhora seu desempenho para rejeitar erros de medição.

Figura 4-36 – Avaliação da robustez do desempenho para a planta compensada.

I. Controlador Resultante

O controlador obtido pela aplicação do procedimento LQG/LTR ao processo tem sua descrição em espaço de estados dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{c1}(t) \\ \dot{x}_{c2}(t) \\ \dot{x}_{c3}(t) \\ \dot{x}_{c4}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1185 & -687.9 & -118.9 & -40.67 \\ 987.2 & 41.87 & 14.17 & -0.1834 \\ 181.5 & 14.85 & -25.36 & 6.559 \\ 66.58 & 21.35 & -85.1 & -17.44 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{c1}(t) \\ x_{c2}(t) \\ x_{c3}(t) \\ x_{c4}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.1915 & 128 \\ 8.308 & 0.1107 \\ -40.76 & -0.4825 \\ -15.63 & -0.3754 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.221 & -51.79 & 266 & 63.44 \\ 109.2 & 5.115 & 0.4834 & 0.0004954 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{c1}(t) \\ x_{c2}(t) \\ x_{c3}(t) \\ x_{c4}(t) \end{bmatrix}$$

A matriz de transferência equivalente do controlador é dada por:

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{-1,227e4s^3 - 1,401e7s^2 - 7,999e9s - 1,464e10}{s^4 + 1186s^3 + 7,035e5s^2 + 3,105e7 + 6,848e8} & \frac{-1,613s^3 - 1837s^2 - 1,046e6s - 4,049e5}{s^4 + 1186s^3 + 7,035e5s^2 + 3,105e7 + 6,848e8} \\ \frac{1,878s^3 + 80,94s^2 + 1731s + 2658}{s^4 + 1186s^3 + 7,035e5s^2 + 3,105e7 + 6,848e8} & \frac{1397e4s^3 + 6,705e5s^2 + 1,605e7s + 3,051e7}{s^4 + 1186s^3 + 7,035e5s^2 + 3,105e7 + 6,848e8} \end{bmatrix}$$

m. Avaliações do Controlador Obtido

Para avaliar o desempenho do controlador são realizados testes com o modelo nominal da planta (10 simulações), com modelos admitidos pelo modelo de erro (264 simulações) e com o modelo não-linear com incertezas (729 simulações).

Validação com Modelo Nominal

Inicialmente são realizadas simulações com o modelo nominal para avaliar o funcionamento do controlador e sua robustez. Mais do que validar o desempenho do controlador, estas simulações visam verificar a estabilidade numérica do controlador. Ou seja, dado que o procedimento de recuperação pode gerar controladores com parâmetros de ordens de grandeza muito elevadas ou muito discrepantes entre si, deseja-se verificar se o controlador obtido é implementável.

As validações com modelo nominal demonstram que o controlador obtido atende às especificações para o modelo nominal e pode ser implementado sem complicações. Os resultados detalhados são omitidos por apresentarem resultados muito similares aos apresentados no próximo item.

Validação com Modelos Admissíveis

Variam-se os cinco parâmetros com incerteza do modelo da planta: A , K_{LV} , τ_{LV} , K_{FV} , τ_{FV} . A cada parâmetro é atribuído seus valores máximo e mínimo, o que resulta em 32 modelos simulados. Para cada modelo, verifica-se a resposta ao degrau e o acompanhamento de sinal de referência na presença de perturbação e erro de medição. Em seguida os mesmos testes são feitos para 100 modelos construídos aleatoriamente a partir do modelo nominal e do modelo de erro.

As Figuras 4-37 e 4-38 apresentam as respostas da planta em malha fechada ao degrau e de acompanhamento de referência senoidal, ambas na presença de perturbações e ruído de medição.

Figura 4-37 – Respostas ao degrau dos modelos admitidos com o controlador LQG/LTR.

Figura 4-38 – Acompanhamento de referências senoidais dos modelos admitidos com o controlador LQG/LTR.

Observa-se nas Figuras 4-37 e 4-38 que o controlador consegue estabilizar as variáveis controladas nos valores desejados dentro dos limites de erro para todos os casos simulados.

Nota-se ainda que a variação dos parâmetros do modelo influencia no sobressinal e tempo de resposta do sistema, assim como nos esforços de controle.

Validações com Modelo Não-Linear com Incertezas

Finalmente o controlador é validado com o modelo não-linear com incertezas da planta. Para as simulações são variados os seguintes parâmetros: A , K_{LV} , τ_{LV} , K_{FV} , τ_{FV} . A cada parâmetro é associado seu valor nominal, valor mínimo e valor máximo. Varia-se também o período do PWM da válvula LV, principal responsável pela não-linearidade do processo. Além desta não-linearidade, há saturadores nos atuadores que limitam suas faixas de operação aos valores reais dos instrumentos. Ao todo, são construídos 729 modelos não-lineares, sendo simulada a resposta aos degraus de cada um deles.

PWM com Período 1 Segundo

Simula-se o sistema não-linear com período do PWM de 1 segundo, o que corresponde a um PWM “rápido”.

Aplicam-se degraus nas referências com perturbação no processo e erro de medição. A Figura 4-39 apresenta as respostas obtidas.

Figura 4-39 – Respostas ao degrau do modelo não-linear com incertezas controlado pelo LQG/LTR e PWM de 1 segundo.

Observa-se que o controlador é robusto face às não-linearidades da planta, inclusive à saturação dos atuadores em 0 e 100%, que não foi incluída pelo modelo linear, conseguindo controlar todos os modelos não-lineares considerados. Nota-se também que as respostas obtidas são muito mais lentas que as obtidas para os modelos lineares, o que se deve majoritariamente às limitações dos atuadores não contempladas por aqueles modelos.

PWM com Período 10 Segundos

Simula-se o sistema não-linear com período do PWM de 10 segundos, que é uma taxa adequada para o sistema.

Aplicam-se degraus nas referências com perturbação no processo e erro de medição. Observa-se que o aumento do período do PWM torna a não-linearidade da variação de nível mais acentuada, porém o sistema continua atendendo às especificações, conforme exibido na Figura 4-40.

Figura 4-40 – Respostas ao degrau do modelo não-linear com incertezas controlado pelo LQG/LTR e PWM de 10 segundos.

PWM com Período 30 Segundos

Simula-se finalmente o sistema não-linear com período do PWM de 30 segundo, que corresponde a um PWM “lento”.

Aplicam-se degraus nas referências com perturbação no processo e erro de medição. Observa-se que o aumento do período do PWM torna a descontinuidade da variação de nível ainda mais acentuada, porém o sistema continua atendendo às especificações mesmo nesta situação, conforme a Figura 4-41.

Figura 4-41 – Respostas ao degrau do modelo não-linear com incertezas controlado pelo LQG/LTR e PWM de 30 segundos.

Conclusões das Validações

O controlador obtido foi validado através de 1.003 simulações, que comprovaram seu funcionamento. Estas validações visaram demonstrar o resultado da técnica de projeto e da sintonia do controlador, porém as propriedades verificadas são garantidas pela técnica LQG/LTR e não seria necessário um número tão extenso de simulações para validar o controlador obtido.

n. Observações e Comentários

O exemplo apresentou a aplicação da metodologia de sintonia ótima aplicada a um controlador mais complexo. Foi possível a determinação dos parâmetros de sintonia do LQG/LTR de forma simples e objetiva, podendo até mesmo a determinação dos parâmetros ser feita de forma totalmente automática, o que permite que a técnica LQG/LTR possa ser, por exemplo, totalmente implementada computacionalmente de forma a gerar um controlador robusto, sem a necessidade de grande entendimento da técnica para seu emprego.

Vale ressaltar que este exemplo não teve por objetivo a apresentação detalhada do projeto de um controlador LQG/LTR, mas sim a demonstração de que a abordagem de sintonia ótima apresentada pode ser empregada também em técnicas mais complexas de projeto de controladores. De fato, a automatização da determinação da matriz L e dos parâmetros μ e ρ permite que o esforço de engenharia comumente necessário para sua escolha possa ser empregado em outras tarefas, como a melhor especificação das barreiras de robustez e desempenho ou a obtenção do modelo do sistema a ser controlado.

o. Procedimento de Sintonia Resumido

Para a determinação da matriz L e dos parâmetros μ e ρ foi realizada uma sintonia em três passos, cada um para a obtenção de um parâmetro. Pode-se também formular um único problema de otimização para a obtenção de todos os parâmetros desejados. Tal formulação é dada por:

$$\max_{L, \mu, \rho} \rho \quad (4.425)$$

sujeito a:

$$\sigma_m[G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{10}{1 - e_M(\omega)} \quad \omega \leq 0,1 \text{ rad/s} \quad (4.426)$$

$$\sigma_M[G_N(j\omega)K(j\omega)] \leq \frac{0,03}{1 + e_M(\omega)} \quad \omega \geq 600 \text{ rad/s} \quad (4.427)$$

$$\sigma_M([I + G_N(j\omega)K(j\omega)]^{-1}G_N(j\omega)K(j\omega)) < \frac{1}{e_M} \quad \forall \omega \quad (4.428)$$

$$K(s) = G(sI - A + BG + HC)^{-1}H \quad (4.429)$$

$$G = \frac{1}{\rho} B'K \quad (4.430)$$

$$0 = -KA - A'K - C'C + \frac{1}{\rho} KBB'K \quad (4.431)$$

$$H = \frac{1}{\mu} \Sigma C' \quad (4.432)$$

$$0 = A\Sigma + \Sigma A' + LL' - \frac{1}{\mu} \Sigma C' C \Sigma \quad (4.433)$$

$$\mu \in \mathbb{R}_+^* \quad (4.434)$$

$$\rho \in \mathbb{R}_+^* \quad (4.435)$$

Esta formulação é mais concisa e direta que a abordagem em três passos adotada no exemplo, porém sua solução requer maior esforço computacional, uma vez que a Equação Algébrica de Riccati precisa ser resolvida mais vezes. Assim sendo, apresenta-se a formulação direta, porém é recomendável a solução progressiva do problema, como empregada.

4.3 Sintonia de MPC

Considera-se agora o problema de sintonia de controladores MPC (*Model Predictive Control*), cuja principal característica é a utilização de um modelo do processo controlado para predição de seu comportamento futuro e planejamento de uma sequência ótima de ações de controle.

São apresentados exemplos de sintonia de MPC para a coluna de destilação de Wood & Berry, *benchmark* empregado anteriormente.

4.3.1 Controladores MPC

Controladores MPC empregam um modelo do processo controlado, juntamente com medições deste processo, para calcular um conjunto ótimo de ações de controle.

A cada período de amostragem o controlador calcula uma série de ações de controle, de forma a otimizar uma trajetória predita das variáveis do sistema e envia para os atuadores do sistema a primeira ação de controle calculada para cada variável manipulada. O número de predições das variáveis controladas e de ações de controle calculadas são determinados, respectivamente, pelo horizonte de predição e pelo horizonte de controle, parâmetros de sintonia do controlador.

Além dos horizontes, também é possível sintonizar parâmetros da função objetivo otimizada pelo controlador, o que pode ser empregado para ajustar seu desempenho.

O item a seguir apresenta um exemplo de aplicação de um controlador MPC clássico.

4.3.2 Exemplo: Sintonia de MPC para Coluna de Destilação de Wood and Berry

Considera-se o modelo da coluna de destilação de Wood and Berry, empregada no item 4.1.5. Para este sistema deseja-se sintonizar um controlador MPC. A fim de analisar a influência da sintonia no desempenho do sistema, é inicialmente empregado o modelo nominal da planta como modelo de predição para o controlador e em seguida é realizada a sintonia com um modelo identificado.

a. Sintonia de Controlador MPC com Modelo Nominal

Busca-se uma sintonia que otimize o comportamento do controlador MPC considerando-se o modelo nominal da planta, podendo-se assim analisar a influência somente dos parâmetros de sintonia no comportamento do MPC. O modelo empregado é:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{768}{1.002 \cdot s + 1} \cdot e^{-60} & \frac{396}{645 \cdot s + 1} \cdot e^{-420} \\ \frac{-1.134}{1.260 \cdot s + 1} \cdot e^{-180} & \frac{-1.164}{864 \cdot s + 1} \cdot e^{-180} \end{bmatrix} \quad (4.436)$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{228}{894 \cdot s + 1} \cdot e^{-480} \\ \frac{294}{792 \cdot s + 1} \cdot e^{-180} \end{bmatrix} \quad (4.437)$$

Como função objetivo utiliza-se a soma ponderada de índices quadráticos com os pesos utilizados no item 4.1.5-c:

$$\begin{aligned} J_{q_1} = & 0,3 \cdot \left(0,9 \cdot ISE \left(y_{1_{servo_1}}(t) - r_{1_{servo_1}}(t) \right) + 0,1 \cdot ISU \left(u_{1_{servo_1}}(t) \right) \right) \\ & + 0,2 \cdot \left(0,9 \cdot ISE \left(y_{1_{servo_2}}(t) - r_{1_{servo_2}}(t) \right) + 0,1 \cdot ISU \left(u_{1_{servo_2}}(t) \right) \right) \\ & + 0,5 \cdot \left(0,9 \cdot ISE \left(y_{1_{regulatório}}(t) - r_{1_{regulatório}}(t) \right) + 0,1 \cdot ISU \left(u_{1_{regulatório}}(t) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.438)$$

$$\begin{aligned}
J_{q_2} = & 0,1 \cdot \left(0,9 \cdot ISE \left(y_{2_{servo_1}}(t) - r_{2_{servo_1}}(t) \right) + 0,1 \cdot ISU \left(u_{2_{servo_1}}(t) \right) \right) \\
& + 0,3 \cdot \left(0,9 \cdot ISE \left(y_{2_{servo_2}}(t) - r_{2_{servo_2}}(t) \right) + 0,1 \cdot ISU \left(u_{2_{servo_2}}(t) \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.439}$$

$$\begin{aligned}
& + 0,6 \cdot \left(0,9 \cdot ISE \left(y_{2_{regulatório}}(t) - r_{2_{regulatório}}(t) \right) + 0,1 \cdot ISU \left(u_{2_{regulatório}}(t) \right) \right) \\
J_{quad} = & 0,7 \cdot J_{q_1} + 0,3 \cdot J_{q_2}
\end{aligned} \tag{4.440}$$

O modelo empregado na formulação de sintonia ótima é:

$$y_1(t) = y_{1 \times u_1}(t) + y_{1 \times u_2}(t) + y_{1 \times d}(t) \tag{4.441}$$

$$y_2(t) = y_{2 \times u_1}(t) + y_{2 \times u_2}(t) + y_{2 \times d}(t) \tag{4.442}$$

$$y_{1 \times u_1}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{1 \times u_1}(s)\} \tag{4.443}$$

$$y_{1 \times u_2}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{1 \times u_2}(s)\} \tag{4.444}$$

$$y_{2 \times u_1}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{2 \times u_1}(s)\} \tag{4.445}$$

$$y_{2 \times u_2}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{2 \times u_2}(s)\} \tag{4.446}$$

$$y_{1 \times d}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{1 \times d}(s)\} \tag{4.447}$$

$$y_{2 \times d}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{2 \times d}(s)\} \tag{4.448}$$

$$\frac{Y_{1 \times u_1}(s)}{U_1(s)} = \frac{768}{1.002 \cdot s + 1} \cdot e^{-60} \tag{4.449}$$

$$\frac{Y_{1 \times u_2}(s)}{U_2(s)} = \frac{-1.134}{1.260 \cdot s + 1} \cdot e^{-180} \tag{4.450}$$

$$\frac{Y_{2 \times u_1}(s)}{U_1(s)} = \frac{396}{645 \cdot s + 1} \cdot e^{-420} \tag{4.451}$$

$$\frac{Y_{2 \times u_2}(s)}{U_2(s)} = \frac{-1.164}{864 \cdot s + 1} \cdot e^{-180} \tag{4.452}$$

$$\frac{Y_{1 \times d}(s)}{D(s)} = \frac{228}{894 \cdot s + 1} \cdot e^{-480} \tag{4.453}$$

$$\frac{Y_{2 \times d}(s)}{D(s)} = \frac{294}{792 \cdot s + 1} \cdot e^{-180} \tag{4.454}$$

$$U_1(s) = \mathcal{L}\{u_1(t)\} \tag{4.455}$$

$$U_2(s) = \mathcal{L}\{u_2(t)\} \tag{4.456}$$

$$|U_1(t)| \leq 0,0083 \tag{4.457}$$

$$|U_2(t)| \leq 0,0083 \tag{4.458}$$

$$\{u_1(t), u_2(t)\} = \text{mpc}\{y_1(t), y_2(t), M(z), S\} \quad (4.459)$$

$$D(s) = \mathcal{L}\{d(t)\} \quad (4.460)$$

onde a equação (4.459) representa o controlador MPC, que calcula as ações ótimas de controle $u_1(t)$ e $u_2(t)$ a partir das saídas medidas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ do modelo linear $M(z)$ e do conjunto de parâmetros de sintonia S .

O modelo é simulado nos cenários de resposta ao degrau na primeira saída (configuração *Servo₁*), na segunda saída (configuração *Servo₂*) e rejeição de perturbações (configuração *Regulatório*).

O cenário *Servo₁* é definido por:

$$r_{1_{\text{servo}_1}}(t) = 96 + 2 \cdot H(t) \quad (4.461)$$

$$r_{2_{\text{servo}_1}}(t) = 0,5 \quad (4.462)$$

$$d_{\text{servo}_1}(t) \equiv 0 \quad (4.463)$$

de onde se obtém, a partir do modelo, as respostas temporais $y_{1_{\text{servo}_1}}(t)$, $y_{2_{\text{servo}_1}}(t)$, $u_{1_{\text{servo}_1}}(t)$ e $u_{2_{\text{servo}_1}}(t)$.

O cenário *Servo₂* é definido por:

$$r_{1_{\text{servo}_2}}(t) = 96 \quad (4.464)$$

$$r_{2_{\text{servo}_2}}(t) = 0,5 - 0,3 \cdot H(t) \quad (4.465)$$

$$d_{\text{servo}_2}(t) \equiv 0 \quad (4.466)$$

de onde se obtém, a partir do modelo, as respostas temporais $y_{1_{\text{servo}_2}}(t)$, $y_{2_{\text{servo}_2}}(t)$, $u_{1_{\text{servo}_2}}(t)$ e $u_{2_{\text{servo}_2}}(t)$.

Finalmente, para a rejeição de perturbações do sistema, tem-se o cenário *Regulatório*:

$$r_{1_{\text{regulatório}}}(t) = 96 \quad (4.467)$$

$$r_{2_{\text{regulatório}}}(t) = 0,5 \quad (4.468)$$

$$d_{\text{regulatório}}(t) = 0 + 0,01 \cdot e(t) \quad (4.469)$$

onde $e(t)$ é um sinal aleatório de amplitude unitária.

O problema de sintonia ótima é:

$$\min_S J_{quad} \quad (4.470)$$

sujeito a:

$$\{y_{1_{servo_1}}(t), y_{2_{servo_1}}(t), u_{1_{servo_1}}(t), u_{2_{servo_1}}(t), r_{1_{servo_1}}, r_{1_{servo_1}}\} = \text{Modelo}\{\text{Servo}_1\} \quad (4.471)$$

$$\{y_{1_{servo_2}}(t), y_{2_{servo_2}}(t), u_{1_{servo_2}}(t), u_{2_{servo_2}}(t), r_{1_{servo_2}}, r_{1_{servo_2}}\} = \text{Modelo}\{\text{Servo}_2\} \quad (4.472)$$

$$\{y_{1_{regulatório}}(t), y_{2_{regulatório}}(t), u_{1_{regulatório}}(t), u_{2_{regulatório}}(t), r_{1_{regulatório}}, r_{1_{regulatório}}\} \\ = \text{Modelo}\{\text{Regulatório}\} \quad (4.473)$$

$$S = \{T, p, m, Q, R, N\} \quad (4.474)$$

$$T = 60 \quad (4.475)$$

$$p \in [1: 500] \quad (4.476)$$

$$m \in [1: 500] \quad (4.477)$$

$$Q_i \in [0: 1] \quad (4.478)$$

$$R_i \in [0: 1] \quad (4.479)$$

$$N_i \in [0: 1] \quad (4.480)$$

onde as equações (4.471), (4.472) e (4.473) representam os três cenários de simulação considerados, a equação (4.474) define o conjunto de parâmetros de sintonia do controlador, com seus domínios definidos nas equações (4.475) a (4.480). Considera-se o controlador com intervalo de amostragem de 1 minuto.

É empregado o controlador MPC disponível no Matlab[®], o qual resolve o seguinte problema de otimização (MathWorks, 2012):

$$\min_{\Delta u(t|t), \dots, \Delta u(m-1+t|t), \varepsilon} \left\{ \sum_{i=0}^{p-1} \left(\sum_{j=1}^{n_y} |Q_{i+1,j}^y (y_j(t+i+1|t) - r_j(t+i+1))|^2 + \sum_{j=1}^{n_u} |N_{i,j}^{\Delta u} \Delta u_j(t+i|t)|^2 + \sum_{j=1}^{n_u} |R_{(i,j)}^u (u_j(t+i|t) - u_{j_{target}}(t+i))|^2 + \rho_\varepsilon \varepsilon^2 \right) \right\} \quad (4.481)$$

sujeito a:

$$u_{j_{min}}(i) - \varepsilon V_{j_{min}}^u(i) \leq u_j(k+i|k) \leq u_{j_{max}}(i) - \varepsilon V_{j_{max}}^u(i) \quad (4.482)$$

$$\Delta u_{j_{min}}(i) - \varepsilon V_{j_{min}}^{\Delta u}(i) \leq \Delta u_j(k+i|k) \leq \Delta u_{j_{max}}(i) - \varepsilon V_{j_{max}}^{\Delta u}(i) \quad (4.483)$$

$$y_{j_{min}}(i) - \varepsilon V_{j_{min}}^y(i) \leq y_j(k+i|k) \leq y_{j_{max}}(i) - \varepsilon V_{j_{max}}^y(i) \quad (4.484)$$

$$\Delta u(k+h|k) = 0 \quad (4.485)$$

$$\varepsilon \geq 0 \quad (4.486)$$

onde os índices j denotam o j -ésimo componente de um vetor, $(t+i|t)$ denota o valor predito para o instante $t+i$ considerando as medições até o instante t e $r(t)$ é a referência no instante t , as ações de controle Δu são incrementais, ε é a variável de *slack*, empregada para tornar o problema de otimização resolvido internamente sempre factível, ρ_ε é o peso da variável de *slack*, utilizada juntamente com esta variável para manter a factibilidade do problema, $Q_{i,j}^y$, $R_{i,j}^u$ e $N_{i,j}^{\Delta u}$ são os pesos que compõem as matrizes de pesos Q , R e N . $u_{j_{min}}$, $u_{j_{max}}$, $\Delta u_{j_{min}}$, $\Delta u_{j_{max}}$, $y_{j_{min}}$, $y_{j_{max}}$ são os limites máximo e mínimo de cada variável considerada, p é o horizonte de predição e m é o horizonte de controle.

Considerando-se que o conjunto de parâmetros de sintonia possui diversos elementos independentes e de naturezas diferentes e que o problema de otimização é não-linear (devido ao controlador não-linear), emprega-se um algoritmo genético para solução deste problema de sintonia ótima.

Controlador sem Restrições

Considera-se inicialmente o controlador MPC sem restrições, ou seja, com as variáveis controladas, variáveis manipuladas e a variação das manipuladas podendo assumir quaisquer valores.

A solução do problema resulta na seguinte sintonia do controlador MPC:

$$\begin{cases} T = 60 \\ p = 272 \\ m = 4 \\ Q = [0,8704, & 0,0140] \\ R = [0,4505, & 0,7597] \\ N = [0,0392, & 0,0488] \\ J_{quad} = 200,1578 \end{cases}$$

Nota-se que o horizonte de predição resultante é um valor bastante elevado, entretanto, mas o horizonte de controle obtido é bem inferior. Nota-se também que um dos pesos está próximo à saturação, porém o comportamento do MPC não é afetado pelo valor absoluto dos pesos, apenas pela relação entre eles.

A fim de se obter um MPC que requeira menor esforço computacional, busca-se através do procedimento de otimização recursiva a sintonia com menor horizonte de predição e de controle que apresente um desempenho com desvio máximo de 5% do desempenho ótimo. Resolvendo este problema obtém-se a seguinte sintonia:

$$\begin{cases} T = 60 \\ p = 44 \\ m = 4 \\ Q = [0,7613, & 0,0234] \\ R = [0,4924, & 0,8635] \\ N = [0,0187, & 0,8230] \\ J_{quad} = 209,8131 \end{cases}$$

Observa-se que é possível obter uma redução significativa do horizonte de predição com apenas uma pequena perda de desempenho.

Controlador com Restrições

Considera-se agora o mesmo problema, porém com o controlador MPC com restrições. Impõem-se as seguintes restrições para o controlador:

$$93 \leq y_1(t) \leq 96 \quad (4.487)$$

$$0,1 \leq y_2(t) \leq 0,9 \quad (4.488)$$

$$0,0242 \leq u_1(t) \leq 0,0408 \quad (4.489)$$

$$0,0202 \leq u_2(t) \leq 0,0368 \quad (4.490)$$

$$-0,0017 \leq \Delta u_1(t) \leq 0,0017 \quad (4.491)$$

$$-0,0017 \leq \Delta u_2(t) \leq 0,0017 \quad (4.492)$$

Resolvendo o mesmo problema de sintonia para este controlador resulta:

$$\begin{cases} T = 60 \\ p = 500 \\ m = 5 \\ Q = [0,9651, & 0,0437] \\ R = [0,4733, & 0,3296] \\ N = [0,1812, & 0,6581] \\ J_{quad} = 291,4849 \end{cases}$$

Observa-se que a nova sintonia é bastante diferente da anterior, mesmo com o mesmo índice sendo otimizado. Nota-se também que há uma piora no índice de desempenho do controlador, porém isto deve-se às restrições impostas, ou seja, o controle torna-se mais *lento* para atender aos limites de amplitude e variação do esforço de controle.

Aplicando-se o procedimento de redução de horizontes para encontrar uma sintonia com horizontes de predição e de controle mínimos que mantenham o desempenho do controlador a 5% do valor ótimo, obtém-se:

$$\begin{cases} T = 60 \\ p = 32 \\ m = 5 \\ Q = [0,9477, & 0,0254] \\ R = [0,3998, & 0,5369] \\ N = [0,6013, & 0,6196] \\ J_{quad} = 305,3363 \end{cases}$$

Novamente o procedimento de redução de horizontes fornece um controlador com horizonte de predição bastante reduzido e com uma pequena perda de desempenho.

As Figuras 4-42, 4-43 e 4-44 mostram as respostas ao degrau na referência das duas variáveis controladas e na perturbação para a planta controlada pelo MPC sem restrições, MPC com restrições, PID otimizado para o índice quadrático utilizado na sintonia do MPC e PID otimizado para tempos. Também são apresentados os comportamentos do sistema com sintonias construídas diretamente a partir do índice de desempenho otimizado, ou seja:

$$\begin{cases} T = 60 \\ p = 85 (t_s) \\ m = 9 (0.1 \cdot t_s) \\ Q = [0,7 \cdot 0,9, & 0,3 \cdot 0,9] \\ R = [0,7 \cdot 0,1, & 0,3 \cdot 0,1] \\ N = [0, & 0] \end{cases}$$

Figura 4-42 – Respostas ao degrau na referência da composição de topo com controles PID e MPC.

Figura 4-43 - Respostas ao degrau na referência da composição de fundo com controles PID e MPC.

Figura 4-44 – Rejeição de perturbações com controles PID e MPC.

É possível observar que a resposta do controlador MPC é significativamente mais rápida e com menores desvios das referências que do controlador PID para as

respostas ao degrau, porém a rejeição de perturbações do MPC é muito mais lenta que a obtida pelos controladores PID.

Para melhor comparação entre os comportamentos obtidos com os controladores apresentados, as Tabelas 4-11 e 4-12 apresentam índices de desempenho calculados para cada caso.

Tabela 4-11 – Desempenho das sintonias de MPC sem restrições e do PID.

Índices de Desempenho	Sintonias				
	PID para Tempos	PID Quadrático	MPC sem Restrições	MPC sem Restrições Reduzido	MPC sem Restrições com Sintonia Direta
$t_s(CV_1)$ (s)	2.604,0	3.296,8	295,4	295,5	399,9
$t_s(CV_2)$ (s)	2.908,7	5.457,1	2.639,6	2.434,8	609,4
$t_r(CV_1)$ (s)	299,1	299,1	184,3	184,4	203,5
$t_r(CV_2)$ (s)	426,5	207,4	28,8	36,2	50,5
$M_p(CV_1)$ (% relativo)	48,2	33,9	0,02	0,07	0,02
$t_{sd}(CV_1 \times SP_2)$ (s)	3.308,6	6.621,1	1.634,3	1.322,6	3.340,1
$t_{sd}(CV_2 \times SP_1)$ (s)	3.565,8	6.095,9	∞	1.485,2	800,1
$t_{sd}(CV_1 \times D)$ (s)	5.037,8	9.075,0	8.183,2	8.182,8	8.235,2
$t_{sd}(CV_2 \times D)$ (s)	3.355,2	5.147,4	∞	4.968,8	7.593,1
$\Delta(CV_1 \times SP_2)$ (%)	0,0831	0,0816	0,0001	0,0002	0,0027
$\Delta(CV_2 \times SP_1)$ (%)	1,3826	1,1594	0,5000	0,5000	0,3114
$\Delta(CV_1 \times D)$ (%)	0,2672	0,1312	0,2998	0,2999	0,3006
$\Delta(CV_2 \times D)$ (%)	1,1416	0,8986	0,7686	0,7686	0,7686
J_{quad} (% ²)	4.063,6	2.991,7	358,3	419,1	526,7
J_{abs} (% ²)	5.160,6	3.953,9	810,0	881,0	972,9

Tabela 4-12 – Desempenhos das sintonias do MPC com restrições e do PID

Índices de Desempenho	Sintonias				
	PID para Tempos	PID Quadrático	MPC com Restrições	MPC com Restrições Reduzido	MPC com Restrições com Sintonia Direta
$t_s(CV_1)$ (s)	2.604,0	3.296,8	617,0	517,5	533,3
$t_s(CV_2)$ (s)	2.908,7	5.457,1	3.363,0	2.001,9	567,6
$t_r(CV_1)$ (s)	299,1	299,1	292,9	287,6	294,1
$t_r(CV_2)$ (s)	426,5	207,4	96,7	104,2	99,7
$M_p(CV_1)$ (% relativo)	48,2	33,9	5,1	0,3	0,6
$t_{sd}(CV_1 \times SP_2)$ (s)	3.308,6	6.621,1	951,9	571,6	1.686,9
$t_{sd}(CV_2 \times SP_1)$ (s)	3.565,8	6.095,9	4.190,9	1.803,9	1.146,9
$t_{sd}(CV_1 \times D)$ (s)	5.037,8	9.075,0	7.939,6	7.917,3	7.877,1
$t_{sd}(CV_2 \times D)$ (s)	3.355,2	5.147,4	2.295,5	6.994,5	7.526,2
$\Delta(CV_1 \times SP_2)$ (%)	0,0831	0,0816	0,0058	0,0013	0,0077
$\Delta(CV_2 \times SP_1)$ (%)	1,3826	1,1594	0,4000	0,3617	0,3085
$\Delta(CV_1 \times D)$ (%)	0,2672	0,1312	0,3376	0,3398	0,3555
$\Delta(CV_2 \times D)$ (%)	1,1416	0,8986	0,7943	0,8138	0,7943
J_{quad} (% ²)	4.063,6	2.991,7	460,0	572,4	607,4
J_{abs} (% ²)	5.160,6	3.953,9	884,6	1.000,1	1.031,4

b. Sintonia de Controlador MPC com Modelo Identificado

Realiza-se agora a sintonia do controlador MPC utilizando não o modelo nominal da planta, mas um modelo identificado. Para tal, é empregado o modelo obtido no item 4.1.5-d. Tem-se, para a primeira saída:

$$B_{11}(q) = 21,37 \cdot q^{-3} \quad (4.493)$$

$$B_{12}(q) = -26,54 \cdot q^{-7} \quad (4.494)$$

$$F_{11}(q) = 1 - 0,9724 \cdot q^{-1} \quad (4.495)$$

$$F_{12}(q) = 1 - 0,9741 \cdot q^{-1} \quad (4.496)$$

E para a segunda saída tem-se:

$$B_{21}(q) = 15,66 \cdot q^{-15} \quad (4.497)$$

$$B_{22}(q) = -38,53 \cdot q^{-7} \quad (4.498)$$

$$F_{21}(q) = 1 - 0,9598 \cdot q^{-1} \quad (4.499)$$

$$F_{22}(q) = 1 - 0,9633 \cdot q^{-1} \quad (4.500)$$

Otimizando o mesmo índice de desempenho do item anterior e empregando o modelo identificado para construção do MPC e para cálculo do índice de desempenho, obtém-se a seguinte sintonia:

$$\begin{cases} T = 60 \\ p = 4 \\ m = 3 \\ Q = [0,5758, \quad 0,4354] \\ R = [0,2297, \quad 0,6864] \\ N = [0,6758, \quad 0,6195] \\ J_{quad} = 219,6877 \end{cases}$$

Observa-se que a nova sintonia obtida é distinta da anterior, uma vez que se emprega outro modelo. Em particular, obteve-se um horizonte de predição reduzido. Foi empregado o modelo OE apresentado, tanto para a predição do MPC como para o cálculo do índice de desempenho, porém o efeito da perturbação – somada à saída simulada, conforme a estrutura OE – foi considerado apenas no segundo caso. Para averiguar este fenômeno, a Figura 4-45 mostra a variação do índice de desempenho com o horizonte de predição, considerando os demais parâmetros de sintonia em seus valores ótimos.

Figura 4-45 – Variação do índice de desempenho com o horizonte de predição para o modelo OE.

Compara-se então o desempenho deste controlador com as sintonias obtidas no item anterior. É incluído também um controlador MPC com sintonia direta empregando o modelo identificado. As Figuras 4-46, 4-47 e 4-48 apresentam as respostas ao degrau do sistema para composição de topo, composição de fundo e rejeição de perturbação, respectivamente. Para uma comparação mais objetiva entre os controladores, a Tabela 4-13 exibe índices de desempenho calculados para cada caso.

Figura 4-46 – Respostas ao degrau na referência da composição de topo para controlador MPC com modelo identificado.

Figura 4-47 – Respostas ao degrau na referência da composição de fundo para controlador MPC com modelo identificado.

Figura 4-48 – Rejeição de perturbações para controlador MPC com modelo identificado.

Observa-se que o emprego de modelo identificado leva a um desempenho inferior ao desempenho do controlador com o modelo nominal, como esperado,

porém o controlador MPC sintonizado ainda apresenta melhor desempenho quadrático que os controladores PID.

Tabela 4-13 – Desempenhos das sintonias do MPC com restrições e do PID.

Índices de Desempenho	Sintonias				
	MPC com Restrições	MPC com Restrições Reduzido	MPC com Restrições e Sintonia Direta	MPC com Restrições e Modelo Identificado	MPC com Restrições, Modelo Identificado e Sintonia Direta
$t_s(CV_1)$ (s)	617,0	517,5	533,3	531,8	509,7
$t_s(CV_2)$ (s)	3.363,0	2.001,9	567,6	2.349,7	2.329,0
$t_r(CV_1)$ (s)	292,9	287,6	294,1	284,3	286,8
$t_r(CV_2)$ (s)	96,7	104,2	99,7	92,9	98,8
$M_p(CV_1)$ (% relativo)	5,1	0,3	0,6	2,0	3,1
$t_{sd}(CV_1 \times SP_2)$ (s)	951,9	571,6	1.686,9	8.043,7	8.452,9
$t_{sd}(CV_2 \times SP_1)$ (s)	4.190,9	1.803,9	1.146,9	4.088,6	4.535,8
$t_{sd}(CV_1 \times D)$ (s)	7.939,6	7.917,3	7.877,1	6.290,4	6.361,7
$t_{sd}(CV_2 \times D)$ (s)	2.295,5	6.994,5	7.526,2	6.297,3	6.346,9
$\Delta(CV_1 \times SP_2)$ (%)	0,0058	0,0013	0,0077	0,0138	0,0095
$\Delta(CV_2 \times SP_1)$ (%)	0,4000	0,3617	0,3085	0,3429	0,3150
$\Delta(CV_1 \times D)$ (%)	0,3376	0,3398	0,3555	0,3822	0,3670
$\Delta(CV_2 \times D)$ (%)	0,7943	0,8138	0,7943	0,7943	0,7943
J_{quad} (% ²)	460,0	572,4	607,4	567,4	577,1
J_{abs} (% ²)	884,6	1.000,1	1.031,4	984,3	992,0

c. Observações e Comentários

O exemplo apresentou uma aplicação de controlador MPC e como ele pode ser sintonizado empregando-se a metodologia apresentada.

Foi empregado para a sintonia o mesmo índice otimizado pelo MPC, apenas ponderando-se diferentes cenários (degrau na referência da composição de topo, degrau na referência da composição de fundo e rejeição de perturbação), entretanto quaisquer outros índices de desempenho e conjuntos de especificações podem ser aplicados na sintonia deste controlador, de maneira análoga ao apresentado nos itens anteriores. Foram também considerados casos com o MPC utilizando o modelo nominal e um modelo identificado da planta.

Em todos os casos estudados notou-se uma forte dependência do desempenho do controlador com o horizonte de controle empregado, seguida da dependência com o horizonte de predição. A Figura 4-49 apresenta a variação do índice de desempenho otimizado com estes dois horizontes para o caso de controlador com restrições e com modelo nominal, empregando-se os respectivos pesos ótimos. A variação observada para o índice de desempenho com relação aos horizontes evidencia a importância da sintonia do controlador.

Figura 4-49 – Sensibilidade da sintonia do MPC com os horizontes de predição e de controle.

5 Conclusão

Foi tratado o tema de sintonia ótima de controladores, propostas soluções para o problema e apresentados conceitos relevantes e diversos exemplos de aplicação.

Uma formulação unificada para o problema de sintonia de controladores foi proposta. Tal formulação pode ser aplicada a diferentes estruturas de controladores, assim como a diferentes especificações de desempenho e tipos de processos.

A formulação permite um tratamento padrão de problemas de sintonia e também a aplicação e adaptação de soluções desenvolvidas para determinada estrutura ou especificação de controlador, como algoritmos de otimização dinâmica, para outras estruturas e especificações.

Formulando-se o problema de sintonia como um problema de otimização padrão tem-se a possibilidade de empregar algoritmos clássicos de otimização para encontrar sintonias ótimas, como demonstrado nos exemplos desenvolvidos. Com a formulação proposta e as especificações compiladas é possível o desenvolvimento de estudos sobre melhores técnicas de solução do problema de sintonia ótima. O desenvolvimento de novas técnicas de otimização, ou a adaptação de técnicas existentes, pode gerar resultados melhores, no sentido de aumentar a probabilidade de encontrar-se a solução ótima global do problema e de reduzir o tempo de convergência.

Para solucionar o problema de escolha de uma única solução ótima em problemas de otimização multiobjetivo foi proposta a otimização recursiva, a qual permite não apenas uma escolha precisa de uma solução ótima, mas também permite a obtenção desta solução, sem a necessidade da determinação de todas as soluções do problema multiobjetivo.

A otimização recursiva foi proposta para escolha de uma única solução em um problema de sintonia multiobjetivo, porém pode ser aplicada a qualquer problema de otimização multiobjetivo para escolha de uma solução.

Foi também extensivamente abordado o tema de especificação de controladores, tratando-se modelos de processos, empregados pelo procedimento

de sintonia ótima; requisitos de estabilidade, a principal especificação da maioria das aplicações de controladores; requisitos de desempenho, que determinam se um controlador é ou não aceitável para um determinado processo; requisitos de robustez, que permitem a obtenção de soluções confiáveis quando não se conhece o modelo exato do processo; e índices de desempenho, que representam as características do sistema as quais se deseja otimizar.

A formulação proposta foi então aplicada em alguns exemplos, cada um focando em diferentes aspectos do problema de sintonia. Os exemplos apresentaram também a aplicação de alguns dos elementos de especificação compilados, exibindo-se algumas especificações típicas de controladores. Foram apresentados exemplos para as estruturas PID, LQG/LTR e MPC.

Controladores PID possuem uma estrutura bastante simples e são de ampla aplicação, sendo o foco de muitos estudos sobre sintonia. Os exemplos desenvolvidos demonstraram que é possível formular e resolver o problema de sintonia ótima para controladores PID de forma bastante simples (desde que se disponha de ferramentas computacionais adequadas), obtendo-se resultados melhores que as técnicas clássicas e muito mais flexíveis, ou seja, a formulação apresentada permite a obtenção de controladores PID com qualquer conjunto (factível) de características, diferentemente das abordagens clássicas.

A aplicação da formulação à técnica LQG/LTR demonstrou como se pode empregá-la em projetos de controladores mais complexos e como é possível incluir ao controlador, através de sua sintonia, características não intrínsecas à sua estrutura.

Exemplos de aplicação a controladores MPC, estrutura cada vez mais presente em aplicações industriais, demonstraram como a abordagem permite encontrar bons parâmetros de sintonia para controladores não-lineares e de estrutura complexa de forma bastante simples e rápida.

Por fim, outras aplicações são sugeridas como temas de estudos futuros e aprimoramentos.

5.1 Outras Aplicações

São brevemente apresentadas aqui algumas outras possíveis aplicações da metodologia de sintonia ótima de controladores apresentada. São elas: sintonia de controladores de sintonia variável, sintonia automática (*auto-tuning*), auto sintonia (*self-tuning*), sintonia de controladores para arquiteturas complexas e solução analítica do problema de sintonia ótima.

5.1.1 Sintonia de Controladores de Sintonia Variável

Controladores de sintonia variável são aqueles nos quais os parâmetros de sintonia não são mantidos constantes, mas variam com o tempo ou de acordo com o estado do sistema.

A aplicação da abordagem de sintonia ótima para encontrar parâmetros de sintonia desse tipo de controlador pode ser feita de duas maneiras: considerando o controlador como de sintonia fixa em diferentes cenários ou realizando-se diretamente a sintonia considerando-o de sintonia variável.

Na primeira opção o problema de sintonia ótima deve ser formulado e resolvido para diferentes cenários, como, por exemplo, diferentes pontos de operação, obtendo-se assim conjuntos de parâmetros de sintonia ótimos para cada cenário.

Esta primeira abordagem pode ser empregada, por exemplo, para determinar as sintonias em uma arquitetura de PID de sintonia variável, na qual os parâmetros do controlador são variados de acordo com o estado do sistema, como através de um conjunto de regras fuzzy.

Esta estratégia é interessante por ser uma maneira simples de se determinar as sintonias ótimas para cada situação, porém não leva em consideração o comportamento do sistema durante a variação dos parâmetros do controlador. De fato, ao se aplicar uma estratégia de sintonia variável, o controlador pode perder algumas de suas características, como a estabilidade, uma vez que torna-se outro tipo de controlador. Ou seja, ainda que o controlador seja estável em cada

configuração possível, a transição de uma configuração a outra pode causar fenômenos indesejados, como oscilações ou mesmo a instabilidade. Para tratar este problema, a segunda estratégia pode ser aplicada.

Na segunda abordagem considera-se o controlador na sua forma final, com o elemento de variação de sintonia integrado, e incluem-se diversos cenários na formulação do problema de sintonia ótima. Esta estratégia encerra as características do sistema com a variação dos parâmetros de sintonia e pode ser adequada para situações em que, por exemplo, os parâmetros de sintonia sejam determinados por alguma realimentação simples, porém pode demandar maior esforço computacional para solução em alguns casos.

De maneira geral, pode ser mais interessante resolver o problema inicialmente aplicando, quando possível, a primeira abordagem e então refinar a solução considerando o controlador na sua forma completa, conforme a segunda abordagem.

5.1.2 Sintonia Automática (Auto-Tuning) de Controladores

Sintonia automática, ou *auto-tuning*, consiste em uma ferramenta que ajusta um controlador para um processo de forma automática. Ou seja, o usuário fornece algumas informações básicas, como limites do processo, e a ferramenta encarrega-se de ajustar o controlador e de obter as informações para tal a partir de dados do processo. Este tipo de ferramenta é cada vez mais comum em sistemas que implementam controladores clássicos, como PID, e facilita o ajuste destes controladores e o comissionamento das malhas por eles controladas.

A abordagem de sintonia ótima proposta pode ser empregada em ferramentas de sintonia automática de forma direta. Ou seja, a partir de um modelo fornecido pelo usuário ou obtido por uma ferramenta de identificação de sistemas, uma ferramenta que implemente o procedimento proposto de sintonia pode encontrar um conjunto ótimo de parâmetros de sintonia para este modelo e um conjunto de especificações.

Tal conjunto de especificações pode ser fixo (não sendo necessária a intervenção do usuário no processo de sintonia), escolhido de algumas opções oferecidas (com o usuário fazendo uma escolha qualitativa do propósito do controlador) ou construído diretamente (com o usuário escolhendo as características desejadas, seus limites, ordem de prioridade e tolerâncias).

5.1.3 Auto Sintonia (*Self-Tuning*) de Controladores

Auto sintonia, ou *self-tuning*, corresponde ao processo de ajuste automático dos parâmetros de sintonia de um controlador durante sua operação, ou seja, o controlador “aprende” e se “aprimora” com os eventos do sistema controlado.

A abordagem de sintonia ótima proposta pode ser empregada para este fim conforme o procedimento exibido na Figura 5-1.

Figura 5-1 – Aplicação de sintonia ótima em auto sintonia.

Conforme o fluxograma da Figura 5-1, o controlador é implementado com uma sintonia inicial e então se observa o comportamento do sistema até a ocorrência de um evento representativo, ou seja, até que haja uma perturbação ou mudança de referência que gere sinais que possam ser empregados para a obtenção de um modelo (ainda que simples) do processo.

Quando um modelo é obtido, resolve-se o problema de sintonia ótima para um conjunto de especificações previamente escolhido e atualiza-se a sintonia do controlador. A sintonia obtida é então implementada e repete-se o procedimento na ocorrência do próximo evento representativo.

Este procedimento melhora progressivamente a sintonia do controlador sem necessidade de um modelo exato ou de um procedimento extenso de sintonia.

5.1.4 Sintonia de Controladores para Arquiteturas Complexas

Diferentes controladores, com características distintas, podem ser combinados para controlar um processo. A esta combinação de estruturas chama-se de arquitetura de controle.

Algumas arquiteturas típicas são controladores PID em cascata ou MPC gerando referências para controladores PID.

O procedimento de sintonia ótima proposto pode ser diretamente aplicado para sintonizar cada elemento da arquitetura para exercer de forma ótima sua função, o que facilita a aplicação de diversos controladores em conjunto para a execução de uma tarefa complexa, assim como o estudo de arquiteturas de controladores.

5.1.5 Solução Analítica

Os casos apresentados no estudo foram resolvidos numericamente, porém o problema de sintonia ótima pode ser também resolvido de forma analítica para, por exemplo, a obtenção de novas fórmulas para sintonia por cálculo direto que forneçam determinado conjunto de características a uma estrutura escolhida de controlador aplicada a certo conjunto de modelos de processo.

Esta possibilidade permite a expressão das formas clássicas de sintonia por cálculo direto na formulação proposta, ou seja, determinada fórmula de sintonia

pode ser considerada a solução de um problema de sintonia ótima, que garante a uma classe de modelos certo conjunto de características.

Pode-se então considerar a formulação proposta não apenas como uma nova abordagem para o problema de sintonia, mas como uma unificação da representação das diversas soluções existentes para o problema de sintonia de controladores.

5.2 Comentários Finais

Consideram-se os objetivos propostos atingidos, assim como a meta de se encontrar uma formulação do problema de sintonia ótima de controladores.

De maneira geral, a formulação proposta de sintonia ótima de controladores permite a mudança de alguns paradigmas de sintonia de controladores, tornando o processo mais direto e preciso. A busca por novas técnicas de sintonia pode se tornar a busca por melhores métodos de solução do problema de otimização dinâmica construído. A determinação da técnica de sintonia mais adequada para cada processo pode se tornar a escolha do conjunto de especificações mais adequado. Finalmente, o processo manual de refinamento de parâmetros de sintonia pode se tornar a escolha de prioridades e precisões para índices de desempenho, ou, a arte da sintonia de controladores pode se tornar uma navegação por superfícies ótimas.

Referências

ALVES, V. A. O.; GARCIA, C. **Extensions and Innovations in Two-Step Closed-Loop System Identification**. Proceedings of the 9th Portuguese Conference on Automatic Control. Coimbra, Portugal. 2010a.

———. **Statistical Analysis of Closed-loop Identified Models**. Proceedings of the 9th Portuguese Conference on Automatic Control. Coimbra, Portugal. 2010b.

AGUIRRE, L. A. **Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais**. 3ª edição. Belo Horizonte : Editora UFMG. 2007. ISBN: 978-85-7041-584-4.

ASTRÖM, J. K. **Introduction to Stochastic Control Theory**. s.l. : Academic Press. 1970.

ASTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. **Automatic Tuning of Simple Regulators with Specifications on Phase and Amplitude Margins**. Automatica, Vol. 20, pp. 645-651. 5 de Setembro de 1984. ISSN: 00051098.

CAMPOS, M. C. M. M.; TEIXEIRA, C. G. H. 2010. **Controles Típicos de Equipamentos e Processos Industriais - 2ª Edição**. São Paulo: Blucher, 2010. ISBN: 978-85-212-0552-4.

CHIEN, K. L., HRONES, J. A. E RESWICK, J. B. **On Automatic Control of Generalized Passive Systems**. ASME, Vol. 74, pp. 175-185. 1952.

COHEN, G. H. E COON, G. A. **Theoretical Consideration of Retarded Control**. ASME Transactions, Vol. 75, pp. 827-834.

CRUZ, J. J. **Controle Robusto Multivariável**. São Paulo: EDUSP, 1996. ISBN: 85-314-0341-3.

DAHLIN, E. B. **Designing and tuning digital controllers**. Instrumentation and Control Systems, Vol. 41, pp. 77-83, 87-91. 1968.

DAVIDON, W. C. **Variable metric method for minimization**. SIAM Journal on Optimization, Vol. 1, pp. 1-17.

DESBOROUGH, L. E. HARRIS, T. **Performance Assessment Measures for Univariate Feedback Control**. The Canadian Journal of Chemical Engineering, Vol. 70, pp. 1186 - 1197. Dezembro de 1992.

EYKHOFF, P. **System Identification: Parameter and State Estimation**. John Wiley & Sons, 1974. ISBN: 978-0471249801.

FANG, H.; CHEN, L. **Application of an enhanced PSO algorithm to optimal tuning of PID gains**. Chinese Control and Decision Conference (CCDC 2009), pp. 35-39. IEEE. 2009.

GARCIA, C. **Modelagem e Simulação de Processos Industriais e de Sistemas Eletromecânicos**. 2ª edição. São Paulo: EDUSP. 2005. ISBN: 978-85-314-0904-2.

GARCIA, C.; JULIANI, R. C. G. **Modelling and Simulation of pH Neutralization Plant Including the Process Instrumentation**. *Applications of MATLAB in Science and Engineering*. [ed.] Tadeusz Michalowski. InTech. Capítulo 24, pp. 485-510. 2011.

GOPALUNI, R. B., PATWARDHAN, R. S. e SHAH, S. L. **The nature of data pre-filters in MPC relevant identification – open- and closed-loop issues**. Automatica, Vol. 39, pp. 1617-1626. 2003.

GOPALUNI, R. BHUSHAN, PATWARDHAN, R. S.; SHAH, S. L. **MPC relevant identification - Tuning the noise model**. Journal of Process Control, Vol. 14, pp. 699-714. 2004.

HARRIS, T. J. **Assessment of Control Loop Performance**. The Canadian Journal of Chemical Engineering, Vol. 67, pp. 856 - 861. Outubro de 1989

———. **Performance Assessment Measures for Univariate Feedforward/Feedback Control**. The Canadian Journal of Chemical Engineering, Vol. 71, pp. 605 - 616. Agosto de 1993.

HAYKIN, S. **Neural Networks and Learning Machines**. 3ª edição. Pearson. 2009. ISBN: 978-0-13-147139-9.

HESPANHA, J. P. **Linear Systems Theory**. Princeton. 2009. ISBN: 978-0-691-14021-6.

HOOKE, R.; JEEVES, T. A. **'Directive search' solution of numerical and statistical problems**. Journal of the Association for Computing Machinery (ACM), Vol. 8, pp. 212-229. 1961.

HUANG, B.; SHAH, S. L. **Closed-loop identification: a two step approach**. Journal of Process Control, Vol. 7, pp. 425-438. 1997.

KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**. Third Edition. Prentice Hall. 2002. ISBN: 0-13-067389-7.

JULIANI, R. C. G. **Adequação de Planta Piloto de Neutralização de pH a Plataforma de Pesquisa e Desenvolvimento - Projeto de Formatura e de Iniciação Tecnológica**. São Paulo: EPUSP/FDTE. 2011.

———. **Adequação de Planta Piloto de Neutralização de pH a Plataforma de Pesquisa e Desenvolvimento - Relatório de Projeto de Formatura**. São Paulo: EPUSP. 2010.

KIRK, D. E. **Optimal Control Theory: An Introduction**. Prentice Hall, 1970. ISBN: 0-486-43484-2.

LAGARIAS, J. C., ET AL. **Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions**. SIAM Journal of Optimization, Vol. 9, pp. 112-147. 1998.

LEVINE, W. S. **The Control Handbook: Control System Fundamentals - Second Edition**. 2ª edição. CRC Press. 2011. ISBN: 978-1420073669.

LIU, G. P.; DALEY, S. **Optimal-tuning PID control for industrial systems**. Control Engineering Practice, Vol. 9, pp. 1185-1194. 2001.

LJUNG, L. **System Identification: Theory for the User**. 2ª edição. Prentice Hall. 1999. ISBN: 0-13-656695-2.

MATHWORKS. **Model Predictive Control Toolbox User's Guide**. MathWorks, 2012.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. São Paulo: Livraria da Física. 2006. ISBN: 85-88325-08-X.

MORKOS, S.; KAMAL, H. **Optimal tuning of PID controller using adaptive hybrid particle swarm optimization algorithm**. International Journal of Computers, Communications & Control, Vol. VII, no. 1, pp. 101-114. Março de 2012. ISSN 1841-9836.

OGATA, K. **Discrete-Time Control Systems**. 2ª edição. Prentice Hall. 1995. ISBN: 0-13-034281-5.

———. **Engenharia de Controle Moderno**. 4ª edição. Prentice Hall. 2003. ISBN: 978-85-87918-23-9.

OI, A.; NAKAZAWA, C.; MATSUI, T.; FUJIWARA, H.; MATSUMOTO, K.; NISHIDA, H. **PID optimal tuning method by particle swarm optimization**. 2008 SICE Annual Conference. pp. 3470-3473. 20 a 22 de Agosto de 2008.

RIVERA, D. E., MORARI, M. E SKOGESTAD, S. **Internal Model Control. 4. PID Controller Design**. Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development, Vol. 25, pp. 252-265. 1 de Janeiro de 1986.

SEBORG, D. E., EDGAR, THOMAS, F. E MELLICHAMP, D. A. **Process Dynamics and Control - Secon Edition**. 2004.

SUNG, S. W.; LEE, T.; PARK, SUNWON. **Optimal PID controller tuning method for Single-Input/Single-Output processes**. AIChE Journal, Vol. 48, pp. 1358-1361. 2002.

VAN DEN HOF, P. M. J. e SCHRAMA, R. J. P. **An Indirect Method for Transfer Function Estimation from Closed Loop Data**. Automatica, Vol. 29, pp. 1523-1527. 1993.

WOOD, R. K.; BERRY, M. W. **Terminal composition control of a binary distillation column**. Chemical Engineering Science, Vol. 28, pp. 1707-1717. 1973.

ZIEGLER, J. G. AND NICHOLS, N. B. **Optimum settings for automatic controllers**. Transactions of the ASME, no. 64. 1942.

ZHU, Y.C. **Multivariable process identification for MPC: the asymptotic method and its applications.** Journal of Process Control, Vol. 2, pp. 101-115. 1998.

Índice

- acompanhamento de sinais de referência, 51, 80
- erros de estado estacionário, 52
- especificação no domínio da frequência, 54
- especificação no domínio do tempo, 52
- otimização no domínio da frequência, 81
- otimização no domínio do tempo, 80
- banda passante, 62
- otimização da, 83
- comportamento do sistema controlado, 8
- controlador, 8
- custos de operação, 100
- esforço de controle, 67, 90
 - absoluto, 92
 - desgaste dos atuadores, 93
 - em tempo contínuo, 90
 - em tempo discreto, 91
 - quadrático, 91
- estabilidade
 - BIBO, 43
 - condições para a, 43
 - de Lyapunov, 41
- estado, 8
- frequência
 - de canto, 62
 - de corte, 62
- identificação de sistemas, 39
- incertezas de modelagem
 - aditivas, 70
 - definição, 69
 - estruturadas, 70
 - multiplicativas, 71
 - múltiplos modelos, 71
 - não estruturadas, 70
 - representações, 69
- índice de desempenho, 8, 77
 - baseado em desempenho ótimo, 98
 - composto, 99
 - de tempo contínuo, 77
 - de tempo discreto, 77, 100
 - do problema do regulador linear quadrático, 94
 - formulação geral, 78
- índices de desempenho baseados na integral do erro, 85
 - IAE, 86
 - ISE, 86
 - ITAE, 86
 - ITSE, 86
- índices de desempenho baseados no somatório do erro, 87
 - SAE, 88
 - SSE, 88
- integrated absolute error, 86
- integrated squared error, 86
- integrated time absolute error, 86
- integrated time squared Error, 86
- margem
 - de fase, 63
 - de ganho, 63
- margens
 - otimização das, 83
- modelagem fenomenológica, 39
- modelo
 - a parâmetros concentrados, 26
 - a parâmetros distribuídos, 26
 - autônomo, 26
 - de sinais contínuos, 25
 - de sinais quantizados, 25
 - de tempo contínuo, 25
 - de tempo discreto, 25
 - definição, 21
 - dinâmico, 23
 - estático, 23
 - invariante no tempo, 24
 - linear, 23
 - MIMO, 24
 - MISO, 24
 - não autônomo, 26
 - não linear, 23
 - não paramétrico, 27
 - no domínio da frequência, 25
 - no domínio do tempo, 24
 - paramétrico, 27
 - SIMO, 24
 - SISO, 24
 - variante no tempo, 24
- modelo de erro, 69
- modelo matemático, 7
- modelos

- determinísticos, 26
- estocástico, 26
- obtenção, 38
- tipos de, 23
- MPC
 - redução de horizontes, 214, 215
- otimização
 - de índice composto, 16
 - de múltiplos índices de desempenho, 16
 - recursiva, 17
- parâmetros, 8
 - precisão de, 67
- perturbações
 - representação, 55
- planta, 7
- rejeição de perturbações, 55, 81
 - otimização no domínio da frequência, 82
 - otimização no domínio do tempo, 82
- rejeição de ruídos de medição, 82
- representações de modelos
 - funções de transferência, 30
 - modelos computacionais, 38
 - modelos em espaço de estados, 35
 - modelos gráficos, 28
 - redes neurais, 33
 - resposta ao degrau, 29
 - resposta ao impulso, 28
 - resposta em frequência, 29
- requisito de desempenho, 8, 49
 - como índices de desempenho, 79
- requisito de robustez, 8
 - como índices de desempenho, 84
- resposta ao degrau, 49, 79
 - overshoot, 51
 - tempo de acomodação, 50
 - tempo de subida, 50
 - undershoot, 51
- restrições, 8
 - construtivas, 64
 - nos estados, 63
- robustez
 - da estabilidade, 72, 84
 - de desempenho, 73
 - definição, 69
 - do desempenho, 84
 - requisitos de, 69
- ruído de medição
 - rejeição de, 60
- sintonia, 8
- sintonia ótima
 - definição, 13
 - formulação matemática, 15
 - procedimento, 14
- sintonia robusta, 69
- sistema, 9
 - dinâmico, 9
- summed absolute error, 88
- summed squared error, 88
- taxa de amostragem, 65, 83
- variabilidade, 95
 - em relação ao range, 95
 - em relação ao valor de referência, 95
- variância, 96
 - controlador de variância mínima, 96
 - índice de Harris, 96
 - índice de Harris normalizado, 96
 - mínima, 97
- variáveis
 - de entrada, 9
 - de saída, 9
- velocidade de resposta, 89