LUÍS ROBERTO SCHLEMM GUEDES

**CONTROLE ROBUSTO DE COLUNA DE DESTILAÇÃO
DE ALTA PUREZA**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do Título
de Mestre em Engenharia.

SÃO PAULO
2002

LUÍS ROBERTO SCHLEMM GUEDES

**CONTROLE ROBUSTO DE COLUNA DE DESTILAÇÃO
DE ALTA PUREZA**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do Título
de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia Química

Orientador:
Prof. Dr. Darci Odloak

SÃO PAULO
2002

FICHA CATALOGRÁFICA

Guedes, Luís Roberto Schlemm

Controle robusto de coluna de destilação de alta pureza. São Paulo, 2002.
103p.

Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo. Departamento de Engenharia Química.

1. Controle de processo 2. Controle preditivo 3. Coluna de alta pureza
4. Controle robusto.

I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de
Engenharia Química II. t

À família.

Cíntia, Júlia e Pedro: a minha.

Meus pais: a primeira.

Tias da Geórgia: a grande.

Adelaide e Silvio Paulo: as perdas.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Darci Odloak pela orientação e pela confiança, sendo uma referência ao longo do curso.

À PETROBRAS, na pessoa do engenheiro Antônio Maylinch Teruel, pelo suporte e pelo constante incentivo, viabilizando a realização deste trabalho.

Ao amigo Dorival Jorge Farias da RPBC por compartilhar as minhas tarefas.

Ao Dr. Marco Antônio Rodrigues do LSCP pelo auxílio na aplicação do algoritmo de controle.

Ao Eng. Carlos Roberto Porfírio da RPBC pela revisão do texto.

Aos operadores da Unidade de Recuperação de Aromáticos da RPBC pelas informações de processo.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

RESUMO

ABSTRACT

INTRODUÇÃO.....	1
1.1 - Apresentação do problema de controle da coluna de benzeno.....	1
1.2 - Revisão bibliográfica	2
1.3 - Objetivo do trabalho.....	6
1.4 - Organização do trabalho.....	6
PROBLEMA DE CONTROLE DA COLUNA DE BENZENO.....	8
2.1 - Introdução.....	8
2.2 - Especificações dos produtos	9
2.2.1 - Especificações do BENZENO	9
2.2.2 - Especificações do TOLUENO	9
2.3 - Descrição do processo.....	10
2.4 - Variáveis operacionais	11
2.4.1 - Vazão da carga	12
2.4.2 - Temperatura da carga.....	12
2.4.3 - Composição da carga	12
2.4.4 - Pressão da coluna	12
2.4.5 - Temperatura do refluxo.....	13
2.4.6 - Vazão do reciclo.....	13
2.4.7 - Vazão do refluxo	13
2.4.8 - Vazão do benzeno	13
2.4.9 - Carga térmica do refeedor.....	13
2.5 - Limitações do processo	14
2.6 - Estratégias de controle	14

2.6.1 - Vazão de benzeno - carga térmica do refeedor	15
2.6.2 - Vazão de reciclo - vazão de benzeno - carga térmica do refeedor	15
SIMULAÇÃO ESTATICA DA COLUNA DE BENZENO	17
3.1 – Introdução	17
3.2 – Etapas da construção do modelo estático	18
3.2.1 – Definição da base de simulação	18
3.2.2 – Caracterização da carga do sistema	20
3.2.3 – Definição das operações unitárias envolvidas no processo	22
3.2.4 – Especificação dos graus de liberdade do sistema	23
3.2.5 – Comparação dos resultados do simulador com os dados de projeto	24
3.2.6 – Definição dos estudos da simulação estática	25
SIMULAÇÃO DINÂMICA DA COLUNA DE BENZENO	28
4.1 – Introdução	28
4.2 – Etapas da construção do modelo dinâmico	28
4.2.1 – Definição da estratégia de controle	28
4.2.2 – Definição das características geométricas das operações unitárias	29
4.2.3 – Definição dos controladores e válvulas de controle do sistema	30
4.3 – Integração do simulador dinâmico com o controlador multivariável	31
COMPORTAMENTO DO PROCESSO	34
5.1 – Introdução	34
5.2 – Região de Operação	34
5.3 – Ganhos do Processo	36
IDENTIFICAÇÃO DOS MODELOS DO SISTEMA	42
6.1 – Introdução	42
6.2 – Formulação em espaço de estados via Modelo Orientado à Predição da Saída	42
6.2.1 – Modelo Orientado à Predição da Saída	43
6.2.2 – Correção da predição com a medição da planta	47
6.3 – Algoritmo de identificação com modelos na forma analítica	48
6.4 – Modelos de processo identificados	49
ALGORITMOS DE CONTROLE	59
7.1 – Introdução	59

7.2 – MPC de horizonte infinito com predição em instantes discretos (IH MPC-I)	60
7.3 – MPC de horizonte infinito robusto com predição em instantes discretos (RIH MPC-I).....	69
7.4 – MPC de horizonte infinito com predição contínua no tempo (IH MPC-II)	71
7.5 – MPC de horizonte infinito robusto com predição contínua no tempo (RIH MPC-II)	81
APLICAÇÃO DO MPC À COLUNA DE BENZENO.....	84
8.1 – Introdução.....	84
8.2 – Simulação com modelo linear e IH MPC-II – caso nominal.....	84
8.3 – Simulação com modelo rigoroso e IH MPC-II.....	88
8.4 – Simulação com modelo linear e RIH MPC-II	89
8.5 – Simulação com modelo rigoroso e RIH MPC-II – caso servo	93
8.6 – Simulação com modelo rigoroso e RIH MPC-II – caso regulador.....	96
CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	99
9.1 – Conclusões.....	99
9.2 – Sugestões	100
REFERÊNCIAS	101
APÊNDICE A - RESPOSTA AO DEGRAU ANALÍTICA DOS MODELOS IDENTIFICADOS	
APÊNDICE B - FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DOS MODELOS IDENTIFICADOS	
APÊNDICE C - COMPLEMENTO DE SCHUR	

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Esquema de produção de aromáticos na RPBC	8
Figura 2.2 – Fluxograma de processo da coluna de benzeno	11
Figura 3.1 – VLE benzeno x tolueno a 760 mmHg.....	20
Figura 3.2 – Fluxograma de processo da simulação.....	22
Figura 4.1 – Estratégia de controle da coluna de benzeno	29
Figura 4.2 – Mecanismo de comunicação HYSYS™-Matlab™ (Almeida Neto, 1999) ..	32
Figura 5.1 – Região de operação das variáveis manipuladas	35
Figura 5.2 – Ganhos das controladas em relação à vazão do produto de topo	38
Figura 5.3 – Ganhos das controladas em relação à vazão de retirada lateral de benzeno.....	39
Figura 5.4 – Ganhos das controladas em relação à carga térmica do refeedor.....	40
Figura 6.1 – Região de operação do processo	51
Figura 6.2 – Modelos de resposta ao degrau na vazão do produto de topo	53
Figura 6.3 – Modelos de resposta ao degrau na vazão de retirada lateral de benzeno ...	54
Figura 6.4 – Modelos de resposta ao degrau na carga térmica do refeedor	55
Figura 6.5 – Resposta ao degrau x modelo 1 na carga térmica do refeedor.....	57
Figura 6.6 – Resposta ao degrau x modelo 3 na carga térmica do refeedor.....	58
Figura 8.1 – Modelo linear – IHMPC-II e parâmetros de sintonia do caso 1	86
Figura 8.2 – Modelo linear – IHMPC-II e parâmetros de sintonia do caso 2.....	86
Figura 8.3 – Modelo linear – IHMPC-II e parâmetros de sintonia do caso 3.....	87
Figura 8.4 – Modelo linear – IHMPC-II e parâmetros de sintonia do caso 4.....	87
Figura 8.5 – Modelo rigoroso – IHMPC-II e parâmetros de sintonia com melhor ajuste.....	89
Figura 8.6 – Modelo linear – RIHMPC-II e parâmetros de sintonia do caso 5	91
Figura 8.7 – Modelo linear – RIHMPC-II e parâmetros de sintonia do caso 6	91
Figura 8.8 – Modelo linear – RIHMPC-II e parâmetros de sintonia do caso 7	92
Figura 8.9 – Modelo linear – RIHMPC-II e parâmetros de sintonia do caso 8	92
Figura 8.10 – Modelo rigoroso – RIHMPC-II e parâmetros de sintonia com melhor ajuste. Variação nos valores de referência conforme tabela 8.1	94

Figura 8.11 – Modelo rigoroso – RIHMPC-II e parâmetros de sintonia com melhor ajuste. Variação nos valores de referência conforme tabela 8.6.....	94
Figura 8.12 – Estratégia de controle da coluna de benzeno – caso carga.....	96
Figura 8.13 – Comportamento dinâmico – perturbação na composição da carga.....	97
Figura 8.14 – Modelo rigoroso – RIHMPC-II, parâmetros de sintonia com melhor ajuste e caso carga	98

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Especificações do benzeno	9
Tabela 2.2 – Especificações do tolueno.....	10
Tabela 3.1 – Componentes puros considerados	19
Tabela 3.2 – Condições da carga	20
Tabela 3.3 – Composição da carga.....	21
Tabela 3.4 – Especificações da simulação.....	24
Tabela 3.5 – Resultados da simulação.....	25
Tabela 3.6 – Variáveis controladas.....	26
Tabela 3.7 – Restrição do processo	26
Tabela 3.8 – Variáveis manipuladas composição de carga 1	27
Tabela 3.9 – Variáveis manipuladas composição de carga 2	27
Tabela 4.1 – Dados geométricos dos equipamentos.....	30
Tabela 4.2 – Parâmetros de configuração dos controladores	31
Tabela 4.3 – Parâmetros de sintonia dos controladores PID	31
Tabela 4.4 – Variáveis enviadas para o MATLAB™	32
Tabela 4.5 – Variáveis recebidas pelo HYSYS™	33
Tabela 4.6 – Parâmetros da comunicação	33
Tabela 5.1 – Pontos de operação - controladas	37
Tabela 5.2 – Pontos de operação - manipuladas.....	37
Tabela 6.1 – Pontos de operação - controladas	52
Tabela 6.2 – Pontos de operação - manipuladas.....	52
Tabela 8.1 – Variação nos valores de referência das controladas	85
Tabela 8.2 – Restrições nas variáveis manipuladas.....	85
Tabela 8.3 – IHMPC - ajuste dos parâmetros de sintonia	85
Tabela 8.4 – Número de condicionamento das matrizes dos ganhos estáticos dos modelos	90
Tabela 8.5 – RIHMPCC - ajuste dos parâmetros de sintonia.....	90
Tabela 8.6 – Variação forte nos valores de referência das controladas	93

LISTA DE SÍMBOLOS

A	matriz característica do sistema em malha aberta
A_m, B_m e C_m	matrizes do modelo
B	matriz de distribuição das entradas do sistema em malha aberta
C	matriz das saídas do modelo do sistema
C_0	matriz dos ganhos de regime permanente no OPOM
C_d	matriz dos resíduos dos coeficientes da resposta ao degrau
$C_m(t)$	matriz das saídas da representação em espaço de estados do OPOM
c_f^T	gradiente da função custo dos problemas de programação quadrática
e^s	erro de regime permanente no modelo do OPOM
$F(n)$	integral definida da matriz com os pólos do modelo
$G(s)$	função de transferência no domínio de Laplace
$G(n)$	integral definida do produto quadrático das matrizes com os pólos do modelo
H_y	horizonte de predição
H_u	horizonte de controle
H	matriz Hessiana da função custo dos problemas de programação quadrática
J_i	matriz auxiliar na representação do OPOM
K_F	ganho do observador de estados segundo a abordagem convencional do MPC
$\mathbb{M}_M$	domínio de incertezas da representação com múltiplos modelos
N	matriz auxiliar da representação do OPOM
N_s	matriz que coleta os modos estáveis no OPOM
N_u	matriz que coleta os modos instáveis no OPOM
nd	número de estados relacionados aos modos dinâmicos do OPOM
nt	número de estados do sistema aumentado (modelo + planta)
$na_{i,j}$	número de pólos da função de transferência que relaciona a entrada u_j e a saída y_i
nu	número de entradas
ny	número de saídas
Q	matriz de ponderação das variáveis controladas

$\tilde{\mathbf{Q}}$	matriz de ponderação das variáveis controladas modificada do IHMPC de instantes discretos aplicada em H_u
$\tilde{\tilde{\mathbf{Q}}}$	matriz de ponderação das variáveis controladas modificada do IHMPC de instantes discretos
r	pólo de uma função de transferência
$\mathbf{R}$	matriz de ponderação das variáveis manipuladas
s	resposta ao degrau unitário variável de Laplace
$\mathbf{S}$	matriz dos coeficientes da resposta ao degrau
t	tempo
T	tamanho do intervalo de amostragem
$\mathbf{u}$	entrada manipulada
$\Delta \mathbf{u}_k$	ação de controle no instante k
$\Delta \mathbf{u}$	ações de controle ao longo de H_u
$\mathbf{v}_{k+1}$	correção do estado com medidas da planta no instante k
$\mathbf{V}$	matriz de ponderação das variáveis de folga na função custo modificada
$\mathbf{x}$	estados do sistema aumentado (modelo + planta)
$\mathbf{x}_c$	estados do controlador com ganho dinâmico
$\mathbf{x}_m$	vetor de erros da trajetória de predição da saída calculada somente com as ações de controle referentes ao primeiro instante de H_u
$\mathbf{x}_{k+1}$	estados do sistema no instante $k+1$
$\mathbf{x}^s$	estados do OPOM relacionado à saída no regime permanente
$\mathbf{x}^d$	estados do OPOM relacionado aos modos dinâmicos do modelo
$\mathbf{y}$	saída do sistema

Símbolos gregos

α	matriz de transição de estados modificada para IHMPC de instantes discretos
β	matriz de distribuição das entradas modificada para IHMPC de instantes discretos
γ	função objetivo do MPC via LMI
δ	variável de folga
Φ_i	matriz auxiliar com os pólos do modelo

- σ autovalor da matriz
- τ_D tempo derivativo do controlador PID
- τ_I tempo integral do controlador PID
- $\Psi(t)$ matriz para a predição da saída contínua

Sobrescritos

- T denota a operação de transposição de uma matriz

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

C ₅	Hidrocarbonetos com 5 átomos de carbono na cadeia
C ₈	Hidrocarbonetos com 8 átomos de carbono na cadeia
DDE	Dynamic Data Exchange
DMC	Dynamic Matrix Controller
IHMPC	Infinite Horizon Model Predictive Control
LDMC	Linear Dynamic Matrix Controller
LMI	Linear Matrix Inequality
MIMO	Multi-Input Multi-Output
MPC	Model Predictive Control
NLP	Non Linear Programming
OP	Sinal de saída do controlador ou Output
OPOM	Output Prediction Oriented Model
PID	Controlador Proporcional + Integral + Derivativo
PV	Variável de processo ou Process Variable
RIHMPC	Robust Infinite Horizon Model Predictive Control
RPBC	Refinaria Presidente Bernardes de Cubatão
SISO	Single-Input Single-Output
SP	Valor de referência ou Set-point

RESUMO

Colunas de destilação de alta pureza são sistemas de difícil controle. Apresentam longo tempo de resposta, comportamento altamente não linear e grande interação entre as variáveis. Os controladores preditivos são muito utilizados para o controle de colunas de destilação. Porém, em colunas de alta pureza, a incorporação de um único modelo linear geralmente acarreta em um controle de fraco desempenho. Isto pois, a representação do processo é deficiente, já que não considera variações nos ganhos e nas dinâmicas, típicas de um comportamento não linear. Estas incertezas podem, inclusive, provocar a instabilidade do controle o que resultaria em produtos que não atendam à especificação. Este trabalho tem por objetivo avaliar o desempenho dos controladores de horizonte de predição infinito com um modelo interno e com múltiplos modelos tendo o HYSYS™ como simulador de uma coluna de separação benzeno/tolueno e o MATLAB™ como ambiente para o controle supervisor. Observa-se que o controlador com apenas um modelo não é capaz de estabilizar o processo para perturbação nos valores de referência das variáveis controladas, ao contrário do controlador com múltiplos modelos.

ABSTRACT

High-purity distillation columns are systems which are typically difficult to control. The main reason for this is a strongly nonlinear and interactive system associated with a very sluggish response. Model Predictive Control is widely used for control of distillation columns. However, for high-purity columns, the use of a single linear model in the controller usually leads to a poor performance of the control system. The reason for this is the poor system representation, since variation in the system gains and time constants are not taken into account in the computation of the control law. Model uncertainties can produce instability in the control system and consequent deterioration of the product quality. The goal of this work is to evaluate the performance of infinite horizon MPC with a single internal model and with multiple models. HYSYS^(TM) is used as simulator for the benzene/toluene column, and MATLAB^(TM) is used as a platform for supervisory control. It is observed that the controller with a single model is not capable of stabilizing the process for disturbance in the set point of the controlled variables. Opposite to that behavior the controller with multiple models has a good performance.

1

INTRODUÇÃO

1.1 - Apresentação do problema de controle da coluna de benzeno

O benzeno é produzido na Refinaria Presidente Bernardes de Cubatão (RPBC), da PETROBRAS, por destilação de uma corrente intermediária rica em aromáticos. É utilizado como insumo em diversas indústrias químicas sendo, assim, necessário o fornecimento de produto de alta pureza, normalmente 99.9 %. Entretanto, não só o benzeno deve ser produzido com baixa contaminação. Os demais aromáticos também encontram mercado apenas como produtos de alta pureza. Com isso, a coluna de benzeno deve ser operada de modo a não só especificar a corrente de benzeno, como também a evitar a contaminação da corrente de fundo com este aromático.

Entretanto, colunas de alta pureza são sistemas de difícil controle. Isto pois, apresentam longo tempo de resposta, comportamento altamente não linear e grande interação entre as variáveis (Luyben e Fuentes, 1983). Estes problemas se agravam à medida em que produtos mais puros necessitam ser produzidos. Os controladores preditivos são muito utilizados para o controle de colunas de destilação na PETROBRAS (Almeida Neto et al., 1996); (Magalhães e Odloak, 1995). Porém, em colunas de alta pureza, a incorporação de um único modelo linear geralmente acarreta em um controle de fraco desempenho. Isto pois, a representação do processo é deficiente, já que não considera variações nos ganhos e nas dinâmicas, típicas de um comportamento não linear. Estas incertezas podem, inclusive, provocar a instabilidade do controle o que resultaria em produtos que não atendam à especificação.

A estratégia de controle existente na coluna de benzeno é multivariável, com controlador preditivo do tipo LDMC. Nesta estratégia são controladas duas variáveis, uma é o diferencial de temperatura na seção de retificação da coluna, e a outra é a relação L/V também da seção de retificação. Para tanto, são manipuladas a vazão de retirada de benzeno e a carga térmica do refeedor. Em virtude da dinâmica lenta

apresentada pelo processo, o modelo utilizado pelo controlador preditivo é truncado de modo a viabilizar a execução do algoritmo de controle. O controle supervisor é executado no computador de processo e o controle regulatório é executado no SDCCD (Sistema Digital de Controle Distribuído). Esta estratégia apresenta bom desempenho para pequenas perturbações porém, a mesma apresenta dificuldades para especificar a corrente de benzeno quanto ao teor de contaminantes não aromáticos.

O controlador a ser avaliado neste estudo é do tipo multivariável, preditivo e robusto. As variáveis controladas são as concentrações de contaminantes, na corrente de benzeno, não aromáticos e tolueno, e na corrente de fundo, o benzeno. Já as variáveis manipuladas são as vazões de retirada de topo, de retirada lateral e a carga térmica do refeedor.

1.2 - Revisão bibliográfica

As dificuldades inerentes ao controle simultâneo de composições em colunas de destilação motivam o desenvolvimento de diversas técnicas de controle. Mountziaris e Georgiou (1988) utilizam uma transformação não linear nas composições de topo e de fundo de modo a linearizar e a desacoplar as variáveis, que são controladas através de um algoritmo PID. Esta técnica foi aplicada em um simulador de coluna de separação metanol/água com concentração de impurezas da ordem de 0.1% molar. Lévine e Rouchon (1991) desenvolveram um algoritmo de controle não linear a partir de um modelo reduzido da coluna de destilação denominado modelo agregado não linear. O algoritmo foi implementado em uma depropanizadora industrial com o objetivo de estabilizar a perturbação na vazão de carga para a coluna.

Para a abordagem de controle preditivo, McDonald e McAvoy (1987) aplicam o controle por matriz dinâmica com ganho do modelo variável em função do ponto de operação. O controlador apresenta bom desempenho para perturbação na vazão de carga quando aplicado a uma coluna com concentração de impurezas da ordem de 2% molar porém, para outra coluna de menor concentração de impurezas, 0.6% molar, o controlador precisa de resintonia de acordo com a magnitude da perturbação. Georgiou et al. (1988) aplicam uma transformação logarítmica nas

composições de topo e de fundo e implementam o controle por matriz dinâmica denominado de NLDMC (“Nonlinear Dynamic Matrix Control”). O algoritmo mostra-se mais eficiente que um DMC convencional quando aplicado a uma coluna com concentração de impurezas da ordem de 0.1% molar. Entretanto, para colunas de alta pureza, isto é, concentração de impurezas na ordem de 0.001% molar (10 ppm), a dimensão da matriz dinâmica inviabiliza a aplicação do algoritmo. Cutler e Tran (1989) aplicam um DMC convencional com as composições linearizadas através da função logaritmo para uma coluna industrial de separação benzeno/tolueno. Entretanto, não são reportados dados sobre as concentrações dos produtos e tampouco quais testes foram efetuados. Patwardhan e Edgar (1993) aplicam um controlador preditivo sendo a predição fornecida por um modelo simplificado porém estático. O algoritmo é aplicado em um simulador de coluna com concentração de impurezas na ordem de 1% molar.

A técnica de controle preditivo ou MPC (“Model Predictive Control”) é uma estratégia de controle multivariável bastante difundida na indústria de processos. Esta técnica surgiu nos meados da década de 70, desenvolvida de forma independente por dois grupos, quando aplicações na indústria foram reportadas por Richalet et al. (1978) e por Cutler e Ramaker (1979). Desde então, esta técnica é utilizada em refinarias de petróleo e petroquímicas como método de controle para sistemas multivariáveis. Na PETROBRAS são reportadas aplicações de controle preditivo não só em colunas de destilação, como também em conversores de unidade de craqueamento catalítico (Moro e Odloak, 1995) e em unidades de coqueamento retardado (Carrapiço e Oliveira, 1998).

O MPC, basicamente, utiliza um modelo dinâmico do processo para prever o seu comportamento futuro. Esta predição é atualizada, ou corrigida, a cada iteração, com a medição das variáveis do processo. As ações de controle são calculadas de modo a minimizar a diferença entre a predição e a trajetória de referência. Uma vantagem significativa desta técnica é a incorporação de restrições de desigualdade, tanto para as variáveis controladas quanto para as manipuladas. Esta característica é particularmente interessante devido à forte interação entre as variáveis do processo.

Entretanto, a utilização de um único modelo linear, na síntese do controlador pode não ser suficiente para garantir um bom desempenho do controle. Isto pois, a não consideração de certas dinâmicas no modelo, ou mesmo variações nos parâmetros devido às diferentes condições operacionais, podem ocasionar a instabilidade do controle. Assim, controladores preditivos robustos possuem não só o objetivo de prover estabilidade, frente às incertezas da planta, mas também o de desempenho, frente às alterações de condições operacionais.

A formulação clássica do MPC utiliza como modelo do processo a resposta ao degrau. Entretanto, para processos lentos, ou mesmo com grande número de entradas e saídas, esta forma de representação pode não ser viável para aplicações industriais. Assim, uma formulação mais compacta foi desenvolvida por Odloak (1996), baseada na representação do modelo em variáveis de estado. Nesta representação, o modelo do processo é apresentado na forma de resposta ao degrau contínuo no tempo e os estados são parâmetros da trajetória da saída. Ao se trabalhar com o modelo na forma analítica e contínua no tempo, pode-se facilmente calcular a saída em qualquer instante futuro e, também, integrar analiticamente o erro da trajetória. Esta facilidade para integrar a saída do modelo, permite estender o horizonte de predição ao infinito e, com isso, garantir a estabilidade do controlador.

A estabilidade nominal de um MPC pode ser avaliada a partir de duas abordagens. A primeira considera o horizonte de predição e o de controle finitos. Para esta abordagem, Michalska e Mayne (1993) desenvolveram um controlador dual onde, no primeiro modo, os estados do sistema são conduzidos, ao fim do horizonte de predição, para o interior de uma região positivamente invariante. Atingida esta região, o controle passa a ser efetuado por um outro controlador, linear ou não, e que apresenta estabilidade garantida. Esta técnica apresenta como inconvenientes o grande esforço computacional para o cálculo da região invariante e do horizonte ótimo e não contempla a possibilidade de saturação nas manipuladas.

A segunda abordagem considera o horizonte de predição infinito e o de controle finito. A técnica apresentada em Rawlings e Muske (1993) modifica a função objetivo com inclusão de termo quadrático de ponderação do estado ao fim do

horizonte de controle. Este termo é denominado custo final. Assim, o horizonte de predição é transformado em valor finito e a estabilidade é garantida com a inclusão de uma matriz peso ao custo final. É aplicável em sistemas estáveis em malha aberta e com restrições nas entradas e saídas. O inconveniente desta técnica é o grande esforço computacional para o cálculo da matriz peso. Ainda para esta abordagem, Rodrigues e Odloak (2000b), utilizando a representação do modelo em variáveis de estado, descrevem o erro ao longo do horizonte de predição como uma função analítica contínua no tempo. A função objetivo, então, pode ser reescrita, com uma parte contínua e outra discreta. A parte contínua é integrada no intervalo entre o final do horizonte de controle e o infinito o que dá origem à condição de estabilidade. O controlador pode ser formulado como um problema de programação quadrático e resolvido com pequeno esforço computacional. É válido para sistemas estáveis ou instáveis em malha aberta e com restrições nas entradas e nas saídas.

A estabilidade robusta do MPC considera na sua formulação as incertezas da modelagem. Estas incertezas podem ser representadas de duas formas. Como múltiplos modelos, onde se considera um conjunto de modelos lineares possíveis de representar a planta e como um politopo, onde a região de variação da planta é obtida a partir do fechamento convexo de um conjunto de modelos lineares.

Lee e Yu (1997) desenvolveram um algoritmo de controle do tipo “min-max” onde as ações de controle são calculadas para minimizar a função objetivo para o pior caso. Esta formulação permite incorporar restrições variantes e invariantes no tempo porém, apresenta um grande esforço computacional para a sua solução. Badgwell (1997a) desenvolveu um MPC com estabilidade robusta garantida para sistemas lineares estáveis em malha aberta. Para este caso, a incerteza da modelagem é representada como múltiplos modelos. Para tal, os custos obtidos para cada modelo são forçados para que permaneçam constantes ou decresçam ao longo do tempo. Entretanto, esta técnica é restrita aos sistemas cujo erro tende para zero no infinito. A formulação de Rodrigues e Odloak (2001), apoiada na forma analítica do erro, é baseada em um algoritmo de controle do tipo “min-max” onde a restrição de

estabilidade é transformada em uma desigualdade e resolvido por LMI. É aplicável em sistemas estáveis em malha aberta e com restrições nas variáveis.

1.3 - Objetivo do trabalho

Este trabalho tem por objetivo avaliar o desempenho dos controladores de horizonte de predição infinito com um modelo interno – IHMPC – e com múltiplos modelos – RIHMPC –, ambos desenvolvidos por Rodrigues e Odloak (2001), frente a um processo de dinâmica lenta e não linear, como o da coluna de benzeno da unidade de recuperação de aromáticos da Refinaria Presidente Bernardes de Cubatão. Para tanto, utiliza-se o procedimento desenvolvido por Almeida Neto (1999) para análise de MPC, tendo o HYSYS™ como simulador de processos e o MATLAB™ como ambiente para o controle supervisório.

1.4 - Organização do trabalho

Este trabalho está dividido em nove capítulos.

O capítulo um apresentou o problema de controle a ser estudado, a revisão bibliográfica e o objetivo deste estudo.

No capítulo dois descreve-se o problema de controle da coluna de benzeno, apresentando-se as variáveis envolvidas e os objetivos operacionais a serem atingidos.

No capítulo três apresentam-se as etapas para a construção do modelo estático da coluna de benzeno e definem-se as condições operacionais.

No capítulo quatro apresentam-se as etapas para a construção do modelo dinâmico da coluna em estudo e a integração entre o simulador e o controle supervisório.

No capítulo cinco apresenta-se o comportamento estático do processo baseado no comportamento do ganho estático das variáveis controladas.

No capítulo seis apresentam-se o modelo do processo na forma de variáveis de estado e orientado à predição da saída e a identificação do sistema na forma de resposta ao degrau analítica.

No capítulo sete descrevem-se os algoritmos de controle utilizados, nas versões com um modelo interno e com múltiplos modelos.

No capítulo oito apresentam-se os resultados das simulações dos controladores quando aplicados a um modelo linear e quando aplicados a um modelo rigoroso da coluna de benzeno.

Finalmente, no capítulo nove apresentam-se as conclusões e as sugestões para novos estudos.

Inclui-se, também, o apêndice A, com a representação dos modelos identificados na forma de resposta analítica ao degrau unitário, o apêndice B, com a representação dos modelos identificados na forma de função de transferência e o apêndice C, com a apresentação do complemento de Schur.

2

PROBLEMA DE CONTROLE DA COLUNA DE BENZENO**2.1 - Introdução**

Os aromáticos são produzidos na Refinaria Presidente Bernardes de Cubatão a partir da reforma catalítica da nafta aromática isto é, nafta formadora de aromáticos. Esta corrente, oriunda da unidade de destilação atmosférica, é composta por hidrocarbonetos na faixa de C_5 - C_8 onde os mais importantes são os cíclicos saturados, denominados naftênicos.

Após a conversão da nafta aromática, o produto resultante, reformado, é encaminhado para tanque de armazenamento e, em seguida, para a seção de extração. Os aromáticos são separados por ação do tetra-etileno-glicol e seguem para a seção de fracionamento através de tanque em operação pulmão. Nesta última, após tratamento em colunas de argila, para remoção das olefinas, são separados por sucessivas destilações em benzeno, tolueno e xilenos.

O benzeno é utilizado na fabricação do estireno e na indústria de tintas e vernizes. Já o tolueno e os xilenos encontram um forte mercado como solventes. Estes mercados possuem em comum uma demanda por aromáticos de alta pureza, o que se reflete em especificações cada vez mais restritas para a indústria fornecedora destas matérias primas.

O esquema de produção é ilustrado na figura 2.1.

Figura 2.1 – Esquema de produção de aromáticos na RPBC

2.2 - Especificações dos produtos

Normalmente as especificações são definidas de acordo com a utilização do produto ou necessidade do cliente. Entretanto, são sempre rígidas por estabelecerem pequena quantidade de contaminante, seja no benzeno ou no produto de fundo, para não comprometer a qualidade do tolueno.

2.2.1 - Especificações do benzeno

Das especificações do benzeno, as que mais se destacam são os teores de contaminantes, principalmente tolueno e não aromáticos. A tabela 2.1 apresenta um conjunto típico para o benzeno.

Tabela 2.1 – Especificações do benzeno

Característica	Unidade	Valor
Teor de benzeno	% massa – mín.	99.9
Teor de tolueno	ppm - máximo	100
Teor de xilenos		isento
Teor de não aromáticos	% massa – máx.	0.04
Densidade a 20°C	ton/m ³	0.865 @ 0.870
Faixa de destilação ASTM D-850 (incluindo 80,1°C)	°C - máximo	1.0

2.2.2 - Especificações do tolueno

Das especificações do tolueno, o teor de benzeno é função do desempenho da coluna de benzeno. A tabela 2.2 apresenta um conjunto típico de especificações para o tolueno.

Tabela 2.2 – Especificações do tolueno

Característica	Unidade	Valor
Teor de tolueno	% massa – mín.	99.5
Teor de benzeno	ppm - máximo	100
Teor de xilenos	% massa – máx.	0.2
Teor de não aromáticos	% massa – máx.	0.04
Densidade a 20°C	ton/m ³	0.878 @ 0.882
Faixa de destilação ASTM D-850 (incluindo 110,6 °C)	°C - máximo	1.0

2.3 - Descrição do processo

A coluna de benzeno estudada pertence à seção de fracionamento da unidade de recuperação de aromáticos da RPBC. A figura 2.2 apresenta o fluxograma de processo para esta coluna. A carga desta seção, oriunda de tanque em operação pulmão, é bombeada, sob controle de vazão, para o tratamento nas colunas de argila para a remoção das olefinas.

Após este tratamento, esta corrente é pré-aquecida no P-01, cujo fluido de aquecimento é vapor d'água, e com controle de temperatura TC-01, para rejeitar a perturbação causada por variação climática. A coluna de benzeno T-01 é composta por sessenta e dois estágios ideais, com uma altura total de 26,5 metros. A carga é admitida no estágio 30, numerado de cima para baixo.

A pressão da coluna é controlada através do PC-01 que, atuando em “split-range”, admite gás inerte, nitrogênio, ou alivia o gás acumulado no vaso de topo, V-01, para a rede de tocha. O vapor de topo é totalmente condensado e subresfriado no P-02, onde água é usada como refrigerante, pelo controlador de temperatura, TC-02, e enviado para o vaso de topo (V-01). Neste vaso, o refluxo de topo retorna à coluna sob controle em cascata do nível do V-01 com sua vazão, LC-01 x FC-03, e o produto de topo retorna para a seção de extração através do controlador de vazão FC-01. O produto de topo, rico em benzeno, porém contaminado com não aromáticos, é denominado de reciclo por retornar para a seção de extração, onde os não aromáticos podem ser recuperados.

A corrente rica em benzeno, chamada de benzeno, é obtida como retirada lateral da coluna no estágio 5 e bombeada sob controle de vazão, FC-02, para armazenamento.

A energia necessária para a separação é fornecida pelo refeedor P-03, cujo meio de aquecimento é vapor d'água, sob controle do QC-01. O produto de fundo, tolueno mais xilenos, denominado de TXil, é encaminhado para as colunas de tolueno sob controle de nível em cascata com a vazão de fundo, LC-02 x FC-04.

Figura 2.2 – Fluxograma de processo da coluna de benzeno

2.4 - Variáveis de processo

A qualidade dos produtos, sob aspecto operacional, é dependente das seguintes variáveis:

- Vazão da carga da coluna;
- Temperatura da carga da coluna;
- Composição da carga da coluna;
- Pressão da coluna;
- Temperatura do refluxo;
- Vazão do reciclo;
- Vazão do refluxo;
- Vazão do benzeno;
- Carga térmica do refeedor.

2.4.1 - Vazão da carga da coluna

Esta variável, apesar de manipulável pelo operador, é mantida constante e no máximo permitido, definido pela capacidade de fracionamento. Para um esquema de produção mais flexível, constitui-se em potencial perturbação.

2.4.2 - Temperatura da carga da coluna

Esta variável, apesar de disponível para o operador, também é mantida constante. Sua principal finalidade é evitar perturbação para a coluna devido à variação na condição ambiente, em particular a ocorrência de chuva.

2.4.3 - Composição da carga da coluna

É perturbação importante para a coluna pois, o teor de naftênicos na nafta aromática varia, mesmo para pequenas variações no ponto final de ebulição daquele corte. Assim, a carga para o fracionamento pode ficar mais rica em xilenos, por exemplo.

2.4.4 - Pressão da coluna

Variável importante em qualquer processo de destilação, seu comportamento é estável na coluna estudada, o que leva à hipótese de que essa variável possa ser considerada como constante, só devendo ser alterada quando o resultado desejado não puder ser obtido pela manipulação de outras variáveis.

Um aumento na pressão da coluna provoca um aumento de dificuldade no fracionamento. Esta dificuldade pode ser superada com aumento da carga térmica do refeedor.

2.4.5 - Temperatura do refluxo

Presente no controle regulatório da coluna, é usada indiretamente para limitar a temperatura de saída do fluido refrigerante.

2.4.6 - Vazão do reciclo

O produto de topo, ou reciclo, retira os compostos não aromáticos da coluna. Entretanto, por ser uma corrente rica em benzeno, sua vazão deve ser limitada de modo a minimizar a perda do componente benzeno.

2.4.7 - Vazão do refluxo

Em virtude da coluna operar em regime de alta razão de refluxo, esta variável é utilizada no controle de nível do vaso de topo. Assim, não está disponível como manipulada seja para o operador, como também para o controlador.

2.4.8 - Vazão do benzeno

A retirada lateral, ou benzeno, possibilita a obtenção de uma corrente rica em benzeno em uma região de menor concentração de contaminantes. É variável importante para a especificação desta corrente devido à participação direta na relação líquido-vapor, L/V , da região de retificação.

2.4.9 – Carga térmica do refeedor

A carga térmica do refeedor, ou a vazão do fluido de aquecimento do mesmo, contribui diretamente para o fracionamento da carga. Por agir diretamente no L/V da região de esgotamento, é variável importante para manter o produto de fundo com reduzida concentração de benzeno.

2.5 - Limitações do processo

Considerando que a vazão de carga é limitada pela capacidade de fracionamento da coluna, não existem limitações físicas para a especificação dos produtos.

Assim, as restrições para esta coluna são a pureza desejada, isto é, a especificação dos produtos, e a minimização da perda de benzeno na corrente de reciclo.

2.6 - Estratégias de controle da coluna de benzeno

A seleção da estrutura de controle consiste em identificar as variáveis controladas, manipuladas e perturbadoras e a estratégia utilizada para relacioná-las.

Conseqüentemente, a avaliação dos graus de liberdade do sistema é importante para a definição do número de variáveis que podem ser independentemente especificadas. Para esta coluna de benzeno, com três retiradas, condensador total porém com sub-resfriamento, acúmulo de vapor desprezível nos estágios, e considerando que são conhecidas as composição, vazão, pressão e temperatura da carga e a pressão ao longo da coluna, o número de graus de liberdade é sete, ou seja, sete relações de controle podem ser incorporadas.

Um conjunto de relações de controle para esta coluna é dado por:

- Pressão de topo agindo na vazão de inerte;
- Nível do vaso de topo em cascata com a vazão de refluxo;
- Temperatura do refluxo agindo na vazão de refrigerante;
- Vazão de reciclo definida;
- Vazão de benzeno definida;
- Nível do fundo da coluna em cascata com a vazão de TXil;
- Carga térmica do refeedor agindo na vazão de fluido de aquecimento.

Entretanto, devido à necessidade em controlar a qualidade da retirada lateral e do produto de fundo, algumas destas relações devem ser substituídas pelas especificações de qualidade. A boa prática recomenda que a pressão e a temperatura do refluxo e os níveis de topo e fundo, sejam mantidos fixos. Com isso, apenas três

qualidades podem ser especificadas. Normalmente são especificados os contaminantes, por serem de análise mais precisa. Assim, as qualidades controladas são o teor de não aromáticos e o teor de tolueno na retirada lateral e o teor de benzeno no produto de fundo, que substituem as vazões de reciclo e de benzeno e a carga térmica do refeedor. Em virtude da forte interação entre estas variáveis, normalmente são utilizadas estratégias de controle multivariável para garantir a qualidade dos produtos.

Quanto à perturbação para a coluna, esta ocorre na carga, principalmente na variação da sua composição.

2.6.1 - Estratégia vazão de benzeno - carga térmica do refeedor

A estratégia de controle atualmente empregada na coluna de benzeno é multivariável, com controlador preditivo do tipo LDMC. Nesta estratégia, apenas duas variáveis são controladas, o diferencial de temperatura entre os estágios 21 e 5 e a relação molar L/V no estágio 5, retirada lateral de benzeno. Estas variáveis substituem a vazão de benzeno e a carga térmica do refeedor. Assim:

Variáveis manipuladas:

- Vazão de benzeno;
- Carga térmica para o refeedor.

Variáveis controladas:

- Delta de temperatura entre os estágios 21 e 5;
- L/V no estágio 5.

Nesta configuração, a vazão de benzeno é usada para o controle do delta de temperatura, e a carga térmica do refeedor é utilizada para o controle do L/V . Esta estratégia tem mostrado um bom desempenho, principalmente para rejeitar pequenas perturbações no balanço térmico, especificando a corrente de benzeno quanto ao contaminante tolueno.

Entretanto, a mesma não possibilita a especificação daquela corrente quanto ao teor de não aromáticos, o qual é executado no nível regulatório através da ação do operador no controlador de vazão do reciclo.

Esta estratégia não será objeto deste estudo.

2.6.2 – Estratégia vazão de reciclo - vazão de benzeno - carga térmica do refeedor

A estratégia a ser avaliada compreende:

Variáveis manipuladas:

- Vazão de reciclo;
- Vazão de benzeno;
- Carga térmica para o refeedor.

Variáveis controladas:

- Teor de não aromáticos (NA) no benzeno;
- Teor de tolueno (T) no benzeno;
- Teor de benzeno (B) no TXil.

3

SIMULAÇÃO ESTÁTICA DA COLUNA DE BENZENO***3.1 – Introdução***

A análise de um processo químico envolve a representação matemática dos fenômenos físico-químicos pertinentes. Neste sentido, os simuladores constituem-se em importante ferramenta para o engenheiro químico. Atualmente, com a alta capacidade de cálculo, interface gráfica e baixo custo, os programas de simulação são amplamente difundidos tanto na análise, como no projeto e treinamento nos processos químicos.

O simulador utilizado neste trabalho é o HYSYS™, da Hyprotech, na sua versão 1.2.4. Este programa de simulação é utilizado na PETROBRAS tanto para a atividade de análise quanto para a de projeto. Dentre as suas características pode-se destacar:

- Ambiente Windows™;
- Serviço DDE para transferência dinâmica de dados entre programas, por exemplo MATLAB™;
- Operação modular;
- Algoritmo de solução não seqüencial.

Para a simulação de uma coluna de destilação, o método de solução utilizado é do tipo "inside-out". Este algoritmo, iterativo, é largamente utilizado devido à sua robustez e aplicação para vários tipos de fracionamento. Foi desenvolvido por Boston e Sullivan (1974) apud Kister (1992) e consiste em utilizar equações simples para o cálculo da constante de equilíbrio e da entalpia, para resolver as equações de balanços de massa e de energia e de equilíbrio na iteração interna, e, após, atualizar o cálculo da constante de equilíbrio e da entalpia em uma iteração externa. Os critérios para convergência na iteração interna são os erros no balanço de energia e nas especificações, e na iteração externa é o erro na fração molar da fase vapor.

3.2 – Etapas da construção do modelo estático

Os seguintes aspectos devem ser verificados quando da elaboração do modelo estático a ser estudado:

- Definição da base da simulação;
- Caracterização da carga do sistema;
- Definição das operações unitárias envolvidas no processo;
- Especificação dos graus de liberdade do sistema;
- Validação do modelo estático;
- Definição dos estudos da simulação estática.

3.2.1 – Definição da base da simulação

Inicialmente define-se a base da simulação, isto é, o conjunto de equações para os cálculos de equilíbrio, propriedades físico-químicas e termodinâmicas, e o conjunto de componentes químicos que serão utilizados.

Na definição do modelo de propriedades das substâncias envolvidas no sistema em estudo, especificamos a natureza química dos componentes químicos da simulação. Para este caso, os hidrocarbonetos são apolares e o modelo termodinâmico pode ser representado por equações de estado. O modelo desenvolvido por Peng e Robinson (1976), baseado na equação de Van der Waals, prevê com boa precisão as propriedades para estes hidrocarbonetos, em particular para o equilíbrio líquido-vapor entre o benzeno e o tolueno, quando comparadas com dados experimentais.

Com o modelo de propriedades das substâncias envolvidas na simulação definido, os componentes devem, então, ser listados. Neste caso, os mesmos foram caracterizados através de cromatografia e estão listados na tabela 3.1

Tabela 3.1 – Componentes puros considerados

Componente	Símbolo	Fórmula	Ponto de ebulição (°C)	Massa molecular
ciclo pentano	cC_5	C ₅ H ₁₀	49.3	70.1
metil ciclo pentano	mcC_5	C ₆ H ₁₂	71.8	84.2
ciclo hexano	cC_6	C ₆ H ₁₂	80.7	84.2
3 metil hexano	$3mC_6$	C ₇ H ₁₆	91.9	100.2
233 trimetil pentano	$233tmC_5$	C ₈ H ₁₈	114.8	114.2
metil ciclo hexano	mcC_6	C ₇ H ₁₄	100.9	98.2
octano	C_8	C ₈ H ₁₈	125.7	114.2
3 metil octano	$3mC_8$	C ₉ H ₂₀	144.2	128.3
ciclo decano	cC_{10}	C ₁₀ H ₂₀	202.2	140.3
benzeno	Bz	C ₆ H ₆	80.1	78.1
tolueno	Tol	C ₇ H ₈	110.7	92.1
etil benzeno	eBz	C ₈ H ₁₀	136.2	106.2
orto xileno	$oXil$	C ₈ H ₁₀	144.4	106.2
meta xileno	$mXil$	C ₈ H ₁₀	139.2	106.2
para xileno	$pXil$	C ₈ H ₁₀	138.4	106.2
n-p benzeno	$npBz$	C ₉ H ₁₂	159.2	120.2
1 metil 3 etil benzeno	$1m3eBz$	C ₉ H ₁₂	161.3	120.2
124 trimetil benzeno	$124tmBz$	C ₉ H ₁₂	169.4	120.2
orto cumeno	$oCum$	C ₁₀ H ₁₄	178.2	134.2
n-b benzeno	$nbBz$	C ₁₀ H ₁₄	183.3	134.2
12 dietil benzeno	$12deBz$	C ₁₀ H ₁₄	183.5	134.2

A comparação dos dados de equilíbrio do par benzeno/tolueno entre o simulador e valores experimentais pode ser visualizada na figura 3.1. Os dados experimentais foram obtidos para pressão de 760 mmHg, conforme a publicação do Deutsche Gesellschaft für Chemisches Apparatewesen (DECHEMA - 1980).

Figura 3.1 – VLE benzeno x tolueno a 760 mmHg

3.2.2 – Caracterização da carga do sistema

Para este estudo, duas composições de carga foram avaliadas. Estas diferenças procuram retratar a variação de conversão na unidade de reforma catalítica devido à variação do ponto final da nafta aromática, e apresentam significativa variação no teor de benzeno. Entretanto, para completamente especificá-las, é necessário definir a vazão, a temperatura e a pressão, que neste caso são válidas para ambas as composições.

A partir de dados do projeto, a carga foi adotada nas seguintes condições:

Tabela 3.2 – Condições da carga

Corrente	Vazão	Temp.	Pressão
Carga	535.3 m ³ /d	87 °C	4.5 kg _f /cm ² _g

As duas composições da carga da coluna são explicitadas na tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Composição da carga

Componente	% vol. carga 1	K - estágio carga	% vol. carga 2	K - estágio carga
ciclo pentano	0.01	3.62	0.01	3.43
metil ciclo pentano	0.02	2.11	0.03	2.00
ciclo hexano	0.01	1.65	0.01	1.56
3 metil hexano	0.02	1.61	0.03	1.53
233 trimetil penta.	0.01	0.86	0.01	0.82
metil ciclo hexano	0.01	1.05	0.01	0.99
octano	0.01	0.75	0.01	0.71
3 metil octano	0.01	0.45	0.01	0.43
ciclo decano	0.02	0.05	0.03	0.04
n decano	0.01	0.22	0.01	0.21
benzeno	23.50	1.70	28.09	1.59
tolueno	47.76	0.77	56.36	0.72
etil benzeno	3.22	0.39	1.27	0.36
meta xileno	11.64	0.35	8.99	0.33
orto xileno	5.79	0.31	1.81	0.29
para xileno	4.84	0.36	1.51	0.33
n-p benzeno	0.13	0.21	0.07	0.19
1 metil 3 etil benz.	0.84	0.19	0.49	0.18
124 trimetil benz.	1.80	0.15	1.05	0.14
orto cumeno	0.08	0.14	0.05	0.13
n-b benzeno	0.02	0.10	0.01	0.10
12 dietil benzeno	0.25	0.11	0.14	0.11
Total	100.00		100.00	

Observando-se as constantes de equilíbrio, é possível antecipar a dificuldade para a separação do benzeno. A presença de componentes com constantes de equilíbrio entre o benzeno e o tolueno, chamados chaves distribuídos, e a proximidade das suas constantes, indicam a necessidade de vários estágios e de alta razão de refluxo.

3.2.3 – Definição das operações unitárias envolvidas no processo

Caracterizada a carga, o simulador oferece facilidades para a especificação das operações unitárias envolvidas bem como das correntes que as interligam. A figura 3.2 representa o fluxograma simplificado do processo simulado.

Figura 3.2 – Fluxograma de processo da simulação

Após aquecimento no trocador de calor P-01, a corrente de carga é introduzida no sistema a $92\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $4.0\text{ kg}_t/\text{cm}^2_g$. O trocador de calor é do tipo casco e tubo em contra-corrente, onde a corrente de carga é aquecida com vapor. A perda de carga adotada no casco é de $0.5\text{ kg}_t/\text{cm}^2_g$.

A carga aquecida é introduzida na coluna no estágio 30 da coluna.

A coluna possui sessenta e dois estágios ideais com pressão no topo de $0.41\text{ kg}_t/\text{cm}^2_g$ e no fundo de $0.70\text{ kg}_t/\text{cm}^2_g$.

O condensador é total, ou seja, os vapores do topo são condensados e subresfriados a $60\text{ }^{\circ}\text{C}$, não apresentando corrente gasosa como produto de topo. As correntes de saída do condensador são o reciclo (produto de topo) e o refluxo. A energia liberada na condensação (CT condensador) é de $1.6 \times 10^6\text{ kcal/h}$. Na condição de projeto a vazão do reciclo é de $7.4\text{ m}^3/\text{d}$ e a do refluxo de topo é de $406.1\text{ m}^3/\text{d}$.

A retirada lateral, rica em benzeno, é realizada no estágio cinco. Para esta corrente, a temperatura é de 92 °C e a vazão é de 118.7 m³/d. É importante caracterizar a contaminação por não aromáticos (NA). Neste estudo, de acordo com a simbologia da tabela 3.1, os NA são compostos por:

$$NA = cC_5 + mcC_5 + cC_6 + 3mC_6 + 233tmC_5 + mcC_6 + C_8 + 3mC_8 + cC_{10} \quad (3.1)$$

No fundo da coluna, a energia é transferida através de um refeedor do tipo termo-sifão, também aquecido por vapor d'água. O líquido do último estágio é dividido, e parte é introduzida no refeedor e a outra parte removida como produto de fundo. O líquido do último estágio é vaporizado a 138 °C através do calor cedido (CT refeedor) de 1.90x10⁶ kcal/h que corresponde a uma vazão de fluido de aquecimento de 3923 kg/h e a uma retirada de fundo de 409.1 m³/d.

A corrente líquida de produto de fundo não passa toda pelo refeedor. Entretanto, considerar que este líquido participa do equilíbrio não representa uma diferença perceptível em relação ao processo real. Portanto, esta é uma simplificação que não causa desvios significativos nos resultados da simulação.

3.2.4 – Especificação dos graus de liberdade para simulação do sistema

De modo a tornar o modelo do sistema unívoco em termos de condições operacionais, deve-se especificar os graus de liberdade do sistema. Para especificar a carga, define-se sua vazão, temperatura, pressão e composição. Ao passar pelo pré-aquecedor de carga, especifica-se a temperatura e a pressão de saída.

Conforme avaliado no item 2.6, e agora considerando apenas o estado estacionário, a coluna de benzeno apresenta cinco graus de liberdade. O módulo estático do HYSYS™ define a pressão e o grau de sub-resfriamento da coluna. Com isso, os três graus de liberdade restantes devem ser especificados conforme as variáveis manipuladas na estratégia de controle, isto é, a vazão de reciclo, a vazão de benzeno e a carga térmica do refeedor. Sendo a composição da carga correspondente à carga 1 da tabela 3.3, as especificações para o caso de projeto estão na tabela 3.4.

Tabela 3.4 – Especificações da simulação

Operação unitária	Especificação	Unidade	Valor
P-01	Temp. ent. casco	°C	87
	Temp. saída casco	°C	95
	Pressão ent. casco	kg _f /cm ² _g	4.5
	Pressão saída casco	kg _f /cm ² _g	4.0
T-01	Subresfriam. cond.	°C	60
	Vazão reciclo	m ³ /d	7.4
	Vazão benzeno	m ³ /d	118.7
	ΔP condensador	kg _f /cm ²	0.11
	Pressão topo	kg _f /cm ² _g	0.41
	Pressão fundo	kg _f /cm ² _g	0.70
	ΔP refeedor	kg _f /cm ²	0.00
	Carga térm. refeedor	MMkcal/h	1.90

3.2.5 – Comparação dos resultados do simulador com os dados de projeto

A comparação é efetuada nos seguintes itens:

- Balanço material;
- Qualidade dos produtos;
- Cargas térmicas do condensador e refeedor .

Na tabela 3.5 apresentamos os resultados do ajuste do modelo para o caso base, onde a composição de carga é a 1, isto é, a mais pobre em benzeno.

Tabela 3.5 – Resultados da simulação

Variável	Unidade	Valor projeto	Valor simulado
Vazão de carga	m ³ /d	535.27	535.27
Vazão de reciclo	m ³ /d	7.41	7.41
Vazão de benzeno	m ³ /d	118.74	118.72
Vazão de TXil	m ³ /d	409.14	409.14
Temperatura de topo	°C	91.0	91.4
Temp. de retirada benzeno	°C	92.0	91.9
Temperatura de fundo	°C	138.0	138.4
NA no benzeno	% m	0.182	0.183
Tolueno no benzeno	ppm	20	19
Benzeno no TXil	ppm	10	9
Carga térmica do condensador	MMkcal/h	1.605	1.579
Carga térmica do refeedor	MMkcal/h	1.904	1.896

A comparação mostra que o modelo está bem ajustado. A composição da retirada lateral, benzeno, e da corrente de fundo, TXil, estão coerentes principalmente em relação aos contaminantes, NA e tolueno, e benzeno, respectivamente.

O teor de NA no benzeno, apesar de elevado em ambos os casos, está compatível com a presença destes contaminantes na carga.

3.2.6 – Definição dos estudos da simulação estática

Após o ajuste da simulação estática, deve-se determinar a região de operação da coluna. Uma abordagem para esta avaliação, conforme descrito em Almeida Neto (1999), consiste em determinar esta região em função das suas variáveis manipuladas, sujeitas às restrições de operação, tais como qualidade dos produtos, hidráulica da coluna e outras. Naquela abordagem, as variáveis manipuladas são incrementadas, passo a passo, individualmente, e são descartados os casos que não atendam às restrições de operação.

Entretanto, neste caso da coluna de benzeno, este procedimento se mostra inviável, devido ao passo pequeno das variáveis manipuladas, o que acarretaria na execução de milhões de casos.

Assim, ao invés de variar as variáveis manipuladas, optou-se por variar as controladas, isto é, a concentração de NA e de tolueno no benzeno e a concentração de benzeno no TXil, reduzindo-se a quantidade de casos para apenas dois mil. Esta estratégia é possível devido à característica não seqüencial do simulador.

A restrição incorporada é a limitação na vazão de reciclo, necessária para reduzir a perda de benzeno por esta corrente.

As tabelas 3.6 e 3.7 apresentam os valores considerados.

Tabela 3.6 – Variáveis controladas

Variável independente	Unidade	Limite mín.	Limite máx.	Passo
Conc. NA no benzeno	% massa	0.175	0.195	0.0025
Conc. Tol. no benzeno	ppm	10	300	20
Conc. benzeno no TXil	ppm	10	300	20

Tabela 3.7 – Restrição do processo

Restrição	Unidade	Limite máx.
Vazão de reciclo	m ³ /d	12

A sensibilidade do processo em relação às variáveis manipuladas é avaliada nesta etapa, sendo utilizada para isto a avaliação dos ganhos estáticos do processo. Também, pode-se analisar o comportamento do processo verificando-se as não linearidades. Para esta etapa, as faixas das variáveis manipuladas foram definidas conforme a tabela 3.8, para a composição de carga 1, e tabela 3.9, para a composição de carga 2. Vale ressaltar, que estes valores correspondem a manter as variáveis controladas nas faixas especificadas conforme a tabela 3.6. O capítulo 5 apresenta a descrição do estudo de casos e o comportamento do processo analisado.

Tabela 3.8 – Variáveis manipuladas composição de carga 1

Variável manipulada	Unidade	Limite mín.	Limite máx.	Passo
Vazão de reciclo	m ³ /d	3.3	12.0	0.005
Vazão de benzeno	m ³ /d	114.0	122.8	0.005
Carga térmica referv.	MMkcal/h	1.77	1.93	0.0015

Tabela 3.9 – Variáveis manipuladas composição de carga 2

Variável manipulada	Unidade	Limite mín.	Limite máx.	Passo
Vazão de reciclo	m ³ /d	5.0	12.0	0.005
Vazão de benzeno	m ³ /d	138.5	145.6	0.005
Carga térmica referv.	MMkcal/h	1.96	2.15	0.0015

4

SIMULAÇÃO DINÂMICA DA COLUNA DE BENZENO

4.1 – Introdução

O conhecimento do processo obtido com a simulação estática mostra características importantes sobre o sistema em estudo, como por exemplo os ganhos estáticos. Porém, não revela como será o desempenho do mesmo ao se aplicar as relações de controle. Assim, para avaliar a estabilidade e a capacidade em atingir o valor de referência, é necessária a aplicação do sistema de controle ao modelo dinâmico do processo.

O simulador HYSYS™ integra, no mesmo ambiente, os módulos estático e dinâmico. Os pacotes de propriedades físicas são os mesmos e os modelos dinâmicos de equilíbrio e entalpia são semelhantes ao do módulo estático. Com isso, os resultados da simulação dinâmica são próximos aos da estática. Para este estudo, o método de integração utilizado foi o de Euler implícito, com passo variável, que apresentou boa estabilidade numérica para os problemas estudados.

4.2 – Etapas da construção do modelo dinâmico

De acordo com a sistemática do HYSYS™, a construção do modelo dinâmico se inicia com a obtenção do modelo estático. Em seguida, é necessário determinar os acúmulos nos estágios e dimensionar os elementos de controle. Para tanto, as seguintes etapas são realizadas:

- Definição da estratégia de controle para o processo;
- Definição das características dinâmicas das operações unitárias;
- Definição dos controladores e válvulas de controle do sistema.

4.2.1 – Definição da estratégia de controle

Com modelo estático definido, deve-se definir as variáveis manipuladas e controladas do esquema de controle do sistema. De acordo com o estabelecido no

item 2.6.2, a figura 4.1 apresenta a estratégia em estudo. Em virtude dos controles de pressão e de temperatura do refluxo apresentarem boa performance na planta, os mesmos não foram contemplados na simulação dinâmica.

Figura 4.1 – Estratégia de controle da coluna de benzeno

4.2.2 – Definição das características dinâmicas das operações unitárias

Em virtude das hipóteses de modelamento desprezarem o acúmulo de vapor, a dinâmica do sistema é dependente apenas do acúmulo na fase líquida. Assim, os dados geométricos dos equipamentos são apresentados na tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Dados geométricos dos equipamentos

Equipamento	Característica	Unidade	Valor
Coluna	Diâmetro da coluna	m	1.50
	Comprimento do vertedor	m	1.20
	Altura do vertedor	m	0.05
	Volume mínimo	m ³	0.09
	Tipo de bandeja	valvulada	
Condensador	Volume do condensador e do vaso	m ³	5.90
Refrervedor	Volume do refrervedor e do fundo da coluna	m ³	4.00

4.2.3 – Definição dos controladores e válvulas de controle do sistema

O simulador disponibiliza o algoritmo de controle PID na sua forma posicional conforme descrito na equação 4.1. Com isso, para especificar uma malha de controle regulatório, além dos parâmetros proporcional, integral e derivativo do controlador, é necessário definir a capacidade das válvulas de controle.

$$OP(t) = OP_{ss} + K_c E(t) + \frac{K_c}{\tau_i} \int E(t) dt + K_c \tau_d \frac{dE(t)}{dt} \quad (4.1)$$

sendo:

- $OP(t)$ - Saída do controlador no instante t
- OP_{ss} - Saída do controlador no estado estacionário inicial
- $E(t)$ - $E(t) = SP(t) - PV(t)$ Erro no instante t
- K_c - Ganho proporcional do controlador
- τ_i - Tempo integral do controlador
- τ_d - Tempo derivativo do controlador

As tabelas a seguir mostram os parâmetros dos controladores e das válvulas para a estratégia de controle adotada.

Tabela 4.2 – Parâmetros de configuração dos controladores

Malha	Variável controlada				Variável manipulada			
	Nome	Min.	Máx.	Unid.	Nome	Min.	Máx.	Unid.
LC-01	nível vaso topo	0	100	%	vaz. refluxo	0	750	m ³ /d
FC-01	vaz. reciclo	0	35	m ³ /d	válvula	0	100	%
FC-02	vaz. benzeno	0	200	m ³ /d	válvula	0	100	%
LC-02	nível da coluna	0	100	%	vaz. TXil	0	750	m ³ /d
QC-01	CT referv.	0	2.3	MMkcal/h	CT referv.	0	2.3	MMkcal/h

Tabela 4.3 – Parâmetros de sintonia dos controladores PID

Malha	Parâmetros de sintonia			Ação
	K_c	τ_I	τ_D	
LC-01	0.5	10.	0.0	Direta
FC-01	1.0	0.1	0.0	Reversa
FC-02	1.0	0.1	0.0	Reversa
LC-02	1.0	2.0	0.0	Direta
QC-01	0.5	1.0	0.0	Reversa

4.3 – Integração do simulador dinâmico com o controlador multi-variável

Através do serviço DDE do HYSYS™, é possível a troca de informações entre o ambiente de simulação e o MATLAB™. Com isso, pode-se utilizar o simulador como a planta de processo e uma rotina do MATLAB™ como algoritmo de controle. As variáveis trocadas são as PVs, variáveis de processo, os SPs, “set-points” ou valores de referência e as OPs, posição de válvulas. A programação desta interface, representada na figura 4.2, foi implementada por Almeida Neto (1999) e suas principais características são:

- HYSYS™ como módulo cliente;
- MATLAB™ como módulo servidor;

- Serviço síncrono para troca das variáveis, com período de amostragem configurável;
- Tempo de espera da comunicação também configurável;
- Execução de rotinas, ou comandos, no servidor a partir de solicitação do cliente.

Figura 4.2 – Mecanismo de comunicação HYSYSTM-MatlabTM (Almeida Neto, 1999)

Para este estudo, as variáveis que são enviadas para o MATLABTM são definidas na tabela 4.4 e as que são recebidas pelo HYSYSTM são apresentadas na tabela 4.5.

Tabela 4.4 – Variáveis enviadas para o MATLABTM

Objeto	Variável
FC-01	SP
FC-02	SP
QC-01	SP
NA no Benzeno	PV
T no Benzeno	PV
B no TXil	PV
NA no Benzeno – “set-point”	PV
T no Benzeno – “set-point”	PV
B no TXil – “set-point”	PV
Período de Amostragem (T)	PV

Tabela 4.5 – Variáveis recebidas pelo HYSYS™

Objeto	Variável
FC-01	SP
FC-02	SP
QC-01	SP

Os parâmetros de configuração da comunicação são apresentados na tabela 4.6.

Tabela 4.6 – Parâmetros da comunicação

Parâmetro	Valor
Tempo de amostragem	1 minuto
Tempo de espera	10 segundos

Em virtude do algoritmo de controle ser de execução lenta, o tempo de espera apresenta-se maior que no caso de Almeida Neto (1999), que foi de 5 segundos.

5

COMPORTAMENTO ESTÁTICO DA COLUNA DE BENZENO

5.1 – Introdução

O objetivo da coluna de benzeno é de não só especificar a corrente de benzeno, em relação aos seus principais contaminantes, mas também o de garantir que a corrente de fundo não seja contaminada por produtos leves, em particular o benzeno, cuja consequência seria a perda de especificação da corrente de tolueno.

5.2 – Região de operação

Devido às restrições, apresentadas nas tabelas 3.6 e 3.7, as variáveis manipuladas não poderão assumir valores quaisquer. Com isso, delimita-se um conjunto de valores para as mesmas, que é função da composição da carga em estudo, o que dá origem à região de operação do processo.

O conhecimento desta região permite restringir os valores das variáveis manipuladas nos algoritmos de controle, permitindo uma operação do sistema de controle mais adequada ao ambiente industrial.

As figuras a seguir destacam a região de operação para as duas composições de carga em estudo.

(a) – Vazão de reciclo x vazão de benzeno

(b) – Vazão de reciclo x carga térmica do refeedor

(c) – Vazão de benzeno x carga térmica do refeedor

Figura 5.1 – Região de operação das variáveis manipuladas

Observando-se a figura 5.1, percebe-se que a variação da composição da carga provoca um deslocamento na região de operação para os três pares de manipuladas. Além disso, o par vazão de reciclo x vazão de benzeno, apresenta uma faixa estreita de validade. Isto pois, apesar da grande variação relativa no valor das restrições, conforme tabela 3.6, as mesmas são pequenas em valores absolutos, devido à coluna especificar produtos de alta pureza.

5.3 – *Ganhos do processo*

Uma maneira eficiente para se observar o comportamento do processo é avaliar as curvas de ganhos do processo. Esses ganhos são calculados em vários pontos ao longo da região de operação, utilizando-se a variação entre as variáveis controladas e as variáveis manipuladas. Por exemplo, para a concentração de NA no benzeno em relação à vazão de reciclo:

$$Kp_{NA/rec,i} = (NA_i - NA_{i-1}) / (V.Rec_{.i} - V.Rec_{.i-1}) \quad (5.1)$$

sendo:

$Kp_{NA/rec,i}$ - ganho estático para conc.de NA em relação ao reciclo em unidade de engenharia.

NA - conc. de NA em %massa.

V.Rec. - vazão de reciclo em m³/d.

i - posição de avaliação do ganho.

Ao se calcular estes ganhos, as demais variáveis manipuladas devem ser mantidas constantes. Assim, optou-se por avaliá-los no entorno de pontos de operação, definidos pela variáveis controladas, conforme a tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Pontos de operação - controladas

Ponto de operação	NA no benzeno %m	T no benzeno ppm	B no TXil ppm
carga1/0.175/20/10	0.175	20	10
carga1/0.180/50/40	0.180	50	40
carga1/0.185/100/80	0.185	100	80
carga1/0.190/150/120	0.190	150	120
carga1/0.195/200/190	0.195	150	190
carga1/0.180/50/120	0.180	50	120
carga1/0.190/150/40	0.190	150	40
carga2/0.185/100/80	0.185	100	80
carga2/0.190/150/120	0.190	150	120
carga2/0.190/150/40	0.190	150	40
carga2/0.195/200/190	0.195	150	190

Para estes pontos de operação, as variáveis manipuladas correspondem aos seguintes valores:

Tabela 5.2 – Pontos de operação - manipuladas

Ponto de operação	Vazão do reciclo m³/d	Vazão benzeno m³/d	Carga térm. ref. MMkcal/h
carga1/0.175/20/10	11.56	114.57	1.889
carga1/0.180/50/40	9.97	116.16	1.819
carga1/0.185/100/80	8.36	117.76	1.794
carga1/0.190/150/120	6.60	119.50	1.784
carga1/0.195/200/190	4.99	121.09	1.778
carga1/0.180/50/120	9.78	116.31	1.806
carga1/0.190/150/40	6.79	119.35	1.799
carga2/0.185/100/80	12.10	138.58	1.99
carga2/0.190/150/120	9.74	140.93	1.978
carga2/0.190/150/40	9.96	140.74	1.993
carga2/0.195/200/190	7.54	143.11	1.970

Estes ganhos estão representados nas figuras 5.2 a 5.4, também para as duas composições de carga.

(a) – NA no benzeno

(b) – T no benzeno

(c) – B no TXil

Figura 5.2 – Ganhos das controladas em relação à vazão do produto de topo

(a) – NA no benzeno

(b) – T no benzeno

(c) – B no TXil

Figura 5.3 – Ganhos das controladas em relação à vazão de retirada de benzeno

(a) – NA no benzeno

(b) – T no benzeno

(c) – B no TXil

Figura 5.4 – Ganhos das controladas em relação à carga térmica do refervedor

Observando-se o comportamento do ganho da controlada NA, tanto em relação à vazão de reciclo quanto à vazão de benzeno, percebe-se uma forte variação nos seus valores tanto em torno do ponto de operação, quanto de um ponto de operação para outro. Para o comportamento em relação à carga térmica, o ganho varia razoavelmente porém, com exceção dos pontos 0.190/150/40, tanto para carga 1 como para carga 2, não apresenta grandes variações em relação ao ponto de operação.

Para as demais controladas, T no benzeno e B no TXil, em relação às vazões de reciclo e de benzeno, verifica-se que seus ganhos também variam fortemente com estas manipuladas. Quando se caminha para a região de maior pureza, os ganhos são pequenos. Em relação à carga térmica, a variação também é forte. Quando esta manipulada caminha para a região de maior pureza, os ganhos também são menores.

Assim, em virtude das variações de ganhos observadas, pode-se concluir que um controlador preditivo com apenas um modelo apresentará dificuldades quando for necessário mudar de ponto de operação, por exemplo, para passar de um ponto de menor pureza para outro de maior.

6

IDENTIFICAÇÃO DOS MODELOS DO SISTEMA**6.1 – Introdução**

Uma característica importante do controlador preditivo é a incorporação do conhecimento do processo através de modelo. Assim, o desempenho do controlador é dependente da qualidade deste, isto é, de quão bem o modelo representa o processo na sua região de operação. Esta representação, ou estrutura do modelo, deve considerar a forma mais apropriada para o algoritmo de controle utilizado.

Neste estudo, será utilizado modelo em espaço de estados, identificado a partir da resposta ao degrau nas variáveis manipuladas em diversos pontos da região de operação.

Esta formulação foi desenvolvida por Rodrigues e Odloak (2000b), sendo os estados parâmetros da trajetória de predição da saída, cuja denominação é Modelo Orientado à Predição da Saída, OPOM (“Output Prediction Oriented Model”). Este modelo é obtido a partir da resposta analítica ao degrau no domínio do tempo, conforme procedimento desenvolvido por Almeida Neto (1999).

6.2 – Formulação em espaço de estados via Modelo Orientado à Predição da Saída

A representação em espaço de estados é dada por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}_k + \mathbf{B}(k)\Delta\mathbf{u}_k, k = 1, 2, \dots \quad (6.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (6.2)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m_u}$ é o vetor de entradas, $\Delta\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}$ é o incremento nas entradas, k é o instante de tempo atual, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de saídas e $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n_y}$ é um vetor que relaciona ruídos de medição. $\mathbf{A}(k)$ é a matriz de transição

dos estados, $\mathbf{B}(k)$ é a matriz de distribuição das entradas e $\mathbf{C}(k)$ é a matriz das medidas, todas com dimensões apropriadas.

A formulação em espaço de estados via OPOM apresenta as seguintes características:

- A estrutura interna dos algoritmos de controle preditivo convencionais, que são baseados em modelos de resposta ao degrau (ou ao impulso finito) é preservada. Isto é conveniente, pois os engenheiros de controle que usualmente utilizam a estrutura convencional podem migrar suavemente para essa nova representação;
- Os parâmetros do modelo em espaço de estados são os mesmos que de um modelo de função de transferência, a saber: ganhos, constantes de tempo e tempos-mortos. Tal aspecto também é conveniente para quem tende a interpretar o comportamento dinâmico do sistema em termos destes parâmetros;
- Através desta representação em espaço de estados, pode-se calcular a predição da saída para qualquer instante futuro sem nenhum custo adicional. Por exemplo, pode-se prever a saída nos instantes $k + 1$, $k + 2$, $k + 3$, $k + 4$ e $k + 20$, onde o último instante de predição não é adjacente aos demais;
- O erro entre a predição da saída e o valor de referência pode ser integrado analiticamente. Isto significa que o horizonte de predição da saída pode ser estendido ao infinito sem qualquer esforço de cálculo adicional.

6.2.1 Modelo Orientado à Predição da Saída

Considere, inicialmente, um sistema SISO (uma entrada e uma saída) onde a relação entre a entrada u e a saída y é descrita pelo seguinte modelo de função de transferência, sem tempo morto, no domínio de Laplace:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_{nb} s^{nb}}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{na} s^{na}} \quad (6.3)$$

onde $\{na, nb \in \mathbb{N} \mid nb < na\}$.

Assumindo que o sistema possui pólos distintos, estáveis ou não, a resposta ao degrau unitário para qualquer instante de tempo t pode ser escrita da seguinte forma:

$$s(t) = c_0 + \sum_{l=1}^{na} [c_l] e^{\eta_l t} \quad (6.4)$$

onde η_l , $l = 1, 2, \dots, na$ são os pólos do sistema. Os coeficientes $c_0, c_1, \dots, c_{na}$ são obtidos por expansão em frações parciais da função de transferência do sistema. O coeficiente c_0 corresponde ao ganho de regime permanente para sistemas estáveis em malha aberta. Assim, propõe-se uma representação para a predição da saída, em variáveis de estado, de acordo com a formulação:

$$[y(t)]_k = [x_1]_k + \sum_{l=1}^{na} [x_{l+1}]_k e^{\eta_l t} \quad (6.5)$$

E os estados do sistema no instante $k+1$ são dados por:

$$[x_1]_{k+1} = [x_1]_k + c_0 \Delta u_k \quad (6.6)$$

$$[x_{l+1}]_{k+1} = e^{\eta_l T} [x_{l+1}]_k + c_l e^{\eta_l T} \Delta u_k, \quad l = 1, 2, \dots, na \quad (6.7)$$

De modo semelhante, pode-se considerar um sistema MIMO (múltiplas entradas e múltiplas saídas) com nu entradas e ny saídas dado pela seguinte matriz de funções de transferência:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{1,1}(s) & \cdots & G_{1,nu}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{ny,1}(s) & \cdots & G_{ny,nu}(s) \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

onde

$$G_{i,j}(s) = \frac{b_{i,j,0} + b_{i,j,1}s + b_{i,j,2}s^2 + \dots + b_{i,j,nb_{i,j}}s^{nb_{i,j}}}{a_{i,j,0} + a_{i,j,1}s + a_{i,j,2}s^2 + \dots + a_{i,j,na_{i,j}}s^{na_{i,j}}} \quad (6.9)$$

$G_{i,j}$ relaciona a entrada j e a saída i . A fim de simplificar a notação, assume-se que $na_{i,j} = na$, para todo o par (i,j) . Para este sistema, a predição da saída i no instante de tempo t pode ser escrita como:

$$[y_i(t)]_k = [x_i]_k + \sum_{j=1}^{nu} \sum_{l=1}^{na} [x_{(i-1).nu.na+(j-1).na+ny+l}]_k e^{f_{i,j,l}^T t}, \quad i = 1, \dots, ny \quad (6.10)$$

onde

$$[x_i]_{k+1} = [x_i]_k + \sum_{j=1}^{nu} c_{i,j,0} [\Delta u_j]_k \quad (6.11)$$

$$[x_{(i-1).nu.na+(j-1).na+ny+l}]_{k+1} = e^{f_{i,j,l}^T} [x_{(i-1).nu.na+(j-1).na+ny+l}]_k + c_{i,j,l} e^{f_{i,j,l}^T} [\Delta u_j]_k \quad (6.12)$$

$$i = 1, \dots, ny; \quad j = 1, \dots, nu; \quad l = 1, \dots, na.$$

Nota-se que para sistemas estáveis $\lim_{t \rightarrow \infty} [y_i(t)]_k = [x_i]_k$. Logo, é conveniente dividir o

vetor de estados em duas partes: $\mathbf{x}_m = [\mathbf{x}^s \quad \mathbf{x}^d]^T$ onde $\mathbf{x}^s = [x_1, \dots, x_{ny}]^T$, $\mathbf{x}^s \in \mathbb{R}^{ny}$,

que está relacionado ao valor da predição da saída no regime permanente e

$\mathbf{x}^d = [x_{ny+1} \quad x_{ny+2} \quad \dots \quad x_{ny+ny.nu.na}]^T$, $\mathbf{x}^d \in \mathbb{C}^{ny.nu.na}$, que está relacionado aos modos

dinâmicos do sistema. Após estas definições e usando notação vetorial, a equação (6.10) pode ser escrita da seguinte forma:

$$[\mathbf{y}_m(t)]_k = [\mathbf{x}^s]_k + \mathbf{\Psi}(t) [\mathbf{x}^d]_k \quad (6.13)$$

sendo

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_1(t) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}_2(t) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{\Phi}_{ny}(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Psi}(t) \in \mathbb{C}^{ny \times nd} \quad (6.14)$$

$$\mathbf{\Phi}_i(t) = [e^{f_{i,1,1}^T t} \quad \dots \quad e^{f_{i,1,na}^T t} \quad \dots \quad e^{f_{i,nu,1}^T t} \quad \dots \quad e^{f_{i,nu,na}^T t}], \quad i = 1, \dots, ny, \quad \mathbf{\Phi}_i \in \mathbb{C}^{nu.na} \quad (6.15)$$

$$e \quad nd = ny.nu.na$$

Analogamente, as equações (6.11) e (6.12) tornam-se:

$$[\mathbf{x}^s]_{k+1|k} = [\mathbf{x}^s]_{k|k} + \mathbf{C}_0 \Delta \mathbf{u}_k \quad (6.16)$$

$$[\mathbf{x}^d]_{k+1|k} = \mathbf{D}[\mathbf{x}^d]_{k|k} + \mathbf{C}_d \mathbf{D} \mathbf{N} \Delta \mathbf{u}_k \quad (6.17)$$

sendo

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} c_{1,1,0} & \cdots & c_{1,nu,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{ny,1,0} & \cdots & c_{ny,nu,0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_0 \in \mathbb{R}^{ny \times nu}$$

$$\mathbf{D} = \text{diag}(e^{\eta_{1,1,1}T} \cdots e^{\eta_{1,1,na}T} \cdots e^{\eta_{1,nu,1}T} \cdots e^{\eta_{1,nu,na}T} \cdots e^{\eta_{ny,1,1}T} \cdots e^{\eta_{ny,1,na}T} \cdots e^{\eta_{ny,nu,1}T} \cdots e^{\eta_{ny,nu,na}T})$$

$$\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{nd \times nd}$$

$$\mathbf{C}_d = \text{diag}(c_{1,1,1} \cdots c_{1,1,na} \cdots c_{1,nu,1} \cdots c_{1,nu,na} \cdots c_{ny,1,1} \cdots c_{ny,1,na} \cdots c_{ny,nu,1} \cdots c_{ny,nu,na})$$

$$\mathbf{C}_d \in \mathbb{C}^{nd \times nd}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{ny} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{nd \times nu} \quad \mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} na_{i,1} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Bmatrix} \\ na_{i,2} \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{Bmatrix} \\ \vdots \\ na_{i,nu} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Bmatrix} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_i \in \mathbb{R}^{nu.na \times nu}$$

Portanto, as equações do modelo (6.1) e (6.2) podem ser escritas como segue:

$$[\mathbf{x}_m]_{k+1|k} = \mathbf{A}_m [\mathbf{x}_m]_{k|k} + \mathbf{B}_m \Delta \mathbf{u}_k \quad (6.18)$$

$$[\mathbf{y}_m(t)]_{k|k} = \mathbf{C}_m(t)[\mathbf{x}_m]_{k|k} \quad (6.19)$$

sendo

$$\mathbf{x}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{x}^d \end{bmatrix}, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^{nx}; \mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_m \in \mathbb{R}^{nx \times nx}; \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 \\ \mathbf{C}_d \mathbf{D} \mathbf{N} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_m \in \mathbb{R}^{nx \times nu} \quad (6.20)$$

$$\mathbf{C}_m(t) = [\mathbf{I} \quad \Psi(t)], \mathbf{C}_m(t) \in \mathbb{R}^{ny \times nx} \text{ e } nx = ny + nu.na.ny \quad (6.21)$$

6.2.2 Correção do estado com a medição da planta

Designando a saída da planta real no instante de amostragem $k + 1$ por $[\mathbf{y}_p]_{k+1|k+1}$, $\mathbf{y}_p \in \mathbb{R}^{ny}$ e considerando que tal valor é medido neste instante e é consequência da ação de controle em k , então, a diferença entre a medida da planta e a saída do modelo é dada por:

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{K}_F \{ [\mathbf{y}_p]_{k+1|k+1} - \mathbf{C}_m[\mathbf{x}_m]_{k+1|k} \}$$

ou

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{K}_F \{ [\mathbf{y}_p]_{k+1|k+1} - \mathbf{C}_m[\mathbf{A}_m[\mathbf{x}_m]_{k|k} + \mathbf{B}_m\Delta\mathbf{u}_k] \} \quad (6.22)$$

sendo $\mathbf{K}_F$ um ganho estático e dependente do observador de estados usado. Para este estudo, este ganho é baseado no Filtro de Kalman, cuja formulação é dada por:

$$\mathbf{K}_F = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} & \mathbf{0}_{nd \times ny} \end{bmatrix}^T \quad (6.23)$$

Assim, o modelo de predição corrigido com a medida da planta:

$$[\mathbf{x}_m]_{k+1|k+1} = \mathbf{A}_m[\mathbf{x}_m]_{k|k} + \mathbf{B}_m\Delta\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_{k+1} \quad (6.24)$$

Ou, substituindo (6.22) em (6.24), o estado predito é dado por:

$$[\mathbf{x}_m]_{k+1|k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_F\mathbf{C}_m)\mathbf{A}_m[\mathbf{x}_m]_{k|k} + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_F\mathbf{C}_m)\mathbf{B}_m\Delta\mathbf{u}_k + \mathbf{K}_F[\mathbf{y}_p]_{k+1|k+1} \quad (6.25)$$

6.3 – Algoritmo de identificação com modelos na forma analítica

A identificação dos modelos do processo consiste na determinação dos parâmetros c_l e r_l $l = 1, 2, \dots, na$ da equação (6.4). Odloak (1996), apresenta um método para a identificação dos parâmetros que é exemplificado para um sistema de segunda ordem, isto é, na igual a dois.

A identificação do processo consiste das seguintes etapas:

1 – Assumir os valores iniciais para os parâmetros:

Considerando o modelo de segunda ordem, a predição da saída é dada por:

$$[y(t)]_k = [x_1]_k + [x_2]_k e^{\eta_1 t} + [x_3]_k e^{r_2 t} \quad (6.26)$$

sendo:

$$[x_1]_{k+1} = [x_1]_k + c_0 \Delta u_k \quad (6.27)$$

$$[x_2]_{k+1} = e^{\eta_1 T} [x_2]_k + c_1 e^{\eta_1 T} \Delta u_k \quad (6.28)$$

$$[x_3]_{k+1} = e^{r_2 T} [x_3]_k + c_2 e^{r_2 T} \Delta u_k \quad (6.29)$$

Os parâmetros a serem ajustados, para os quais deve-se assumir valores iniciais, são: c_1 , c_2 , r_1 e r_2 . Além disso, inicialmente assume-se que o processo esteja no estado estacionário, portanto:

$$[x_1]_1 = [y(t)]_1$$

$$[x_2]_1 = 0$$

$$[x_3]_1 = 0$$

2 – Calcular as predições da saída:

Nesta etapa calculam-se as predições da saída ao longo do horizonte de predição com os parâmetros calculados através das equações (6.26) a (6.29).

3 – Calcular o resíduo da predição através do critério quadrático:

$$ISE = \sum_{k=1}^{H_y} \gamma_k \left(\left[y_p \right]_k - \left[y \right]_k \right)^2 \quad (6.30)$$

γ_k - peso que pune o desvio no instante k

4 – Executar o procedimento de otimização dos parâmetros do modelo, formulando o problema da seguinte forma:

$$\min_{c_1, c_2, r_1, r_2} ISE$$

sujeita a:

$$-c_0 = c_1 + c_2 \quad (6.31)$$

A restrição apresentada pela equação (6.31) garante que o sistema seja estritamente próprio. Outras restrições podem ser incorporadas, o que permite adequar o modelo ao conhecimento prévio do processo. Os parâmetros c_l e r_l do modelo podem ser complexos e o parâmetro c_0 é um número real.

Como a predição da saída é uma função exponencial, deve-se utilizar um algoritmo de programação não linear.

No processo de identificação foram efetuados testes que consistiram na aplicação de degraus nas variáveis manipuladas individualmente. A escolha dos pontos de operação onde os testes foram executados levou em conta as faixas de ganhos do processo e a região de operação em que o controlador deverá operar.

6.4 – Modelos de processo identificados

Com o simulador dinâmico, foram efetuados testes de resposta ao degrau em cinco pontos da região de operação do sistema, todos para composição de carga 1. Devido à não linearidade do processo, foram efetuados degraus positivo e negativo nas

manipuladas e, conseqüentemente, dez modelos foram obtidos. Nas figuras a seguir, estes pontos foram assinalados de 1 a 10, que correspondem aos números dos modelos identificados, onde os números pares referem-se ao degrau negativo. Os pontos assim escolhidos, representam um conjunto típico de condições operacionais para a planta em estudo.

(a) – Vazão de reciclo x vazão de benzeno

(b) – Vazão de reciclo x carga térmica do referedor

(c) – Vazão de benzeno x carga térmica do referedor

Figura 6.1 – Região de operação do processo

As tabelas, a seguir, apresentam os valores das variáveis controladas e manipuladas para os pontos de operação.

Tabela 6.1 – Pontos de operação - controladas

Ponto de operação	NA no benzeno %m	T no benzeno ppm	B no TXil ppm
modelos 1 e 2	0.180	50	40
modelos 3 e 4	0.185	100	80
modelos 5 e 6	0.190	150	120
modelos 7 e 8	0.180	50	120
modelos 9 e 10	0.190	150	40

Tabela 6.2 – Pontos de operação - manipuladas

Ponto de operação	Vazão do reciclo m³/d	Vazão benzeno m³/d	Carga térm. ref. MMkcal/h
modelos 1 e 2	9.97	116.16	1.819
modelos 3 e 4	8.36	117.76	1.794
modelos 5 e 6	6.60	119.50	1.784
modelos 7 e 8	9.78	116.31	1.806
modelos 9 e 10	6.79	119.35	1.799

As figuras a seguir mostram o conjunto de modelos para a resposta ao degrau nas variáveis manipuladas.

(a) – NA no Benzeno

(b) – T no Benzeno

(c) – B no TXil

Figura 6.2 – Modelos de resposta ao degrau na vazão do produto de topo

(a) – NA no Benzeno

(b) – T no Benzeno

(c) – B no TXil

Figura 6.3 – Modelos de resposta ao degrau na vazão de retirada lateral de benzeno

(a) – NA no Benzeno

(b) – T no Benzeno

(c) – B no TXil

Figura 6.4 – Modelos de resposta ao degrau na carga térmica do refervedor

Observa-se que há modelos de comportamento muito distintos, com ganhos e dinâmicas bem diferentes. A variação do ganho pode ser de 3 vezes, como o caso do par NA no benzeno x vazão de reciclo, até 200 vezes, como o par B no TXil x vazão de reciclo. Com relação à dinâmica, observa-se que o tempo para estabilização pode ser de poucas horas, como é o caso da resposta ao degrau na carga térmica do refulvador, até dezenas de horas, quando o degrau é efetuado nas vazões das retiradas de topo e lateral. Entretanto, em todas as figuras, observa-se que o sistema responde mais rápido, e com menor ganho, quando a perturbação na variável manipulada é na direção de produtos mais puros.

Os modelos obtidos representam bem a região de operação. Entretanto, o par NA no benzeno x carga térmica do refulvador e B no TXil x carga térmica no refulvador não são bem representados pelo modelo identificado. As figuras 6.5 e 6.6 mostram a resposta do processo e do modelo identificado para os pontos de operação 1 e 3. O degrau na carga térmica é de 0.015 MMkcal/h. Percebe-se que um modelo linear não é capaz de representá-los adequadamente. Comportamento semelhante observou-se para os demais pontos de operação em relação a estes pares. Assim, em estudos futuros, é válida a utilização de outros tipos de modelos para esses pares. Entretanto, para este trabalho será avaliado o controle dessa coluna de benzeno através de conjunto de modelos lineares.

(a) – NA no Benzeno

(b) – B no TXil

Figura 6.5 – Resposta ao degrau x modelo 1 na carga térmica do refeedor

(a) – NA no Benzeno

(b) – B no TXil

Figura 6.6 – Resposta ao degrau x modelo 3 na carga térmica do refeedor

A apresentação dos modelos identificados, representados na forma de resposta ao degrau unitário analítica, está incluída no apêndice A. A representação dos modelos na forma de função de transferência é apresentada no apêndice B.

7

ALGORITMOS DE CONTROLE***7.1 – Introdução***

O controle preditivo (MPC) é uma estratégia de controle largamente utilizada nas refinarias da PETROBRAS. Isto pois, ela aborda de modo eficiente as fortes interações entre as variáveis controladas e manipuladas, comportamento típico dos processos de refino, e também permite a imposição de restrições naquelas variáveis e a inclusão de objetivos econômicos. O tratamento das restrições nas variáveis é importante nas implantações industriais do MPC devido às limitações, não só dos equipamentos, como também às impostas por condições de segurança operacional e de qualidade dos produtos. O MPC, basicamente, utiliza um modelo dinâmico do processo para prever o seu comportamento futuro. Esta predição é atualizada, ou corrigida, a cada iteração, com a medição das variáveis do processo. Entretanto, as várias condições operacionais do processo, ou mesmo a operação próxima a uma restrição, acarreta uma representação deficiente da planta por apenas um modelo. Conseqüentemente, o MPC que considera somente o modelo nominal pode apresentar um desempenho ruim ou até se tornar instável. Assim, é necessário que o controlador atenda, também, requisitos de estabilidade e de desempenho, levando em conta as incertezas na modelagem. Um controlador que atenda estes requisitos é chamado de robusto.

Neste trabalho é utilizado o controlador preditivo de horizonte infinito robusto, RIHMPC (“Robust Infinite Horizon Model Predictive Control”), desenvolvido por Rodrigues e Odloak (2001), que apresenta como principais características:

- Formulação em espaço de estados;
- Horizonte de predição infinito;
- Incerteza do modelamento na forma de múltiplos modelos;
- Restrições nas variáveis manipuladas.

A formulação do algoritmo é apresentada, inicialmente, na forma discreta no tempo. Esta formulação, embora mais usual na literatura, é de implantação mais trabalhosa devido à necessidade de solução de uma equação do tipo Lyapunov. Para contornar esta dificuldade é apresentada a formulação contínua no tempo, conforme o desenvolvimento apresentado por Rodrigues (2001). Em ambos os casos, por uma questão de clareza, será apresentado inicialmente o controlador de horizonte infinito para o caso nominal.

7.2 – MPC de horizonte infinito com predição em instantes discretos (IHMP-C-I)

Nessa formulação a predição da saída é apresentada em instantes discretos e baseada no OPOM, o que possibilita a obtenção de uma solução compacta para o problema de controle.

O modelo do processo, estável, sem tempo morto e com pólos simples é representado por:

$$[\mathbf{x}_m]_{k+1} = \mathbf{A}_m[\mathbf{x}_m]_k + \mathbf{B}_m \Delta \mathbf{u}_k \quad (6.18)$$

$$[\mathbf{y}_m]_k = \mathbf{C}_m(0)[\mathbf{x}_m]_k \quad (6.19)$$

tal que

$$\mathbf{x}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{x}^d \end{bmatrix}, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^{nx}; \mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_m \in \mathbb{R}^{nx \times nx}; \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 \\ \mathbf{C}_d \mathbf{D} \mathbf{N} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_m \in \mathbb{R}^{nx \times nu} \quad (6.20)$$

$$\mathbf{C}_m(0) = [\mathbf{I} \quad \Psi(0)], \mathbf{C}_m(0) \in \mathbb{R}^{ny \times nx} \text{ e } nx = ny + nu.na.ny \quad (6.21)$$

$$\Psi(0) = \begin{bmatrix} \Phi_1(0) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2(0) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \Phi_{ny}(0) \end{bmatrix} \quad \Psi(0) \in \mathbb{C}^{ny \times nd} \quad (6.14)$$

$$\Phi_i(0) = [1 \quad \overbrace{\dots}^{nu.na} \quad 1], i = 1, 2, \dots, ny \quad (6.15)$$

$$e \quad nd = ny.nu.na$$

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} c_{1,1,0} & \cdots & c_{1,nu,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{ny,1,0} & \cdots & c_{ny,nu,0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_0 \in \mathbb{R}^{ny \times nu}$$

$$\mathbf{D} = \text{diag}(e^{\eta_{1,1}T} \dots e^{\eta_{1,na}T} \dots e^{\eta_{1,nu,1}T} \dots e^{\eta_{1,nu,na}T} \dots e^{\eta_{ny,1}T} \dots e^{\eta_{ny,1,na}T} \dots e^{\eta_{ny,nu,1}T} \dots e^{\eta_{ny,nu,na}T})$$

$$\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{nd \times nd}$$

$$\mathbf{C}_d = \text{diag}(c_{1,1,1} \dots c_{1,1,na} \dots c_{1,nu,1} \dots c_{1,nu,na} \dots c_{ny,1,1} \dots c_{ny,1,na} \dots c_{ny,nu,1} \dots c_{ny,nu,na}) \quad \mathbf{C}_d \in \mathbb{C}^{nd \times nd}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{ny} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{nd \times nu} \quad \mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} na_{i,1} \begin{cases} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{cases} \\ na_{i,2} \begin{cases} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{cases} \\ \vdots \\ na_{i,nu} \begin{cases} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{cases} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_i \in \mathbb{R}^{nu.na \times nu}$$

O MPC de horizonte infinito e instantes de predição discretos minimiza a seguinte função objetivo, ou função custo:

$$J_{k(\infty, H_u)} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{e}_{k+i}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{k+i} + \sum_{j=0}^{H_u-1} \Delta \mathbf{u}_{k+j}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_{k+j} \quad (7.1)$$

sujeita a:

$$\Delta \mathbf{u}_{k+j} \in \mathbb{U}, \quad j \geq 0 \quad (7.2)$$

$$\mathbb{U} = \left\{ \Delta \mathbf{u}_{k+j} \left| \begin{array}{l} -\Delta \mathbf{u}^{\max} \leq \Delta \mathbf{u}_{k+j} \leq \Delta \mathbf{u}^{\max} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}^{\min} \leq \mathbf{u}_{k-1} + \sum_{i=0}^j \Delta \mathbf{u}_{k+i} \leq \mathbf{u}^{\max}; \quad j = 0, 1, \dots, H_u - 1 \\ \Delta \mathbf{u}_{k+j} = 0; \quad j \geq H_u \end{array} \right. \right\} \quad (7.3)$$

sendo H_u o horizonte de controle, $\mathbf{e}_{k+i} = \mathbf{y}_{k+i} - \mathbf{y}^{sp}$ o erro da predição em relação à referência ou “set-point”, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$ e $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{nu \times nu}$ são matrizes de ponderação.

Substituindo a equação do modelo (6.19) chega-se a:

$$J_{k(\infty, H_u)} = \sum_{i=0}^{H_u} \mathbf{e}_{k+i}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{k+i} + \sum_{i=H_u+1}^{\infty} (\mathbf{y}_{k+i} - \mathbf{y}^{sp})_k^T \mathbf{Q} (\mathbf{y}_{k+i} - \mathbf{y}^{sp})_k + \sum_{j=0}^{H_u-1} \Delta \mathbf{u}_{k+j}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_{k+j}$$

$$J_{k(\infty, H_u)} = \sum_{i=0}^{H_u} \mathbf{e}_{k+i}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{k+i} + \sum_{i=H_u+1}^{\infty} (\mathbf{C}_m(0)[\mathbf{x}_m]_{k+i} - \mathbf{y}^{sp})_k^T \mathbf{Q} (\mathbf{C}_m(0)[\mathbf{x}_m]_{k+i} - \mathbf{y}^{sp})_k + \sum_{j=0}^{H_u-1} \Delta \mathbf{u}_{k+j}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_{k+j}$$

Substituindo o estado $\mathbf{x}_m$ por seus componentes $\mathbf{x}^s$ e $\mathbf{x}^d$ e usando a formulação do modelo no segundo termo do lado direito da expressão acima

$$\begin{aligned} \sum_{i=H_u+1}^{\infty} (\mathbf{C}_m(0)[\mathbf{x}_m]_{k+i} - \mathbf{y}^{sp})_k^T \mathbf{Q} (\mathbf{C}_m(0)[\mathbf{x}_m]_{k+i} - \mathbf{y}^{sp})_k &= \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left([\mathbf{x}^s]_{k+H_u} - \mathbf{y}^{sp} + \mathbf{\Psi}(0) \mathbf{D}^j [\mathbf{x}^d]_{k+H_u} \right)^T \mathbf{Q} \left([\mathbf{x}^s]_{k+H_u} - \mathbf{y}^{sp} + \mathbf{\Psi}(0) \mathbf{D}^j [\mathbf{x}^d]_{k+H_u} \right) \end{aligned}$$

Como o termo $[\mathbf{x}^s]_{k+H_u} - \mathbf{y}^{sp}$ não depende de j e portanto é constante, a somatória só será limitada se

$$[\mathbf{x}^s]_{k+H_u} - \mathbf{y}^{sp} = 0 \quad (7.4)$$

Portanto na função objetivo do controlador o segundo termo do lado direito fica

$$\sum_{j=H_u+1}^{\infty} (\mathbf{y}_{k+j} - \mathbf{y}^{sp})^T \mathbf{Q} (\mathbf{y}_{k+j} - \mathbf{y}^{sp}) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbf{\Psi}(0) \mathbf{D}^j [\mathbf{x}^d]_{k+H_u} \right)^T \mathbf{Q} \left(\mathbf{\Psi}(0) \mathbf{D}^j [\mathbf{x}^d]_{k+H_u} \right)$$

Porém, como o sistema é admitido estável, então $\lim_{j \rightarrow \infty} D^j = 0$ e a somatória acima pode ser condensada em um único termo, ou seja:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\Psi(0) D^j [\mathbf{x}^d]_{k+H_u} \right)^T \mathbf{Q} \left(\Psi(0) D^j [\mathbf{x}^d]_{k+H_u} \right) = [\mathbf{x}^d]_{k+H_u}^T \bar{\mathbf{Q}} [\mathbf{x}^d]_{k+H_u}$$

onde $\bar{\mathbf{Q}}$ é tal que

$$\bar{\mathbf{Q}} - \mathbf{D}^T \Psi(0)^T \bar{\mathbf{Q}} \Psi(0) \mathbf{D} = \mathbf{D}^T \Psi(0)^T \mathbf{Q} \Psi(0) \mathbf{D} \quad (7.5)$$

A função objetivo definida em (7.1) pode então ser colocada na forma

$$J_{k(\infty, H_u)} = \sum_{j=0}^{H_u} \mathbf{e}_{k+j}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{k+j} + [\mathbf{x}^d]_{k+H_u}^T \bar{\mathbf{Q}} [\mathbf{x}^d]_{k+H_u} + \sum_{j=0}^{H_u-1} \Delta \mathbf{u}_{k+j}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_{k+j}$$

ou

$$J_{k(\infty, H_u)} = \sum_{j=0}^{H_u-1} \mathbf{e}_{k+j}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{k+j} + [\mathbf{x}^d]_{k+H_u}^T \tilde{\mathbf{Q}} [\mathbf{x}^d]_{k+H_u} + \sum_{j=0}^{H_u-1} \Delta \mathbf{u}_{k+j}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_{k+j} \quad (7.6)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{e} [\mathbf{x}^s]_{k+H_u} - \mathbf{y}^{sp} = 0.$$

Usando (7.4) para explicitar $\mathbf{e}_{k+H_u}$ em (7.6), a função objetivo pode ser escrita na forma:

$$J_{k(\infty, H_u)} = \sum_{j=0}^{H_u-1} \mathbf{e}_{k+j}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{k+j} + \mathbf{e}_{k+H_u}^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{e}_{k+H_u} + \sum_{j=0}^{H_u-1} \Delta \mathbf{u}_{k+j}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_{k+j} \quad (7.7)$$

Para desenvolver a expressão acima, a predição das saídas ao longo do horizonte de controle é dada por:

$$\mathbf{y}_{k+j} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Psi(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{x}^d \end{bmatrix}_{k+j} = [\mathbf{x}^s]_{k+j} + \Psi(0) [\mathbf{x}^d]_{k+j}$$

E, usando a equação (6.18) para o estado:

$$\mathbf{x}_{k+j}^s = \mathbf{x}_k^s + \mathbf{C}_0 \Delta \mathbf{u}_k + \dots + \mathbf{C}_0 \Delta \mathbf{u}_{k+j-1}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1}^s \\ \mathbf{x}_{k+2}^s \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{k+H_u}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^s \\ \mathbf{x}_k^s \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{C}_0 & \mathbf{C}_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_0 & \mathbf{C}_0 & \dots & \mathbf{C}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_k \\ \Delta \mathbf{u}_{k+1} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}_{k+H_u-1} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{I}} [\mathbf{x}^s]_k + \mathbf{C}_{0m} \Delta \mathbf{u} \quad (7.8)$$

onde

$$\bar{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} \\ \mathbf{I}_{ny} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{ny} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{I}} \in \mathbb{R}^{H_u \cdot ny \times ny}; \mathbf{C}_{0m} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{C}_0 & \mathbf{C}_0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_0 & \mathbf{C}_0 & \dots & \mathbf{C}_0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{0m} \in \mathbb{R}^{H_u \cdot ny \times H_u \cdot nu}$$

Analogamente pela Equação (6.18) temos

$$\mathbf{x}_{k+j}^d = \mathbf{D}^j \mathbf{x}_k^d + \mathbf{D}^{j-1} \mathbf{C}_d \mathbf{D} \mathbf{N} \Delta \mathbf{u}_k + \mathbf{D}^{j-2} \mathbf{C}_d \mathbf{D} \mathbf{N} \Delta \mathbf{u}_{k+1} + \dots + \mathbf{C}_d \mathbf{D} \mathbf{N} \Delta \mathbf{u}_{k+H_u-1}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1}^d \\ \mathbf{x}_{k+2}^d \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{k+H_u}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{D}^{H_u} \end{bmatrix} [\mathbf{x}^d]_k + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{nd} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{D}^2 & \mathbf{I}_{nd} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}^{H_u-1} & \mathbf{D}^{H_u-2} & \dots & \mathbf{I}_{nd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d \mathbf{D} \mathbf{N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_d \mathbf{D} \mathbf{N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_d \mathbf{D} \mathbf{N} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1}^d \\ \mathbf{x}_{k+2}^d \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{k+H_u}^d \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{D}} [\mathbf{x}^d]_k + \tilde{\mathbf{D}} \Delta \mathbf{u} \quad (7.9)$$

Assim, a função objetivo descrita em (7.7) pode ser colocada na seguinte forma:

$$J_{k(\infty, H_u)} = [\bar{\mathbf{e}}]^T \tilde{\mathbf{Q}} [\bar{\mathbf{e}}] + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{R}_1 \Delta \mathbf{u} \quad (7.10)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \text{diag} [\mathbf{Q}, \dots, \mathbf{Q}, \tilde{\mathbf{Q}}] \text{ e } \mathbf{R}_1 = \text{diag} [\mathbf{R}, \dots, \mathbf{R}]$$

$$[\bar{\mathbf{e}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{k+H_u} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{sp} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{sp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1}^s + \Psi(0)\mathbf{x}_{k+1}^d \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{k+H_u}^s + \Psi(0)\mathbf{x}_{k+H_u}^d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{sp} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{sp} \end{bmatrix}$$

Usando (7.8) e (7.9), obtém-se:

$$[\bar{\mathbf{e}}] = \bar{\mathbf{I}}[\mathbf{x}^s]_k + \mathbf{C}_{0m}\Delta\mathbf{u} + \bar{\Psi}(0)\left(\tilde{\mathbf{D}}[\mathbf{x}^d]_k + \tilde{\mathbf{D}}\Delta\mathbf{u}\right) - \bar{\mathbf{I}}\mathbf{y}^{sp} \quad (7.11)$$

onde

$$\bar{\Psi}(0) = \text{diag}(\Psi(0), \dots, \Psi(0))$$

Definindo $\mathbf{e}_k^s = \mathbf{x}_k^s - \mathbf{y}^{sp}$, a Equação (7.11) pode ser escrita como

$$[\bar{\mathbf{e}}] = \bar{\mathbf{I}}\mathbf{e}_k^s + \bar{\Psi}(0)\tilde{\mathbf{D}}[\mathbf{x}^d]_k + \left(\mathbf{C}_{0m} + \bar{\Psi}(0)\tilde{\mathbf{D}}\right)\Delta\mathbf{u} \quad (7.12)$$

$$[\bar{\mathbf{e}}] = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\Delta\mathbf{u} \quad (7.13)$$

onde

$$\boldsymbol{\alpha} = \bar{\mathbf{I}}\mathbf{e}_k^s + \bar{\Psi}(0)\tilde{\mathbf{D}}[\mathbf{x}^d]_k, \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{C}_{0m} + \bar{\Psi}(0)\tilde{\mathbf{D}}$$

Substituindo (7.13) em (7.10) obtém-se:

$$J_{k(\infty, H_u)} = \Delta\mathbf{u}^T \left(\boldsymbol{\beta}^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{R}_1 \right) \Delta\mathbf{u} + 2\boldsymbol{\alpha}^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\beta} \Delta\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha}^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\alpha}$$

E a equação (7.4) pode ser rearranjada, para explicitar o vetor de ações de controle, da seguinte forma:

$$\mathbf{x}_k^s + [\mathbf{C}_0 \quad \dots \quad \mathbf{C}_0]\Delta\mathbf{u} - \mathbf{y}^{sp} = 0$$

$$\mathbf{e}_k^s + [\mathbf{C}_0 \quad \dots \quad \mathbf{C}_0]\Delta\mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{e}_k^s + \tilde{\mathbf{C}}_0\Delta\mathbf{u} = 0 \quad (7.14)$$

Rearranjando este problema de otimização, seja um γ tal que:

$$J_{k(\infty, H_u)} - \gamma < 0$$

Com isso, o problema do MPC de horizonte infinito pode ser formulado como:

Problema P1):

$$\min_{\Delta u, \gamma} \gamma$$

sujeita a

$$\Delta \mathbf{u}^T \left(\boldsymbol{\beta}^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{R}_1 \right) \Delta \mathbf{u} + 2 \boldsymbol{\alpha}^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\beta} \Delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha}^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\alpha} - \gamma < 0, \quad \gamma > 0$$

$$\mathbf{e}_k^s + \tilde{\mathbf{C}}_0 \Delta \mathbf{u} = 0 \tag{7.14}$$

$$\bar{\mathbf{Q}} - \mathbf{D}^T \boldsymbol{\Psi}(0)^T \bar{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\Psi}(0) \mathbf{D} = \mathbf{D}^T \boldsymbol{\Psi}(0)^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\Psi}(0) \mathbf{D} \tag{7.5}$$

$$\Delta \mathbf{u}_{k+j} \in \mathbb{U}, \quad j \geq 0 \tag{7.2}$$

O problema de otimização acima é não linear e convexo, e sua solução pode ser obtida por técnicas de programação não lineares. Entretanto, o mesmo apresenta a equação de cálculo de $\bar{\mathbf{Q}}$, que deve ser incluída no problema de otimização se a estrutura do sistema mudar (por ex. uma saída controlada for tirada ou incluída no problema de controle). Este fato, em sistemas de grande porte, pode elevar substancialmente o processamento computacional para solução do controlador, o que, na prática, pode inviabilizar a sua implementação.

Ainda, esta formulação apresenta alguns inconvenientes:

- Se o número de saídas controladas for maior que o número de entradas manipuladas ($n_y > n_u$) a equação (7.14) não será satisfeita e o problema não será viável.
- Para horizontes de controle H_u pequenos a equação (7.14) também poderá não ser satisfeita, devido às variáveis controladas apresentarem “off-set”. Se o horizonte de controle for suficientemente grande, o esforço computacional pode inviabilizar a solução do problema.

Para contornar estes inconvenientes, inclui-se variável de folga no problema de otimização do MPC. Assim, a função objetivo fica redefinida da seguinte forma:

$$J_{k(\infty, H_u)} = \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{e}_{k+j} + \boldsymbol{\delta})^T \mathbf{Q} (\mathbf{e}_{k+j} + \boldsymbol{\delta}) + \sum_{j=0}^{H_u-1} \Delta \mathbf{u}_{k+j}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_{k+j} + \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{V} \boldsymbol{\delta} \quad (7.15)$$

Seguindo os mesmos passos do desenvolvimento da função objetivo definida em (7.1) tem-se que $J_{k(\infty, H_u)}$ será limitado apenas se a seguinte equação for obedecida:

$$\mathbf{e}_k^s + \boldsymbol{\delta} + \tilde{\mathbf{C}}_0 \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (7.16)$$

Se a condição (7.16) for satisfeita, a nova função objetivo fica reduzida a:

$$J_{k(\infty, H_u)} = \sum_{j=0}^{H_u-1} (\mathbf{e}_{k+j} + \boldsymbol{\delta})^T \mathbf{Q} (\mathbf{e}_{k+j} + \boldsymbol{\delta}) + [\mathbf{x}^d]^T_{k+H_u} \tilde{\mathbf{Q}} [\mathbf{x}^d]_{k+H_u} + \sum_{j=0}^{H_u-1} \Delta \mathbf{u}_{k+j}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_{k+j} + \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{V} \boldsymbol{\delta}$$

ou

$$\begin{aligned} J_{k(\infty, H_u)} &= \sum_{j=0}^{H_u-1} (\mathbf{e}_{k+j} + \boldsymbol{\delta})^T \mathbf{Q} (\mathbf{e}_{k+j} + \boldsymbol{\delta}) + (\mathbf{e}_{k+H_u} + \boldsymbol{\delta})^T \tilde{\mathbf{Q}} (\mathbf{e}_{k+H_u} + \boldsymbol{\delta}) + \sum_{j=0}^{H_u-1} \Delta \mathbf{u}_{k+j}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_{k+j} + \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{V} \boldsymbol{\delta} \\ J_{k(\infty, H_u)} &= [\bar{\mathbf{e}} + \bar{\mathbf{I}} \boldsymbol{\delta}]^T \tilde{\mathbf{Q}} [\bar{\mathbf{e}} + \bar{\mathbf{I}} \boldsymbol{\delta}] + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{R}_1 \Delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{V} \boldsymbol{\delta} \end{aligned} \quad (7.17)$$

Usando a Equação (7.3) na (7.17) obtém-se:

$$J_{k(\infty, H_u)} = [\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \Delta \mathbf{u} + \bar{\mathbf{I}} \boldsymbol{\delta}]^T \tilde{\mathbf{Q}} [\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \Delta \mathbf{u} + \bar{\mathbf{I}} \boldsymbol{\delta}] + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{R}_1 \Delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{V} \boldsymbol{\delta}$$

que pode ser colocada na forma

$$J_{k(\infty, H_u)} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^T & \boldsymbol{\delta}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{R}_1 & \boldsymbol{\beta}^T \tilde{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{I}} \\ \bar{\mathbf{I}}^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\beta} & \bar{\mathbf{I}}^T \tilde{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{I}} + \mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{\alpha}^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\beta} & 2\boldsymbol{\alpha}^T \tilde{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\alpha}^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\alpha}$$

O problema de otimização do controlador de horizonte de predição infinito modificado pode então se escrito da seguinte forma:

Problema P2)

$$\min_{\Delta \mathbf{u}, \delta, \gamma} \gamma$$

sujeita a

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^T & \delta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{R}_1 & \boldsymbol{\beta}^T \tilde{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{I}} \\ \bar{\mathbf{I}}^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\beta} & \bar{\mathbf{I}}^T \tilde{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{I}} + \mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{\alpha}^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\beta} & 2\boldsymbol{\alpha}^T \tilde{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \delta \end{bmatrix} + \boldsymbol{\alpha}^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\alpha} - \gamma < 0$$

$$\gamma > 0$$

$$\mathbf{e}_k^s + \delta + \tilde{\mathbf{C}}_0 \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (7.16)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} - \mathbf{D}^T \boldsymbol{\Psi}(0)^T \bar{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\Psi}(0) \mathbf{D} = \mathbf{D}^T \boldsymbol{\Psi}(0)^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\Psi}(0) \mathbf{D} \quad (7.5)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{k+j} \in \mathbb{U}, \quad j \geq 0 \quad (7.2)$$

A introdução das variáveis de folga, apesar de tornar viável o problema P1), ainda não é suficiente para evitar o “off-set” nas controladas. Isto pois, dependendo da sintonia utilizada, o sistema pode convergir para um ponto onde $\Delta \mathbf{u} = 0$, $\mathbf{x}_k^d = 0$ e $\mathbf{e}_k^s = -\delta \neq 0$, que é um ponto de equilíbrio onde existe um erro estacionário na saída do sistema. Isto pode ocorrer se o custo de δ na função objetivo for menor que o custo de $\Delta \mathbf{u}$. Portanto, para que isso não ocorra deve-se ter:

$$(\Delta \mathbf{u})^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u} < \delta^T \mathbf{V} \delta$$

$$\text{e, para } \delta = -\tilde{\mathbf{C}}_0 \Delta \mathbf{u},$$

$$(\Delta \mathbf{u})^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u} < (\Delta \mathbf{u})^T \tilde{\mathbf{C}}_0^T \mathbf{V} \tilde{\mathbf{C}}_0 \Delta \mathbf{u}$$

ou

$$\sigma_{\max}(\mathbf{R}) < \sigma_{\min}(\tilde{\mathbf{C}}_0^T \mathbf{V} \tilde{\mathbf{C}}_0) \quad (7.18)$$

onde σ é o autovalor da matriz.

Assim, o controlador de horizonte infinito deve ser sintonizado de forma que a desigualdade (7.18) seja obedecida.

7.3 – MPC de horizonte infinito robusto com predição em instantes discretos (RIHMPC-I)

Uma vez formulado o problema para o caso nominal, o desenvolvimento pode ser estendido para o caso robusto. Para este estudo a incerteza é representada por múltiplos modelos, cuja formulação é dada por:

$$\mathbb{M}_M = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{p_1} & \mathbf{B}_{p_1} & \mathbf{C}_{p_1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{p_2} & \mathbf{B}_{p_2} & \mathbf{C}_{p_2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{p_L} & \mathbf{B}_{p_L} & \mathbf{C}_{p_L} \end{bmatrix} \right\} \quad (7.19)$$

Onde cada modelo i , $i=1, \dots, L$, corresponde a um ponto de operação distinto.

Pode-se escrever, para cada modelo do conjunto $\mathbb{M}_M$, a função objetivo definida em (7.15)

$$J_{i,k(\infty, H_u)} = \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{e}_{i,k+j} + \delta_i)^T \mathbf{Q} (\mathbf{e}_{i,k+j} + \delta_i) + \sum_{j=0}^{H_u-1} \Delta \mathbf{u}_{k+j}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_{k+j} + \delta_i^T \mathbf{V} \delta_i \quad (7.20)$$

$$i = 1, 2, \dots, L$$

Em cada uma dessas funções o horizonte infinito pode ser reduzido ao horizonte de controle com a introdução do peso terminal $\bar{\mathbf{Q}}_i$ que é obtido pela solução da equação (7.5) para o modelo i . Assim, chega-se a

$$J_{i,k(\infty, H_u)} = \sum_{j=1}^{H_u-1} (\mathbf{e}_{i,k+j} + \delta_i)^T \mathbf{Q} (\mathbf{e}_{i,k+j} + \delta_i) + (\mathbf{e}_{i,k+H_u} + \delta_i)^T \bar{\mathbf{Q}}_i (\mathbf{e}_{i,k+H_u} + \delta_i) + \sum_{j=0}^{H_u-1} \Delta \mathbf{u}_{k+j}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_{k+j} + \delta_i^T \mathbf{V} \delta_i \quad (7.21)$$

$$i = 1, 2, \dots, L$$

onde $\bar{\mathbf{Q}}_i$ é solução da equação

$$\bar{\mathbf{Q}}_i - \mathbf{D}_i^T \Psi_i(0)^T \bar{\mathbf{Q}}_i \Psi_i(0) \mathbf{D}_i = \mathbf{D}_i^T \Psi_i(0)^T \mathbf{Q} \Psi_i(0) \mathbf{D}_i$$

O controlador robusto resolve então o seguinte problema de otimização do tipo min-max:

$$\min_{\Delta \mathbf{u}, \delta, \gamma} \max_{(\mathbf{A}_p, \mathbf{B}_p, \mathbf{C}_p)} \gamma$$

sujeita a

$$(\mathbf{A}_p, \mathbf{B}_p, \mathbf{C}_p) \in \mathbb{M}_M$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^T & \delta_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_i^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\beta}_i + \mathbf{R}_1 & \boldsymbol{\beta}_i^T \tilde{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{I}} \\ \bar{\mathbf{I}}^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\beta}_i & \bar{\mathbf{I}}^T \tilde{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{I}} + \mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \delta_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\mathbf{a}_i^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\beta}_i & 2\mathbf{a}_i^T \tilde{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \delta \end{bmatrix} + \mathbf{a}_i^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{a}_i - \gamma < 0 \\ & i = 1, 2, \dots, L \end{aligned}$$

$$\gamma > 0$$

$$\mathbf{e}_{i,k}^s + \delta_i + \tilde{\mathbf{C}}_{0,i} \Delta \mathbf{u} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, L$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_i - \mathbf{D}_i^T \boldsymbol{\Psi}_i(0)^T \bar{\mathbf{Q}}_i \boldsymbol{\Psi}_i(0) \mathbf{D}_i = \mathbf{D}_i^T \boldsymbol{\Psi}_i(0)^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\Psi}_i(0) \mathbf{D}_i, \quad i = 1, 2, \dots, L$$

$$\Delta \mathbf{u}_{k+j} \in \mathbb{U}, \quad j \geq 0 \tag{7.2}$$

O problema de “max” é resolvido sobre um conjunto finito de modelos, que foram identificados em condições operacionais distintas da planta. Assim, este sistema de equações deve ser resolvido para o conjunto de modelos de $\mathbb{M}_M$, e γ passa a ser um limite superior para cada uma das funções custo correspondentes a cada um dos modelos de $\mathbb{M}_M$. O controlador robusto é, então, formulado como:

Problema P3):

$$\min_{\Delta \mathbf{u}, \delta_1, \dots, \delta_L, \gamma} \gamma$$

sujeita a

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^T & \delta_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_i^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\beta}_i + \mathbf{R}_1 & \boldsymbol{\beta}_i^T \tilde{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{I}} \\ \bar{\mathbf{I}}^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\beta}_i & \bar{\mathbf{I}}^T \tilde{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{I}} + \mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \delta_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\mathbf{a}_i^T \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\beta}_i & 2\mathbf{a}_i^T \tilde{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \delta \end{bmatrix} + \mathbf{a}_i^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{a}_i - \gamma < 0 \\ & i = 1, 2, \dots, L \end{aligned}$$

$$\gamma > 0$$

$$\mathbf{e}_{i,k}^s + \delta_i + \tilde{\mathbf{C}}_{0,i} \Delta \mathbf{u} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, L$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_i - \mathbf{D}_i^T \Psi_i(0)^T \bar{\mathbf{Q}}_i \Psi_i(0) \mathbf{D}_i = \mathbf{D}_i^T \Psi_i(0)^T \mathbf{Q} \Psi_i(0) \mathbf{D}_i, \quad i = 1, 2, \dots, L$$

$$\Delta \mathbf{u}_{k+j} \in \mathbb{U}, \quad j \geq 0 \quad (7.2)$$

Observações:

- Os controladores robustos da literatura consideram que o estado (x_k^s, x_k^d) do sistema real é medido e portanto perfeitamente conhecido no instante de amostragem k . No caso real e particularmente no caso da coluna de Benzeno estudada neste trabalho, apenas a saída é medida. Para estimar o estado temos um observador de estados associado ao controlador. Daí, para cada modelo i teremos no instante k um estado diferente. Por isso, nas equações do problema P3) aparecem os estados $(x_{i,k}^s, x_{i,k}^d)$.
- Analogamente ao caso nominal, a convergência para o “set-point” só é garantida se a escolha dos pesos $\mathbf{R}$ e $\mathbf{V}$ for adequada. No caso de múltiplos modelos as seguintes relações devem ser satisfeitas:

$$\sigma_{\max}(\mathbf{R}) < \sigma_{\min}(\mathbf{C}_{0,i}^T \mathbf{V} \mathbf{C}_{0,i}), \quad i = 1, 2, \dots, L$$

7.4 – MPC de horizonte infinito com predição contínua no tempo (IHMPC-II)

Para a formulação do algoritmo de controle na forma contínua no tempo, o modelo para o MPC é representado por:

$$[\mathbf{x}_m]_{k+1|k} = \mathbf{A}_m [\mathbf{x}_m]_{k|k} + \mathbf{B}_m \Delta \mathbf{u}_k \quad (6.18)$$

$$[\mathbf{y}_m(t)]_{k|k} = \mathbf{C}_m(t) [\mathbf{x}_m]_{k|k} \quad (6.19)$$

tal que

$$\mathbf{x}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{x}^d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^{nx}; \quad \mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_m \in \mathbb{R}^{nx \times nx}; \quad \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 \\ \mathbf{C}_d \mathbf{D} \mathbf{N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_m \in \mathbb{R}^{nx \times nu} \quad (6.20)$$

$$\mathbf{C}_m(t) = [\mathbf{I} \quad \Psi(t)], \mathbf{C}_m(t) \in \mathbb{R}^{ny \times nx} \text{ e } nx = ny + nu.na.ny \quad (6.21)$$

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \Phi_1(t) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2(t) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \Phi_{ny}(t) \end{bmatrix} \quad \Psi(t) \in \mathbb{C}^{ny \times nd} \quad (6.14)$$

$$\Phi_i(t) = \begin{bmatrix} e^{r_{i,1,1}t} & \cdots & e^{r_{i,1,na}t} & \cdots & e^{r_{i,nu,1}t} & \cdots & e^{r_{i,nu,na}t} \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, L, \quad \Phi_i \in \mathbb{C}^{nu.na} \quad (6.15)$$

$$nd = ny.nu.na$$

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} c_{1,1,0} & \cdots & c_{1,nu,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{ny,1,0} & \cdots & c_{ny,nu,0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_0 \in \mathbb{R}^{ny \times nu}$$

$$\mathbf{D} = \text{diag}(e^{r_{1,1,1}T} \cdots e^{r_{1,1,na}T} \cdots e^{r_{1,nu,1}T} \cdots e^{r_{1,nu,na}T} \cdots e^{r_{ny,1,1}T} \cdots e^{r_{ny,1,na}T} \cdots e^{r_{ny,nu,1}T} \cdots e^{r_{ny,nu,na}T})$$

$$\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{nd \times nd}$$

$$\mathbf{C}_d = \text{diag}(c_{1,1,1} \cdots c_{1,1,na} \cdots c_{1,nu,1} \cdots c_{1,nu,na} \cdots c_{ny,1,1} \cdots c_{ny,1,na} \cdots c_{ny,nu,1} \cdots c_{ny,nu,na}) \quad \mathbf{C}_d \in \mathbb{C}^{nd \times nd}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{ny} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{nd \times nu} \quad \mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} na_{i,1} \begin{cases} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{cases} \\ na_{i,2} \begin{cases} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{cases} \\ \vdots \\ na_{i,nu} \begin{cases} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{cases} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_i \in \mathbb{R}^{nu.na \times nu}$$

O MPC de horizonte infinito minimiza a seguinte função objetivo, ou função custo:

$$J_{k(\infty, H_u)} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{e}_{k+i}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{k+i} + \sum_{j=0}^{H_u-1} \Delta \mathbf{u}_{k+j}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_{k+j} \quad (7.1)$$

sujeita a:

$$\Delta \mathbf{u}_{k+j} \in \mathbb{U}, \quad j \geq 0 \quad (7.2)$$

$$\mathbb{U} = \left\{ \Delta \mathbf{u}_{k+j} \left| \begin{array}{l} -\Delta \mathbf{u}^{\max} \leq \Delta \mathbf{u}_{k+j} \leq \Delta \mathbf{u}^{\max} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}^{\min} \leq \mathbf{u}_{k-1} + \sum_{i=0}^j \Delta \mathbf{u}_{k+i} \leq \mathbf{u}^{\max}; \quad j = 0, 1, \dots, H_u - 1 \\ \Delta \mathbf{u}_{k+j} = 0; \quad j \geq H_u \end{array} \right. \right\} \quad (7.3)$$

sendo H_u o horizonte de controle, $\mathbf{e}_{k+i} = \mathbf{y}(k+i) - \mathbf{y}^{sp}$ o erro da predição em relação à referência ou “set-point”, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$ e $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{nu \times nu}$ são matrizes de ponderação.

De modo a possibilitar a integração da função objetivo, a mesma é modificada para:

$$J_{k(\infty, H_u)} = \sum_{n=1}^{H_u} \int_{(n-1)T}^{nT} [\mathbf{e}_{k+t}]_k^T \mathbf{Q} [\mathbf{e}_{k+t}]_k dt + \int_{H_u T}^{\infty} [\mathbf{e}_{k+t}]_k^T \mathbf{Q} [\mathbf{e}_{k+t}]_k dt + \sum_{j=0}^{H_u-1} \Delta \mathbf{u}_{k+j}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_{k+j} \quad (7.22)$$

onde $\mathbf{e}_{k+t} = \mathbf{y}(k+t) - \mathbf{y}^{sp}$.

O primeiro termo de (7.22) compreende os instantes em que $0 \leq t \leq H_u T$. Para este intervalo, a saída do sistema, incorporando a ação de controle, é descrita pela seguinte equação:

$$\mathbf{y}(k+t) = [\mathbf{x}^s]_k + \boldsymbol{\Psi}(t)[\mathbf{x}^d]_k + \mathbf{C}_{0n} \Delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\Psi}(t) \mathbf{W}_n \mathbf{Z} \Delta \mathbf{u} \quad (7.23)$$

onde

$$(n-1)T \leq t \leq nT \quad \text{e} \quad n \leq H_u$$

$$\mathbf{C}_{0n} = \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{C}_0 \quad \mathbf{C}_0 \quad \dots \quad \mathbf{C}_0}^n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_{0n} \in \mathbb{R}^{ny \times H_u \cdot nu}$$

$$\mathbf{W}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{D}^{-1} & \dots & \mathbf{D}^{-(n-1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{W}_n \in \mathbb{C}^{nd \times H_u \cdot nd}; \quad nd = ny \cdot nu \cdot na$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d \mathbf{N} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_d \mathbf{N} & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{C}_d \mathbf{N} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{H_u \cdot nd \times H_u \cdot nu}$$

$$\Delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_k^T & \Delta \mathbf{u}_{k+1}^T & \cdots & \Delta \mathbf{u}_{k+H_u-1}^T \end{bmatrix}^T$$

Para $n = H_u$, as matrizes $\mathbf{C}_{0n}$ e $\mathbf{W}_n$ tornam-se:

$$\mathbf{C}_{0m} = [\mathbf{C}_0 \quad \mathbf{C}_0 \quad \cdots \quad \mathbf{C}_0] \quad \text{e} \quad \mathbf{W}_m = [\mathbf{I} \quad \mathbf{D}^{-1} \quad \cdots \quad \mathbf{D}^{-(H_u-1)}]$$

A partir de (7.23), o erro da predição é dado por:

$$\mathbf{e}_{k+t} = [\mathbf{e}^s]_k + \Psi(t)[\mathbf{x}^d]_k + \mathbf{C}_{0n} \Delta \mathbf{u} + \Psi(t) \mathbf{W}_n \mathbf{Z} \Delta \mathbf{u} \quad (7.24)$$

sendo $[\mathbf{e}^s]_k = [\mathbf{x}^s]_k - \mathbf{y}^{sp}$.

Substituindo esta expressão do erro na função objetivo, para o intervalo $0 \leq t \leq H_u T$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{H_u} \int_{(n-1)T}^{nT} [\mathbf{e}_{k+t}^T]_k^T \mathbf{Q} [\mathbf{e}_{k+t}]_k dt &= \Delta \mathbf{u}^T \sum_{n=1}^{H_u} \left\{ \mathbf{C}_{0n}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_{0n} T + 2 \mathbf{C}_{0n}^T \mathbf{Q} (\mathbf{F}(n) - \mathbf{F}(n-1)) \mathbf{W}_n \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_n^T (\mathbf{G}(n) - \mathbf{G}(n-1)) \mathbf{W}_n \mathbf{Z} \right\} \Delta \mathbf{u} + \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{H_u} \left\{ [\mathbf{e}^s]_k^T \mathbf{Q} \left(\mathbf{C}_{0n}^T T + (\mathbf{F}(n) - \mathbf{F}(n-1)) \mathbf{W}_n \mathbf{Z} \right) + [\mathbf{x}^d]_k^T \left[(\mathbf{F}(n) - \mathbf{F}(n-1))^T \mathbf{C}_{0n} + (\mathbf{G}(n) - \mathbf{G}(n-1)) \mathbf{W}_n \mathbf{Z} \right] \right\} \Delta \mathbf{u} \end{aligned}$$

As matrizes $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são calculadas por:

$$\mathbf{F}(n) = \int_0^{nT} \Psi(t) dt = \text{diag}[\mathbf{F}_1(nT) \quad \mathbf{F}_2(nT) \quad \cdots \quad \mathbf{F}_{ny}(nT)] - \text{diag}[\mathbf{F}_1(0) \quad \mathbf{F}_2(0) \quad \cdots \quad \mathbf{F}_{ny}(0)] \quad (7.25)$$

onde

$$\mathbf{F}_i(nT) = \begin{bmatrix} \underline{f}_{i,1,1}(nT) & \cdots & \underline{f}_{i,1,na}(nT) & \cdots & \underline{f}_{i,nu,1}(nT) & \cdots & \underline{f}_{i,nu,na_{i,nu}}(nT) \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

e

$$\underline{f}(nT)_{i,j,l} = \frac{e^{r_{i,j,l}nT}}{r_{i,j,l}} \quad (7.27)$$

$$\mathbf{G}(n) = \int_0^{nT} \mathbf{\Psi}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{\Psi}(t) dt = \text{diag}[\mathbf{\Phi}(nT)_1, \mathbf{\Phi}(nT)_2, \dots, \mathbf{\Phi}(nT)_{ny}] - \text{diag}[\mathbf{\Phi}(0)_1, \mathbf{\Phi}(0)_2, \dots, \mathbf{\Phi}(0)_{ny}] \quad (7.28)$$

$$\mathbf{\Phi}(nT)_i = \begin{bmatrix} \underline{g}(nT)_{i,1,1/i,1,1} & \underline{g}(nT)_{i,1,1/i,1,2} & \cdots & \underline{g}(nT)_{i,1,1/i,1,na_{ny,1}} & \underline{g}(nT)_{i,1,1/i,2,1} & \cdots & \underline{g}(nT)_{i,1,1/i,2,na_{ny,2}} & \cdots & \underline{g}(nT)_{i,1,1/i,nu,na_{ny,nu}} \\ \underline{g}(nT)_{i,1,2/i,1,1} & \underline{g}(nT)_{i,1,2/i,1,2} & \cdots & \underline{g}(nT)_{i,1,2/i,1,na_{ny,1}} & \underline{g}(nT)_{i,1,2/i,2,1} & \cdots & \underline{g}(nT)_{i,1,2/i,2,na_{ny,2}} & \cdots & \underline{g}(nT)_{i,1,2/i,nu,na_{ny,nu}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \underline{g}(nT)_{i,1,na_{ny,1}/i,1,1} & \underline{g}(nT)_{i,1,na_{ny,1}/i,1,2} & \cdots & \underline{g}(nT)_{i,1,na_{ny,1}/i,1,na_{ny,1}} & \underline{g}(nT)_{i,1,na_{ny,1}/i,2,1} & \cdots & \underline{g}(nT)_{i,1,na_{ny,1}/i,2,na_{ny,2}} & \cdots & \underline{g}(nT)_{i,1,na_{ny,1}/i,nu,na_{ny,nu}} \\ \underline{g}(nT)_{i,2,1/i,1,1} & \underline{g}(nT)_{i,2,1/i,1,2} & \cdots & \underline{g}(nT)_{i,2,1/i,1,na_{ny,1}} & \underline{g}(nT)_{i,2,1/i,2,1} & \cdots & \underline{g}(nT)_{i,2,1/i,2,na_{ny,2}} & \cdots & \underline{g}(nT)_{i,2,1/i,nu,na_{ny,nu}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \underline{g}(nT)_{i,2,na_{ny,2}/i,1,1} & \underline{g}(nT)_{i,2,na_{ny,2}/i,1,2} & \cdots & \underline{g}(nT)_{i,2,na_{ny,2}/i,1,na_{ny,1}} & \underline{g}(nT)_{i,2,na_{ny,2}/i,2,1} & \cdots & \underline{g}(nT)_{i,2,na_{ny,2}/i,2,na_{ny,2}} & \cdots & \underline{g}(nT)_{i,2,na_{ny,2}/i,nu,na_{ny,nu}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \underline{g}(nT)_{i,nu,na_{ny,nu}/i,1,1} & \underline{g}(nT)_{i,nu,na_{ny,nu}/i,1,2} & \cdots & \underline{g}(nT)_{i,nu,na_{ny,nu}/i,1,na_{ny,1}} & \underline{g}(nT)_{i,nu,na_{ny,nu}/i,2,1} & \cdots & \underline{g}(nT)_{i,nu,na_{ny,nu}/i,2,na_{ny,2}} & \cdots & \underline{g}(nT)_{i,nu,na_{ny,nu}/i,nu,na_{ny,nu}} \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

$i = 1, \dots, ny$

$$\underline{g}(nT)_{i,j,l/i,j,l} = \int_0^{nT} e^{(r_{i,j,l} + r_{i,j,l})t} Q_i e^{(r_{i,j,l} + r_{i,j,l})t} dt = \frac{Q_i}{(r_{i,j,l} + r_{i,j,l})} (e^{(r_{i,j,l} + r_{i,j,l})nT} - 1) \quad (7.30)$$

$$i = 1, \dots, ny ; \quad j = 1, \dots, nu ; \quad l = 1, \dots, na$$

Para o instante t , tal que $t > H_u.T$, o erro da predição é dado por:

$$\mathbf{e}_{k+t} = [\mathbf{e}^s]_k + \mathbf{\Psi}(t)[\mathbf{x}^d]_k + \mathbf{C}_{0m}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{W}_m\mathbf{Z}\Delta\mathbf{u} \quad (7.31)$$

Assim, a integral para este intervalo é dada por:

$$\begin{aligned} \int_{H_u.T}^{\infty} [\mathbf{e}_{k+t}]_k^T \mathbf{Q} [\mathbf{e}_{k+t}]_k dt &= \left\{ [\mathbf{e}^s]_k + \mathbf{C}_{0m} \Delta \mathbf{u} \right\}^T \mathbf{Q} \left\{ [\mathbf{e}^s]_k + \mathbf{C}_{0m} \Delta \mathbf{u} \right\} \int_{H_u.T}^{\infty} dt + 2 \left\{ [\mathbf{e}^s]_k + \mathbf{C}_{0m} \Delta \mathbf{u} \right\}^T \mathbf{Q} \int_{H_u.T}^{\infty} \mathbf{\Psi}(t) \left\{ [\mathbf{x}^d]_k + \mathbf{W}_m \mathbf{Z} \Delta \mathbf{u} \right\} dt + \\ &+ \int_{H_u.T}^{\infty} \left\{ [\mathbf{x}^d]_k + \mathbf{W}_m \mathbf{Z} \Delta \mathbf{u} \right\}^T \mathbf{\Psi}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{\Psi}(t) \left\{ [\mathbf{x}^d]_k + \mathbf{W}_m \mathbf{Z} \Delta \mathbf{u} \right\} dt \end{aligned} \quad (7.32)$$

Para sistemas estáveis em malha aberta, o $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{\Psi}(t) = \mathbf{0}$. Com isso, a segunda e a terceira integral, do lado direito de (7.32) são limitadas.

Porém, o termo

$$\left\{ [\mathbf{e}^s]_k + \mathbf{C}_{0m} \Delta \mathbf{u} \right\}^T \mathbf{Q} \left\{ [\mathbf{e}^s]_k + \mathbf{C}_{0m} \Delta \mathbf{u} \right\} \int_{H_u.T}^{\infty} dt$$

só será limitado se a seguinte condição for estabelecida:

$$[\mathbf{e}^s]_k + \mathbf{C}_{0m} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (7.33)$$

Substituindo (7.33) em (7.32), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{H_u.T}^{\infty} [\mathbf{e}_{k+t}]_k^T \mathbf{Q} [\mathbf{e}_{k+t}]_k dt &= \int_{H_u.T}^{\infty} \left\{ [\mathbf{x}^d]_k + \mathbf{W}_m \mathbf{Z} \Delta \mathbf{u} \right\}^T \mathbf{\Psi}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{\Psi}(t) \left\{ [\mathbf{x}^d]_k + \mathbf{W}_m \mathbf{Z} \Delta \mathbf{u} \right\} dt \\ \int_{H_u.T}^{\infty} [\mathbf{e}_{k+t}]_k^T \mathbf{Q} [\mathbf{e}_{k+t}]_k dt &= \left\{ [\mathbf{x}^d]_k + \mathbf{W}_m \mathbf{Z} \Delta \mathbf{u} \right\}^T (\mathbf{G}(\infty) - \mathbf{G}(H_u)) \left\{ [\mathbf{x}^d]_k + \mathbf{W}_m \mathbf{Z} \Delta \mathbf{u} \right\} \end{aligned}$$

E a função custo para horizonte de predição infinito torna-se:

$$\begin{aligned} J_{k(\infty, H_u)} &= \Delta \mathbf{u}^T \left\{ \sum_{n=1}^{H_u} \left[\mathbf{C}_{0n}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_{0n} T + 2 \mathbf{C}_{0n}^T \mathbf{Q} (\mathbf{F}(n) - \mathbf{F}(n-1)) \mathbf{W}_n \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_n^T (\mathbf{G}(n) - \mathbf{G}(n-1)) \mathbf{W}_n \mathbf{Z} \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_m^T (\mathbf{G}(\infty) - \mathbf{G}(H_u)) \mathbf{W}_m \mathbf{Z} + \mathbf{R}_1 \right\} \Delta \mathbf{u} + \\ &2 \left\{ \sum_{n=1}^{H_u} \left[[\mathbf{e}^s]_k^T \mathbf{Q} (\mathbf{C}_{0n} T + (\mathbf{F}(n) - \mathbf{F}(n-1)) \mathbf{W}_n \mathbf{Z}) + [\mathbf{x}^d]_k^T ((\mathbf{F}(n) - \mathbf{F}(n-1))^T \mathbf{C}_{0n} + (\mathbf{G}(n) - \mathbf{G}(n-1)) \mathbf{W}_n \mathbf{Z}) \right] + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_m^T (\mathbf{G}(\infty) - \mathbf{G}(H_u)) [\mathbf{x}^d]_k \right\} \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (7.34)$$

onde

$$\mathbf{R}_1 = \text{diag}(\mathbf{R} \ \dots \ \mathbf{R})$$

Portanto, para sistemas estáveis em malha aberta, o problema do MPC de horizonte infinito pode ser formulado como:

Problema P4):

$$\min_{\Delta \mathbf{u}} \left[\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{u} + 2\mathbf{c}_f^T \Delta \mathbf{u} \right] \quad (7.35)$$

sendo

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m + \mathbf{H}_\infty + \mathbf{R}_1 \quad (7.36)$$

$$\mathbf{c}_f^T = \mathbf{c}_{f_m}^T + \mathbf{c}_{f_\infty}^T \quad (7.37)$$

$$\mathbf{H}_m = \sum_{n=1}^{H_u} \left\{ \mathbf{C}_{0n}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_{0n} T + 2\mathbf{C}_{0n}^T \mathbf{Q} (\mathbf{F}(n) - \mathbf{F}(n-1)) \mathbf{W}_n \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_n^T (\mathbf{G}(n) - \mathbf{G}(n-1)) \mathbf{W}_n \mathbf{Z} \right\}$$

$$\mathbf{H}_\infty = \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_m^T (\mathbf{G}(\infty) - \mathbf{G}(H_u)) \mathbf{W}_m \mathbf{Z}$$

$$\mathbf{c}_{f_m}^T = \sum_{n=1}^{H_u} \left\{ [\mathbf{e}^s]_k^T \mathbf{Q} [\mathbf{C}_{0n} T + (\mathbf{F}(n) - \mathbf{F}(n-1)) \mathbf{W}_n \mathbf{Z}] + [\mathbf{x}^d]_k^T [(\mathbf{F}(n) - \mathbf{F}(n-1))^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_{0n} + (\mathbf{G}(n) - \mathbf{G}(n-1)) \mathbf{W}_n \mathbf{Z}] \right\}$$

$$\mathbf{c}_{f_\infty}^T = [\mathbf{x}^d]_k^T (\mathbf{G}(\infty) - \mathbf{G}(H_u)) \mathbf{W}_m \mathbf{Z}$$

sujeita a

$$\Delta \mathbf{u}_{k+j} \in \mathbb{U}, \quad j \geq 0 \quad (7.2)$$

$$[\mathbf{e}^s]_k + \mathbf{C}_{0m} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (7.33)$$

onde $\mathbb{U}$ é a região viável definida pelas restrições nas entradas.

O problema de otimização acima é não linear porém convexo, e sua solução pode ser obtida tanto por técnicas de NLP como por técnicas de LMI. Entretanto, analogamente ao problema P1), esta formulação apresenta os mesmos inconvenientes, quais sejam:

- Se o número de saídas controladas for maior que o número de entradas manipuladas ($ny > nu$) a equação (7.33) não será satisfeita e o problema não será viável.
- Para horizontes de controle H_u pequenos, a equação (7.33) também poderá não ser satisfeita, devido às variáveis controladas apresentarem “off-set”. Se o horizonte de controle for suficientemente grande, o esforço computacional pode inviabilizar a solução do problema.

Assim, para contornar estes inconvenientes, inclui-se, também, variável de folga no problema de otimização do MPC. A função objetivo fica redefinida da seguinte forma:

$$J_{k(\infty, H_u)} = \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{e}_{k+i} + \boldsymbol{\delta})^T \mathbf{Q}(\mathbf{e}_{k+i} + \boldsymbol{\delta}) + \sum_{j=0}^{H_u-1} \Delta \mathbf{u}_{k+j}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_{k+j} + \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{V} \boldsymbol{\delta} \quad (7.38)$$

onde $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^{ny}$ é o vetor de variável de folga e $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$ é uma matriz de ponderação positiva-definida. Os estados do modelo podem também ser redefinidos, substituindo os estados $\mathbf{x}^s$ por $\mathbf{x}^s + \boldsymbol{\delta}$ na equação (7.34), e o problema de busca de trajetória da saída passa a ser formulado por:

Problema P5):

$$\min_{\Delta \mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^T & \boldsymbol{\delta}^T \end{bmatrix} \mathbf{H} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} + 2\mathbf{c}_f^T \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} \quad (7.39)$$

sendo

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11,m} + \mathbf{H}_{11,\infty} + \mathbf{R}_1 & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{12}^T & H_u \mathbf{Q} T + \mathbf{V} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_f^T = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{f_m}^T + \mathbf{c}_{f_\infty}^T & \mathbf{c}_{f_\delta}^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{11,m} = \sum_{n=1}^{H_u} \left\{ \mathbf{C}_{0n}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_{0n} T + 2 \mathbf{C}_{0n}^T \mathbf{Q} (\mathbf{F}(n) - \mathbf{F}(n-1)) \mathbf{W}_n \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_n^T (\mathbf{G}(n) - \mathbf{G}(n-1)) \mathbf{W}_n \mathbf{Z} \right\}$$

$$\mathbf{H}_{11,\infty} = \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_m^T (\mathbf{G}(\infty) - \mathbf{G}(H_u)) \mathbf{W}_m \mathbf{Z}$$

$$\mathbf{H}_{12} = \sum_{n=1}^{H_u} \left[\mathbf{C}_{0n}^T \mathbf{Q} T + \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_n^T (\mathbf{F}(n) - \mathbf{F}(n-1))^T \mathbf{Q} \right]$$

$$\mathbf{c}_{f,m} = \sum_{n=1}^{H_u} \left\{ [\mathbf{e}^s]_k^T \mathbf{Q} (\mathbf{C}_{0n} T + (\mathbf{F}(n) - \mathbf{F}(n-1)) \mathbf{W}_n \mathbf{Z}) + [\mathbf{x}^d]_k^T ((\mathbf{F}(n) - \mathbf{F}(n-1))^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_{0n} + (\mathbf{G}(n) - \mathbf{G}(n-1)) \mathbf{W}_n \mathbf{Z}) \right\}$$

$$\mathbf{c}_{f_\infty}^T = [\mathbf{x}^d]^T (\mathbf{G}(\infty) - \mathbf{G}(H_u)) \mathbf{W}_m \mathbf{Z}$$

$$\mathbf{c}_{f_\delta}^T = H_u [\mathbf{e}^s]_k^T \mathbf{Q} T + [\mathbf{x}^d]_k^T \sum_{n=1}^{H_u} (\mathbf{F}(n) - \mathbf{F}(n-1))^T \mathbf{Q}$$

sujeita a

$$\Delta \mathbf{u}_{k+j} \in \mathbf{U}, \quad j \geq 0 \quad (7.2)$$

$$[\mathbf{e}^s]_k + \delta + \mathbf{C}_{0m} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (7.40)$$

Ainda na analogia ao problema P1), a introdução das variáveis de folga não é suficiente para evitar o “off-set” nas controladas. A dependência com a sintonia do controlador também se faz presente. Portanto, a seguinte relação entre $\mathbf{R}$ e $\mathbf{V}$ deve ser satisfeita:

$$\sigma_{\max}(\mathbf{R}) < \sigma_{\min}(\mathbf{C}_0^T \mathbf{V} \mathbf{C}_0) \quad (7.41)$$

onde σ é o autovalor da matriz.

A seguir, é necessário formular este problema de modo a ser solucionado por método de desigualdade linear de matriz (LMI). Assim, a equação (7.39) deve ser formulada como uma desigualdade. Para tal, seja um γ tal que:

$$J_{k(\infty, H_u)} - \gamma < 0$$

Substituindo a função objetivo por (7.39), chega-se a:

$$\gamma - \mathbf{Y}^T \mathbf{H} \mathbf{Y} - 2\mathbf{c}_f^T \mathbf{Y} > 0 \quad (7.42)$$

$$\text{sendo } \mathbf{Y}^T = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^T & \boldsymbol{\delta}^T \end{bmatrix}.$$

Aplicando o complemento de Schur, vide apêndice C, para transformar esta equação em LMI, chega-se a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \sqrt{\mathbf{H}} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}^T \sqrt{\mathbf{H}} & \gamma - 2\mathbf{c}_f^T \mathbf{Y} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (7.42a)$$

E o controlador é formulado como:

$$\min_{\Delta \mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}, \gamma} \gamma$$

sujeita a

$$\gamma > 0$$

$$\Delta \mathbf{u}_{k+j} \in \mathbb{U}, \quad j \geq 0 \quad (7.2)$$

$$[\mathbf{e}^s]_k + \boldsymbol{\delta} + \mathbf{C}_{0m} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (7.40)$$

A próxima seção apresenta a extensão deste MPC para o caso de sistemas com incerteza na modelagem.

7.5 – MPC de horizonte infinito robusto com predição contínua no tempo (RIHMPC-II)

Analogamente à formulação discreta, a incerteza na modelagem é representada por múltiplos modelos:

$$\mathbf{Mp}_M = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{p1} & \mathbf{B}_{p1} & \mathbf{C}_{p1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{p2} & \mathbf{B}_{p2} & \mathbf{C}_{p2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{pL} & \mathbf{B}_{pL} & \mathbf{C}_{pL} \end{bmatrix} \right\} \quad (7.19)$$

Assim, o controlador preditivo também é baseado no problema de min-max:

$$\min_{\Delta \mathbf{u}, \delta, \gamma} \max_{(\mathbf{A}_p, \mathbf{B}_p, \mathbf{C}_p)} \gamma \quad (7.43)$$

sujeita a

$$(\mathbf{A}_p, \mathbf{B}_p, \mathbf{C}_p) \in \mathbb{M}_M$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \sqrt{\mathbf{H}}\mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}^T \sqrt{\mathbf{H}} & \gamma - 2\mathbf{c}_f^T \mathbf{Y} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

$$\Delta \mathbf{u}_{k+j} \in \mathbb{U}, \quad j \geq 0 \quad (7.2)$$

$$[\mathbf{e}^s]_k + \delta + \mathbf{C}_{0m} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (7.40)$$

Analogamente ao problema P3), este sistema de equações também deve ser resolvido para o conjunto de modelos de $\mathbb{M}_M$, e γ passa a ser um limite superior para cada uma das funções custo. O controlador robusto é, então, formulado como:

Problema P6):

$$\min_{\Delta \mathbf{u}, \delta_1, \dots, \delta_L, \gamma} \gamma \quad (7.44)$$

sujeita a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \sqrt{\mathbf{H}_i} \mathbf{Y}_i \\ \mathbf{Y}_i^T \sqrt{\mathbf{H}_i} & \gamma - 2\mathbf{c}_{f,i}^T \mathbf{Y}_i \end{bmatrix} > \mathbf{0}; \quad i = 1, \dots, L \quad (7.45)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{k+j} \in \mathbb{U}, \quad j \geq 0 \quad (7.2)$$

$$[\mathbf{e}^s]_k + \delta_i + \mathbf{C}_{0m_i} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, L \quad (7.46)$$

sendo

$$\mathbf{Y}_i^T = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^T & \delta_i^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{i1,m} + \mathbf{H}_{i1,\infty} + \mathbf{R}_1 & \mathbf{H}_{i2} \\ \mathbf{H}_{i2}^T & H_u \mathbf{Q} T + \mathbf{V} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_{fi}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{fi_m}^T + \mathbf{c}_{fi_\infty}^T & \mathbf{c}_{fi_\delta}^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{i11,m} = \sum_{n=1}^{H_u} \left\{ \mathbf{C}_{0n,i}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_{0n,i} T + 2 \mathbf{C}_{0n,i}^T \mathbf{Q} (\mathbf{F}_i(n) - \mathbf{F}_i(n-1)) \mathbf{W}_{n,i} \mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_i^T \mathbf{W}_{n,i}^T (\mathbf{G}_i(n) - \mathbf{G}_i(n-1)) \mathbf{W}_{n,i} \mathbf{Z}_i \right\}$$

$$\mathbf{H}_{i2} = \sum_{n=1}^{H_u} \left[\mathbf{C}_{0n,i}^T \mathbf{Q} T + \mathbf{Z}_i^T \mathbf{W}_{n,i}^T (\mathbf{F}_i(n) - \mathbf{F}_i(n-1))^T \mathbf{Q} \right]$$

$$\mathbf{H}_{i11,\infty} = \mathbf{Z}_i^T \mathbf{W}_{m,i}^T (\mathbf{G}_i(\infty) - \mathbf{G}_i(H_u)) \mathbf{W}_{m,i} \mathbf{Z}_i$$

$$\mathbf{c}_{fi_m} = \sum_{n=1}^{H_u} \left\{ [\mathbf{e}^s]^T \mathbf{Q} (\mathbf{C}_{0n,i} T + (\mathbf{F}_i(n) - \mathbf{F}_i(n-1)) \mathbf{W}_{n,i} \mathbf{Z}_i) + [\mathbf{x}^d]^T ((\mathbf{F}_i(n) - \mathbf{F}_i(n-1))^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_{0n,i} + (\mathbf{G}_i(n) - \mathbf{G}_i(n-1)) \mathbf{W}_{n,i} \mathbf{Z}_i) \right\}$$

$$\mathbf{c}_{fi_\infty}^T = [\mathbf{x}^d]^T (\mathbf{G}_i(\infty) - \mathbf{G}_i(H_u)) \mathbf{W}_{m,i} \mathbf{Z}_i$$

$$\mathbf{c}_{fi_\delta}^T = H_u [\mathbf{e}^s]^T \mathbf{Q} T + [\mathbf{x}^d]^T \sum_{n=1}^{H_u} (\mathbf{F}_i(n) - \mathbf{F}_i(n-1))^T \mathbf{Q}$$

Analogamente ao caso nominal, a convergência para o valor de referência só é garantida se a escolha das matrizes $\mathbf{R}$ e $\mathbf{V}$ for adequada. Assim, no caso de múltiplos modelos as seguintes relações devem ser satisfeitas:

$$\sigma_{\max}(\mathbf{R}) < \sigma_{\min}(\mathbf{C}_{0,i}^T \mathbf{V} \mathbf{C}_{0,i}), \quad i = 1, 2, \dots, L$$

8

APLICAÇÃO DO MPC À COLUNA DE BENZENO***8.1 – Introdução***

Para avaliar o desempenho do controlador, inicialmente executa-se a simulação para o caso nominal, onde a planta é representada pelo mesmo modelo linear usado pelo controlador. Na simulação do caso ideal ajustam-se os parâmetros de sintonia do controlador. Nesta etapa, apenas o MATLAB™ é utilizado. Após este ajuste, o controlador, que é executado no MATLAB™, é integrado à planta real, representada pelo HYSYS™, e executa-se a simulação com o modelo rigoroso. Para o controlador robusto, procede-se da mesma forma.

Para estes casos, as variáveis controladas são:

- Teor de não aromáticos na retirada lateral de benzeno (NA no benzeno);
- Teor de tolueno na retirada lateral de benzeno (T no benzeno);
- Teor de benzeno na corrente de fundo (B no TXil).

E as variáveis manipuladas são:

- "Set-point" da vazão de produto de topo (reciclo);
- "Set-point" da vazão de retirada lateral de benzeno (benzeno);
- "Set-point" da carga térmica do refeedor (CT do refeedor).

Para este estudo, inicialmente é comparado o desempenho do controlador de horizonte infinito com um modelo versus o controlador robusto com múltiplos modelos para o caso servo, isto é, para alteração simultânea no valor de referência das variáveis controladas. Em seguida, é avaliado o comportamento do controlador robusto para o caso carga, isto é, para uma perturbação na composição da carga da coluna.

8.2 – Simulação com modelo linear e IHMPC-II – caso nominal

Para a simulação do caso nominal, escolhe-se o modelo 5 para representar a planta e para modelo interno do controlador. A tabela 8.1 apresenta a alteração nos valores de referência. Esta alteração corresponde ao caso típico para produção de corrente de benzeno com menor contaminação tanto por NA quanto por T. Entretanto, para a simulação, tanto as variáveis controladas quanto as manipuladas partiram da origem.

Tabela 8.1 – Variação nos valores de referência das controladas

	NA no benzeno %m	T no benzeno ppm	B no TXil ppm
Valor inicial	0.190	150	120
Valor final	0.188	130	100
Variação	0.002	20	20

A tabela 8.2 apresenta os valores das restrições das variáveis manipuladas. Estes valores correspondem a manter estas variáveis dentro da região de operação conforme mostrado na figura 6.1.

Tabela 8.2 – Restrições nas variáveis manipuladas

Variável manipulada	Unidade	Limite mín.	Limite máx.
Vazão de reciclo	m ³ /d	3.3	12.0
Vazão de benzeno	m ³ /d	114.0	122.8
Carga térmica referv.	MMkcal/h	1.77	1.93

A tabela 8.3 apresenta os casos simulados para ajuste dos parâmetros de sintonia.

Tabela 8.3 – IHMPC-II - ajuste dos parâmetros de sintonia

Caso	$R_1 = \text{diag}...$	$V = \text{diag}...$	$Q = \text{diag}...$	T (min)	H_u	$\sigma_{\max}(R)$	$\sigma_{\min}(.V.)$
1	[2 1.5 3]	[5000 100 100]	[0.001 0.001 0.0005]	10	2	3	5
2	[1 1 1]	[5000 100 100]	[0.001 0.001 0.0005]	10	2	1	5
3	[1 1 1]	[2000 100 100]	[0.001 0.001 0.0005]	10	2	1	2
4	[2 1.5 3]	[5000 100 100]	[0.01 0.01 0.01]	10	2	3	5

As figuras a seguir apresentam os resultados das simulações para os casos da tabela 8.3. Em tracejado está apresentado o valor da PV das controladas. As demais curvas mostram o SP das variáveis.

Figura 8.1 – Modelo linear – IHMPC-II e parâmetros de sintonia do caso 1

Figura 8.2 – Modelo linear – IHMPC-II e parâmetros de sintonia do caso 2

Figura 8.3 – Modelo linear – IHMPC-II e parâmetros de sintonia do caso 3

Figura 8.4 – Modelo linear – IHMPC-II e parâmetros de sintonia do caso 4

Observando-se as figuras 8.1 à 8.4, destaca-se, inicialmente, o elevado tempo para estabilização, compatível com o processo em estudo. As variáveis manipuladas apresentam um comportamento ruidoso, que é atribuído a problemas numéricos do método de solução do algoritmo (LMI), mas que não prejudicam a avaliação do controlador. Não foi feita nenhuma investigação sobre a origem e possíveis soluções para esse problema. Dos quatro casos apresentados, verifica-se que o ajuste para o caso 1 é o que possibilita às controladas atingirem os valores de referência no menor tempo. O caso 2, apesar de ser praticamente igual ao caso 1, apresenta um comportamento mais ruidoso nas variáveis manipuladas que o caso 1. Comportamento semelhante verifica-se para o caso 4. O caso 3 apresenta um tempo maior para a variável controlada NA no benzeno atingir o valor de referência. Assim, o ajuste do caso 1 será utilizado para a simulação integrada ao HYSYS™.

Foram também simulados casos com outros valores para T e H_u . Não se percebeu ganho para T menor que 10 minutos, com o inconveniente de aumentar o tempo de simulação. E a mesma conclusão para H_u , onde o valor de 4 levou a um aumento de 50% no tempo de execução do algoritmo. Em todos os casos, a sintonia do controlador observou a equação (7.41), de modo a evitar o “off-set” nas controladas.

8.3 – Simulação com modelo rigoroso e IHMPC-II

Para a simulação integrada ao HYSYS™, o modelo 5 continua como modelo interno do controlador, os parâmetros de sintonia são ajustados conforme o caso 1, as restrições nas manipuladas são as da tabela 8.2 e a variação dos valores de referência das controladas é a mesma da tabela 8.1. Entretanto, os valores iniciais das controladas não são exatamente aqueles apresentados na referida tabela, devido à perturbação inerente à transição do módulo estático para o módulo dinâmico do simulador. A figura 8.5 apresenta o comportamento do processo para o caso servo em estudo. A convenção de cores dos gráficos é a mesma das figuras anteriores.

Figura 8.5 – Modelo rigoroso – IHMPC-II e parâmetros de sintonia com melhor ajuste

A figura acima mostra que o controlador com apenas um modelo interno não é capaz de conduzir as três variáveis controladas para os respectivos valores de referência. O sistema se torna instável, particularmente a controlada T no benzeno aumenta continuamente, com o aumento contínuo da vazão de reciclo e a redução, também contínua, da vazão de benzeno. Como essas manipuladas são restringidas, o resultado final é que elas atinjam as restrições e as controladas estabilizam em valores completamente diferentes dos valores desejados. A utilização do simulador com modelo rigoroso aumentou significativamente o tempo de execução da simulação. Em relação ao modelo linear, o aumento foi de 450 vezes, isto é, cada 2 minutos de simulação são executados em 1.5 minutos.

8.4 – Simulação com modelo linear e RIHMPC-II

Para minimizar possíveis problemas numéricos, calcula-se o número de condicionamento das matrizes dos ganhos estáticos dos modelos obtidos, isto é, a relação entre o maior e o menor autovalor da matriz. Os modelos que apresentam

valor alto para este número são descartados. Para este estudo optou-se por descartar os modelos cujo valor de número de condicionamento fosse maior que 1700. Os valores dos números de condicionamento estão na tabela 8.4 e foram obtidos após a aplicação de uma matriz de transformação $IT = \text{diag}([10 \ 0.001 \ 0.01])$ aos modelos.

Tabela 8.4 – Número de condicionamento das matrizes dos ganhos estáticos dos modelos

Modelo	Número de condicionamento
1	1400
2	2600
3	360
4	1800
5	645
6	1400
7	1400
8	3500
9	380
10	1200

Avaliando-se o resultado expresso na tabela acima, descartam-se os modelos 2, 4 e 8. Com isso, o RIHMPC-II é configurado com sete modelos.

As figuras a seguir apresentam o comportamento do MPC com múltiplos modelos para vários parâmetros de sintonia, conforme tabela 8.5. Em todos os casos a planta é representada pelo modelo 5. Para as variáveis manipuladas, valem as restrições da tabela 8.2.

Tabela 8.5 – RIHMPC-II - ajuste dos parâmetros de sintonia

Caso	$R_1 = \text{diag}...$	$V = \text{diag}...$	$Q = \text{diag}...$	T (min)	H_u	$\sigma_{\max}(R)$	$\sigma_{\min}(.V.)$
5	[2 2 1]	[60000 600 600]	[0.001 0.001 0.0005]	10	2	2	4.5
6	[1 1 1]	[60000 600 600]	[0.001 0.001 0.0005]	10	2	1	4.5
7	[1 1 1]	[20000 100 100]	[0.001 0.001 0.0005]	10	2	1	1.3
8	[2 2 1]	[60000 600 600]	[0.01 0.01 0.01]	10	2	2	4.5

Figura 8.6 – Modelo linear – RIHMPC-II e parâmetros de sintonia do caso 5

Figura 8.7 – Modelo linear – RIHMPC-II e parâmetros de sintonia do caso 6

Figura 8.8 – Modelo linear – RIHMPC-II e parâmetros de sintonia do caso 7

Figura 8.9 – Modelo linear – RIHMPC-II e parâmetros de sintonia do caso 8

O comportamento do MPC com múltiplos modelos também apresenta o tempo elevado para que as variáveis controladas atinjam os valores de referência e o comportamento ruidoso nas variáveis manipuladas. O tempo de execução do algoritmo é 75% maior que o caso nominal. O caso 5 é o que apresenta menor tempo para que as controladas atinjam os valores de referência e, por isso, será utilizado na simulação integrada ao HYSYS™.

8.5 – Simulação com modelo rigoroso e RIHMPC-II – caso servo

O MPC com múltiplos modelos integrado ao HYSYS™, sintonizado conforme o caso 5, também é avaliado para uma variação nos valores de referência das variáveis controladas de acordo com a tabela 8.1. Além desta, também é apresentado o comportamento deste MPC para uma variação mais forte nos valores de referência das variáveis controladas, representada na tabela 8.6. Em ambos os casos, os valores iniciais não são os mesmos das tabelas devido à transição do módulo estático para o módulo dinâmico do simulador.

Tabela 8.6 – Variação forte nos valores de referência das controladas

	NA no benzeno %m	T no benzeno ppm	B no TXil ppm
Valor inicial	0.190	150	120
Valor final	0.180	50	40
Variação	0.010	100	80

As figuras a seguir apresentam o comportamento do MPC múltiplos modelos para as variações nos valores de referência conforme as tabelas 8.1 e 8.6.

Figura 8.10 – Modelo rigoroso – RIHMPC-II e parâmetros de sintonia com melhor ajuste. Variação dos valores de referência conforme tabela 8.1

Figura 8.11 – Modelo rigoroso – RIHMPC-II e parâmetros de sintonia para melhor ajuste. Variação dos valores de referência conforme tabela 8.6

Das figuras acima, observa-se que o RIHMPC-II conduz as variáveis controladas para os seus respectivos valores de referência, inclusive para o caso de forte variação nestes valores. O tempo de execução da simulação é similar ao caso com modelo rigoroso e IHMPC-II.

8.6 – Simulação com modelo rigoroso e RIHMPC-II – caso regulador

Para a avaliação do caso regulador a estratégia de controle no simulador é alterada. A figura 8.12 apresenta a nova configuração onde destacam-se três novos controladores de vazão, FIC-11, FIC-12 e FIC-13, e um misturador, mixer. Com essa estratégia, a perturbação na composição da carga é obtida através da mistura de uma corrente com composição de carga 1 com outra com composição de carga 2, especificadas na tabela 3.3, mantendo-se, porém, constante a vazão de carga total para a coluna.

Figura 8.12 – Estratégia de controle da coluna de benzeno – caso carga

Assim, para uma variação no teor de benzeno na carga de 0.1 % massa, modelo 5 como caso base, a vazão da corrente de composição de carga 2 é alterada de 0 para 12 m³/d porém, a vazão total para a coluna é mantida em 535 m³/d. Para esta perturbação, a resposta do processo, mantendo-se as demais variáveis manipuladas fixas, é representada pela figura 8.13.

Figura 8.13 – Comportamento dinâmico – perturbação na composição da carga

Observa-se da figura 8.13 que o tempo para estabilização do processo é relativamente curto, em torno de 60 horas. Devido às variáveis manipuladas permanecerem fixas, o teor de contaminantes na corrente de benzeno, os não aromáticos e o tolueno, diminuem. Entretanto, o teor de benzeno na corrente de fundo apresenta um forte aumento.

Conhecido o comportamento dinâmico do processo frente à perturbação na composição da carga, o simulador é integrado ao controlador RIHMPC-II com a mesma sintonia do caso 5. O processo é, então, submetido à perturbação na composição da carga e o comportamento o controlador é apresentado na figura 8.14.

Figura 8.14 – Modelo rigoroso – RIHMPC-II, parâmetros de sintonia com melhor ajuste e caso carga

Para a perturbação de 0.1 % massa no teor de benzeno na carga da coluna, observa-se que o controlador RIHMPC-II consegue manter as variáveis controladas em seus respectivos valores de referência porém, com razoável variação nas mesmas até a estabilização do processo. Particularmente, o tempo de 100 horas que é necessário para fazer estas variáveis voltarem para as proximidades dos valores de referência é excessivamente longo em termos práticos. Para a perturbação considerada, uma das variáveis controladas, o teor de tolueno na corrente de benzeno, atingiu níveis excessivamente altos (maior que 550 ppm). Assim, justifica-se a inclusão no processo de um tanque pulmão para o amortecimento nas variações da composição da carga. Esse tanque é usado na prática e conseqüentemente espera-se que o nível de perturbação considerado neste estudo seja consideravelmente maior que o observado na planta.

9

CONCLUSÕES E SUGESTÕES**9.1 – Conclusões**

Este trabalho visou avaliar o desempenho dos controladores de horizonte infinito com um modelo interno – IHMPC-II – e com múltiplos modelos – RIHMPC-II –, ambos desenvolvidos por Rodrigues e Odloak (2001), frente a um processo de dinâmica lenta e não linear, como o da coluna de benzeno da unidade de recuperação de aromáticos da Refinaria Presidente Bernardes de Cubatão. Para tanto, utilizou-se o procedimento desenvolvido por Almeida Neto (1999) para análise de MPC, tendo o HYSYSTM como simulador de processos e o MATLABTM como ambiente para o controle supervisor. Assim, pode-se destacar:

- A avaliação do comportamento do processo mostrou que o mesmo é fortemente não linear, com variações de ganhos estáticos da ordem de centenas de vezes, como o caso do par B no TXil x vazão de reciclo. Além disso, por se tratar de coluna de alta pureza, a região de operação é bastante restrita;
- A identificação do sistema mostrou que alguns pares de variáveis controladas x manipuladas não são bem representadas por modelos lineares, como o par NA no benzeno x carga térmica do refeedor;
- O MPC empregado utilizou a representação do modelo na forma de variáveis de estado e orientado à predição da saída, o que possibilitou a integração da função objetivo ao longo do horizonte de predição tendendo ao infinito. A estabilidade é garantida para o caso nominal porém, para o caso robusto, a mesma é garantida apenas para os modelos do conjunto $\mathbb{M}_M$;
- O MPC com apenas um modelo interno, IHMPC-II, não foi capaz de conduzir as variáveis controladas para os valores de referência, ao contrário do controlador robusto, RIHMPC-II.

Portanto, para o sistema estudado, o controlador robusto mostrou-se adequado e com um bom desempenho para perturbações do tipo servo.

9.2 – Sugestões

Como sugestões para trabalhos futuros, pode-se propor os seguintes tópicos:

- Avaliar o desempenho dos controladores com outra estratégia de controle, isto é, outro conjunto de variáveis controladas e manipuladas;
- Avaliar o desempenho dos controladores IHMPC-II e RIHMPC-II para alterações na vazão da carga;
- Comparar o desempenho dos controladores IHMPC-II e RIHMPC-II com controladores preditivos do tipo DMC com um modelo interno ou com múltiplos modelos;
- Comparar o desempenho dos controladores IHMPC-II e RIHMPC-II com controladores não lineares.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA NETO, E. Controle preditivo multimodelos de uma coluna debutanizadora. Dissertação (Mestrado) - **Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**, 1999. 200p.
- ALMEIDA NETO, E.; ZANIN, A. C.; ODLOAK, D. Advanced control and optimization of a crude vacuum unit. **XI Congresso Brasileiro de Automática, - I Simpósio de Automática Aplicada**, Anais p.23-28, São Paulo, 1996.
- BADGWELL, T. A. Robust model predictive control of stable linear systems. **Int. J. Control**, v.68, n.4, p.797-818, 1997.
- BADGWELL, T. A. Robust stability conditions for SISO model predictive control algorithms. **Automatica**, v.33, n.7, p.1357-1361, 1997.
- CARRAPIÇO, O. L.; OLIVEIRA, L. L. Multivariable control increases coke unit refinery throughputs. **Hydrocarbon Processing**, v.77, n.7, p.77-83, 1998.
- CUTLER, C. R.; RAMAKER, B. L. Dynamic matrix control – a computer control algorithm. **AIChE 86th National Meeting**, Houston, TX, 1979.
- CUTLER, C. R.; TRAN, D. Dynamic matrix control on benzene and toluene towers. **Proceedings of ISA**, paper #89-0498, p. 555-540, 1989.
- GEORGIOU, A.; GEORGAKIS, C.; LUYBEN, W. Nonlinear dynamic matrix control for high-purity distillation. **AIChE Journal**, v.33, n.8, p.1287-1298, 1988.
- KISTER, H. **Distillation design**. New York: McGraw-Hill, 1992.
- LEE, J. H.; YU, Z. Worst-case formulations of model predictive control for systems with bounded parameters. **Automatica**, v.33, n.5, p.763-781, 1997.
- LÉVINE, J.; ROUCHON, P. Quality control of binary distillation columns via nonlinear aggregated models. **Automatica**, v.27, n.3, p.463-480, 1991.
- LUYBEN, W. L.; FUENTES, C. Control of high-purity distillation columns. **Ind. Eng. Chem. Process Des. and Dev.**, v.22, p.361-366, 1983.

- MAGALHÃES, M. V. O.; ODLOAK, D. Multivariable quality control of a crude oil fractionator. **DYCORD'95, IFAC Conference, Dynamics and Control of Chemical Reactors, Distillation Columns and Batch Processes**, p.583-488, Copenhagen, 1995.
- McDONALD, K. A.; McAVOY, T. J. Application of dynamic matrix control to moderate and high-purity distillation towers. **Ind. Eng. Chem. Res.**, v.26, n.5, p.1011-1018, 1987.
- MICHALSKA, A H.; MAYNE, D. Q., Robust receding horizon control of constrained nonlinear-systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.38, n.11, p.1623-1633, 1993.
- MORO, L. F. L.; ODLOAK, D. Constrained multivariable control of fluid catalytic cracking converters. **Journal of Process Control**, v.5, n.1, p.29-39, 1995.
- MOUNTZIARIS, T. J.; GEORGIU, A. Design of robust noninteracting controllers for high-purity binary distillation columns. **Ind. Eng. Chem. Res.**, v.27, n.8, p.1450-1460, 1988.
- ODLOAK, D. A new state-space approach to model predictive control, **Braz. Jour. Chem. Engng**, v.13, n.3, p.152-167, 1996.
- PATWARDHAN, A. A.; EDGAR, T. F.; Nonlinear model predictive control of a packed distillation column. **Ind. Eng. Chem. Res.**, v.32, n.10, p.2345-2356, 1993.
- PENG, D.Y.; ROBINSON, D.B. A new two constant equation of state. **Ind. Eng. Chem. Fundamen.**, v.15, p.59-64, 1976.
- RAWLINGS, J. B.; MUSKE, K. R. The stability of constrained Receding Horizon Control, **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.38, n.10, p.1512-1516, 1993.
- RICHALET, J. et al. Model predictive heuristic control: application to industrial process. **Automatica**, v.14, n.15, p413-428, 1978.
- RODRIGUES, M. A. Estabilidade robusta de controladores preditivos. Tese (Doutorado) - **Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**, 2001. 147p.
- RODRIGUES, M. A.; ODLOAK, D. Output feedback MPC with guaranteed robust stability. **Journal of Process Control**, v.10, p.557-572, 2000.

RODRIGUES, M. A.; ODLOAK, D. Stable MPC via dynamic output feedback.

Preprints of International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes ADCHEM-2000. Pisa, Italy, June, 2000.

RODRIGUES, M. A.; ODLOAK, D. Modified infinite horizon MPC with input and state constraints. *Artigo submetido à Automática*, 2001.

APÊNDICE A

RESPOSTA AO DEGRAU ANALÍTICA DOS MODELOS IDENTIFICADOS

Para o modelo 1:

$$y_{11}(t) = 0.0298 + 0.0001e^{(-0.152)t} - 0.0299e^{(-0.0004)t}$$

$$y_{12}(t) = 0.0337 + 0.0002e^{(-0.164)t} - 0.0339e^{(-0.0005)t}$$

$$y_{13}(t) = -0.0164 + (0.0082 + 0.142i)e^{(-0.105+0.041i)t} + (0.0082 - 0.142i)e^{(-0.105-0.041i)t}$$

$$y_{21}(t) = 9077 + 629e^{(-0.0038)t} - 9706e^{(-0.0002)t}$$

$$y_{22}(t) = 9754 + 222e^{(-0.0080)t} - 9976e^{(-0.0002)t}$$

$$y_{23}(t) = -647 + (323.5 - 354i)e^{(-0.021+0.038i)t} + (323.5 + 354i)e^{(-0.021-0.038i)t}$$

$$y_{31}(t) = -46.5 - 8.6e^{(-0.010)t} + 55.1e^{(-0.002)t}$$

$$y_{32}(t) = -37.6 - 2.3e^{(-0.023)t} + 39.9e^{(-0.0013)t}$$

$$y_{33}(t) = -524 + (262-38i)e^{(-0.035+0.060i)t} + (262+38i)e^{(-0.035-0.060i)t}$$

Para o modelo 2:

$$y_{11}(t) = 0.0100 + 0.0001e^{(-0.098)t} - 0.0101e^{(-0.0007)t}$$

$$y_{12}(t) = 0.0122 + 0.0001e^{(-0.294)t} - 0.0123e^{(-0.0008)t}$$

$$y_{13}(t) = -0.0191 + 5383e^{(-0.127)t} - 0.5192e^{(-0.099)t}$$

$$y_{21}(t) = 91.3 + 23.6e^{(-0.019)t} - 114.9e^{(-0.004)t}$$

$$y_{22}(t) = 94.9 + 25.2e^{(-0.013)t} - 120.1e^{(-0.0032)t}$$

$$y_{23}(t) = -948 + (474 - 573i)e^{(-0.021+0.030i)t} + (474 + 573i)e^{(-0.021-0.030i)t}$$

$$y_{31}(t) = -2551 - 656e^{(-0.0023)t} + 3207e^{(-0.0005)t}$$

$$y_{32}(t) = -2562 - 731e^{(-0.002)t} + 3293e^{(-0.0004)t}$$

$$y_{33}(t) = -685 + (342.5+9.8i)e^{(-0.022+0.044i)t} + (342.5-9.8i)e^{(-0.022-0.044i)t}$$

Para o modelo 3:

$$y_{11}(t) = 0.0201 + 0.0001e^{(-0.160)t} - 0.0202e^{(-0.0006)t}$$

$$y_{12}(t) = 0.0254 + 0.0002e^{(-0.163)t} - 0.0256e^{(-0.0006)t}$$

$$y_{13}(t) = -0.0222 + 0.1639e^{(-0.163)t} - 0.1471e^{(-0.070)t}$$

$$y_{21}(t) = 8643 + 706e^{(-0.0041)t} - 9349e^{(-0.0003)t}$$

$$y_{22}(t) = 8829 + 310e^{(-0.0068)t} - 9139e^{(-0.0002)t}$$

$$y_{23}(t) = -1643 + (821.5 - 965i)e^{(-0.021+0.033i)t} + (821.5 + 965i)e^{(-0.021-0.033i)t}$$

$$y_{31}(t) = -70 - 7.3e^{(-0.020)t} + 77.3e^{(-0.0018)t}$$

$$y_{32}(t) = -83.4 - 2.9e^{(-0.040)t} + 86.3e^{(-0.0013)t}$$

$$y_{33}(t) = -1214 + (607+22.8i)e^{(-0.024+0.031i)t} + (607-22.8i)e^{(-0.024-0.031i)t}$$

Para o modelo 4:

$$y_{11}(t) = 0.0115 + 0.0002e^{(-0.081)t} - 0.0117e^{(-0.0007)t}$$

$$y_{12}(t) = 0.0150 + 0.0003e^{(-0.092)t} - 0.0153e^{(-0.0009)t}$$

$$y_{13}(t) = -0.0280 + 0.1222e^{(-0.174)t} - 0.0942e^{(-0.054)t}$$

$$y_{21}(t) = 193 + 41e^{(-0.020)t} - 234e^{(-0.0035)t}$$

$$y_{22}(t) = 229 + 71e^{(-0.0120)t} - 300e^{(-0.003)t}$$

$$y_{23}(t) = -3116 + (1558 - 2192i)e^{(-0.020+0.020i)t} + (1558 + 2192i)e^{(-0.020-0.020i)t}$$

$$y_{31}(t) = -2470 - 890e^{(-0.022)t} + 3360e^{(-0.0006)t}$$

$$y_{32}(t) = -2461 - 776e^{(-0.002)t} + 3237e^{(-0.0005)t}$$

$$y_{33}(t) = -1777 + (888.5+113i)e^{(-0.015+0.019i)t} + (888.5-113i)e^{(-0.015-0.019i)t}$$

Para o modelo 5:

$$y_{11}(t) = 0.0159 + 0.0001e^{(-0.158)t} - 0.0160e^{(-0.0006)t}$$

$$y_{12}(t) = 0.0204 + 0.0002e^{(-0.175)t} - 0.0206e^{(-0.0007)t}$$

$$y_{13}(t) = -0.0116 + (0.0058 + 0.1560i)e^{(-0.121+0.0489i)t} + (0.0058 - 0.1560i)e^{(-0.121-0.0489i)t}$$

$$y_{21}(t) = 8250 + 644e^{(-0.0050)t} - 8894e^{(-0.0004)t}$$

$$y_{22}(t) = 8233 + 317e^{(-0.0074)t} - 8550e^{(-0.0003)t}$$

$$y_{23}(t) = -2516 + (1258 - 1347i)e^{(-0.021+0.033i)t} + (1258 + 1347i)e^{(-0.021-0.033i)t}$$

$$y_{31}(t) = -96.2 - 12.5e^{(-0.017)t} + 108.7e^{(-0.0019)t}$$

$$y_{32}(t) = -109.1 - 3.6e^{(-0.045)t} + 112.7e^{(-0.0014)t}$$

$$y_{33}(t) = -2072 + (1036 + 8.29i)e^{(-0.019+0.016i)t} + (1036 - 8.29i)e^{(-0.019-0.016i)t}$$

Para o modelo 6:

$$y_{11}(t) = 0.0104 + 0.0001e^{(-0.100)t} - 0.0105e^{(-0.0007)t}$$

$$y_{12}(t) = 0.0165 + 0.0004e^{(-0.097)t} - 0.0169e^{(-0.0008)t}$$

$$y_{13}(t) = -0.0323 + 0.1346e^{(-0.193)t} - 0.1023e^{(-0.047)t}$$

$$y_{21}(t) = 254.5 + 31e^{(-0.027)t} - 285.5e^{(-0.0029)t}$$

$$y_{22}(t) = 365 + 49e^{(-0.018)t} - 414e^{(-0.0024)t}$$

$$y_{23}(t) = -5842 + (2921 - 4594i)e^{(-0.019+0.017i)t} + (2921 + 4594i)e^{(-0.019-0.017i)t}$$

$$y_{31}(t) = -2471 - 919e^{(-0.0025)t} + 3389e^{(-0.0007)t}$$

$$y_{32}(t) = -2523 - 282e^{(-0.0039)t} + 2805e^{(-0.0004)t}$$

$$y_{33}(t) = -3440 + (1720 + 364i)e^{(-0.012+0.009i)t} + (1720 - 364i)e^{(-0.012-0.009i)t}$$

Para o modelo 7:

$$y_{11}(t) = 0.0297 + 0.0001e^{(-0.151)t} - 0.0298e^{(-0.0004)t}$$

$$y_{12}(t) = 0.0320 + 0.0002e^{(-0.171)t} - 0.0322e^{(-0.0004)t}$$

$$y_{13}(t) = -0.0156 + (0.0078 + 0.307i)e^{(-0.115+0.025i)t} + (0.0078 - 0.307i)e^{(-0.115-0.025i)t}$$

$$y_{21}(t) = 9088 + 269e^{(-0.062)t} - 9357e^{(-0.0002)t}$$

$$y_{22}(t) = 9299 + 124e^{(-0.010)t} - 9423e^{(-0.0001)t}$$

$$y_{23}(t) = -973 + (486.5 - 578i)e^{(-0.021+0.031i)t} + (486.5 + 578i)e^{(-0.021-0.031i)t}$$

$$y_{31}(t) = -209 - 30e^{(-0.010)t} + 239e^{(-0.001)t}$$

$$y_{32}(t) = -252 - 22e^{(-0.011)t} + 274e^{(-0.0009)t}$$

$$y_{33}(t) = -1825 + (912.5 + 36.7i)e^{(-0.02+0.031i)t} + (912.5 - 36.7i)e^{(-0.02-0.031i)t}$$

Para o modelo 8:

$$y_{11}(t) = 0.0127 + 0.0001e^{(-0.126)t} - 0.0128e^{(-0.0006)t}$$

$$y_{12}(t) = 0.0093 + 0.0002e^{(-0.122)t} - 0.0095e^{(-0.0012)t}$$

$$y_{13}(t) = -0.0178 + (0.0089 + 0.19i)e^{(-0.112+0.034i)t} + (0.0089 - 0.19i)e^{(-0.112-0.034i)t}$$

$$y_{21}(t) = 156 + 55e^{(-0.009)t} - 211e^{(-0.002)t}$$

$$y_{22}(t) = 78 + (-39 + 82i)e^{(-0.006+0.0028i)t} + (-39 - 82i)e^{(-0.006-0.0028i)t}$$

$$y_{23}(t) = -1878 + (939 - 1379i)e^{(-0.0201+0.019i)t} + (939 + 1379i)e^{(-0.0201-0.019i)t}$$

$$y_{31}(t) = -2630 - 107e^{(-0.0077)t} + 2737e^{(-0.0003)t}$$

$$y_{32}(t) = -2575 - 447e^{(-0.004)t} + 3022e^{(-0.0006)t}$$

$$y_{33}(t) = -3260 + (1630 + 41i)e^{(-0.014+0.010i)t} + (1630 - 41i)e^{(-0.014-0.010i)t}$$

Para o modelo 9:

$$y_{11}(t) = 0.0138 + 0.0001e^{(-0.164)t} - 0.0139e^{(-0.0008)t}$$

$$y_{12}(t) = 0.0186 + 0.0002e^{(-0.172)t} - 0.0188e^{(-0.0009)t}$$

$$y_{13}(t) = -0.0162 + (0.0081 + 0.125i)e^{(-0.116+0.053i)t} + (0.0081 - 0.125i)e^{(-0.116-0.053i)t}$$

$$y_{21}(t) = 8587 + 707e^{(-0.0055)t} - 9294e^{(-0.0004)t}$$

$$y_{22}(t) = 8703 + 325e^{(-0.0089)t} - 9028e^{(-0.0003)t}$$

$$y_{23}(t) = -1751 + (875.5 - 955i)e^{(-0.020+0.038i)t} + (875.5 + 955i)e^{(-0.020-0.038i)t}$$

$$y_{31}(t) = -12.1 - 3.9e^{(-0.015)t} + 16.0e^{(-0.0037)t}$$

$$y_{32}(t) = -13.9 - 0.9e^{(-0.034)t} + 14.8e^{(-0.002)t}$$

$$y_{33}(t) = -485 + (242.5 - 9.5i)e^{(-0.031+0.065i)t} + (242.5 + 9.5i)e^{(-0.031-0.065i)t}$$

Para o modelo 10:

$$y_{11}(t) = 0.0165 + 0.0002e^{(-0.082)t} - 0.0167e^{(-0.0006)t}$$

$$y_{12}(t) = 0.0217 + 0.0003e^{(-0.011)t} - 0.0220e^{(-0.0007)t}$$

$$y_{13}(t) = -0.0219 + 0.2686e^{(-0.162)t} - 0.2467e^{(-0.094)t}$$

$$y_{21}(t) = 365 + 43e^{(-0.024)t} - 408e^{(-0.0026)t}$$

$$y_{22}(t) = 438 + 50e^{(-0.018)t} - 488e^{(-0.002)t}$$

$$y_{23}(t) = -2700 + (1350 - 1652i)e^{(-0.021+0.031i)t} + (1350 + 1652i)e^{(-0.021-0.031i)t}$$

$$y_{31}(t) = -2566 - 343e^{(-0.003)t} + 2909e^{(-0.0003)t}$$

$$y_{32}(t) = -2572 - 311e^{(-0.002)t} + 2883e^{(-0.0003)t}$$

$$y_{33}(t) = -672 + (336 + 22.2i)e^{(-0.022+0.045i)t} + (336 - 22.2i)e^{(-0.022-0.045i)t}$$

Nas equações acima $y_{ij}(t)$ representa uma resposta da saída i no instante t para um degrau unitário aplicado na entrada j no instante 0, onde:

$i = 1$ - representa a controlada NA no benzeno.

$i = 2$ - representa a controlada T no benzeno.

$i = 3$ - representa a controlada B no TXil.

$j = 1$ - representa a manipulada vazão de reciclo.

$j = 2$ - representa a manipulada vazão de benzeno.

$j = 3$ - representa a manipulada carga térmica do refeedor.

APÊNDICE B
FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DOS MODELOS
IDENTIFICADOS

Nas tabelas a seguir, apresentam-se os modelos identificados no capítulo 6 na forma de função de transferência. Os parâmetros da tabela obedecem à seguinte equação:

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{1 + a_1 s + a_2 s^2} \quad (\text{B.1})$$

Tabela B.1 – Parâmetros da função de transferência para o modelo 1

MODELO	Controlada	Manipulada	b_0	b_1	a_1	a_2
1	NA no benzeno	V. de reciclo	0.02978	0.09748	-2272	14924
		V. de benzeno	0.03373	0.2475	-2071	12585
		CT do refervedor	-0.01638	1.0559	-16.5	78.6
	T no benzeno	V. de reciclo	9077	-742.5	-4375	109500
		V. de benzeno	9754	-22600	-5674	69464
		CT do refervedor	-647.2	-7002	-22.6	536.3
	B no TXil	V. de reciclo	-46.54	-23	-731	62378
		V. de benzeno	-37.62	-0.9255	-804	33387
		CT do refervedor	-523.8	2871	-14.6	210.9

Tabela B.2 – Parâmetros da função de transferência para o modelo 2

MODELO	Controlada	Manipulada	b_0	b_1	a_1	a_2
2	NA no benzeno	V. de reciclo	0.0100	0.0517	-1425	14484
		V. de benzeno	0.01219	0.0766	-1186	4019
		CT do refervedor	-0.01910	1.3438	-17.99	79.68
	T no benzeno	V. de reciclo	91.28	-15.09	-302.7	12995
		V. de benzeno	94.86	-1041	-387.5	23295
		CT do refervedor	-948.6	-10965	-31.46	757
	B no TXil	V. de reciclo	-2551	-1389	-2528	901080
		V. de benzeno	-2562	-1381	-2754	1127141
		CT do refervedor	-685.2	6532	-18.02	408.9

Tabela B.3 – Parâmetros da função de transferência para o modelo 3

MODELO	Controlada	Manipulada	b_0	b_1	a_1	a_2
3	NA no benzeno	V. de reciclo	0.0201	0.0516	-1787	11155
		V. de benzeno	0.0254	0.2538	-1720	10527
		CT do refervedor	-0.0222	0.1532	-20.50	88.08
	T no benzeno	V. de reciclo	8643	3149	-3448	775183
		V. de benzeno	8829	-39036	-4363	620891
		CT do refervedor	-1643	-1843	-27.20	631.7
	B no TXil	V. de reciclo	-69.96	-48.48	-595.7	27649
		V. de benzeno	-83.38	-40.07	-775.7	18722
		CT do refervedor	-1214	1974	-31	655.1

Tabela B.4 – Parâmetros da função de transferência para o modelo 4

MODELO	Controlada	Manipulada	b_0	b_1	a_1	a_2
4	NA no benzeno	V. de reciclo	0.0115	0.1127	-1362	16605
		V. de benzeno	0.0150	0.1862	-1079	11586
		CT do refervedor	-0.0280	1.704	-24.11	105.4
	T no benzeno	V. de reciclo	192.8	-28.63	-335.1	14236
		V. de benzeno	229.1	-2351	-401.1	26502
		CT do refervedor	-3116	-31623	-49.04	1209
	B no TXil	V. de reciclo	-2470	-1024	-2114	739886
		V. de benzeno	-2461	-1499	-2417	910826
		CT do refervedor	-1777	52620	-50.88	1721

Tabela B.5 – Parâmetros da função de transferência para o modelo 5

MODELO	Controlada	Manipulada	b_0	b_1	a_1	a_2
5	NA no benzeno	V. de reciclo	0.0159	0.0678	-1701	10732
		V. de benzeno	0.0204	0.1911	-1477	8399
		CT do refervedor	-0.0115	0.9789	-14.21	58.80
	T no benzeno	V. de reciclo	8250	-2341	-2988	562546
		V. de benzeno	8233	-55673	-3595	466713
		CT do refervedor	-2516	-24376	-26.93	649
	B no TXil	V. de reciclo	-96.2	-46.94	-591.3	32168
		V. de benzeno	-109.1	-41.88	-724.3	15492
		CT do refervedor	-2072	62660	-60.08	1541

Tabela B.6 – Parâmetros da função de transferência para o modelo 6

MODELO	Controlada	Manipulada	b_0	b_1	a_1	a_2
6	NA no benzeno	V. de reciclo	0.0104	0.0480	-1539	15340
		V. de benzeno	0.0165	0.2446	-1192	12144
		CT do refervedor	-0.0323	2.360	-26.64	111.1
	T no benzeno	V. de reciclo	254.5	-65.30	-380.5	12853
		V. de benzeno	365.1	-2867	-465.2	22772
		CT do refervedor	-5842	-65856	-57.87	1491
	B no TXil	V. de reciclo	-2471	-528.6	-1886	596334
		V. de benzeno	-2523	-3405	-2791	644508
		CT do refervedor	-3440	211464	-106.4	4355

Tabela B.7 – Parâmetros da função de transferência para o modelo 7

MODELO	Controlada	Manipulada	b_0	b_1	a_1	a_2
7	NA no benzeno	V. de reciclo	0.0297	0.1803	-2709	17851
		V. de benzeno	0.0320	0.2479	-2283	13331
		CT do refervedor	-0.0157	1.240	-16.59	72.06
	T no benzeno	V. de reciclo	9088	1350829	-5587	89308
		V. de benzeno	9299	-30165	-7393	722889
		CT do refervedor	-972.6	-11037	-30.25	724.5
	B no TXil	V. de reciclo	-209.1	-355.2	-949.0	88144
		V. de benzeno	-251.9	-447.3	-1203	100087
		CT do refervedor	-1825	29927	-31.22	630.8

Tabela B.8 – Parâmetros da função de transferência para o modelo 8

MODELO	Controlada	Manipulada	b_0	b_1	a_1	a_2
8	NA no benzeno	V. de reciclo	0.0127	0.0171	-1631	12870
		V. de benzeno	0.0093	0.0959	-857.8	6941
		CT do refervedor	-0.0178	1.092	-16.31	72.70
	T no benzeno	V. de reciclo	155.5	-153.1	-525.4	45736
		V. de benzeno	77.96	-922.1	-263.8	20639
		CT do refervedor	-1878	-17317	-53.84	1330
	B no TXil	V. de reciclo	-2630	-1290	-3456	432342
		V. de benzeno	-2575	-1053	-1901	405164
		CT do refervedor	-3260	154524	-93.04	3366

Tabela B.9 – Parâmetros da função de transferência para o modelo 9

MODELO	Controlada	Manipulada	b_0	b_1	a_1	a_2
9	NA no benzeno	V. de reciclo	0.0138	0.0539	-1247	7569
		V. de benzeno	0.0186	0.1484	-1134	6558
		CT do refervedor	-0.0162	0.9314	-14.21	61.16
	T no benzeno	V. de reciclo	8587	-1889	-2562	431723
		V. de benzeno	8703	-44668	-3101	336521
		CT do refervedor	-1751	-21077	-21.23	543.8
	B no TXil	V. de reciclo	-12.09	-5.662	-338.2	18147
		V. de benzeno	-13.85	-6.864	-501.9	13851
		CT do refervedor	-484.8	2860	-12.80	205.0

Tabela B.10 – Parâmetros da função de transferência para o modelo 10

MODELO	Controlada	Manipulada	b_0	b_1	a_1	a_2
10	NA no benzeno	V. de reciclo	0.0165	0.1853	-1638	19905
		V. de benzeno	0.0216	0.2710	-1454	13163
		CT do refervedor	-0.0219	1.332	-16.79	65.48
	T no benzeno	V. de reciclo	365.3	-8.816	-431.6	16056
		V. de benzeno	438.1	-3695	-528.0	26483
		CT do refervedor	-2700	-32791	-29.99	716.9
	B no TXil	V. de reciclo	-2566	-1744	-3658	1260424
		V. de benzeno	-2572	-1037	-4387	1691032
		CT do refervedor	-672.2	6686	-17.54	394.6

APÊNDICE C

COMPLEMENTO DE SCHUR

Seja $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})^T$, $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x})^T$ e $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$ funções matriciais linearmente dependentes em $\mathbf{x}$, então a LMI:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (\text{C.1})$$

é equivalente a:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} ; \mathbf{R}(\mathbf{x}) - \mathbf{Z}(\mathbf{x})^T \mathbf{Q}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{Z}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \quad (\text{C.2})$$

ou

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} ; \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{Z}(\mathbf{x})^T > \mathbf{0} \quad (\text{C.3})$$

Demonstração: Seja a matriz

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}^T \mathbf{Q}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

Assim, a seguinte igualdade é válida:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} - \mathbf{Z}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Z} \end{bmatrix} \mathbf{T}^T$$

Portanto, se vale a equação (C.1), então o segundo termo da igualdade também deve ser positivo definido, o que implica em (C.2).

Para a equivalência com (C.3), seja a matriz:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Z} \mathbf{R}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

e com o produto matricial:

$$\mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} - \mathbf{Z} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Z}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \mathbf{T}^T$$

chega-se, de forma semelhante, à equivalência entre (C.1) e (C.3).