OSWALDO LUIZ CARRAPIÇO

**CONTROLE PREDITIVO DE HORIZONTE INFINITO PARA
PROCESSOS INTEGRADORES COM TEMPO MORTO**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do título
de Mestre em Engenharia.

São Paulo

Outubro de 2004

OSWALDO LUIZ CARRAPIÇO

**CONTROLE PREDITIVO DE HORIZONTE INFINITO PARA
PROCESSOS INTEGRADORES COM TEMPO MORTO**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do título
de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia Química

Orientador:
Prof. Dr Darci Odloak

São Paulo
Outubro de 2004

São Paulo

Outubro de 2004

Carrapiço, Oswaldo Luiz

Controle Preditivo de Horizonte Infinito para Processos
Integradores com Tempo Morto

São Paulo, 2004.

102p.

Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo. Departamento de Engenharia Química.

1. Controle de Processos 2. Controle Nominal 3. Horizonte Infinito
4. Processo Integrador 5. Tempo Morto 6. Reciclo
I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de
Engenharia Química II. t

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Darci Odloak pela orientação dada na condução deste trabalho

À minha esposa Elisa pelo enorme incentivo dado nessa caminhada, principalmente nos momentos mais difíceis e que não foram poucos...

À Petrobras pela viabilidade de educação continuada concedida aos seus profissionais

À Refinaria Presidente Bernardes RPBC, representada pelo Gerente Setorial Antonio Maylinch Teruel e pelo Gerente de Otimização Fernando José Novaes, por permitir e acreditar na realização dessa especialização

Ao engenheiro Euclides Almeida Neto pelas contribuições feitas ao longo da trajetória profissional de nossas carreiras

Aos colegas do setor, pelo incentivo

Aos meus pais, Fernanda e Antônio, pelo que representam....

Aos meus avós Brígida, Felismina (em memória), Armindo (em memória) e Remízio (em memória) que mostraram o caminho...

Ao engenheiro e professor Oscar Rosé Filho (em memória), pela inspiração da boa formação de engenharia química quando aluno...

E em especial à **Deus**, sem ele não seria possível...

SUMÁRIO

Lista de Figuras	i
Lista de Tabelas	iii
Lista de Símbolos	iv
Capítulo 1 Introdução e revisão da literatura	1
1.1 Introdução	1
1.2 Características integradoras com tempo morto em processos químicos	2
1.3 Desenvolvimento dos controladores preditivos baseados em modelo (MPC's)	3
Capítulo 2 Modelo em variáveis de estado para sistemas integradores	6
2.1 Introdução	6
2.2 Representação de modelos em variáveis de estado	6
2.3 Modelo em variáveis de estado para sistemas integradores sem tempo morto	7
2.4 Exemplo	14
Capítulo 3 Controlador IHMPC para sistemas integradores sem tempo morto	16
3.1 Introdução	16
3.2 Controlador de horizonte infinito para sistemas integradores sem tempo morto	16
3.2.1 Lei de controle	16
3.2.2 O controlador IHMPC estendido de Rodrigues e Odloak (2003)	21
3.2.3 Nova extensão para o IHMPC	24
3.2.4 Controlador IHMPC em duas camadas	28
3.3 Exemplos	30
Capítulo 4 IHMPC estendido para sistemas integradores com tempo morto	34
4.1 Introdução	34
4.2 Modelo em variáveis de estado para sistemas integradores com tempo morto	34
4.2.1 O ROSSMPC de Gouvêa e Odloak (1997)	34
4.2.2 Extensão do ROSSMPC para sistemas integradores com tempo morto	36
4.3 Desenvolvimento do controlador IHMPC-E de modelo nominal	38
4.4 Observador de estados para o IHMPC-E	52
4.5 Aplicação do IHMPC-E a uma coluna de destilação	54
4.5.1 Descrição sumária do processo analisado	54
4.5.2 Representação da coluna em variáveis de estado	57
4.5.3 Filtro de Kalman para a coluna	59
4.5.4 Desempenho do IHMPC-E	60
4.5.4.1 Caso Nominal	60
4.5.4.2 Desempenho do IHMPC-E para incertezas no modelo da planta	67

Capítulo 5 Aplicação do IHMPC-E no controle de um sistema industrial complexo	73
5.1 Descrição sumária do processo de óxido de eteno e seu problema de controle	73
5.2 Modelo em variáveis de estado em sistemas integradores com tempos mortos diferentes	76
5.3 Conceitos de observabilidade de um sistema	79
5.4 Controle do sistema industrial de óxido de eteno com modelos aproximados	81
Capítulo 6 Conclusões e Recomendações	92
6.1 Conclusões	92
6.2 Sugestões para trabalhos futuros	93
Referências Bibliográficas	94
Apêndice A	96
A.1 Montagem matricial da predição das saídas ao longo do horizonte np	96
A.2 Função Custo do Problema P4.1 na forma quadrática	99
A.3 Função Custo do Problema P4.2 na forma quadrática	100
A.4 Função Custo do Problema P4.3 na forma quadrática	101

Lista de Figuras

Figura 3.1- Resposta do sistema com os controladores I e II

Figura 3.2- Funções custo dos problemas P3.3 e P3.4b (controladores I e II)

Figura 4.1- Esquema de controle convencional da coluna deisobutanizadora

Figura 4.2- Tela gráfica operacional da coluna deisobutanizadora no SDCCD

Figura 4.3- Auto-valores da matriz $[(I - K_F C)A]$

Figura 4.4- Controladas y_1 e y_3 com IHMPC-E

Figura 4.5- Manipuladas u_1 e u_2 com IHMPC-E

Figura 4.6- Função custo do caso servo em y_1 e y_3 com IHMPC-E

Figura 4.7- Controladas y_1 e y_4 com IHMPC-E

Figura 4.8- Manipuladas u_1 e u_2 com IHMPC-E

Figura 4.9- Função custo do caso servo em y_1 e y_4 com IHMPC-E

Figura 4.10- Controladas y_1 e y_3 em função da perturbação u_{d1} com IHMPC-E

Figura 4.11- Manipuladas u_1 e u_2 em função da perturbação u_{d1} com IHMPC-E

Figura 4.12- Função custo do caso regulador com perturbação u_{d1} com IHMPC-E

Figura 4.13- Controladas y_1 e y_3 com IHMPC-E e incerteza nos ganhos

Figura 4.14- Manipuladas u_1 e u_2 com IHMPC-E e incerteza nos ganhos

Figura 4.15- Controladas y_1 e y_3 com IHMPC-E e incerteza nas constantes de tempo

Figura 4.16- Manipuladas u_1 e u_2 com IHMPC-E e incerteza nas constantes de tempo

Figura 4.17- Controladas y_1 e y_3 com IHMPC-E e incerteza no tempo morto

Figura 4.18- Manipuladas u_1 e u_2 com IHMPC-E e incerteza no tempo morto

Figura 5.1- Auto-valores da matriz $[(I - K_F C)A]$

Figura 5.2- Variação na composição do gás de reciclo : setpoints y_1 e y_2

Figura 5.3- Manipuladas para o caso servo em y_1 e y_2

Figura 5.4- Função custo do caso servo em y_1 e y_2

Figura 5.5- Efeito do peso das variáveis de folga no desempenho do IHMPC-E

Figura 5.6- Variação na temperatura de óleo térmico : setpoint y_3

Figura 5.7- Manipuladas para o caso servo em y_3

Figura 5.8- Função custo do caso servo em y_3

Figura 5.9- Variação na pressão do gás de reciclo : setpoint y_4

Figura 5.10- Manipuladas para o caso servo em y_4

Figura 5.11- Perturbação na vazão de oxigênio: variáveis controladas

Figura 5.12- Perturbação na vazão de oxigênio: variáveis manipuladas

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Parâmetros de sintonia dos controladores I e II

Tabela 4.1 – Parâmetros de sintonia do IHMPC-E nominal

Tabela 4.2 – Parâmetros de sintonia do IHMPC-E de modelo incerto

Tabela 5.1 – Parâmetros de sintonia do IHMPC-E de modelo incerto

Lista de Símbolos

A	matriz característica do modelo incremental em malha aberta
A^*	matriz A modificada que limita previsões das saídas no infinito
$\tilde{A}$	matriz característica do modelo posicional em malha aberta
$\tilde{AB}$	matriz auxiliar em função de A , B e m
B	matriz de distribuição das entradas do modelo incremental em malha aberta
$\tilde{B}$	matriz de distribuição das entradas do modelo posicional em malha aberta
C	matriz das saídas do modelo incremental
C_f	matriz auxiliar da função objetivo dos problemas de programação quadrática
$\tilde{C}$	matriz das saídas do modelo posicional
$\bar{C}$	matriz auxiliar em função de A , C e np
$\overline{\overline{C}}$	matriz auxiliar em função de A , B , C , m e np
c	gradiente da função objetivo dos problemas de programação quadrática
D^0	matriz dos ganhos de regime permanente
D_m^0	matriz D^0 estendida ao longo do horizonte de controle
D^i	matriz dos coeficientes dos pólos integradores
D_m^i	matriz D^i estendida ao longo do horizonte de controle
D^d	matriz dos resíduos de regime permanente
$\tilde{D}$	matriz auxiliar em função de D^0 , D^i , m e Δt
e	erro entre uma dada saída y qualquer e seu valor de referência y^{sp}
F	matriz incremental do regime transiente do sistema
F_u	matriz auxiliar em função de D^d , F e N
F_x	matriz auxiliar em função de F
G	matriz auxiliar em função de D^0 , D^i , F e N
$\bar{G}$	matriz auxiliar em função de D^0 , D^i , Ψ , F e N
$G(s)$	matriz das funções de transferência entre as saídas e as entradas
$G_{i,j}(s)$	função de transferência entre uma saída i e uma entrada j
H	matriz Hessiana da função objetivo dos problemas de programação quadrática

I	matriz identidade
$I^*(t)$	matriz referente a parcela dinâmica associada aos pólos integradores
$\bar{I}$	matriz auxiliar das variáveis de folga $\mathbf{d}_k^s$ ao longo do horizonte de controle
J	matriz auxiliar em função de nu e na
k	instante qualquer de tempo discreto
K_F	ganho do observador de estados (Filtro de Kalman)
L	matriz auxiliar em função de Ψ e F
$\bar{L}$	matriz L estendida ao longo do horizonte de controle
m	horizonte de controle das variáveis manipuladas
N	matriz auxiliar usada na resposta do sistema ao degrau
$na_{i,j}$	número de pólos da função de transferência entre a saída y_i e a entrada u_j
nd	número de estados
np	horizonte de predição finito das variáveis controladas
nu	número de entradas (variáveis manipuladas)
ny	número de saídas (variáveis controladas)
P	matriz auxiliar do Filtro de Kalman em função de A , C , V e W
$\bar{Q}$	matriz de Lyapunov
Q	matriz de ponderação das variáveis controladas
$\tilde{Q}$	matriz Q estendida ao longo de um horizonte definido m ou np
R	matriz de supressão das variáveis manipuladas
$\tilde{R}$	matriz R estendida ao longo do horizonte de controle
r	pólo de uma função de transferência
s	coeficiente da resposta ao degrau
S_k	matriz dos coeficientes da resposta ao degrau referente ao instante de tempo k
S_1	matriz de ponderação das variáveis de folga $\mathbf{d}_k^s$
S_2	matriz de ponderação das variáveis de folga $\mathbf{d}_k^i$
t	tempo
$\bar{T}$	matriz auxiliar das variáveis de folga $\mathbf{d}_k^i$ ao longo do horizonte de controle
u	vetor das variáveis manipuladas
$\mathbb{U}$	espaço da região viável de solução das variáveis manipuladas

V	matriz de sintonia do filtro de Kalman
V_k	função custo do algoritmo de controle num dado instante de tempo k
x	vetor de estados do modelo, $x = \begin{bmatrix} x^s & x^d & x^i \end{bmatrix}^T$
$[x]_{k/k-1}$	vetor de estados no instante k com informações da planta do instante anterior
$[x]_{k/k}$	vetor atualizado dos estados com informações da planta do instante atual
x^s	vetor de estados integradores gerado pela forma incremental do modelo
x^d	vetor de estados estáveis do modelo
x^i	vetor de estados integradores do modelo
y	vetor das variáveis controladas
y^{sp}	vetor de referência (setpoints) das variáveis controladas
y_1^{sp}	vetor estendido de setpoints das variáveis controladas
y_k^p	vetor de saídas da planta medidas no instante k
W	matriz de sintonia do filtro de Kalman

Símbolos Gregos

Δ	operador diferença
Δt	período de amostragem do controlador preditivo
$\Psi(t)$	matriz da parcela dinâmica associada aos estados transientes
$\Omega^*(t)$	matriz $I^*(t)$ generalizada para integradores com diferentes tempos mortos
Φ	matriz auxiliar para a atualização dos estados
I	autovalores de uma matriz quadrada
t	constante de tempo de um sistema de primeira ordem (domínio de Laplace)
q	matriz dos tempos mortos do sistema
$q_{i,j}$	tempo morto entre uma saída i e uma entrada j
d_k^s	variáveis de folga num dado instante de tempo k , relacionadas aos pólos integradores criados pela forma incremental do modelo
d_k^i	variáveis de folga num dado instante de tempo k , relacionadas com os pólos integradores do sistema

Siglas

ARX	Auto-Regressive with eXogenous inputs
DCS	Digital Control System
DMC	Dynamic Matrix Control
FCC	Fluid Catalytic Cracking
IHMPC	Infinite Horizon Model Predictive Control
IHMPC-E	Extended Infinite Horizon Model Predictive Control
LDMC	Linear Dynamic Matrix Control
LP	Linear Programming
MIMO	Multi-Input Multi-Output
MPC	Model Predictive Control
NLP	Non-Linear Programming
OPOM	Output Prediction Oriented Model
QDMC	Quadratic Dynamic Matrix Control
QP	Quadratic Programming
ROSSMPC	Reducer Order State Space MPC
SISO	Single-Input Single-Output
SQP	Sequential Quadratic Programming

Sobrescritos

T operação de transposição de uma matriz.

RESUMO

Na literatura de controle, os controladores preditivos disponíveis apresentam aplicações limitadas em processos com características integradoras. Uma dessas limitações está relacionada às propriedades estabilizantes que surgem da lei de controle quando o sistema é colocado em malha fechada. O principal objetivo dessa dissertação é desenvolver um algoritmo de controle preditivo, nominalmente estável, baseado num horizonte de predição infinito das saídas do sistema. Para essa finalidade, uma representação existente em variáveis de estado é analisada e estendida para ser capaz de ser aplicável para processos estáveis e integradores, com tempo morto.

Dois métodos distintos que garantem a estabilidade de sistemas integradores foram desenvolvidos com um MPC de horizonte infinito. Para o caso de realimentação de estado, a estabilidade nominal do MPC proposto foi provada para os dois métodos e a eficiência dos controladores foi verificada através de exemplos da literatura de controle. Um dos controladores foi também aplicado em um processo de destilação de uma refinaria de petróleo. O algoritmo desenvolvido foi estendido para o caso de realimentação das saídas com a inclusão do filtro de Kalman para a estimativa dos estados do modelo.

A aplicação do controlador em um sistema com diferentes tempos mortos entre as variáveis integradoras foi também estudada.

ABSTRACT

In the control literature, the available predictive controllers show limitations to be applied in processes that have integrating behavior. One of these limitations is related to the stabilizing properties of the resulting control law when the system is in closed loop. The main objective of this work is to develop a nominal stable control algorithm based on infinite prediction of system outputs. For this purpose an existing state space representation is explored and extended in order to be able to be applied to stable and integrating process with dead time.

Two distinct methods to assure stability of integrating systems were developed for the infinite horizon MPC. For the case of state feedback, nominal stability of the resulting MPC was proved for the two methods and the efficiency of the controllers was verified through examples of the control literature. One of the controllers was also applied to an industrial distillation process of a petroleum refinery. The developed algorithm was extended to the output feedback operation with the inclusion of a Kalman filter for estimation of the model states.

The application of the controller to a system with different dead times between integrating variables was also studied.

Capítulo 1

Introdução e revisão da literatura

1.1 Introdução

Dois importantes aspectos a serem observados em um determinado controlador preditivo multivariável são a sua aplicabilidade em sistemas que apresentam tempo morto entre as entradas e as saídas e a capacidade de tratar sistemas com pólos integradores e/ou estáveis. Esses comportamentos combinados contemplam uma grande parcela dos processos químicos industriais e foi essa a principal motivação no desenvolvimento dessa dissertação, na qual propõe-se um controlador nominalmente estável e que possua a capacidade de combinar todas essas características.

Os primeiros algoritmos de controle preditivo multivariável baseado em modelo (MPC) surgiram no final da década de 70 com o chamado DMC (Dynamic Matrix Control) proposto por Cutler e Ramaker (1979). O método era baseado em horizonte de predição finito e em coeficientes de resposta ao degrau e ao impulso. Esses coeficientes armazenados em uma matriz, são em grande número coletados até a completa estabilização do sistema. Para sistemas de grande porte, exigia-se um grande esforço computacional para a época. A sua aplicação é bastante satisfatória para sistemas estáveis mas possui limitação para uso em sistemas instáveis ou integradores. Em 1986, Garcia e Morshedi desenvolveram o controlador QDMC baseado em programação quadrática para uso nas restrições lineares das variáveis manipuladas.

A partir daí, diversas proposições de abordar o problema de controle preditivo podem ser vistas na literatura ao longo do tempo. A primeira delas foi de representar o modelo não mais em coeficientes de resposta, mas sim em variáveis de estado. Como decorrência natural dessa representação, tem-se duas maneiras de se tratar as entradas nesse modelo, ou seja, de forma posicional ou de forma incremental. Um outro aspecto investigado na literatura foi o horizonte de predição das variáveis controladas. Os primeiros MPC's (convencionais) tiveram a sua formulação baseada em horizonte finito para as predições, o qual é parte integrante da lei de controle, tornando-se um parâmetro de sintonia do controlador e influenciando a performance do mesmo.

1.2 Características integradoras com tempo morto em processos químicos

O sistema integrador mais conhecido em processos químicos é o inventário em fase líquida de um determinado equipamento (nível em vasos, reatores, fundos de colunas de fracionamento, etc.). Normalmente essa dinâmica vem acompanhada de algum tempo morto, elevado ou não, conforme a particularidade de cada sistema.

Em relação a um processo como um todo, onde tem-se vários equipamentos interligados, a característica integradora aparece pelo fato de haver uma ou mais correntes de reciclo em algum ponto do processo.

Moro e Odloak (1995) descrevem que o conversor de uma unidade de craqueamento catalítico em leito fluido (FCC), que existe na maioria das refinarias de petróleo, torna-se integrador quando a temperatura do reator é usada como variável manipulada pelo MPC.

Recentemente, Wu et al (2003) descreveram processos com características integradoras com tempo morto (reator interligado com reciclo de uma coluna de destilação) e estabeleceram algumas estratégias de controle para esses casos, mas sem ser considerado um controle preditivo. Nesse trabalho observa-se que há inúmeras referências anteriores citadas, por exemplo, Luyben et al (1999), que apresentam estudos sobre a interação entre processos integradores e estratégias de controle. Percebe-se então que existe uma linha de pesquisa desse assunto na literatura ainda aberta e com poucas publicações.

Assim, efetivamente um algoritmo de controle terá que ser analisado sob aspectos da teoria de controle, e também, com relação à capacidade de interagir com a dinâmica dos processos químicos, particularmente os integradores com tempo morto.

1.3 Desenvolvimento dos controladores preditivos baseados em modelo (MPC's)

O controlador preditivo multivariável é um algoritmo de controle em tempo discreto que incorpora internamente um modelo do processo que permite prever para instantes futuros a resposta do mesmo. Em cada instante de amostragem, a lei de controle (sequência discretizada de ações das variáveis manipuladas) é obtida a partir da otimização de uma função objetivo, a qual é formulada ao longo de um horizonte de otimização. Somente a primeira ação de controle é implementada. No instante de amostragem seguinte todo o procedimento é repetido.

Com relação à forma de representação do modelo em variáveis de estado, a maioria dos trabalhos disponíveis em literatura usam a forma posicional. Sob o ponto de vista de aplicação industrial, a forma posicional não é implementável em função de perturbações naturais no processo, que não são medidas e que podem levar o sistema a vários estados estacionários desconhecidos ao longo do tempo.

A representação de um MPC em variáveis de estado apareceu primeiramente formulada por Li e Fisher (1989) que explicam suas propriedades e mostram a utilização do filtro de Kalman para estimar o estado e perturbações não medidas do processo. Lee et al (1994) também desenvolveram um MPC em variáveis de estado.

Lee e Xiao (2000), Lee e Cooley (2000) apresentam abordagens em variáveis de estado na forma incremental.

Odloak (1996) apresenta um desenvolvimento original para a forma incremental denominado **OPOM** (Modelo Orientado à Predição da Saída) e utilizado por Rodrigues e Odloak (2003), o qual é aqui estendido para aplicação em diversos tipos de processos, estáveis ou integradores, incorporando ou não tempo morto. A característica principal desse método é que a predição passe a ser obtida de forma analítica ao invés da maneira convencional, que armazena todos os valores de resposta em forma de um vetor.

Rodrigues (2001) considerou o OPOM para sistemas estáveis e instáveis, não abordando o caso de sistemas com tempo morto.

Cano (2001) utilizou o OPOM em sistemas integradores puros sem tempo morto no desenvolvimento de um algoritmo de controle robusto. Uma das proposições citadas para futuros trabalhos era a extensão do método para sistemas com pólos integradores e estáveis, incorporada agora nesta dissertação a qual é também estendida para a inclusão de tempo morto.

Com relação ao horizonte de predição, Rawlings e Muske (1993) mostraram que para sistemas estáveis quando o estado é medido e o horizonte de predição tende a infinito, então o MPC é inerentemente estável independentemente dos parâmetros de sintonia utilizados pelo controlador. Neste caso, fica implícita também a hipótese de que o modelo do processo seja perfeito, isto é, não contenha erros de modelagem. Esse caso é definido como nominal. O algoritmo de controle é denominado **IHMPC** (Controle Preditivo baseado em Modelo de Horizonte Infinito) e é formulado em variáveis de estado na forma posicional. Ele é restrito a sistemas estáveis em malha aberta. A estratégia principal desse método consiste em converter o horizonte de predição infinito para um estado terminal equivalente cujo peso é obtido pela equação discretizada de Lyapunov.

Rodrigues e Odloak (2000), usando o OPOM, desenvolveram uma formulação alternativa para o MPC de horizonte infinito (IHMPC) em relação ao convencional. Essa nova formulação tem várias vantagens sobre a anterior. A principal delas é que se aplica a sistemas não quadrados (número de manipuladas diferente do número de controladas), o que não acontece com o controlador de Rawlings e Muske (1993). A formulação porém, não contemplava na época os sistemas integradores.

Esta dissertação está dividida em seis capítulos incluindo este introdutório.

No Capítulo 2 apresentamos a representação de sistemas em variáveis de estado, dando ênfase à forma incremental, mostrando a evolução do OPOM desde seu início até incorporar sistemas estáveis e integradores sem tempo morto.

No Capítulo 3 apresentamos o desenvolvimento de um algoritmo de controle preditivo de horizonte infinito, nominalmente estável, para sistemas integradores sem tempo morto, baseado no OPOM. O método é uma extensão do utilizado por Rodrigues e Odloak (2003) o qual fornece a estabilidade para o caso nominal para condições de processo mais amplas do que em métodos anteriores. Sua característica principal é a eliminação do conflito entre as restrições das variáveis manipuladas e as restrições de igualdade que surgem para anular o efeito dos modos integradores ao final do horizonte de controle. A formulação da lei de controle é a definida em Cano e Odloak (2003) que contempla sistemas estáveis e integradores.

No Capítulo 4 é desenvolvida a extensão do controlador de horizonte infinito nominalmente estável para sistemas integradores com tempo morto. A correção dos estados é feita através de um observador, sendo utilizado o filtro de Kalman para essa finalidade. Apresentaremos a aplicação desse controlador em um processo de destilação de hidrocarbonetos leves, típico de uma refinaria de petróleo.

No Capítulo 5 apresentamos os resultados do controlador de horizonte infinito aqui desenvolvido para um sistema que possua tempos mortos diferentes entre as variáveis integradoras. Nessa aplicação, é verificada a performance de rastreabilidade em relação aos ‘setpoints’ e a rejeição de perturbações. O processo analisado é um reator catalítico com reciclo de uma corrente em fase vapor oriunda de coluna de absorção. Esse sistema foi apresentado por Cano (2001) e Rodrigues e Odloak (2003), porém sem a presença de tempos mortos e também com estrutura de controle diferente da que apresentaremos aqui.

No Capítulo 6 apresentamos as conclusões finais sobre a proposição desse novo algoritmo de controle.

Capítulo 2

Modelo em variáveis de estado para sistemas integradores

2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar o modelo que será utilizado no desenvolvimento do MPC de horizonte infinito para sistemas com dinâmica estável e integradora simultaneamente, sem a presença de tempo morto, o qual será visto no capítulo seguinte.

O modelo estudado está na forma de variáveis de estado e, como veremos, com características bastante adequadas para a interpretação física dos estados, o que facilita a dedução das condições necessárias para a garantia da estabilidade da malha fechada.

2.2 Representação de modelos em variáveis de estado

Em sistemas discretos lineares invariantes no tempo, a representação em variáveis de estado de um sistema qualquer aparece na literatura de duas formas gerais. A primeira delas é a chamada forma posicional e pode ser colocada na seguinte forma :

$$\begin{aligned} [x]_{k+1} &= \tilde{A}[x]_k + \tilde{B}\tilde{u}_k \\ [\tilde{y}]_k &= \tilde{C}[x]_k \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde

$[x]_k$ é o vetor de estados no instante de amostragem k

$\tilde{u}_k \in \mathbb{R}^{nu}$ é o vetor de entradas manipuladas, que implicitamente corresponde à diferença entre o valor real da entrada e o valor correspondente ao estado estacionário : $\tilde{u}_k = u_k - u_{ss}$

$\tilde{y}_k \in \mathbb{R}^{ny}$ é o vetor de saídas controladas.

Analogamente, entende-se que $\tilde{y}_k = y_k - y_{ss}$

$\tilde{A}$, $\tilde{B}$ e $\tilde{C}$ são matrizes de dimensões adequadas

A segunda forma é a incremental, assim chamada porque a entrada manipulada é definida como a diferença entre instantes consecutivos. A representação geral desse modelo é dada por

$$\begin{aligned} [x]_{k+1} &= A[x]_k + B \Delta u_k \\ [y]_k &= C[x]_k \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde

$$\Delta u_k = u_k - u_{k-1} \quad , \text{ sendo } k \text{ o instante de amostragem.}$$

As dimensões das matrizes A , B e C serão diferentes das suas correspondentes $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ e $\tilde{C}$ do modelo posicional.

Será usada nesta dissertação, apenas a representação de sistemas em variáveis de estado na forma incremental. Essa abordagem traz vantagens em relação à forma posicional, pois, não há necessidade do conhecimento prévio do estado estacionário do processo e permite portanto, a consideração de perturbações não medidas no sistema.

Apresentaremos a seguir, a descrição do modelo aqui utilizado até chegarmos à sua formulação mais geral possível, que será usada no capítulo 3, na proposição de um controlador preditivo de horizonte infinito para sistemas estáveis integradores sem tempo morto. No capítulo 4, esse mesmo modelo será estendido para sistemas estáveis e integradores com tempo morto.

2.3 Modelo em variáveis de estado para sistemas integradores sem tempo morto

Para entender o desenvolvimento desse modelo, faremos a sua dedução passo a passo inicialmente com um sistema SISO, para o qual se tenha a seguinte função de transferência no domínio de Laplace (é assumido que o processo não tenha raízes repetidas) :

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K}{(\tau s + 1)s} \quad (2.3)$$

A resposta ao degrau unitário correspondente é dada por

$$S(t) = -K\tau + K\tau e^{-\frac{t}{\tau}} + Kt$$

Essa função pode ser colocada na seguinte forma genérica :

$$S(t) = d^0 + d^d e^{-\frac{t}{\tau}} + d^i t \quad (2.4)$$

onde

d^0 , d^d e d^i são constantes.

Discretizaremos o sistema representado em (2.3) considerando um intervalo de amostragem Δt e seguindo o seguinte procedimento :

- 1) Admitamos que no instante de amostragem k , a saída do sistema possa ser representada por uma função similar à da resposta ao degrau dada pela Eq.(2.4), na seguinte forma

$$[y(t)]_k = [x^s]_k + [x^d]_k e^{-\frac{t}{\tau}} + [x^i]_k t \quad (2.5)$$

onde

$[x^s]_k$, $[x^d]_k$, e $[x^i]_k$ são parâmetros da trajetória da saída do sistema

- 2) Em seguida consideremos o efeito da ação de controle Δu_k

$$[y'(t)]_k = [y(t)]_k + S(t) \Delta u_k$$

- 3) Fazemos então a translação ao instante de amostragem seguinte $k+1$ e recalculamos a trajetória da saída usando esse instante como nova origem de tempo

$$[y(t)]_{k+1} = [y'(t + \Delta t)]_k = [y(t + \Delta t)]_k + S(t + \Delta t) \Delta u_k \quad (2.6)$$

Substituindo a Eq.(2.4) e Eq.(2.5) na Eq.(2.6) obtém-se

$$[y(t)]_{k+1} = [x^s]_k + [x^d]_k e^{-(t+\Delta t)/\tau} + [x^i]_k (t + \Delta t) + (d^0 + d^d e^{-(t+\Delta t)/\tau} + d^i (t + \Delta t)) \Delta u_k \quad (2.7)$$

4) Reescrevemos a Eq.(2.7) na seguinte forma adequada

$$[y(t)]_{k+1} = [x^s]_{k+1} + [x^d]_{k+1} e^{-\frac{t}{\tau}} + [x^i]_{k+1} t$$

onde

$$[x^s]_{k+1} = [x^s]_k + \Delta t [x^i]_k + (d^0 + \Delta t d^i) \Delta u_k \quad (2.8)$$

$$[x^d]_{k+1} = e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} [x^d]_k + d^d e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \Delta u_k \quad (2.9)$$

$$[x^i]_{k+1} = [x^i]_k + d^i \Delta u_k \quad (2.10)$$

Pela Eq.(2.5), a saída do sistema no instante de amostragem k é dada por

$$[y]_k = [y(0)]_k = [x^s]_k + [x^d]_k \quad (2.11)$$

As equações (2.8), (2.9), (2.10) e (2.11) podem ser agrupadas de maneira conveniente e assim sendo, representadas na forma de variáveis de estado

$$[x]_{k+1} = A[x]_k + B\Delta u_k \quad (2.12)$$

$$[y]_k = C[x]_k \quad (2.13)$$

onde

$$[x]_k = \begin{bmatrix} x^s \\ x^d \\ x^i \end{bmatrix}_k \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & e^{-\Delta t/\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} d^0 + d^i \Delta t \\ d^d e^{-\Delta t/\tau} \\ d^i \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 1 \quad 0]$$

Essa formulação apresenta um aspecto importante que é a capacidade da predição de toda a trajetória das saídas a partir do instante de amostragem k

$$[y(t)]_k = C(t)[x]_k$$

onde

$$C(t) = [1 \quad e^{-t/\tau} \quad t]$$

Nessa representação, o estado x^s corresponde aos pólos integradores relacionados à forma incremental do modelo. O estado x^d corresponde aos pólos estáveis do sistema. O estado x^i corresponde aos pólos integradores do próprio sistema. Esses pólos aparecem nos elementos da diagonal da matriz A .

Para um sistema multivariável com nu entradas e ny saídas, um procedimento análogo ao caso do sistema SISO pode ser aplicado para a construção do modelo em variáveis de estado. Consideremos que para cada saída y_i e entrada u_j exista uma função de transferência dada por

$$G_{i,j}(s) = \frac{b_{i,j,0} + b_{i,j,1}s + b_{i,j,2}s^2 + \dots + b_{i,j,nb}s^{nb}}{(1 + a_{i,j,1}s + a_{i,j,2}s^2 + \dots + a_{i,j,na}s^{na})s} \quad (2.14)$$

$$\text{onde } \{na, nb \in \mathbb{N} \mid nb < na + 1\}$$

Admitindo que os pólos do sistema não sejam repetidos, a resposta ao degrau pode ser escrita na seguinte forma

$$S(t) = d_{i,j}^0 + \sum_{l=1}^{na} [d_{i,j,l}^d] e^{r_l t} + d_{i,j}^i t \quad (2.15)$$

onde

$r_l, l=1, 2, \dots, na$ são os pólos não-integradores do sistema

$d^0, d_i^d, \dots, d_{na}^d, d^i$ são os coeficientes obtidos pela expansão em frações

parciais da função de transferência $G_{i,j}$.

Combinando os efeitos de todas as entradas, no instante de amostragem k a predição da trajetória da saída y_i pode ser formulada na seguinte forma contínua

$$[y_i(t)]_k = [x_i^s]_k + \sum_{j=1}^{nu} \sum_{l=1}^{na} [x_{i,j,l}^d]_k e^{r_{i,j,l} t} + [x_i^i]_k t \quad i = 1, \dots, ny \quad (2.16)$$

Para esse sistema, os estados x^s , x^d e x^i são definidos por

$$[x_i^s]_{k+1} = [x_i^s]_k + \Delta t [x_i^i]_k + \sum_{j=1}^{nu} d_{ij}^0 [\Delta u_j]_k + \Delta t \sum_{j=1}^{nu} d_{ij}^i [\Delta u_j]_k, \quad i = 1, \dots, ny \quad (2.17)$$

$$[x_{ijl}^d]_{k+1} = e^{r_{i,j,l} \Delta t} [x_{ijl}^d]_k + d_{ijl}^d e^{r_{i,j,l} \Delta t} [\Delta u_j]_k \quad i = 1, \dots, ny; \quad j = 1, \dots, nu; \quad l = 1, \dots, na \quad (2.18)$$

$$[x_i^i]_{k+1} = [x_i^i]_k + \sum_{j=1}^{nu} d_{ij}^i [\Delta u_j]_k, \quad i = 1, \dots, ny \quad (2.19)$$

Reescrevendo as equações acima em notação matricial, temos

$$[x^s]_{k+1} = [x^s]_k + \Delta t [x^i]_k + (D^0 + \Delta t D^i) \Delta u_k \quad (2.20)$$

$$[x^d]_{k+1} = F [x^d]_k + D^d F N \Delta u_k \quad (2.21)$$

$$[x^i]_{k+1} = [x^i]_k + D^i \Delta u_k \quad (2.22)$$

onde

$$[x^s] = [x_1^s \quad x_2^s \quad \dots \quad x_{ny}^s]^T, \quad [x^i] = [x_1^i \quad x_2^i \quad \dots \quad x_{ny}^i]^T$$

$$[x^d] = [x_{1,1,1}^d \quad \dots \quad x_{1,1,na}^d \quad \dots \quad x_{1,nu,1}^d \quad \dots \quad x_{1,nu,na}^d \quad \dots \quad x_{ny,1,1}^d \quad \dots \quad x_{ny,1,na}^d \quad \dots \quad x_{ny,nu,1}^d \quad \dots \quad x_{ny,nu,na}^d]^T$$

$$D^0 = \begin{bmatrix} d_{1,1}^0 & \cdots & d_{1,nu}^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{ny,1}^0 & \cdots & d_{ny,nu}^0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ny \times nu} \quad ; \quad D^i = \begin{bmatrix} d_{1,1}^i & \cdots & d_{1,nu}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{ny,1}^i & \cdots & d_{ny,nu}^i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ny \times nu}$$

$$F = \text{diag} \left(e^{\eta_{1,1,1}\Delta t} \cdots e^{\eta_{1,1,na}\Delta t} \cdots e^{\eta_{1,nu,1}\Delta t} \cdots e^{\eta_{1,nu,na}\Delta t} \cdots e^{r_{ny,1,1}\Delta t} \cdots e^{r_{ny,1,na}\Delta t} \cdots e^{r_{ny,nu,1}\Delta t} \cdots e^{r_{ny,nu,na}\Delta t} \right) \in \mathbb{C}^{nd \times nd}$$

$$D^d = \text{diag} \left(d_{1,1,1}^d \cdots d_{1,1,na}^d \cdots d_{1,nu,1}^d \cdots d_{1,nu,na}^d \cdots d_{ny,1,1}^d \cdots d_{ny,1,na}^d \cdots d_{ny,nu,1}^d \cdots d_{ny,nu,na}^d \right) \in \mathbb{C}^{nd \times nd}$$

$$N = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_{ny} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nd \times nu} \quad J_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nu, na \times nu} \quad (2.23)$$

onde

$$nd = ny.nu.na$$

A eq.(2.16) pode ser utilizada para obter-se a expressão da saída do sistema no instante de amostragem k , ou seja,

$$[y_i]_k = [y_i(0)]_k = [x_i^s]_k + \sum_{j=1}^{nu} \sum_{l=1}^{na} [x_{i,j,l}^d]_k \quad i = 1, \dots, ny \quad (2.24)$$

As equações (2.20),(2.21),(2.22) e (2.24) escritas na forma de variáveis de estado ficam na seguinte forma

$$[x]_{k+1} = A[x]_k + B\Delta u_k \quad (2.25)$$

$$[y]_k = C[x]_k \quad (2.26)$$

onde

$$[y]_k = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{ny} \end{bmatrix}_k \quad [x]_k = \begin{bmatrix} x^s \\ x^d \\ x^i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nx} \quad A = \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 & \Delta t I_{ny} \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & I_{ny} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nx \times nx}$$

$$B = \begin{bmatrix} D^0 + \Delta t D^i \\ D^d F N \\ D^i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nx \times nu} \quad (2.27)$$

$$C = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \ 0 \ \dots \ 0}^{ny} & \overbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}^{nu, na} & \dots & \overbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}^{nu, na} & \overbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}^{ny} \\ 0 \ 1 \ \dots \ 0 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 & \dots & 0 \ 0 \ \dots \ 0 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 \ 0 \ \dots \ 1 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 & \dots & 1 \ 1 \ \dots \ 1 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 \end{bmatrix}$$

com $nx = 2ny + nd$

A trajetória das saídas dada pela Eq. (2.16) escrita na forma matricial será dada por

$$[y(t)]_k = C(t)[x]_k \quad (2.28)$$

onde

$$C(t) = [I \ \Psi(t) \ I^*(t)] \in \mathbb{C}^{ny \times nx} \quad (2.29)$$

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \Phi_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Phi_{ny}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{ny \times nd} \quad (2.30)$$

$$\Phi_i(t) = [e^{r_{i,1,1}t} \ \dots \ e^{r_{i,1,na}t} \ \dots \ e^{r_{i,nu,1}t} \ \dots \ e^{r_{i,nu,na}t}] \in \mathbb{C}^{nd} \quad i = 1, 2, \dots, ny \quad (2.31)$$

$$I^*(t) = \begin{bmatrix} f_1^*(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^*(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_{ny}^*(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ny \times ny} \quad (2.32)$$

onde $f_i^*(t) = t$ se existir pólo integrador associado à saída i ,

caso contrário, $f_i^*(t) = 0$.

A resposta ao degrau para o sistema multivariável fica representada por

$$S(t) = D^0 + \Psi(t)D^d N + I^*(t)D^i \quad (2.33)$$

2.4 Exemplo

Para ilustrar o desenvolvimento apresentado na seção anterior, tomemos para exemplo um sistema multivariável 2x2 (duas variáveis controladas com duas variáveis manipuladas) e o representemos em variáveis de estado na forma incremental. Esse sistema foi estudado por Rodrigues e Odloak (2003) sendo parte de um processo químico de um reator catalítico de oxidação de etileno.

A matriz de funções de transferência é dada abaixo :

$$G(s) = y(s)/u(s) = \begin{bmatrix} G_{1,1}(s) & G_{1,2}(s) \\ G_{2,1}(s) & G_{2,2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-0,19}{s} & \frac{-1,7}{19,5s+1} \\ \frac{-0,763}{31,8s+1} & \frac{0,235}{s} \end{bmatrix}$$

Considerando por exemplo, um intervalo entre amostragens de $\Delta t = 1 \text{ min}$ e usando a Eq.(2.2) obtemos a seguinte caracterização em variáveis de estado na forma incremental :

$$\begin{aligned} [x]_{k+1} &= A[x]_k + B \mathbf{D}u_k \\ [y]_k &= C[x]_k \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{bmatrix} x_1^s(k+1) \\ x_2^s(k+1) \\ x_1^d(k+1) \\ x_2^d(k+1) \\ x_1^i(k+1) \\ x_2^i(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0,9500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9690 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^s(k) \\ x_2^s(k) \\ x_1^d(k) \\ x_2^d(k) \\ x_1^i(k) \\ x_2^i(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,1900 & -1,7000 \\ -0,7630 & 0,2350 \\ 0 & 1,6150 \\ 0,7394 & 0 \\ -0,1900 & 0 \\ 0 & 0,2350 \end{bmatrix} \Delta u_k$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^s(k) \\ x_2^s(k) \\ x_1^d(k) \\ x_2^d(k) \\ x_1^i(k) \\ x_2^i(k) \end{bmatrix}$$

onde

$$\Delta u_k = u_k - u_{k-1} = \begin{bmatrix} \Delta u_1(k) \\ \Delta u_2(k) \end{bmatrix}$$

$$[y]_k = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix}$$

$$[x]_k = \begin{bmatrix} x^s(k) \\ x^d(k) \\ x^i(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^s(k) \\ x_2^s(k) \\ x_1^d(k) \\ x_2^d(k) \\ x_1^i(k) \\ x_2^i(k) \end{bmatrix}$$

Capítulo 3

Controlador IHMPC para sistemas integradores sem tempo morto

3.1 Introdução

O objetivo de um MPC qualquer é determinar uma sequência de ações de controle futuras para que a predição das saídas da planta (variáveis controladas), dentro de um horizonte de predição (finito ou infinito), estejam o mais próximo possível de seus valores de referência ('setpoints') de acordo com alguma função custo pré-estabelecida que leve em conta os desvios em relação aos mesmos com o menor esforço possível nas ações das variáveis manipuladas.

Do ponto de vista da aplicação industrial, da sequência de ações de controle determinadas, somente é implementada a primeira ação de controle. No período de amostragem seguinte, todo o procedimento é repetido usando a última medida da planta. Esta estratégia, conhecida como horizonte móvel, permite compensar os erros de modelagem ou perturbações futuras do sistema com as leituras da planta.

3.2 Controlador de horizonte infinito para sistemas integradores sem tempo morto

3.2.1 Lei de controle

Levando em consideração o peso nas variáveis controladas e as ações nas manipuladas, propõe-se a função custo do MPC de horizonte de predição infinito para sistemas discretos dada por :

$$V_{1,k} = \sum_{j=0}^{\infty} e(k+j)^T Q e(k+j) + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u(k+j)^T R \Delta u(k+j) \quad (3.1)$$

onde

$Q \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ é uma matriz definida positiva

$R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz semi-definida positiva

$e(k+j) = y(k+j) - y^{sp}$ é o erro de predição das variáveis controladas no instante de amostragem ‘k+j’ incluindo o efeito das futuras ações de controle.

y^{sp} é a trajetória de referência das variáveis controladas.

m é o horizonte das ações de controle.

Para que as predições das saídas sejam limitadas no infinito e por consequência o próprio valor da função custo $V_{l,k}$ dada pela Eq.(3.1), impomos a anulação do efeito dos estados $\begin{bmatrix} x^s \end{bmatrix}_{k+m}$ e $\begin{bmatrix} x^i \end{bmatrix}_{k+m}$ no instante $k+m$. Essa mesma proposição foi usada por Rawlings e Muske (1993).

Relacionando o estado $\begin{bmatrix} x^s \end{bmatrix}_{k+m}$ em função de $\begin{bmatrix} x^s \end{bmatrix}_k$ e o estado $\begin{bmatrix} x^i \end{bmatrix}_{k+m}$ em função de $\begin{bmatrix} x^i \end{bmatrix}_k$ temos as seguintes restrições de igualdade

$$e^s(k) + (D_{2,m}^i - D_m^0)\Delta u = 0 \quad (3.2)$$

$$x^i(k) + D_{1,m}^i\Delta u = 0 \quad (3.3)$$

onde

$$e^s(k) = x^s(k) - y^{sp}$$

$$D_m^0 = \overbrace{[D^0 \quad D^0 \quad \dots \quad D^0]}^m \in \mathbb{R}^{ny \times m.nu}$$

$$D_{1,m}^i = \overbrace{[D^i \quad D^i \quad \dots \quad D^i]}^m \in \mathbb{R}^{ny \times m.nu}$$

$$D_{2,m}^i = [0 \quad \Delta t D^i \quad \dots \quad (m-1)\Delta t D^i] \in \mathbb{R}^{ny \times m.nu}$$

$$\Delta u = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m.nu}$$

Considerando as condições definidas pelas equações (3.2) e (3.3) na Eq.(3.1), a função custo torna-se

$$V_{1,k} = \sum_{j=1}^{m-1} e(k+j)^T Q e(k+j) + x^d(k+m)^T \bar{Q} x^d(k+m) + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u(k+j)^T R \Delta u(k+j)$$

onde $\bar{Q}$ é obtida pela solução da seguinte equação discreta de Lyapunov

$$\bar{Q} - F^T \bar{Q} F = F^T \Psi^T Q \Psi F$$

Pela Eq.(2.12) e Eq.(2.13) obtemos de forma recursiva as predições entre o instante k e o instante $k+m$

$$\bar{y} = \bar{L}x(k) + \bar{G}\Delta u_k$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \begin{bmatrix} y(k+1)^T & y(k+2)^T & \cdots & y(k+m)^T \end{bmatrix}^T & \bar{L} &= \begin{bmatrix} L(1)^T & L(2)^T & \cdots & L(m)^T \end{bmatrix}^T \\ L(j) &= \begin{bmatrix} I_{ny} & \Psi F^j & j\Delta t I_{ny} \end{bmatrix} \\ \bar{G} &= \begin{bmatrix} G_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \cdots & G_{m,m} \end{bmatrix} ; & G_{j,l} &= D^0 + \Delta t D^i + \Psi F^{j-l} D^d F N + (j-l)\Delta t D^i \end{aligned}$$

O estado x^d no instante $k+m$ obtido em função do instante k é dado por

$$x^d(k+m) = F_x x(k) + F_u \Delta u$$

onde

$$F_x = \begin{bmatrix} 0_{nd \times ny} & F^m & 0_{nd \times ny} \end{bmatrix} \quad F_u = \begin{bmatrix} D^d F^m N & D^d F^{m-1} N & \cdots & D^d F N \end{bmatrix}$$

A função custo é então escrita sob a seguinte forma :

$$V_{1,k} = \Delta u^T H_1 \Delta u + 2 C_{f,1}^T \Delta u + c \quad (3.4)$$

onde

$$H_1 = \bar{G}^T \tilde{Q} \bar{G} + F_u^T \bar{Q} F_u + \tilde{R}$$

$$C_{f,1} = \left[(-\bar{I} y^{sp} + \bar{L} x(k))^T \tilde{Q} \bar{G} + x(k)^T F_x^T \bar{Q} F_u \right]^T$$

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} I_{ny} \\ \vdots \\ I_{ny} \end{bmatrix} \quad \bar{I} \in \mathbb{R}^{(m.ny) \times ny}$$

$$c = [\bar{I} y^{sp} - \bar{L} x(k)]^T \tilde{Q} [\bar{I} y^{sp} - \bar{L} x(k)] + x(k)^T F_x^T \bar{Q} F_x x(k)$$

$$\tilde{Q} = \text{diag}[\overbrace{Q \cdots Q}^m]$$

$$\tilde{R} = \text{diag}[\overbrace{R \cdots R}^m]$$

Assim, o MPC de horizonte infinito para sistema integradores sem tempo morto pode ser resolvido através de um problema de otimização, formulado a seguir.

Problema P3.1

A Função Custo do Problema P3.1 a ser minimizada é a Eq. (3.4) sem a parcela escalar c dessa equação que é uma constante e não afeta a solução do problema :

$$\min_{\Delta u} \left[\Delta u^T H_1 \Delta u + 2 c_{f,1}^T \Delta u \right]$$

s. a.

$$e^s(k) + (D_{2,m}^i - D_m^0) \Delta u = 0 \quad (3.2)$$

$$x^j(k) + D_{1,m}^j \Delta u = 0 \quad (3.3)$$

$$\Delta u(k+j) \in \mathbb{U}, \quad j \geq 0 \quad (3.5)$$

onde

$$\mathbb{U} = \left\{ \Delta u(k+j) \left| \begin{array}{l} -\Delta u^{\max} \leq \Delta u(k+j) \leq \Delta u^{\max} \\ \Delta u(k+j) = 0; \quad j \geq m \\ u^{\min} \leq u(k-1) + \sum_{i=0}^j \Delta u(k+i) \leq u^{\max}; \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \end{array} \right. \right\}$$

Apresentaremos a seguir o teorema e a sua demonstração, no qual é garantida a convergência do sistema em malha fechada do Problema P3.1 enquanto o mesmo for viável :

Teorema 1 : Se o Problema P3.1 for viável no instante k , a aplicação da solução ótima para esse problema em um processo sem perturbações em malha fechada, levará as saídas do sistema aos seus valores de referência (‘setpoints’).

Prova :

Para essa demonstração, seguiremos o caminho usual para a prova da estabilidade de controladores de horizonte infinito, isto é, vamos provar que a função custo $V_{1,k}$ definida pela Eq.(3.1) é positiva e decrescente, ou seja, é uma função de Lyapunov.

Notamos inicialmente que a matriz hessiana H_1 é positiva definida ($H_1 > 0$). Desde que a hessiana seja positiva definida, o Problema P3.1 terá uma única solução ótima que satisfaz às restrições nos estados e nas entradas, desde que o problema seja viável. Para haver solução, as restrições dadas pelas equações (3.2), (3.3) e (3.5) também tem que ser atendidas.

Assim, se o problema P3.1 for viável em k , existirá uma única solução ótima que obedecerá todas essas restrições. Seja essa solução representada por :

$$\Delta u_k = \Delta u_k^* = [\Delta u^*(k)^T \quad \Delta u^*(k+1)^T \quad \dots \quad \Delta u^*(k+m-1)^T]^T$$

e o valor da função custo correspondente à solução ótima designado por $V_{1,k}^*$

Supõe-se agora que a ação de controle $\Delta u^*(k)$ seja implementada na planta e que seja feita a translação para o instante $k+1$, onde o problema P3.1 é resolvido novamente.

Seguindo a proposição sugerida por Rawlings e Muske (1993), consideremos a seguinte sequência de ações de controle :

$\Delta u_{k+1}^* = [\Delta u^*(k+1)^T \dots \Delta u^*(k+m-1)^T 0]^T$ que é viável e tem uma função custo associada $V_{1,k+1}'$

Agora é fácil verificar que a essa função custo é dada por :

$$V_{1,k+1}' = V_{1,k}^* - e(k)^T Q e(k) - \Delta u^*(k)^T R \Delta u^*(k)$$

Sendo as matrizes Q positiva definida ($Q > 0$) e R positiva semi-definida ($R \geq 0$), teremos assim

$V_{1,k+1}' < V_{1,k}^*$. Portanto, como $V_{1,k+1}^* \leq V_{1,k+1}'$, então $V_{1,k+1}^* \leq V_{1,k}^*$ sendo a função custo decrescente.

Apesar da estabilidade do problema P3.1, na prática o mesmo torna-se inviável com facilidade, pois, ocorre conflito entre as restrições de igualdade dadas pelas equações (3.2) e (3.3) e a Eq.(3.5). Isso acontece por exemplo, quando o controlador é submetido a grandes variações nos ‘setpoints’, ou, quando o sistema sofre perturbações de amplitudes significativas.

Para aumentar a faixa de viabilidade do controlador, Rodrigues e Odloak (2003) apresentaram para sistemas estáveis, uma abordagem que insere uma variável de folga na função custo, a qual relaxa a solução da restrição de igualdade dada pela Eq. (3.2).

3.2.2 O controlador IHMPC estendido de Rodrigues e Odloak (2003)

A função custo com a variável de folga proposta é a seguinte :

$$V_{2,k} = \sum_{j=0}^{\infty} [e(k+j) - \delta_k^s]^T Q [e(k+j) - \delta_k^s] + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u(k+j)^T R \Delta u(k+j) + \delta_k^{sT} S_1 \delta_k^s \quad (3.6)$$

onde

$\delta_k^s \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor das variáveis de folga que permite maior grau de liberdade para a solução do problema dentro da região viável $\mathbb{U}$.

S_1 é uma matriz de pesos, positiva definida.

A restrição dada antes pela Eq.(3.2) passa agora a ser representada por :

$$e^s(k) + \delta_k^s + (D_{2,m}^i - D_m^0)\Delta u = 0 \quad (3.7)$$

Uma vez que $\mathbf{d}_k^s$ não é limitada, a restrição dada pela Eq.(3.7) poderá ser atendida por qualquer sequência de ações de controle a qual também atenderá a Eq.(3.5) ou qualquer condição de operação que apareça no termo $e^s(k)$. Com essa nova variável de folga $\mathbf{d}_k^s$, a função custo do problema de controle escrita em notação matricial terá a seguinte forma :

$$V_{2,k} = \begin{bmatrix} \Delta u^T & \delta_k^{sT} \end{bmatrix} H_2 \begin{bmatrix} \Delta u \\ \delta_k^s \end{bmatrix} + 2C_{f,2}^T \begin{bmatrix} \Delta u \\ \delta_k^s \end{bmatrix} + c \quad (3.8)$$

onde

$$H_2 = \begin{bmatrix} \bar{G}^T \tilde{Q} \bar{G} + F_u^T \bar{Q} F_u + \bar{R} & \bar{G}^T \tilde{Q} \bar{I} \\ \bar{I}^T \tilde{Q} \bar{G} & \bar{I}^T \tilde{Q} \bar{I} + S_1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$C_{f,2} = \left[\begin{bmatrix} (-\bar{I} y^{sp} + \bar{L} x(k))^T \tilde{Q} \bar{G} + x(k)^T F_x^T \bar{Q} F_u & [-\bar{I} y^{sp} + \bar{L} x(k)]^T \tilde{Q} \bar{I} \end{bmatrix}^T \right]$$

$$c = [\bar{I} y^{sp} - \bar{L} x(k)]^T \tilde{Q} [\bar{I} y^{sp} - \bar{L} x(k)] + x(k)^T F_x^T \bar{Q} F_x x(k)$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} x^s(k)^T & x^d(k)^T & x^i(k)^T \end{bmatrix}^T$$

Assim, podemos definir o problema representado por :

Problema P3.2

$$\min_{\Delta u, \delta_k^s} \begin{bmatrix} \Delta u^T & \delta_k^{sT} \end{bmatrix} H_2 \begin{bmatrix} \Delta u \\ \delta_k^s \end{bmatrix} + 2C_{f,2}^T \begin{bmatrix} \Delta u \\ \delta_k^s \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

s.a.

$$x^j(k) + D_{1,m}^j \Delta u = 0 \quad (3.3)$$

$$\Delta u(k+j) \in \mathbb{U}, \quad j \geq 0 \quad (3.5)$$

$$e^s(k) + \delta_k^s + (D_{2,m}^i - D_m^0)\Delta u = 0 \quad (3.7)$$

A convergência das saídas aos seus valores de referência com o sistema em malha fechada com o controlador definido no Problema P3.2 é assegurada pelo seguinte teorema :

Teorema 2 : Para um sistema sem perturbações, com pólos estáveis e integradores, se o Problema P3.2 for viável no instante k , então, será viável para os instantes consecutivos $k+1$, $k+2$, ..., e além disso, as saídas do sistema em malha fechada com a lei de controle formulada no problema P3.2 irão convergir assintoticamente aos valores de referência.

Prova :

Seguiremos o caminho feito no Teorema 1, ou seja, provaremos a convergência do MPC mostrando que a função custo é positiva e decrescente no tempo.

Se o Problema P3.2 for viável no instante k , existe uma solução única representada por

$$\Delta u_k = \Delta u_k^* = [\Delta u^*(k)^T \quad \Delta u^*(k+1)^T \quad \dots \quad \Delta u^*(k+m-1)^T]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{d}_k^s = \mathbf{d}_k^{s*}$$

Supondo que a ação de controle $\Delta u^*(k)$ seja implementada na planta e que nos trasladamos para o instante ' $k+1$ ', onde o Problema P3.2 é resolvido novamente. É fácil mostrar que no instante ' $k+1$ ', para um sistema sem perturbações, uma solução viável do Problema P3.2 é dada por

$$\Delta u_{k+1} = [\Delta u^*(k+1)^T \quad \dots \quad \Delta u^*(k+m-1)^T \quad 0]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{d}_{k+1}^s = \mathbf{d}_k^{s*}$$

Agora, é fácil mostrar que a função custo correspondente é

$$V_{2,k+1} = V_{2,k}^* - [e(k) - \mathbf{d}_k^{s*}]^T Q [e(k) - \mathbf{d}_k^{s*}] - \Delta u^*(k)^T R \Delta u^*(k)$$

Assim, a função custo será estritamente decrescente se um dos termos com sinal negativo da equação acima for não-nulo.

Para o caso regulador, o controlador definido no Problema P3.2 será viável para uma região maior de estados iniciais e/ou perturbações do que o controlador definido no Problema P3.1. Da mesma forma, para o caso de rastreabilidade nos valores de referência, o Problema P3.2 será viável para mudanças maiores nos valores de 'setpoints' do que o controlador definido no Problema P3.1. Entretanto, dependendo do tamanho das perturbações ou das variações dos valores de referência, ainda poderá haver conflito entre a restrição de igualdade dada pela Eq. (3.3) e a região viável definida na Eq. (3.5).

Para contornar essa limitação, usaremos uma extensão na função custo, adicionando uma segunda variável de folga para sistemas com pólos integradores, conforme apresentado em Cano e Odloak (2003).

3.2.3 Nova extensão para o IHMPC

Seguindo a mesma sequência da formulação do problema anterior, a função custo com as duas variáveis de folga apresentará a seguinte forma :

$$V_{3,k} = \sum_{j=0}^{\infty} (e(k+j) + \delta_k^s + j\Delta t \delta_k^i)^T Q (e(k+j) + \delta_k^s + j\Delta t \delta_k^i) + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u(k+j)^T R \Delta u(k+j) + \delta_k^{s^T} S_1 \delta_k^s + \delta_k^{i^T} S_2 \delta_k^i \quad (3.11)$$

onde $S_2 \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ é uma matriz positiva definida

δ_k^i é o segundo vetor de variáveis de folga

A restrição dada antes pela Eq.(3.3) passa agora a ser representada por :

$$x^j(k) + \delta_k^i + D_{1,m}^i \Delta u = 0 \quad (3.12)$$

No entanto, a solução da função custo pela Eq.(3.11) sujeita às restrições dadas pelas equações (3.5) , (3.7) e (3.12) não assegura que o valor da função seja decrescente. Isso é decorrente do fato que no instante ‘ $k+1$ ’, a solução mostrada abaixo não é viável porque não atende a Eq.(3.12) :

$$\Delta u_{k+1} = \begin{bmatrix} \Delta u^*(k+1)^T & \cdots & \Delta u^*(k+m-1)^T & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$d_{k+1}^s = d_k^{s*}$$

$$d_{k+1}^i = d_k^{i*}$$

Assim, uma estratégia diferente é necessária para se obter um controlador estável que seja baseado na minimização da função custo definida pela Eq. (3.11). Para essa finalidade, propõe-se uma função custo secundária, positiva, dada por :

$$V_{l,k} = \mathbf{d}_k^{iT} S_2 \mathbf{d}_k^i$$

Consideremos ainda que a seguinte restrição seja incluída na solução do problema do controlador preditivo :

$$V_{l,k} < \tilde{V}_{l,k-1} \quad (3.13)$$

onde

$$\tilde{V}_{l,k-1} = \tilde{\mathbf{d}}_{k-1}^{iT} S_2 \tilde{\mathbf{d}}_{k-1}^i$$

$\tilde{V}_{l,k-1}$ é calculado com $\tilde{\mathbf{d}}_{k-1}^i$, o qual é obtido por :

$$\tilde{\delta}_{k-1}^i = -\tilde{x}^i(k-1) - D_{l,m}^i \Delta u_{k-1} \quad (3.14)$$

$$\tilde{x}^i(k-1) = x^i(k) - D^i \Delta u(k-1) \quad (3.15)$$

Para um sistema sem perturbações, tem-se :

$$\tilde{x}^i(k-1) = x^i(k-1)$$

$$\tilde{\mathbf{d}}_{k-1}^i = \mathbf{d}_{k-1}^i$$

Consequentemente, à medida que as entradas do sistema no ponto de equilíbrio estejam dentro da região viável $\mathbb{U}$, a Eq.(3.13) será atendida para qualquer $\Delta u_{\max} \neq 0$ e $V_{l,k}$ será decrescente.

Em sistemas com perturbações, a determinação do estado no instante $k-1$ usando a Eq.(3.15) tornará a Eq.(3.13) sempre viável.

Com isso, colocamos a função custo da Eq.(3.11) na forma matricial e podemos definir o seguinte problema :

Problema P3.3

$$\min_{\Delta u, \delta_k^s, \delta_k^i} \begin{bmatrix} \Delta u^T & \delta_k^{sT} & \delta_k^{iT} \end{bmatrix} H_3 \begin{bmatrix} \Delta u \\ \delta_k^s \\ \delta_k^i \end{bmatrix} + 2 C_{f,3}^T \begin{bmatrix} \Delta u \\ \delta_k^s \\ \delta_k^i \end{bmatrix}$$

s.a.

$$\Delta u(k+j) \in \mathbb{U}, \quad j \geq 0 \quad (3.5)$$

$$e^s(k) + \delta_k^s + (D_{2,m}^i - D_m^0) \Delta u = 0 \quad (3.7)$$

$$x^i(k) + \delta_k^i + D_{1,m}^i \Delta u = 0 \quad (3.12)$$

$$V_{l,k} < \tilde{V}_{l,k-1} \quad (3.13)$$

onde

$$H_3 = \begin{bmatrix} \bar{G}^T \tilde{Q} \bar{G} + F_u^T \bar{Q} F_u + \bar{R} & \bar{G}^T \tilde{Q} \bar{I} & \bar{G}^T \tilde{Q} T \\ \bar{I}^T \tilde{Q} \bar{G} & \bar{I}^T \tilde{Q} \bar{I} + S_1 & \bar{I}^T \tilde{Q} T \\ T^T \tilde{Q} \bar{G} & T^T \tilde{Q} \bar{I} & T^T \tilde{Q} T + S_2 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \Delta t I_{ny} \\ 2\Delta t I_{ny} \\ \vdots \\ m\Delta t I_{ny} \end{bmatrix}$$

$$C_{f,3} = \left[\left[(-\bar{I} y^{sp} + \bar{L} x(k))^T \tilde{Q} \bar{G} + x(k)^T F_x^T \bar{Q} F_u \right] \quad [-\bar{I} y^{sp} + \bar{L} x(k)]^T \tilde{Q} \bar{I} \quad [-\bar{I} y^{sp} + \bar{L} x(k)]^T \tilde{Q} T \right]^j$$

A convergência do problema P3.3 é assegurada pelo seguinte teorema :

Teorema 3: Para sistemas com pólos estáveis e integradores, cujas entradas referentes ao estado estacionário pertençam à região viável $\mathbb{U}$, a sequência das ações de controle produzidas pela solução sucessiva do problema P3.3 levará as saídas do sistema assintoticamente aos seus valores de referência.

Prova :

Consideremos os casos regulador e o de rastreabilidade das saídas, ambos sem perturbações. Nestes casos, se as entradas do sistema correspondentes ao estado estacionário pertencem à região viável $\mathbb{U}$, o problema P3.3 será viável no instante k e permanecerá viável nos instantes de amostragem seguintes.

Assim, a função $V_{l,k}$ convergirá a zero. Com essa função convergida, a restrição dada pela Eq.(3.3) torna-se viável e se manterá nos instantes seguintes. Com isso, o problem P3.3 se reduz ao problema P3.2 e a convergência das saídas do sistema é assegurada pelo teorema 2.

A implementação prática dos controladores definidos pelos problemas P3.2 e P3.3 é feita seguindo os seguintes passos :

- no instante k verifica-se a existência de solução viável definida entre a Eq. (3.3) e a Eq.(3.5)
- se existir, resolve-se o problema P3.2 e implementa-se a ação de controle resultante referente ao instante k . Caso contrário, resolve-se o problema P3.3 e implementa-se a ação de controle correspondente.

3.2.4 Controlador IHMPC em duas camadas

De forma alternativa, em cada instante de amostragem, o mesmo problema pode ser resolvido em duas camadas, resolvendo-se dois problemas de maneira sequencial, que definiremos como problema P3.4 mostrado a seguir.

Problema P3.4

Problema P3.4a

$$\min_{\mathbf{d}_k^i, \Delta u_{a,k}} V_{4a,k} = \mathbf{d}_k^{iT} S_2 \mathbf{d}_k^i + \Delta u_{a,k}^T \bar{R} \Delta u_{a,k}$$

s.a.

$$\Delta u_a(k+j) \in \mathbb{U}, \quad j \geq 0 \quad (3.5)$$

$$x^j(k) + \delta_k^i + D_{lm}^i \Delta u_{a,k} = 0 \quad (3.12)$$

onde

$$\Delta u_{a,k} = \begin{bmatrix} \Delta u_a(k)^T & \Delta u_a(k+1)^T & \cdots & \Delta u_a(k+m-1)^T \end{bmatrix}^T$$

$\bar{R}$ é uma matriz positiva definida

Seja então a solução ótima do problema P3.4a designada por : $(\mathbf{d}_k^{i*}, \Delta u_{a,k}^*)$

A ação incremental total correspondente é dada por :

$$u^*(k+m-1) - u(k-1) = \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u_a^*(k+j) \quad (3.14)$$

Essa entrada incremental ótima é repassada ao segundo problema mostrado a seguir, o qual é resolvido no mesmo instante de amostragem:

Problema P3.4b:

$$\min_{\Delta u_{b,k}, \delta_k^s} V_{4b,k} = \begin{bmatrix} \Delta u_{b,k}^T & \delta_k^{sT} \end{bmatrix} H_2 \begin{bmatrix} \Delta u_{b,k} \\ \delta_k^s \end{bmatrix} + 2C_{f,2}^T \begin{bmatrix} \Delta u_{b,k} \\ \delta_k^s \end{bmatrix} + c$$

s.a.

$$\Delta u_b(k+j) \in \mathbb{U}, \quad j \geq 0 \quad (3.5)$$

$$e^s(k) + \delta_k^s + (D_{2,m}^i - D_m^0) \Delta u_{b,k} = 0 \quad (3.7)$$

$$u^*(k+m-1) - u(k-1) = \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u_b(k+j) \quad (3.14)$$

onde

$$\Delta u_{b,k} = \begin{bmatrix} \Delta u_b(k)^T & \Delta u_b(k+1)^T & \cdots & \Delta u_b(k+m-1)^T \end{bmatrix}^T$$

Para a lei de controle obtida pela solução sequencial dos problemas P3.4a e P3.4b a convergência das saídas do sistema aos seus valores de referência é garantida pelo seguinte teorema :

Teorema 4: Para um sistema com pólos estáveis e integradores, se no instante de amostragem k o problema P3.4a for viável, então o problema P3.4b também será viável. Acrescentado a isso, a lei de controle resultante da solução sucessiva dos dois problemas levará as saídas do sistema aos respectivos valores de referência.

Prova :

Consideremos o sistema sem perturbação e que no instante k o problema P3.4a seja viável. Designamos o valor ótimo da função custo do problema P3.4a como $V_{4a,k}^*$.

O incremento total das entradas é repassado ao problema P3.4b como restrição de igualdade dado pela Eq. (3.14). No problema P3.4b o decréscimo da função custo não pode ser garantido a priori. Entretanto, o uso da variável de folga δ_k^s garante que existe solução viável, que satisfaz as restrições das equações (3.5), (3.7) e (3.14).

Denominamos a solução ótima do Problem P3.4b por $(\Delta u_{b,k}^*, \delta_k^{s*})$. A primeira ação de controle $\Delta u_b^*(k)$ é implementada na planta e nos trasladamos ao instante seguinte ‘ $k+1$ ’.

Nesse instante, a seguinte sequência é solução viável do problema P3.4a :

$$\Delta u_{a,k+1} = \begin{bmatrix} \Delta u_b^*(k+1)^T & \cdots & \Delta u_b^*(k+m-1)^T & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \delta_{k+1}^i = \delta_k^{i*}$$

Consideremos agora que $\bar{R}$ seja desprezível em relação a S_2 . O valor da função custo do problema P3.4a é ainda $V_{a,k}^*$. Consequentemente, a solução ótima do problema P3.4a no instante ‘ $k+1$ ’ será $V_{4a,k+1}^* \leq V_{4a,k}^*$. Uma vez que selecionamos $\bar{R} \ll S_2$, a função custo do problema P3.4a irá convergir a zero, que corresponde a $x^i(k) = \delta_k^i = 0$.

Como decorrência da convergência do problema P3.4a, temos que o problema P3.4b fica equivalente ao problema P3.2, que é agora viável. Após convergência, a solução do problema P3.4a se reduz a solução trivial $\delta_k^i = 0$. Sendo assim, a convergência das saídas do sistema aos valores de referência através da aplicação sucessiva das sequências de ações produzidas pela solução dos problemas P3.4a e P3.4b é assegurada pelo teorema 2.

3.3 Exemplos

Nesta seção, veremos algumas aplicações do controlador IHMPC proposto para sistemas integradores sem tempo morto. Tomemos como exemplo o sistema apresentado no capítulo anterior (seção 2.4) dado por :

$$G(s) = y(s)/u(s) = \begin{bmatrix} G_{1,1}(s) & G_{1,2}(s) \\ G_{2,1}(s) & G_{2,2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-0,19}{s} & \frac{-1,7}{19,5s+1} \\ \frac{-0,763}{31,8s+1} & \frac{0,235}{s} \end{bmatrix}$$

Observa-se que as saídas y_1 e y_2 são integradoras em relação a uma das variáveis manipuladas e estáveis em relação à outra.

O sistema será simulado usando-se dois controladores. O primeiro será constituído pela solução do problema P3.3 e o segundo, de duas camadas, pela solução sequencial dos problemas P3.4a e P3.4b.

Os parâmetros de sintonia para ambos controladores estão representados pela tabela a seguir :

m	Q	R	S_1	S_2	$\Delta u_{\max}$
3	$\text{diag} [10^{-2}, 10^{-2}]$	$\text{diag} [10^{-2}, 10^{-2}]$	$\text{diag} [10, 10]$	$\text{diag} [10^3, 10^3]$	$[0, 2, 0, 2]$

Tabela 3.1 – Parâmetros de sintonia dos controladores I e II

Para efeito de comparação entre os controladores I e II, o sistema será simulado para o caso regulador e para o caso de rastreabilidade dos ‘setpoints’. Para o primeiro caso, consideremos por exemplo, um estado inicial dado por $x^s = [0 \ 0]^T$; $x^d = [0 \ 0]^T$; $x^i = [0, 4 \ -0, 4]^T$ com ‘setpoints’ constantes $y^{sp} = [0 \ 0]^T$. Para o segundo, consideramos que no instante $k = 100$ sejam alterados os valores de referência para $y^{sp} = [2 \ 2]^T$.

A figura 3.1 a seguir apresenta a resposta do sistema para os controladores I e II. Observa-se uma equivalência entre os controladores, uma vez que no caso regulador (instantes de $k = 0$ até $k = 100$) o controlador II apresenta uma resposta das saídas relativamente melhor do que o controlador I, mas para o caso de rastreabilidade nos ‘setpoints’ (instantes $k > 100$), os controladores praticamente se equivalem.

Figura 3.1- Resposta do sistema com os controladores I e II

A figura 3.2 a seguir apresenta o valor da função custo $V_{3,k}$ do problema P3.3 obtida pelo controlador I, a qual é comparada à função $V_{4b,k}$ do problema P3.4b do controlador II.

Observa-se que a função custo $V_{4b,k}$ do controlador II não decresce no início do caso regulador. Isso ocorre enquanto $V_{4a,k} \neq 0$ no problema P3.4a o que significa que o problema P2 não seria viável, não havendo assim, garantias no decréscimo da função custo.

Na medida em que $V_{4a,k}$ converge à zero, os problemas P3.2 e P3.4b tornam-se equivalentes e a função $V_{4b,k}$ é decrescente.

Figura 3.2- Funções Custo dos Problemas P3.3 (controlador I) e P3.4b (controlador II)

Capítulo 4

IHMPC estendido para sistemas integradores com tempo morto

4.1 Introdução

Neste capítulo, faremos a extensão do controlador nominal preditivo com horizonte de predição infinito apresentado no capítulo anterior, considerando agora a existência de tempo morto. Denominaremos esse controlador de **IHMPC-E** (Controlador **P**reditivo baseado em **M**odelo; de **H**orizonte **I**nfinito, **E**stendido) .

Usaremos a formulação do modelo baseado em variáveis de estado na forma incremental, contemplando agora características integradoras, estáveis ou ambas, com a existência ou não de tempos mortos.

4.2 Modelo em variáveis de estado para sistemas integradores com tempo morto

Gouvêa e Odloak (1997) desenvolveram para o caso de sistemas estáveis com tempo morto uma representação de modelo em variáveis de estado na forma incremental denominado ROSSMPC. Utilizaremos essa mesma formulação, agora estendida para sistemas mistos (estáveis/integradores) com tempo morto e a aplicaremos no controlador IHMPC-E.

4.2.1 O ROSSMPC de Gouvêa e Odloak (1997)

Em sistemas estáveis com existência de tempo morto , o ROSSMPC considera que tem-se um horizonte de predição adequado, de forma que ele englobe todos os tempos mortos do processo, ou seja :

$$np \geq m + \text{int} \left\{ \max(\mathbf{q}_{i,j} / \Delta t) \right\} \quad (4.1)$$

onde,

m é o horizonte de tempo das ações de controle

$\mathbf{q}_{i,j}$ é o tempo morto entre uma saída i e uma entrada j

Δt é o intervalo de amostragem do controlador

A matriz de tempos mortos para o caso multivariável é dada por :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{1,1} & \cdots & \mathbf{q}_{1,nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{q}_{ny,1} & \cdots & \mathbf{q}_{ny,nu} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ny, nu} \quad (4.2)$$

O modelo ROSSMPC na sua forma original desenvolvido para pólos estáveis é dado por :

$$\begin{aligned} [x]_{k+1} &= A[x]_k + B \mathbf{D}u_k \\ [y]_k &= C[x]_k \end{aligned} \quad (2.2)$$

Os vetores e matrizes do ROSSMPC possuem as seguintes dimensões :

$x \in \mathbb{C}^{ne,1}$; $A \in \mathbb{C}^{ne,ne}$; $B \in \mathbb{C}^{ne,nu}$; $C \in \mathbb{R}^{ny,ne}$, sendo ne o número de estados dado por $ne = ny.(np + 1 + nu.na)$.

$$[x] = \begin{bmatrix} y_{k+1}^T & y_{k+2}^T & \cdots & y_{k+np}^T & x^{sT} & x^{dT} \end{bmatrix}^T \quad (4.3)$$

ny é o número de variáveis controladas, nu é o número de variáveis manipuladas e na é a ordem máxima das funções de transferência do sistema

$$[y] \in \mathbb{R}^{ny}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_{ny} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{ny} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_{ny} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{ny} & \Psi[(np+1)\Delta t] \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{ny} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & F \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$B = \begin{bmatrix} S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{np} \\ S_{np+1} \\ D^0 \\ D^d FN \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$C = \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

A resposta ao degrau para cada instante no sistema multivariável é obtida pela seguinte equação :

$$S_i = \begin{bmatrix} s_{1,1,i} & s_{1,2,i} & \dots & s_{1,nu,i} \\ s_{2,1,i} & s_{2,2,i} & \dots & s_{2,nu,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{ny,1,i} & s_{ny,2,i} & \dots & s_{ny,nu,i} \end{bmatrix} = D^0 + \Psi(t) D^d N \in \mathbb{R}^{ny, nu} \quad (4.7)$$

4.2.2 Extensão do ROSSMPC para sistemas integradores com tempo morto

Para essa extensão do modelo ROSSMPC, podemos incluir nessa formulação a representação vista no capítulo 2 para sistemas integradores, chegando-se na forma representada abaixo :

$$\begin{aligned} [x]_{k+1} &= A[x]_k + B Du_k \\ [y]_k &= C[x]_k \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde

$$[x] = \begin{bmatrix} y_{k+1}^T & y_{k+2}^T & \dots & y_{k+np}^T & x^{sT} & x^{dT} & x^{iT} \end{bmatrix}^T \quad (4.8)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_{ny} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{ny} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_{ny} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I_{ny} & \Psi[(np+1)\Delta t] & I^*[(np+1)\Delta t] \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I_{ny} & 0 & I_{ny} \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & I_{ny} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$B = \begin{bmatrix} S_2^T & S_3^T & \dots & S_{np+1}^T & [D^0 + \Delta t D^i]^T & [D^d F N]^T & [D^i]^T \end{bmatrix}^T \quad (4.10)$$

$$C = \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Na matriz de estado aparece a função $\Psi(t)$ que tem a forma :

$$\Psi = \begin{bmatrix} f_{1,1,1} & f_{1,1,2} & \cdots & f_{1,1,na_{1,1}} & f_{1,2,1} & \cdots & f_{1,2,na_{1,2}} & \cdots & f_{1,n_u,na_{1,n_u}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & f_{2,1,1} & f_{2,1,2} & \cdots & f_{2,1,na_{2,1}} & f_{2,2,1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & f_{2,2,na_{2,2}} & \cdots & f_{2,n_u,1} & \cdots & f_{2,n_u,na_{2,n_u}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & f_{n_y,1,1} & f_{n_y,1,2} & \cdots & f_{n_y,1,na_{n_y,1}} & f_{n_y,2,1} & \cdots & f_{n_y,2,na_{n_y,2}} & \cdots & f_{n_y,n_u,1} & \cdots & f_{n_y,n_u,na_{n_y,n_u}} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

onde

$$f_{i,j,g}(t) = e^{n_{i,j,g}(t - q_{i,j})}$$

Consideremos como hipótese para o modelo que para cada saída exista o mesmo tempo morto em todas as entradas que sejam integradas. Essa consideração é representada na função $I^*(t)$ no instante de tempo $(np+1)\Delta t$ da seguinte forma :

$$I^*[(np+1)\Delta t] = \begin{bmatrix} (np+1)\Delta t - \theta_1^u & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (np+1)\Delta t - \theta_2^u & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (np+1)\Delta t - \theta_{n_y}^u \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y} \quad (4.13)$$

onde

q_i^u é o tempo morto associado ao pólo integrador da saída y_i

A resposta ao degrau para o sistema multivariável é dada por :

$$S(t) = D^0 + \Psi(t)D^d N + I^*(t)D^i \quad (2.33)$$

4.3 Desenvolvimento do controlador IHMPC-E de modelo nominal

O problema de otimização que definirá a lei de controle será o de minimizar uma função que pondere os erros das previsões das saídas e os movimentos nas variáveis manipuladas. Propõe-se então, a função custo dada pela Eq.(3.1) :

$$V_{1,k} = \sum_{j=0}^{\infty} [e(k+j)]^T Q [e(k+j)] + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u(k+j)^T R \Delta u(k+j) \quad (3.1)$$

onde

$e(k+j) = y_{k+j} - y^{sp}$ é o erro entre a previsão das saídas e seus valores de referência
com $e(k+j) \in \mathbb{R}^{ny}$

Q e R são matrizes positivas definidas que ponderam relativamente as variáveis controladas e manipuladas, respectivamente

Desdobrando a primeira parcela de $V_{1,k}$, temos :

$$V_{1,k} = \sum_{j=0}^{np} e(k+j)^T Q e(k+j) + \sum_{j=1}^{\infty} e(k+np+j)^T Q e(k+np+j) + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u(k+j)^T R \Delta u(k+j)$$

$$V_{1,k} = V_k^{(1)} + V_k^{(2)} + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u(k+j)^T R \Delta u(k+j)$$

Agruparemos adequadamente os termos $V_k^{(1)}$ e $V_k^{(2)}$ na forma matricial.

Para isso, calculamos inicialmente de forma recursiva as previsões de saídas entre o instante atual até o horizonte de previsão finito np , chega-se na seguinte equação (ver dedução no apêndice A1) :

$$\begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ \vdots \\ y_{k+np-1} \\ y_{k+np} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{np-1} \\ CA^{np} \end{bmatrix} [x]_k + \begin{bmatrix} CB & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{m-1}B & CA^{m-2}B & \cdots & CB \\ CA^mB & CA^{m-1}B & \cdots & CAB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{np-1}B & CA^{np-2}B & \cdots & CA^{np-m}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-1) \end{bmatrix}$$

a qual pode ser representada em forma compacta matricial :

$$[y]_k = \bar{C}[x]_k + \bar{\bar{C}} \Delta u_k \quad (4.14)$$

onde

$$\bar{C} \in \mathbb{C}^{np.ny, ny.np+2ny+ny.nu.na}$$

$$\bar{\bar{C}} \in \mathbb{R}^{np.ny, m.nu}$$

Substituindo-se a Eq.(4.14) na expressão de $V_k^{(1)}$ abaixo temos :

$$V_k^{(1)} = \left[\bar{C} x(k/k) + \bar{\bar{C}} \Delta u_k - y_1^{sp} \right]^T \tilde{Q} \left[\bar{C} x(k/k) + \bar{\bar{C}} \Delta u_k - y_1^{sp} \right] \quad (4.15)$$

onde

$$\tilde{Q} = \text{diag}([Q \quad Q \quad \dots \quad Q]) \in \mathbb{R}^{np.ny, np.ny}$$

$$y_1^{sp} = [y^{spT} \quad y^{spT} \quad \dots \quad y^{spT}]^T \in \mathbb{R}^{np.ny}$$

Colocaremos agora o termo $V_k^{(2)}$ dado abaixo na forma matricial :

$$V_k^{(2)} = \sum_{j=1}^{\infty} e(k+np+j)^T Q e(k+np+j)$$

onde

$$e(k+np+j) = y_{k+np+j/k} - y^{sp}$$

Fazendo uso da Eq.(2.2) e escrevendo recursivamente as predições de saídas do elemento y_{k+np} do vetor de estados no instante $k+m+1$ e seguintes, temos :

$$[y_{k+np}]_{k+m+1} = [x^s]_{k+m} + \Psi((np+1)\Delta t) [x^d]_{k+m} + (np+1)\Delta t I_{ny} [x^i]_{k+m}$$

$$\begin{aligned}
[y_{k+np}]_{k+m+2} &= [x^s]_{k+m+1} + \Psi((np+1)\Delta t) [x^d]_{k+m+1} + (np+1)\Delta t I_{ny} [x^i]_{k+m+1} \\
&= \left\{ I_{ny} [x^s]_{k+m} + I_{ny} \Delta t [x^i]_{k+m} \right\} + \Psi((np+1)\Delta t) F [x^d]_{k+m} + (np+1)\Delta t I_{ny} [x^i]_{k+m} \\
&= [x^s]_{k+m} + \Psi((np+1)\Delta t) F [x^d]_{k+m} + \{ I_{ny} \Delta t + (np+1)\Delta t I_{ny} \} [x^i]_{k+m} \\
&\vdots \\
[y_{k+np}]_{k+m+j} &= [x^s]_{k+m} + \Psi((np+1)\Delta t) F^j [x^d]_{k+m} + \{ I_{ny} j \Delta t + (np+1)\Delta t I_{ny} \} [x^i]_{k+m}
\end{aligned}$$

Observa-se que para as predições de saídas serem limitadas no infinito e por consequência o próprio termo $V_k^{(2)}$, temos que impor a anulação do efeito dos estados

$[x^s]_{k+m}$, $[x^i]_{k+m}$ no instante $k+m$.

Isso pode ser feito através da matriz modificada A^* , originada da matriz A da Eq. (2.2) anulando-se os termos correspondentes aos pólos integradores :

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & I_{ny} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{ny} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_{ny} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{ny} & \Psi((np+1)\Delta t) & I^*((np+1)\Delta t) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

assim, em qualquer instante j as predições das saídas são obtidas por :

$$[y_{k+np}]_{k+m+j} = \Psi[(np+1)\Delta t] F^j [x^d]_{k+m}^T$$

nessas condições , os estados nos instantes posteriores a $k+np$ serão :

$$[x]_{k+np+j} = A^{*(np+j-m)} [x]_{k+m} \quad (4.17)$$

com o estado $[x]_{k+np+j}$ substituído na predição das saídas temos :

$$[y]_{k+np+j} = C[x]_{k+np+j} = CA^{*(np+j-m)}[x]_{k+m} \quad (4.18)$$

Substituiremos agora a Eq.(4.18) na expressão de $V_k^{(2)}$ e a colocaremos na forma matricial através do seguinte vetor de ‘setpoints’ :

$$y_2^{sp} = \begin{bmatrix} y^{spT} & y^{spT} & \dots & y^{spT} & y^{spT} & 0^T & 0^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{np.ny+2ny+ny.nu.na}$$

teremos assim ,

$$\begin{aligned} V_k^{(2)} &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[y(k+np+j/k) - y^{sp} \right]^T Q \left[y(k+np+j/k) - y^{sp} \right] \\ V_k^{(2)} &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[C[x]_{k+np+j} - C y_2^{sp} \right]^T Q \left[C[x]_{k+np+j} - C y_2^{sp} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} [e]_{k+m+j}^T C^T Q C [e]_{k+m+j} \end{aligned} \quad (4.19)$$

usando a eq.(4.16) tem-se :

$$\begin{aligned} [e]_{k+np+j} &= A^{*(np+j-m)} [e]_{k+m} \\ V_k^{(2)} &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ A^{*(np-m+j)} [e]_{k+m} \right\}^T C^T Q C \left\{ A^{*(np-m+j)} [e]_{k+m} \right\} \\ &= [e]_{k+m}^T A^{*(np-m)T} \left(\sum_{j=1}^{\infty} A^{*jT} C^T Q C A^{*j} \right) A^{*(np-m)} [e]_{k+m} \end{aligned}$$

definindo a matriz $\bar{Q} = \sum_{j=1}^{\infty} A^{*jT} C^T Q C A^{*j}$ e pré-multiplicando e pós-multiplicando $\bar{Q}$

por A^{*T} e A^* , respectivamente, e subtraindo da própria $\bar{Q}$, obtemos então a equação de Lyapunov :

$$A^{*T} \bar{Q} A^* - \bar{Q} = -A^{*T} C^T Q C A^*$$

finalmente, chega-se na expressão finita do termo $V_k^{(2)}$:

$$V_k^{(2)} = [e]_{k+m}^T A^{*(np-m)T} \bar{Q} A^{*(np-m)} [e]_{k+m} \quad (4.20)$$

A Eq.(4.20) pressupõe a validade de duas restrições de igualdade atendidas :

$$x^s(k+m) - y^{sp} = 0 \quad (4.21)$$

$$x^i(k+m) = 0 \quad (4.22)$$

Determinaremos agora $x^s(k+m)$ em função de $x^s(k)$ para uso na Eq. (4.21). Entre os instantes k até $k+m$ podemos escrever de forma recursiva :

$$x^s(k+1) = x^s(k) + \Delta t x^i(k) + (D^0 + \Delta t D^i) \Delta u(k)$$

$$x^s(k+2) = x^s(k+1) + \Delta t x^i(k+1) + (D^0 + \Delta t D^i) \Delta u(k+1)$$

mas $x^i(k+1) = x^i(k) + D^i \Delta u(k)$ que substituído acima resulta

$$x^s(k+2) = x^s(k) + 2\Delta t x^i(k) + (D^0 + 2\Delta t D^i) \Delta u(k) + (D^0 + \Delta t D^i) \Delta u(k+1)$$

$\vdots$

$$x^s(k+m) = x^s(k) + m\Delta t x^i(k) + \begin{bmatrix} D^0 + m\Delta t D^i & D^0 + (m-1)\Delta t D^i & \dots & D^0 + \Delta t D^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-1) \end{bmatrix}$$

substituindo na Eq.(4.21) tem-se :

$$x^s(k) - y^{sp} + m\Delta t x^i(k) + \tilde{D} \Delta u_k = 0 \quad (4.23)$$

onde

$$\tilde{D} = [D^0 + m\Delta t D^i \quad D^0 + (m-1)\Delta t D^i \quad \dots \quad D^0 + \Delta t D^i]$$

$$\Delta u_k = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-1) \end{bmatrix}$$

Determinaremos agora $x^i(k+m)$ em função de $x^i(k)$ para uso na restrição de igualdade dada pela Eq. (4.22).

Entre os instantes k até $k+m$ podemos escrever de forma recursiva ,

$$\begin{aligned}
 x^i(k+1) &= x^i(k) + D^i \Delta u(k) \\
 x^i(k+2) &= x^i(k+1) + D^i \Delta u(k+1) \\
 &= x^i(k) + D^i \Delta u(k) + D^i \Delta u(k+1) \\
 &\vdots \\
 x^i(k+m) &= x^i(k) + \begin{bmatrix} D^i & D^i & \dots & D^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-1) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$x^i(k) + D_{1,m}^i \Delta u_k = 0 \quad (4.24)$$

onde

$$D_{1,m}^i = \begin{bmatrix} D^i & D^i & \dots & D^i \end{bmatrix}$$

Obtemos agora o estado completo $[x]_{k+m}$ em função de $[x]_k$ para uso em $V_k^{(2)}$.

Entre os instantes k até $k+m$ podemos escrever ,

$$\begin{aligned}
 [x]_{k+1} &= A[x]_k + B\Delta u(k) \\
 [x]_{k+2} &= A[x]_{k+1} + B\Delta u(k+1) \\
 &= A^2[x]_k + AB\Delta u(k) + B\Delta u(k+1) \\
 [x]_{k+3} &= A[x]_{k+2} + B\Delta u(k+2) \\
 &= A^3[x]_k + A^2B\Delta u(k) + AB\Delta u(k+1) + B\Delta u(k+2) \\
 &\vdots \\
 [x]_{k+m} &= A^m[x]_k + A^{m-1}B\Delta u(k) + A^{m-2}B\Delta u(k+1) + A^{m-3}B\Delta u(k+2) + \\
 &\quad \dots + B\Delta u(k+m-1)
 \end{aligned}$$

Na forma matricial temos :

$$[x]_{k+m} = A^m [x]_k + \begin{bmatrix} A^{m-1}B & A^{m-2}B & \dots & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-1) \end{bmatrix}$$

ou ainda :

$$\begin{aligned} [x]_{k+m} &= A^m [x]_k + \tilde{A}B \Delta u_k \\ [e]_{k+m} &= A^m [e]_k + \tilde{A}B \Delta u_k \end{aligned} \quad (4.25)$$

Substituindo a Eq. (4.25) na Eq. (4.20) , temos :

$$V_k^{(2)} = \left\{ A^m [e]_k + \tilde{A}B \Delta u_k \right\}^T \bar{Q}^* \left\{ A^m [e]_k + \tilde{A}B \Delta u_k \right\} \quad (4.26)$$

$$\text{onde } \bar{Q}^* = A^{*(np-m)T} \bar{Q} A^{*(np-m)}$$

Substituindo $V_k^{(1)}$ e $V_k^{(2)}$ na Função Custo do Controlador, chega-se na expressão matricial que determina o valor escalar de V_k :

$$\begin{aligned} V_k &= \left[\bar{C}[x]_k + \bar{C} \Delta u_k - y_1^{sp} \right]^T \tilde{Q} \left[\bar{C}[x]_k + \bar{C} \Delta u_k - y_1^{sp} \right] \\ &+ \left\{ A^m [e]_k + \tilde{A}B \Delta u_k \right\}^T \bar{Q}^* \left\{ A^m [e]_k + \tilde{A}B \Delta u_k \right\} + \Delta u_k^T \tilde{R} \Delta u_k \end{aligned} \quad (4.27)$$

A expressão acima pode ser colocada convenientemente na forma quadrática mostrada abaixo (ver dedução no apêndice A2), a qual é minimizada no seu valor em função da sequência ótima de controle Δu_k^* :

$$V_k = \Delta u_k^T H \Delta u_k + 2C_f^T \Delta u_k + c \quad (4.28)$$

Assim, o MPC de horizonte infinito para sistemas integradores com tempo morto, pode ser resolvido pelo problema de otimização, formulado a seguir.

Problema P4.1

$$\min_{\Delta u} \left[\Delta u_k^T H_1 \Delta u_k + 2C_{f,1}^T \Delta u_k + c_1 \right]$$

$$\text{s. a.} \quad x^s(k) - y^{sp} + m\Delta t \, x^i(k) + \tilde{D}\Delta u_k = 0 \quad (4.23)$$

$$x^j(k) + D_{1m}^i \Delta u_k = 0 \quad (4.24)$$

$$\Delta u(k+j) \in \mathbb{U}, \quad j \geq 0 \quad (4.29)$$

$$\mathbb{U} = \left\{ \Delta u(k+j) \left| \begin{array}{l} -\Delta u^{\max} \leq \Delta u(k+j) \leq \Delta u^{\max} \\ \Delta u(k+j) = 0; \quad j \geq m \\ u^{\min} \leq u(k-1) + \sum_{i=0}^j \Delta u(k+i) \leq u^{\max}; \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \end{array} \right. \right\}$$

sendo ,

$$H_1 = \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} + \tilde{A} B^T \tilde{Q}^* \tilde{A} B + \tilde{R}$$

$$C_{f,1} = [x]_k^T \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} - y_1^{sp} \tilde{Q} \bar{\bar{C}} + [e]_k^T A^{mT} \tilde{Q}^* \tilde{A} B$$

$$c_1 = [x]_k^T \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} [x]_k - 2y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{\bar{C}} [x]_k + y_1^{spT} \tilde{Q} y_1^{sp} + [e]_k^T A^{mT} \tilde{Q}^* A^m [e]_k$$

O teorema a seguir garante a convergência do sistema em malha fechada do Problema 4.1 enquanto o mesmo for viável.

Teorema 4.1 : Se o Problema P4.1 for viável no instante k , a aplicação da solução ótima para esse problema em um processo sem perturbações em malha fechada, levará as saídas do sistema aos seus valores de referência (‘setpoints’).

Prova : A prova desse teorema é similar e segue os mesmos passos apresentados no teorema 1 do capítulo anterior.

O teorema acima garante a convergência do sistema em malha fechada, enquanto o Problema P4.1 for viável. Entretanto, na prática, esse problema torna-se inviável com facilidade, pois, ocorre conflito entre as restrições de igualdade dadas pelas Eq. (4.23) e Eq. (4.24) com a Eq. (4.29).

Isso acontece, a exemplo do controlador do problema P3.1 visto no capítulo anterior, quando o controlador é submetido à grandes variações nos ‘setpoints’, ou, quando o sistema recebe perturbações de grandes amplitudes.

Para aumentar a faixa de viabilidade do controlador, faremos uso da variável de folga na função custo, a qual relaxa a solução da restrição de igualdade dada pela Eq. (4.23).

Seguindo a mesma sequência da formulação do problema de controle sem tempo morto apresentado no capítulo anterior, definimos a seguinte função custo :

$$V_{2,k} = \sum_{j=0}^{\infty} [e(k+j) - \mathbf{d}_k^s]^T Q [e(k+j) - \mathbf{d}_k^s] + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u(k+j)^T R \Delta u(k+j) + \mathbf{d}_k^{sT} S_1 \mathbf{d}_k^s \quad (4.30)$$

Os termos $V_k^{(1)}$ e $V_k^{(2)}$ neste caso serão dados por :

$$V_k^{(1)} = [\bar{C}x(k/k) + \bar{C} \Delta u_k - y_1^{sp} - \bar{I} \mathbf{d}_k^s]^T \tilde{Q} [\bar{C}x(k/k) + \bar{C} \Delta u_k - y_1^{sp} - \bar{I} \mathbf{d}_k^s]$$

$$V_k^{(2)} = \sum_{j=1}^{\infty} [e(k+m+j) - \mathbf{d}_k^s]^T Q [e(k+m+j) - \mathbf{d}_k^s]$$

Para que o termo $V_k^{(2)}$ seja limitado, impomos :

$$x^s(k+m) - y^{sp} - \mathbf{d}_k^s = 0 \quad (4.31)$$

$$x^i(k+m) = 0 \quad (4.22)$$

Por analogia à Eq.(4.23), a Eq.(4.31) resulta em

$$x^s(k) - y^{sp} + m\Delta t x^i(k) + \tilde{D} \Delta u_k - \mathbf{d}_k^s = 0 \quad (4.32)$$

Por analogia à Eq.(4.27) temos :

$$V_{2,k} = \left[\bar{C}[x]_k + \bar{C} \Delta u_k - y_1^{sp} - \bar{I} \mathbf{d}_k^s \right]^T \tilde{Q} \left[\bar{C}[x]_k + \bar{C} \Delta u_k - y_1^{sp} - \bar{I} \mathbf{d}_k^s \right] + \left\{ A^m [e]_k + \tilde{A} B \Delta u_k \right\}^T \bar{Q}^* \left\{ A^m [e]_k + \tilde{A} B \Delta u_k \right\} + \Delta u_k^T \tilde{R} \Delta u_k + \mathbf{d}_k^{sT} S_1 \mathbf{d}_k^s \quad (4.33)$$

Problema P4.2

Analogamente ao caso em que não temos tempo morto, o controlador passa a ser definido pelo seguinte problema :

$$\min_{\Delta u, \mathbf{d}^s} \left\{ \begin{bmatrix} \Delta u_k^T & \mathbf{d}_k^{sT} \end{bmatrix} H_2 \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \mathbf{d}_k^s \end{bmatrix} + 2C_{f,2}^T \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \mathbf{d}_k^s \end{bmatrix} + c_2 \right\}$$

s. a.

$$x^s(k) - y^{sp} + m\Delta t \, x^i(k) + \tilde{D}\Delta u_k - \mathbf{d}_k^s = 0 \quad (4.32)$$

$$x^i(k) + D_{lm}^i \Delta u_k = 0 \quad (4.24)$$

$$\Delta u(k+j) \in \mathbb{U}, \quad j \geq 0 \quad (4.29)$$

$$\mathbb{U} = \left\{ \Delta u(k+j) \left| \begin{array}{l} -\Delta u^{\max} \leq \Delta u(k+j) \leq \Delta u^{\max} \\ \Delta u(k+j) = 0; \quad j \geq m \\ u^{\min} \leq u(k-1) + \sum_{i=0}^j \Delta u(k+i) \leq u^{\max}; \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \end{array} \right. \right\}$$

sendo ,

$$H_2 = \begin{bmatrix} \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{C} + \tilde{A}^T \bar{Q}^* \tilde{A} B + \tilde{R} & -\bar{C}^T \tilde{Q} \bar{I} \\ -\bar{I}^T \tilde{Q} \bar{C} & \bar{I}^T \tilde{Q} \bar{I} + S_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{f,2} = \begin{bmatrix} [x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{C} - y_1^{sp} \tilde{Q} \bar{C} + [e]_k^T A^{mT} \bar{Q}^* \tilde{A} B & -[x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{I} + y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{I} \end{bmatrix}$$

$$c_2 = c_1 = \left\{ [x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{C} [x]_k - 2y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{C} [x]_k + y_1^{spT} \tilde{Q} y_1^{sp} + [e]_k^T A^{mT} \bar{Q}^* A^m [e]_k \right\}$$

A convergência das saídas aos seus valores de referência com o sistema em malha fechada com o controlador definido no Problema P4.2 é assegurada pelo seguinte teorema :

Teorema 4.2 : Para um sistema sem perturbações, com pólos estáveis e integradores, se o Problema P4.2 for viável no instante k , então, será viável para os instantes consecutivos $k+1$, $k+2$, ..., e além disso, as saídas do sistema em malha fechada com a lei de controle formulada no Problema P4.2 irão convergir assintoticamente aos valores de referência.

Prova : A prova desse teorema é feita seguindo os mesmos passos apresentados no teorema 2, visto no capítulo anterior.

Para o caso regulador, da mesma forma analisada no Problema P3.2 do capítulo anterior, o controlador do Problema P4.2 será também viável para uma região maior de estados iniciais e/ou perturbações do que o controlador do Problema P4.1.

Para o caso de rastreabilidade nos valores de referência, o Problema P4.2 será também viável para mudanças maiores nos valores de ‘setpoints’ do que o controlador do Problema P4.1.

Ainda assim, poderá haver conflito entre as restrições de igualdades dadas pelas Eq. (4.32) e Eq. (4.24) dependendo do tamanho das perturbações ou das variações dos valores de referência.

Usaremos aqui a mesma extensão na função custo, apresentada anteriormente, adicionando-se a segunda variável de folga para sistemas com pólos integradores, conforme Cano e Odloak (2003) surgindo então a definição do Problema P4.3 a seguir.

Problema P4.3

Seguindo a mesma sequência da formulação do problema anterior, a função custo da Eq.(4.33) é estendida agora pelo uso da segunda variável de folga :

$$V_{3,k} = \sum_{j=0}^{\infty} \left[e(k+j) - \mathbf{d}_k^s - j\Delta \mathbf{d}_k^i \right]^T Q \left[e(k+j) - \mathbf{d}_k^s - j\Delta \mathbf{d}_k^i \right] + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \mathbf{u}(k+j)^T R \Delta \mathbf{u}(k+j) \\ + \mathbf{d}_k^{sT} S_1 \mathbf{d}_k^s + \mathbf{d}_k^{iT} S_2 \mathbf{d}_k^i \quad (4.34)$$

onde

S_1 e S_2 são matrizes positivas definidas que ponderam as variáveis de folga $\mathbf{d}_k^s$ e $\mathbf{d}_k^i$, respectivamente.

Os termos $V_k^{(1)}$ e $V_k^{(2)}$ serão dados por :

$$V_k^{(1)} = \left[\bar{C}[x]_k + \bar{\bar{C}} \Delta u_k - y_1^{sp} - \bar{I} \mathbf{d}_k^s - \bar{T} \mathbf{d}_k^i \right]^T \tilde{Q} \left[\bar{C}[x]_k + \bar{\bar{C}} \Delta u_k - y_1^{sp} - \bar{I} \mathbf{d}_k^s - \bar{T} \mathbf{d}_k^i \right]$$

$$V_k^{(2)} = \sum_{j=1}^{\infty} [e(k+m+j) - \mathbf{d}_k^s - j\Delta t \mathbf{d}_k^i]^T Q [e(k+m+j) - \mathbf{d}_k^s - j\Delta t \mathbf{d}_k^i]$$

onde

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} \Delta t I_{ny} \\ 2\Delta t I_{ny} \\ \vdots \\ np\Delta t I_{ny} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np.ny, ny} \quad \bar{I} = \begin{bmatrix} I_{ny} \\ I_{ny} \\ \vdots \\ I_{ny} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np.ny, ny}$$

Para o termo $V_k^{(2)}$ ser limitado impomos :

$$x^s(k+m) - y^{sp} - \mathbf{d}_k^s = 0 \quad (4.31)$$

$$x^i(k+m) + \mathbf{d}_k^i = 0 \quad (4.35)$$

$$x^s(k) - y^{sp} + m\Delta t x^i(k) + \tilde{D}\Delta u_k - \mathbf{d}_k^s = 0 \quad (4.32)$$

$$x^i(k) + D_{1m}^i \Delta u_k + \mathbf{d}_k^i = 0 \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} V_{3,k} = & \left[\bar{C}[x]_k + \bar{\bar{C}} \Delta u_k - y_1^{sp} - \bar{I} \mathbf{d}_k^s - \bar{T} \mathbf{d}_k^i \right]^T \tilde{Q} \left[\bar{C}[x]_k + \bar{\bar{C}} \Delta u_k - y_1^{sp} - \bar{I} \mathbf{d}_k^s - \bar{T} \mathbf{d}_k^i \right] \\ & + \left\{ A^m [e]_k + \tilde{A}B \Delta u_k \right\}^T \bar{Q}^* \left\{ A^m [e]_k + \tilde{A}B \Delta u_k \right\} \\ & + \Delta u_k^T \tilde{R} \Delta u_k + \mathbf{d}_k^{sT} S_1 \mathbf{d}_k^s + \mathbf{d}_k^{iT} S_2 \mathbf{d}_k^i \end{aligned} \quad (4.36)$$

A minimização da função custo $V_{3,k}$ sujeita às restrições de igualdade da Eq. (4.32) e Eq. (3.12), não produz uma lei de controle que garanta que a função seja decrescente no tempo. Tal fato decorre que no instante $k+1$ as expressões abaixo não atenderão a Eq. (3.12) :

$$\begin{aligned} \Delta u_{k+1} &= [\Delta u^*(k+1)^T \quad \dots \quad \Delta u^*(k+m-1)^T \quad 0]^T \\ \mathbf{d}_{k+1}^s &= \mathbf{d}_k^{s*} \\ \mathbf{d}_{k+1}^i &= \mathbf{d}_k^{i*} \end{aligned}$$

Assim, usaremos a estratégia do capítulo anterior para a obtenção de um controlador estável que seja baseado na minimização da função custo dada pela Eq. (4.37). Dessa forma, propõe-se a função custo secundária, positiva, já vista anteriormente dada por :

$$V_{l,k} = \mathbf{d}_k^{iT} S_2 \mathbf{d}_k^i$$

Consideremos ainda a mesma restrição do capítulo anterior à ser incluída no problema de otimização :

$$V_{l,k} < \tilde{V}_{l,k-1} \quad (3.13)$$

onde

$$\tilde{V}_{l,k-1} = \tilde{\mathbf{d}}_k^{iT} S_2 \tilde{\mathbf{d}}_k^i$$

O escalar $\tilde{V}_{l,k-1}$ é calculado com $\tilde{\mathbf{d}}_{k-1}^i$, o qual é obtido da seguinte maneira :

$$\tilde{\delta}_{k-1}^i = -\tilde{x}^i(k-1) - D_{1,m}^i \Delta u_{k-1} \quad (3.14)$$

$$\tilde{x}^i(k-1) = x^i(k) - D^i \Delta u(k-1) \quad (3.15)$$

Para um sistema sem perturbações, tem-se :

$$\tilde{x}^i(k-1) = x^i(k-1)$$

$$\tilde{\mathbf{d}}_{k-1}^i = \mathbf{d}_{k-1}^i$$

Assim, à medida que as entradas do sistema no ponto de equilíbrio estejam dentro da região viável $\mathbb{U}$, a Eq. (3.13) será atendida para qualquer $\Delta u_{\max} \neq 0$ e $V_{l,k}$ será decrescente.

Como já apresentado anteriormente, a Eq. (3.13) será sempre viável com a determinação do estado no instante $k-1$ usando a Eq. (3.15).

Com isso, a proposição do controlador preditivo nominal de horizonte infinito para sistemas estáveis e/ou integradores com existência ou não de tempo morto será formulado pela função custo do Problema P4.3, partindo da Eq. (4.36), na forma quadrática (ver dedução no apêndice A4) sujeito ao conjunto de restrições de igualdade dadas pelas Eq. (4.32) , Eq. (3.12) e pelas restrições de desigualdade dadas pelas Eq. (4.29) e Eq. (3.13).

$$\min_{\Delta u, \mathbf{d}^s, \mathbf{d}^i} \left\{ \begin{bmatrix} \Delta u_k^T & \mathbf{d}_k^{sT} & \mathbf{d}_k^{iT} \end{bmatrix} H_3 \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \mathbf{d}_k^s \\ \mathbf{d}_k^i \end{bmatrix} + 2C_{f,3}^T \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \mathbf{d}_k^s \\ \mathbf{d}_k^i \end{bmatrix}_k + c_3 \right\}$$

s.a.

$$x^s(k) - y^{sp} + m\Delta t x^i(k) + \tilde{D}\Delta u_k - \mathbf{d}_k^s = 0 \quad (4.32)$$

$$x^i(k) + D_{1,m}^i \Delta u_k + \mathbf{d}_k^i = 0 \quad (3.12)$$

$$V_{l,k} < \tilde{V}_{l,k-1} \quad (3.13)$$

$$\Delta u(k+j) \in \mathbb{U}, \quad j \geq 0 \quad (4.29)$$

$$\mathbb{U} = \left\{ \Delta u(k+j) \left| \begin{array}{l} -\Delta u^{\max} \leq \Delta u(k+j) \leq \Delta u^{\max} \\ \Delta u(k+j) = 0; \quad j \geq m \\ u^{\min} \leq u(k-1) + \sum_{i=0}^j \Delta u(k+i) \leq u^{\max}; \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \end{array} \right. \right\}$$

onde

$$H_3 = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{12}^T & H_{22} & H_{23} \\ H_{13}^T & H_{23}^T & H_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} H_{11} &= \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} + \tilde{A} \tilde{B}^T \tilde{Q}^* \tilde{A} \tilde{B} + \tilde{R} & H_{12} &= -\bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \tilde{I} & H_{13} &= -\bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \tilde{T} \\ H_{12}^T &= -\tilde{I}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} & H_{22} &= \tilde{I}^T \tilde{Q} \tilde{I} + S_1 & H_{23} &= \tilde{I}^T \tilde{Q} \tilde{T} \\ H_{13}^T &= -\tilde{T}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} & H_{23}^T &= \tilde{T}^T \tilde{Q} \tilde{I} & H_{33} &= \tilde{T}^T \tilde{Q} \tilde{T} + S_2 \end{aligned}$$

$$C_{f,3} = \begin{bmatrix} [x]_k^T \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} - y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{\bar{C}} + e_k^T A^{mT} \tilde{Q}^* \tilde{A} \tilde{B} & -[x]_k^T \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \tilde{I} + y_1^{spT} \tilde{Q} \tilde{I} & -[x]_k^T \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \tilde{T} + y_1^{spT} \tilde{Q} \tilde{T} \end{bmatrix}$$

$$c_3 = [x]_k^T \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} [x]_k - 2y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{\bar{C}} [x]_k + e_k^T A^{mT} \tilde{Q}^* \tilde{A}^m e_k$$

4.4 Observador de estados para o IHMPC-E

Quando o modelo do sistema que está representado dentro do controlador preditivo está na forma de variáveis de estado, temos que necessariamente usar um observador de estados que faça a atualização dos mesmos em função dos erros entre as saídas previstas pelo modelo e as saídas reais, medidas da planta.

Com a utilização do observador de estado, a Eq. (2.2) assume a seguinte forma :

$$[x]_{k/k-1} = A [x]_{k-1/k-1} + B \Delta u_{k-1} \quad (4.37)$$

$$[x]_{k/k} = [x]_{k/k-1} + K_F \{ y_k^p - C [x]_{k/k-1} \} \quad (4.38)$$

onde

y_k^p - vetor de saídas da planta real, medidas no instante k .

K_F - matriz de ganho do observador.

$[x]_{k/k-1}$ - vetor dos estados no instante k , com informações da planta do instante anterior

$[x]_{k/k}$ - vetor atualizado dos estados, com informações da planta do instante atual

substituindo a Eq. (4.37) na Eq. (4.38) :

$$[x]_{k/k} = [(I - K_F C)A] [x]_{k-1/k-1} + [(I - K_F C)B] \Delta u_{k-1} + K_F y_k^p \quad (4.39)$$

Nos controladores preditivos convencionais usa-se a correção de estados do DMC que corresponde a somar o erro da saída atual da planta a todas as predições futuras. Essa estratégia corresponde no caso da nossa representação em variáveis de estado a um filtro dado por

$$K_F = \left[\begin{array}{c} I_{ny} \\ \vdots \\ I_{ny} \\ 0 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} I_{ny} \\ \vdots \\ I_{ny} \\ 0 \end{array}} \right\} np+1$$

Entretanto, quando o sistema é integrador pode-se verificar que o filtro usado pelo DMC não estabiliza os pólos integradores, ou seja, o modelo de predição mais o observador torna-se um sistema instável.

Assim, utilizaremos como observador de estados no IHMPC-E o filtro de Kalman que fará a correção dos estados com as saídas da planta.

Para garantir a estabilidade do controlador em malha fechada, o ganho do observador, K_F , deverá ser tal de modo que todos os auto-valores da matriz $[(I - K_F C)A]$ estejam dentro do círculo unitário, o que corresponderá a obtenção de pólos estáveis do sistema em malha fechada.

Pode-se demonstrar (Astrom e Wittenmark, 1990) que para um instante k suficientemente grande, o ganho do filtro de Kalman é definido pelas seguintes equações :

$$K_F = APC^T (V + CPC^T)^{-1} \quad (4.40)$$

$$P = APA^T - APC^T [V + CPC^T]^{-1} CPA^T + W \quad (4.41)$$

onde

V e W são matrizes de sintonia do filtro de Kalman

4.5 Aplicação do IHMPC-E a uma coluna de destilação

4.5.1 Descrição sumária do processo analisado

O sistema industrial proposto abaixo para análise em malha fechada com o controlador IHMPC-E, possui características integradoras e tempos mortos em algumas funções de transferência.

Nesse processo é feita a separação em coluna de destilação entre Isobutano + Butenos leves (produto de topo) e n-Butano + Butenos pesados (produto de fundo) a partir de uma alimentação denominada de Carga Olefínica constituída de Isobutano, 1-Buteno, 2-Buteno, cis-2-Buteno, trans-2-Buteno, n-Butano e n-Pentano.

As funções de transferência a seguir foram obtidas a partir de testes de identificação na planta utilizando a rotina ARX (Auto-Regressive with eXogenous inputs) do software Matlab :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2,3}{s} & \frac{-0,7}{s} \\ \frac{4,7409}{9,32s+1} & \frac{1,4}{6,83s+1} \\ \frac{-1,04e^{-7s}}{17,06s+1} & \frac{0,1354}{6,83s+1} \\ \frac{-7,04e^{-7s}}{20,2s+1} & \frac{-1,8}{4,14s+1} \end{bmatrix} \text{ sendo } G(s) = y(s)/u(s) \text{ , } y(s) \in \mathbb{R}^4 \text{ e } u(s) \in \mathbb{R}^2$$

Variáveis Controladas		
y ₁	Nível no Vaso de Topo	%
y ₂	Temperatura da Bandeja 68 da coluna	°C
y ₃	Relação Isobutano/Olefinas no produto de topo	v/v
y ₄	Teor de Isobutano no produto de fundo	% (vol.)

Variáveis Manipuladas		
u ₁	Vazão de Vapor no Refervedor secundário da coluna	ton/h
u ₂	Vazão de Refluxo de topo	km ³ /d

A figura abaixo apresenta um fluxograma de processo simplificado do sistema com as malhas de controle convencionais implementadas no SDCCD (sistema digital de controle distribuído).

Figura 4.1 – Esquema de controle convencional da coluna deisobutanizadora

Em se tratando de coluna de destilação convencional (uma única alimentação com produtos de topo e de fundo) com 2 variáveis manipuladas, fica fácil perceber que tem-se 2 graus de liberdade. Controlando-se y_1 (nível no vaso de topo) com objetivo de fechamento dinâmico de balanço material na coluna, restará uma especificação para escolha da outra variável controlada, entre as 3 possíveis (y_2, y_3, y_4).

Controlando-se uma dessas saídas, as outras 2 serão dependentes da controlada que foi escolhida, que serão informações complementares da resposta do processo em malha fechada. Nesse caso, as variáveis y_3 e y_4 são inferências calculadas em tempo real a partir das condições de operação do sistema (vazões, pressões, temperaturas), mas poderiam ser lidas, por exemplo, a partir de um analisador de processo instalado para essa medição. Assim, quando houver indisponibilidade de leitura dessas informações (exemplo: perda de algum instrumento necessário para o cálculo ou manutenção no analisador de processo), a temperatura da bandeja 68 (variável y_2) poderá ser escolhida como variável controlada.

O destilado, que é uma das alimentações ao reator da unidade, deve ter uma especificação adequada de y_3 (relação Isobutano/Olefinas) próxima do valor estequiométrico para as reações que se processam no mesmo. Assim, essa coluna chamada de deisobutanizadora, tem a função de remover Isobutano da carga para o destilado, porém, com uma relação Isobutano/Olefinas no produto de topo que não comprometa o reator que existe nessa unidade o qual recebe o destilado como carga. O conhecimento desse processo, mostra que esse sistema possui 2 graus de liberdade para o uso de um controlador preditivo. Assim, um conjunto de controladas desejadas seria y_1 e y_3 , ou um outro possível, tal como y_1 e y_4 , ou ainda y_1 e y_2 .

Em processos com grande número de variáveis controladas, essa análise tende a ser mais complexa, para evitar que ocorram incoerências tanto nos pesos relativos das controladas bem como na escolha incorreta das mesmas.

A figura a seguir apresenta a tela gráfica operacional desse sistema no SDCCD com valores típicos do processo em tempo real :

Figura 4.2- Tela gráfica operacional da coluna deisobutanizadora no SDCCD

4.5.2 Representação da coluna em variáveis de estado

Considerando um intervalo entre amostragens de $\Delta t = 1\text{min}$, horizonte de controle $m = 2$, horizonte de predição $np = 10$ e usando a Eq.(2.2) para sistemas integradores com tempo morto, apresentada na seção 4.2.2, obtém-se a seguinte representação do modelo em variáveis de estado na forma incremental :

$$\begin{aligned} [x]_{k+1} &= A[x]_k + B \mathbf{D}u_k \\ [y]_k &= C[x]_k \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde

$$[x] = \begin{bmatrix} y_{k+1}^T & y_{k+2}^T & \dots & y_{k+10}^T & x^s{}^T & x^d{}^T & x^i{}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{56} \quad (4.8)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_4 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I_4 & \Psi[(11)\Delta t] & I^*[(11)\Delta t] \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I_4 & 0 & I_4 \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & I_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{56,56} \quad (4.9)$$

$$B = \begin{bmatrix} S_2^T & S_3^T & \dots & S_{11}^T & [D^0 + \Delta t D^i]^T & [D^d F N]^T & [D^i]^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{56,2} \quad (4.10)$$

$$C = [I_4 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \in \mathbb{R}^{4,56} \quad (4.11)$$

$$I_4 = \text{diag}([1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]) \in \mathbb{R}^{4,4}$$

$$\Psi[(11)\Delta t] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3072 & 0,3560 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7910 & 0,1998 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8204 & 0,0702 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,8}$$

$$I^*[(11)\Delta t] = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$F = \text{diag}([0 \ 0 \ 0,8983 \ 0,9104 \ 0,9431 \ 0,8638 \ 0,9517 \ 0,7854]) \in \mathbb{R}^{8,8}$$

$$D^o = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4,7409 & 1,4 \\ -1,04 & 0,1354 \\ -7,04 & -1,80 \end{bmatrix} \quad D^i = \begin{bmatrix} 2,3 & -0,7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D^d = \text{diag}([0 \ 0 \ -4,7409 \ -1,4 \ 1,04 \ -0,1354 \ 7,04 \ 1,8])$$

$S_2 \cdots S_{11}$ são os coeficientes de resposta ao degrau obtidos através da Eq.(2.33) correspondentes aos instantes de tempo discretos $k = 2, \dots, 11$

$$S_2^T = \begin{bmatrix} 4,6 & -1,4 \\ 0,9156 & 0,2397 \\ 0 & 0,0344 \\ 0 & -0,6896 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad S_{11}^T = \begin{bmatrix} 25,3 & -7,7 \\ 3,2845 & 0,9016 \\ -0,2174 & 0,1083 \\ -1,2647 & -1,6737 \end{bmatrix}$$

4.5.3 Filtro de Kalman para a coluna

Para garantir a estabilidade do controlador em malha fechada, o filtro de Kalman (K_F) foi adotado para as correções dos estados com a leitura da planta, conforme a Eq (4.38). Isso foi necessário para que todos os auto-valores da matriz $[(I - K_F C)A]$ fossem posicionados dentro do círculo unitário, o que resulta em pólos estáveis do sistema em malha fechada.

Apresentamos na figura 4.3 os auto-valores da matriz $[(I - K_F C)A]$ obtidos com o uso do filtro de Kalman para o sistema da coluna apresentado na seção anterior fazendo uso das matrizes A e C :

Figura 4.3- Auto-valores da matriz $[(I - K_F C)A]$

4.5.4 Desempenho do IHMPC-E

4.5.4.1 Caso Nominal

Apresentamos a seguir a resposta do processo em malha fechada em função da variação em ‘setpoints’ nas variáveis controladas y_1 e y_3 com o seguinte conjunto de parâmetros de sintonia :

horizonte de controle	$m = 2$ e $m = 4$
supressão das manipuladas	$R = \text{diag}([0 \ 0])$
peso das controladas	$Q = \text{diag}([1 \ 1])$
peso das variáveis de folga $\mathbf{d}^s$	$S_1 = \text{diag}([800 \ 800])$
peso das variáveis de folga $\mathbf{d}^i$	$S_2 = \text{diag}([5 \ 5])$

Tabela 4.1 – Parâmetros de sintonia do IHMPC-E nominal

As condições iniciais e restrições consideradas foram as seguintes :

$$\mathbf{y}^{inicial} = [50 \% \quad 1,2 \text{ vol} / \text{vol}]$$

$$\mathbf{u}^{inicial} = [4 \text{ ton} / \text{h} \quad 2 \text{ km}^3 / \text{d}]$$

$$\mathbf{u}_{\max} = [4,15 \text{ ton} / \text{h} \quad 2,6 \text{ km}^3 / \text{d}]$$

$$\mathbf{u}_{\min} = [3,85 \text{ ton} / \text{h} \quad 1,4 \text{ km}^3 / \text{d}]$$

$$\Delta \mathbf{u}_{\max} = [0,04 \text{ ton} / \text{h} / \text{min} \quad 0,04 \text{ km}^3 / \text{d} / \text{min}]$$

As figuras 4.4 e 4.5 a seguir mostram um bom comportamento do sistema em malha fechada para o caso servo nas controladas y_1 (mudança de 50% para 55%) e y_3 (mudança de 1,2 para 1,15 v/v) com o IHMPC-E de modelo nominal (planta = ao modelo usado internamente no controlador).

Figura 4.4- Controladas y_1 e y_3 com IHMPC-E

Figura 4.5- Manipuladas u_1 e u_2 com IHMPC-E (caso servo em y_1 e y_3)

Vemos na figura 4.4 um aparente offset na variável controlada y_3 para um horizonte de controle $m = 2$. Na mesma figura, vemos que quando esse horizonte é aumentado o offset é eliminado.

Na figura 4.6 representamos o comportamento ao longo do tempo da função custo $V_{3,k}$ dada pela Eq.(4.37). Vemos que no instante 10 min, quando ocorre a variação no ‘setpoint’ de y_1 , $V_{3,k}$ assume valores muito altos os quais estão relacionados à necessidade do controlador ter que usar as variáveis de folga $\mathbf{d}^s$ e $\mathbf{d}^i$ para manter-se viável. A partir desse $V_{3,k}$ decresce monotonicamente até o instante $t = 200$ min quando é introduzida a variação no ‘setpoint’ de y_3 . Nesse ponto, $V_{3,k}$ obviamente volta a aumentar, mas o aumento é tão pequeno que nem pode ser observado na figura. Isso indica que o controlador não precisou incluir variáveis de folga que levam a um grande aumento em $V_{3,k}$.

Figura 4.6- Função custo do caso servo em y_1 e y_3 com IHMPC-E

Vamos considerar agora a substituição no IHMPC-E da variável controlada y_3 (relação Isobutano/Olefinas no topo) pela controlada y_4 (teor de Isobutano no fundo da torre).

As figuras 4.7 e 4.8 mostram que também nessa configuração o controlador IHMPC-E de modelo nominal com as mesmas restrições nas variáveis manipuladas do

caso anterior e mesma sintonia se comporta satisfatoriamente para o caso servo nas controladas y_1 (mudança de 50% para 55%) e y_4 (mudança de 8% para 7,5%).

Figura 4.7- Controladas y_1 e y_4 com IHMPC-E

Figura 4.8- Manipuladas u_1 e u_2 com IHMPC-E (caso servo em y_1 e y_4)

A figura 4.9 mostra que a função $V_{3,k}$ tem para esse caso um comportamento similar ao comportamento do caso em que as controladas eram y_1 e y_3 . Essa função atinge valores muito próximos de zero a partir do instante 50 min indicando que a partir desse ponto as variações de folga d^s e d^i não são mais necessárias.

Figura 4.9- Função custo do caso servo em y_1 e y_4 com IHMPC-E

Em seguida consideramos o caso em que os valores de referência das controladas são mantidos fixos no tempo e que há alguma perturbação no processo.

Suponhamos por exemplo que ocorra uma perturbação instantânea na temperatura de vapor no refeedor secundário da coluna, causada por um descontrole qualquer na rede de distribuição de vapor da unidade. Nesse caso, as funções de transferência consideradas para essa análise incluindo essa perturbação que no caso é medida, foram também identificadas através de testes na planta e são dadas pela seguinte matriz $G_d(s)$:

$$G_d(s) = \begin{bmatrix} \frac{0,2}{s} \\ \frac{0,396}{11,48s+1} \\ -\frac{0,1295e^{-3s}}{17,06s+1} \\ \frac{-1,176}{33,9s+1} \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad y(s) = G(s)u(s) + G_d(s)u_d(s)$$

Variáveis Controladas		
y_1	Nível no Vaso de Topo	%
y_2	Temperatura da Bandeja 68 da coluna	°C
y_3	Relação Isobutano/Olefinas no produto de topo	v/v
y_4	Teor de Isobutano no produto de fundo	% (vol.)

Variáveis Manipuladas		
u_1	Vazão de Vapor no Refervedor secundário da coluna	ton/h
u_2	Vazão de Refluxo de topo	km ³ /d

Variáveis Perturbação		
u_{d1}	Temperatura de fluido quente no refervedor secundário	°C

Para análise do desempenho de rejeição de perturbações do IHMPC-E, consideremos, para cenário de simulação, que no instante $k = 20$, por exemplo, a temperatura de fluido quente no refervedor secundário aumente de forma brusca de $90,1^\circ\text{C}$ para $91,3^\circ\text{C}$.

As figuras 4.10 e 4.11 a seguir apresentam os resultados dessa simulação combinando ‘setpoints’ fixos em y_1 e y_3 (caso servo) e perturbação em u_{d1} (caso regulador). Vemos que para esse tipo de perturbação e com a sintonia escolhida, existe uma clara preferência pelo controle de y_1 que retorna ao seu ‘setpoint’ em menos de 10 min, enquanto que y_3 só atinge o valor desejado após cerca de 60 min. É claro que um comportamento diferente poderia ser obtido alterando-se a sintonia do controlador, particularmente a relação entre os pesos das variáveis controladas.

Figura 4.10- Controladas y_1 e y_3 em função da perturbação u_{d1} com IHMPC-E

Figura 4.11- Manipuladas u_1 e u_2 em função da perturbação u_{d1} com IHMPC-E

Na figura 4.12 vemos o valor da função custo $V_{3,k}$ que também é monotonicamente decrescente a partir do instante 20 min, quando entra a perturbação no vapor. O aumento abrupto que ocorre nesse instante, mostra que o controlador tem que lançar mão das variáveis de folga para se manter viável. A partir do instante 35 min as variáveis de folga não são mais necessárias.

Figura 4.12- Função custo do caso regulador com perturbação u_{d1} com IHMPC-E

4.5.4.2 Desempenho do IHMPC-E para incertezas no modelo da planta

Tomemos como exemplo, incertezas da ordem de 25 % nos ganhos, taxas integradoras, constantes de tempo e tempo morto em relação ao modelo identificado na planta das saídas y_1 e y_3 com as entradas u_1 e u_2 . Do ponto de vista industrial, esse nível de incerteza já pode ser considerado elevado para esse tipo de coluna de destilação.

incerteza nos ganhos e nas taxas integradoras :

25 % abaixo do nominal	25 % acima do nominal
$G_{la}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1,84}{s} & \frac{-0,56}{s} \\ \frac{-0,832 e^{-7s}}{17,06 s + 1} & \frac{0,10832}{6,83 s + 1} \end{bmatrix}$	$G_{lb}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2,875}{s} & \frac{-0,875}{s} \\ \frac{-1,3 e^{-7s}}{17,06 s + 1} & \frac{0,16925}{6,83 s + 1} \end{bmatrix}$

incerteza nas constantes de tempo :

$$\begin{array}{cc}
 \text{25 \% abaixo do nominal} & \text{25 \% acima do nominal} \\
 G_{la}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2,3}{s} & \frac{-0,7}{s} \\ \frac{-1,04 e^{-7s}}{13,648 s + 1} & \frac{0,1354}{5,464 s + 1} \end{bmatrix} & G_{lb}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2,3}{s} & \frac{-0,7}{s} \\ \frac{-1,04 e^{-7s}}{21,325 s + 1} & \frac{0,1354}{8,5375 s + 1} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

incerteza no tempo morto :

$$\begin{array}{cc}
 \text{25 \% abaixo do nominal} & \text{25 \% acima do nominal} \\
 G_{la}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2,3}{s} & \frac{-0,7}{s} \\ \frac{-1,04 e^{-5,6s}}{17,06 s + 1} & \frac{0,1354}{6,83 s + 1} \end{bmatrix} & G_{lb}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2,3}{s} & \frac{-0,7}{s} \\ \frac{-1,04 e^{-8,75s}}{17,06 s + 1} & \frac{0,1354}{6,83 s + 1} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Variáveis Controladas		
y ₁	Nível no Vaso de Topo	%
y ₃	Relação Isobutano/Olefinas no produto de topo	v/v

Variáveis Manipuladas		
u ₁	Vazão de Vapor no Refervedor secundário da coluna	ton/h
u ₂	Vazão de Refluxo de topo	km ³ /d

Apresentamos a seguir a resposta do processo em malha fechada em função da variação em ‘setpoints’ nas variáveis controladas y_1 e y_3 com o seguinte conjunto de parâmetros de sintonia :

horizonte de controle	$m = 2$
supressão das manipuladas	$R = \text{diag}([100 \ 100])$
peso das controladas	$Q = \text{diag}([1 \ 1])$
peso das variáveis de folga $\mathbf{d}^s$	$S_1 = \text{diag}([800 \ 800])$
peso das variáveis de folga $\mathbf{d}^i$	$S_2 = \text{diag}([5 \ 5])$

Tabela 4.2 – Parâmetros de sintonia do IHMPC-E de modelo incerto

Vemos que em relação aos parâmetros da Tabela 4.1, apenas os pesos nas variáveis manipuladas foram substancialmente aumentados para acomodar as incertezas no modelo. Isso foi necessário para tornar o controlador mais cauteloso uma vez que as incertezas não são explicitamente consideradas.

As condições iniciais e restrições consideradas foram as seguintes :

$$y^{inicial} = [50 \% \quad 1,2 \text{ vol} / \text{vol}]$$

$$u^{inicial} = [4 \text{ ton} / \text{h} \quad 2 \text{ km}^3 / \text{d}]$$

$$u_{\max} = [4,15 \text{ ton} / \text{h} \quad 2,6 \text{ km}^3 / \text{d}]$$

$$u_{\min} = [3,85 \text{ ton} / \text{h} \quad 1,4 \text{ km}^3 / \text{d}]$$

$$\Delta u_{\max} = [0,04 \text{ ton} / \text{h} / \text{min} \quad 0,04 \text{ km}^3 / \text{d} / \text{min}]$$

As figuras 4.13 e 4.14 mostram que com essa sintonia o controlador apresenta uma performance bastante satisfatória para o caso servo com variações nos ‘setpoints’ das controladas y_1 (mudança de 50% para 55%) e y_3 (mudança de 1,2 para 1,15 v/v) para incertezas de 25 % nos ganhos e nas taxas integradoras :

Figura 4.13- Controladas y_1 e y_3 com IHMPC-E e incertezas nos ganhos

Figura 4.14- Manipuladas u_1 e u_2 com IHMPC-E e incertezas nos ganhos

Analogamente, as figuras 4.15 e 4.16 mostram o comportamento do sistema em malha fechada para as mesmas variações nos ‘setpoints’ de y_1 e y_3 com o IHMPC-E com incertezas de 25 % nas constantes de tempo. Para essas incertezas, a performance do controlador é também bastante satisfatória.

Figura 4.15- Controladas y_1 e y_3 com IHMPC-E e incertezas nas constantes de tempo

Figura 4.16- Manipuladas u_1 e u_2 com IHMPC-E e incertezas nas constantes de tempo

Um comportamento similar foi observado para o caso de incertezas no tempo morto presente no sistema. As figuras 4.17 e 4.18 mostram o comportamento do sistema em malha fechada para o caso servo nas controladas y_1 e y_3 com o IHMPC-E com incertezas de 25 % no tempo morto entre a controlada y_3 e a manipulada u_1 :

Figura 4.17- Controladas y_1 e y_3 com IHMPC-E e incerteza no tempo morto

Figura 4.18- Manipuladas u_1 e u_2 com IHMPC-E e incertza no tempo morto

Como resultado final desse exemplo, observamos pelas figuras apresentadas, que tanto para o caso nominal como também para os casos de incertezas no modelo, o IHMPC-E pode ser aplicado a coluna deisobutanizadora e apresenta um bom desempenho tanto para o caso servo como para o caso regulador.

Observamos também que o procedimento de escolha dos parâmetros de sintonia do controlador é convencional, praticamente não exigindo esforço de muitas tentativas no sentido de obter-se uma performance satisfatória.

Capítulo 5

Aplicação do IHMPC-E no controle de um sistema industrial complexo

Um dos fatores motivantes deste trabalho foi o estudo do controle do sistema de produção de óxido de eteno já estudado em trabalhos anteriores por Cano (2001) e por Rodrigues e Odloak (2003). Esse sistema tem a característica de apresentar um grande número de pólos integradores ao lado de pólos estáveis.

Uma alteração na estrutura do sistema de controle que havia sido estudado anteriormente por Rodrigues e Odloak (2003) levou ao aparecimento de tempos mortos nas várias funções de transferência, tanto nas integradoras como nas estáveis.

A seguir faremos uma breve descrição desse sistema antes de apresentar a configuração de controle que será estudada, bem como as funções de transferência obtidas experimentalmente.

5.1 Descrição sumária do processo de óxido de eteno e seu problema de controle

O processo é dividido em três áreas principais integradas entre si, através de uma corrente de reciclo ao reator, que são as áreas de reação, de purificação do óxido de eteno e a de remoção de CO₂. Maiores detalhes do processo podem ser vistos em Cano (2001) e em Rodrigues e Odloak (2003).

A reação principal é a oxidação do etileno em fase vapor catalisada por óxido de prata, representada pela seguinte equação química :

Uma reação secundária e indesejável é a combustão completa do etileno :

Oxigênio de alta pureza, nitrogênio, inibidor de combustão (DCE, dicloroetano) e etileno são misturados com o gás de reciclo e enviados ao reator catalítico. Como as reações são altamente exotérmicas, a temperatura de reação é controlada resfriando-se o reator com fluido térmico, com a geração de vapor d'água de média pressão. O efluente do reator é resfriado, aquecendo a corrente de reciclo que entra no reator. Em seguida, o efluente do reator em fase vapor é enviado a uma coluna de absorção onde o óxido de eteno é absorvido em água. O gás remanescente é então comprimido e reciclado ao reator.

Para evitar o acúmulo de CO_2 no sistema, uma parte do gás de reciclo é enviada a um sistema de remoção de CO_2 , onde o dióxido de carbono é absorvido quimicamente por uma solução de carbonato de potássio. Na sequência, o CO_2 é removido da solução com vapor de processo, que é purgado para a atmosfera juntamente com o dióxido de carbono. Para evitar o acúmulo de inertes (Ar , N_2 e C_2H_6) presentes no gás de reciclo, uma pequena purga de gás, isento de óxido de eteno é feita.

A figura 5-1 a seguir apresenta um fluxograma simplificado do processo, conforme Rodrigues e Odloak (2003).

Figura 5.1- Fluxograma simplificado do processo de oxidação catalítica de etileno

O controlador IHMPC-E a ser analisado, terá na sua estrutura 4 variáveis controladas e 5 variáveis manipuladas. Apresentamos a seguir, com base em testes de identificação executados na planta conforme Rodrigues et al (2004) sobre projeto de desenvolvimento de controladores avançados para reator de óxido de etileno, a matriz de funções de transferência entre as variáveis, $G_p(s)$:

$$\begin{bmatrix} \frac{-10^4(-95s+1)e^{-s}}{32,16s^2+4,65s+1} & \frac{-2,3 \times 10^{-3}}{s} & \frac{-3,2 \times 10^{-3}(-s+1)e^{-2s}}{64,55s^2+8,83s+1} & \frac{-3,5 \times 10^{-2}(-0,14s+1)e^{-2s}}{73,23s^2+6,74s+1} & \frac{-7,5 \times 10^{-6}}{s} \\ \frac{-1,6 \times 10^{-4}e^{-3s}}{s} & \frac{2,1 \times 10^{-4}e^{-8s}}{s} & \frac{-1,9 \times 10^{-3}(1,47s+1)}{9,67s^2+13,55s+1} & \frac{-5,47 \times 10^{-2}(s+1)e^{-6s}}{3,91s^2+10,31s+1} & \frac{-1,07 \times 10^{-4}}{s} \\ \frac{8,1 \times 10^{-3}(-0,02s+1)e^{-4s}}{52,45s^2+11,92s+1} & \frac{-5,5 \times 10^{-5}e^{-15s}}{s} & \frac{9,6 \times 10^{-3}(s+1)e^{-2s}}{54,42s^2+6,58s+1} & \frac{0,13(-2,66s+1)e^{-4s}}{55,11s^2+7,84s+1} & \frac{-2,53 \times 10^{-3}e^{-10s}}{25s+1} \\ \frac{-3,9 \times 10^{-5}e^{-4s}}{s} & \frac{5,7 \times 10^{-5}e^{-8s}}{s} & \frac{-1,4 \times 10^{-3}(s+1)}{8,67s^2+14,48s+1} & \frac{-4,39 \times 10^{-2}(s+1)e^{-6s}}{7,79s^2+43,41s+1} & \frac{7,6 \times 10^{-5}e^{-6s}}{s} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

sendo $G_p(s) = y(s)/u(s)$, $y(s) \in \mathbb{R}^4$ e $u(s) \in \mathbb{R}^5$

Variáveis Controladas		
y ₁	Teor de O ₂ no Gás de Reciclo na entrada do reator	%
y ₂	Teor de C ₂ H ₄ no Gás de Reciclo na entrada do reator	%
y ₃	Temperatura do Óleo Térmico na entrada do reator	°C
y ₄	Pressão do Gás de Reciclo na entrada do reator	kg/cm ² g

Variáveis Manipuladas		
u ₁	Vazão de O ₂ ao reator	kg/h
u ₂	Vazão de C ₂ H ₄ ao reator	kg/h
u ₃	Abertura da válvula pequena de Óleo Térmico	%
u ₄	Abertura da válvula grande de Óleo Térmico	%
u ₅	Vazão de N ₂ ao reator	kg/h

Como podemos verificar no modelo apresentado em (5.1), a variável controlada y_1 é integradora sem tempo morto em relação às manipuladas u_2 e u_5 . No entanto, a controlada y_2 é integradora em relação às manipuladas u_1, u_2 e u_5 com tempos mortos diferentes entre si. O mesmo fato repete-se para a controlada y_4 (integradora com u_1, u_2 e u_5).

5.2 Modelo em variáveis de estado em sistemas integradores com tempos mortos diferentes

Para o modelo nominal, consideramos que para cada saída exista o mesmo tempo morto em todas as entradas que eram integradoras. Agora, de uma maneira mais genérica, vamos considerar que existam tempos mortos diferentes entre cada saída e as entradas que são integradoras. Tomando como exemplo, consideremos uma saída y_1 que tenha tempos mortos diferentes com duas entradas u_1 e u_2 , conforme a seguinte função de transferência :

$$y_1 = \frac{k_{1,1}e^{-q_{1,1}s}}{s(s-r_{1,1,1})(s-r_{1,1,2})}u_1(s) + \frac{k_{1,2}e^{-q_{1,2}s}}{s(s-r_{1,2,1})(s-r_{1,2,2})}u_2(s)$$

assim, as respostas ao degrau de y_1 em relação às entradas u_1 e a u_2 são dadas por

$$S_{1,1}(t) = d_{1,1}^0 + d_{1,1,1}^d e^{\bar{r}_{1,1,1}(t-q_{1,1})} + d_{1,1,2}^d e^{\bar{r}_{1,1,2}(t-q_{1,1})} + d_{1,1}^i(t-q_{1,1})$$

$$S_{1,2}(t) = d_{1,2}^0 + d_{1,2,1}^d e^{\bar{r}_{1,2,1}(t-q_{1,2})} + d_{1,2,2}^d e^{\bar{r}_{1,2,2}(t-q_{1,2})} + d_{1,2}^i(t-q_{1,2})$$

a trajetória da saída y_1 é então representada da seguinte forma :

$$y_1(t) = [x_1^s]_k + [x_1^d]_k e^{\bar{r}_{1,1,1}(t-q_{1,1})} + [x_2^d]_k e^{\bar{r}_{1,1,2}(t-q_{1,1})} + [x_3^d]_k e^{\bar{r}_{1,2,1}(t-q_{1,2})} + [x_4^d]_k e^{\bar{r}_{1,2,2}(t-q_{1,2})} + [x_1^i]_k(t-q_{1,1}) + [x_2^i]_k(t-q_{1,2})$$

Dessa forma, a atualização dos estados x^s , x^d e x^i seguindo as equações (2.20), (2.21) e (2.22) apresentadas no capítulo 2 é a seguinte :

$$[x_1^s]_{k+1} = [x_1^s]_k + d_{1,1}^0 \Delta u_1(k) + d_{1,2}^0 \Delta u_2(k) + \Delta t d_{1,1}^i \Delta u_1(k) + \Delta t d_{1,2}^i \Delta u_2(k)$$

$$[x_1^d]_{k+1} = e^{\bar{r}_{1,1,1}\Delta t} [x_1^d]_k + d_{1,1,1}^d e^{\bar{r}_{1,1,1}\Delta t} \Delta u_1(k)$$

$$[x_2^d]_{k+1} = e^{r_{1,2}\Delta t} [x_2^d]_k + d_{1,1,2}^d e^{r_{1,2}\Delta t} \Delta u_1(k)$$

$$[x_3^d]_{k+1} = e^{r_{1,2,1}\Delta t} [x_3^d]_k + d_{1,2,1}^d e^{r_{1,2,1}\Delta t} \Delta u_2(k)$$

$$[x_4^d]_{k+1} = e^{r_{1,2,2}\Delta t} [x_4^d]_k + d_{1,2,2}^d e^{r_{1,2,2}\Delta t} \Delta u_2(k)$$

$$[x_1^i]_{k+1} = [x_1^i]_k + d_{1,1}^i \Delta u_1(k)$$

$$[x_2^i]_{k+1} = [x_2^i]_k + d_{1,2}^i \Delta u_2(k)$$

Observa-se por esse exemplo que o estado x^i para uma saída y_1 é igual ao número de entradas.

Para o caso multivariável, a generalização é feita na função $I^*(t)$ no instante de tempo $(np+1)\Delta t$ modificando a Eq. (4.13) vista anteriormente :

$$\Omega^*(n\Delta t) = \begin{bmatrix} n\Delta t - \mathbf{q}_{11} & \cdots & n\Delta t - \mathbf{q}_{1nu} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n\Delta t - \mathbf{q}_{21} & \cdots & n\Delta t - \mathbf{q}_{2nu} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & n\Delta t - \mathbf{q}_{ny1} & \cdots & n\Delta t - \mathbf{q}_{ny.nu} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

onde $\Omega^*[(np+1)\Delta t] \in \mathbb{R}^{ny.nu.ny}$

Daí, a representação generalizada em variáveis de estado, é representada na seguinte forma :

$$\begin{aligned} [x]_{k+1} &= A[x]_k + B \mathbf{D}u_k \\ [y]_k &= C[x]_k \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde

$$[x] = \begin{bmatrix} y_{k+1}^T & y_{k+2}^T & \cdots & y_{k+np}^T & x^{sT} & x^{dT} & x^{iT} \end{bmatrix}^T \quad (5.18)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_{ny} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{ny} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_{ny} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{ny} & \Psi[(np+1)\Delta t] & \Omega^*[(np+1)\Delta t] \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{ny} & 0 & \hat{I}\Delta t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & I_{ny,nu} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$B = \begin{bmatrix} S_2^T & S_3^T & \cdots & S_{np+1}^T & [D^0 + \Delta t D^i]^T & [D^d F N]^T & [\bar{D}^i \bar{N}]^T \end{bmatrix}^T \quad (5.20)$$

$$C = \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{ny \times nu.ny}$$

$$\bar{N} = \left\{ \begin{bmatrix} I_{nu} \\ I_{nu} \\ \vdots \\ I_{nu} \end{bmatrix} \right\}_{ny}$$

$$\bar{D}^i = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} d_{1,1}^i & \cdots & d_{1,nu}^i & d_{2,1}^i & \cdots & d_{2,nu}^i & \cdots & d_{ny,1}^i & \cdots & d_{ny,nu}^i \end{bmatrix} \right)$$

Com isso, o modelo descrito acima descreverá rigorosamente qualquer sistema com integradores e tempos mortos. Entretanto, pode-se verificar que esse modelo não é detectável, ou seja, nem todos os estados conseguirão ser detectados pelas saídas.

Da literatura de controle (Sontag,1998), define-se como sistema detectável aquele para o qual é possível determinar um observador de estado tal que todos os autovalores da matriz $[(I - K_F C)A]$ estejam dentro do círculo unitário.

Pode-se demonstrar que um sistema observável é também detectável e existem critérios simples para verificar a observabilidade de um sistema. A seguir passaremos a apresentar uma breve revisão sobre o assunto.

5.3 Conceitos de observabilidade de um sistema

Um sistema é dito observável, se cada estado $x(0)$ puder ser determinado a partir das saídas $y(t)$ em um intervalo finito de tempo $0 \leq t \leq t_f$. Para um sistema ser observável, a seguinte matriz deve ter seu rank igual ao número de estados do sistema :

$$\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{nd-1} C^T \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Tomemos como exemplo inicial dessa análise o modelo integrador apresentado no capítulo 2, seção 2.4 cuja matriz de funções de transferência é dada abaixo :

$$G(s) = y(s)/u(s) = \begin{bmatrix} G_{1,1}(s) & G_{1,2}(s) \\ G_{2,1}(s) & G_{2,2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-0,19}{s} & \frac{-1,7}{19,5s+1} \\ \frac{-0,763}{31,8s+1} & \frac{0,235}{s} \end{bmatrix}$$

temos nesse caso $nd = 6$ (estados), obtendo-se a seguinte matriz resultante da Eq.(5.22):

$$\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & (A^T)^3 C^T & (A^T)^4 C^T & (A^T)^5 C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0,95 & 0 & 0,9025 & 0 & 0,8574 & 0 & 0,8145 & 0 & 0,7738 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,969 & 0 & 0,939 & 0 & 0,9099 & 0 & 0,8816 & 0 & 0,8543 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

cujo rank é 6.

Portanto, esse sistema é observável, ou seja, todos os estados podem ser determinados a partir das saídas $y(t)$.

Consideramos agora para análise um sistema que possua integradores de tempos mortos diferentes para uma dada saída em relação às entradas. Seja por exemplo um tempo morto de 1 minuto para a saída y_1 com a entrada u_1 no seguinte sistema :

$$G(s) = y(s)/u(s) = \begin{bmatrix} G_{1,1}(s) & G_{1,2}(s) \\ G_{2,1}(s) & G_{2,2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-0,19 e^{-s}}{s} & \frac{-1,7}{s} \\ \frac{-0,763}{31,8s+1} & \frac{0,235}{s} \end{bmatrix}$$

Para um intervalo de amostragens de $\Delta t = 1$ min , horizonte de controle $m = 1$, horizonte $np = 2$ e usando a Eq.(2.2) para sistemas integradores com tempo morto, apresentado no capítulo 4, seção 4.2.2, obtém-se as seguintes matrizes A e C do modelo :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,91 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,969 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

teremos nesse caso $nd = 12$ (estados) com a seguinte matriz resultante da Eq.(5.22) :

$$\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & (A^T)^3 C^T & \dots & (A^T)^{11} C^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12,24} \text{ cujo rank é 9, sendo então}$$

esse sistema não observável, ou seja, nem todos os estados podem ser determinados a partir das saídas $y(t)$.

Assim, não será possível aplicar um controlador MPC nominal de horizonte infinito para o sistema de óxido apresentado pela Eq.(5.1), pois o modelo apresenta alguns estados não-detectáveis em função de pólos integradores com tempos mortos diferentes. Assim, há a necessidade de se usar um modelo aproximado que seja detectável.

5.4 Controle do sistema industrial de óxido de eteno com modelos aproximados

Para a aplicação do IHMPC-E em sistemas integradores com tempos mortos diferentes, faremos a aproximação das dinâmicas integradoras com diferentes tempos mortos por dinâmicas de primeira ordem. Essa aproximação consiste em aproximar a resposta em rampa de cada integrador para uma perturbação em degrau até instantes próximos de 400 minutos. Esse tempo foi escolhido a priori para que o sistema em malha fechada não apresente respostas muito rápidas, por conveniência desse tipo de processo químico. Obviamente outros tempos poderiam ser escolhidos. Qualquer que seja a aproximação adotada, o controlador não terá a sua estabilidade garantida, pois, o mesmo não será mais o do caso nominal, visto no capítulo anterior.

Com essa abordagem, as restrições de igualdade dada pela Eq.(3.12) e de desigualdade dada pela Eq.(3.13) deixam de existir, ficando o problema de controle do tipo quadrático cuja solução é feita por programação quadrática (QP), resolvida mais rapidamente ao invés de um problema do tipo programação não-linear (NLP) solucionado por programação quadrática sucessiva (SQP).

Apresentamos então a matriz de funções de transferência, $G_m(s)$ que será usada como modelo no controlador :

$$\begin{bmatrix} \frac{-10^{-4}(-95s+1)e^{-s}}{32,16s^2+4,65s+1} & \frac{-0,0117}{385s+1} & \frac{-3,2 \times 10^{-3}(-s+1)e^{-2s}}{64,55s^2+8,83s+1} & \frac{-3,5 \times 10^{-2}(-0,14s+1)e^{-2s}}{73,23s^2+6,74s+1} & \frac{-0,0047}{425s+1} \\ \frac{-0,082e^{-3s}}{300s+1} & \frac{0,1155e^{-8s}}{400s+1} & \frac{-1,9 \times 10^{-3}(1,47s+1)}{9,67s^2+13,55s+1} & \frac{-5,47 \times 10^{-2}(s+1)e^{-6s}}{3,91s^2+10,31s+1} & \frac{-0,0589}{400s+1} \\ \frac{8,1 \times 10^{-3}(-0,02s+1)e^{-4s}}{52,45s^2+11,92s+1} & \frac{-0,0303e^{-15s}}{400s+1} & \frac{9,6 \times 10^{-3}(s+1)e^{-2s}}{54,42s^2+6,58s+1} & \frac{0,13(-2,66s+1)e^{-4s}}{55,11s^2+7,84s+1} & \frac{-2,53 \times 10^{-3}e^{-10s}}{25s+1} \\ \frac{-0,0205e^{-4s}}{400s+1} & \frac{0,0314e^{-8s}}{400s+1} & \frac{-1,4 \times 10^{-3}(s+1)}{8,67s^2+14,48s+1} & \frac{-4,39 \times 10^{-2}(s+1)e^{-6s}}{7,79s^2+43,41s+1} & \frac{0,0418e^{-6s}}{400s+1} \end{bmatrix}$$

A figura 5.1 apresenta os auto-valores da matriz $[(I - K_F C)A]$ usando o filtro de Kalman, K_F , como observador de estados para a correção dos estados do modelo com a leitura das saídas da planta :

Figura 5.1- Auto-valores da matriz $[(I - K_F C)A]$

Vamos estudar a resposta do processo em malha fechada para alguns casos de rastreadibilidade nos valores de referência das variáveis controladas e de rejeição de perturbação, com o seguinte conjunto de parâmetros de sintonia :

horizonte de controle	$m = 5$ e $m = 10$
supressão das manipuladas	$R = 10^{-3} I_{nu}$
peso das controladas	$Q = I_{ny}$
peso das variáveis de folga $\mathbf{d}^s$	$S_1 = 10^4 I_{ny}$

Tabela 5.1 – Parâmetros de sintonia do IHMPC-E de modelo incerto

As condições iniciais e restrições consideradas foram as seguintes :

$$\mathbf{y}^{inicial} = \left[6,5 \% O_2 \quad 20 \% C_2H_4 \quad 251 {}^\circ C \quad 19,5 \text{ kg} / \text{cm}^2 \right]$$

$$\mathbf{u}^{inicial} = \left[6300 \text{ kg} / \text{h } O_2 \quad 5100 \text{ kg} / \text{h } C_2H_4 \quad 50 \% \quad 30 \% \quad 60 \text{ kg} / \text{h } N_2 \right]$$

$$u_{\max} = [6900 \text{ kg/h } O_2 \quad 5700 \text{ kg/h } C_2H_4 \quad 100 \% \quad 30,02 \% \quad 95 \text{ kg/h } N_2]$$

$$u_{\min} = [5700 \text{ kg/h } O_2 \quad 4500 \text{ kg/h } C_2H_4 \quad 0 \% \quad 29,98 \% \quad 25 \text{ kg/h } N_2]$$

$$\Delta u_{\max} = [25 \text{ kg/h/min} \quad 25 \text{ kg/h/min} \quad 2 \%/\text{min} \quad 0,01 \%/\text{min} \quad 10 \text{ kg/h/min}]$$

As figuras 5.2 e 5.3 apresentam a ‘resposta’ do processo para uma mudança na composição do gás de reciclo, subindo o teor de O_2 de 6,5 % para 6,8 % (y_1^{sp}) e reduzindo o teor de C_2H_4 de 20 % para 19,7 % (y_2^{sp}). Observa-se um desempenho similar para horizontes de controle $m=5$ e $m=10$. Notamos que a utilização de aproximações para as funções de transferência integradoras por funções de transferência estáveis torna a malha fechada bastante lenta, sendo necessário cerca de 300 min para que as controladas se aproximem dos valores desejados.

Figura 5.2- Variação na composição do gás de reciclo : setpoints y_1 e y_2

Figura 5.3- Manipuladas para o caso servo em y_1 e y_2

A figura 5.4 apresenta a função custo referente à mudança citada na composição do gás de reciclo.

Observa-se pela figura que a função não é mais decrescente no tempo, pois, o modelo deixou de ser o nominal. Para enfatizar o comportamento não monotônico da função custo do controlador, são apresentadas duas figuras com escalas diferentes para $V_{3,k}$. Vemos que embora essa função tende para zero para valores altos de tempo, em instantes intermediários ela passa por máximos e mínimos.

Fica claro então que o IHMPC-E com modelos aproximados perde a propriedade de estabilidade.

Figura 5.4- Função custo do caso servo em y_1 e y_2

Para verificar o efeito do peso das variáveis de folga no desempenho do controlador IHMPC-E, mostramos na figura 5.5 para horizonte de controle $m=5$, a comparação dos valores da matriz S_1 adotada originalmente, $S_1 = 10^4 I_{ny}$, com uma nova matriz S_1 dada por $S_1 = 800 I_{ny}$. Pode-se observar que o desempenho é bem parecido.

Embora valores mais altos no peso, tendem a melhorar ligeiramente a performance do controlador, essa melhora não é suficiente para tornar o controlador mais rápido.

Figura 5.5- Efeito do peso das variáveis de folga no desempenho do IHMPC-E

A seguir, apresentamos nas figuras 5.6 e 5.7 as respostas do sistema com o IHMPC-E para uma mudança na temperatura do óleo térmico na entrada do reator. O valor de referência dessa variável passa de $251 \text{ } ^\circ\text{C}$ para $251,5 \text{ } ^\circ\text{C}$ (y_3^{sp}), mantendo os ‘setpoints’ das demais controladas nos valores originais, ou seja, $y_1^{sp} = 6,5 \%$, $y_2^{sp} = 20 \%$ e $y_4^{sp} = 19,5 \text{ kg/cm}^2$.

Observamos novamente, um comportamento muito lento do controlador e semelhante aos casos anteriores, tanto para $m = 5$ como $m = 10$:

Figura 5.6- Variação na temperatura de óleo térmico : setpoint y_3

Figura 5.7 Manipuladas para o caso servo em y_3

A figura 5.8 apresenta a função custo referente à mudança na temperatura do óleo térmico na entrada do reator. Observa-se novamente que a função não é mais decrescente no tempo, pois, o modelo deixou de ser o nominal :

Figura 5.8- Função custo do caso servo em y_3

Nas figuras 5.9 e 5.10 são apresentadas as respostas do processo para uma alteração no ‘setpoint’ da pressão do gás de reciclo na entrada do reator. O valor de referência é alterado de $19,5 \text{ kg/cm}^2$ para 20 kg/cm^2 (y_4^{sp}), mantendo as demais controladas nos ‘setpoints’ originais, ou seja, $y_1^{sp} = 6,5 \%$, $y_2^{sp} = 20 \%$ e $y_3^{sp} = 251^\circ \text{C}$. O desempenho do controlador continua semelhante aos casos anteriores.

Figura 5.9- Variação na pressão do gás de reciclo : setpoint y_4

Figura 5.10- Manipuladas para o caso servo em y_4

Faremos agora uma análise da performance do IHMPC-E de modelo aproximado para a rejeição de uma perturbação na vazão de oxigênio que tem a seguinte forma : em um dado instante, por uma necessidade qualquer de processo, a variável manipulada u_1 (vazão de O_2) é desligada do controle preditivo, sendo a mesma aumentada em 200 kg/h , permanecendo nessa situação por 15 minutos. Após esse tempo, a variável u_1 é recolocada novamente como manipulada do controlador. É interessante notar que o cenário acima é operacionalmente equivalente a manter a variável u_1 sempre ligada no controle, mas com seus limites de máximo e mínimo, $u_1^{\max}$ e $u_1^{\min}$, alterados simultaneamente para um mesmo valor.

As figuras 5.11 e 5.12 apresentam as variáveis controladas e manipuladas, mostrando que o controlador é capaz de rejeitar a perturbação. Apenas a pressão tem um comportamento demasiadamente lento mas ainda aceitável.

Figura 5.11- Perturbação na vazão de oxigênio : variáveis controladas

Figura 5.12- Perturbação na vazão de oxigênio : variáveis manipuladas

Capítulo 6

Conclusões e Recomendações

6.1 Conclusões

Os controladores preditivos existentes na literatura apresentam limitações de uso em processos integradores, os quais exibem resposta não-estacionária nas saídas frente ao degrau nas entradas. Um dos contornos para essa limitação é o truncamento da resposta ao degrau após um número finito de instantes. Essa abordagem, no entanto, acarreta um erro que pode instabilizar o processo em malha fechada.

O presente trabalho teve seu enfoque principal no desenvolvimento de um algoritmo de controle preditivo de horizonte de predição infinito, nominalmente estável, para contemplar os processos que apresentam características integradoras. Esse algoritmo está baseado na representação em variáveis de estado na forma incremental das entradas, cuja abordagem também é bem escassa na literatura. Adicionalmente enfocou-se o caso real onde temos a presença de tempos mortos na função de transferência do processo.

Demonstrou-se que o IHMPC-E é estável, independente da sintonia, para o caso nominal em sistemas observáveis.

A aplicação do controlador de horizonte infinito para sistemas integradores foi ilustrada para dois processos industriais. O primeiro, uma coluna desisobutanizadora típica de uma refinaria de petróleo, foi simulado para o caso nominal e também para incertezas no modelo da planta. O segundo processo, um reator de oxidação catalítica de etileno, que exhibe diferentes tempos mortos para as variáveis integradoras foi também estudado. Nesse caso, verificou-se que o modelo perfeito do processo não é observável e foi necessária a utilização de um modelo aproximado. Em ambos os casos foi usado o filtro de Kalman no controlador.

O controlador IHMPC-E teve um bom desempenho no caso nominal da coluna deisobutanizadora como também nos casos incertos da coluna. Os resultados com o sistema de óxido de eteno foram apenas razoáveis. A escolha dos parâmetros de sintonia do IHMPC-E mostrou-se relativamente simples, praticamente não exigindo nenhum esforço adicional em relação aos parâmetros dos MPC's convencionais de horizonte de predição finita existentes na literatura.

6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Uma extensão natural deste trabalho seria o desenvolvimento de um MPC robusto para processos integradores com incerteza no modelo. Usando as idéias aqui apresentadas, acreditamos que o trabalho de Cano e Odloak (2003) possa ser estendido para sistemas que associem dinâmicas estáveis e integradoras, além da presença de tempos mortos.

Uma sugestão adicional refere-se à necessidade de se desenvolver um 'solver' ou aperfeiçoar os solvers existentes para tratar com o problema de NLP específico desse controlador.

Observamos que a rotina `fmincon` do MATLAB, utilizada nesse trabalho, tem uma performance insatisfatória tanto sob o aspecto de tempo computacional como sob o aspecto de confiabilidade, gerando frequentemente 'ruídos' dados por soluções indesejáveis sem significado físico algum, ou seja, entre instantes consecutivos, o solver chaveia sistematicamente algumas restrições ativas mesmo quando a função custo está bem próxima de zero, isto é, perto da condição estacionária do sistema em malha fechada.

Referências Bibliográficas

- Astrom, K.J. e Wittenmark, B. (1990). Computer controlled systems. Theory and Design
Prentice-Hall
- Cano, R.A.R. e Odloak, D. (2003). Robust model predictive control of integrating processes. ***Journal of Process Control***, v.13, p.101-114.
- Cano, R.A.R. (2001). Controle Robusto de Processos Químicos Integradores.
Dissertação de Mestrado. EPUSP, São Paulo.
- Cutler, C. R. e Ramaker, B. L. (1979). Dynamic matrix control – a computer control algorithm. **AICHE 86th National Meeting**, Houston, TX.
- Garcia, C. E. e Morshedi, A. M. (1986). Quadratic programing solution of dynamic matrix control (QDMC). ***Chem. Engng Commun.***, v.46, p.73-87.
- Gouvêa, M. T. e Odloak, D. (1997). ROSSMPC: A new way of representing and analysing the predictive controllers. ***Trans IchemE***, v.75, Part A, p.693-708.
- Lee, J. H.; Morari, M. e Garcia, C. E. (1994). State space interpretation of model predictive control. ***Automatica***, v.30, n.4, p.707-717.
- Lee, J. H. e Cooley, B. L. (2000). Min-Max Predictive control Techniques for a Linear State Space System with a Bounded Set of Input Matrices. ***Automatica***, v.36, p.463-473.
- Lee, J. H. e Xiao, J. (2000). Use of two-stage optimization in model predictive control of stable and integrating systems. ***Computers Chem. Engng***, v.24, p.1591-1596.
- Li, S.; Lim, K. Y. e Fisher, D. G. (1989). A state space formulation for model predictive control. ***AICHE Journal***, v.35, n.2, p.241-249.
- Luyben, W.L.; Tyreus, B.D.; e Luyben, M.L. (1999). Plantwide process control.
Mc Graw-Hill.
- Moro, L. F. L. e Odloak, D. (1995). Constrained multivariable control of fluid cracking converters. ***Journal of Process Control***, v.5, n.1, p.29-39.
- Odloak, D. (1996). A new state-space approach to model predictive control, ***Brazilian Journal of Chem. Engng***, v.13, n.3, p.152-167.
- Rawlings, J.B e K.R Muske (1993). The stability of constrained multivariable receding horizon control. ***IEEE Trans. Autom. Cont.***, 38, p.1512-1516.

- Rodrigues, M. A. (2001). Estabilidade Robusta de Controladores Preditivos. **Tese de Doutorado. EPUSP**, São Paulo.
- Rodrigues, M. A. e Odloak D. (2000). Output feedback MPC with guaranteed robust stability. *Journal of Process Control*, december, v.10, n.6, p. 567-572.
- Rodrigues, M. A. e Odloak D. (2003). An infinite horizon model predictive control for stable and integrating processes. *Computers Chem. Engng*, v.27, p. 1113-1128.
- Rodrigues, M. A.; Carrapiço, O.L.; Odloak D. e Moraes, R. (2004). Relatório do Projeto de Desenvolvimento de Controladores Avançados para Reator de Óxido de Etileno. *Escola Politécnica da USP*, abril.
- Sontag, E. D. (1998). Mathematical control theory. *Springer-Verlag*.
- Wu, K.L.; Yu, C.C.; Luyben, W.L. e Skogestad, S. (2003). Reactor/Separator Processes with recycles-2. Design for composition control *Computers Chem. Engng*, v.27, n. 3, p.401 - 421.

Apêndice A

A.1 Montagem matricial da predição das saídas ao longo do horizonte np

Escrevendo as predições de forma recursiva até o instante de controle m , temos :

$$\rightarrow \text{instante } k+1 : [y]_{k+1} = C[x]_{k+1}$$

$$= C \{ A[x]_k + B\Delta u(k) \}$$

$$= CA[x]_k + CB\Delta u(k)$$

$$\rightarrow \text{instante } k+2 : [y]_{k+2} = C[x]_{k+2}$$

$$= C \{ A[x]_{k+1} + B\Delta u(k+1) \}$$

$$= C \{ A [A[x]_k + B\Delta u(k)] + B\Delta u(k+1) \}$$

$$= CA^2[x]_k + CAB\Delta u(k) + CB\Delta u(k+1)$$

$$\rightarrow \text{instante } k+3 : [y]_{k+3} = C[x]_{k+3}$$

$$= C \{ A[x]_{k+2} + B\Delta u(k+2) \}$$

$$= C \{ A [A [A[x]_k + B\Delta u(k+1)] + B\Delta u(k+2)] \}$$

$$= C \{ A [A (A [x]_k + B\Delta u(k)) + B\Delta u(k+1)] + B\Delta u(k+2) \}$$

$$= CA^3[x]_k + CA^2B\Delta u(k) + CAB\Delta u(k+1) + CB\Delta u(k+2)$$

generalizando então até o horizonte de controle m , temos :

$\rightarrow$ para instantes de tempo $j \leq m$:

$$[y]_{k+j} = CA^j[x]_k + CA^{j-1}B\Delta u(k) + CA^{j-2}B\Delta u(k+1) + \dots + CB\Delta u(k+j-1)$$

Para instantes acima do horizonte de controle, $m < j \leq np$, não existe mais ações de controle. Escrevendo recursivamente teremos :

$$\rightarrow \text{instante } k+m+1 : [y]_{k+m+1} = C[x]_{k+m+1}$$

$$\text{mas, com } [x]_{k+m+1} = A[x]_{k+m} \text{ temos}$$

$$\begin{aligned} [x]_{k+m+1} &= A \left\{ A^m [x]_k + A^{m-1} B \Delta u(k) + A^{m-2} B \Delta u(k+1) + \dots + B \Delta u(k+m-1) \right\} \\ &= A^{m+1} [x]_k + A^m B \Delta u(k) + A^{m-1} B \Delta u(k+1) + \dots + A B \Delta u(k+m-1) \end{aligned}$$

substituindo acima obtem-se :

$$[y]_{k+m+1} = C A^{m+1} [x]_k + C A^m B \Delta u(k) + C A^{m-1} B \Delta u(k+1) + \dots + C A B \Delta u(k+m-1)$$

$$\rightarrow \text{instante } k+m+2 : [y]_{k+m+2} = C[x]_{k+m+2}$$

$$\text{mas, com } [x]_{k+m+2} = A[x]_{k+m+1} \text{ temos}$$

$$\begin{aligned} [x]_{k+m+2} &= A \left\{ A^{m+1} [x]_k + A^m B \Delta u(k) + A^{m-1} B \Delta u(k+1) + \dots + A B \Delta u(k+m-1) \right\} \\ &= A^{m+2} [x]_k + A^{m+1} B \Delta u(k) + A^m B \Delta u(k+1) + \dots + A^2 B \Delta u(k+m-1) \end{aligned}$$

substituindo acima obtem-se :

$$[y]_{k+m+2} = C A^{m+2} [x]_k + C A^{m+1} B \Delta u(k) + C A^m B \Delta u(k+1) + \dots + C A^2 B \Delta u(k+m-1)$$

⋮

$$\rightarrow \text{instante } k+np : [y]_{k+np} = C[x]_{k+np}$$

$$[y]_{k+np} = C A^{np} [x]_k + C A^{np-1} B \Delta u(k) + C A^{np-2} B \Delta u(k+1) + \dots + C A^{np-m} B \Delta u(k+m-1)$$

fazendo agora a generalização para instantes $m < j \leq np$ obtem-se :

$$[y]_{k+j} = C A^j [x]_k + C A^{j-1} B \Delta u(k) + C A^{j-2} B \Delta u(k+1) + \dots + C A^{j-m} B \Delta u(k+m-1)$$

Juntando as duas parcelas generalizadas da predição e representando na forma matricial, teremos :

$$\begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ \vdots \\ y_{k+np-1} \\ y_{k+np} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{np-1} \\ CA^{np} \end{bmatrix} [x]_k + \begin{bmatrix} CB & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{m-1}B & CA^{m-2}B & \cdots & CB \\ CA^mB & CA^{m-1}B & \cdots & CAB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{np-1}B & CA^{np-2}B & \cdots & CA^{np-m}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-1) \end{bmatrix}$$

ou de forma compacta :

$$[y]_k = \bar{C}[x]_k + \bar{\bar{C}} \Delta u_k$$

onde ,

$$\bar{C} = [CA \quad CA^2 \quad \cdots \quad CA^{np}]^T \in \mathbb{R}^{np.ny, ny+ne}$$

$$\bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} CB & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{m-1}B & CA^{m-2}B & \cdots & CB \\ CA^mB & CA^{m-1}B & \cdots & CAB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{np-1}B & CA^{np-2}B & \cdots & CA^{np-m}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np.ny, m.nu}$$

$$y(k) \in \mathbb{R}^{np.ny}$$

$$x(k/k) \in \mathbb{R}^{(ny+ne)}$$

$$[\Delta u]_k \in \mathbb{R}^{m.nu}$$

A.2 Função Custo do Problema P4.1 na forma quadrática

$$V_k = \left[\bar{C}[x]_k + \bar{\bar{C}} \Delta u_k - y_1^{sp} \right]^T \tilde{Q} \left[\bar{C}[x]_k + \bar{\bar{C}} \Delta u_k - y_1^{sp} \right] \\ + \left\{ A^m[e]_k + \tilde{A}B \Delta u_k \right\}^T \bar{Q}^* \left\{ A^m[e]_k + \tilde{A}B \Delta u_k \right\}^T + \Delta u_k^T \tilde{R} \Delta u_k$$

abrindo o primeiro termo da função custo :

$$\left[\bar{C}[x]_k + \bar{\bar{C}} \Delta u_k - y_1^{sp} \right]^T \tilde{Q} \left[\bar{C}[x]_k + \bar{\bar{C}} \Delta u_k - y_1^{sp} \right] = \\ = [x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{C}[x]_k + [x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} \Delta u_k - [x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} y_1^{sp} \\ + \Delta u_k^T \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{C}[x]_k + \Delta u_k^T \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} \Delta u_k - \Delta u_k^T \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} y_1^{sp} \\ - y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{C}[x]_k - y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{\bar{C}} \Delta u_k + y_1^{spT} \tilde{Q} y_1^{sp}$$

abrindo o segundo termo da função custo :

$$\left\{ A^m[e]_k + \tilde{A}B \Delta u_k \right\}^T \bar{Q}^* \left\{ A^m[e]_k + \tilde{A}B \Delta u_k \right\}^T + \Delta u_k^T \tilde{R} \Delta u_k = \\ = [e]_k^T A^{mT} \bar{Q}^* A^m[e]_k + [e]_k^T A^{mT} \bar{Q}^* \tilde{A}B \Delta u_k \\ + \Delta u_k^T \tilde{A}B^T \bar{Q}^* A^m[e]_k + \Delta u_k^T \tilde{A}B^T \bar{Q}^* \tilde{A}B \Delta u_k \\ + \Delta u_k^T \tilde{R} \Delta u_k$$

Agrupando de forma adequada os termos, obtem-se :

$$V_k = \Delta u_k^T H_1 \Delta u_k + 2C_{f,1} \Delta u_k + c_1$$

onde

$$\text{matriz Hessiana } H_1 = \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} + \tilde{A}B^T \bar{Q}^* \tilde{A}B + \tilde{R} \\ C_{f,1} = [x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} - y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{\bar{C}} + [e]_k^T A^{mT} \bar{Q}^* \tilde{A}B \\ c_1 = [x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{C}[x]_k - 2y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{C}[x]_k + y_1^{spT} \tilde{Q} y_1^{sp} + [e]_k^T A^{mT} \bar{Q}^* A^m[e]_k$$

A.3 Função Custo do Problema P4.2 na forma quadrática

$$V_k = \left[\bar{C}[x]_k + \bar{\bar{C}} \Delta u_k - y_1^{sp} - \bar{I} \mathbf{d}_k^s \right]^T \tilde{Q} \left[\bar{C}[x]_k + \bar{\bar{C}} \Delta u_k - y_1^{sp} - \bar{I} \mathbf{d}_k^s \right] \\ + \left\{ A^m[e]_k + \tilde{A}B \Delta u_k \right\}^T \bar{Q}^* \left\{ A^m[e]_k + \tilde{A}B \Delta u_k \right\}^T + \Delta u_k^T \tilde{R} \Delta u_k + \mathbf{d}_k^{sT} S_1 \mathbf{d}_k^s$$

abrindo o 1° Termo :

$$\left[\bar{C}[x]_k + \bar{\bar{C}} \Delta u_k - y_1^{sp} - \bar{I} \mathbf{d}_k^s \right]^T \tilde{Q} \left[\bar{C}[x]_k + \bar{\bar{C}} \Delta u_k - y_1^{sp} - \bar{I} \mathbf{d}_k^s \right] = \\ = [x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{C}[x]_k + [x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} \Delta u_k - [x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} y_1^{sp} - [x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{I} \mathbf{d}_k^s \\ + \Delta u_k^T \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{C}[x]_k + \Delta u_k^T \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} \Delta u_k - \Delta u_k^T \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} y_1^{sp} - \Delta u_k^T \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{I} \mathbf{d}_k^s \\ - y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{C}[x]_k - y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{\bar{C}} \Delta u_k + y_1^{spT} \tilde{Q} y_1^{sp} + y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{I} \mathbf{d}_k^s \\ - \mathbf{d}_k^{sT} \bar{I}^T \tilde{Q} \bar{C}[x]_k - \mathbf{d}_k^{sT} \bar{I}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} \Delta u_k + \mathbf{d}_k^{sT} \bar{I}^T \tilde{Q} y_1^{sp} + \mathbf{d}_k^{sT} \bar{I}^T \tilde{Q} \bar{I} \mathbf{d}_k^s$$

abrindo o 2° Termo :

$$\left\{ A^m[e]_k + \tilde{A}B \Delta u_k \right\}^T \bar{Q}^* \left\{ A^m[e]_k + \tilde{A}B \Delta u_k \right\}^T + \Delta u_k^T \tilde{R} \Delta u_k + \mathbf{d}_k^{sT} S_1 \mathbf{d}_k^s = \\ = [e]_k^T A^{mT} \bar{Q}^* A^m[e]_k + [e]_k^T A^{mT} \bar{Q}^* \tilde{A}B \Delta u_k \\ + \Delta u_k^T \tilde{A}B^T \bar{Q}^* A^m[e]_k + \Delta u_k^T \tilde{A}B^T \bar{Q}^* \tilde{A}B \Delta u_k \\ + \Delta u_k^T \tilde{R} \Delta u_k + \mathbf{d}_k^{sT} S_1 \mathbf{d}_k^s$$

Agrupando de forma adequada os termos :

$$V_{k2} = \begin{bmatrix} \Delta u_k^T & \mathbf{d}_k^{sT} \end{bmatrix} H_2 \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \mathbf{d}_k^s \end{bmatrix} + 2C_{f,2} \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \mathbf{d}_k^s \end{bmatrix} + c_2$$

onde

$$\text{matriz Hessiana : } H_2 = \begin{bmatrix} \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} + \tilde{A}B^T \bar{Q}^* \tilde{A}B + \tilde{R} & -\bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{I} \\ -\bar{I}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} & \bar{I}^T \tilde{Q} \bar{I} + S_1 \end{bmatrix} \\ C_{f,2} = \begin{bmatrix} [x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} - y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{\bar{C}} + [e]_k^T A^{mT} \bar{Q}^* \tilde{A}B & -[x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{I} + y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{I} \end{bmatrix} \\ c_2 = c_1 = \left\{ [x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{C}[x]_k - 2y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{C}[x]_k + y_1^{spT} \tilde{Q} y_1^{sp} + [e]_k^T A^{mT} \bar{Q}^* A^m[e]_k \right\}$$

A.4 Função Custo do Problema P4.3 na forma quadrática

$$V_k = \left[\bar{C}[x]_k + \bar{\bar{C}} \Delta u_k - y_1^{sp} - \bar{I} \mathbf{d}_k^s - \bar{T} \mathbf{d}_k^i \right]^T \tilde{Q} \left[\bar{C}[x]_k + \bar{\bar{C}} \Delta u_k - y_1^{sp} - \bar{I} \mathbf{d}_k^s - \bar{T} \mathbf{d}_k^i \right] \\ + \left\{ A^m[e]_k + \tilde{A}B \Delta u_k \right\}^T \bar{Q}^* \left\{ A^m[e]_k + \tilde{A}B \Delta u_k \right\}^T + \Delta u_k^T \tilde{R} \Delta u_k + \mathbf{d}_k^{sT} S_1 \mathbf{d}_k^s + \mathbf{d}_k^{iT} S_2 \mathbf{d}_k^i$$

abrindo o 1º Termo :

$$\left[\bar{C}[x]_k + \bar{\bar{C}} \Delta u_k - y_1^{sp} - \bar{I} \mathbf{d}_k^s - \bar{T} \mathbf{d}_k^i \right]^T \tilde{Q} \left[\bar{C}[x]_k + \bar{\bar{C}} \Delta u_k - y_1^{sp} - \bar{I} \mathbf{d}_k^s - \bar{T} \mathbf{d}_k^i \right] = \\ = [x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{C}[x]_k + [x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} \Delta u_k - [x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} y_1^{sp} - [x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{I} \mathbf{d}_k^s - [x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{T} \mathbf{d}_k^i \\ + \Delta u_k^T \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{C}[x]_k + \Delta u_k^T \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} \Delta u_k - \Delta u_k^T \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} y_1^{sp} - \Delta u_k^T \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{I} \mathbf{d}_k^s - \Delta u_k^T \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{T} \mathbf{d}_k^i \\ - y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{C}[x]_k - y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{\bar{C}} \Delta u_k + y_1^{spT} \tilde{Q} y_1^{sp} + y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{I} \mathbf{d}_k^s + y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{T} \mathbf{d}_k^i \\ - \mathbf{d}_k^{sT} \bar{I}^T \tilde{Q} \bar{C}[x]_k - \mathbf{d}_k^{sT} \bar{I}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} \Delta u_k + \mathbf{d}_k^{sT} \bar{I}^T \tilde{Q} y_1^{sp} + \mathbf{d}_k^{sT} \bar{I}^T \tilde{Q} \bar{I} \mathbf{d}_k^s + \mathbf{d}_k^{sT} \bar{I}^T \tilde{Q} \bar{T} \mathbf{d}_k^i \\ - \mathbf{d}_k^{iT} \bar{T}^T \tilde{Q} \bar{C}[x]_k - \mathbf{d}_k^{iT} \bar{T}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} \Delta u_k + \mathbf{d}_k^{iT} \bar{T}^T \tilde{Q} y_1^{sp} + \mathbf{d}_k^{iT} \bar{T}^T \tilde{Q} \bar{I} \mathbf{d}_k^s + \mathbf{d}_k^{iT} \bar{T}^T \tilde{Q} \bar{T} \mathbf{d}_k^i$$

abrindo o 2º Termo :

$$\left\{ A^m[e]_k + \tilde{A}B \Delta u_k \right\}^T \bar{Q}^* \left\{ A^m[e]_k + \tilde{A}B \Delta u_k \right\}^T + \Delta u_k^T \tilde{R} \Delta u_k + \mathbf{d}_k^{sT} S_1 \mathbf{d}_k^s + \mathbf{d}_k^{iT} S_2 \mathbf{d}_k^i = \\ = [e]_k^T A^{mT} \bar{Q}^* A^m [e]_k + [e]_k^T A^{mT} \bar{Q}^* \tilde{A}B \Delta u_k \\ + \Delta u_k^T \tilde{A}B^T \bar{Q}^* A^m [e]_k + \Delta u_k^T \tilde{A}B^T \bar{Q}^* \tilde{A}B \Delta u_k \\ + \Delta u_k^T \tilde{R} \Delta u_k + \mathbf{d}_k^{sT} S_1 \mathbf{d}_k^s + \mathbf{d}_k^{iT} S_2 \mathbf{d}_k^i$$

Agrupando de forma adequada os termos na forma quadrática :

$$V_{k3} = \begin{bmatrix} \Delta u_k^T & \mathbf{d}_k^{sT} & \mathbf{d}_k^{iT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{12}^T & H_{22} & H_{23} \\ H_{13}^T & H_{23}^T & H_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \mathbf{d}_k^s \\ \mathbf{d}_k^i \end{bmatrix} + 2C_{f,3} \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \mathbf{d}_k^s \\ \mathbf{d}_k^i \end{bmatrix}_k + c_3$$

onde

$$\begin{aligned} H_{11} &= \bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} + \tilde{A} \tilde{B}^T \tilde{Q}^* \tilde{A} \tilde{B} + \tilde{R} & H_{12} &= -\bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{I} & H_{13} &= -\bar{\bar{C}}^T \tilde{Q} \bar{T} \\ H_{12}^T &= -\bar{I}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} & H_{22} &= \bar{I}^T \tilde{Q} \bar{I} + S_1 & H_{23} &= \bar{I}^T \tilde{Q} \bar{T} \\ H_{13}^T &= -\bar{T}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} & H_{23}^T &= \bar{T}^T \tilde{Q} \bar{I} & H_{33} &= \bar{T}^T \tilde{Q} \bar{T} + S_2 \end{aligned}$$

$$C_{f,3} = \begin{bmatrix} [x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} - y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{\bar{C}} + e_k^T A^{mT} \tilde{Q}^* \tilde{A} \tilde{B} & -[x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{I} + y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{I} & -[x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{T} + y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{T} \end{bmatrix}$$

$$c_3 = [x]_k^T \bar{C}^T \tilde{Q} \bar{\bar{C}} [x]_k - 2y_1^{spT} \tilde{Q} \bar{\bar{C}} [x]_k + e_k^T A^{mT} \tilde{Q}^* \tilde{A}^m e_k$$