JOSÉ MANUEL GONZALEZ TUBIO PEREZ

**CONTROLE PREDITIVO ROBUSTO COM REALIMENTAÇÃO
DE SAÍDA**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do título
de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia Química

Orientador:
Prof. Dr Darci Odloak

São Paulo
Março de 2006

São Paulo

Março de 2006

Perez, José Manuel Gonzalez Tubio

Controle Preditivo Robusto com Realimentação de Saída
Universidade de São Paulo: São Paulo, 2006 – 120p.

Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo. Departamento de Engenharia Química.

1. Controle de Processos 2. Controle Preditivo 3. Controle Robusto
4. Modelo Espaço Estado 5. Modelo de Realinhamento

I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de
Engenharia Química II. título

Agradecimentos

Ao Mestre Jesus, Sublime Peregrino, que exemplificou todo amor que sempre pregou. E que nunca nos abandona, apesar de nossas falhas e insistências em nossos erros. Sempre nos guia, conduzindo imensas oportunidades para o nosso aprendizado e nossa evolução. Agradeço por tudo que me deu na minha vida, dificuldades e alegrias, inspirando-me sempre para as decisões corretas. E, em especial, durante meu mestrado.

Ao Prof. Dr. Darci Odloak, mais que um mestre um amigo, por ter acreditado no meu valor, pelo conhecimento transmitido e, principalmente, pela amizade, compreensão, respeito, carinho e confiança demonstrados. Tenho-o como um exemplo a ser seguido. Creio que a você, Darci, se enquadra perfeitamente o pensamento: “*Aprende-se fazendo, ensina-se sendo*”. E você me ensinou, sendo.

Ao Prof. Dr. Roberto Guardani, que me motivou a continuar, sem me importar com os obstáculos, e se dispôs a me auxiliar da forma que fosse necessária.

Aos meus sobrinhos Rodrigo Gonzalez Tubio Machado, Felipe Gonzalez Tubio Machado e Viviane Gonzalez Tubio Machado, que se tornaram o meu maior orgulho pela educação, maturidade e bondade.

Ao meu cunhado Mário Maurício Alves Machado, pelo bom coração e presteza em sempre ajudar.

À minha irmã Rosa Maria Gonzalez Tubio por todo apoio, paciência e orientação recebidos desde a época do curso *Homo Sapiens*, quando ingressei na Escola Técnica Federal, iniciando minha vida profissional. Nunca esquecerei, também, o carinho e a conversa que tivemos na véspera do vestibular para a UFRJ. Muito obrigado, Rosinha.

Ao meu querido pai, que possa receber minhas pequenas vitórias como suas, na espiritualidade. Pelos bons momentos que vivemos juntos. Pela alegria que eu era recebido pelo senhor ao desembarcar da plataforma e chegar no Rio.

E, como não poderia deixar de ser, por aquela pessoa que fez tudo possível na minha vida, pela sua dedicação durante a minha infância e juventude, por sua orientação, amor, sabedoria transmitida e toda sua força nos momentos difíceis. *Obrigado é pouco, Mamãe. Te amo é muito pouco.* Apesar de metade da minha vida transcorrida sem a senhora ao meu lado nesse plano físico, seu amor e sua força continuam presentes em meu coração.

Homenagem

Pelo curso de especialização não concluído, pelos sonhos brutalmente interrompidos, pelo amor dedicado a toda família, pela caridade praticada através do exercício da medicina, principalmente na fronteira Brasil-Colômbia pelo Exército Brasileiro e no Rio de Janeiro, pelo exemplo de ser humano deixado a todos que o conheceram mais de perto, dedico este trabalho ao Capitão Tubio, meu irmão, esse ser humano que iluminou nossos caminhos de uma forma muito discreta, como era o seu jeito de ser. Através desse humilde trabalho público, quero deixar registrado o lado humano que nenhum jornal sensacionalista ou investigação policial retratou. Gostaria de te dizer o quanto te amo e que te compreendi, muito mais do que você imaginava, sem no entanto, jamais ter tido a oportunidade ou coragem de te dizer.

Ao realizar um trabalho na refinaria de Manaus em 2000, uma grande tristeza me abateu, imaginando você nos primeiros dias do Exército, nesta cidade. Deus, através de um desconhecido, me entregou a seguinte mensagem:

“Ante as lembranças queridas dos entes amados que te precederam na Grande Transformação, é natural que as tuas orações, em auxílio a eles, surjam orvalhadas de lágrimas. Entretanto, não permitas que a saudade se te faça desespero. Recorda-os, efetuando por eles, o bem que desejariam fazer. Imagina-lhes as mãos dentro das tuas e oferece algum apoio aos necessitados; lembra-lhes a presença amiga e visita um doente, qual se lhes estivesses atendendo à determinada solicitação; distribui sorrisos e palavras de amor com os irmãos algemados a rudes provas, como se os visses falando por teus lábios e atravessarás os dias de tristeza ou de angústia com a luz da esperança no coração, caminhando, em rumo certo, para reencontro feliz com todos eles, nas bênçãos de Jesus, em plena imortalidade. Emmanuel – Chico Xavier”.

Um beijo bem grande, meu querido irmão, e siga em paz o seu caminho, exercendo o perdão incondicional e buscando os maiores bens da vida: o amor e a compreensão dos desígnios da vida maior.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	i
LISTA DE TABELAS	vi
LISTA DE SÍMBOLOS	vii
CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO E REVISÃO DA LITERATURA SOBRE CONTROLADORES PREDITIVOS ROBUSTOS COM REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA E RESTRIÇÕES NAS VARIÁVEIS MANIPULADAS	2
1.1 INTRODUÇÃO	2
1.1.1 OBJETIVOS	2
1.1.2 MOTIVAÇÃO	2
1.2 REVISÃO DA LITERATURA	2
1.3 CAPÍTULOS DA DISSERTAÇÃO	7
1.4 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES (LMI)	8
CAPÍTULO 2 FORMULAÇÃO DO MPC ROBUSTO COM REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA DE RODRIGUES & ODLOAK (2005)	12
2.1 INTRODUÇÃO	12
2.2 FORMULAÇÃO DO MPC NOMINAL	12
2.3 FORMULAÇÃO DO MPC NOMINAL ESTÁVEL	17
2.4 FORMULAÇÃO DO MPC ROBUSTO CONSIDERANDO INCERTEZA DE MODELO	20
2.5 FORMULAÇÃO DO MPC ROBUSTO CONSIDERANDO INCERTEZA DE MODELO E SATURAÇÃO DAS ENTRADAS	23
CAPÍTULO 3 MODELO DE REALINHAMENTO DE MACIEJOWSKI NA FORMA INCREMENTAL	25
3.1 INTRODUÇÃO	25
3.2 MODELO DE REALINHAMENTO NA FORMA INCREMENTAL	27
CAPÍTULO 4 CONTROLADOR PREDITIVO MULTIVARIÁVEL NOMINALMENTE ESTÁVEL COM MODELO DE REALINHAMENTO	32
4.1 SÍNTESE DO MPC NOMINAL	32
4.2 SÍNTESE DO MPC NOMINAL COM ESTABILIDADE GARANTIDA	34
4.3 SÍNTESE DO MPC NOMINAL CONSIDERANDO SATURAÇÃO NAS ENTRADAS	40
CAPÍTULO 5 SÍNTESE DO MPC ROBUSTO CONSIDERANDO INCERTEZA DE MODELO	43
5.1 MPC ROBUSTO COM INCERTEZA DE MODELO POLITÓPICA OU MULTIPLANTAS SEM SATURAÇÃO DAS ENTRADAS	43

5.2 MPC ROBUSTO COM INCERTEZA DE MODELO POLITÓPICA COM SATURAÇÃO DAS ENTRADAS	46
5.3 DEMONSTRAÇÃO DA ESTABILIDADE DO CONTROLADOR PROPOSTO	47
CAPÍTULO 6 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	49
6.1 APLICAÇÃO DE CONTROLADOR NOMINAL ESTÁVEL EM PROCESSO NÃO INTEGRADOR	50
6.2 APLICAÇÃO DO CONTROLADOR ROBUSTO EM PROCESSO NÃO INTEGRADOR COM INCERTEZA DE MODELO	61
6.3 APLICAÇÃO DO CONTROLADOR NOMINAL EM PROCESSO NÃO INTEGRADOR COM INCERTEZA DE MODELO	73
6.4 APLICAÇÃO DO CONTROLADOR ROBUSTO EM PROCESSO INTEGRADOR COM INCERTEZA DE MODELO	74
6.5 APLICAÇÃO DO CONTROLADOR NOMINAL EM SISTEMA DE TRÊS VARIÁVEIS CONTROLADAS E TRÊS VARIÁVEIS MANIPULADAS	87
6.6 APLICAÇÃO DO CONTROLADOR ROBUSTO EM SISTEMA DE TRÊS VARIÁVEIS CONTROLADAS E TRÊS VARIÁVEIS MANIPULADAS	94
6.7 APLICAÇÃO DO CONTROLADOR ROBUSTO EM SISTEMA DE TRÊS VARIÁVEIS CONTROLADAS E TRÊS VARIÁVEIS MANIPULADAS CONSIDERANDO A OCORRÊNCIA DE UMA PERTURBAÇÃO NO SISTEMA	101
6.8 COMPARAÇÃO ENTRE AS VERSÕES DO CONTROLADOR EM MODELO NÃO INTEGRADOR	105
6.9 DISCUSSÃO DA COMPARAÇÃO ENTRE AS VERSÕES DO CONTROLADOR EM MODELO NÃO INTEGRADOR	111
CAPÍTULO 7 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	112
7.1 CONCLUSÕES	112
7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	114
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	115
APÊNDICE A	119
A COMPLEMENTO DE SCHUR	120

LISTA DE FIGURAS

Figura 6.1. Saídas controladas do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal sem saturação das entradas	53
Figura 6.2. Entradas manipuladas do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal sem saturação das entradas.....	53
Figura 6.3. Função de Lyapunov do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal sem saturação das entradas.....	54
Figura 6.4. Saídas controladas do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal com saturação de u_2	55
Figura 6.5. Entradas manipuladas do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal com saturação de u_2	55
Figura 6.6. Função de Lyapunov do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal com saturação de u_2	56
Figura 6.7. Saídas controladas do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal com saturação de u_2 priorizando y_1	57
Figura 6.8. Entradas manipuladas do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal com saturação de u_2 priorizando y_1	57
Figura 6.9. Função de Lyapunov V_k do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal com saturação de u_2 priorizando y_1	58
Figura 6.10. Função de Lyapunov V_{k1} do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal com saturação de u_2 priorizando y_1	58
Figura 6.11. Saídas controladas do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal com saturação momentânea de u_1	59
Figura 6.12. Entradas manipuladas do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal com saturação momentânea de u_1	60
Figura 6.13 Função de Lyapunov do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal com saturação momentânea de u_1	60
Figura 6.14. Saídas controladas do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto sem saturação das entradas	63
Figura 6.15. Entradas manipuladas do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto sem saturação das entradas.....	63

Figura 6.16. Função de Lyapunov do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto sem saturação das entradas.....	64
Figura 6.17. Saídas controladas do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_2	65
Figura 6.18. Entradas manipuladas do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_2	65
Figura 6.19. Função de Lyapunov do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_2	66
Figura 6.20. Função de Lyapunov V_{k1} do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_2	67
Figura 6.21. Saídas controladas do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_1	68
Figura 6.22. Entradas manipuladas do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_1	68
Figura 6.23. Função de Lyapunov do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_1	69
Figura 6.24. Saídas controladas do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_1 priorizando y_1	70
Figura 6.25. Entradas manipuladas do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_1 priorizando y_1	70
Figura 6.26. Saídas controladas do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_1 priorizando y_2	71
Figura 6.27. Entradas manipuladas do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_1 priorizando y_2	72
Figura 6.28. Função de Lyapunov do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_1 priorizando y_2	72
Figura 6.29. Função de Lyapunov V_{k2} do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_1 priorizando y_2	73
Figura 6.30. Saídas controladas da Desbutanizadora para o caso do controlador nominal com incerteza de modelo.....	74
Figura 6.31. Saídas controladas do sistema integrador para o caso nominal sem saturação das entradas.....	77

Figura 6.32. Entradas manipuladas do sistema integrador para o caso nominal sem saturação das entradas	78
Figura 6.33. Função de Lyapunov sistema integrador para o caso nominal sem saturação das entradas	78
Figura 6.34. Saídas controladas do sistema integrador para o caso nominal sem saturação das entradas	79
Figura 6.35. Entradas manipuladas do sistema integrador para o caso nominal sem saturação das entradas	80
Figura 6.36. Função de Lyapunov do sistema integrador para o caso nominal sem saturação das entradas	80
Figura 6.37. Saídas controladas do sistema integrador para o caso robusto sem saturação das entradas	81
Figura 6.38. Entradas manipuladas do sistema integrador para o caso robusto sem saturação das entradas	82
Figura 6.39. Função de Lyapunov do sistema integrador para o caso robusto sem saturação das entradas	82
Figura 6.40. Saídas controladas do sistema integrador para o caso robusto com saturação da entrada u_2	83
Figura 6.41. Entradas manipuladas do sistema integrador para o caso robusto com saturação da entrada u_2	84
Figura 6.42. Função de Lyapunov do sistema integrador para o caso robusto com saturação da entrada u_2	84
Figura 6.43. Saídas controladas do sistema integrador para o caso robusto com saturação da entrada u_2 com prioridade em y_1	85
Figura 6.44. Saídas controladas do sistema integrador para o caso robusto com saturação da entrada u_2 com prioridade em y_1	86
Figura 6.45. Função de Lyapunov V_k do sistema integrador para o caso robusto com saturação da entrada u_2 com prioridade em y_1	86
Figura 6.46. Função de Lyapunov V_{k1} do sistema integrador para o caso robusto com saturação da entrada u_2 com prioridade em y_1	87
Figura 6.47. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso nominal sem restrições nas entradas	89

Figura 6.48. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso nominal sem restrições nas entradas	90
Figura 6.49. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso nominal com restrição na entrada u_1	91
Figura 6.50. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso nominal com restrição na entrada u_1	91
Figura 6.51. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso nominal com restrição na entrada u_3	92
Figura 6.52. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso nominal com restrição na entrada u_3	93
Figura 6.53. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso nominal com restrição nas entradas u_2 e u_3	93
Figura 6.54. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso nominal com restrição nas entradas u_2 e u_3	94
Figura 6.55. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso robusto nominal sem restrição nas entradas	96
Figura 6.56. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso robusto nominal sem restrição nas entradas	96
Figura 6.57. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso robusto com incerteza sem restrição nas entradas	97
Figura 6.58. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso robusto com incerteza sem restrição nas entradas	98
Figura 6.59. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso robusto com incerteza e com restrição na entrada u_1	98
Figura 6.60. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso robusto com incerteza e com restrição na entrada u_1	99
Figura 6.61. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso robusto com incerteza e com restrição nas entradas u_1 e u_3	100
Figura 6.62. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso robusto com incerteza e com restrição nas entradas u_1 e u_3	100
Figura 6.63. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso nominal sem restrição nas entradas com perturbação em degrau do refluxo intermediário	102

Figura 6.64. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso nominal sem restrição nas entradas com perturbação em degrau do refluxo intermediário.....	102
Figura 6.65. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso robusto sem restrição nas entradas com perturbação em degrau do refluxo intermediário	103
Figura 6.66. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso robusto sem restrição nas entradas com perturbação em degrau do refluxo intermediário	104
Figura 6.67. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso robusto sem restrição nas entradas com perturbação em pulso do refluxo intermediário	104
Figura 6.68. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso robusto sem restrição nas entradas com perturbação em pulso do refluxo intermediário	105
Figura 6.69. Comparação das Variáveis Controladas com as duas versões de Controlador.....	107
Figura 6.70. Comparação das Variáveis Manipuladas com as duas versões de Controlador.....	107
Figura 6.71. Saídas controladas do sistema na versão do controlador proposto com saturação na entrada u_2	108
Figura 6.72. Entradas manipuladas do sistema na versão do controlador proposto com saturação na entrada u_2	109
Figura 6.73. Saídas controladas nas duas versões de controlador com saturação na entrada u_1	110
Figura 6.74. Entradas manipuladas nas duas versões de controlador com saturação na entrada u_1	110

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1. Sintonia do MPC para aplicação não integradora	52
Tabela 6.2. Sintonia do MPC para aplicação integradora.....	76
Tabela 6.3. Sintonia do MPC para comparação entre controladores	89
Tabela 6.4. Sintonia do MPC para comparação entre controladores	106
Tabela 6.5. Comparação do tempo de execução do problema <i>off-line</i>	111

LISTA DE SÍMBOLOS

A	matriz de estado do modelo com as entradas na forma incremental em malha aberta
$\bar{A}$	matriz de estado do modelo para predição de estados
$\tilde{A}$	matriz de estado do vetor de erro no modelo com as entradas na forma incremental
B	matriz de entrada do modelo com as entradas na forma incremental em malha aberta
$\bar{B}$	matriz de entrada do modelo para predição de estados
$\tilde{B}$	matriz de entrada do vetor de erro no modelo com as entradas na forma incremental
C	matriz do modelo incremental para predição das saídas
C_f	vetor coeficiente da função objetivo dos problemas de programação quadrática
$\bar{C}$	matriz do modelo incremental para predição das saídas
e	erro entre uma dada saída y qualquer e seu valor de referência y^{sp}
$G(s)$	matriz das funções de transferência entre as saídas e as entradas
$G_{i,j}(s)$	função de transferência entre uma saída i e uma entrada j
H	matriz Hessiana da função objetivo dos problemas de programação quadrática
I_{ny}	matriz identidade de dimensão $ny \times ny$
k	instante de tempo discreto
K_F	ganho do observador de estados
m	horizonte de controle das variáveis manipuladas
N	matriz auxiliar
$na_{i,j}$	número de pólos da função de transferência entre a saída y_i e a entrada u_j
np	horizonte de predição finito das variáveis controladas
nT	Intervalo discretizado de simulação
nu	número de entradas (variáveis manipuladas)

nx	número de estados
ny	número de saídas (variáveis controladas)
P	matriz auxiliar da função de Lyapunov
Q	matriz de Lyapunov
R	matriz de supressão das variáveis manipuladas
r	pólo de uma função de transferência
t	tempo
u	vetor das variáveis manipuladas
$\mathbb{U}$	espaço da região viável de solução das variáveis manipuladas
V_k	função de Lyapunov do algoritmo de controle num dado instante de tempo k
x	vetor de estados do modelo
x^e	vetor de erro dos estados do modelo
$[x]_{k k}$	vetor de estados no instante k atualizado com informações da planta no instante atual
$[x]_{k+1 k}$	vetor de estados no instante $k+1$ com informações da planta do instante anterior
$[y]_{k k}$	vetor das variáveis controladas no instante atual
y^{sp}	vetor de referência (<i>set-points</i>) das variáveis controladas
y_k^p	vetor de saídas da planta medidas no instante k
W	matriz de ponderação das variáveis controladas
W_{np}	matriz de ponderação das variáveis controladas no período de predição
0_{nu}	matriz de zeros de ordem $nu \times nu$

Símbolos Gregos

Δ	operador diferença
Δt	período de amostragem do controlador preditivo
λ	autovalores de uma matriz quadrada
τ	constante de tempo de um sistema de primeira ordem (domínio de Laplace)
θ	matriz dos tempos mortos do sistema
$\theta_{i,j}$	tempo morto entre uma saída i e uma entrada j

Siglas

DMC	Dynamic Matrix Control
GLP	Gás Liquefeito de Petróleo
LDMC	Linear Dynamic Matrix Control
LMI	Linear Matrix Inequality
MIMO	Multi-Input Multi-Output
MPC	Model Predictive Control
NLP	Non-Linear Programming
OPOM	Output Prediction Oriented Model
PVR	Pressão Vapor Reid
QDMC	Quadratic Dynamic Matrix Control
QP	Quadratic Programming
ROSSMPC	Reducer Order State Space MPC
SISO	Single-Input Single-Output
SQP	Sequential Quadratic Programming

Sobrescritos

T operação de transposição de uma matriz.

RESUMO

Esse trabalho apresenta uma contribuição para o projeto de um controlador MPC robusto quanto à estabilidade baseado na realimentação da saída e admitindo restrições nas entradas e incertezas no modelo da planta.

Ele estende a abordagem existente para o projeto de um MPC considerando o caso particular de um modelo em espaço de estados, onde o estado é lido diretamente da planta, sendo aplicado para a situação em que o sistema escolhido de entradas possa ficar saturado ou que o processo seja representado por um modelo diferente do modelo considerado na função objetivo do controlador.

Para isso, o MPC se propõe a resolver o problema de otimização em dois estágios:

No estágio *off-line*, vários controladores sem restrição são obtidos a partir de um problema de otimização onde inequações de Lyapunov são acrescentadas ao problema como restrições de forma a garantir a contração do estado (estabilidade). Esses controladores, representados por uma matriz de ganhos, correspondem a todas as configurações possíveis de saturação das variáveis manipuladas para um dado conjunto possível de variáveis controladas. Nessas combinações, incluídas como restrições no controlador, todos os modelos previstos para o processo são considerados. Dessa forma, perdendo-se uma entrada, o subconjunto de saídas controladas pode ser alterado.

Na versão anterior do método proposto por Rodrigues & Odloak (2005), esse estágio *off-line* envolve um observador de estados o que dificulta a solução do problema de otimização do MPC robusto, consumindo grande tempo computacional. Além disso, requer uma solução inicial viável que nem sempre é trivial.

Com a versão proposta do sistema de modelo espaço estado, o estimador de estado torna-se desnecessário pois o estado passa a ser medido.

Na etapa *on-line* do projeto do controlador, uma lei ótima de controle é obtida a partir da combinação convexa das configurações de controle que correspondem ao conjunto de variáveis manipuladas disponíveis (não saturadas). Também nessa etapa é considerada a incerteza do modelo utilizado pelo controlador.

O controlador proposto é testado com alguns exemplos simulados a partir de modelos obtidos na indústria de processo.

ABSTRACT

In this work, it is presented a contribution to the design of a robust MPC with output feedback, input constraints and uncertain model.

This work extends existing approaches by considering a particular non-minimal state space model, which transforms the output feedback strategy into a state feedback strategy. The controller is developed to the case in which the system inputs may become saturated and the model is uncertain.

We follow a two stages approach:

In the off-line stage, a series of unconstrained robust MPCs is obtained by including in the control optimization problem, inequality constraints that force the state of the closed-loop system to contract along the time. Each of these controllers, represented by a gain matrix, is associated to particular sets of manipulated inputs and controlled outputs. When one manipulated input becomes saturated, we may need to reduce the set of controlled variables.

In the existing version of the method, the closed loop system involves a state observer that makes the solution to the robust MPC optimization problem a time consuming step. The problem also requires an initial solution that may not be trivial to find.

With the adopted version of the system state space model, the state filter becomes trivial and the state can be considered measured.

In the on-line step of the proposed controller design, a sub optimal control law is obtained by combining control configurations that correspond to particular subsets of available manipulated inputs.

The method is illustrated with simulation examples of the process industry.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO E REVISÃO DA LITERATURA SOBRE CONTROLADORES

PREDITIVOS ROBUSTOS COM REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA E RESTRIÇÕES NAS VARIÁVEIS MANIPULADAS

1.1 INTRODUÇÃO

1.1.1 OBJETIVOS

A proposta desse trabalho é apresentar uma solução alternativa para a síntese do controlador MPC robusto quanto à estabilidade com realimentação de saída e admitindo restrições nas entradas, que leve a uma redução do esforço computacional em relação aos métodos existentes, em particular o método apresentado por Rodrigues & Odloak (2005). Além disso, o método proposto deve apresentar uma faixa de convergência maior que o método anterior levando a uma maior robustez na obtenção de soluções viáveis. Ele estende a abordagem existente para o projeto de um MPC robusto com realimentação de saída considerando o caso particular de um modelo em espaço de estados, sendo aplicado para a situação geral em que o sistema escolhido de entradas possa ficar saturado.

1.1.2 MOTIVAÇÃO

O controlador proposto por Rodrigues & Odloak (2005) apresenta uma boa performance com relação à estabilidade para condições de incerteza de modelo da planta e para condições de saturação das entradas. No entanto, apresenta limitações com relação à implantação industrial devido ao esforço computacional requerido na etapa *off-line* e dificuldades de convergência do algoritmo de otimização, principalmente por requerer uma solução inicial viável para que as condições de estabilidade sejam lineares.

Em publicações recentes, Maciejowski (2002) propõe um estado baseado nas próprias leituras das saídas e entradas da planta. Portanto, como o estado é medido, o

sistema dispensa a utilização de um estimador de estados. Nessa publicação, o modelo utilizado está na forma posicional.

O presente trabalho utiliza como base o controlador proposto por Rodrigues & Odloak (2005) e, adaptando o conceito de estado proposto por Maciejowski (2002) para a forma incremental, utiliza uma nova matriz de realinhamentos para atualização dos estados, independente de observador de estados, o que reduz a dimensão das matrizes envolvidas, e de uma solução inicial, pois as restrições de estabilidade geradas por esse modelo são lineares. Dessa forma, o esforço computacional é reduzido e há um aumento da faixa de convergência, como será demonstrado, por conta da não necessidade de uma solução inicial viável.

1.2 REVISÃO DA LITERATURA

A imensa popularidade alcançada pelos controladores preditivos no ambiente industrial e acadêmico deve-se, principalmente, à sua habilidade de incorporar restrições nas entradas e saídas. Tal aspecto é fundamental para o sucesso de uma implementação em controle de processos, visto que estes sistemas apresentam limites nas variáveis de processo, impostos por configurações físicas ou por políticas operacionais. Ao longo da última década, foi desenvolvida uma base teórica razoável para o MPC, permitindo a obtenção de leis de controle preditivo com garantias de estabilidade pouco conservadoras nas aplicações industriais (Qin & Badgwell, 2000). Uma revisão adequada sobre estabilidade nominal e robusta de controladores preditivos pode ser vista em Rodrigues (2001). Um fato já amplamente conhecido na literatura de MPC é que a inclusão de restrições no controlador incorpora não linearidades ao problema de otimização. Isto obriga a utilização de ferramentas mais complexas para a síntese de controladores preditivos robustos, o que requer uma elevada demanda computacional em tempo real.

Recentemente, Bemporad et al. (2002) apresentaram uma estratégia para a síntese de um MPC com estabilidade nominal e sujeito a restrições nas entradas onde o controlador é sintetizado *off-line*. Eles mostraram que o problema de otimização para implementar o MPC pode ser visto como uma programação quadrática multiparamétrica

e propuseram um algoritmo para a solução deste problema. Eles também mostraram que a solução ótima é uma função afim por partes dos estados. O subespaço vetorial do problema completo é dividido em outros subespaços de modo que regiões convexas sejam obtidas. Para cada região é obtida uma lei de controle distinta, em função dos estados. Como o MPC proposto implementa a estratégia de ganho de realimentação do estado, essas regiões são definidas em função da ativação das restrições nas entradas.

Essas regiões, definidas pelos autores como células poliedrais, são armazenadas e é gerada uma tabela com os ganhos de realimentação correspondentes. A etapa de implementação em tempo real consiste em identificar as células poliedrais que contenham o estado atual através de uma busca linear e tomar da tabela de ganhos aquele que corresponda à região. A proposta de Bemporad et al. (2002) é interessante, porém, apresenta como limitação a hipótese de realimentação do estado (ou seja, que todos os estados tenham sua medição disponível) e é restrita ao caso de modelo perfeito (nominal).

Numa outra contribuição recente, Wan & Kothare (2002) propuseram a síntese de um MPC robusto via ganho de realimentação dos estados e cuja solução satisfaz a condição de Lyapunov da malha fechada com realimentação da saída. Nesta abordagem, os autores estimam os estados a partir de um observador que é adicionado ao problema de controle em questão. Os cálculos realizados para a síntese do MPC robusto são realizados *off-line* e a determinação do ganho de realimentação de estado menos conservador, através de uma minimização dos erros quadráticos para cada instante de amostragem, é feita em tempo real, através de interpolações sobre os ganhos da tabela gerada externamente. Visando obter leis de controle menos conservadoras, Wan & Kothare (2002) calculam os ganhos robustos para um subconjunto de estados tal que a norma quadrática ponderada pela matriz de estabilidade Q seja menor que 1, isto é, $\{x \in \mathbb{R}^{n_x} \mid x^T Q_i^{-1} x \leq 1\}$, onde Q_i relaciona-se com a condição de estabilidade de Lyapunov para a malha fechada com ganho de realimentação de estado (Kothare et al. (1996)). Posteriormente, é realizada a síntese de um ganho do observador de estados que satisfaça uma condição de viabilidade relacionada com a máxima taxa de decaimento do erro de estimação. Na etapa de determinação do observador é usado o modelo nominal do sistema. As restrições nas entradas são implementadas via elipsóides invariantes. Por fim, é proposta uma condição de estabilidade para a malha

fechada calculada a partir dos ganhos de realimentação de estado e do observador determinados anteriormente. Se esta condição não for satisfeita, uma nova sintonia para o controlador e observador deve ser especificada, os cálculos são refeitos e o teste de estabilidade da malha fechada é novamente verificado. Este procedimento é realizado iterativamente até que a estabilidade da malha fechada seja satisfeita para cada um dos elementos do conjunto de estados previamente estabelecidos para síntese do controlador. Wan & Kothare (2002) discutem a existência de soluções que satisfaçam tais critérios de estabilidade. As deficiências da proposta de Wan & Kothare (2002) relacionam-se com o elevado conservadorismo da lei de controle obtida, devido à implementação de restrições nas entradas ser feita via elipsóides invariantes e também pelo fato de se assumir que o regime permanente seja exatamente conhecido. Este último aspecto torna a solução proposta por Wan & Kothare (2002) aplicável apenas ao problema regulador. Outro aspecto desfavorável é a metodologia interativa utilizada no teste de estabilidade, levando a um aumento do esforço computacional.

Outra contribuição recente que se relaciona diretamente com o tema deste trabalho foi proposta por Cuzzola et al. (2002). Neste artigo, os autores baseiam-se no MPC robusto com ganho de realimentação de estado proposto por Kothare et al. (1996) e obtêm uma nova parametrização para o ganho do MPC que satisfaz múltiplas desigualdades de Lyapunov, uma para cada vértice do politopo que constitui a representação das incertezas no modelo. Deste modo, o MPC via realimentação de estados de Kothare et al. (1996) é melhorado, podendo ser aplicado a sistemas cuja representação de incertezas seja descrita por politopos com números de vértices maiores e, principalmente, a solução de controle obtida é menos conservadora. Tal contribuição é bastante interessante e merece considerações futuras no contexto deste trabalho.

Wang & Rawlings (2004) propuseram um MPC robusto em que uma condição de estabilidade é verificada para um conjunto de ganhos de realimentação de estado e é também proposta a síntese do observador. Tais autores usaram um MPC de horizonte infinito com realimentação do estado em uma árvore de combinações dos estados possíveis ao longo da trajetória de predição (horizonte de controle) e do conjunto de modelos que modelam a incerteza do sistema real. São criadas variáveis de folga nas entradas que atuam como *biases* para remover o *offset* entre os diversos modelos possíveis, o que torna viável o problema de controle robusto. A síntese do controlador é

feita *off-line*, gerando a árvore de possibilidades. No entanto, não há prova de garantia de estabilidade do controlador. É feito um teste da condição de estabilidade da malha fechada para um conjunto de ganhos que torne o problema de otimização viável para a lei de controle (ganho de realimentação do estado, semelhante a Kothare et al. (1996)) e também do ganho do observador de estados. O algoritmo é complexo e a estrutura da árvore de possibilidades cresce exponencialmente com o horizonte de previsão e, também, com o número de modelos. Dessa forma, requer um esforço computacional considerável. Um aspecto interessante desse trabalho é a citação do modelo de estado proposto por Maciejowski (2002), que é referenciado neste trabalho.

Pannocchia (2003) apresenta um algoritmo baseado no IHMPC de Rawlings & Muske (1993) usando modelo de perturbação na entrada. Através de uma otimização não linear e um tanto complexa, a autora afirma que é possível determinar o modelo nominal que mais se aproxima da planta maximizando o desempenho e considerando as incertezas no modelo. De fato, a otimização é conduzida em termos dos parâmetros da combinação convexa dos modelos que formam o politopo. Para remover o *offset*, a autora aumenta o estado. O artigo não mostra claramente como é o método proposto e nem tão pouco há prova de robustez. A autora argumenta que o simples fato de se fazer uma otimização min-max sobre o domínio de incertezas do modelo é capaz de incorporar a robustez.

Wan & Kothare (2003) apresentaram uma das propostas mais interessantes sobre MPC robusto usando regiões terminais positivamente invariantes. Usando o mesmo algoritmo do Wan & Kothare (2002), estes autores propõem a construção *off-line* de um conjunto contínuo de restrições terminais positivamente invariantes e a utilização *on-line* do controlador estabilizante baseado no modelo nominal. Para otimizar o desempenho é feito uma interpolação entre duas regiões, uma com raio maior que o outro, de modo a levar o sistema para o ótimo que, supostamente, corresponde ao problema sem restrições. Apesar de ser uma abordagem bem fundamentada e um artigo bem escrito, as deficiências do método são as mesmas que foram comentadas anteriormente, no artigo dos mesmos autores de 2002. O que mais limita a proposta de Wan & Kothare (2002, 2003) é a hipótese de restrições inativas quando o sistema atinge a região positivamente invariante, o que a abordagem a ser desenvolvida neste trabalho será capaz de lidar.

Um outro trabalho que emprega otimização em malha fechada e a minimização do pior caso foi proposto por Scokaert & Mayne (1998). Nesta abordagem, assume-se que as incertezas estejam contidas num politopo construído a partir dos valores máximos permitidos para os distúrbios. Os autores empregam uma estratégia de controle dual, de tal modo que os estados do sistema sejam forçados a entrar numa região “robusta” positivamente invariante, onde as restrições nos estados e nas entradas sejam satisfeitas. Uma vez dentro deste conjunto positivamente invariante, aplica-se um controlador local, dado por um ganho estático de retroalimentação do estado (controlador ótimo padrão). O controlador externo é um MPC que resolve o problema de minimização do erro para o pior caso, ao qual se impõe uma restrição terminal. Neste controlador, calcula-se uma função objetivo modificada e leva-se em conta as ações de controle geradas pelos modelos que correspondam aos vértices do politopo que define a região das incertezas. Desta forma, considera-se o efeito da retroalimentação na otimização que é, então, calculada em malha fechada.

Rodrigues & Odloak (2000) apresentaram uma formulação de MPC robusto com realimentação de saída, onde a condição de estabilidade é imposta através da inclusão da desigualdade de Lyapunov no problema de controle. A formulação inclui um filtro para estimar os estados do modelo e o problema de controle é resolvido via LMIs. O artigo apresenta um algoritmo para incluir restrições nas variáveis manipuladas, mas a estabilidade robusta só pode ser provada para o caso em que as restrições ativas permanecem como tal até a estabilização do sistema. Recentemente, Rodrigues & Odloak (2005) estenderam o método para possibilitar o chaveamento das restrições ativas. O novo controlador é sintetizado em duas fases. A primeira fase é realizada *off-line* e gera-se um conjunto de controladores lineares correspondentes a todos os possíveis subsistemas em termos de variáveis manipuladas e controladas. A cada subsistema temos a possibilidade de um subconjunto de variáveis manipuladas saturadas e um subconjunto de variáveis controladas com o subconjunto de variáveis manipuladas restantes. A segunda fase da síntese da lei de controle é realizada *on-line* e corresponde à solução de um problema de otimização cuja função objetivo é a mesma do MPC convencional, mas as ações de controle são obtidas a partir de uma combinação convexa dos controladores lineares obtidos na primeira fase (matriz de ganhos). Esse problema de otimização inclui restrições nas variáveis manipuladas. A desvantagem dessa proposta está no esforço computacional exigido para a solução do problema *off-line*.

1.3 CAPÍTULOS DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está dividida em seis capítulos incluindo este introdutório. No Capítulo 2 apresentamos uma revisão do MPC robusto apresentado por Rodrigues & Odloak (2005). No Capítulo 3 apresentamos o desenvolvimento para obtenção de um modelo com as entradas na forma incremental a partir do modelo proposto por Maciejowski (2002) com entradas na forma posicional. Associado a esse modelo uma nova definição de matriz de realinhamentos é proposta. A característica principal desse modelo é a eliminação de um observador de estados, reduzindo o esforço computacional e as dimensões das matrizes envolvidas na solução do problema. Esse modelo, combinado com o MPC robusto do capítulo 2, formam a proposta deste trabalho. A extensão para uma forma incremental é interessante devido à eliminação de *offset* e a não necessidade do conhecimento do ponto estacionário. No Capítulo 4, o modelo de realinhamento obtido no Capítulo 3 é inserido no MPC robusto do capítulo 2. Neste capítulo, apresentamos o desenvolvimento matemático para a obtenção do controlador proposto considerando a possibilidade de restrições nas entradas. Em seguida, no Capítulo 5, o controlador é estendido para o caso de incerteza no modelo. No Capítulo 6 apresentamos os resultados obtidos do controlador ao problema servo para três tipos de sistemas: um sistema 2x2 não integrador sem tempo morto, um sistema 2x2 integrador com tempo morto e um sistema 3x3 não integrador com tempo morto. Os casos estudados são separados conforme abordagem: caso nominal (não há erro entre o modelo da planta e o modelo configurado no controlador) sem saturação das entradas, caso nominal com saturação de uma ou mais entradas e para o caso não nominal, onde há incerteza de modelo, também com ou sem saturação das entradas. No caso do sistema 3x3, apresentamos o estudo do problema regulatório, onde uma perturbação é aplicada ao sistema e constatamos a boa rejeição ao distúrbio do MPC proposto. Ainda no Capítulo 6, é apresentada uma comparação entre o controlador publicado por Rodrigues & Odloak (2005) e o controlador proposto nesse trabalho. No Capítulo 7, apresentamos as conclusões finais sobre a proposição desse novo algoritmo de controle com sugestões para trabalhos futuros.

1.4 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES (LMI)

Neste item será descrito, de forma resumida, o que são as desigualdades matriciais lineares, bem como a relevância desta abordagem e sua aplicação no controle de processos. As considerações sobre o histórico das LMIs foram adaptadas de uma monografia sobre o tema apresentada por Boyd, Ghaoui, Feron & Balakrishnan (1994) e da tese de doutorado de Rodrigues (2001). Tal resumo histórico tem a intenção de melhorar os conhecimentos sobre LMIs, uma vez que essa ferramenta foi amplamente aplicada neste trabalho. Recentemente, apareceu na literatura um artigo didático sobre LMIs, proposto por VanAntwerp & Braatz (2000).

Um dos primeiros problemas de análise da dinâmica de sistemas colocados na forma de uma desigualdade matricial linear surgiu com a teoria de Lyapunov apresentada pelo mesmo em 1890. Neste trabalho, Lyapunov mostrou que a seguinte equação diferencial:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (1.1)$$

é estável se existir uma matriz P , simétrica positiva-definida, que satisfaça a seguinte desigualdade:

$$A^T P + PA < 0, \text{ com } P = P^T \quad (1.2)$$

Assim, as especificações da Equação (1.2) e $P > 0$ constituem um tipo de LMI que foi denominado como “Desigualdade de Lyapunov”. Tal autor também mostrou que esta LMI poderia ser explicitamente resolvida, tomando-se qualquer $Q = Q^T > 0$ e, então, resolvendo o sistema linear $A^T P + PA = -Q$ para a matriz P , que é garantida ser positiva-definida desde que o sistema representado pela Equação (1.1) seja estável. Assim, a primeira LMI utilizada para a análise da estabilidade de um sistema dinâmico foi a desigualdade de Lyapunov, que pode ser resolvida analiticamente (Boyd *et al.*, 1994).

Muitos problemas da análise da estabilidade de sistemas de controle foram equacionados a partir da teoria da estabilidade de Lyapunov gerando, explicitamente ou não, LMIs. Assim, pode-se citar o esforço de Lur’e e co-autores que aplicaram os métodos de Lyapunov no estudo da estabilidade de sistemas de controle com uma não-linearidade no atuador. As desigualdades polinomiais geradas no trabalho de Lur’e

apresentavam a forma de LMI e eram resolvidas manualmente, limitando sua aplicação a sistemas SISO de segunda ou terceira ordem. Posteriormente, na década de 1960, diversos pesquisadores trataram a solução das LMIs estendendo sua utilização para sistemas de ordem mais elevada. Nos demais anos da década de 1960 e bem no início dos anos 1970, a pesquisa sobre os métodos de estabilidade derivados dos trabalhos já citados foi ampla. Pode-se citar as idéias de passividade e o critério do ganho pequeno, introduzidos pelos trabalhos clássicos de Zames e Sandeberg e pela teoria do controle ótimo quadrático. No ano de 1971, Willems mostrou, num trabalho sobre controle ótimo quadrático, que a seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PB + C^T \\ B^T P + C & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1.3)$$

poderia ser resolvida não graficamente, mas estudando-se as soluções simétricas da seguinte equação algébrica de Riccati (ARE):

$$A^T P + PA - (PB + C^T) R^{-1} (B^T P + C) + Q = 0$$

Esta conexão foi observada anteriormente na União Soviética, quando a ARE foi chamada de equação de resolução de Lur'e (Boyd *et al.*, 1994).

Desta forma, em 1971 vários pesquisadores conheciam métodos para a resolução de alguns tipos especiais de LMIs: diretos, para sistemas pequenos, métodos gráficos e resolvendo equações de Lyapunov e Riccati. Daí que em 1971, Willems comentou que a importância básica da LMI apresentada na Desigualdade Matricial (1.3) parecia ser muito desconsiderada, pois seria interessante verificar se esta abordagem poderia ser explorada, ou não, por algoritmos computacionais.

Uma outra observação que teve grande relevância histórica, e que foi feita por diversos pesquisadores ao longo da década de 1970, é que as LMIs, que aparecem na teoria de controle e sistemas, poderiam ser formuladas como um problema de otimização convexo, sendo muito adequadas para soluções computacionais. Neste sentido, citam que em 1982, Pyatniskii e Skorodinskii reduziram o problema original de Lur'e, estendido ao caso de múltiplas não-linearidades, a um problema de otimização convexa envolvendo LMIs e resolveram-no utilizando o algoritmo do elipsóide. Um outro aspecto que vale a pena ser citado é que, em 1976, Horisberger e Belanger observaram que a existência de uma função quadrática de Lyapunov, que simultaneamente prova a

estabilidade de uma coleção de sistemas lineares, é um problema convexo envolvendo LMIs (Boyd *et al.*, 1994).

Entretanto, a grande popularidade que as LMIs alcançaram na teoria de controle pode ser atribuída ao desenvolvimento de métodos de ponto interior muito eficientes e robustos. O início deste novo impulso se deu em 1984, quando N. Karmarkar introduziu um novo algoritmo de programação linear que resolve problemas lineares em tempo polinomial e de grande eficiência prática. Este trabalho de Karmarkar provocou um número enorme de publicações no campo dos algoritmos de ponto interior, a maioria deles voltada à programação linear e à programação quadrática (convexa). No ano de 1988, Nesterov e Nemirovskii desenvolveram métodos de ponto interior que se aplicam diretamente aos problemas convexos que envolvem LMIs. Assim, muitos algoritmos de ponto interior têm sido desenvolvidos e testados com famílias específicas de LMIs, que surgem na teoria de controle e têm-se mostrado muito eficientes (Boyd *et al.*, 1994). Esta observação da alta eficiência de tais algoritmos é feita por diversos pesquisadores, tais como Peres & Geromel (1994); Kothare *et al.* (1996); VanAntwerp & Braatz (2000).

Em resumo, nesta descrição histórica, adaptada do texto de Boyd *et al.* (1994) e Rodrigues (2001), foram mostrados diversos aspectos que fazem das LMIs uma área de muito interesse na pesquisa de sistemas de controle. Dentre os aspectos atraentes podem ser citadas as características convexas dos problemas de controle formulados como LMIs e a alta eficiência computacional dos algoritmos disponíveis. É conhecido na literatura que a eficiência de tais algoritmos é maior para problemas de elevada dimensão. Problemas de dimensão elevada aparecem com relativa frequência em controle preditivo de processos químicos.

Definição de LMIs

Uma desigualdade matricial linear (LMI) tem a seguinte forma

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (1.4)$$

onde $x \in \mathbb{R}^m$ são as variáveis de decisão do problema e as matrizes simétricas $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ são dadas. Com um certo abuso de forma e definição, o

símbolo de desigualdade que aparece na Equação (1.4) significa que $F(x)$ é positiva-definida.

A LMI (1.4) é uma restrição convexa em x , ou seja, $\{x | F(x) > 0\}$ é convexa.

Apesar da Equação (1.4) parecer uma forma específica, esta pode representar uma grande variedade de restrições convexas em x , em particular, desigualdades lineares, desigualdades quadráticas convexas, desigualdades de normas matriciais, desde que sejam feitas as transformações algébricas necessárias. Além disso, restrições que surgem em sistemas de controle podem ser convenientemente expressas na forma de LMIs, tais como restrições nas variáveis manipuladas e também aquelas que têm por finalidade incorporar estabilidade ao sistema de controle, tais como a desigualdade matricial de Lyapunov.

Várias LMIs podem ser agrupadas em uma única:

$$F_1(x) > 0, F_2(x) > 0, \dots, F_n(x) > 0 \rightarrow \text{diag}[F_1(x), \dots, F_n(x)] > 0$$

Uma das ferramentas fundamentais na abordagem de controle via LMI é o complemento de Schur, enunciado e provado no Apêndice A. Através do complemento de Schur é possível converter desigualdades quadráticas em LMIs.

Pacotes para resolução de LMIs

Existem alguns pacotes para solução de problemas de otimização em LMI disponíveis na literatura. O mais conhecido destes é que foi empregado nas implementações desta pesquisa, é o “MATLAB® LMI Control Toolbox” (Gahinet *et al.*, 1995). Outro pacote para resolução de LMIs é o LMISol (Oliveira, Farias & Geromel, 1997) que é executado exclusivamente no ambiente Solaris®, do sistema operacional de estações de trabalho Sun®. Outros métodos para resolução de LMIs têm sido reportados na literatura, tais como em Rao, Wright & Rawlings (1998), onde é proposto um MPC escrito apropriadamente para resolução através de algoritmos de ponto interior e em Hansson & Boyd (1998) que também apresentam um algoritmo de controle preditivo robusto resolvido por um método de ponto interior conveniente. Neste último trabalho, Hansson & Boyd (1998) relatam que o algoritmo resolve de modo eficiente problemas com mais de 1000 variáveis de decisão e 5000 restrições em poucos minutos numa estação de trabalho.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO DO MPC ROBUSTO COM REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA DE RODRIGUES & ODLOAK (2005)

2.1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar o controlador preditivo multivariável robusto com realimentação de saída onde a condição de estabilidade é obtida a partir da inclusão de restrições de desigualdade de Lyapunov no problema de controle. Esse controlador foi formulado por Rodrigues & Odloak (2005). O trabalho atual propõe melhorias a esse controlador.

2.2 FORMULAÇÃO DO MPC NOMINAL

O modelo do processo é representado em variáveis de estado na forma incremental nas entradas:

$$[\tilde{x}]_{k+1|k} = A[\tilde{x}]_{k|k} + B \Delta u(k) \quad (2.1)$$

$$[\tilde{y}]_{k|k} = C[\tilde{x}]_{k|k} \quad (2.2)$$

onde $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{nx}$ é o estado do modelo de predição e nx o número de estados associado ao modelo, k é o instante de amostragem atual, $u \in \mathbb{R}^{nu}$ é a entrada manipulada e nu o número de entradas manipuladas do modelo, $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$ é o incremento na entrada, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{ny}$ é a saída controlada e ny o número total de saídas controladas do modelo. $A \in \mathbb{R}^{nx \times nx}$, $B \in \mathbb{R}^{nx \times nu}$ e $C \in \mathbb{R}^{ny \times nx}$ são matrizes de dimensões adequadas denominadas de matriz de estado, matriz de entrada e matriz de saída, respectivamente.

Os estados do modelo de predição podem ser corrigidos a partir das leituras obtidas da planta da seguinte forma:

$$[\tilde{x}]_{k+1|k+1} = A[\tilde{x}]_{k|k} + B \Delta u(k) + K_F \{[y_p]_{k+1|k+1} - C[\tilde{x}]_{k+1|k}\} \quad (2.3)$$

onde K_F é o ganho do observador que estima os estados do modelo a partir das leituras da planta e da predição das saídas e $[y_p]_{k+1|k+1}$ é a saída medida da planta no instante $k+1$.

Consideramos que o estado da planta real é representado por um modelo similar ao representado nas Equações (2.1) e (2.2), porém com matrizes de coeficientes diferentes:

$$[x_p]_{k+1|k} = A_p[x_p]_{k|k} + B_p\Delta u(k) \quad (2.4)$$

$$[y_p]_{k+1|k+1} = C_p[x_p]_{k+1|k+1} \quad (2.5)$$

Observando que, para a planta, $[x_p]_{k+1|k+1} = [x_p]_{k+1|k}$ e, portanto, substituindo a Equação (2.4) na Equação (2.5):

$$[y_p]_{k+1|k+1} = C_p[A_p[x_p]_{k|k} + B_p\Delta u(k)] = C_pA_p[x_p]_{k|k} + C_pB_p\Delta u(k)$$

Substituindo a expressão acima e a Equação (2.1) na Equação (2.3):

$$\begin{aligned} [\tilde{x}]_{k+1|k+1} &= A[\tilde{x}]_{k|k} + B\Delta u(k) + K_F\{C_pA_p[x_p]_{k|k} + C_pB_p\Delta u(k) - C[A[\tilde{x}]_{k|k} + B\Delta u(k)]\} \\ [\tilde{x}]_{k+1|k+1} &= (A - K_FCA)[\tilde{x}]_{k|k} + (B + K_FC_pB_p - K_FCB)\Delta u(k) + K_FC_pA_p[x_p]_{k|k} \end{aligned}$$

Combinando com a Equação (2.4) obtemos:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ [x_p]_{k+1|k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_{nx} - K_FCA) & K_FC_pA_p \\ 0_{nx} & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ [x_p]_{k|k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (I_{nx} - K_FCA)B + K_FC_pB_p \\ B_p \end{bmatrix} \Delta u(k) \quad (2.6)$$

O estado do sistema passa a ser composto pelo estado da predição e pelo estado da planta.

Observe que, relacionado com o vetor de *set-points* das saídas y^{sp} , podemos definir um correspondente v^{sp} para o estado do sistema constituído pelo modelo de predição mais a planta.

Em Rodrigues & Odloak (2005), a representação do modelo, que é designada por OPOM (*Output Prediction Oriented Model* – modelo de predição orientado a saída), tem a matriz de estado da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} I_{ny} & 0_{ny \times n} \\ 0_{n \times ny} & F \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} e^{r_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{r_2 t} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{r_n t} \end{bmatrix}$$

sendo r_i um pólo do sistema e n o número total de pólos desse sistema.

Daí, pode-se definir o vetor de *set-points* para os estados como:

$$v^{sp} = \begin{bmatrix} y^{sp} \\ 0_{n \times 1} \end{bmatrix}$$

Observe que, para o modelo OPOM, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} I_{ny} & 0_{ny \times n} \\ 0_{n \times ny} & F \end{bmatrix} v^{sp} = \begin{bmatrix} I_{ny} & 0_{ny \times n} \\ 0_{n \times ny} & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{sp} \\ 0_{n \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{sp} \\ 0_{n \times 1} \end{bmatrix}, \text{ ou seja: } v^{sp} = A v^{sp}.$$

Também podemos demonstrar que para o estado do sistema constituído pelo modelo de predição mais a planta:

$$\begin{bmatrix} (I_{nx} - K_F C)A & K_F C_p A_p \\ 0_{nx} & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^{sp} \\ v^{sp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_{nx} - K_F C)A v^{sp} + K_F C_p A_p v^{sp} \\ A_p v^{sp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A v^{sp} - K_F C A v^{sp} + K_F C_p A_p v^{sp} \\ A_p v^{sp} \end{bmatrix}$$

Substituindo as definições da matriz de estado para o modelo OPOM, vem:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A v^{sp} - K_F C \begin{bmatrix} I_{ny} & 0_{ny \times n} \\ 0_{n \times ny} & F \end{bmatrix} v^{sp} + K_F C_p \begin{bmatrix} I_{ny} & 0_{ny \times n} \\ 0_{n \times ny} & F \end{bmatrix} v^{sp} \\ A_p v^{sp} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} A v^{sp} - K_F C \begin{bmatrix} I_{ny} & 0_{ny \times n} \\ 0_{n \times ny} & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{sp} \\ 0_n \end{bmatrix} + K_F C_p \begin{bmatrix} I_{ny} & 0_{ny \times n} \\ 0_{n \times ny} & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{sp} \\ 0_n \end{bmatrix} \\ A_p v^{sp} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} A v^{sp} - K_F C \begin{bmatrix} y^{sp} \\ 0_n \end{bmatrix} + K_F C_p \begin{bmatrix} y^{sp} \\ 0_n \end{bmatrix} \\ A_p v^{sp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A v^{sp} - K_F C v^{sp} + K_F C_p v^{sp} \\ A_p v^{sp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A v^{sp} \\ A_p v^{sp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^{sp} \\ v^{sp} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, podemos afirmar que $v^{sp} = A v^{sp} = \tilde{A} v^{sp}$, pois $C_p = C$.

Assim, subtraindo o vetor $\begin{bmatrix} v^{sp} & v^{sp} \end{bmatrix}^T$ de ambos os membros da Equação (2.6), obtemos:

$$[x^e]_{k+1|k+1} = \tilde{A}[x^e]_{k|k} - \tilde{B} \Delta u(k) \quad (2.7)$$

onde:

$$x^e = \begin{bmatrix} \tilde{x}^e \\ x_p^e \end{bmatrix}, \quad x^e \in \mathbb{R}^{2nx}, \quad \tilde{x}^e = v^{sp} - \tilde{x}, \quad x_p^e = v^{sp} - x_p \quad (2.8)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} (I_{nx} - K_F C)A & K_F C_p A_p \\ 0_{nx} & A_p \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} \in \mathbb{R}^{2nx \times 2nx}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} (I_{nx} - K_F C)B + K_F C_p B_p \\ B_p \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} \in \mathbb{C}^{2nx \times nu} \quad (2.9)$$

A função objetivo do controlador será a mesma do MPC tradicional:

$$J_k = \sum_{j=0}^{np} e^T(k+j) W e(k+j) + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u^T(k+j) R \Delta u(k+j) \quad (2.10)$$

onde $e(k+j) = y^{sp} - \tilde{y}(k+j)$, erro entre o valor desejado y^{sp} e a predição da saída no instante $k+j$, np é o horizonte de otimização ou de predição da saída, m é o horizonte de controle, $\tilde{y}(k+j)$ é a predição da saída no instante $k+j$ considerando as ações de controle futuras, $W \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$ e $R \in \mathbb{R}^{nu \times nu}$ matrizes peso positivas definidas.

Usando as Equações do modelo de predição definidas em (2.1) e (2.2), a função custo definida na Equação (2.10) pode ser representada como:

$$J_k = (\bar{A}[\tilde{x}^e]_{k|k} - \bar{B} \Delta u)^T W_{np} (\bar{A}[\tilde{x}^e]_{k|k} - \bar{B} \Delta u) + \Delta u^T R_m \Delta u \quad (2.11)$$

onde:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{np} \end{bmatrix}, \quad \bar{A} \in \mathbb{R}^{np.ny \times nx}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} \\ CB & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} \\ CAB & CB & 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{np-1}B & CA^{np-2}B & \cdots & CA^{np-m}B \end{bmatrix}, \quad \bar{B} \in \mathbb{R}^{np.ny \times m.nu}$$

$$\Delta u = [\Delta u(k)^T \quad \cdots \quad \Delta u(k+m-1)^T]^T, \quad \Delta u \in \mathbb{R}^{m.nu \times 1}$$

$$W_{np} = \text{diag}(\underbrace{W \quad \cdots \quad W}_{np}), \quad W_{np} \in \mathbb{R}^{np.ny \times ny} \quad \text{e} \quad R_m = \text{diag}(\underbrace{R \quad \cdots \quad R}_m), \quad R_m \in \mathbb{R}^{m.nu \times nu}$$

A seguinte lei de controle pode ser aplicada, correlacionando o incremento na saída com o erro:

$$\Delta u = K_{MPC} [\tilde{x}^e]_{k|k}, \quad K_{MPC} \in \mathbb{R}^{m.nu \times nx} \quad (2.12)$$

onde K_{MPC} é uma matriz constante e, portanto, independente de $\tilde{x}^e$.

A vantagem do uso da lei de controle para incrementos na entrada é a ação integral que elimina *offset*, já que, o erro persistindo, novas variações na saída são impostas de forma a perseguir o desvio permanente. Outra grande vantagem do uso da lei de controle na forma incremental é de dispensar o conhecimento do estado estacionário da planta.

Daí, substituindo a Equação (2.12) na Equação (2.11), a função objetivo passa a ser escrita como:

$$\begin{aligned} J_k = & [\tilde{x}^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{A} [\tilde{x}^e]_{k|k} - [\tilde{x}^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{B} K_{MPC} [\tilde{x}^e]_{k|k} - \\ & - [\tilde{x}^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T \bar{B}^T W_{np} \bar{A} [\tilde{x}^e]_{k|k} + [\tilde{x}^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T (\bar{B}^T W_{np} \bar{B} + R_m) K_{MPC} [\tilde{x}^e]_{k|k} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Assim, o problema de otimização do MPC sem restrições pode ser escrito da seguinte forma:

$$\min_{K_{MPC}} J_k$$

sujeito à Equação (2.13).

Esse problema pode escrito na seguinte forma equivalente:

$$\min_{\gamma, K_{MPC}} \gamma$$

sujeito a $J_k < \gamma$ ou

$$\begin{aligned} \gamma - & [\tilde{x}^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{A} [\tilde{x}^e]_{k|k} + [\tilde{x}^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{B} K_{MPC} [\tilde{x}^e]_{k|k} + \\ & + [\tilde{x}^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T \bar{B}^T W_{np} \bar{A} [\tilde{x}^e]_{k|k} - [\tilde{x}^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T (\bar{B}^T W_{np} \bar{B} + R_m) K_{MPC} [\tilde{x}^e]_{k|k} > 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Aplicando o complemento de Schur, descrito no Apêndice A, a Inequação (2.14) pode ser escrita na forma de uma desigualdade matricial linear (LMI). Portanto, o problema de otimização que produz o MPC sem restrições pode também ser escrito como um problema de otimização de LMI, o que se torna vantajoso, pois podemos utilizar os pacotes de LMI oferecidos no mercado de *software*.

Problema P1

$$\min_{\gamma, K_{MPC}} \gamma$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} (\bar{B}^T W_{np} \bar{B} + R_m)^{-1} & K_{MPC} [\tilde{x}^e]_{k|k} \\ (K_{MPC} [\tilde{x}^e]_{k|k})^T & \begin{bmatrix} \gamma - [\tilde{x}^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{A} [\tilde{x}^e]_{k|k} + [\tilde{x}^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{B} K_{MPC} [\tilde{x}^e]_{k|k} \\ + [\tilde{x}^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T \bar{B}^T W_{np} \bar{A} [\tilde{x}^e]_{k|k} \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.15)$$

onde a Restrição (2.15) nada mais é do que a função objetivo escrita na forma de LMI. Esse problema encontra valores de K_{MPC} que minimizam o estado do erro nessa função objetivo.

2.3 FORMULAÇÃO DO MPC NOMINAL ESTÁVEL

A solução do Problema P1 produz uma lei de controle, que é o MPC convencional sem restrições. Utilizando este controlador, não há garantia que o sistema em malha fechada será estável.

Consideremos, então, o sistema em malha fechada com o controlador definido na Equação (2.12) onde apenas a primeira ação de controle, dentro do horizonte de controle m do controlador, é aplicada no processo real. Combinando essa equação com a Equação (2.7), obtemos:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}^e \\ x_p^e \end{bmatrix}_{k+1|k+1} = (\tilde{A} - \tilde{B} K_{MPC,k} N) \begin{bmatrix} \tilde{x}^e \\ x_p^e \end{bmatrix}_{k|k} \quad (2.16)$$

onde:

$$K_{MPC,k} = C_K K_{MPC}; \quad C_K = [I_{nu} \quad 0_{nu \times (m-1).nu}]; \quad N = \begin{bmatrix} I_{nx} & 0_{nx} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Como $C_k \in \mathbb{R}^{nu \times m.nu}$, $K_{MPC} \in \mathbb{R}^{m.nu \times nx}$ resulta que $K_{MPC,k} \in \mathbb{R}^{nu \times nx}$. Vimos que $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{2nx \times nu}$. Portanto, como $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{2nx \times 2nx}$, necessitamos de uma matriz auxiliar N de dimensão $\mathbb{R}^{nx \times 2nx}$. Observe que essa matriz auxiliar não é quadrada.

A condição de estabilidade de Lyapunov afirma que, se pudermos associar ao sistema, uma função $F(x)$ positiva tal que $F(x) = x^T P x > 0$ que seja decrescente no tempo, ou seja:

$$[\tilde{x}^e]_{k+1|k+1}^T P [\tilde{x}^e]_{k+1|k+1} - [\tilde{x}^e]_{k|k}^T P [\tilde{x}^e]_{k|k} \leq 0 \quad \text{e } P > 0,$$

esse sistema é estável.

Então, usando a definição de $[\tilde{x}^e]_{k+1|k+1}$ mostrada na Equação (2.7), nessa condição de estabilidade, vem:

$$\left(\tilde{A}[\tilde{x}^e]_{k|k} - \tilde{B}\Delta u(k) \right)^T P \left(\tilde{A}[\tilde{x}^e]_{k|k} - \tilde{B}\Delta u(k) \right) - [\tilde{x}^e]_{k|k}^T P [\tilde{x}^e]_{k|k} \leq 0$$

Substituindo $\Delta u(k)$ obtido pela combinação de (2.12) e (2.17), a desigualdade de Lyapunov fica:

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{A}[\tilde{x}^e]_{k|k} - \tilde{B}C_K K_{MPC} N [\tilde{x}^e]_{k|k} \right)^T P \left(\tilde{A}[\tilde{x}^e]_{k|k} - \tilde{B}C_K K_{MPC} N [\tilde{x}^e]_{k|k} \right) - [\tilde{x}^e]_{k|k}^T P [\tilde{x}^e]_{k|k} \leq 0 \\ & [\tilde{x}^e]_{k|k}^T \left(\tilde{A} - \tilde{B}C_K K_{MPC} N \right)^T P \left(\tilde{A} - \tilde{B}C_K K_{MPC} N \right) [\tilde{x}^e]_{k|k} - [\tilde{x}^e]_{k|k}^T P [\tilde{x}^e]_{k|k} \leq 0 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\left(\tilde{A} - \tilde{B}C_K K_{MPC} N \right)^T P \left(\tilde{A} - \tilde{B}C_K K_{MPC} N \right) - P \leq 0 \quad \text{com } P = P^T > 0 \quad (2.18)$$

Pré-multiplicando a Inequação (2.18) pelo termo $-(P^T)$, pós-multiplicando pelo termo P^{-1} e aplicando o complemento de Schur (vide Apêndice A), obtemos:

$$\begin{bmatrix} P & P(\tilde{A} - \tilde{B}C_K K_{MPC} N) \\ (\tilde{A} - \tilde{B}C_K K_{MPC} N)^T P^T & P \end{bmatrix} > 0 \quad (2.19)$$

A Inequação (2.18) é a condição de estabilidade de Lyapunov e, portanto, a Inequação matricial (2.19) garante a contração dos erros, obtendo a estabilidade da malha fechada.

Dessa forma, o problema de otimização que produz o MPC sem restrições com estabilidade garantida é:

Problema P1a

$$\min_{\gamma, K_{MPC}, P} \gamma$$

sujeito às Inequações (2.15) e (2.19)

e $P > 0$.

O Problema P1a pode ser resolvido a cada instante k . Entretanto, como o erro nas previsões $[\tilde{x}^e]_{k|k}$ varia de instante para instante, não há garantia que os mesmos K_{MPC} e P serão obtidos em diferentes instantes de tempo. Assim, a contração da norma do erro na malha fechada, que é o propósito da Desigualdade (2.19), pode não ser obtida. Para garantir essa contração, K_{MPC} e P devem ser fixos e, portanto, devem ser obtidos *off-line*. Por exemplo, eles podem ser calculados para um erro $[\tilde{x}_0^e]_{k|k}$ que corresponde a uma variação em degrau nos valores desejados das saídas. O resultado é o seguinte problema de LMI:

Problema P2

$$\min_{\gamma, K_{MPC}, P} \gamma$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} (\bar{B}^T W_{np} \bar{B} + R_m)^{-1} & K_{MPC} [\tilde{x}_0^e]_{k|k} \\ [\tilde{x}_0^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T & \begin{bmatrix} \gamma - [\tilde{x}_0^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{A} [\tilde{x}_0^e]_{k|k} + [\tilde{x}_0^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{B} K_{MPC} [\tilde{x}_0^e]_{k|k} + \\ + [\tilde{x}_0^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T \bar{B}^T W_{np} \bar{A} [\tilde{x}_0^e]_{k|k} \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.20)$$

$$\begin{bmatrix} P & P(\tilde{A} - \tilde{B}C_K K_{MPC}N) \\ (\tilde{A} - \tilde{B}C_K K_{MPC}N)^T P^T & P \end{bmatrix} > 0 \quad (2.19)$$

$P > 0$

A Equação (2.20) é equivalente à Equação (2.15) escrita para um erro fixo.

Na condição operacional em que nenhuma das restrições nas entradas está ativa ou que não haja incerteza de modelo, a lei de controle resultante da solução do Problema P2 é ótima e a estabilidade do sistema em malha fechada pode ser garantida.

2.4 FORMULAÇÃO DO MPC ROBUSTO CONSIDERANDO INCERTEZA DE MODELO

O controlador obtido acima pode ser estendido ao caso de incertezas no modelo. Essas incertezas devem se concentrar apenas nas matrizes A e B , pois a matriz C é fixa. Observe que, nas matrizes $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ definidas na Equação (2.9), as matrizes A_p e B_p do modelo real da planta não precisam ser iguais às matrizes A e B usadas no modelo de predição. Observe ainda que $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ são afins em A_p e B_p respectivamente. A consequência dessa observação é que, se as incertezas se concentram em A_p e B_p , o Problema P2 pode ser estendido para produzir um controlador robusto a essas incertezas.

Para desenvolver tal controlador, suponha que a matriz de estado A_p e a matriz de entradas B_p do modelo real da planta definida pela Equação (2.4) não sejam exatamente conhecidas mas sabe-se que estão em um conjunto convexo definido por:

$$(A_p, B_p) = \sum_{i=1}^L \lambda_i (A_{p,i}, B_{p,i}), \sum_{i=1}^L \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, L \quad (2.21)$$

Vamos também definir:

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} (I_{nx} - K_F C) A & K_F C_p A_{p,i} \\ 0_{nx} & A_{p,i} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_i = \begin{bmatrix} (I_{nx} - K_F C) B + K_F C_p B_{p,i} \\ B_{p,i} \end{bmatrix}$$

Em seguida, vamos considerar o seguinte problema de otimização:

Problema P3

$$\min_{\gamma, K_{MPC}, P} \gamma$$

sujeito à Equação (2.20) e às seguintes restrições:

$$\begin{bmatrix} P & P(\tilde{A}_i - \tilde{B}_i C_K K_{MPC} N) \\ (\tilde{A}_i - \tilde{B}_i C_K K_{MPC} N)^T P^T & P \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, L \quad (2.22)$$

$$P > 0$$

Pode-se demonstrar que o controlador acima estabiliza todos os processos contidos no conjunto definido em (2.21), pois, devido a linearidade existente com as incertezas, uma vez definida a estabilidade nos vértices do politopo, ela está assegurada para qualquer posição interna no mesmo.

A Restrição (2.22) não é uma LMI, pois P e K_{MPC} são incógnitas e, portanto, as ferramentas de LMI não podem ser aplicadas na solução desse problema.

Quando uma solução inicial viável para o Problema P3 for disponível, Rodrigues & Odloak (2005) propuseram um algoritmo iterativo com convergência provada para encontrar um ótimo local para esse problema.

O algoritmo proposto por esses autores para solução do Problema P3 é o seguinte:

- i. Inicializar $j = 0$ e $\gamma_0 = 0$.
- ii. Escolher um $K_{MPC,0}$ que estabiliza o sistema em malha fechada.
- iii. Utilizar esse valor de ganho, normalmente bastante conservativo, para calcular um valor de P através do seguinte problema de otimização, relaxado com a inclusão de um parâmetro adicional α , que maximize a distância em relação a instabilidade, com $P = P^T > 0$:

$$\max_{\alpha, P} \alpha$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} P & P(\tilde{A}_i - \tilde{B}_i C_K K_{MPC,j} N) \\ (\tilde{A}_i - \tilde{B}_i C_K K_{MPC,j} N)^T P^T & P - \alpha I \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, L \quad (2.23)$$

$$P > 0$$

$$\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$$

A Desigualdade matricial (2.23) corresponde a inequação:

$$(\tilde{A} - \tilde{B} C_K K_{MPC} N)^T P (\tilde{A} - \tilde{B} C_K K_{MPC} N) - P + \alpha I \leq 0$$

Com a adição do parâmetro α , tornamo-nos mais rigorosos com relação aos valores de P que garantem a estabilidade do sistema.

Esse problema gera uma solução sub-ótima em P .

iv. Fazer $P_j = P$ e resolver o seguinte problema:

$$\min_{\gamma, K_{MPC}} \gamma$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} (\bar{B}^T W_{np} \bar{B} + R_m)^{-1} & K_{MPC} [\tilde{x}_0^e]_{k|k} \\ [\tilde{x}_0^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T & \begin{bmatrix} \gamma - [\tilde{x}_0^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{A} [\tilde{x}_0^e]_{k|k} + [\tilde{x}_0^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{B} K_{MPC} [\tilde{x}_0^e]_{k|k} + \\ + [\tilde{x}_0^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T \bar{B}^T W_{np} \bar{A} [\tilde{x}_0^e]_{k|k} \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.20)$$

$$\begin{bmatrix} P_j & P_j (\tilde{A}_i - \tilde{B}_i C_k K_{MPC} N) \\ (\tilde{A}_i - \tilde{B}_i C_k K_{MPC} N)^T P_j^T & P_j \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, L \quad (2.24)$$

$$\gamma > 0$$

Esse problema encontra um K_{MPC} , mais agressivo que o ganho inicial $K_{MPC,0}$, que minimiza a função objetivo e melhora a performance do controlador em malha fechada.

- v. Se $|\gamma - \gamma_j| < \varepsilon$, onde $\{\varepsilon \in \mathbb{R} | 0 < \varepsilon \ll 1\}$, aplicar a primeira ação de controle correspondente a K_{MPC} obtida dessa iteração e vá para o próximo intervalo de iteração. Caso contrário, vá para o passo (vi).
- vi. Faça $K_{MPC,j} = K_{MPC}$, $\gamma_j = \gamma$, $j = j+1$ e retorne ao passo (iii).

A solução do Problema P3 foi dividida em dois subproblemas de forma a permitir uma resolução com o uso de LMI. Mas, ainda assim, a Inequação (2.23) só se torna linear se $K_{MPC,j}$ for constante. Por isso, há necessidade de uma solução inicial para o problema.

É importante observar que o problema no passo (iii) será um problema de otimização convexo desde que a solução inicial $K_{MPC,0}$ seja viável.

Essa solução inicial pode ser de difícil obtenção quando o modelo estiver na forma incremental. Rodrigues & Odloak (2005) propõem um algoritmo para a obtenção do valor inicial para esse problema:

- i. Adote um valor inicial para $K_{MPC,0}$ que pode ser, por exemplo, o valor obtido da solução do Problema P2 para o sistema nominal, sem a condição de estabilidade indicada na Desigualdade matricial (2.19).
- ii. Adote um escalar δ de forma que a restrição abaixo seja satisfeita.

$$\begin{bmatrix} P & P(\tilde{A}_i - \tilde{B}_i C_k K_{MPC,0} N) \\ (\tilde{A}_i - \tilde{B}_i C_k K_{MPC,0} N)^T P^T & P + \delta I \end{bmatrix} > 0$$

- iii. Resolva o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \max_{\alpha, P} \alpha \\ & \text{sujeito a} \\ & \begin{bmatrix} P & P(\tilde{A}_i - \tilde{B}_i K_{MPC,0} N) \\ (\tilde{A}_i - \tilde{B}_i K_{MPC,0} N)^T P^T & P - \alpha I + \delta I \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, L \\ & P > 0 \end{aligned}$$

A solução do problema acima resulta numa solução viável para o Problema P3 em termos de P e K_{MPC} se $\alpha > \delta$. Nesse caso, um K_{MPC} que é viável para o Problema P3 é dado por $K_{MPC} = [K_{MPC,k} \ 0]$.

2.5 FORMULAÇÃO DO MPC ROBUSTO CONSIDERANDO INCERTEZA DE MODELO E SATURAÇÃO DAS ENTRADAS

Rodrigues & Odloak (2005) estenderam o Problema P3 com a consideração de que o controlador deve estabilizar todas as possíveis configurações ou subsistemas formados pelas entradas e saídas do sistema. Com essa consideração, eles provaram a robustez de um controlador com realimentação de saída e restrições nas entradas. Esse controlador é obtido combinando, em tempo real, os controladores de todos os possíveis subsistemas

do processo que está sendo controlado. Dessa forma, se uma determinada entrada u_j pode saturar, o que é normal em um problema prático, o mesmo Problema P3 será utilizado na etapa *off-line*, porém sendo prevista a estabilidade do controlador para essa situação de saturação através do acréscimo da seguinte restrição:

$$\begin{bmatrix} P & P(\tilde{A}_i - \tilde{B}_i K_{MPC,k}^j N) \\ (\tilde{A}_i - \tilde{B}_i K_{MPC,k}^j N)^T P^T & P \end{bmatrix} > 0$$

onde $K_{MPC,k}^j$ é obtido anulando-se os termos de $K_{MPC,k}$ referentes a entrada u_j . Se houver necessidade de redução do número de variáveis controladas para evitar o *offset* nas variáveis prioritárias, o erro existente no cálculo da função objetivo associado as variáveis que não serão controladas na etapa *on-line* deverá ser anulado.

O controlador descrito nesse capítulo tem duas limitações importantes:

- 1) Conforme visto, as Inequações (2.19) ou (2.22) são não-lineares em P e K_{MPC} , ou seja, não são LMIs. Temos que usar um método iterativo para obter a solução desse problema. Esse algoritmo, porém, requer um tempo computacional extremamente alto, pois envolve a solução iterativa de dois problemas de otimização. Isso torna a aplicação do método proibitiva para sistemas com mais de 3 entradas e saídas.
- 2) O método iterativo proposto requer uma solução inicial que nem sempre é trivial.
- 3) A inclusão de um observador de estados na malha de controle, duplica o número de estados do sistema em malha fechada, além de tornar o problema não linear, pois não permite que agrupemos P e K_{MPC} em uma única variável na Inequação (2.22). Isto porque a matriz N aparece entre elas e essa matriz não pode ser invertida porque não é quadrada.

CAPÍTULO 3

MODELO DE REALINHAMENTO DE MACIEJOWSKI NA FORMA INCREMENTAL

3.1 INTRODUÇÃO

Recentemente Maciejowski (2002) propôs um modelo em variáveis de estado não mínimo que, aparentemente, é bastante conveniente para o desenvolvimento de um MPC robusto com realimentação de saída. Para entender como esse modelo é montado, considere a seguinte equação de diferenças, que corresponde a uma função de transferência discreta:

$$y(k) + \sum_{i=1}^{na} a_i y(k-i) = \sum_{i=1}^{nb} b_i u(k-i) \quad (3.1)$$

onde na corresponde à ordem do modelo e nb ao número de entradas passadas consideradas na equação de diferenças, $a_i \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$, $b_i \in \mathbb{R}^{ny \times nu}$, $y \in \mathbb{R}^{ny \times 1}$, $u \in \mathbb{R}^{nu \times 1}$.

Maciejowski (2002) propõe que o estado seja composto pelas variáveis de entrada e de saída nos instantes de tempo que aparecem na Equação (3.1), ou seja, pelas últimas na leituras das saídas da planta e pelas últimas nb ações de controle. Apesar desse estado proposto por Maciejowski (2002) ser um estado não mínimo, ele é bastante interessante pela sua simplicidade e por não envolver a necessidade de um estimador de estados.

Portanto, a partir do Modelo (3.1), calculamos o valor de saída no instante k seguinte e os demais valores desse estado são obtidos a partir de uma matriz de realinhamento de valores de saída e de entrada passados, conforme mostrado a seguir:

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ y(k-2) \\ \vdots \\ y(k-na+1) \\ u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(k-nb+2) \\ u(k-nb+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{na-1} & -a_{na} & b_2 & \cdots & b_{nb-2} & b_{nb-1} & b_{nb} \\ I_{ny} & 0_{ny} & \cdots & 0_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} \\ 0_{ny} & I_{ny} & \cdots & 0_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{ny} & 0_{ny} & \cdots & I_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} \\ 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \cdots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu} & \cdots & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \cdots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & I_{nu} & \cdots & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \cdots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu} & \cdots & I_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \cdots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu} & \cdots & 0_{nu} & I_{nu} & 0_{nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k-1) \\ y(k-2) \\ \vdots \\ y(k-na+1) \\ y(k-na) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(k-nb+2) \\ u(k-nb+1) \\ u(k-nb) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0_{ny \times nu} \\ 0_{ny \times nu} \\ \vdots \\ 0_{ny \times nu} \\ I_{nu} \\ 0_{nu} \\ \vdots \\ 0_{nu} \\ 0_{nu} \end{bmatrix} u(k-1) \quad (3.2)$$

ou:

$$x(k) = \tilde{A}x(k-1) + \tilde{B}u(k-1)$$

$$y(k) = \tilde{C}x(k)$$

(3.3)

onde:

$$\tilde{C} = \underbrace{[I_{ny} \quad 0_{ny} \quad \cdots \quad 0_{ny}]}_{na} \underbrace{[0_{ny \times nu} \quad 0_{ny \times nu} \quad \cdots \quad 0_{ny \times nu}]}_{nb-1};$$

$$x \in \mathbb{R}^{(na.ny + (nb-1).nu) \times 1};$$

$$\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(na.ny + (nb-1).nu) \times (na.ny + (nb-1).nu)}; \tilde{B} \in \mathbb{R}^{(na.ny + (nb-1).nu) \times nu}; \tilde{C} \in \mathbb{R}^{ny \times (na.ny + (nb-1).nu)};$$

O estado passa a ser definido como:

$$[x]_{k|k}^T = \begin{bmatrix} y(k)^T & y(k-1)^T & \cdots & y(k-na+1)^T & u(k-1)^T & u(k-2)^T & \cdots & u(k-nb+2)^T & u(k-nb+1)^T \end{bmatrix}^T$$

O modelo acima é particularmente interessante para os objetivos desse trabalho porque o estado, como foi definido, envolve apenas variáveis medidas e que são conhecidas a cada instante de amostragem k . Portanto, com o modelo acima, aparentemente fica eliminada a necessidade de inclusão do observador de estados na malha de controle. O sistema se torna sempre observável. Wang & Rawlings (2004) utilizaram esse modelo para propor um MPC robusto com realimentação de saída mas, devido à estrutura da árvore de possibilidades crescer exponencialmente com o horizonte de predição, o esforço computacional torna-o de difícil implantação industrial.

3.2 MODELO DE REALINHAMENTO NA FORMA INCREMENTAL

O modelo definido nas Equações (3.2) e (3.3) está na forma posicional em termos das entradas, o que é inadequado quando o estado estacionário do sistema é desconhecido e quando se deseja eliminar o erro permanente da variável controlada.

Neste trabalho, o modelo acima é transformado para a forma incremental com o procedimento descrito a seguir.

Através do Modelo (3.1) obtém-se as expressões da variável controlada y para dois intervalos de tempo consecutivos:

$$y(k+1) + a_1 y(k) + a_2 y(k-1) + a_3 y(k-2) + \dots + a_{na} y(k-na+1) = b_1 u(k) + b_2 u(k-1) + b_3 u(k-2) + \dots + b_{nb} u(k-nb+1)$$

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + a_3 y(k-3) + \dots + a_{na} y(k-na) = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + b_3 u(k-3) + \dots + b_{nb} u(k-nb)$$

Considerando a diferença entre as duas expressões acima:

$$\begin{aligned} y(k+1) - y(k) &= -a_1 y(k) - a_2 y(k-1) - a_3 y(k-2) - \dots - a_{na} y(k-na+1) \\ &+ b_1 u(k) + b_2 u(k-1) + b_3 u(k-2) + \dots + b_{nb} u(k-nb+1) \\ &+ a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + a_3 y(k-3) + \dots + a_{na} y(k-na) \\ &- b_1 u(k-1) - b_2 u(k-2) - b_3 u(k-3) - \dots - b_{nb} u(k-nb) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(k+1) &= y(k)(I_{ny} - a_1) + y(k-1)(-a_2 + a_1) + y(k-2)(-a_3 + a_2) + \dots + \\ &+ y(k-na+1)(-a_{na} + a_{na-1}) + a_{na} y(k-na) + \\ &+ b_1 \Delta u(k) + b_2 \Delta u(k-1) + b_3 \Delta u(k-2) + \dots + b_{nb} \Delta u(k-nb+1) \end{aligned} \quad (3.4)$$

A Equação (3.4) é a equação de predição da saída no próximo instante de amostragem a partir das saídas passadas, da saída no instante atual, das variações das entradas passadas e da variação de entrada atual $\Delta u(k)$, que ainda será calculada.

O modelo representado na Equação (3.4) pode ser colocado em variáveis de estado, de modo que, analogamente ao caso do modelo posicional descrito em (3.2) e (3.3), o sistema passa a ser representado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 x(k+1) = & \begin{bmatrix} -a_1 + I_{ny} & -a_2 + a_1 & -a_3 + a_2 & -a_4 + a_3 & \dots & -a_{na} + a_{na-1} & a_{na} & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{nb} \\ I_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny} & \dots & 0_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & \dots & 0_{ny \times nu} \\ 0_{ny} & I_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny} & \dots & 0_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & \dots & 0_{ny \times nu} \\ 0_{ny} & 0_{ny} & I_{ny} & 0_{ny} & \dots & 0_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & \dots & 0_{ny \times nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny} & \dots & I_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} \\ 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \dots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \dots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & I_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \dots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu} & I_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \dots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu} & 0_{nu} & I_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \dots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & I_{nu} & 0_{nu} \end{bmatrix} x(k) + \\
 & + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0_{ny \times nu} \\ 0_{ny \times nu} \\ 0_{ny \times nu} \\ \dots \\ 0_{ny \times nu} \\ I_{nu} \\ 0_{nu} \\ 0_{nu} \\ 0_{nu} \\ \dots \\ 0_{nu} \end{bmatrix} \Delta u(k)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

que está, portanto, na forma tradicional:

$$x(k+1) = Ax(k) + B\Delta u(k)$$

onde o estado passa a ser definido por:

$$x(k) = \begin{bmatrix} y(k)^T & y(k-1)^T & y(k-2)^T & \dots & y(k-na)^T & \Delta u(k-1)^T & \dots & \Delta u(k-nb+1)^T \end{bmatrix}^T$$

Essa passa a ser a definição do novo estado na forma incremental. Com essa nova forma de modelo em variáveis de estado, o problema de controle com realimentação da saída se transforma em um problema de controle com realimentação de estado, o que tem vantagens em termos de implementação do controlador e facilidade de prova da estabilidade robusta.

Portanto, voltando à notação do capítulo anterior, o modelo acima está na forma:

$$[x]_{k+1|k} = A[x]_{k|k} + B\Delta u(k) \tag{3.6}$$

$$[y]_{k|k} = C [x]_{k|k}$$

onde:

$$x \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny+(nb-1).nu] \times 1}, \Delta u \in \mathbb{R}^{nu \times 1} \text{ são o vetor de estado e o vetor de entradas}$$

enquanto que a matriz de estado, matriz de entrada e matriz de saída são definidas por

$$A \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny+(nb-1).nu] \times [(na+1).ny+(nb-1).nu]}, B \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny+(nb-1).nu] \times nu} \text{ e}$$

$$C \in \mathbb{R}^{ny \times [(na+1).ny+(nb-1).nu]}$$

Essas matrizes correspondem às matrizes na formulação do capítulo anterior, vide Equações (2.1), (2.2) e (2.3). Entretanto, como não precisamos usar o estimador de estados, pois o estado nesse caso é conhecido, na representação da malha fechada definida na Equação (2.3) não é necessário incluir ambos os modelos (de predição e da planta). Com isso, reduzimos significativamente as dimensões das variáveis e equações envolvidas na solução do problema.

A representação em equação de estado permite, através de um processo recursivo, obter os estados e as variáveis de saída para qualquer instante de $k+1$ até $k+np$, desde que conheçamos o estado no instante k .

Equações para predição de estados:

Instante $k+1$

$$[x]_{k+1/k} = A[x]_{k/k} + B\Delta u(k)$$

Instante $k+2$

$$[x]_{k+2/k} = A[x]_{k+1/k} + B\Delta u(k+1)$$

$$[x]_{k+2/k} = A[A[x]_{k/k} + B\Delta u(k)] + B\Delta u(k+1)$$

$$[x]_{k+2/k} = A^2[x]_{k/k} + AB\Delta u(k) + B\Delta u(k+1)$$

Instante $k+3$

$$[x]_{k+3/k} = A[x]_{k+2/k} + B\Delta u(k+2)$$

$$[x]_{k+3/k} = A[A^2[x]_{k/k} + AB\Delta u(k) + B\Delta u(k+1)] + B\Delta u(k+2)$$

$$[x]_{k+3/k} = A^3 [x]_{k/k} + A^2 B \Delta u(k) + AB \Delta u(k+1) + B \Delta u(k+2)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

Instante $k+np$

$$[x]_{k+np/k} = A^{np} [x]_{k/k} + A^{np-1} B \Delta u(k) + A^{np-2} B \Delta u(k+1) + A^{np-3} B \Delta u(k+2) + \dots + B \Delta u(k+np-1)$$

Mas os valores de Δu após o instante m são nulos. Portanto:

$$[x]_{k+np/k} = A^{np} [x]_{k/k} + A^{np-1} B \Delta u(k) + A^{np-2} B \Delta u(k+1) + A^{np-3} B \Delta u(k+2) + \dots + A^{np-m} B \Delta u(k+m-1)$$

Equações para predição das saídas:

$$[y]_{k/k} = C [x]_{k/k}$$

$$[y]_{k+1/k} = C [x]_{k+1/k}$$

$$[y]_{k+1/k} = C [A [x]_{k/k} + B \Delta u(k)]$$

$$[y]_{k+1/k} = CA [x]_{k/k} + CB \Delta u(k)$$

$$[y]_{k+2/k} = C [x]_{k+2/k}$$

$$[y]_{k+2/k} = C [A^2 [x]_{k/k} + AB \Delta u(k) + B \Delta u(k+1)]$$

$$[y]_{k+2/k} = CA^2 [x]_{k/k} + CAB \Delta u(k) + CB \Delta u(k+1)$$

$$[y]_{k+3/k} = C [x]_{k+3/k}$$

$$[y]_{k+3/k} = C [A^3 [x]_{k/k} + A^2 B \Delta u(k) + AB \Delta u(k+1) + B \Delta u(k+2)]$$

$$[y]_{k+3/k} = CA^3 [x]_{k/k} + CA^2 B \Delta u(k) + CAB \Delta u(k+1) + CB \Delta u(k+2)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$[y]_{k+np/k} = C [x]_{k+np/k}$$

$$[y]_{k+np/k} = C \left[A^{np} [x]_{k/k} + A^{np-1} B \Delta u(k) + A^{np-2} B \Delta u(k+1) + A^{np-3} B \Delta u(k+2) + \dots + A^{np-m} B \Delta u(k+m-1) \right]$$

$$[y]_{k+np/k} = CA^{np} [x]_{k/k} + CA^{np-1} B \Delta u(k) + CA^{np-2} B \Delta u(k+1) + CA^{np-3} B \Delta u(k+2) + \dots + CA^{np-m} B \Delta u(k+m-1)$$

Passando para a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k+2) \\ y(k+3) \\ \vdots \\ y(k+np) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{np} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} CB & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & \cdot & \cdot & 0_{ny \times nu} \\ CAB & CB & 0_{ny \times nu} & \cdot & \cdot & 0_{ny \times nu} \\ CA^2B & CAB & CB & \cdot & \cdot & 0_{ny \times nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots \\ CA^{np-1}B & CA^{np-2}B & CA^{np-3}B & \cdot & \cdot & CA^{np-m}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \Delta u(k+2) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-1) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$[\tilde{y}] = \bar{A}[x]_{k/k} + \bar{B}\Delta u \quad (3.8)$$

onde:

$$\tilde{y} \in \mathbb{R}^{np.ny \times 1}, \quad x \in \mathbb{R}^{((na+1).ny + (nb-1).nu) \times 1}, \quad \Delta u \in \mathbb{R}^{m.nu \times 1}, \quad \bar{B} \in \mathbb{R}^{np.ny \times m.nu} \text{ e} \\ \bar{A} \in \mathbb{R}^{np.ny \times ((na+1).ny + (nb-1).nu)}.$$

A Expressão (3.7) permite calcular o vetor de saídas y para todo horizonte de predição np a partir do estado atual e das saídas previstas no horizonte de controle m .

CAPÍTULO 4

CONTROLADOR PREDITIVO MULTIVARIÁVEL NOMINALMENTE ESTÁVEL COM MODELO DE REALINHAMENTO

4.1 SÍNTESE DO MPC NOMINAL

Consideremos a função objetivo do MPC, que foi definida na Equação (2.10) vista no capítulo 2:

$$J_k = \sum_{j=0}^{np} e^T(k+j)W e(k+j) + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u^T(k+j)R \Delta u(k+j) \quad (2.10)$$

ou escrita na notação matricial:

$$J_k = [e]_{k|k}^T W_{np} [e]_{k|k} + \Delta u^T R_m \Delta u$$

onde a função erro representa: $[e]_{k|k} = y_{sp} - [\tilde{y}]$, $y_{sp} = \underbrace{\begin{bmatrix} (y^{sp})^T & (y^{sp})^T & \dots & (y^{sp})^T \end{bmatrix}}_{np}^T$

Substituindo a Equação (3.8) na equação acima:

$$[e]_{k|k} = y_{sp} - [\tilde{y}] = y_{sp} - \bar{A}[x]_{k|k} - \bar{B}\Delta u$$

A partir do vetor y^{sp} , temos que definir, da mesma forma que no capítulo 2, um vetor v^{sp} tal que:

$$v^{sp} = \begin{bmatrix} y^{sp} \\ 0_{(nb-1).nu \times 1} \end{bmatrix}, \text{ onde } v^{sp} = \mathbb{R}((na+1).ny + (nb-1).nu) \times 1$$

Com essa definição, é fácil verificar que a seguinte propriedade $y_{sp} = \bar{A}v^{sp}$ é satisfeita.

Assim, existindo tal definição e substituindo a mesma na expressão do erro, teremos:

$$[e]_{k|k} = y_{sp} - \bar{A}[x]_{k|k} - \bar{B}\Delta u(k)$$

$$[e]_{k|k} = \bar{A}[v^{sp}]_{k|k} - \bar{A}[x]_{k|k} - \bar{B}\Delta u = \bar{A}([v^{sp}]_{k|k} - [x]_{k|k}) - \bar{B}\Delta u(k)$$

$$[e]_{k|k} = \bar{A}[x^e]_{k|k} - \bar{B}\Delta u(k)$$

Dessa forma, a função objetivo pode ser escrita como:

$$J_k = (\bar{A}[x^e]_{k|k} - \bar{B}\Delta u)^T W_{np} (\bar{A}[x^e]_{k|k} - \bar{B}\Delta u) + \Delta u^T R_m \Delta u \quad (2.11)$$

onde:

$\bar{A}$ e $\bar{B}$ foram definidas pela Equação (3.7) do capítulo anterior;

$$\Delta u = \begin{bmatrix} \Delta u(k)^T & \cdots & \Delta u(k+m-1)^T \end{bmatrix}^T;$$

$$W_{np} = \text{diag}(\underbrace{W \cdots W}_{np}) \text{ e } R_m = \text{diag}(\underbrace{R \cdots R}_m);$$

$$[x^e]_{k|k} = [v^{sp}]_{k|k} - [x]_{k|k} = \begin{bmatrix} y^{sp} \\ y^{sp} \\ \vdots \\ y^{sp} \\ 0_{nu \times 1} \\ 0_{nu \times 1} \\ \vdots \\ 0_{nu \times 1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-na) \\ \Delta u(k-1) \\ \Delta u(k-2) \\ \vdots \\ \Delta u(k-nb+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{sp} - y(k) \\ y^{sp} - y(k-1) \\ \vdots \\ y^{sp} - y(k-na) \\ -\Delta u(k-1) \\ -\Delta u(k-2) \\ \vdots \\ -\Delta u(k-nb+1) \end{bmatrix};$$

Desenvolvendo a expressão para a função objetivo definida em (2.11):

$$J_k = \left([x^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{A} [x^e]_{k|k} - \Delta u^T \bar{B}^T W_{np} \bar{A} [x^e]_{k|k} - [x^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{B} \Delta u + \Delta u^T \bar{B}^T W_{np} \bar{B} \Delta u \right) + \Delta u^T R_m \Delta u$$

$$J_k = \Delta u^T (\bar{B}^T W_{np} \bar{B} + R_m) \Delta u - \Delta u^T \bar{B}^T W_{np} \bar{A} [x^e]_{k|k} - [x^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{B} \Delta u + [x^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{A} [x^e]_{k|k}$$

Admitindo a lei de controle $\Delta u = K_{MPC} [x^e]_{k|k}$, onde K_{MPC} , como visto, é uma matriz

constante e, portanto, independente de $[x^e]_{k|k}$, a função objetivo se torna:

$$J_k = [x^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T (\bar{B}^T W_{np} \bar{B} + R_m) K_{MPC} [x^e]_{k|k} - [x^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T \bar{B}^T W_{np} \bar{A} [x^e]_{k|k} - [x^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{B} K_{MPC} [x^e]_{k|k} + [x^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{A} [x^e]_{k|k}$$

$$J_k = [x^e]_{k|k}^T \left[K_{MPC}^T (\bar{B}^T W_{np} \bar{B} + R_m) K_{MPC} - K_{MPC}^T \bar{B}^T W_{np} \bar{A} - \bar{A}^T W_{np} \bar{B} K_{MPC} + \bar{A}^T W_{np} \bar{A} \right] [x^e]_{k|k}$$

O problema de otimização pode ser visto como:

$$\min_{\gamma, K_{MPC}} \gamma$$

sujeito a

$$J_k < \gamma \text{ ou}$$

$$\gamma - [x^e]_{k|k}^T \left[K_{MPC}^T \left(\bar{B}^T W_{np} \bar{B} + R_m \right) K_{MPC} - K_{MPC}^T \bar{B}^T W_{np} \bar{A} - \bar{A}^T W_{np} \bar{B} K_{MPC} + \bar{A}^T W_{np} \bar{A} \right] [x^e]_{k|k} > 0$$

Analogamente ao Capítulo 2, a expressão da restrição acima pode ser escrita na forma de LMI, através do complemento de Schur, que é uma forma interessante devido à existência de pacotes de otimização no mercado que utilizam essa forma matricial de expressão.

Dessa forma o Problema P1, visto no capítulo 2, pode ser redefinido como:

*Problema P1**

$$\min_{\gamma, K_{MPC}} \gamma$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \left(\bar{B}^T W_{np} \bar{B} + R_m \right)^{-1} & K_{MPC} [x^e]_{k|k} \\ [x^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T & \begin{bmatrix} \gamma + [x^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{B} K_{MPC} [x^e]_{k|k} + [x^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T \bar{B}^T W_{np} \bar{A} [x^e]_{k|k} - \\ - [x^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{A} [x^e]_{k|k} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \geq 0$$

Esse problema não garante a estabilidade do controlador obtido.

4.2 SÍNTESE DO MPC NOMINAL COM ESTABILIDADE GARANTIDA

Como visto no Capítulo 2, a condição de estabilidade de Lyapunov afirma que, se pudermos associar ao sistema, uma função $F(x)$ positiva tal que $F(x) = x^T P x > 0$ que seja decrescente no tempo, ou seja:

$$[x^e]_{k+1|k}^T P [x^e]_{k+1|k} - [x^e]_{k|k}^T P [x^e]_{k|k} \leq 0, \quad P > 0, \quad P \in \mathbb{R}^{((na+1).ny+(nb-1).nu)}$$

esse sistema é estável.

Usando a definição de $[x^e]_{k+1|k}$ e a definição de $[x]_{k+1|k}$ conforme Equação (3.6), temos:

$$[x^e]_{k+1|k} = v^{sp} - [x]_{k+1|k} = [v^{sp}]_{k|k} - A[x]_{k|k} - B\Delta u(k)$$

$$[x^e]_{k+1|k} = A[x^e]_{k|k} - B\Delta u(k)$$

Substituindo a equação acima na desigualdade de Lyapunov resulta:

$$\left(A[x^e]_{k|k} - B\Delta u(k) \right)^T P \left(A[x^e]_{k|k} - B\Delta u(k) \right) - [x^e]_{k|k}^T P [x^e]_{k|k} \leq 0 \quad (4.1)$$

Mantendo a lei de controle como $\Delta u = K_{MPC}[x^e]_{k|k}$ e lembremos que, do vetor K_{MPC} , apenas a ação correspondente ao primeiro intervalo de tempo é implementada, ou seja:

$$K_{MPC,k} = [I_{nu} \quad 0_{nu} \quad \dots \quad 0_{nu}] \quad K_{MPC} = \begin{bmatrix} I_{nu} & 0_{nu \times (m-1)nu} \end{bmatrix} = C_K \quad K_{MPC}$$

No caso do modelo de realinhamento de Maciejowski, a matriz N da Equação (2.17) passa a ser uma matriz identidade.

Observação: Dimensões das matrizes envolvidas na Inequação (4.1):

$$x^e \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny+(nb-1).nu] \times 1}, \quad A \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny+(nb-1).nu] \times [(na+1).ny+(nb-1).nu]}. \text{ Logo,}$$

$$\text{o produto entre essas matrizes será } Ax^e \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny+(nb-1).nu] \times 1}. \text{ Como}$$

$$K_{MPC} \in \mathbb{R}^{m.nu \times [(na+1).ny+(nb-1).nu]} \text{ e } C_K \in \mathbb{R}^{nu \times m.nu}, \text{ concluímos que a dimensão de } K_{MPC,k}$$

$$\text{será } K_{MPC,k} \in \mathbb{R}^{nu \times [(na+1).ny+(nb-1).nu]}. \text{ Sabemos que } B \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny+(nb-1).nu] \times nu}.$$

Portanto, o produto matricial entre a matriz de entrada B e o ganho associado ao instante

$$k \text{ terá a dimensão } BK_{MPC,k} \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny+(nb-1).nu] \times [(na+1).ny+(nb-1).nu]}. \text{ Dessa forma,}$$

$BK_{MPC,k}[x^e]_{k|k}$ já tem a mesma dimensão de $A[x^e]_{k|k}$, dispensando o uso da matriz auxiliar N , utilizada anteriormente.

Conseqüentemente, a desigualdade de Lyapunov fica:

$$\left(A[x^e]_{k|k} - BK_{MPC,k}[x^e]_{k|k} \right)^T P \left(A[x^e]_{k|k} - BK_{MPC,k}[x^e]_{k|k} \right) - [x^e]_{k|k}^T P [x^e]_{k|k} \leq 0$$

$$[x^e]_{k|k}^T (A - BK_{MPC,k})^T P (A - BK_{MPC,k}) [x^e]_{k|k} - [x^e]_{k|k}^T P [x^e]_{k|k} \leq 0$$

Portanto:

$$(A - BK_{MPC,k})^T P (A - BK_{MPC,k}) - P \leq 0$$

Definindo $P = Q^{-1}$, com $Q > 0$, $Q \in \mathbb{R}^{((na+1).ny+(nb-1).nu)}$ obtemos:

$$(A - BK_{MPC,k})^T Q^{-1} (A - BK_{MPC,k}) - Q^{-1} \leq 0 \quad (4.2)$$

Pré-multiplicando por Q^T e pós-multiplicando por Q , obtemos:

$$Q^T (A - BK_{MPC,k})^T Q^{-1} (A - BK_{MPC,k}) Q - Q \leq 0$$

ou:

$$Q - Q^T (A - BK_{MPC,k})^T Q^{-1} (A - BK_{MPC,k}) Q \geq 0$$

Aplicando o complemento de Schur, a desigualdade acima fica:

$$\begin{bmatrix} Q & (A - BK_{MPC,k}) Q \\ Q^T (A - BK_{MPC,k})^T & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.3)$$

A Inequação (4.3) não é uma LMI pois, no problema de otimização do MPC estável, tanto $K_{MPC,k}$ quanto Q são incógnitas. Entretanto, com a utilização do modelo de realinhamento, sendo o estado medido, podemos definir uma nova variável $Y = K_{MPC,k} Q$, o que não era possível na versão anterior, pois, existia uma matriz N não quadrada conforme mostrado na Desigualdade matricial (2.22). Essa nova variável Y transforma a Inequação (4.3) na seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} Q & AQ - BY \\ Q^T A^T - Y^T B^T & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.4)$$

Observe que, como Q não é singular, uma vez obtidos os valores de Y e Q , podemos obter $K_{MPC,k}$ pela equação $K_{MPC,k} = YQ^{-1}$.

Acrescentando as condições de estabilidade de Lyapunov e lembrando que, da mesma forma que no Capítulo 2, o erro considerado deve ser fixo, o Problema P1* pode ser reescrito da seguinte forma:

*Problema P2**

$$\min_{\gamma, K_{MPC}, Q, Y} \gamma$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \left(\bar{B}^T W_{np} \bar{B} + R_m \right)^{-1} & K_{MPC} [x_0^e]_{k|k} \\ [x_0^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T & \begin{bmatrix} \gamma + [x_0^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{B} K_{MPC} [x_0^e]_{k|k} + [x_0^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T \bar{B}^T W_{np} \bar{A} [x_0^e]_{k|k} - \\ - [x_0^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{A} [x_0^e]_{k|k} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} Q & AQ - BY \\ Q^T A^T - Y^T B^T & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.4)$$

e

$$K_{MPC,k} = YQ^{-1} \quad (4.6)$$

onde $K_{MPC,k} = C_K K_{MPC}$

O Problema P2* não é linear por causa da Equação (4.6) que relaciona as variáveis do problema. Portanto, não podemos usar as ferramentas de LMI existentes. Para possibilitar a solução desse problema, propomos uma solução sub-ótima que envolve o desmembramento desse problema em dois subproblemas que são LMIs:

*Problema P2a**

$$\max_{\alpha, Q, Y} \alpha$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} Q & AQ - BY \\ Q^T A^T - Y^T B^T & Q - \alpha I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.7)$$

$$\alpha \geq 0$$

$$Q \geq 0$$

Esse problema encontra uma solução conservadora que maximiza a distância em relação à instabilidade do sistema. Ele pode ser resolvido como LMI independente da necessidade de uma solução inicial, pois a Restrição (4.7) é sempre linear.

Como resultado desse problema temos α^* , Q^* e Y^* . Conseqüentemente podemos obter:

$$K_{MPC,k}^* = Y^* (Q^*)^{-1}.$$

A matriz Q^* é então utilizada no seguinte problema:

*Problema P2b**

$$\begin{aligned} \min_{K_{MPC}} J_k = & [x_0^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T \left(\bar{B}^T W_{np} \bar{B} + R_m \right) K_{MPC} [x_0^e]_{k|k} - [x_0^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T \bar{B}^T W_{np} \bar{A} [x_0^e]_{k|k} - \\ & - [x_0^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{B} K_{MPC} [x_0^e]_{k|k} + [x_0^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{A} [x_0^e]_{k|k} \end{aligned}$$

sujeito a

$$(A - BC_k K_{MPC})^T (Q^*)^{-1} (A - BC_K K_{MPC}) - (Q^*)^{-1} \leq 0 \quad (4.8)$$

A Inequação (4.8) é equivalente à Inequação (4.2) escrita para os resultados encontrados no problema anterior.

Da mesma forma que mostrado anteriormente, essa restrição pode ser desenvolvida através de uma pré-multiplicação por $(Q^*)^T$ e pós-multiplicação por Q^* :

$$\begin{aligned} (Q^*)^T (A - BC_k K_{MPC})^T (Q^*)^{-1} (A - BC_K K_{MPC}) (Q^*) - (Q^*) &\leq 0 \\ (Q^*)^T A^T (Q^*)^{-1} A (Q^*) - (Q^*)^T K_{MPC}^T C_k^T B^T (Q^*)^{-1} A (Q^*) - (Q^*)^T A^T (Q^*)^{-1} BC_K K_{MPC} (Q^*) + \\ + (Q^*)^T K_{MPC}^T C_k^T B^T (Q^*)^{-1} BC_K K_{MPC} (Q^*) - (Q^*) &\leq 0 \end{aligned}$$

A expressão acima pode ser convertida na seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} Q^* & BC_K K_{MPC} Q^* \\ (Q^*)^T K_{MPC}^T C_k^T B^T & \begin{bmatrix} Q^* - (Q^*)^T A^T Q^{-1} A Q^* + (Q^*)^T K_{MPC}^T C_k^T B^T (Q^*)^{-1} A Q^* + \\ + (Q^*)^T A^T (Q^*)^{-1} BC_K K_{MPC} Q^* \end{bmatrix} \end{bmatrix} \geq 0$$

Portanto, o Problema P2b* pode ser escrito da seguinte forma:

*Problema P2b**

$\min_{\gamma, K_{MPC}} \gamma$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \left(\bar{B}^T W_{np} \bar{B} + R_m \right)^{-1} & K_{MPC} [x_0^e]_{k|k} \\ [x_0^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T & \begin{bmatrix} \gamma + [x_0^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{B} K_{MPC} [x_0^e]_{k|k} + [x_0^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T \bar{B}^T W_{np} \bar{A} [x_0^e]_{k|k} - \\ - [x_0^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{A} [x_0^e]_{k|k} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} Q^* & BC_K K_{MPC} Q^* \\ (Q^*)^T K_{MPC}^T C_K^T B^T & \begin{bmatrix} Q^* - (Q^*)^T A^T Q^{-1} A Q^* + (Q^*)^T K_{MPC}^T C_K^T B^T (Q^*)^{-1} A Q^* + \\ + (Q^*)^T A^T (Q^*)^{-1} BC_K K_{MPC} Q^* \end{bmatrix} \end{bmatrix} \geq 0$$

No Problema P2a* procuramos determinar um $K_{MPC,k}$ ($K_{MPC,k} = YQ^{-1}$) que maximize o parâmetro α que representa a que distância a malha está da instabilidade. No Problema P2b* procuramos maximizar a performance do controlador em termos de minimização da função objetivo, preservada a estabilidade que é garantida pela Inequação (4.8).

Pode-se verificar facilmente, que se o Problema P2a* for viável, então o Problema P2b* também o será, porque:

$$K_{MPC} = \begin{bmatrix} K_{MPC,k}^* & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$$

é uma solução viável para o Problema P2b*.

Observe que, para que o Problema P2a* tenha solução, é necessário que o sistema seja controlável, pois, caso contrário, não poderíamos satisfazer a Inequação (4.7) de estabilidade. Quando uma ou mais entradas se tornam saturadas (atingem os valores máximos ou mínimos), esta condição pode não ser atendida. Neste trabalho vamos assumir que o sistema se mantém controlável, mesmo após a saturação de uma ou mais entradas manipuladas. Isso pode ocorrer de duas formas: (a) o sistema tem mais entradas manipuladas que saídas controladas, (b) quando o número de controladas é maior que o número de manipuladas, uma ou mais saídas controladas deixam de ser controladas e passamos então a controlar um conjunto menor de saídas. Para estender os

Problemas P2a* e P2b* ao caso em que as restrições nas entradas podem se tornar ativas, o algoritmo, descrito no Item 4.3 a seguir, é proposto.

4.3 SÍNTESE DO MPC NOMINAL CONSIDERANDO SATURAÇÃO NAS ENTRADAS

Para resolver o problema de síntese do MPC com restrições nas entradas, adotamos o seguinte algoritmo (Rodrigues & Odloak (2005)):

Determine um ganho de realimentação K_{MPC} resolvendo os problemas P2a* e P2b* estendido de tal forma que:

- i) Nenhuma das manipuladas fica saturada. Isso corresponde ao caso em que o controlador manipula todas as nu entradas manipuladas e controla as ny saídas controladas com $nu \geq ny$.
- ii) Uma das manipuladas (u_j) fica saturada. Considerando que as entradas restantes possam ainda controlar todas as saídas ou um subconjunto das saídas, inclua nos problemas P2a* e P2b* uma restrição que garanta que o controlador estabilize o subsistema constituído pelas restantes $nu-1$ manipuladas e o subconjunto escolhido das controladas. Repita o procedimento para todas as entradas $j = 1, 2, \dots, nu$.

Para estabilizar os subsistemas que resultam quando $nu-1$ entradas são manipuladas, as seguintes inequações tem que ser incluídas no Problema P2a*:

$$\begin{bmatrix} Q & (A - BC_K K_{MPC}^j)Q \\ Q^T (A - BC_K K_{MPC}^j)^T & Q - \alpha I \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, \dots, nu \quad (4.9)$$

Para o Problema P2b*, essas mesmas restrições devem ser adicionadas substituindo Q por Q^* , onde Q^* é a solução encontrada para o Problema P2a*.

A Inequação (4.9) é a adaptação da Inequação (4.3) onde a matriz K_{MPC}^j é obtida a partir da K_{MPC} anulando-se os termos relacionados com a entrada u_j que saturou e,

se necessário, com a saída que deixou de ser controlada para manter a controlabilidade do sistema.

- iii) Estendemos o procedimento acima ao caso em que duas entradas tenham ficado saturadas e consideramos todas as possíveis combinações de entradas saturadas. Devemos lembrar que isto deve ser feito sob a hipótese que o sistema seja controlável com as duas entradas saturadas, ou consideramos um subsistema que assim o seja. Para estabilizar todos os subsistemas resultantes da saturação de duas entradas, devemos incluir nos problemas P2a* e P2b* as seguintes inequações:

$$\begin{bmatrix} Q & (A - BC_K K_{MPC}^{j,l})Q \\ Q^T (A - BC_K K_{MPC}^{j,l})^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, \dots, nu, \quad l = 1, \dots, nu, \quad l \neq j$$

onde $K_{MPC}^{j,l}$ é obtido a partir de K_{MPC} zerando-se os termos correspondentes a u_j e u_l .

- iv) Repetimos o procedimento para 3,4,... entradas saturadas considerando sempre que o sistema permaneça controlável. Generalizando:

$$\begin{bmatrix} Q & (A - BC_K K_{MPC}^j)Q \\ Q^T (A - BC_K K_{MPC}^j)^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, \dots, nc$$

onde nc é o número possível de combinações para que ocorra saturação nas entradas, mantendo controlabilidade do subconjunto escolhido das variáveis controladas.

K_{MPC}^j é obtido a partir de K_{MPC} zerando-se os termos correspondentes a(s) entrada(s) u_j em que tenha(m) ocorrido saturação.

A solução dos problemas P2a* e P2b* com a inclusão das restrições descritas acima, resulta em um controlador que estabiliza o sistema completo com todas as entradas manipuladas disponíveis, bem como os subsistemas correspondentes à saturação de uma ou mais entradas. Esse controlador é sintetizado *off-line* necessitando um esforço computacional considerável, mesmo com as modificações incluídas neste trabalho.

Para aplicação *on-line*, podemos sintetizar uma lei de controle sub-ótima em termos de redução da função objetivo, porém, com garantia de estabilidade. Essa lei de controle resulta do seguinte problema de otimização:

*Problema P3**

$$\min_{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{nc}} J_k$$

sujeito a

$$J_k = (\bar{A}[x^e]_{k|k} - \bar{B} \Delta u)^T W_{np} (\bar{A}[x^e]_{k|k} - \bar{B} \Delta u) + \Delta u^T R_m \Delta u$$

$$\sum_{j=0}^{nc} \beta_j = 1 \quad (4.10)$$

$$0 \leq \beta_j \leq 1 \quad j = 0, 1, \dots, nc \quad (4.11)$$

$$\Delta u = [\beta_0 K_{MPC} + \beta_1 K_{MPC}^1 + \dots + \beta_{nc} K_{MPC}^{nc}] [x^e]_{k|k} \quad (4.12)$$

$$u_{\min} \leq u(k+j) \leq u_{\max} \quad j = 1, \dots, m-1$$

onde nc : número de configurações possíveis de controle.

A Equação (4.12) mostra que o ganho do controlador passa a ser uma combinação linear dos controladores obtidos na fase *off-line*.

Para definição dessa combinação linear foi adaptada e melhorada a lógica auxiliar desenvolvida por Rodrigues & Odloak (2005). Essa lógica verifica as condições de saturação das novas entradas calculadas em função dos ganhos dos controladores e do erro atual da planta. Caso o novo valor esteja dentro dos limites permitidos pelas restrições de entrada, o incremento nas entradas calculado é aplicado à planta. Caso uma ou mais entradas atingirem a saturação, apenas a diferença com relação à saturação dessa(s) entrada(s) é aplicada à planta. Para as demais entradas que se encontram afastadas da restrição, o valor incremental calculado é aplicado de forma integral.

CAPÍTULO 5

SÍNTESE DO MPC ROBUSTO CONSIDERANDO INCERTEZA DE MODELO

5.1 MPC ROBUSTO COM INCERTEZA DE MODELO POLITÓPICA OU MULTIPLANTAS SEM SATURAÇÃO DAS ENTRADAS

Uma extensão natural para o Problema P2*, similar ao exposto no Capítulo 2, seria a inclusão de diversos modelos possíveis para garantir a estabilidade do sistema na incerteza do modelo.

Para desenvolver um controlador MPC que seja robusto em relação às incertezas no modelo, temos que inicialmente admitir uma estrutura para essas incertezas. Uma forma usual de se caracterizar as incertezas é admitir que a matriz de estado A e a matriz de entrada B do modelo definido em (3.7) e (3.8) para a planta real não sejam exatamente conhecidas mas sabe-se que estão em um conjunto convexo definido por:

$$(A, B) = \sum_{i=1}^L \lambda_i (A_i, B_i), \quad \sum_{i=1}^L \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, L \quad (2.21)$$

onde (A_i, B_i) , $i = 1, \dots, L$, caracterizam um conjunto de modelos correspondentes a diferentes condições operacionais do processo. Por hipótese, todos esses modelos têm a mesma estrutura, ou seja, as matrizes A_i e B_i têm as mesmas dimensões para qualquer i . Essa é a chamada incerteza politópica e tem sido adotada na maioria dos artigos que enfocam o controle robusto a incertezas no modelo via MPC.

Uma outra forma prática de se considerar incertezas no modelo, é definir um conjunto discreto de modelos Ω onde:

$$(A, B) \in \Omega \mid \Omega = ((A_1, B_1), \dots, (A_L, B_L)) \quad (5.1)$$

Nesse caso, a incerteza é dita multiplantas pois a planta real é um dos modelos definidos em Ω . É claro que a incerteza politópica é mais geral que a incerteza multiplanta. Assim, todas as conclusões válidas para a incerteza politópica serão também válidas para o caso multiplantas. No entanto, o modelo politópico só pode ser utilizado quando

tivermos linearidade nas incertezas (A_i e B_i). Para formulações em que esse fato não ocorra, a incerteza se torna multiplanta.

Vamos agora designar de nominal o modelo mais provável da planta ou aquele que corresponde às condições de projeto do processo.

Observe que a Inequação (4.3):

$$\begin{bmatrix} Q & (A - BK_{MPC,k})Q \\ Q^T (A - BK_{MPC,k})^T & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.3)$$

é linear nas matrizes A e B , para um dado $K_{MPC,k}$ e Q . Assim, se ela for obedecida para os sistemas correspondentes aos vértices do politopo definido em (2.21), ela será também obedecida para qualquer combinação convexa desses vértices e, portanto, válida para todo o politopo. Dessa forma, o problema de otimização que gera o MPC com realimentação de saída e robusto para incerteza politópica no modelo pode ser formulado da seguinte forma:

Problema P4

$$\min_{\gamma, Q, K_{MPC}} \gamma$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} (\bar{B}^T W_{np} \bar{B} + R_m)^{-1} & K_{MPC} [x_0^e]_{k|k} \\ [x_0^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T & \begin{bmatrix} \gamma + [x_0^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{B} K_{MPC} [x_0^e]_{k|k} + [x_0^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T \bar{B}^T W_{np} \bar{A} [x_0^e]_{k|k} - \\ - [x_0^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{A} [x_0^e]_{k|k} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} Q & (A_i - B_i C_K K_{MPC})Q \\ Q^T (A_i - B_i C_K K_{MPC})^T & Q \end{bmatrix} > 0 \quad i = 1, \dots, L \quad (5.2)$$

No problema acima, a Inequação (4.5) significa que nós estamos minimizando a função custo para o modelo nominal, enquanto que a Inequação (5.2) significa que nós estamos garantindo a estabilidade para todos os modelos pertencentes ao politopo definido em (2.21).

Uma formulação alternativa para o problema de otimização que produz o MPC robusto seria minimizar J_k para o pior modelo dentro do politopo definido em (2.21). Entretanto, se adotarmos essa formulação, a Inequação (4.5) deixa de ser linear em termos de incertezas, devido a multiplicação dos termos $\bar{A}_i$ e $\bar{B}_i$ do processo. Assim, a minimização do majorante γ para os vértices do politopo, que define as incertezas no modelo, não equivale a minimizar o limite superior de J_k para qualquer elemento do politopo. Logo, o problema que minimiza o pior J_k é válido apenas para o caso de incerteza tipo multiplantas. O MPC robusto para esse caso é gerado pela solução do seguinte problema:

Problema P4*

$$\min_{\gamma, Q, K_{MPC}} \gamma$$

sujeito a

$$\left[\begin{array}{cc} \left(\bar{B}_i^T W_{np} \bar{B}_i + R_m \right)^{-1} & K_{MPC} [x_0^e]_{k|k} \\ \gamma + [x_0^e]_{k|k}^T \bar{A}_i^T W_{np} \bar{B}_i K_{MPC} [x_0^e]_{k|k} + [x_0^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T \bar{B}_i^T W_{np} \bar{A}_i [x_0^e]_{k|k} - & \\ [x_0^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T & -[x_0^e]_{k|k}^T \bar{A}_i^T W_{np} \bar{A}_i [x_0^e]_{k|k} \end{array} \right] > 0 \quad (5.3)$$

$i = 1, \dots, L$

$$\left[\begin{array}{cc} Q & (A_i - B_i C_K K_{MPC}) Q \\ Q^T (A_i - B_i C_K K_{MPC})^T & Q \end{array} \right] > 0, \quad i = 1, \dots, L \quad (5.2)$$

A utilização do MPC resultante da solução do Problema P4 seria recomendada quando temos uma certa garantia que o processo opera na maior parte do tempo próximo das condições de projeto. Por outro lado, o MPC resultante da solução do Problema P4* deve apresentar uma melhor performance quando temos certeza que o processo raramente opera em condições fixas e próximas às condições de projeto. Uma desvantagem desse segundo controlador é que o número de restrições é maior que no primeiro controlador e, portanto, deve levar a um maior tempo de computação. No que se segue vamos sempre nos referir ao Problema P4, mas a maioria das conclusões pode ser estendida analogamente ao Problema P4*.

5.2 MPC ROBUSTO COM INCERTEZA DE MODELO POLITÓPICA COM SATURAÇÃO DAS ENTRADAS

Também podemos estender esses conceitos para os Problemas P2a* e P2b* do capítulo anterior com a inclusão de uma restrição para cada modelo possível da planta.

Problema P4a

$$\max_{\alpha, Q, Y} \alpha$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} Q & A_i Q - B_i Y \\ Q^T A_i^T - Y^T B_i^T & Q - \alpha I \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, L, \quad (5.4)$$

$$Y = K_{MPC,k}^j Q, \quad j = 1, \dots, nc$$

$$\alpha \geq 0$$

$$Q \geq 0$$

Problema P4b

$$\min_{\gamma, K_{MPC}} \gamma$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \left(\bar{B}^T W_{np} \bar{B} + R_m \right)^{-1} & K_{MPC} [x_0^e]_{k|k} \\ [x_0^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T & \begin{bmatrix} \gamma + [x_0^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{B} K_{MPC} [x_0^e]_{k|k} + [x_0^e]_{k|k}^T K_{MPC}^T \bar{B}^T W_{np} \bar{A} [x_0^e]_{k|k} - \\ - [x_0^e]_{k|k}^T \bar{A}^T W_{np} \bar{A} [x_0^e]_{k|k} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.5)$$

$$\left[\begin{array}{c} Q^* \\ (Q^*)^T \left(K_{MPC}^j \right)^T C_K^T B_i^T \\ Q^* - (Q^*)^T A_i^T Q^{-1} A_i Q^* + (Q^*)^T \left(K_{MPC}^j \right)^T C_k^T B_i^T (Q^*)^{-1} A_i Q^* + \\ + (Q^*)^T A_i^T (Q^*)^{-1} B_i C_K K_{MPC}^j Q^* \end{array} \right] \geq 0 \quad (5.5)$$

$$i = 1 \dots L, \quad j = 1 \dots nc$$

onde K_{MPC}^j é obtido anulando-se os termos relativos às entradas saturadas.

Analizando as restrições acima referentes aos subproblemas gerados para solução do Problema original P4, observa-se que, apesar dos termos obtidos nos Problemas P4a e P4b não serem lineares na matriz de estado A_i e, dessa forma, poderíamos concluir que a incerteza politópica só poderia ser utilizada quando essa incerteza estivesse apenas na matriz de entrada B_i o que, na prática, não ocorre. Essa conclusão não é verdadeira porque, para o problema original, Problema P4, essa linearidade é atendida. Portanto, o controlador desenvolvido é robusto para o caso de incerteza politópica, que é o caso mais geral.

5.3 DEMONSTRAÇÃO DA ESTABILIDADE DO CONTROLADOR PROPOSTO

O teorema abaixo garante a estabilidade dos controladores obtidos na solução desse problema.

Teorema: Considere o sistema descrito pela Equação (2.21) e que esse sistema se mantenha controlável quando qualquer entrada saturar. O sistema em malha fechada com a estratégia de controle obtida pelos Problemas P4a, P4b e P3* permanecerá estável quando o sistema se desloca de um ponto de operação onde nenhuma entrada está saturada para outro ponto de operação onde uma das entradas satura. A estabilidade é preservada no sentido contrário, quando uma entrada sai do estado de saturação e se torna disponível para ser manipulada pelo controlador.

Demonstração:

Seja uma planta definida por (2.21).

Além disso, seja um controlador que em um instante qualquer k seja obtido pela expressão:

$$K_{MPC} = \left[\beta_0 K_{MPC}^0 + \beta_1 K_{MPC}^1 + \cdots + \beta_{nc} K_{MPC}^{nc} \right], \quad \text{com} \quad \sum_{j=0}^{nc} \beta_j = 1 \quad \text{onde} \quad 0 \leq \beta_j \leq 1 \quad \text{para}$$

$j = 0, 1, \dots, nc$. Podemos provar que esse controlador estabiliza a planta acima. Para tal vamos demonstrar que, para essa planta e controlador, a condição de Lyapunov representada na Inequação (5.2) é obedecida.

Observemos que para a planta e o controlador acima temos:

$$\begin{bmatrix} Q & (A - BC_K K_{MPC})Q \\ Q^T (A - BC_K K_{MPC})^T & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & \left(\sum_{j=1}^L \lambda_j A_j - \sum_{j=1}^L \lambda_j B_j C_K \sum_{i=0}^{nc} \beta_i K_{MPC}^i \right) Q \\ Q^T \left(\sum_{j=1}^L \lambda_j A_j - \sum_{j=1}^L \lambda_j B_j C_K \sum_{i=0}^{nc} \beta_i K_{MPC}^i \right)^T & Q \end{bmatrix}$$

Lembrando que $\sum_{j=1}^L \lambda_j = 1$ e $\sum_{i=0}^{nc} \beta_i = 1$, podemos multiplicar $\sum_{j=1}^L \lambda_j \sum_{i=0}^{nc} \beta_i$ na diagonal

principal e $\sum_{i=0}^{nc} \beta_i$ na diagonal auxiliar. Em seguida, podemos evidenciar $\sum_{j=1}^L \lambda_j \sum_{i=0}^{nc} \beta_i$ de

forma a obter:

$$\sum_{j=1}^L \lambda_j \sum_{i=0}^{nc} \beta_i \begin{bmatrix} Q & (A_j - B_j C_K K_{MPC}^i)Q \\ Q^T (A_j - B_j C_K K_{MPC}^i)^T & Q \end{bmatrix} > 0$$

onde a última inequação é verdadeira por causa de (4.9). Isso significa que, no instante k , o controlador resultante da solução do Problema P3* estabiliza o estado formado pelas saídas controláveis e pelas entradas manipuladas conforme a estrutura do modelo de realinhamento.

CAPÍTULO 6

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Neste capítulo são apresentados exemplos de aplicação do controlador proposto em modelos encontrados em unidades industriais. No primeiro exemplo é considerado o problema nominal, onde o modelo é igual à planta, sem e com saturação de entrada. Esse controlador não é robusto quanto à incerteza de modelo, sendo apenas de estabilidade garantida para a condição nominal. No segundo exemplo utilizamos uma segunda condição operacional da mesma unidade para verificar o desempenho do controlador robusto que considera a incerteza de modelo. Também nessa aplicação são consideradas as duas situações possíveis de restrição ou não nas entradas. Finalizando essa aplicação, mostramos a vulnerabilidade do controlador nominal obtido com a incerteza de modelo. O terceiro exemplo considera-se uma aplicação em um processo integrador, com tempo morto considerável. Mostramos os resultados obtidos para o caso nominal sem restrições nas entradas, para o caso robusto sem restrições nas entradas e para o caso robusto com restrições nas entradas. O quarto exemplo traz um sistema de três variáveis controladas e três variáveis manipuladas correspondentes a uma fracionadora de óleo pesado. Os mesmos ensaios são realizados para o caso nominal sem restrições, caso nominal com restrições, caso robusto sem restrições e caso robusto com restrições. Acrescentamos a esse exemplo, o estudo do problema regulatório, onde uma perturbação em degrau e em pulso é aplicada ao sistema. O capítulo finaliza com uma comparação entre o controlador proposto nesse trabalho e sua versão anterior, publicada por Rodrigues & Odloak (2005).

6.1 APLICAÇÃO DE CONTROLADOR NOMINAL ESTÁVEL EM PROCESSO NÃO INTEGRADOR

Inicialmente consideramos uma coluna Desbutanizadora de uma unidade industrial de petróleo. A Desbutanizadora tem como função especificar C_5+ no produto de topo da coluna e o C_4- no produto de fundo da coluna. A variável controlada y_1 representa o intemperismo do GLP enquanto que a variável y_2 , a PVR da gasolina. As variáveis manipuladas são vazão de refluxo, u_1 (m^3/h), e carga térmica do refeedor, u_2 (MMcal/h).

Para ilustrar o resultado da aplicação do controlador proposto neste trabalho, consideremos esse sistema representado pela seguinte função de transferência (Rodrigues & Odloak, 2002):

$$G_A(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.2623}{60s^2 + 59.2s + 1} & \frac{0.1368}{1164s^2 + 99.7s + 1} \\ \frac{0.1242}{218.7s^2 + 16.2s + 1} & \frac{-0.1351}{70s^2 + 20s + 1} \end{bmatrix}$$

Nesse exemplo vamos considerar o caso nominal (modelo igual à planta) e mostrar a estabilidade do controlador em malha fechada na presença de saturação de uma das entradas.

Esse modelo pode ser colocado na forma de uma equação de diferenças do tipo:

$$y(k) + A_1y(k-1) + A_2y(k-2) + A_3y(k-3) + A_4y(k-4) = B_1u(k-1) + B_2u(k-2) + B_3u(k-3) + B_4u(k-4)$$

Para isso, através da instrução “c2d” do Programa Matlab, obtém-se a função de transferência discreta associada ao sistema acima com um período de amostragem equivalente a 5 unidades de tempo. O método de discretização utilizado em todos os exemplos dessa dissertação foi o “zoh”, onde as entradas são consideradas constantes ao longo do período de amostragem.

Em seguida, conforme mostrado abaixo, separa-se em matrizes correspondentes a cada intervalo de tempo associado à função discreta obtida.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} -2.5597 & 0 \\ 0 & -2.6508 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k-1) \\ y_2(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.1713 & 0 \\ 0 & 2.6137 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k-2) \\ y_2(k-2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.6149 & 0 \\ 0 & -1.1109 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k-3) \\ y_2(k-3) \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 0.0047 & 0 \\ 0 & 0.1655 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k-4) \\ y_2(k-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0173 & 0.0013 \\ 0.0062 & -0.0154 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-1) \\ u_2(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0241 & -0.0000746 \\ -0.0011 & 0.0150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-2) \\ u_2(k-2) \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} -0.0045 & -0.0010 \\ -0.0043 & 0.0046 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-3) \\ u_2(k-3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0027 & 0.000008 \\ 0.0013 & -0.0066 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-4) \\ u_2(k-4) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Para esse sistema, a matriz de estados correspondente à proposta desse trabalho (matriz de realinhamento de Maciejowski (2002) com as entradas na forma incremental), se apresenta na seguinte forma:

$$[x]_{k+1|k} = A[x]_{k|k} + B\Delta u(k)$$

Da Equação (3.5) obtemos:

$$A = \begin{bmatrix} 3.56 & 0 & -4.73 & 0 & 2.79 & 0 & -0.61 & 0 & 0.005 & 0 & 0.02 & -0.0001 & -0.0045 & -0.001 & -0.0027 & 0 \\ 0 & 3.65 & 0 & -5.26 & 0 & 3.72 & 0 & -1.28 & 0 & 0.17 & -0.001 & 0.015 & -0.0043 & 0.0046 & 0.0013 & -0.007 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.0173 & 0.0013 \\ 0.0062 & -0.0154 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir desse exemplo verificamos a performance do controlador obtido para um caso onde não há incerteza no modelo, ou seja, a planta corresponde ao modelo inserido no controlador. A sintonia aplicada ao controlador para obtenção desses resultados é mostrada na tabela 6.1:

Tabela 6.1.Sintonia do MPC para aplicação não integradora

Horizonte de predição (np)	30
Horizonte de controle (m)	3
Peso das variáveis de controle (W)	$\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$
Fator de supressão (R)	$\begin{bmatrix} 0.05 & 0.05 \end{bmatrix}$

Nas figuras. 6.1 a 6.3 temos as respostas da simulação desse sistema com o controlador definido pelos Problemas P2a*, P2b* e P3* no caso em que nenhuma das entradas fique saturada.

O controlador opera no modo “servo”, sendo o valor desejado da saída definido como $y^{sp} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$. Na Figura 6.1 vemos que as saídas são conduzidas para os valores desejados sem nenhuma dificuldade. Na Figura 6.2 observamos que as entradas estabilizam em valores dentro das faixas especificadas: $u_{min} = \begin{bmatrix} -10 & -10 \end{bmatrix}^T$, $u_{max} = \begin{bmatrix} 15 & 15 \end{bmatrix}^T$. Na Figura 6.3, representamos o valor da função de Lyapunov $V_k = [x^e]_{k|k}^T P [x^e]_{k|k}$. Vemos que, como nenhuma das entradas fica saturada, V_k é sempre decrescente.

Figura 6.1. Saídas controladas do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal sem saturação das entradas

Figura 6.2. Entradas manipuladas do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal sem saturação das entradas

Figura 6.3. Função de Lyapunov do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal sem saturação das entradas

As Figuras 6.4 a 6.6 mostram o comportamento do sistema quando alteramos os limites máximos das manipuladas para $u_{max}=[15; 1.5]^T$.

Vemos que nesse caso, uma das manipuladas (u_2) satura e permanece como tal até o final da simulação. Nesse caso, onde não foi dada prioridade alguma para qualquer variável controlada, ambas apresentaram *offset* em relação ao valor desejado, pois, a convergência simultânea das duas saídas é perdida, já que temos apenas uma variável manipulada disponível. No problema de otimização *on-line*, podemos penalizar uma variável em relação à outra, de forma que o *offset* da primeira seja menor quando comparado com a segunda variável de controle. Na Figura 6.6 observamos que a função de Lyapunov pára de diminuir seu valor no momento da saturação de u_2 . Logo em seguida, notamos um aumento da função correspondente a um aumento de *offset* ocorrido na variável controlada y_2 no intervalo de tempo igual a aproximadamente 25 unidades de tempo. Com a estabilização dos *offset's* envolvidos, a função de Lyapunov assume um valor residual, não se anulando.

Figura 6.4. Saídas controladas do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal com saturação de u_2

Figura 6.5. Entradas manipuladas do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal com saturação de u_2

Figura 6.6. Função de Lyapunov do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal com saturação de u_2

O controlador pode garantir a convergência de apenas uma das saídas. Para isso, basta considerarmos no Problema *on-line* (P3*) apenas a condição de desvio da variável controlada selecionada. Nesse exemplo da Desbutanizadora, vamos priorizar o intemperismo do GLP (y_1). Como podemos observar nas Figuras 6.7 e 6.8, a variável de controle priorizada (y_1) atinge o valor desejado de *set-point* enquanto que a variável y_2 apresenta um *offset* em relação ao valor desejado. A função de Lyapunov, mostrada na Figura 6.9, nesse caso decresce mas não atingindo o valor nulo. Isso porque essa função está sendo calculada para as duas variáveis. A Figura 6.10 mostra a função V_{k1} considerando apenas a variável intemperismo. Como podemos observar, essa função é monotonicamente decrescente, caracterizando a estabilidade do sistema.

Figura 6.7. Saídas controladas do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal com saturação de u_2 priorizando y_1

Figura 6.8. Entradas manipuladas do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal com saturação de u_2 priorizando y_1

Figura 6.9. Função de Lyapunov V_k do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal com saturação de u_2 priorizando y_1

Figura 6.10. Função de Lyapunov V_{k1} do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal com saturação de u_2 priorizando y_1

Nas Figuras 6.11 e 6.12 indica-se a resposta obtida pelo controlador no caso de saturação momentânea da entrada u_I . O objetivo deste estudo é de constatar que o controlador proposto garante estabilidade e convergência para um caso de chaveamento das restrições ativas. Nesse caso o controlador consegue levar as duas variáveis para o ponto desejado, não ocorrendo *offset*. A variável manipulada u_I momentaneamente atinge o valor mínimo permitido para, em seguida, ser liberada para o controlador. Conforme Figura 6.13, a função de Lyapunov é sempre decrescente.

Figura 6.11. Saídas controladas do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal com saturação momentânea de u_I

Figura 6.12. Entradas manipuladas do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal com saturação momentânea de u_1

Figura 6.13 Função de Lyapunov do sistema da Desbutanizadora para o caso nominal com saturação momentânea de u_1

6.2 APLICAÇÃO DO CONTROLADOR ROBUSTO EM PROCESSO NÃO INTEGRADOR COM INCERTEZA DE MODELO

Para ilustrar a operação robusta do controlador para incerteza no modelo, uma segunda função de transferência é incluída no controlador definido pelos Problemas P4a, P4b e P3*. Essa função $G_B(s)$ corresponderia a uma condição operacional diferente daquela em que $G_A(s)$ foi obtida.

$$G_B(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.3544}{218s^2 + 50.1s + 1} & \frac{0.2044}{1150s^2 + 93.86s + 1} \\ \frac{0.0685}{100.2s^2 + 11.32s + 1} & \frac{-0.1256}{20s^2 + 15s + 1} \end{bmatrix}$$

Esse modelo também pode ser colocado na forma de uma equação de diferenças do tipo:

$$y(k) + A_1y(k-1) + A_2y(k-2) + A_3y(k-3) + A_4y(k-4) = B_1u(k-1) + B_2u(k-2) + B_3u(k-3) + B_4u(k-4)$$

Analogamente ao item anterior, através da instrução “*c2d*” do Programa Matlab, obtém-se a função de transferência discreta associada ao sistema acima com um período de amostragem equivalente a 5 unidades de tempo e se separa em matrizes de cada intervalo de tempo associado à função discreta obtida, conforme mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2.8965 & 0 \\ 0 & -2.1066 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k-1) \\ y_2(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.0397 & 0 \\ 0 & 1.5936 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k-2) \\ y_2(k-2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.3528 & 0 \\ 0 & -0.4446 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k-3) \\ y_2(k-3) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0.2107 & 0 \\ 0 & 0.0134 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k-4) \\ y_2(k-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0142 & 0.0019 \\ 0.0070 & -0.0287 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-1) \\ u_2(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0137 & -0.0007 \\ 0.0007 & 0.0308 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-2) \\ u_2(k-2) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0.0065 & -0.0015 \\ -0.0040 & -0.0041 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-3) \\ u_2(k-3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0065 & 0.0005 \\ 0.0001 & -0.0050 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-4) \\ u_2(k-4) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A matriz de estado A para esse modelo fica:

$$A = \begin{bmatrix} 3.90 & 0 & -5.94 & 0 & 4.39 & 0 & -1.56 & 0 & 0.21 & 0 & 0.0137 & -0.0007 & 0.0065 & -0.0015 & -0.0065 & 0.0005 \\ 0 & 3.11 & 0 & -3.7 & 0 & 2.04 & 0 & -0.46 & 0 & 0.0134 & 0.0007 & 0.031 & -0.004 & -0.0041 & 0.0001 & -0.005 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de entrada B para esse modelo fica:

$$B = \begin{bmatrix} -0.0142 & 0.0019 \\ 0.007 & -0.0287 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nas figuras 6.14 a 6.16 mostramos as respostas simuladas com o controlador robusto para um degrau no *set-point* de $y^{sp} = [1 \quad -1]^T$, mantendo o Modelo A como modelo de predição para a função objetiva do controlador mas a planta sendo representada pelo Modelo B, sem saturação nas entradas. Como podemos observar o controlador não teve dificuldade em levar as variáveis para os valores de referência, mesmo com a incerteza no modelo. Comparando-se com a performance do controlador nominal, verificamos que o desempenho foi pouco deteriorado para garantir a estabilidade à incerteza de modelo. A função de Lyapunov para esse caso é uma função assintoticamente decrescente, como esperado.

Figura 6.14. Saídas controladas do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto sem saturação das entradas

Figura 6.15. Entradas manipuladas do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto sem saturação das entradas

Figura 6.16. Função de Lyapunov do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto sem saturação das entradas

Analogamente, as Figuras 6.17 a 6.23 apresentam as respostas para o caso em que podemos ter saturação em uma das entradas.

Inicialmente forçamos a saturação da variável manipulada u_2 fazendo u_{2max} igual a 6. As Figuras 6.17 a 6.20 mostram os resultados obtidos para uma condição onde foi dada prioridade para o intemperismo no caso de saturação de uma das entradas manipuladas. Nesse caso, para um degrau no *set-point* de $[1 \ -1]$ podemos observar que existe *offset* na variável y_2 .

Figura 6.17. Saídas controladas do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_2

Figura 6.18. Entradas manipuladas do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_2

A função de Lyapunov mostrada na Figura 6.19 decresce até o instante da saturação, não atingindo o valor nulo devido ao *offset* existente em uma das variáveis. Essa função considera as duas variáveis de controle. Podemos definir uma função V_{k1} que considera apenas a variável y_1 de controle. Essa função é mostrada na Figura 6.20 e é decrescente até o valor nulo.

Figura 6.19. Função de Lyapunov do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_2

Figura 6.20. Função de Lyapunov V_{k1} do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_2

Em seguida, repetimos a simulação para limitação na entrada u_1 , imposta no valor de $u_{max}=[1; 15]$, ao invés do valor inicial $u_{max}=[15; 15]$.

Na primeira simulação não foi dada prioridade a nenhuma das variáveis de controle do sistema. Portanto, conforme podemos observar nas Figuras 6.21 e 6.22, temos *offset* em ambas variáveis. Na Figura 6.23 observamos que a função de Lyapunov volta a aumentar de valor no momento da saturação da entrada u_1 , pois as duas variáveis controladas passam pelo *set-point*, estabilizando acima do desejado.

Figura 6.21. Saídas controladas do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_1

Figura 6.22. Entradas manipuladas do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_1

Figura 6.23. Função de Lyapunov do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_I

Na segunda simulação foi dada novamente prioridade variável de controle y_I do sistema. Conforme podemos observar nas Figuras 6.24 e 6.25, o sistema perdeu a controlabilidade. As duas entradas foram levadas à condição de saturação máxima o que proporcionou *offset* nas variáveis controladas e evitou que as mesmas aumentassem indefinidamente ou até o valor de suas restrições. Isso acontece porque a condição de manter a variável y_I sob controle na perda da variável manipulada u_I não foi considerada na etapa *off-line* do controlador. Nessa etapa do projeto consideramos que se perdêssemos a variável u_I , a variável y_I também seria abandonada pelo controlador.

Figura 6.24. Saídas controladas do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_1 priorizando y_1

Figura 6.25. Entradas manipuladas do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_1 priorizando y_1

Nas Figuras 6.26 e 6.27 mostramos a resposta do sistema para uma situação em que a prioridade do controlador passa para variável y_2 com a saturação de u_1 . Podemos observar, nessa situação, que temos *offset* apenas na primeira variável de controle y_1 . O controlador proposto consegue levar a variável y_2 para o valor de *set-point*. Na Figura 6.28 observamos que a função de Lyapunov V_k , que considera as duas variáveis do sistema não atinge o valor nulo e volta a aumentar de valor no momento da saturação da entrada u_1 quando a variável controlada y_1 ultrapassa o valor do *set-point*. Conforme a Figura 6.29, a função V_{k2} , definida apenas em função da variável y_2 , atinge o valor nulo.

Figura 6.26. Saídas controladas do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_1 priorizando y_2

Figura 6.27. Entradas manipuladas do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_1 priorizando y_2

Figura 6.28. Função de Lyapunov do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_1 priorizando y_2

Figura 6.29. Função de Lyapunov V_{k2} do sistema da Desbutanizadora para o caso robusto com saturação da entrada u_1 priorizando y_2

6.3 APLICAÇÃO DO CONTROLADOR NOMINAL EM PROCESSO NÃO INTEGRADOR COM INCERTEZA DE MODELO

Para ilustrar a fragilidade do controlador nominal na incerteza de modelo, o modelo proposto como segunda condição operacional foi utilizado no controlador nominal do Item 6.1 que não considera a possibilidade da planta ser representada por um modelo diferente. A Figura 6.30 mostra a resposta do sistema para essa condição de incerteza onde o controlador nominal não foi capaz de manter a estabilidade do processo com a sintonia definida na condição nominal (Tabela 6.1). Para essa simulação, as restrições de entrada e de saída foram desativadas.

Figura 6.30. Saídas controladas da Desbutanizadora para o caso do controlador nominal com incerteza de modelo

6.4 APLICAÇÃO DO CONTROLADOR ROBUSTO EM PROCESSO INTEGRADOR COM INCERTEZA DE MODELO

O controlador proposto também foi testado no processo estudado por Carrapiço (2004) que é uma coluna de destilação de uma refinaria de petróleo onde o *isobutano* é separado do *n-butano*. As saídas (variáveis controladas) escolhidas são o nível no vaso de topo (y_1) e o conteúdo de *isobutano* no destilado (y_2). As variáveis manipuladas da coluna são a carga térmica do refeedor (u_1) e a vazão de destilado para a coluna (refluxo - u_2). Através de perturbações nas variáveis de entrada do processo, foram obtidos os dois modelos abaixo para diferentes condições operacionais:

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{2.3}{s} & \frac{-0.7}{s} \\ \frac{-7.04e^{-7s}}{20.2s+1} & \frac{-1.8}{4.14s+1} \end{bmatrix}, \quad G_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{3}{s} & \frac{-0.5}{s} \\ \frac{-5e^{-5s}}{15s+1} & \frac{-2.5}{10s+1} \end{bmatrix}$$

[illegible]

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.88 & 0 & -2.78 & 0 & 0.89 & 0 & 0.114 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3225 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 3 & -0.5 \\ 0 & -0.122 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O problema considerado foi o problema servo onde um degrau de + 1% foi aplicado ao conteúdo de *isobutano* no destilado e o valor desejado no nível do vaso de topo não foi alterado. Foram consideradas as seguintes restrições: $u_{\max} = [0.2 \ 2]$, $u_{\min} = [-0.2 \ -2]$ e a seguinte sintonia indicada na Tabela 6.2:

Tabela 6.2. Sintonia do MPC para aplicação integradora

Horizonte de predição (np)	50
Horizonte de controle (m)	3
Peso das variáveis de controle (W)	$[1 \ 1]$
Fator de supressão (R)	$[0.1 \ 0.1]$

O modelo nominal é considerado como o Modelo 1 enquanto que a planta pode ser representada tanto pelo Modelo 1 como Modelo 2.

Como o modelo em termos da variável y_I é expresso por uma função de transferência integradora, essa variável não pode nunca ser abandonada pelo controlador. Dessa

forma, a restrição da condição de estabilidade onde a saída y_1 não é considerada é eliminada do problema de otimização do controlador na fase *off-line*.

Nas Figura 6.31 e 6.32 mostramos as respostas do sistema para o caso nominal e um degrau no *set-point* de $y^{sp} = [0 \ 1]^T$, sem restrições nas entradas. Como podemos observar, o nível sofreu uma perturbação mas retornou ao seu valor estacionário. A concentração de isobutano teve seu valor alterado, conforme desejado. A Figura 6.33 mostra a função de Lyapunov para esse caso onde verificamos que a mesma é decrescente ao longo do tempo, conforme esperado para um sistema estável.

Figura 6.31. Saídas controladas do sistema integrador para o caso nominal sem saturação das entradas

Figura 6.32. Entradas manipuladas do sistema integrador para o caso nominal sem saturação das entradas

Figura 6.33. Função de Lyapunov sistema integrador para o caso nominal sem saturação das entradas

Nas Figuras 6.34 e 6.35 mostramos as respostas do mesmo sistema para o caso nominal e um degrau no *set-point* de $y^{sp} = [1 \ 1]^T$. Podemos observar a presença de um pequeno *overshoot* na variável controlada y_1 devido a uma sintonia um pouco mais agressiva imposta ao controlador nessa simulação. As variáveis manipuladas u_1 e u_2 mantêm-se, durante o transiente, dentro dos valores limites especificados. Variações mais suaves sobre essas manipuladas poderiam ser obtidas aumentando o fator de supressão R do controlador. A Figura 6.36 mostra a função de Lyapunov que se mantém decrescente ao longo do tempo.

Figura 6.34. Saídas controladas do sistema integrador para o caso nominal sem saturação das entradas

Figura 6.35. Entradas manipuladas do sistema integrador para o caso nominal sem saturação das entradas

Figura 6.36. Função de Lyapunov do sistema integrador para o caso nominal sem saturação das entradas

Em seguida, o controlador foi testado quanto à incerteza no modelo, através da mudança da função de transferência associada à planta utilizada na simulação em relação ao modelo considerado na função objetivo do controlador. Ainda mantivemos a condição de não saturação nas entradas.

As Figuras 6.37 e 6.38 mostram a performance do controlador para um desvio no *set-point* de $y^{sp} = [1 \ 1]^T$. Verificamos que as variáveis controladas vão para seu valor de referência sem problemas. Para esse caso, a sintonia do controlador não parece tão agressiva quanto no caso nominal. Na Figura 6.39 mostramos a função de Lyapunov que se anula ao longo do tempo.

Figura 6.37. Saídas controladas do sistema integrador para o caso robusto sem saturação das entradas

Figura 6.38. Entradas manipuladas do sistema integrador para o caso robusto sem saturação das entradas

Figura 6.39. Função de Lyapunov do sistema integrador para o caso robusto sem saturação das entradas

Na situação seguinte, foi forçada a saturação da entrada u_2 alterando seu valor mínimo de -2 para -0.1 . Dessa forma, no caso da planta ser representada pelo Modelo 2 e a entrada u_2 saturar, as Figuras 6.40, 6.41 e 6.42 mostram a performance obtida pelo controlador para uma situação onde não foi priorizada nenhuma variável de controle e, portanto, como podemos observar, teremos *offset* nas duas variáveis de controle. A função de Lyapunov não atinge o valor nulo.

Figura 6.40. Saídas controladas do sistema integrador para o caso robusto com saturação da entrada u_2

Figura 6.41. Entradas manipuladas do sistema integrador para o caso robusto com saturação da entrada u_2

Figura 6.42. Função de Lyapunov do sistema integrador para o caso robusto com saturação da entrada u_2

Em seguida repetimos a simulação para o caso em que o controlador prioriza o nível no vaso de topo da coluna de destilação (y_1). As Figuras 6.43 e 6.44 mostram a resposta do sistema onde podemos constatar que a variável de prioridade atinge, sem problemas, o seu *set-point*, ficando a variável y_2 com *offset*. A função de Lyapunov mostrada na Figura 6.45 mostra o *offset* da segunda variável. A função de Lyapunov V_{k1} , mostrada na Figura 6.46, considera apenas a primeira variável de controle onde podemos verificar que seu valor tende a zero.

Figura 6.43. Saídas controladas do sistema integrador para o caso robusto com saturação da entrada u_2 com prioridade em y_1

Figura 6.44. Saídas controladas do sistema integrador para o caso robusto com saturação da entrada u_2 com prioridade em y_I

Figura 6.45. Função de Lyapunov V_k do sistema integrador para o caso robusto com saturação da entrada u_2 com prioridade em y_I

Figura 6.46. Função de Lyapunov V_{k1} do sistema integrador para o caso robusto com saturação da entrada u_2 com prioridade em y_1

6.5 APLICAÇÃO DO CONTROLADOR NOMINAL EM SISTEMA DE TRÊS VARIÁVEIS CONTROLADAS E TRÊS VARIÁVEIS MANIPULADAS

O próximo ensaio feito com o novo controlador foi um sistema de três variáveis controladas e três variáveis manipuladas. Esse modelo (Camacho E,F, e Bordons C. Model Predictive Control – second edition – Editora Springer – 2004) corresponde a uma fracionadora de óleo pesado de uma refinaria de petróleo. O processo tem três variáveis de controle: a composição do topo (y_1), a composição da retirada intermediária (y_2) e a temperatura de fundo (y_3). As três variáveis manipuladas são a vazão de retirada do topo (u_1), a vazão de retirada intermediária (u_2) e a carga térmica do fundo da coluna (u_3).

Segue o modelo em transformada de Laplace correlacionando as entradas com as saídas:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4.05}{50s+1}e^{-27s} & \frac{1.77}{60s+1}e^{-28s} & \frac{5.88}{50s+1}e^{-27s} \\ \frac{5.39}{50s+1}e^{-18s} & \frac{5.72}{60s+1}e^{-14s} & \frac{6.9}{40s+1}e^{-15s} \\ \frac{4.38}{33s+1}e^{-20s} & \frac{4.42}{44s+1}e^{-22s} & \frac{7.2}{19s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Esse modelo, para um período de amostragem igual a 5 unidades de tempo, pode ser representado no domínio de equações discretas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.8249 & 0 & 0 \\ 0 & -2.7074 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5206 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k-1) \\ y_2(k-1) \\ y_3(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8325 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4429 & 0 \\ 0 & 0 & 2.1137 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k-2) \\ y_2(k-2) \\ y_3(k-2) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7347 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5896 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k-3) \\ y_2(k-3) \\ y_3(k-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6659 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-1) \\ u_2(k-1) \\ u_3(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.1987 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-2) \\ u_2(k-2) \\ u_3(k-2) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0945 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2779 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-3) \\ u_2(k-3) \\ u_3(k-3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.2113 & 0.1938 & 0.8108 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-4) \\ u_2(k-4) \\ u_3(k-4) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.0794 & -0.5730 & -1.4796 \\ 0.6158 & 0.2913 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-5) \\ u_2(k-5) \\ u_3(k-5) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2359 & 0.0580 & 0.3424 \\ -0.3720 & 0.2897 & 0.6750 \\ -1.0230 & -0.2908 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-6) \\ u_2(k-6) \\ u_3(k-6) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} -0.0674 & 0.0310 & -0.0979 \\ 0.2449 & 0 & 0 \\ 0.4225 & -0.1063 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-7) \\ u_2(k-7) \\ u_3(k-7) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.1376 & -0.0755 & -0.1998 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1212 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-8) \\ u_2(k-8) \\ u_3(k-8) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para o trabalho em questão, vamos supor que toda vez que a variável manipulada u_1 , por exemplo, sature, a variável y_1 correspondente também será abandonada para efeitos de controle. Com essa hipótese, diminuimos o número de LMIs necessárias na etapa *off-line* do controlador. Se houvesse alguma variável mais importante, poderíamos prever na estratégia *off-line* do controlador a possibilidade de manter essa variável y_i sob controle no caso de saturação da sua entrada u_i correspondente. Assim, se a variável y_1 fosse uma variável prioritária, devemos programar uma LMI nos Problemas P2a* e P2b* que garanta a estabilidade do controlador com a variável manipulada u_1 saturada sem abandonar essa controlada. Nesse caso, possivelmente outra controlada (y_2 ou y_3) teria que ser desconsiderada do controle.

As restrições de entrada consideradas foram $[-0.4; 0.2]$. A sintonia utilizada é mostrada na Tabela 6.3.

Tabela 6.3. Sintonia do MPC para comparação entre controladores

Horizonte de predição (np)	50
Horizonte de controle (m)	3
Peso das variáveis de controle (W)	$[1 \ 1 \ 1]$
Fator de supressão (R)	$[0.5 \ 0.5 \ 0.5]$

Simulando um degrau unitário no *set-point* das três variáveis, ou seja $y_{sp} = [1 \ 1 \ 1]$, para o caso nominal sem restrições nas entradas, obtemos as respostas do sistema mostradas nas Figuras 6.47 e 6.48. Como podemos observar, a resposta do controle foi adequada, levando todas as variáveis ao seu novo valor de referência, sem atingir a saturação de nenhuma das entradas.

Figura 6.47. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso nominal sem restrições nas entradas

Figura 6.48. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso nominal sem restrições nas entradas

Em seguida, repetimos a simulação, ainda para o caso nominal, impondo uma restrição apenas na variável manipulada u_1 no valor máximo de zero. As Figuras 6.49 e 6.50 mostram os resultados obtidos para essa perturbação. Podemos observar que a variável controlada y_1 apresenta *offset* enquanto que as variáveis y_2 e y_3 são levadas para seu valor de referência.

Figura 6.49. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso nominal com restrição na entrada u_1

Figura 6.50. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso nominal com restrição na entrada u_1

No caso seguinte, impomos uma restrição de valor máximo apenas na variável u_3 no valor de 0,1. As Figuras 6.51 e 6.52 mostram a resposta do sistema para essa condição. Podemos observar que as três variáveis atingiram o seu valor de *set-point*.

Na próxima simulação, ainda para o caso nominal, forçamos a saturação das variáveis u_2 e u_3 , simultaneamente, nos valores de $u_{3\max} = 0$ e $u_{2\min} = 0$. Podemos observar, nas Figuras 6.53 e 6.54, que a saturação de u_2 teve como consequência uma saturação parcial da variável manipulada u_3 que, a partir de um determinado instante, saiu da saturação máxima imposta inicialmente. Dessa forma, as variáveis controladas y_1 e y_3 seguiram o valor de *set-point* e um *offset* é observado na variável y_2 .

Figura 6.51. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso nominal com restrição na entrada u_3

Figura 6.52. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso nominal com restrição na entrada u_3

Figura 6.53. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso nominal com restrição nas entradas u_2 e u_3

Figura 6.54. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso nominal com restrição nas entradas u_2 e u_3

6.6 APLICAÇÃO DO CONTROLADOR ROBUSTO EM SISTEMA DE TRÊS VARIÁVEIS CONTROLADAS E TRÊS VARIÁVEIS MANIPULADAS

Nesse item vamos estudar a performance do controlador para o caso de incerteza no modelo, sem e com restrição nas entradas. O modelo 3x3 proposto no item anterior apresenta uma incerteza no ganho estático (Maciejowski, J.M., Predictive Control with Constraints – Prentice Hall – 2002) mostrada abaixo:

$$\begin{bmatrix} \pm 2.11 & \pm 0.39 & \pm 0.59 \\ \pm 3.29 & \pm 0.57 & \pm 0.89 \\ \pm 3.11 & \pm 0.73 & \pm 1.33 \end{bmatrix}$$

Essa incerteza, incorporada ao modelo, é representada nas equações de Laplace mostradas a seguir:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6.16}{50s+1}e^{-27s} & \frac{1.731}{60s+1}e^{-28s} & \frac{6.47}{50s+1}e^{-27s} \\ \frac{2.1}{50s+1}e^{-18s} & \frac{6.29}{60s+1}e^{-14s} & \frac{7.79}{40s+1}e^{-15s} \\ \frac{1.27}{33s+1}e^{-20s} & \frac{3.69}{44s+1}e^{-22s} & \frac{8.53}{19s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Esse modelo pode ser representado em equações de diferenças para um período de amostragem de 5 unidades de tempo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.8249 & 0 & 0 \\ 0 & -2.7074 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5206 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k-1) \\ y_2(k-1) \\ y_3(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8325 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4429 & 0 \\ 0 & 0 & 2.1137 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k-2) \\ y_2(k-2) \\ y_3(k-2) \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7347 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5896 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k-3) \\ y_2(k-3) \\ y_3(k-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.9737 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-1) \\ u_2(k-1) \\ u_3(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.4578 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-2) \\ u_2(k-2) \\ u_3(k-2) \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1040 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5140 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-3) \\ u_2(k-3) \\ u_3(k-3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.0823 & 0.2131 & 0.9153 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-4) \\ u_2(k-4) \\ u_3(k-4) \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.0309 & -0.6301 & -1.6704 \\ 1.0531 & 0.2432 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-5) \\ u_2(k-5) \\ u_3(k-5) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3587 & 0.0567 & 0.3768 \\ -0.1449 & 0.3186 & 0.7620 \\ -1.7493 & -0.2428 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-6) \\ u_2(k-6) \\ u_3(k-6) \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} -0.1026 & 0.0303 & -0.1077 \\ 0.0954 & 0 & 0 \\ 0.7225 & -0.0887 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-7) \\ u_2(k-7) \\ u_3(k-7) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2093 & -0.0739 & -0.2198 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1012 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-8) \\ u_2(k-8) \\ u_3(k-8) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Com a mesma sintonia proposta na Tabela 6.3, aplicamos um degrau unitário no *set-point* das três variáveis de controle para o caso robusto na condição nominal, ou seja, onde a planta é idêntica ao modelo ajustado no controlador preditivo, sem restrições nas entradas. Como podemos observar nas Figuras 6.55 e 6.56, a resposta obtida do sistema apresenta um desempenho similar ao do controlador nominal, talvez um pouco mais lento.

Figura 6.55. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso robusto nominal sem restrição nas entradas

Figura 6.56. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso robusto nominal sem restrição nas entradas

Nas Figuras 6.57 e 6.58 mostramos as respostas do processo a uma perturbação de um degrau unitário no *set-point* das três variáveis para a condição de incerteza de modelo, onde a planta passa a ser representada pelo Modelo 2, sem saturação das entradas. O controlador leva o sistema à condição desejada de forma estável, sem atingir a saturação das entradas.

No caso seguinte, mostrado nas Figuras 6.59 e 6.60, impomos uma restrição na entrada u_1 no valor máximo de zero. Podemos observar que as variáveis controladas y_2 e y_3 chegam ao valor de referência sem problemas. A variável y_1 , como era previsto, apresenta *off-set*.

Figura 6.57. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso robusto com incerteza sem restrição nas entradas

Figura 6.58. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso robusto com incerteza sem restrição nas entradas

Figura 6.59. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso robusto com incerteza e com restrição na entrada u_1

Figura 6.60. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso robusto com incerteza e com restrição na entrada u_1

No próximo caso, vamos impor restrições nas entradas u_1 e u_3 no valor máximo zero. Nessa situação apenas foi prevista, na parte *off-line* do projeto do controlador, a condição de controlabilidade com estabilidade para a variável controlada y_2 . Conforme mostrado nas Figuras 6.61 e 6.62, apenas a variável controlada y_2 atinge o valor de *set-point* desejado.

Figura 6.61. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso robusto com incerteza e com restrição nas entradas u_1 e u_3

Figura 6.62. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso robusto com incerteza e com restrição nas entradas u_1 e u_3

6.7 APLICAÇÃO DO CONTROLADOR ROBUSTO EM SISTEMA DE TRÊS VARIÁVEIS CONTROLADAS E TRÊS VARIÁVEIS MANIPULADAS CONSIDERANDO A OCORRÊNCIA DE UMA PERTURBAÇÃO NO SISTEMA

Nessa seção vamos considerar a existência de uma perturbação no sistema da Coluna Fracionadora vista anteriormente. O objetivo dessa simulação é de verificar a robustez do controlador proposto para o problema regulatório, pois, nas seções anteriores, apenas o problema servo foi abordado.

A carga térmica do refluxo intermediário nessa coluna representa uma perturbação (Maciejowski, J.M., Predictive Control with Constraints – Prentice Hall – 2002) que pode ser representada pelo seguinte modelo em Laplace:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1.20}{45s+1} e^{-27s} \\ \frac{1.52}{25s+1} e^{-15s} \\ \frac{1.14}{27s+1} \end{bmatrix} d, \text{ onde } d \text{ é a perturbação do sistema.}$$

Esse modelo pode ser representado em equações de diferenças para um período de amostragem equivalente a 5 unidades de tempo:

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.8948 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8187 & 0 \\ 0 & 0 & -0.831 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k-1) \\ y_2(k-1) \\ y_3(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1927 \end{bmatrix} d(k-1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d(k-2) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d(k-3) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2744 \\ 0 \end{bmatrix} d(k-4) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d(k-5) + \begin{bmatrix} 0.07739 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d(k-6) + \begin{bmatrix} 0.0488 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d(k-7)$$

Essa perturbação foi inserida na simulação da planta e, portanto, para o controlador é um distúrbio não modelado.

Para o caso nominal e com os valores de set-point mantidos no valor estacionário (valor de referência zero), foi aplicada uma perturbação, equivalente a um degrau unitário, no instante k equivalente a vinte unidades de tempo. As Figuras 6.63 e 6.64 mostram o resultado obtido. Podemos observar que o controle rejeitou efetivamente a perturbação e as entradas assumiram um novo valor estacionário.

Figura 6.63. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso nominal sem restrição nas entradas com perturbação em degrau do refluxo intermediário

Figura 6.64. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso nominal sem restrição nas entradas com perturbação em degrau do refluxo intermediário

No caso seguinte, simulamos a mesma perturbação considerando, no entanto, que o modelo da planta seja diferente do modelo do controlador. As Figuras 6.65 e 6.66 mostram que o controlador manteve o processo no ponto operacional desejado, rejeitando satisfatoriamente a perturbação.

Nas Figuras 6.67 e 6.68 mostramos o caso robusto com uma perturbação em forma de pulso. A primeira perturbação acontece a vinte unidades de tempo e sua normalização acontece a cem unidades de tempo. Podemos concluir que o controlador assimila bem a instabilidade momentânea.

Figura 6.65. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso robusto sem restrição nas entradas com perturbação em degrau do refluxo intermediário

Figura 6.66. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso robusto sem restrição nas entradas com perturbação em degrau do refluxo intermediário

Figura 6.67. Saídas controladas do sistema 3x3 para o caso robusto sem restrição nas entradas com perturbação em pulso do refluxo intermediário

Figura 6.68. Entradas manipuladas do sistema 3x3 para o caso robusto sem restrição nas entradas com perturbação em pulso do refluxo intermediário

6.8 COMPARAÇÃO ENTRE AS VERSÕES DO CONTROLADOR EM MODELO NÃO INTEGRADOR

Nessa seção é feita uma comparação entre a versão antiga do controlador (Rodrigues & Odloak (2005)) e a versão proposta nesse trabalho.

Na versão anterior, a solução inicial para o Problema P3 do Capítulo 2 é dada a partir do ganho do DMC convencional. Na versão atual, como já comentado, essa solução inicial não é necessária.

A mesma sintonia foi usada em ambos controladores e representada na Tabela 6.4.

Tabela 6.4. Sintonia do MPC para comparação entre controladores

Horizonte de predição (np)	50
Horizonte de controle (m)	2
Peso das variáveis de controle (W)	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$
Fator de supressão (R)	$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$

O sistema escolhido foi uma coluna Desbutanizadora, similar a estudada no Item 6.1, porém, de ganhos estacionários diferentes. O caso estudado foi o robusto, onde a planta é representada por um modelo diferente do modelo considerado pela função objetivo do controlador.

Nas Figuras 6.69 e 6.70 são mostradas as respostas do sistema com os dois controladores para uma perturbação no *set-point* das duas variáveis de controle y_1 e y_2 equivalente a $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$, sem restrições nas entradas.

Podemos observar que em termos de performance o novo controlador proposto apresentou uma performance superior ao controlador da versão Rodrigues & Odloak (2005).

Figura 6.69. Comparação das Variáveis Controladas com as duas versões de Controlador

Figura 6.70. Comparação das Variáveis Manipuladas com as duas versões de Controlador

Ainda para esse mesmo sistema foi simulado o caso em que é imposta uma saturação na entrada u_2 adotando-se $u_{max}=[15;0,5]$. Nessa situação, a versão anterior não convergiu na simulação, possivelmente porque a solução do DMC convencional não era viável, enquanto que a versão abordada nesse trabalho apresenta uma resposta estável com *offset* nas variáveis controladas y_1 e y_2 . Esse caso destaca a faixa de convergência maior da versão proposta nesse trabalho levando a uma maior robustez na obtenção de soluções viáveis. As Figuras 6.71 e 6.72 abaixo mostram esse desempenho para o controlador proposto.

Figura 6.71. Saídas controladas do sistema na versão do controlador proposto com saturação na entrada u_2

Figura 6.72. Entradas manipuladas do sistema na versão do controlador proposto com saturação na entrada u_2

Finalmente, consideramos o caso da simulação de saturação da entrada u_1 no valor de zero. Para esse caso, os dois controladores apresentaram praticamente o mesmo desempenho, conforme pode ser visto nas Figuras 6.73 e 6.74.

Figura 6.73. Saídas controladas nas duas versões de controlador com saturação na entrada u_1

Figura 6.74. Entradas manipuladas nas duas versões de controlador com saturação na entrada u_1

6.9 DISCUSSÃO DA COMPARAÇÃO ENTRE AS VERSÕES DO CONTROLADOR EM MODELO NÃO INTEGRADOR

A máquina utilizada para executar as duas versões de controladores foi um *PENTIUM4*, processador com *clock* de 1500Mhz e 1 *Gbyte* de memória RAM. Constatamos que o esforço computacional foi bem menor na versão do controlador proposta nesse trabalho, conforme a Tabela 6.5.

Tabela 6.5.Comparação do tempo de execução do problema *off-line*

	Controlador Versão Original	Controlador Versão Atual
Tempo de Execução:	7min30seg	2min10seg

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

7.1 CONCLUSÕES

O presente trabalho teve seu enfoque principal no desenvolvimento de um algoritmo de controle preditivo robusto baseado no modelo de realinhamento adaptado do modelo original proposto por Maciejowski (2002), contemplando incerteza no modelo e possibilidade de saturação das entradas. Com um estado baseado na própria leitura da planta (saídas controladas e entradas manipuladas) obtém-se uma redução no esforço computacional requerido na solução do problema, reduzindo as dimensões das variáveis envolvidas. Outra grande vantagem trazida por esse novo conceito de estado é que os coeficientes das matrizes envolvidas pertencem ao conjunto dos números reais, diferente da proposta da versão anterior apresentada por Rodrigues & Odloak (2005) onde poderíamos ter números complexos. Isso se atribui ao fato que o estado passa a ter um significado real. Finalmente, podemos destacar a eliminação da necessidade de uma solução inicial viável na versão proposta.

A aplicação do controlador de estados mensuráveis foi ilustrada para três processos industriais. O primeiro foi de uma torre Desbutanizadora de uma unidade industrial onde não se percebe a existência de grandes tempos mortos envolvidos e não existem variáveis integradoras. No segundo exemplo, uma coluna Desisobutanizadora típica de uma refinaria de petróleo, o tempo morto é significativo e existem variáveis integradoras. Demonstrou-se, através desses exemplos que o controlador é eficiente e estável. O terceiro exemplo foi de uma Fracionadora de óleo pesado. A novidade trazida nesse exemplo foi a presença de um sistema de três variáveis manipuladas e três variáveis controladas com tempo morto significativo.

Esses sistemas foram simulados para o caso nominal e também para o caso de incerteza no modelo da planta. Também foram estudadas situações de saturação de uma ou mais entradas. A comutação de restrição ativa para restrição inativa foi abordada através de um exemplo, verificando a robustez do controlador proposto para essa situação. No caso da Fracionadora estudamos o efeito de uma perturbação ocorrida na carga térmica do refluxo circulante intermediário sobre as variáveis controladas.

Finalmente, foi comparada a performance do controlador proposto com a performance da versão original (controlador ROSSMPC), desenvolvido por Rodrigues & Odloak (2005) que inclui um observador de estado e foi constatada a redução da dimensão das variáveis envolvidas no problema e, conseqüentemente, a redução do esforço computacional.

No problema da torre Desbutanizadora, por exemplo, o mesmo modelo foi aplicado aos dois controladores. Observamos que, em termos de tempo computacional, o controlador proposto apresenta uma significativa contribuição ao trabalho anterior, com uma redução de aproximadamente três vezes e meia (3,5) do tempo requerido pela versão original.

Outro grande problema na versão original do controlador é a necessidade de uma solução inicial viável para o problema de otimização. Essa solução inicial nem sempre é trivial. Dessa forma, o controlador na versão anterior apresenta uma maior dificuldade de convergir. O controlador proposto nesse trabalho não necessita dessa solução inicial, resultando numa convergência mais fácil do problema de otimização. Foi mostrado no exemplo da coluna Desbutanizadora que, ao ocorrer saturação da entrada u_2 , a versão original não convergiu pela dificuldade encontrada na solução inicial viável.

Como foi também exemplificado, esse controlador, pela sua concepção, rejeita mais facilmente perturbações. Na coluna Fracionadora foi estudado o caso de uma perturbação na carga térmica do refluxo intermediário e, como pudemos observar, o controlador retornou a planta para a condição inicial com uma boa performance.

Embora nesse trabalho tenha-se abordado apenas casos com mesmo número de variáveis manipuladas e variáveis controladas, o controlador proposto pode ser aplicado também a sistemas não simétricos, com número de variáveis controladas diferente do número de variáveis manipuladas.

Com essas características, o controlador apresentado nesse trabalho torna-se bastante interessante para uma implementação industrial.

7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Visando a implementação prática, uma extensão natural deste trabalho seria o desenvolvimento de algoritmos automatizados para a montagem das matrizes de realinhamento a partir de modelos de funções de transferências que normalmente são obtidas a partir de testes experimentais. Dessa forma, poderíamos aplicar esse controlador em paralelo com os MPC tradicionais em uma planta de processo e avaliar com mais dados os ganhos obtidos com essa nova abordagem.

Outra possibilidade de trabalho refere-se à elaboração de um controlador de horizonte infinito a partir dessa representação adaptada em variáveis de estado de Maciejowski (2002). Também poderá ser estudada a aplicação desse controlador em casos não lineares.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Astrom, K.J.; Wittenmark, B. (1990). **Computer controlled systems. Theory and Design** Prentice-Hall
- Bemporad, A.; Borelli, F.; Morari M. (2002). Model Predictive Control based on linear programming-the explicit solution, **IEEE Transactions on Automatic Control** v.47 n.12 p.1974-1985
- Boyd, S.P.; Ghaoui, L.; El, Feron, E.; Balakrishnan, V. (1994). **Linear matrix inequalities in system and control theory**, SIAM, Philadelphia, PA.
- Camacho, E.F.; Bordons, C. (2004). **Model Predictive Control** – second edition – Editora Springer.
- Cano, R.A.R.; Odloak, D. (2003). Robust model predictive control of integrating processes. **Journal of Process Control**, v.13, p.101-114.
- Cano, R.A.R. (2001). Controle Robusto de Processos Químicos Integradores. **Dissertação de Mestrado. EPUSP**, São Paulo.
- Carrapiço, O.L. (2004). Controle Preditivo de Horizonte Infinito para Processos Integradores com Tempo Morto, **Dissertação de Mestrado, EPUSP**, São Paulo.
- Cutler, C.R.; Ramaker, B.L. (1979). Dynamic matrix control – a computer control algorithm. **AIChE 86th National Meeting**, Houston, TX.
- Cuzzola, F.A.; Geromel, J.C.; Morari, M. (2002). An improved approach for constrained robust model predictive control, **Automatica** v. 38, n.7 p.1183-1189
- Gahinet P.; Nemirovski, A.; Laub, A.J.; Chilali, M. (1995). **LMI control toolbox**, The Mathworks Inc. Natick, MA.
- Garcia, C.E.; Morshedi, A.M. (1986). Quadratic programming solution of dynamic matrix control (QDMC). **Chem. Eng Commun.**, v.46, p.73-87.
- Gouvêa, M.T.; Odloak, D. (1997). ROSSMPC: A new way of representing and analyzing the predictive controllers. **Trans IchemeE**, v.75, Part A, p.693-708.
- Hansson, A.; Boyd, S. (1998). Robust optimal control of linear discrete-time systems using primal-dual interior-point methods. **Proceedings of American Control Conference**, Philadelphia, Pennsylvania, p.183-187.

- Kothare, M.V.; Balakrishnan, V.; Morari, M. (1996). Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities, **Automatica**, v.32, n.10, p.1361-1379.
- Lee, J.H.; Morari, M.; Garcia, C.E. (1994). State space interpretation of model predictive control. **Automatica**, v.30, n.4, p.707-717.
- Lee, J.H.; Cooley, B.L. (2000). Min-Max Predictive control Techniques for a Linear State Space System with a Bounded Set of Input Matrices. **Automatica**, v.36, p.463-473.
- Lee, J.H.; Xiao, J. (2000). Use of two-stage optimization in model predictive control of stable and integrating systems. **Computers Chem. Eng.**, v.24, p.1591-1596.
- Li, S.; Lim, K. Y.; Fisher, D. G. (1989). A state space formulation for model predictive control. **AIChE Journal**, v.35, n.2, p.241-249.
- Luyben, W.L.; Tyreus, B.D.; Luyben, M.L. (1999). **Plant wide process control**. McGraw-Hill.
- Maciejowski, J.M. (2002). **Predictive Control with Constraints**, Prentice Hall.
- Odloak, D. (1996). A new state-space approach to model predictive control, Brazilian **Journal of Chem. Eng.**, v.13, n.3, p.152-167.
- Oliveira, M.C.; Farias, D.P.; Geromel, J.C. (1997). **LMISol** . Version 1, Convex Analysis Laboratory, University of Campinas, Campinas, SP, Brazil.
- Pannochia, G. (2003). Robust disturbance modeling for model predictive control with application to multivariable ill-conditioned processes. **Journal of Process Control**, v.13, n.8, p.693-701.
- Peres P.L.D.; Geromel, J.C. (1994). An alternate numerical solution to the linear quadratic problem, **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.39, n.1.
- Qin, S.J.; Badgwell, T.A. (2003). A survey of industrial model predictive control technology, **Control Engineering Practice**, v.11, n.7, p.733-764.
- Qin, S.J.; Badgwell, T.A. (2000). **An overview of nonlinear model predictive control applications**, Birkhauser.
- Rao, C.V.; Wright; Rawlings (1998). Application of interior-point methods to model predictive control. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v.99, n.3, p.723-757.
- Rawlings, J.B.; Muske K.R. (1993). The stability of constrained multivariable receding horizon control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.38, p.1512-1516.

- Rodrigues, M.A.; Odloak, D. (2005). Robust MPC for Systems with Output Feedback and Input Saturation, **Journal of Process Control**, v.15, p.837-846
- Rodrigues, M.A.; Odloak, D. (2003). An infinite horizon model predictive control for stable and integrating processes. **Computers Chem. Eng**, v.27, p. 1113-1128.
- Rodrigues, M.A.; Odloak, D. (2003). MPC for stable linear systems with model uncertainty, **Automatica** v.39, p.569-583.
- Rodrigues, M.A.; Odloak, D. (2002). Including Model Uncertainty in the Model Predictive Control with Output Feedback, **Brazilian Journal of Chemical Engineering**, v.19, n.4, p.475-482.
- Rodrigues, M.A. (2001). **Estabilidade Robusta de Controladores Preditivos. Tese de Doutorado. EPUSP**, São Paulo.
- Rodrigues, M. A.; Odloak, D. (2000). Output feedback MPC with guaranteed robust stability. **Journal of Process Control**, v.10, n.6, p. 557-572.
- Rodrigues, M.A; Carrapiço, O.L.; Odloak D.; Moraes, R. (2004). **Relatório do Projeto de Desenvolvimento de Controladores Avançados para Reator de Óxido de Etileno**. EPUSP.
- Scokaert, P.O.M.; Mayne, D.Q. (1998). Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems, **IEEE Transactions on Automatic Control** v.43, n.8, p.1136-1142.
- Sontag, E.D. (1998). **Mathematical control theory**. Springer-Verlag.
- VanAntwerp, J.G.; Braatz, R. D. (2000). A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. **Journal of Process Control**, v.10, p.363-385.
- Wan, Z.Y.; Kothare, M.V. (2003). An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities, **Automatica**, v.39, n.5, p.837-846.
- Wan, Z.Y.; Kothare, M.V. (2003). Efficient robust constrained model predictive control with a time varying terminal constraint set. **Systems & Control Letters**, v.48, n.5, p.375-383.
- Wan, Z.Y.; Kothare, M.V. (2002). Robust output feedback model predictive control using off-line linear matrix inequalities **Journal of Process Control** v.12, n.7, p.763-774.
- Wang, Y.J.; Rawlings, J.B. (2004). A new robust model predictive control method I: theory and computation, **Journal of Process Control**, v.14, p.231-247.

Wu, K.L.; Yu, C.C.; Luyben, W.L.; Skogestad, S. (2003). Reactor/Separator Processes with recycles-2. **Design for composition control Computers Chem. Eng**, v.27, n.3, p.401 - 421.

APÊNDICE A

A COMPLEMENTO DE SCHUR

O complemento de Schur afirma que:

Seja $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ e $Z(x)$ funções matriciais e linearmente dependentes em x , então a LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & Z(x) \\ Z(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.1})$$

é equivalente a

$$Q(x) > 0: R(x) - Z(x)^T Q(x)^{-1} Z(x) > 0 \quad (\text{A.2})$$

Ou

$$R(x) > 0: Q(x) - Z(x)R(x)^{-1} Z(x)^T > 0 \quad (\text{A.3})$$

Demonstração:

Considere a matriz

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ Z^T Q^{-1} & I \end{bmatrix} > 0$$

Então é direto mostrar que a seguinte igualdade é verificada

$$\begin{bmatrix} Q & Z \\ Z^T & R \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R - Z^T Q^{-1} Z \end{bmatrix} T^T$$

Assim, é claro verificar que (A.1) e (A.2) são equivalentes.

Da mesma forma, usando a matriz

$$\begin{bmatrix} I & ZR^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} > 0$$

e realizando o seguinte produto matricial

$$T \begin{bmatrix} Q - ZR^{-1}Z^T & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} T^T$$

pode-se mostrar que (A.1) e (A.3) são equivalentes, o que completa a demonstração.