Érica Leandro Bezerra

**G_{S^2} : um Gráfico de Controle por atributos
no monitoramento da variabilidade de processos**

São Paulo

2017

Érica Leandro Bezerra

**G_{S^2} : um Gráfico de Controle por atributos
no monitoramento da variabilidade de processos**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
para obtenção do título de Mestre em Ciências

Universidade de São Paulo – USP

Escola Politécnica

Programa de Pós-Graduação em Engenharia da Produção

Orientador: Prof^a. Dr^a. Linda Lee Ho

São Paulo

2017

Catálogo-na-publicação

Bezerra, Érica Leandro

Gs2: um Gráfico de Controle por atributos no monitoramento da
variabilidade de processos / . L. Bezerra -- São Paulo, 2017.
96 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São
Paulo. Departamento de Engenharia de Produção.

1.Controle Estatístico do Processo 2.Gráfico de Controle S2 3.Gráfico
de Controle por Atributos 4.Algoritmos Genéticos I.Universidade de São
Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Produção II.t.

Érica Leandro Bezerra

**G_{S^2} : um Gráfico de Controle por atributos
no monitoramento da variabilidade de processos**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
para obtenção do título de Mestre em Ciências

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. Dr. _____	Instituição: _____
Julgamento: _____	Assinatura: _____
Prof. Dr. _____	Instituição: _____
Julgamento: _____	Assinatura: _____
Prof. Dr. _____	Instituição: _____
Julgamento: _____	Assinatura: _____

São Paulo
2017

Agradecimentos

A Deus, pela sua presença em todos os momentos de minha vida, sendo suporte e força ao longo desta caminhada.

Aos meus pais João Leandro Bezerra e Antonia Maria da Conceição Bezerra (*in memoriam*), exemplos de vida que despertaram em mim o amor pelo aprendizado.

Às minhas irmãs Lílían Leandro Bezerra e Camila Leandro Bezerra pelo apoio e compreensão nos momentos difíceis.

À Profa. Dra. Linda Lee Ho pela orientação e incentivo na elaboração do trabalho. Agradeço imensamente pela sua disposição e paciência em me orientar, contribuindo para o meu desenvolvimento acadêmico.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Produção, em especial à Lidia Nogueira da Silva.

Ao Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo pela oportunidade de realização do mestrado, em especial ao Vice-Almirante (RM1-EN) Carlos Passos Bezerril, Contra-Almirante (EN) André Luis Ferreira Marques, Contra-Almirante (RM1-EN) Luciano Pagano Junior pela autorização; Capitão de Mar e Guerra (RM1-EN) Ana Maria Vaz de Araújo, Eng. Percy Normanton Junior e Eng. Waldomiro Luiz Rios de Mello pelo apoio à realização deste trabalho.

Ao Capitão de Mar e Guerra (IM-REF) Servio Gama de Almeida (*in memoriam*), Capitão de Mar e Guerra (REF) Emmanuel Gama de Almeida, Capitão de Mar e Guerra (RM1) Ricardo Otavio Samça Pelegrini e Eng. Dirceu Paulo de Oliveira pelo acolhimento e incentivo ao meu desenvolvimento profissional nesta Instituição.

A todos os militares e civis do Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo que de alguma forma incentivaram para que o trabalho fosse concluído.

Aos amigos e familiares, em especial Fabiana Ghiringhello e Daniel Ghiringhello, que me incentivaram para que concluísse mais essa etapa em minha vida.

*“ Toda a sabedoria vem do Senhor Deus, ela sempre esteve com ele. Ela existe antes de
todos os séculos.”*

(Bíblia Sagrada, Eclesiástico, 1, 1)

Resumo

Quando há interesse em monitorar a variância de uma característica da qualidade de interesse através de gráfico de controle por variáveis, o gráfico S^2 é a alternativa mais usual. Entretanto, há situações onde mensurar a característica da qualidade é caro, consome mais tempo por unidade de inspeção, requer maior esforço dos operadores quanto à obtenção dos dados ou envolve ensaios destrutivos. Nestes casos, a classificação da variável contínua em categorias através de um dispositivo torna-se uma alternativa interessante. A avaliação pode ser mais rápida, a análise e o equipamento utilizado podem ser mais simples, de modo que o custo final da inspeção seja menor. O objetivo do trabalho é propor um gráfico de controle por atributos para monitoramento da variabilidade. Para tanto a estatística G_{S^2} é calculada e gráfico sinaliza se $G_{S^2} > LC$, LC limite de controle determinado de modo que minimize o ARL_1 , fixado um valor de ARL_0 . Como resultado a performance do gráfico G_{S^2} é comparada ao gráfico S^2 em termos de ARL_1 .

Palavras-chaves: Gráfico de Controle S^2 ; Gráfico de Controle por Atributos; Algoritmo Genético.

Abstract

In cases aiming at monitoring the variance of a products quality characteristics using a variable control chart, chart S^2 is the most used alternative. However, in some situations, this solution can be expensive, demand more time per individual inspected unit, demand greater efforts from operators to acquire data or involve destructive tests. In such cases, the use of a gauge measurement tool to classify the continuous variable into categories, becomes an interesting alternative. The assessment can be faster, the analysis and the tool used can be simple, resulting in less costly final inspections. This work proposes the use of an attribute control chart to monitor variability. Statistics G_{S^2} is calculated and control chart signalize if $G_{S^2} > CL$, whereas CL is the determined control limit, minimizing ARL_1 for a fixed value of ARL_0 . G_{S^2} control chart performance is compared to S^2 chart based on ARL_1 .

Key-words: S^2 Control Chart; Attribute Control Chart; Genetic Algorithm.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Modelo de dispositivo de classificação.	29
Figura 2 – Processo de classificação de Stevens.	30
Figura 3 – Modelo de dispositivo de classificação com dois limites.	37
Figura 4 – Cálculo da estatística G	38
Figura 5 – Procedimento de um Algoritmo Genético.	45
Figura 6 – Procedimento do Algoritmo Genético NSGA-II.	46
Figura 7 – Valores de ARL_1 para o gráfico G_{S^2}	48
Figura 8 – Razão do custo médio por unidade de inspeção para o gráfico G_{S^2} vs S^2	63
Figura 9 – Gráfico de Controle G_{S^2}	65

Lista de tabelas

Tabela 1 – Parâmetros do gráfico G_{S^2}	41
Tabela 2 – Procedimento para determinar o vetor de valores ótimos v	44
Tabela 3 – Limites dos parâmetros do gráfico G_{s^2}	47
Tabela 4 – Valores do gráfico G_{s^2} para $n = 5$ e $\delta^2 = 1.2^2$ (Grid)	48
Tabela 5 – Valores do gráfico G_{s^2} para $n = 5$ e $\delta^2 = 1.2^2$ (NSGA-II)	49
Tabela 6 – Parâmetros do gráfico de controle G_{S^2} – Caso 1	50
Tabela 7 – Parâmetros do gráfico de controle G_{S^2} – Caso 2	51
Tabela 8 – Parâmetros do gráfico de controle G_{S^2} – Caso 3	52
Tabela 9 – Parâmetros do gráfico de controle G_{S^2} – Caso 4	53
Tabela 10 – Valores de ARL_1 para os Casos 1 – 4	55
Tabela 11 – Valores de ARL simulados para os parâmetros ótimos do gráfico G_{S^2} – Caso 1	56
Tabela 12 – Desempenho dos gráficos de controle G_{S^2} e S^2 – Caso 1	57
Tabela 13 – Valores de ARL_0^* para o gráfico de controle G_{S^2}	58
Tabela 14 – Gráfico de controle G_{S^2} : valores de $w_j p_j$, limite discriminante L e limite de controle LC	60
Tabela 15 – Menor tamanho de amostra $n_{G_{S^2}}$ para o gráfico G_{S^2} com ARL_1 equi- valente ao gráfico S^2 com amostra de tamanho n_{S^2}	61
Tabela 16 – Qtde de itens classificados por grupo e valor da estatística g	64
Tabela 17 – Valores de ARL simulados para os parâmetros ótimos do gráfico G_{S^2} – Caso 2	90
Tabela 18 – Valores de ARL simulados para os parâmetros ótimos do gráfico G_{S^2} – Caso 3	91
Tabela 19 – Valores de ARL simulados para os parâmetros ótimos do gráfico G_{S^2} – Caso 4	92
Tabela 20 – Desempenho dos gráficos de controle G_{S^2} e S^2 – Caso 2	94
Tabela 21 – Desempenho dos gráficos de controle G_{S^2} e S^2 – Caso 3	95
Tabela 22 – Desempenho dos gráficos de controle G_{S^2} e S^2 – Caso 4	96

Sumário

1	Introdução	19
1.1	Objetivo	20
1.2	Revisão Bibliográfica	20
2	Gráficos de Controle mais comuns empregados no monitoramento da variabilidade	23
2.1	Gráficos de Controle para variáveis	25
2.1.1	Gráfico de Controle R	25
2.1.2	Gráficos de Controle S e S^2	26
2.2	Gráficos de controle por atributos para monitoramento da variabilidade	27
2.2.1	Gráfico de Controle por Classificação	29
2.2.2	Gráfico de Controle k -step gauge	30
2.2.3	Gráfico de Controle np_{S^2}	34
3	Gráfico de Controle G_{S^2} para monitoramento da variância	37
3.1	Distribuição da estatística G	39
3.2	Determinação do ARL_1	40
4	Resultados	43
4.1	Desempenho do gráfico	47
4.2	Exemplo numérico	63
5	Conclusão	67
	Referências	69
	Anexos	73
ANEXO A	Rotina R	75
ANEXO B	Valores simulados de ARL_0 e ARL_1 do gráfico de controle G_{S^2} para os Casos 2, 3 e 4	89
ANEXO C	Comparação do desempenho dos gráficos de controle G_{S^2} e S^2 para os Casos 2, 3 e 4	93

1 Introdução

A qualidade dos produtos e serviços é considerada um fator importante na tomada de decisão nas empresas.

Os produtos ou serviços, resultados da transformação das entradas por um processo produtivo - cuja saída é o produto final -, não possuem exatamente os mesmos valores das características da qualidade devido à variabilidade inerente ao processo.

Para oferecer produtos e serviços com qualidade as organizações investem em atividade de monitoramento e controle tendo como objetivo sua melhoria contínua. Ao investir na melhoria da qualidade é possível diminuir desperdícios, reduzir os custos, aumentar a produtividade, o lucro e a satisfação do cliente e ampliar a participação da empresa no mercado.

A melhoria da qualidade de produtos e serviços está relacionada à redução da variabilidade, pois uma grande variabilidade pode ser percebida como indesejável ou inaceitável pelo cliente. Produtos e serviços devem ser produzidos num processo estável de modo que a variabilidade em torno do valor-alvo das dimensões da qualidade seja pequena.

Como a variabilidade pode ser descrita em termos estatísticos, os métodos de controle estatístico do processo desempenham um papel central nos esforços para a melhoria da qualidade. ([Montgomery \(2009\)](#)).

O gráfico de controle é um dos métodos de controle estatístico do processo para identificar e analisar causas especiais no processo, de modo que possam ser eliminadas ou reduzidas.

Quando há interesse em monitorar a variância de uma característica da qualidade, através de gráficos de controle por variáveis, o gráfico S^2 é uma alternativa.

O gráfico S^2 , como todo gráfico por variáveis, requer maior esforço dos operadores quanto à obtenção dos dados - mensuração, calibração, precisão do instrumento,... - e demanda maior tempo de inspeção, mas é mais informativo quanto à indicação de um problema iminente.

Por outro lado, um gráfico por atributo pode ser mais vantajoso do ponto de vista econômico. A avaliação por classificação através do uso de dispositivos pode ser mais rápida, a análise e o equipamento utilizado podem ser mais simples, de modo que o custo final da inspeção seja menor.

O presente trabalho propõe um novo gráfico de controle por atributos para monitoramento de mudanças da variância de um processo.

Esta dissertação está estruturada da seguinte maneira: os gráficos de controle mais usuais empregados no monitoramento da variabilidade estão no Capítulo 2. A proposta de uma nova abordagem para monitorar a variação de um processo por atributos está no Capítulo 3. O Capítulo 4 apresenta os resultados do trabalho e finaliza com o Capítulo 5 com as conclusões.

1.1 Objetivo

O objetivo do trabalho é propor um gráfico de controle por atributos para monitoramento da variabilidade de um processo com distribuição Normal, quando a média mantém-se inalterada, utilizando um gráfico de controle por atributos, onde os dados de entrada são a quantidade de dados agrupados através da classificação por um dispositivo.

O gráfico de controle por variáveis certamente terá melhor desempenho que um gráfico por atributos caso seja utilizado um mesmo tamanho de amostra. Porém o custo por atributo geralmente é menor, o que possibilita aumentar o tamanho da amostra para o gráfico por atributos de modo a ter o mesmo desempenho que o gráfico por variáveis.

Pretende-se que o gráfico proposto tenha desempenho semelhante ao gráfico de controle Shewhart S^2 , de tal modo que o custo de inspeção/esforço amostral seja menor ou equivalente ao requerido pelo gráfico S^2 .

Por ser um gráfico por atributos, é interessante por exigir um menor esforço amostral, ser mais fácil de operacionalizar e mais barato do ponto de vista econômico. Também é uma alternativa interessante para ensaios destrutivos, onde as unidades amostradas precisam ser descartadas após mensuradas.

1.2 Revisão Bibliográfica

A qualidade dos produtos e serviços deixou de ser apenas um diferencial competitivo das organizações e tornou-se um requisito indispensável para garantir a sua participação no mercado.

Qualidade possui diversas definições. Para Deming (apud [Slack, Chambers e Johnston \(2002\)](#)) a qualidade é resultado da prevenção de defeitos através da melhoria dos processos e está associada à redução da variabilidade. [Juran e Gryna \(1991\)](#) define qualidade como adequação ao uso, considerando as necessidades do cliente. [Feigenbaum \(1994\)](#) introduziu o conceito de controle da qualidade total levando em conta a estrutura organizacional e os sistemas de melhoria da qualidade. [Crosby \(1994\)](#) desenvolveu o conceito de defeito zero e popularizou a ideia de “fazer certo da primeira vez”.

Para [Montgomery \(2009\)](#) a qualidade é inversamente proporcional à variabilidade.

A melhoria na qualidade é a redução na variabilidade nos processos e produtos.

Garvin (apud [Slack, Chambers e Johnston \(2002\)](#)) definiu a qualidade a partir de cinco abordagens: transcendental - excelência inerente ao produto; fabricação - produtos e serviços precisamente de acordo com as especificações; cliente - adequado às especificações de fabricação e do cliente; produto - características mensuráveis que atendem ao consumidor e; valor - percebida em relação ao custo do produto.

Garvin propôs oito dimensões da qualidade (apud [Montgomery \(2009\)](#)): 1. Desempenho: capacidade do produto em ser eficaz e eficiente; 2. Confiabilidade: probabilidade de falha do produto; 3. Durabilidade: vida útil de um produto; 4. Assistência técnica: eficiência em resolver problemas; Estética: aparência, sentimento ou sensação provocada pelo produto; 6. Características: o que o produto faz; 7. Qualidade Percebida: reputação da empresa ou de seu produto e; 8. Conformidade com as especificações do projeto.

Segundo [Montgomery \(2009\)](#), a qualidade é resultante da interação entre a qualidade do design - resultado de decisões de gestão e de engenharia, e a qualidade da conformidade - redução sistemática da variabilidade e eliminação dos defeitos. Assim, a qualidade como conformidade pode ser entendida como adequação às especificações do produto ou processo.

No ambiente industrial a melhoria continua dos processos resulta em redução de custos e produção de produtos com melhor qualidade, que atendam às exigências do consumidor.

O controle estatístico do processo (CEP) é uma metodologia aplicada à melhoria de processos de produção que utiliza técnicas estatísticas no acompanhamento e controle dos mesmos, que tem como objetivo minimizar a variabilidade e estabilizá-la ao redor do valor-alvo desejado da qualidade do produto.

Todo processo produtivo, ainda que seja bem planejado e executado, possui uma quantidade de variação aleatória inerente, resultante do efeito cumulativo de pequenas fontes de variação. A esta fonte de variabilidade denomina-se causa comum ou não assinalável. Por outro lado, denomina-se causa especial ou assinalável, toda fonte de variação não aleatória decorrente de eventos passageiros, que pode ser identificada e corrigida.

Um processo de produção diz que está sob controle estatístico quando opera na presença de causas comuns. Um processo que opera na presença de causas assinaláveis é dito fora de controle.

De modo geral, é desejável que o processo de produção opere sob controle durante um longo período de tempo. Entretanto uma causa assinalável pode ocorrer e mudar o estado do processo para fora de controle. O objetivo principal do CEP é detectar rapidamente mudanças no processo devido às causas assinaláveis, de modo que ações corretivas possam ser tomadas para evitar a produção de muitos itens não conformes. Dentre as

ferramentas utilizadas no CEP, destaca-se o gráfico de controle.

2 Gráficos de Controle mais comuns empregados no monitoramento da variabilidade

O gráfico de controle foi introduzido por Shewhart em 1924 e é uma representação gráfica da mensuração de alguma estatística que está sendo monitorada de uma amostra tomada no tempo.

O gráfico de controle é formado por três linhas: a linha central e os limites de controle inferior e superior. Na linha central do gráfico localiza-se a média da estatística monitorada quando o processo está sob controle. Os limites de controle superior e inferior são determinados de modo que satisfaçam algum critério de desempenho.

Se o processo está sob controle, praticamente todos os pontos amostrais devem distribuir-se aleatoriamente entre os limites de controle. Quando um ponto localiza-se fora dos limites de controle no gráfico, há indícios de que o processo está fora de controle e é necessário investigar a ocorrência de causas especiais e realizar ações corretivas.

Há uma relação entre gráfico de controle e teste de hipóteses. O gráfico de controle equivale ao teste de hipótese com a hipótese nula de que o processo está sob controle, ou seja, permanece estável ao longo do tempo. Se um ponto é registrado fora dos limites de controle decide-se que o processo está fora de controle, a hipótese nula de que o processo está sob controle é rejeitada e o processo deve ser ajustado. (Montgomery (2009))

O desempenho do gráfico de controle pode ser avaliado pela sua capacidade em detectar rapidamente mudanças no processo, através do número médio de amostras coletadas até a indicação de condição fora de controle estatístico (*Average Run Length* – *ARL*).

No gráfico de Shewhart, que considera a independência entre as observações, o valor do *ARL* é inversamente proporcional à probabilidade de uma observação exceder os limites de controle (Montgomery (2009))

O número de amostras coletadas até que o gráfico de controle sinalize que o processo está fora de controle (*Run Length* - *RL*) é uma variável aleatória com distribuição geométrica com média (*ARL*) igual a $\frac{1}{\alpha}$, onde α é a probabilidade de uma observação exceder os limites de controle.

O plano do gráfico de controle Shewhart determina o tamanho adequado da amostra n e os limites de controle de modo que certas condições de *ARL* sejam satisfeitas. Quando o processo está sob controle são esperados grandes valores para o *ARL*, denominado ARL_0 . Por outro lado, quando o processo sofre alterações, são esperados pequenos

valores de ARL , denominado ARL_1 , indicando rapidamente que o processo mudou.

O plano ótimo será aquele que, entre todos os planos com mesmo ARL_0 , possua o menor valor esperado de tempo para sinalizar uma mudança, quando esta realmente ocorre, ou seja, aquele com menor ARL_1 . (Hawkins e Olwell (1998)).

Seja X uma característica da qualidade de interesse, variável aleatória com função de distribuição $f(X, \theta)$ e função de distribuição acumulada $F(X, \theta)$, onde θ é o vetor de parâmetros.

Seja S a estatística monitorada pelo gráfico de controle com limites de controle inferior (LCL) e superior (UCL). Quando o processo está estável, ele opera com $\theta = \theta_0$, ou seja, sob controle, e quando ocorre uma mudança no processo, tem-se $\theta = \theta_1$, num estado fora de controle. O teste de hipóteses equivalente é dado por

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases}$$

A probabilidade de que o gráfico erroneamente sinalize que o processo está fora de controle quando na verdade não está é α (ou erro tipo I) e a probabilidade de que o gráfico não sinalize que o processo está fora de controle quando na verdade ele está é β (ou erro tipo II). Ou seja

$$\alpha = 1 - P(LCL < S < UCL | \theta = \theta_0)$$

$$\beta = P(LCL < S < UCL | \theta = \theta_1)$$

O ARL para os processos sob controle e fora de controle são expressos sob as condições de independência, respectivamente, por

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \quad \text{e} \quad ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}. \quad (2.1)$$

Ao assumir que a variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ tem-se como vetor de parâmetros $\theta = (\mu, \sigma^2)$. A função de distribuição acumulada padronizada de X é $\Phi(Z)$ onde $Z = \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)$.

No processo que opera sob controle estatístico, tem-se $\theta = \theta_0 = (\mu_0, \sigma_0^2)$ e, no processo fora de controle, $\theta = \theta_1 = (\mu_1, \sigma_1^2)$.

Quando ocorre uma causa especial, o processo passa a operar num estado fora de controle. Podem ocorrer diferentes situações.

1. A média e a variabilidade do processo igual a (μ_0, σ_0^2) , sob controle, sofrem alteração para $(\mu_1, \sigma_1^2) = (\gamma\mu_0, \delta^2\sigma_0^2)$, (γ, δ) positivo e diferente de $(1, 1)$.
2. Quando tem-se $(\gamma, 1)$, a média do processo μ_0 sofre uma alteração para $\mu_1 = \gamma\mu_0$, sem que haja mudança na variância.

3. Se ocorrer $(1, \delta)$, a média mantém-se inalterada e há uma mudança na variabilidade do processo de σ_0^2 para $\sigma_1^2 = \delta^2 \sigma_0^2$.

Neste trabalho assume-se que a variabilidade do processo sofre uma mudança de magnitude δ^2 , e altera-se de σ_0^2 para σ_1^2 , enquanto a média mantém-se inalterada. Ou seja, assume-se que ocorre $(1, \delta)$ e que $(\mu_1, \sigma_1^2) = (\mu_0, \delta^2 \sigma_0^2)$.

Os gráficos de controle podem ser classificados sob diferentes abordagens:

- Quanto à decisão com os dados da inspeção corrente ou não, ou seja, ter memória ou não. Gráficos CUSUM e EWMA são exemplos do primeiro caso e os de Shewhart são exemplos do segundo.
- Quanto à natureza da estatística a ser monitorada: variáveis ou atributos. $\bar{X}$, R e S^2 são exemplos de gráficos por variáveis e p , np , c e u são exemplos de gráficos por atributos.
- Quanto ao número de variáveis monitoradas: univariada ou multivariada.
- Quanto ao número de amostragens: única ou dupla.
- Quanto aos parâmetros fixos e variáveis: tamanho e limite de controle únicos; tamanhos variados; intervalos variados; limites de controle variados.

2.1 Gráficos de Controle para variáveis

Gráficos de controle para variáveis são utilizados quando a característica da qualidade a ser monitorada pode ser expressa por uma variável contínua.

Assume-se que esta característica é uma variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Os gráficos de controle Shewhart para monitoramento da variância de variáveis contínuas são baseados na amplitude amostral R , no desvio padrão amostral S e na própria variância amostral S^2 , que estão nas subseções 2.1.1 (R) e 2.1.2 (S e S^2), respectivamente.

2.1.1 Gráfico de Controle R

Shewhart desenvolveu o gráfico de controle para monitorar a dispersão do processo através da medida da amplitude da amostra, tomando como base as estatísticas da distribuição desenvolvidas por [Tippett \(1925\)](#).

Sejam $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ as estatísticas de ordem da variável aleatória X com distribuição Normal e função de distribuição $f(x) = \phi(x)$ e acumulada padrão $F(x) = \Phi(x)$, conforme descrito em [Tippett \(1925\)](#).

Define-se a amplitude amostral R e a amplitude relativa amostral W

$$R = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{W} = \frac{R}{\sigma} \cdot X \quad (2.2)$$

A função de de distribuição de W é dada por (Tippett (1925))

$$F_W(w) = n \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi(x+w) - \Phi(x)]^{n-1} f(x) dx \quad (2.3)$$

Seja $z = \frac{x}{\sigma}$. O valor esperado e o desvio padrão de W são determinados por

$$E(W) = \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - (1 - \Phi(z))^n - \Phi^n(z)] dz = d_2 \quad (2.4)$$

$$\sqrt{V(W)} = \sqrt{E(W^2) - d_2^2} = d_3 \quad (2.5)$$

onde $E(W^2) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^v \{1 - [1 - \Phi(u)]^n - \Phi^n(v) + [\Phi(v) - \Phi(u)]^n\} du dv$.

O valor esperado de $R = \sigma W$ é dado por $E(R) = \sigma d_2$ e o desvio padrão é $\sigma_R = \sqrt{\sigma^2 V(W)} = \sigma d_3$. Os valores de d_2 e d_3 podem ser encontrados em tabelas da distribuição de R .

Os limites de controle 3σ para R são dados por

$$E(R) \pm 3\sigma_R = (d_2 \pm 3d_3)\sigma \quad (2.6)$$

σ conhecido. Limites exatos para o gráfico de controle R podem ser obtidos pela integração numérica de $F_W(w)$.

O gráfico R é insensível às pequenas mudanças no desvio padrão do processo. Embora amostras maiores possam ser mais eficientes, à medida que o tamanho da amostra aumenta, a eficiência da amplitude para estimar o desvio padrão diminui drasticamente. (Montgomery (2009))

2.1.2 Gráficos de Controle S e S^2

A variância e o desvio padrão de uma amostra de tamanho n de X são dados por

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (2.7)$$

$$S = \sqrt{S^2}$$

Tem-se que $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$.

S^2 é um estimador não viesado de σ^2 , ou seja, $E(S^2) = \sigma^2$ (Ross (2009)). O valor esperado de S é $E(S) = \sigma c(n)$ onde

$$c(n) = \frac{\sqrt{2}\Gamma(n/2)}{\sqrt{n-1}\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

com

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

O desvio padrão de S , σ_S , é dado por

$$\sigma_S = \sqrt{E(S^2) - [E(S)]^2} = \sigma \sqrt{1 - c^2(n)}$$

.

Os limites de controle 3σ para o gráfico de controle S , σ conhecido, são dados por

$$E(S) \pm 3\sigma_S = \sigma[c(n) \pm 3\sqrt{1 - c^2(n)}], \quad (2.8)$$

O uso de limites 3σ é aproximado e pode levar a limites de controle inferior negativos quando o tamanho da amostra for pequeno, na ordem de cinco. (Zhang et al. (2005))

Os limites de controle inferior (LCL) e superior (UCL) para o gráfico de controle S^2 , para σ^2 conhecido, são exatos e dados por

$$\begin{aligned} LCL &= \frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{1-(\alpha/2), n-1}^2 \\ UCL &= \frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{\alpha/2, n-1}^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.2 Gráficos de controle por atributos para monitoramento da variabilidade

Em determinadas situações a característica da qualidade, embora possa ser expressa em escala contínua, pode ser monitorada através de uma classificação ou contagem. De acordo com Montgomery (2009) o controle por variáveis é geralmente mais caro e consome mais tempo por unidade do que a inspeção por atributos.

Gráficos por atributos são aplicados para monitorar processos quando a característica da qualidade é resultado de uma classificação dos itens em conforme ou não conforme.

Mensurar a característica de qualidade de interesse precisamente pode ser caro. Uma alternativa para controlar a estabilidade do parâmetro de interesse pode ser utilizar um dispositivo e, sem mensurar, classificar os valores em grupos.

O agrupamento de dados é um recurso que pode ser utilizado para resumo da informação e apresentação na forma de gráficos e tabelas, como forma de preservar a fonte de informação sigilosa ou como alternativa quando há dificuldade ou impossibilidade em obter medidas com precisão. (Haitovsky (1982))

Haitovsky (1982) definiu o agrupamento de dados como um processo no qual a variável X , com função de distribuição acumulada $F(X)$, contínua ou discreta, é condensada numa função de distribuição discreta

$$p_j = \int_{c_{j-1}}^{c_j} dF(X)$$

$$j = 1, \dots, k + 1.$$

$X \in [c_0, c_{k+1}]$ é particionada em intervalos, equidistantes ou não, de limites c_j , onde $c_1 < \dots < c_k$, com $c_0 = -\infty$ e $c_{k+1} = +\infty$, de modo que são formados $(k + 1)$ grupos disjuntos. Cada elemento x_i , $i = 1, \dots, n$ é classificado no grupo j , $j = 1, \dots, k + 1$, se $c_{j-1} \leq x_i \leq c_j$.

O número de elementos classificados no grupo j é n_j , tal que $\sum_{j=1}^{k+1} n_j = n$.

Assim, uma observação $x_i \in [c_0, c_1]$ é classificada no grupo 1, com probabilidade $p_1 = \int_{-\infty}^{c_1} dF(X)$ e uma observação $x_i \in [c_k, c_{k+1}]$ é classificada no grupo $(k + 1)$, com probabilidade $p_{k+1} = \int_{c_k}^{+\infty} dF(X)$.

Na área de amostragem de aceitação, os itens não conformes, segundo os limites de especificação, são monitorados de acordo com a classificação da característica da qualidade em aceita ou rejeitada.

Tippett (1944) foi um dos primeiros a desenvolver as técnicas de gráficos de controle especificamente para uso com dados agrupados. Stevens (1948) propôs dois gráficos de controle que utilizam um dispositivo com dois limites, que classifica as observações em um de três grupos, para monitorar simultaneamente a média e o desvio padrão de uma distribuição que possa ser aproximada à normal.

Steiner, Geyer e Wesolowsky (1994) propuseram um gráfico de controle *step gauge* em k etapas, ou *k-step gauge*, $k = 1, \dots, 6$, para monitorar mudanças unidirecionais na média de uma distribuição normal. Em seguida, estenderam o trabalho para mudanças nas duas direções e propuseram um gráfico de controle Shewhart *k-step gauge* para monitorar a média e o desvio padrão de um processo cuja produção segue uma distribuição normal. (Steiner, Geyer e Wesolowsky (1996))

O gráfico de controle np_{S^2} foi proposto por Ho e Quinino (2013) como uma alternativa para o gráfico S^2 para monitorar a variabilidade de um processo por atributo

quando a característica de qualidade segue uma distribuição normal.

Os gráficos de controle para monitoramento da variância propostos por [Stevens \(1948\)](#), [Steiner, Geyer e Wesolowsky \(1994\)](#) e [Ho e Quinino \(2013\)](#) são descritos nas subseções 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3, respectivamente.

2.2.1 Gráfico de Controle por Classificação

[Stevens \(1948\)](#) propôs dois gráficos de controle para monitorar simultaneamente a média e o desvio padrão de uma distribuição que possa ser aproximada à normal, quando o processo está operando sob controle, no qual as observações são classificadas em um dos três grupos utilizando um dispositivo de duas etapas .

Um dispositivo (Figura 1) consiste de um número de pinos de diferentes diâmetros utilizados para classificar um item de acordo com o resultado de se passar ou não passar pelo medidor, se é maior ou menor do que o padrão determinado. ([Stevens \(1948\)](#)).

Figura 1: Modelo de dispositivo de classificação.

Uma amostra aleatória $X_1, X_2, \dots, X_n$, com distribuição simétrica aproximada à Normal quando o processo está sob controle, tem suas observações classificadas por um dispositivo com limites $c_1 = L$ e $c_2 = U$, $L < U$, equidistantes do centro da distribuição (Figura 2). Cada variável x_i é classificada nos grupos

$$\begin{cases} (1), & \text{com probabilidade } p_1 & \text{se } x_i < L \\ (2), & \text{com probabilidade } p_2 & \text{se } L < x_i < U \\ (3), & \text{com probabilidade } p_3 & \text{se } x_i > U \end{cases}$$

Quando ocorre um aumento na média do processo, sem mudança no desvio padrão, o valor de p_3 aumenta, p_1 diminui e p_2 permanece inalterado. Por outro lado, quando ocorre aumento na variabilidade, p_1 e p_3 aumentam e p_2 diminui.

Figura 2: Processo de classificação de Stevens.

A quantidade de itens classificados nos dos três grupos são, respectivamente n_1 , n_2 , e n_3 . [Stevens \(1948\)](#) propõe a estatística $n_3 - n_1$ para monitorar mudanças na média do processo e $n_1 + n_3$ para monitorar mudanças no desvio padrão.

Tem-se que (n_1, n_2, n_3) segue uma distribuição trinomial (n, p_1, p_2, p_3) , $(n_1 + n_3) \sim \text{Binomial}(n, p_1 + p_3)$ e $(n_3 - n_1)$ pode ser aproximada para uma distribuição normal de média $n(p_3 - p_1)$ e variância $n[p_1(1 - p_1) + p_3(1 - p_3) + 2p_1p_3]$, quando n é grande. ([Johnson, Kotz e Balakrishnan \(2004\)](#))

[Stevens \(1948\)](#) comparou a sensibilidade do método através da razão da variância das estimativas para a média e o desvio padrão obtidas das medidas exatas e agrupadas, determinadas pela matriz de informação de Fisher com uma única observação. Os limites ótimos foram determinados de modo que maximizem a eficiência.

2.2.2 Gráfico de Controle *k-step gauge*

[Steiner, Geyer e Wesolowsky \(1994\)](#) propuseram um gráfico de controle *step gauge* com $k = c$ limites ou *k-step gauge*, $k = 1, \dots, 6$, para monitorar mudanças unidirecionais na média de uma distribuição normal, quando o desvio padrão do processo é conhecido, com base na razão de verossimilhança das probabilidades multinomiais das hipóteses nula e alternativa.

Utiliza-se um *k-step gauge* com limites c_j , para classificar valores da variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ em $(k+1)$ grupos. Assume-se que σ^2 é conhecido e igual a 1 de modo que o vetor de parâmetros é $\theta = (\mu, 1)$. Quando o processo está fora de controle, a média sofre mudanças enquanto o desvio padrão permanece inalterado.

X_i observações de uma amostra aleatória de tamanho n , $i = 1, \dots, n$, tomada a cada período h , são classificadas. A probabilidade de uma observação ser classificada como pertencente ao grupo j , $j = 1, \dots, k+1$ é dada por

$$p_j(\theta) = \int_{c_{j-1}}^{c_j} f(x, \theta) dx$$

O modelo que descreve essa distribuição é multinomial, ou seja, $(n_1, \dots, n_{k+1}) \sim Mult(n, p_1, \dots, p_{k+1})$ tal que $\sum_{j=1}^{k+1} p_j = 1$ e $\sum_{j=1}^{k+1} n_j = n$.

O teste uniformemente mais poderoso (UMP) para testar uma mudança em um processo significativo é a razão de verossimilhança das probabilidades multinomiais sob as hipóteses nula de que o processo está sob controle, e alternativa de que o processo opera fora de controle. Para [Steiner, Geyer e Wesolowsky \(1994\)](#), esta abordagem é considerada ideal pelo Lema de Neyman-Pearson, onde o particionamento ótimo da região de aceitação/rejeição é baseado na razão de probabilidade das alternativas específicas.

A estatística do teste, com nível de significância α e poder $1 - \beta$ é a razão de verossimilhança

$$LR(\theta|X) = \frac{L(\theta_1|X)}{L(\theta_0|X)} = \prod_{j=1}^{k+1} \left(\frac{p_j(\theta_1)}{p_j(\theta_0)} \right)^{n_j}$$

A variável aleatória $z_i = \ln \left(\frac{p_j(\theta_1)}{p_j(\theta_0)} \right)$ é atribuída a cada observação x_i pertencente ao grupo j e a média amostral $\bar{z}$ é utilizada como linha central do gráfico de controle.

O gráfico sinaliza que o processo está fora de controle se a média amostral estiver fora do limite de controle, ou seja, se $\bar{z} > UCL$. Deve-se determinar n e UCL tal que

$$\alpha = P\left(\sum_{i=1}^n z_i > nUCL | \theta = \theta_0\right)$$

$$1 - \beta = P\left(\sum_{i=1}^n z_i > nUCL | \theta = \theta_1\right)$$

Quando n é grande, $\bar{z}$ é aproximado pela distribuição normal com média $\mu_{\bar{z}}(\theta)$ e variância $\sigma_{\bar{z}}^2(\theta)$, onde

$$\mu_{\bar{z}}(\theta) = \sum_{j=1}^{k+1} p_j(\theta) z_j \quad (2.10)$$

$$\sigma_{\bar{z}}^2(\theta) = \sum_{j=1}^{k+1} p_j(\theta) z_j^2 - \mu_{\bar{z}}(\theta)^2 \quad (2.11)$$

Na solução aproximada pelo Teorema do Limite Central (TLC) os valores de n e UCL são obtidos das equações:

$$n = \left[\frac{\Phi^{-1}(\alpha)\sigma_{\bar{z}}(\theta_0) - \Phi^{-1}(1-\beta)\sigma_{\bar{z}}(\theta_1)}{\mu_{\bar{z}}(\theta_0) - \mu_{\bar{z}}(\theta_1)} \right]^2 \quad (2.12)$$

$$UCL = \frac{\Phi^{-1}(\alpha)\sigma_{\bar{z}}(\theta_0)\mu_{\bar{z}}(\theta_1) - \Phi^{-1}(1-\beta)\sigma_{\bar{z}}(\theta_1)\mu_{\bar{z}}(\theta_0)}{\Phi^{-1}(\alpha)\sigma_{\bar{z}}(\theta_0) - \Phi^{-1}(1-\beta)\sigma_{\bar{z}}(\theta_1)} \quad (2.13)$$

onde Φ^{-1} é a inversa da função de distribuição acumulada de $N(0, 1)$ e $(\mu_{\bar{z}}(\theta), \sigma_{\bar{z}}^2(\theta))$ são determinados por (2.10) e (2.11).

A partição ótima para o *step gauge* é determinada minimizando o tamanho da amostra n dado UCL . Dado um vetor de limites c_j a partição ótima é obtida pela solução da equação

$$\min[n(c) + m(c)] \quad (2.14)$$

onde

$$n(c) = n = \left[\frac{\Phi^{-1}(\alpha)\sigma_{\bar{z}}(\theta_0) - \Phi^{-1}(1-\beta)\sigma_{\bar{z}}(\theta_1)}{\mu_{\bar{z}}(\theta_0) - \mu_{\bar{z}}(\theta_1)} \right]^2 \quad (2.15)$$

$$m(c) = \begin{cases} M, & \text{se } c_{j-1} > c_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{é o critério de parada, } M \text{ grande.}$$

Para grandes amostras uma solução aproximada pode ser obtida utilizando o teorema do limite central e para amostras de pequenas dimensões um procedimento iterativo é utilizado para determinar as partições. A solução pelo TLC é apropriada se o desvio das taxas de erro verdadeiros das taxas desejadas é pequeno. Quanto maior o número de grupos $(k+1)$, menor o tamanho de amostra necessário para as taxas tornarem-se estáveis.

Segundo os autores, encontrar os limites de calibre ideais para pequenos tamanhos de amostra é computacionalmente caro. A distribuição de $\bar{z}$ é assimétrica e os limites das partições e os pesos correspondentes deixam de ser ótimos.

Steiner, Geyer e Wesolowsky (1996) estenderam o trabalho para mudanças nas duas direções e propuseram um gráfico de controle Shewhart *k-step gauge*, $k = 1, \dots, 6$, para monitorar a média e o desvio padrão de um processo cuja produção segue uma distribuição normal.

O teste de hipóteses para o gráfico detectar mudanças de processo é

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \quad \text{ou} \quad \theta = \theta_{-1} \end{cases}$$

onde θ_1 e θ_{-1} são mudanças nas direções ascendente e descendente, respectivamente.

Duas abordagens foram propostas:

1. dois conjuntos de pesos (z_j^+, z_j^-) , variáveis aleatórias, com teste da razão de verossimilhança composto equivalente a dois testes de hipóteses unilaterais simples:

$$z_j^+ = \ln \left(\frac{p_j(\theta_1)}{p_j(\theta_0)} \right), \quad z_j^- = \ln \left(\frac{p_j(\theta_{-1})}{p_j(\theta_0)} \right) \quad (2.16)$$

2. um conjunto de pesos (w_j) , variável aleatória, com um único teste de hipótese.

$$w_j = \ln \left(\frac{p_j(\theta_1)}{p_j(\theta_{-1})} \right) \quad (2.17)$$

Para o primeiro caso, define-se $\Omega = \{\theta_1, \theta_{-1}\}$. A estatística do teste é dada por

$$CLR = \max_{\theta \in \Omega} \ln \left(\frac{L(\theta|X)}{L(\theta_0|X)} \right) = \max_{\theta \in \Omega} \sum_{j=1}^{k+1} n_j \ln \left(\frac{p(\theta)}{p(\theta_0)} \right).$$

O teste é equivalente à $\max(\bar{z}^+, \bar{z}^-)$.

Define-se os limites de controle para $(\bar{z}^+, \bar{z}^-)$ iguais a (UCL, LCL) , respectivamente.

Assume-se que $\bar{z} \sim N(\mu_{\bar{z}}(\theta), \sigma_{\bar{z}}^2(\theta))$, θ igual ao verdadeiro valor do parâmetro, com média e desvio padrão segundo (??). Deve-se determinar o tamanho da amostra n tal que

$$P[z^+ > UCL(n)|\theta_0] + P[z^- > LCL(n)|\theta_0] \leq \frac{1}{ARL_0}$$

onde

$$UCL(n) = -\frac{\sigma_{z^+}(\theta_1)\Phi^{-1}(1/ARL_1^*)}{\sqrt{n}} + \mu_{z^+}(\theta_1)$$

$$LCL(n) = -\frac{\sigma_{z^-}(\theta_{-1})\Phi^{-1}(1/ARL_1^*)}{\sqrt{n}} + \mu_{z^-}(\theta_{-1})$$

A segunda abordagem compara a probabilidade de θ_1 contra θ_{-1} . A estatística do teste é equivalente a

$$LR(X) = \prod_{j=1}^{k+1} \left(\frac{p_j(\theta_1)}{p_j(\theta_{-1})} \right).$$

Para grandes amostras $\bar{w}$ pode ser aproximado para a distribuição normal e os limites de controle podem ser expressos em função do tamanho da amostra. Os valores de ARL_0 e ARL_1 são determinados pela desigualdade

$$P(\bar{w} > -\sigma_{\bar{w}}(\theta_1)r(n) + \mu_{\bar{w}}(\theta_1)|\theta_0) + P(\bar{w} < \sigma_{\bar{w}}(\theta_{-1})r(n) + \mu_{\bar{w}}(\theta_{-1})|\theta_0) \leq \frac{1}{ARL_1}$$

$$\text{onde } r(n) = \frac{\Phi^{-1}(1/ARL_1)}{\sqrt{n}}.$$

A solução baseada no TCL tem bons resultados para grandes tamanhos de amostra. Para tamanhos de amostra pequenos o efeito do problema da descontinuidade pode ser significativo sendo necessário considerar a distribuição exata dos pesos para determinar os verdadeiros níveis de ARL por meio de enumeração.

Os limites ótimos para o gráfico de controle Shewhart k -step gauge, $k = 1, \dots, 6$, são os que maximizam a informação esperada de Fisher

$$E(I(\theta)) = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{p_j(\theta)} \left(\frac{\partial p_j(\theta)}{\partial \theta} \right)^2$$

numa amostra de tamanho um. Para a distribuição normal com parâmetros $\theta = (\mu, \sigma)$ os limites ótimos são obtidos de $\max[E(I(\theta))]$.

Os limites que maximizam a informação sobre a média e sobre o desvio padrão não são os mesmos (Steiner, Geyer e Wesolowsky (1996)) e os limites ótimos para monitorar simultaneamente a média e o desvio padrão são os que maximizam a soma ponderada das eficiências estimadas dos dois parâmetros $Eff(\mu, \sigma, d) = dEff(\mu) + (1 - d)Eff(\sigma)$.

2.2.3 Gráfico de Controle np_{S^2}

Wu et al. (2009) propuseram o gráfico de controle np_X para monitorar a média do processo, com distribuição normal, através de inspeção por atributos, onde cada observação é classificada como aprovada ou reprovada com base em limites discriminantes.

O gráfico de controle np_{S^2} foi proposto por Ho e Quinino (2013) como uma alternativa para o gráfico S^2 para monitorar a variabilidade de um processo de inspeção por atributos quando a característica de qualidade de interesse segue uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 .

O procedimento é semelhante ao gráfico np_X de Wu et al. (2009) onde um item é classificado através de um dispositivo "passa / não passa", onde para uma amostra de tamanho n , tomada a cada período h , os itens são classificados em aprovado ou rejeitado.

O teste de hipóteses para o gráfico detectar mudanças unilaterais na variância do processo quando a média permanece inalterada é:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 = \delta^2 \sigma_0^2, \quad \delta > 1 \end{cases}$$

No processo de classificação, baseado num dispositivo, um item é considerado aprovado se a medida está dentro do intervalo $[LDL, UDL]$, limites discriminantes inferior e superior, respectivamente.

O procedimento do gráfico np_{S^2} consiste em classificar sequencialmente as unidades em aprovado ou rejeitado até que a itens aprovados ou b rejeitados sejam observados pela primeira vez. Se a itens aprovados são observados antes, o processo é dito sob controle e a produção continua, mas se b itens rejeitados são observados antes, o processo é dito fora de controle e a produção é interrompida para o ajuste.

A probabilidade de uma unidade ser rejeitada é

$$p = 1 - P(LDL < X < UDL | \mu_0, \sigma^2) = 1 - \Phi \left(\frac{UDL - \mu_0}{\sigma} \right) + \Phi \left(\frac{LDL - \mu_0}{\sigma} \right) \quad (2.18)$$

$\sigma^2 = \sigma_0^2$ quando o processo está sob controle e $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \delta^2 \sigma_0^2$ quando o processo está fora de controle.

A estatística de monitoramento D assume, para cada amostra, valor 1 se a itens aprovados são observados primeiro e valor 0 caso contrário. A probabilidade de que o gráfico sinalize erroneamente que o processo está fora de controle quando na verdade ele está sob controle, o erro tipo I, é

$$\alpha = 1 - \sum_{x=a}^{a+b-1} \binom{x-1}{a-1} p_0^a (1-p_0)^{x-a} = P(D=0|p_0)$$

onde $p_0 = 1 - P(LDL < X < UDL | \mu_0, \sigma_0^2)$ conforme (2.18).

O erro tipo II, a probabilidade de que o gráfico de controle não sinalize que o processo está fora de controle quando na verdade ele está fora de controle, é

$$\beta = \sum_{x=a}^{a+b-1} \binom{x-1}{a-1} p_1^a (1-p_1)^{x-a} = P(D=1|p_1)$$

onde $p_1 = 1 - P(LDL < X < UDL | \mu_0, \sigma_1 = \delta^2 \sigma_0^2)$ conforme (2.18).

Há uma possibilidade de que nem todos os $n = (a+b-1)$ itens sejam examinados (Ho e Quinino, 2013). Seja I o número de inspeções. O valor esperado de I é

$$E(I) = P(D=1) \sum_{x=a}^{a+b-1} \binom{x-1}{a-1} p^a (1-p)^{x-a} + P(D=0) \sum_{x=b}^{a+b-1} \binom{x-1}{b-1} p^b (1-p)^{x-b},$$

onde p é expresso por (2.18).

Os parâmetros a, b, LDL e UDL são determinados tais que a ARL_1 é minimizada, sujeito a um ARL_0 . Uma vez que o valor de α é fixado, o vetor de valores de parâmetros para $(a, b, p_0[LDL, UDL])$ pode ser escolhido, de tal modo que minimize β , para uma mudança δ específica.

Fixados o tamanho da amostra n e a magnitude da mudança δ , o gráfico de controle np_{S^2} quer determinar um tamanho de amostra tal que $ARL_1(np_{S^2}) \leq ARL_1(R)$ ou $ARL_1(np_{S^2}) \leq ARL_1(S^2)$. O gráfico np_{S^2} tem um desempenho semelhante ao do gráfico

de controle R , com um tamanho de amostra próximo ou menor, mas seu desempenho em detectar uma mudança no processo é inferior ao do gráfico S^2 .

Quando $X \sim N(0, 1)$, para um $ARL_0 = 370$, define-se o tamanho de amostra n^* para os gráficos S^2 e R como o tamanho mínimo da amostra necessária para produzir um ARL_1 tão pequeno quanto possível, quando comparado com o ARL_1 do gráfico de controle np_{S^2} e, para o gráfico de controle np_{S^2} , como o número médio de classificações necessárias em cada amostra de tamanho n , onde $n^* \leq n$.

Ho e Quinino (2013) afirmam que o uso do gráfico de controle np_{S^2} é interessante devido ao fato de que não há nenhuma medição das unidades, que são inspecionadas por um processo de classificação com contagem de itens fora dos limites discriminantes. Considerando-se o custo médio por unidade de tempo, de acordo com os autores, o gráfico de controle np_{S^2} apresenta uma vantagem econômica sobre o gráfico S^2 , quando o custo de classificar itens é, em média, aproximadamente 25% inferior ao custo de mensurá-los.

3 Gráfico de Controle G_{S^2} para monitoramento da variância

Em algumas situações, obter a medida exata de uma determinada característica da qualidade a ser monitorada é impossível ou economicamente inviável. Nestes casos, uma alternativa é classificar a variável contínua em categorias através de um dispositivo como, por exemplo, um anel de calibração tipo passa - não passa.

Suponha que se queira monitorar a variabilidade de um processo em que a característica da qualidade de interesse segue uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 . A variável a ser monitorada é classificada em grupos, através de um dispositivo passa - não passa.

Para uma amostra de tamanho n , cada item x_i , $i = 1 \dots n$, é classificado pelo dispositivo no grupo j , $j = 1 \dots k+1$, com probabilidade p_j . Ao final da inspeção, tem-se n_j itens em cada grupo j , onde $\sum_{j=1}^{k+1} n_j = n$.

Considera-se, inicialmente, um dispositivo com dois limites de controle: inferior $c_1 = L$ e superior $c_2 = U$ (Figura 3) que classifica as observações em três grupos distintos.

Figura 3: Modelo de dispositivo de classificação com dois limites.

De acordo com a Figura 3, ajustadas as medidas de limite L - parte externa e U - parte interna (A), um item pode não-passar por L (B); passar por L e não passar por U (C) ou; passar por ambos (D).

A probabilidade de um item x_i pertencer à um dos três grupos é dada por:

$$p_j = \begin{cases} \Phi\left(\frac{L - \mu}{\sigma}\right), & \text{se } x_i \leq L \\ \Phi\left(\frac{U - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{L - \mu}{\sigma}\right), & \text{se } L < x_i < U \\ 1 - \Phi\left(\frac{U - \mu}{\sigma}\right), & \text{se } x_i \geq U \end{cases} \quad (3.1)$$

Para cada grupo j , dados os parâmetros (a, t) , $a > 1$ constante, associa-se um peso w_j , conforme abaixo:

$$w_j = \begin{cases} (2 - a)(L - t)^2, & \text{se } x_i \leq L \\ t^2, & \text{se } L < x_i < U \\ a(U - t)^2, & \text{se } y_i \geq U \end{cases} \quad (3.2)$$

Define-se a estatística a ser monitorada

$$G_{S^2}(X \mid \mu, \sigma^2) = \sum_{j=1}^{k+1} w_j p_j n_j \quad (3.3)$$

Por simplicidade adota-se a notação G para G_{S^2} .

A Figura 4 apresenta o cálculo da estatística G conforme a classificação do dispositivo nos grupos $j = 1, 2, 3$.

Figura 4: Cálculo da estatística G .

Assume-se que, sob controle, $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ e que ao ocorrer um aumento na variância, sem mudanças na média, tem-se $X \sim N(\mu_0, \delta^2 \sigma_0^2)$. A hipótese a ser testada é

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 = \delta^2 \sigma_0^2, \quad \delta > 1 \end{cases}$$

O gráfico sinaliza se $G(X \mid \sigma^2) > LC$, LC limite de controle determinado para satisfazer alguma medida de desempenho.

3.1 Distribuição da estatística G

Seja $\{N_s\}$ o conjunto de todas as s possíveis partições das n observações em $(k+1)$ grupos, de modo que se tenha n_j observações em cada grupo, onde $\sum_{j=1}^{k+1} n_j = n$.

O número de partições é dado por (Johnson, Kotz e Balakrishnan (2004))

$$s = \binom{n+k}{k}.$$

A distribuição da estatística G é discreta e formada por $g_1, g_2, \dots, g_s$ valores quantos forem o total de partições possíveis do número total de observações da amostra (n).

No caso de se classificar n itens em três grupos, o número de partições possíveis é

$$s = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad (3.4)$$

Para cada partição determina-se o valor da estatística $G(X \mid \mu, \sigma^2)$, ou seja, para a l -ésima partição formada pelo vetor (n_{l1}, n_{l2}, n_{l3}) , determina-se

$$g_l = (2-a)(L-t)^2 \Phi\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right) n_{l1} + t^2 \left[\Phi\left(\frac{U-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right) \right] n_{l2} + a(U-t)^2 \Phi\left(\frac{U-\mu}{\sigma}\right) n_{l3} \quad (3.5)$$

onde $n_{l1} + n_{l2} + n_{l3} = n$ e $l = 1, \dots, s$.

A probabilidade de ocorrência do ponto g_l é determinada por

$$P(G = g_l) = \frac{n!}{n_{l1}! n_{l2}! n_{l3}!} p_1^{n_{l1}} p_2^{n_{l2}} p_3^{n_{l3}} \quad (3.6)$$

onde p_j é a probabilidade de um item pertencer ao grupo j conforme (3.1), nas situações sob controle com $\sigma^2 = \sigma_0^2$ ou fora de controle com $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_0^2 \delta^2$.

Tem-se as probabilidades sob $H_0 : p_{01}, p_{02}, p_{03}$ e $H_1 : p_{11}, p_{12}, p_{13}$

3.2 Determinação do ARL_1

Para uma amostra de tamanho n , o processo de classificação pelo dispositivo com limites $[L, U]$ produz, para cada vetor da partição, a estatística g_l com probabilidade $P(G = g_l | \sigma_0^2)$ sob controle e $P(G = g_l | \sigma_1^2 = \sigma_0^2 \delta^2)$ fora de controle.

A função de distribuição acumulada nos s pontos da estatística G , dada por $F(g_l) = \sum_{l=1}^m P(G = g_l | \sigma^2)$, determina os quantis $F_0(g_l)$ sob H_0 e $F_1(g_l)$ sob H_1 , $l = 1, \dots, s$.

Fixado $\alpha = \frac{1}{ARL_0}$ e dadas todas as partições possíveis $\{N_s\}$, o limite de controle LC é tal que $P(G > LC | \sigma_0^2) = \alpha$.

Obtido o limite de controle LC , deve-se determinar os limites do dispositivo de calibração $L = -U$ e o valor da constante a , que minimizem o valor do ARL_1 para o processo fora de controle, isto é, de modo que $ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}$ seja mínimo, onde $\beta = P(G < LC | \sigma_1^2)$.

Os valores ótimos para (L, U, a, t) são obtidos da solução da equação

$$\begin{aligned}
 &\text{fixado } ARL = ARL_0 \\
 &\text{dados os valores iniciais } v^0 = (L^0, U^0, a^0, t^0) \\
 &\text{determinar } v^* = (L, U, a, t) \\
 &\text{tal que } \min \left[\frac{1}{1 - P(G < LC | \sigma_1^2)} \right] \\
 &\text{sujeito a } v \in \Omega \\
 &\Omega = \{L \in [-2, 0], U \in [0, 2], a \in]1, 2[, t \in [0, 1]\}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Assim, fixado $ARL_0 = \frac{1}{\alpha}$, o limite de controle $LC = g_{l_0}$ é determinado dentre os valores $g_1 < g_2 < \dots < g_s$, tal que

$$\sum_{l=1}^{l_0} P(G = g_l | \sigma_0^2) \leq 1 - \alpha \tag{3.8}$$

Obtido o limite de controle LC , o $ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}$ é determinado em função de

$$\beta = \sum_{l=1}^{l_1} P(G = g_l | \sigma_1^2) \tag{3.9}$$

tal que, dentre os valores de $g_1 < g_2 < \dots < g_s$, tem-se um $g_{l_1} > LC$.

Considerou-se quatro casos de restrição aos parâmetros do gráfico proposto para avaliação do desempenho em termos de ARL . As restrições de cada caso estão resumidas na Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros do gráfico G_{S^2}

Caso	Parâmetros	Restrições
1	L, a	$U = L , t = \frac{U+L}{2} = 0$
2	L, a, t	$U = L , t \neq 0$
3	L, U, a	$U \neq L , t = \frac{U+L}{2}$
4	L, U, a, t	$U \neq L , t \neq 0$

Caso 1

No primeiro caso assumem-se limites discriminantes simétricos, $U = -L$, e o parâmetro t como função destes limites, $t = \frac{(U+L)}{2} = 0$. Neste caso, a equação resume-se a determinar apenas os valores ótimos para $v = (L, a)$.

O valor da estatística $G(X | \sigma^2)$ definida em (3.5) para a l -ésima partição (n_{l1}, n_{l2}, n_{l3}) , $g_l^{(1)}$, é dado por

$$g_l^{(1)} = (2-a)L^2\Phi\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right)n_{l1} + aL^2\Phi\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right)n_{l3} \quad (3.10)$$

Caso 2

Neste caso os limites discriminantes são mantidos simétricos, mas o parâmetro $t \neq 0$. A equação considera os valores ótimos para $v = (L, a, t)$ e o valor da estatística $g_l^{(2)}$ é dado por:

$$g_l^{(2)} = (2-a)(L-t)^2\Phi\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right)n_{l1} + t^2\left[1 - \Phi\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right)\right]n_{l2} + a(-L-t)^2\Phi\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right)n_{l3} \quad (3.11)$$

Caso 3

No terceiro caso, os limites discriminantes não possuem restrição de simetria e o parâmetro t é dado como função destes limites, ou seja, $t = \frac{(U+L)}{2}$. Neste caso são considerados os valores ótimos para $v = (L, U, a)$ e o valor da estatística $g_l^{(3)}$ é dado por:

$$g_l^{(3)} = (2-a)\left[L - \left(\frac{U+L}{2}\right)\right]^2\Phi\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right)n_{l1} + \left(\frac{U+L}{2}\right)^2\left[\Phi\left(\frac{U-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right)\right]n_{l2} + a\left[U - \left(\frac{U+L}{2}\right)\right]^2\left[1 - \Phi\left(\frac{U-\mu}{\sigma}\right)\right]n_{l3} \quad (3.12)$$

Caso 4

No último caso a ser analisado, os limites discriminantes são mantidos sem restrição de simetria, mas tem-se o parâmetro $t \neq 0$. Os valores ótimos a serem determinados pela equação são $v = (L, U, a, t)$ e o valor da estatística $g_l^{(4)}$ é dado em (3.5).

4 Resultados

Para determinar os limites ótimos do gráfico a partir da função de distribuição acumulada, assumimos que a variável aleatória $X \sim N(0, 1)$ quando o processo está sob controle e $X \sim N(0, \delta^2)$ quando o processo está fora de controle, mantendo-se a média inalterada.

Dada uma amostra de tamanho n , os itens foram classificados por um dispositivo com limites (L, U) em três grupos distintos, $j = 1, 2, 3$. A cada item do grupo j é atribuído a estatística G_j dados os valores dos parâmetros $v = (L, U, a, t)$ conforme os quatro casos descritos.

De um modo genérico, para uma amostra de tamanho n , seja $Q_{s \times 3}$ a matriz de todas as partições possíveis da amostra em três grupos distintos, com s determinado por (3.4). Cada linha de Q é formada pelo vetor $q_l = [n_{l1} \quad n_{l2} \quad n_{l3}]$, $l = 1, \dots, s$.

Para cada vetor q_l , dado o vetor de parâmetros v , determinam-se os valores da estatística $g_l(v)$ e as probabilidades acumuladas $F_0(g_l(v))$, sob H_0 .

O limite de controle LC para o gráfico é o limite da função de distribuição acumulada sob H_0 , ou seja, $LC = g_{l_0}(v)$ determinado de acordo com (3.8).

Com uma mudança de magnitude $\delta^2 > 1$ na variância do processo sem alteração na média, para cada elemento q_l determinam-se as probabilidades acumuladas $F_1(g_l(v))$, sob H_1 .

Obtem-se, então, o valor do ARL_1

$$ARL_1(v) = \frac{1}{1 - \beta} \quad (4.1)$$

onde β é dado conforme (3.9).

Os valores de ótimos são o vetor v^* tal que o $ARL_1(v^*)$ é mínimo.

Devido à natureza discreta de G , o verdadeiro valor do ARL_0 , denominado ARL_0^* , difere do valor assumido inicialmente para o ARL_0 , pois depende do tamanho da amostra. Também, devido à natureza dos dados, é possível haver mais de um vetor de valores v ótimos no qual o ARL_1 é mínimo para a amostra de tamanho n .

A determinação dos valores ótimos de v na abordagem descrita acima pode ser resumida na Tabela 2.

Como o processo de otimização, conforme descrito, exige um grande esforço computacional, optou-se por utilizar a abordagem da otimização multiobjetivo para encontrar o conjunto de soluções eficientes na região das restrições dos parâmetros.

Tabela 2: Procedimento para determinar o vetor de valores ótimos v

Dado uma amostra de tamanho n , para uma mudança δ , fixando o ARL_0 :	
1.	Determine todas as s partições da amostra para os três grupos
2.	Tome um vetor de valores v
3.	Calcule $g_l(v)$ para cada partição g_l , $l = 1, \dots, s$
4.	Determine a função de distribuição acumulada sob H_0 , $F_0(g_l(v))$
5.	Determine o limite de controle $LC = g_{l_0}$ tal que $\sum_{l=1}^{l_0} P(G = g_l \sigma_0^2) \leq 1 - \alpha$, $g_1 < g_2 < \dots < g_s$
6.	Dado $\delta > 1$, determine a função de distribuição acumulada sob H_1 , $F_1(g_l(v))$
7.	Determine $\beta = \sum_{l=1}^{l_1} P(G = g_l \sigma_1^2)$ tal que $g_{l_1}(v) > LC$, $g_1 < g_2 < \dots < g_s$
8.	Calcule o valor de $ARL_1(v)$
9.	Repita os passos de 1 - 8 para vários valores de v
10.	Escolha o vetor ou conjunto de vetores no qual o ARL_1 é mínimo.

O problema multiobjetivo envolve a otimização de várias funções objetivos simultaneamente, de modo que a solução é um conjunto de pontos eficientes no espaço de soluções.

Define-se o problema multiobjetivo como

$$\begin{aligned}
& \min[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] \\
& \text{sujeito a} \\
& x \in X \\
& g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I \\
& h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, J
\end{aligned} \tag{4.2}$$

onde x é o vetor de parâmetros e X o espaço de restrições.

Diferente da otimização mono-objetivo, a solução ótima de um problema multiobjetivo é formada por um conjunto de soluções não dominadas (ou ótimo de Pareto).

Seja Ω a região viável para o problema de otimização. A solução $u \in \Omega$ é ótimo de Pareto se não há nenhuma outra solução $v \in \Omega$ que melhore alguma função objetivo, sem degradar pelo menos uma das demais.

Assim, no problema de minimização na região Ω , a solução u é dita não-dominada pela solução v , se $\forall i \in (1, \dots, n)$, $f_i(u) \leq f_i(v) \wedge \exists j \in (1, \dots, n) | f_j(u) < f_j(v)$. O conjunto de soluções não dominadas constitui, no espaço dos objetivos, uma fronteira de Pareto.

Dentre os métodos para otimização de problemas multiobjetivo, destacam-se os algoritmos evolucionários de busca, que incluem os Algoritmos Genéticos (AG).

Introduzidos por [Holland \(1975\)](#), os AG são procedimentos de busca baseados em mecanismos de seleção natural envolvendo processos de evolução genética de populações,

sobrevivência e adaptação. A partir de uma população inicial de resultados possíveis ao problema de otimização, evolui-se aos melhores resultados através dos operadores genéticos de cruzamento, mutação e seleção, dentro de um processo iterativo. A Figura 5 resume o procedimento de um AG.

Figura 5: Procedimento de um Algoritmo Genético.

Na literatura há diversas propostas de algoritmos evolucionários multiobjetivo. O procedimento Elitist Nondominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA II) é um deles.

Desenvolvido por Deb et al. (2002), O NSGA II é uma evolução da forma proposta por Goldberg (1989), que aplica critérios de ordenação elitista por dominância e classificação por comparação de povoamento das soluções.

No método NSGA-II uma população de tamanho n é gerada e são aplicados os operadores genéticos de cruzamento e mutação, formando n descendentes. Os $2n$ indivíduos são classificados e ordenados conforme o grau de dominância, constituindo fronteiras, onde os indivíduos da primeira fronteira tem maior grau de dominância. Uma vez ordenados, calcula-se a distância de povoamento dos indivíduos. A nova população de tamanho n é selecionada nas primeiras fronteiras de dominância incluindo-se os indivíduos com maior distância de povoamento. Este procedimento é repetido até que se atinja a convergência. (Figura 6)

Métodos de busca baseados em AG tem sido largamente utilizados na determinação de parâmetros de gráficos de controle. Na literatura podem ser encontradas várias contri-

Figura 6: Procedimento do Algoritmo Genético NSGA-II.

buições. Entre elas podem ser citadas Aparisi e García-Díaz (2004), Aparisi e García-Díaz (2007), Bakir e Altunkaynak (2004), Carlyle, Montgomery e Runger (2000), Chen, Hsieh e Chang (2007), Chou, Wu e Chen (2006), He, Grigoryan e Sigh (2002), Ho e Aparisi (2016), Torng, Lee e Liao (2009).

Ao assumir o problema de otimização dos parâmetros do gráfico de controle G_{S^2} como multiobjetivo, considera-se a restrição ao ARL_0 como uma função objetivo juntamente com a equação para determinação do ARL_1 .

Então, o problema torna-se minimizar o ARL_1 e a diferença em módulo entre o ARL_0 e o ARL_0^* determinado pelo gráfico proposto.

Assim, os valores ótimos dos parâmetros do gráfico (v) são obtidos da equação

$$\begin{aligned}
 &\text{fixado } ARL = ARL_0 \\
 &\text{dados os valores iniciais } v^0 = (L^0, U^0, a^0, t^0) \\
 &\text{determinar } v^* = (L^*, U^*, a^*, t^*) \\
 &\text{tal que } \min \left[\frac{1}{1 - P(G < LC \mid \sigma_1^2)}, \left| \frac{1}{P(G > LC \mid \sigma_0)} - ARL_0 \right| \right] \\
 &\text{sujeito a } v \in \Omega
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde Ω é o espaço de restrições dos parâmetros (Tabela 3).

Do conjunto de soluções ótimas de Pareto, selecionam-se aquelas com o menor

valor de ARL_1 .

4.1 Desempenho do gráfico

Para avaliar o desempenho do gráfico, considerou-se tamanhos de amostra $n = (5, 6, \dots, 25)$ e os seguintes intervalos dos parâmetros para os casos:

Tabela 3: Limites dos parâmetros do gráfico G_{s^2}

Caso	L	U	a	t
1	$[-2, 0]$	$ L $	$]1, 2[$	0
2	$[-2, 0]$	$ L $	$]1, 2[$	$[0, 1]$
3	$[-2, 0]$	$[0, 2]$	$]1, 2[$	$[0, 1]$
4	$[-2, 0]$	$[0, 2]$	$]1, 2[$	$[0, 1]$

Fixado o $ARL_0 = 370$, determinou-se os valores ótimos ou conjunto de valores ótimos de v para as amostras nos quatro casos descritos na Tabela 3, considerando mudanças na variância de magnitude δ^2 para $\delta = (1.1, 1.2, 1.5, 2)$.

O verdadeiro valor do ARL_0 para o gráfico de controle é o ARL_0^* . Os valores ótimos de v para cada amostra foram de fato determinados fixando-se o verdadeiro ARL_0^* .

Como a distribuição de G é discreta, o ARL_0^* é determinado tal que, dado o $ARL_0 = 370$, tem-se

$$|ARL_0^* - ARL_0| \leq 2 \quad (4.4)$$

Na primeira abordagem ao problema, considerou-se a busca do ARL_1 mínimo dentro de um grid de resultados possíveis dentro do espaço de restrições dos parâmetros (Ω) , para intervalos de tamanho 0.005.

Considere-se, como exemplo de busca dentro do grid, uma amostra de tamanho $n = 5$ e uma mudança na variância de magnitude $\delta^2 = 1.2^2$. Há $s = 21$ partições possíveis para a classificação desta amostra em três grupos distintos, conforme (3.4).

Assume-se que os parâmetros do gráfico G_{s^2} são os do caso 1. Então, para o conjunto de valores de v no espaço de restrições da Tabela 3, tomados em intervalos de tamanho 0.005, determinam-se os valores de $g_l^{(1)}$, com $l = 1, \dots, 21$, as distribuições acumuladas sob H_0 e H_1 , o limite de controle LC e o ARL conforme descrito na Tabela 2.

Assim, dos 74663 valores de ARL obtidos, seleciona-se o conjunto de valores v cujo ARL_0^* atende (4.4). O gráfico da Figura 7 apresenta a distribuição do ARL_1 pelos respectivos valores de $v = (L, a)$.

Figura 7: Valores de ARL_1 para o gráfico G_{S^2} .

Por fim, selecionam-se os vetores v com o menor $ARL_1 = 81.25$. Os valores ótimos para o gráfico são: limite discriminante inferior $L = -1.545$ e constante a no intervalo $(1.145, 1.33)$. Assim, combinando o valor de L com o valores de a , obtém-se 38 resultados possíveis dentro do grid estabelecido. Para $a = 1.33$, por exemplo, tem-se que o gráfico sinaliza uma mudança de magnitude $\delta^2 = 1.2^2$ na variância após, aproximadamente 81 amostras, com $ARL_0^* = 369$. Mantidos os mesmos valores de n , δ^2 e ARL_0^* , o gráfico S_2 apresenta melhor desempenho ($ARL_1^{S^2} = 67$).

Tabela 4: Valores do gráfico G_{S^2} para $n = 5$ e $\delta^2 = 1.2^2$ (Grid)

L	a	g	ARL_1	ARL_0^*
-1.545	1.33	0.4877	81.25	368.633

Este procedimento deveria ser repetido, aumentando-se a precisão e reduzindo-se os limites do intervalo, de modo a encontrar o ARL_1 mínimo dentro das restrições estabelecidas.

A busca por grid exige grande esforço computacional, que aumenta à medida que o tamanho da amostra cresce e o do intervalo diminui. A inclusão de mais parâmetros e restrições aumenta este esforço substancialmente.

Como alternativa para a determinação da solução ótima, utilizou-se a metodologia com procedimento de busca baseado em algoritmos genéticos na forma NSGA-II. O

procedimento utilizado é o implementado no pacote *mco* do R, desenvolvido por [Mersmann \(2014\)](#). Neste procedimento são controlados o tamanho da população e o número de gerações.

A rotina de otimização utilizada para a obtenção dos parâmetros através da metodologia de Algoritmos Genéticos NSGA-II está no Anexo [A](#).

Os valores ótimos dos parâmetros do gráfico G_{s^2} , para tamanhos de amostra n variando de 5 a 25 e mudanças na variância de magnitude $\delta^2 = (1.1^2, 1.2^2, 1.5^2, 2^2)$, obtidos para os quatro casos, estão nas Tabelas [6 - 9](#).

Ao aplicar otimização por NSGA-II para o exemplo considerado na busca por grid: amostra de tamanho $n = 5$ e mudança na variância $\delta^2 = 1.2^2$, obtém-se os seguintes valores para os parâmetros:

Tabela 5: Valores do gráfico G_{s^2} para $n = 5$ e $\delta^2 = 1.2^2$ (NSGA-II)

L	a	g	ARL_1	ARL_0^*
-1.831	1.00	0.2297	59.709	368.513

O desempenho obtido em termos de ARL_1 utilizando o procedimento NSGA-II é melhor que o obtido na busca por grid, como já esperado, reduzindo o valor de 81.25 para 59.709.

Para o procedimento NSGA-II foram considerados uma população de tamanho 500 e 150 gerações. Os limites utilizados são os da Tabela [3](#) para o Caso 1.

O vetor de parâmetros ótimos selecionado é aquele com menor ARL_1 cujo ARL_0^* atende [\(4.4\)](#).

Tabela 6: Parâmetros do gráfico de controle G_{S^2} – Caso 1

N	δ	L	a	g	N	δ	L	a	g	N	δ	L	a	g
5	1.1	-1.8315	1.0202	0.2336	12	1.1	-1.9373	1.0522	0.3161	19	1.1	-1.9306	1.0378	0.4248
5	1.2	-1.8317	1.0055	0.2297	12	1.2	-1.9372	1.0260	0.3112	19	1.2	-1.9305	1.0760	0.4354
5	1.5	-1.8315	1.0334	0.2364	12	1.5	-1.9372	1.0035	0.3055	19	1.5	-1.9305	1.0250	0.4230
5	2	-1.8316	1.0053	0.2300	12	2	-1.9371	1.0504	0.3176	19	2	-1.9305	1.0419	0.4269
6	1.1	-1.9308	1.0335	0.2081	13	1.1	-1.9757	1.1121	0.3152	20	1.1	-1.9547	1.0029	0.4054
6	1.2	-1.9305	1.1622	0.2328	13	1.2	-1.9755	1.0100	0.2931	20	1.2	-1.9547	1.1060	0.4285
6	1.5	-1.9307	1.0064	0.2038	13	1.5	-1.9755	1.0023	0.2913	20	1.5	-1.9547	1.0058	0.4063
6	2	-1.9305	1.1129	0.2240	13	2	-1.9756	1.0599	0.3038	20	2	-1.9546	1.0528	0.4173
7	1.1	-1.9895	1.0101	0.2742	14	1.1	-1.7787	1.0503	0.5113	21	1.1	-1.9773	1.0378	0.4013
7	1.2	-1.9897	1.0073	0.2749	14	1.2	-1.7788	1.0507	0.5100	21	1.2	-1.9774	1.0090	0.3934
7	1.5	-1.9898	1.1030	0.2485	14	1.5	-1.7787	1.0002	0.4967	21	1.5	-1.9773	1.0507	0.4036
7	2	-1.9895	1.1203	0.2439	14	2	-1.7787	1.0572	0.5142	21	2	-1.9773	1.0346	0.4007
8	1.1	-1.7245	1.0775	0.4111	15	1.1	-1.8143	1.0395	0.4904	22	1.1	-1.8294	1.0157	0.6057
8	1.2	-1.7244	1.0796	0.4123	15	1.2	-1.8144	1.0161	0.4822	22	1.2	-1.8293	1.0499	0.6125
8	1.5	-1.7245	1.0466	0.4017	15	1.5	-1.8143	1.0945	0.5048	22	1.5	-1.8293	1.0014	0.6080
8	2	-1.7244	1.0061	0.3899	15	2	-1.8144	1.0317	0.4866	22	2	-1.8293	1.0032	0.6074
9	1.1	-1.7901	1.0631	0.3795	16	1.1	-1.8471	1.0208	0.4636	23	1.1	-1.8512	1.0906	0.5994
9	1.2	-1.7899	1.0176	0.3685	16	1.2	-1.8469	1.1031	0.4888	23	1.2	-1.8512	1.0761	0.5982
9	1.5	-1.7900	1.0166	0.3670	16	1.5	-1.8469	1.0427	0.4731	23	1.5	-1.8512	1.0323	0.5929
9	2	-1.7899	1.0418	0.3756	16	2	-1.8470	1.0151	0.4651	23	2	-1.8512	1.0658	0.5967
10	1.1	-1.8457	1.0201	0.3472	17	1.1	-1.8771	1.0878	0.4664	24	1.1	-1.8718	1.0537	0.5805
10	1.2	-1.8457	1.1038	0.3688	17	1.2	-1.8770	1.1069	0.4727	24	1.2	-1.8719	1.0513	0.5796
10	1.5	-1.8457	1.0384	0.3518	17	1.5	-1.8770	1.0447	0.4567	24	1.5	-1.8718	1.0381	0.5804
10	2	-1.8458	1.0049	0.3411	17	2	-1.8770	1.0873	0.4677	24	2	-1.8718	1.0345	0.5818
11	1.1	-1.8942	1.0787	0.3420	18	1.1	-1.9049	1.0878	0.4509	25	1.1	-1.8914	1.0645	0.5689
11	1.2	-1.8942	1.1246	0.3534	18	1.2	-1.9048	1.0017	0.4296	25	1.2	-1.8914	1.0513	0.5675
11	1.5	-1.8942	1.1376	0.3567	18	1.5	-1.9047	1.0525	0.4437	25	1.5	-1.8914	1.0525	0.5688
11	2	-1.8942	1.0738	0.3408	18	2	-1.9047	1.0869	0.4520	25	2	-1.8913	1.0500	0.5692

Tabela 7: Parâmetros do gráfico de controle G_{S^2} – Caso 2

N	δ	L	a	t	g	N	δ	L	a	t	g	N	δ	L	a	t	g
5	1.1	-1.8315	1.1540	0.1330	0.2770	12	1.1	-1.9372	1.0970	0.0350	0.3290	19	1.1	-1.9308	1.0900	0.1530	0.7550
5	1.2	-1.8315	1.1260	0.1550	0.3010	12	1.2	-1.9372	1.0320	0.0900	0.3880	19	1.2	-1.9305	1.1850	0.1830	0.8780
5	1.5	-1.8320	1.1980	0.0380	0.2620	12	1.5	-1.9371	1.0010	0.1100	0.4360	19	1.5	-1.9305	1.1260	0.0820	0.5190
5	2	-1.8316	1.0160	0.0850	0.2650	12	2	-1.9371	1.1710	0.0690	0.3660	19	2	-1.9305	1.0390	0.0660	0.4860
6	1.1	-1.9305	1.2340	0.0670	0.2470	13	1.1	-1.9757	1.1850	0.0690	0.3570	20	1.1	-1.9548	1.1600	0.1440	0.7090
6	1.2	-1.9307	1.2750	0.2390	0.4120	13	1.2	-1.9756	1.1320	0.0600	0.3390	20	1.2	-1.9547	1.0710	0.1510	0.7660
6	1.5	-1.9306	1.0020	0.0280	0.2110	13	1.5	-1.9756	1.0510	0.1220	0.4460	20	1.5	-1.9547	1.0000	0.0870	0.5380
6	2	-1.9304	1.0220	0.1430	0.3040	13	2	-1.9756	1.1650	0.1590	0.5240	20	2	-1.9547	1.1390	0.0590	0.4710
7	1.1	-1.9897	1.0560	0.0030	0.2620	14	1.1	-1.7788	1.1110	0.1410	0.6830	21	1.1	-1.9776	1.2440	0.2560	1.4250
7	1.2	-1.9895	1.0170	0.0730	0.2820	14	1.2	-1.7787	1.0270	0.0780	0.5700	21	1.2	-1.9774	1.1340	0.1180	0.6130
7	1.5	-1.9896	1.1890	0.1150	0.3020	14	1.5	-1.7787	1.0160	0.0910	0.5970	21	1.5	-1.9773	1.0690	0.0270	0.4130
7	2	-1.9895	1.1770	0.0860	0.2770	14	2	-1.7787	1.0740	0.0780	0.5550	21	2	-1.9773	1.0010	0.0240	0.4080
8	1.1	-1.7245	1.2570	0.2470	0.6490	15	1.1	-1.8146	1.0060	0.0120	0.4730	22	1.1	-1.8295	1.1440	0.0720	0.6840
8	1.2	-1.7247	1.1930	0.1050	0.4500	15	1.2	-1.8146	1.0230	0.0780	0.5530	22	1.2	-1.8294	1.1070	0.1270	0.8530
8	1.5	-1.7246	1.1500	0.0560	0.4240	15	1.5	-1.8143	1.0730	0.1000	0.5870	22	1.5	-1.8293	1.0890	0.0450	0.6400
8	2	-1.7245	1.0380	0.0030	0.3980	15	2	-1.8143	1.0290	0.0050	0.4870	22	2	-1.8293	1.0200	0.0320	0.6240
9	1.1	-1.7901	1.0410	0.1350	0.4930	16	1.1	-1.8470	1.0790	0.0360	0.4840	23	1.1	-1.8512	1.2410	0.1770	1.0890
9	1.2	-1.7902	1.1660	0.2020	0.5930	16	1.2	-1.8472	1.0700	0.0500	0.4840	23	1.2	-1.8512	1.3120	0.2730	1.7810
9	1.5	-1.7900	1.0030	0.0800	0.4230	16	1.5	-1.8469	1.1020	0.0520	0.5020	23	1.5	-1.8512	1.2220	0.1390	0.9000
9	2	-1.7899	1.0830	0.0320	0.3820	16	2	-1.8470	1.0150	0.0620	0.5180	23	2	-1.8512	1.0050	0.0500	0.6360
10	1.1	-1.8457	1.2210	0.1300	0.4640	17	1.1	-1.8769	1.0930	0.0470	0.4830	24	1.1	-1.8718	1.1940	0.1150	0.8040
10	1.2	-1.8457	1.2160	0.1690	0.5240	17	1.2	-1.8769	1.1970	0.1950	0.8930	24	1.2	-1.8718	1.1980	0.1840	1.1510
10	1.5	-1.8457	1.0830	0.0080	0.3610	17	1.5	-1.8770	1.1910	0.1170	0.6170	24	1.5	-1.8718	1.0960	0.0090	0.5860
10	2	-1.8457	1.1130	0.1670	0.5340	17	2	-1.8769	1.1620	0.1510	0.7130	24	2	-1.8718	1.1050	0.0800	0.6880
11	1.1	-1.8943	1.1910	0.1500	0.4910	18	1.1	-1.9047	1.0990	0.0000	0.4550	25	1.1	-1.8916	1.1260	0.0830	0.6800
11	1.2	-1.8944	1.0740	0.0660	0.3530	18	1.2	-1.9047	1.0780	0.0010	0.4490	25	1.2	-1.8914	1.0710	0.0320	0.5860
11	1.5	-1.8942	1.1790	0.1020	0.4130	18	1.5	-1.9047	1.0970	0.0220	0.4540	25	1.5	-1.8914	1.0410	0.0540	0.6180
11	2	-1.8942	1.0250	0.0290	0.3300	18	2	-1.9047	1.0590	0.1080	0.5950	25	2	-1.8914	1.0010	0.0670	0.6520

Tabela 8: Parâmetros do gráfico de controle G_{S^2} – Caso 3

N	δ	L	U	a	g	N	δ	L	U	a	g	N	δ	L	U	a	g
5	1.1	-1.8293	1.8339	1.0201	0.2322	12	1.1	-1.9469	1.9280	1.0536	0.3231	19	1.1	-1.9119	1.9499	1.1465	0.4436
5	1.2	-1.8167	1.8469	1.1583	0.2538	12	1.2	-1.9303	1.9443	1.1301	0.3318	19	1.2	-1.9349	1.9262	1.0788	0.4391
5	1.5	-1.8160	1.8477	1.0009	0.2371	12	1.5	-1.9366	1.9378	1.0389	0.3137	19	1.5	-1.9316	1.9295	1.0972	0.4409
5	2	-1.8428	1.8204	1.0006	0.2356	12	2	-1.9396	1.9347	1.0290	0.3139	19	2	-1.9329	1.9281	1.1036	0.4433
6	1.1	-1.9226	1.9390	1.1164	0.2200	13	1.1	-1.9680	1.9835	1.0414	0.2941	20	1.1	-1.9375	1.9724	1.1054	0.4212
6	1.2	-1.9338	1.9271	1.1133	0.2256	13	1.2	-1.9788	1.9724	1.0328	0.3000	20	1.2	-1.9463	1.9632	1.0126	0.4085
6	1.5	-1.9210	1.9407	1.0204	0.2030	13	1.5	-1.9840	1.9672	1.0661	0.3112	20	1.5	-1.9544	1.9549	1.0251	0.4105
6	2	-1.9300	1.9308	1.1761	0.2350	13	2	-1.9805	1.9708	1.0640	0.3079	20	2	-1.9553	1.9540	1.0963	0.4269
7	1.1	-1.9900	1.9891	1.2437	0.2301	14	1.1	-1.7815	1.7763	1.0867	0.5232	21	1.1	-1.9833	1.9716	1.0584	0.4090
7	1.2	-1.9895	1.9900	1.3100	0.2417	14	1.2	-1.7797	1.7778	1.1046	0.5281	21	1.2	-1.9782	1.9767	1.0754	0.4082
7	1.5	-1.9896	1.9897	1.2842	0.2372	14	1.5	-1.7903	1.7674	1.0035	0.5088	21	1.5	-1.9760	1.9786	1.0571	0.4049
7	2	-1.9894	1.9897	1.2672	0.2341	14	2	-1.7801	1.7772	1.0683	0.5186	21	2	-1.9793	1.9753	1.0003	0.3951
8	1.1	-1.7098	1.7396	1.0100	0.3960	15	1.1	-1.8165	1.8125	1.0009	0.4757	22	1.1	-1.8204	1.8384	1.0235	0.6004
8	1.2	-1.7002	1.7498	1.1148	0.4060	15	1.2	-1.8073	1.8217	1.0175	0.4744	22	1.2	-1.8201	1.8388	1.0599	0.6051
8	1.5	-1.7280	1.7209	1.0867	0.4173	15	1.5	-1.8188	1.8100	1.0179	0.4862	22	1.5	-1.8193	1.8396	1.0758	0.6089
8	2	-1.7242	1.7246	1.0937	0.4166	15	2	-1.8037	1.8253	1.1155	0.5034	22	2	-1.9700	1.9900	1.0298	0.4672
9	1.1	-1.7750	1.8051	1.0832	0.3774	16	1.1	-1.8270	1.8678	1.1274	0.4837	23	1.1	-1.8411	1.8614	1.0158	0.6011
9	1.2	-1.7761	1.8045	1.0839	0.3760	16	1.2	-1.8515	1.8426	1.0384	0.4737	23	1.2	-1.8428	1.8597	1.0771	0.5958
9	1.5	-1.7909	1.7892	1.0538	0.3774	16	1.5	-1.8490	1.8450	1.0180	0.4669	23	1.5	-1.8574	1.8451	1.0768	0.6007
9	2	-1.7977	1.7825	1.0418	0.3791	16	2	-1.8433	1.8506	1.0596	0.4755	23	2	-1.8522	1.8502	1.0549	0.5962
10	1.1	-1.8362	1.8553	1.0501	0.3491	17	1.1	-1.8564	1.8982	1.1075	0.4625	24	1.1	-1.8719	1.8719	1.0785	0.5830
10	1.2	-1.8399	1.8514	1.1409	0.3749	17	1.2	-1.8838	1.8703	1.0090	0.4518	24	1.2	-1.8599	1.8841	1.0892	0.5805
10	1.5	-1.8348	1.8568	1.1589	0.3764	17	1.5	-1.8793	1.8746	1.0618	0.4633	24	1.5	-1.8643	1.8794	1.0550	0.5779
10	2	-1.8471	1.8442	1.1101	0.3717	17	2	-1.8744	1.8794	1.0860	0.4659	24	2	-1.8714	1.8723	1.0078	0.5749
11	1.1	-1.8745	1.9147	1.0813	0.3323	18	1.1	-1.8995	1.9100	1.0005	0.4352	25	1.1	-1.8839	1.8989	1.0968	0.5703
11	1.2	-1.9139	1.8754	1.0766	0.3563	18	1.2	-1.8975	1.9120	1.1215	0.4564	25	1.2	-1.8828	1.9001	1.0534	0.5637
11	1.5	-1.8899	1.8986	1.1348	0.3532	18	1.5	-1.8997	1.9097	1.0948	0.4510	25	1.5	-1.8943	1.8886	1.0651	0.5693
11	2	-1.8906	1.8979	1.0430	0.3307	18	2	-1.9058	1.9037	1.1037	0.4569	25	2	-1.8898	1.8930	1.0773	0.5700

Tabela 9: Parâmetros do gráfico de controle G_{S^2} – Caso 4

N	δ	L	U	a	t	g	N	δ	L	U	a	t	g
5	1.1	-1.8371	1.8263	1.2735	0.1186	0.2915	16	1.1	-1.8428	1.8513	1.0910	0.0293	0.4823
5	1.2	-1.8215	1.8421	1.1370	0.0739	0.2503	16	1.2	-1.8422	1.8519	1.0904	0.1508	0.7301
5	1.5	-1.8111	1.8527	1.1929	0.0175	0.2587	16	1.5	-1.8463	1.8478	1.0629	0.0918	0.5606
5	2	-1.8118	1.8523	1.0925	0.0817	0.2501	16	2	-1.8447	1.8492	1.0720	0.0027	0.4785
6	1.1	-1.9101	1.9524	1.1263	0.2043	0.3773	17	1.1	-1.8610	1.8936	1.0860	0.0353	0.4610
6	1.2	-1.9493	1.9128	1.2527	0.2282	0.3963	17	1.2	-1.8861	1.8682	1.1666	0.2026	0.9359
6	1.5	-1.9534	1.9088	1.0577	0.1424	0.2883	17	1.5	-1.8661	1.8880	1.1719	0.0643	0.5128
6	2	-1.9256	1.9358	1.0168	0.1201	0.2784	17	2	-1.8734	1.8804	1.0189	0.0081	0.4484
7	1.1	-1.9891	1.9899	1.1526	0.1480	0.3547	18	1.1	-1.9092	1.9003	1.1184	0.0518	0.4803
7	1.2	-1.9887	1.9900	1.3598	0.0882	0.2663	18	1.2	-1.9076	1.9021	1.0204	0.0355	0.4466
7	1.5	-1.9898	1.9895	1.2610	0.1502	0.3228	18	1.5	-1.9045	1.9049	1.0083	0.0463	0.4689
7	2	-1.9890	1.9900	1.2739	0.1952	0.3882	18	2	-1.9036	1.9058	1.1627	0.0649	0.5045
8	1.1	-1.7289	1.7200	1.0326	0.0497	0.4050	19	1.1	-1.9114	1.9507	1.1060	0.0328	0.4367
8	1.2	-1.7301	1.7192	1.0383	0.1179	0.4774	19	1.2	-1.8943	1.9695	1.1573	0.0464	0.4542
8	1.5	-1.7228	1.7263	1.1014	0.0559	0.4089	19	1.5	-1.9294	1.9317	1.2280	0.1770	0.8532
8	2	-1.7131	1.7360	1.0374	0.0331	0.3982	19	2	-1.9308	1.9302	1.2024	0.2050	0.9958
9	1.1	-1.7932	1.7870	1.0418	0.1143	0.4565	20	1.1	-1.9261	1.9852	1.1483	0.0562	0.4550
9	1.2	-1.7752	1.8055	1.1812	0.0496	0.4026	20	1.2	-1.9458	1.9636	1.1719	0.0970	0.5535
9	1.5	-1.7806	1.7995	1.0526	0.0157	0.3695	20	1.5	-1.9498	1.9595	1.0974	0.1124	0.5983
9	2	-1.7948	1.7854	1.1018	0.0689	0.3931	20	2	-1.9575	1.9519	1.1016	0.0195	0.4291
10	1.1	-1.8756	1.8177	1.0013	0.0555	0.3637	21	1.1	-1.9876	1.9673	1.1931	0.1866	0.9437
10	1.2	-1.8349	1.8570	1.0144	0.0872	0.4153	21	1.2	-1.9793	1.9756	1.0096	0.0795	0.5078
10	1.5	-1.8425	1.8489	1.1810	0.1350	0.4608	21	1.5	-1.9768	1.9779	1.1629	0.0939	0.5435
10	2	-1.8423	1.8494	1.1163	0.0293	0.3660	21	2	-1.9770	1.9777	1.0010	0.0718	0.4915
11	1.1	-1.8778	1.9113	1.0909	0.0289	0.3360	22	1.1	-1.8186	1.8406	1.0062	0.0288	0.6162
11	1.2	-1.8862	1.9026	1.0009	0.0261	0.3361	22	1.2	-1.8207	1.8383	1.0831	0.1185	0.8239
11	1.5	-1.8985	1.8900	1.0207	0.0083	0.3278	22	1.5	-1.8291	1.8295	1.0065	0.0491	0.6490
11	2	-1.8880	1.9006	1.0843	0.0028	0.3398	22	2	-1.9700	1.9900	1.1554	0.0806	0.5503
12	1.1	-1.9245	1.9504	1.0823	0.0186	0.3171	23	1.1	-1.8426	1.8600	1.2346	0.1830	1.1208
12	1.2	-1.9170	1.9582	1.0670	0.0471	0.3264	23	1.2	-1.8562	1.8462	1.0801	0.0219	0.6038
12	1.5	-1.9342	1.9401	1.2033	0.1614	0.5254	23	1.5	-1.8498	1.8526	1.1147	0.0812	0.6969
12	2	-1.9349	1.9394	1.2202	0.1119	0.4286	23	2	-1.8516	1.8508	1.1446	0.1308	0.8608
13	1.1	-1.9697	1.9819	1.1794	0.0965	0.3893	24	1.1	-1.8903	1.8539	1.0411	0.0483	0.6297
13	1.2	-1.9620	1.9899	1.1267	0.1545	0.5221	24	1.2	-1.8726	1.8711	1.0796	0.0414	0.6069
13	1.5	-1.9772	1.9741	1.0014	0.0033	0.2900	24	1.5	-1.8703	1.8733	1.1412	0.1403	0.9157
13	2	-1.9714	1.9798	1.0994	0.1122	0.4112	24	2	-1.8717	1.8719	1.0059	0.0469	0.6196
14	1.1	-1.7845	1.7732	1.0825	0.0974	0.5808	25	1.1	-1.8855	1.8948	1.1107	0.0443	0.6258
14	1.2	-1.7781	1.7794	1.1390	0.1913	0.8423	25	1.2	-1.8860	1.8968	1.1284	0.1583	1.0235
14	1.5	-1.7798	1.7777	1.0368	0.0750	0.5610	25	1.5	-1.8938	1.8890	1.2198	0.1583	1.0146
14	2	-1.7676	1.7904	1.1711	0.1665	0.7425	25	2	-1.8888	1.8939	1.1477	0.1589	1.0239
15	1.1	-1.8060	1.8230	1.2092	0.2221	0.9696							
15	1.2	-1.8078	1.8214	1.1507	0.1483	0.6924							
15	1.5	-1.8078	1.8212	1.1614	0.0957	0.5748							
15	2	-1.8167	1.8121	1.1535	0.1941	0.8629							

Os valores de ARL_1 obtidos estão na Tabela 10. Observa-se que os quatro casos apresentam desempenhos semelhantes. Como a inclusão de parâmetros exige maior esforço computacional, o uso de limites discriminantes simétricos com $t = 0$ (Caso 1) é a melhor opção, na prática.

Para verificar os resultados, realizou-se a simulação de 5000 amostras com os valores ótimos e obteve-se os valores do ARL_0 e ARL_1 simulados, $ARL_0^{(sim)}$ e $ARL_1^{(sim)}$ respectivamente. Os valores simulados para o Caso 1 estão na Tabela 11. Observa-se que estes valores são próximos aos obtidos com os parâmetros ótimos. As simulações para os demais casos estão no Anexo B.

Comparando-se o desempenho do gráfico G_{S^2} para o Caso 1 com o gráfico de controle S^2 , o gráfico mais comum para monitorar a variabilidade do processo por variáveis, verifica-se que o desempenho do G_{S^2} é inferior ao S^2 para o mesmo tamanho de amostra, ou seja, quando $n_{G_{S^2}} = n_{S^2}$ tem-se $ARL_1^{G_{S^2}} < ARL_1^{S^2}$ (Tabela 12). Por exemplo, para uma mudança na variância de magnitude $\delta^2 = 2^2$ o gráfico proposto apresenta desempenho semelhante ao S^2 com tamanhos de amostras maior que 25. As comparações do desempenho do gráfico G_{S^2} com o S^2 nos casos 2, 3 e 4 estão no Anexo C.

Ressalta-se que o desempenho do gráfico de controle S^2 foi calculado segundo os valores de ARL sob controle obtidos do gráfico G_{S^2} , ou seja, segundo o ARL_0^* . A Tabela 13 apresenta os valores de ARL_0^* obtidos do gráfico G_{S^2} para os quatro casos.

Tabela 10: Valores de ARL_1 para os Casos 1 – 4

N	δ	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	N	δ	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	N	δ	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
5	1.1	131.541	131.538	131.577	131.690	12	1.1	90.084	89.978	90.114	90.051	19	1.1	70.640	70.779	70.663	70.730
5	1.2	59.709	59.675	59.702	59.734	12	1.2	31.726	31.728	31.737	31.745	19	1.2	21.568	21.565	21.570	21.625
5	1.5	13.107	13.129	13.117	13.115	12	1.5	5.094	5.092	5.094	5.093	19	1.5	3.136	3.135	3.136	3.136
5	2	3.991	3.992	3.991	3.994	12	2	1.652	1.652	1.652	1.652	19	2	1.227	1.227	1.227	1.227
6	1.1	120.796	120.617	120.773	120.871	13	1.1	86.237	86.257	86.255	86.280	20	1.1	68.431	68.489	68.448	68.593
6	1.2	51.477	51.541	51.484	51.562	13	1.2	29.555	29.557	29.559	29.598	20	1.2	20.537	20.535	20.536	20.530
6	1.5	10.362	10.360	10.367	10.369	13	1.5	4.625	4.626	4.625	4.626	20	1.5	2.959	2.959	2.959	2.959
6	2	3.108	3.108	3.108	3.109	13	2	1.540	1.540	1.540	1.540	20	2	1.194	1.194	1.194	1.194
7	1.1	114.444	114.523	114.418	114.464	14	1.1	85.360	85.431	85.445	85.450	21	1.1	66.427	66.592	66.471	66.455
7	1.2	47.179	47.131	47.192	47.120	14	1.2	29.212	29.203	29.205	29.206	21	1.2	19.601	19.601	19.613	19.609
7	1.5	9.049	9.044	9.044	9.044	14	1.5	4.592	4.592	4.593	4.592	21	1.5	2.804	2.804	2.804	2.804
7	2	2.720	2.720	2.720	2.720	14	2	1.541	1.541	1.541	1.542	21	2	1.166	1.166	1.166	1.166
8	1.1	112.845	112.810	112.858	112.782	15	1.1	81.705	81.877	81.804	81.785	22	1.1	65.240	65.308	65.251	65.329
8	1.2	46.073	46.144	46.133	46.118	15	1.2	27.232	27.269	27.247	27.264	22	1.2	19.122	19.129	19.136	19.144
8	1.5	8.756	8.760	8.754	8.758	15	1.5	4.190	4.189	4.190	4.192	22	1.5	2.756	2.756	2.757	2.756
8	2	2.635	2.635	2.635	2.635	15	2	1.449	1.449	1.449	1.449	22	2	1.162	1.162	1.162	1.162
9	1.1	105.575	105.612	105.456	105.568	16	1.1	78.564	78.528	78.580	78.542	23	1.1	63.299	63.273	63.277	63.331
9	1.2	41.199	41.266	41.255	41.270	16	1.2	25.523	25.561	25.538	25.536	23	1.2	18.247	18.250	18.248	18.253
9	1.5	7.407	7.408	7.409	7.408	16	1.5	3.857	3.857	3.857	3.858	23	1.5	2.617	2.617	2.617	2.617
9	2	2.254	2.254	2.255	2.255	16	2	1.375	1.375	1.375	1.375	23	2	1.138	1.138	1.138	1.138
10	1.1	99.409	99.421	99.416	99.629	17	1.1	75.714	75.579	75.642	75.706	24	1.1	61.495	61.463	61.519	61.492
10	1.2	37.380	37.381	37.372	37.419	17	1.2	24.048	24.036	24.051	24.061	24	1.2	17.457	17.452	17.462	17.455
10	1.5	6.422	6.421	6.423	6.421	17	1.5	3.577	3.578	3.577	3.578	24	1.5	2.494	2.494	2.494	2.494
10	2	1.990	1.989	1.989	1.990	17	2	1.316	1.316	1.316	1.316	24	2	1.118	1.118	1.118	1.118
11	1.1	94.340	94.352	94.369	94.397	18	1.1	73.091	72.979	72.991	73.014	25	1.1	59.806	59.900	59.798	59.901
11	1.2	34.279	34.303	34.321	34.303	18	1.2	22.739	22.735	22.733	22.747	25	1.2	16.726	16.722	16.729	16.724
11	1.5	5.676	5.676	5.676	5.676	18	1.5	3.340	3.340	3.340	3.340	25	1.5	2.384	2.384	2.385	2.385
11	2	1.797	1.797	1.797	1.797	18	2	1.268	1.267	1.268	1.267	25	2	1.101	1.101	1.101	1.101

Tabela 11: Valores de ARL simulados para os parâmetros ótimos do gráfico G_{S^2} – Caso 1

N	δ	$ARL_1^{(sim)}$	$ARL_0^{(sim)}$	N	δ	$ARL_1^{(sim)}$	$ARL_0^{(sim)}$	N	δ	$ARL_1^{(sim)}$	$ARL_0^{(sim)}$
5	1.1	129.535	378.160	12	1.1	91.090	368.393	19	1.1	70.928	365.093
5	1.2	59.264	365.511	12	1.2	32.045	368.427	19	1.2	21.690	371.404
5	1.5	12.749	363.656	12	1.5	5.073	358.129	19	1.5	3.180	369.808
5	2	3.995	359.252	12	2	1.678	373.495	19	2	1.218	362.152
6	1.1	123.255	371.645	13	1.1	86.722	371.547	20	1.1	67.332	364.609
6	1.2	51.425	365.053	13	1.2	30.019	372.836	20	1.2	20.965	367.762
6	1.5	10.653	368.575	13	1.5	4.635	368.388	20	1.5	2.937	371.621
6	2	3.100	359.075	13	2	1.548	379.848	20	2	1.183	365.700
7	1.1	115.973	368.464	14	1.1	87.032	370.199	21	1.1	66.506	367.249
7	1.2	47.021	361.711	14	1.2	29.144	378.547	21	1.2	19.387	360.493
7	1.5	9.014	370.943	14	1.5	4.640	358.089	21	1.5	2.866	377.225
7	2	2.792	360.808	14	2	1.548	363.617	21	2	1.174	361.612
8	1.1	112.343	370.580	15	1.1	81.554	375.560	22	1.1	65.019	368.802
8	1.2	45.016	386.196	15	1.2	27.224	356.823	22	1.2	19.501	366.886
8	1.5	8.691	363.442	15	1.5	4.092	378.148	22	1.5	2.759	370.124
8	2	2.652	371.103	15	2	1.457	367.216	22	2	1.151	362.985
9	1.1	104.283	369.229	16	1.1	80.982	371.903	23	1.1	63.156	369.569
9	1.2	40.821	369.741	16	1.2	25.600	363.141	23	1.2	17.847	364.487
9	1.5	7.388	363.051	16	1.5	3.879	362.275	23	1.5	2.643	369.185
9	2	2.238	365.463	16	2	1.362	371.272	23	2	1.132	371.034
10	1.1	100.831	375.046	17	1.1	76.024	382.865	24	1.1	61.793	370.082
10	1.2	36.403	367.674	17	1.2	23.860	360.851	24	1.2	17.366	367.095
10	1.5	6.414	370.319	17	1.5	3.551	369.440	24	1.5	2.489	357.306
10	2	2.001	374.196	17	2	1.320	370.099	24	2	1.127	361.943
11	1.1	93.124	372.748	18	1.1	73.660	362.311	25	1.1	58.929	364.004
11	1.2	34.304	366.482	18	1.2	22.858	375.059	25	1.2	17.004	362.175
11	1.5	5.622	364.455	18	1.5	3.380	372.544	25	1.5	2.400	367.915
11	2	1.823	361.715	18	2	1.263	373.789	25	2	1.099	364.584

Tabela 12: Desempenho dos gráficos de controle G_{S^2} e S^2 – Caso 1

N	δ	$ARL_1^{G_{S^2}}$	$ARL_1^{S^2}$	N	δ	$ARL_1^{G_{S^2}}$	$ARL_1^{S^2}$	N	δ	$ARL_1^{G_{S^2}}$	$ARL_1^{S^2}$
5	1.1	131.541	106.407	12	1.1	90.084	67.791	19	1.1	70.640	50.203
5	1.2	59.709	42.347	12	1.2	31.726	20.698	19	1.2	21.568	13.247
5	1.5	13.107	8.008	12	1.5	5.094	3.167	19	1.5	3.136	2.018
5	2	3.991	2.513	12	2	1.652	1.267	19	2	1.227	1.065
6	1.1	120.796	98.029	13	1.1	86.237	64.546	20	1.1	68.431	48.374
6	1.2	51.477	36.929	13	1.2	29.555	19.215	20	1.2	20.537	12.568
6	1.5	10.362	6.599	13	1.5	4.625	2.917	20	1.5	2.959	1.926
6	2	3.108	2.112	13	2	1.540	1.217	20	2	1.194	1.054
7	1.1	114.444	90.869	14	1.1	85.360	61.596	21	1.1	66.427	46.683
7	1.2	47.179	32.795	14	1.2	29.212	17.930	21	1.2	19.601	11.944
7	1.5	9.049	5.600	14	1.5	4.592	2.707	21	1.5	2.804	1.846
7	2	2.720	1.844	14	2	1.541	1.177	21	2	1.166	1.044
8	1.1	112.845	84.928	15	1.1	81.705	58.906	22	1.1	65.240	45.117
8	1.2	46.073	29.416	15	1.2	27.232	16.775	22	1.2	19.122	11.369
8	1.5	8.756	4.854	15	1.5	4.190	2.527	22	1.5	2.756	1.773
8	2	2.635	1.655	15	2	1.449	1.145	22	2	1.162	1.036
9	1.1	105.575	79.837	16	1.1	78.564	56.514	23	1.1	63.299	43.637
9	1.2	41.199	26.661	16	1.2	25.523	15.745	23	1.2	18.247	10.846
9	1.5	7.407	4.283	16	1.5	3.857	2.372	23	1.5	2.617	1.709
9	2	2.254	1.516	16	2	1.375	1.119	23	2	1.138	1.030
10	1.1	99.409	75.247	17	1.1	75.714	54.286	24	1.1	61.495	42.240
10	1.2	37.380	24.357	17	1.2	24.048	14.832	24	1.2	17.457	10.365
10	1.5	6.422	3.830	17	1.5	3.577	2.238	24	1.5	2.494	1.650
10	2	1.990	1.412	17	2	1.316	1.097	24	2	1.118	1.024
11	1.1	94.340	71.276	18	1.1	73.091	52.192	25	1.1	59.806	40.915
11	1.2	34.279	22.388	18	1.2	22.739	14.002	25	1.2	16.726	9.916
11	1.5	5.676	3.466	18	1.5	3.340	2.121	25	1.5	2.384	1.598
11	2	1.797	1.331	18	2	1.268	1.080	25	2	1.101	1.020

Tabela 13: Valores de ARL_0^* para o gráfico de controle G_{S^2}

N	δ	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	N	δ	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	N	δ	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
5	1.1	368.142	368.132	368.259	368.629	12	1.1	368.690	368.153	368.796	368.435	19	1.1	368.363	369.286	368.292	368.722
5	1.2	368.513	368.217	368.301	368.658	12	1.2	368.260	368.304	368.418	368.216	19	1.2	368.097	368.003	368.129	368.111
5	1.5	368.084	369.374	368.349	368.035	12	1.5	368.321	368.033	368.317	368.068	19	1.5	368.178	368.050	368.124	368.211
5	2	368.350	368.452	368.042	368.497	12	2	368.072	368.055	368.160	368.114	19	2	368.200	368.050	368.105	368.049
6	1.1	368.935	368.278	368.823	369.028	13	1.1	368.497	368.604	368.561	368.702	20	1.1	368.136	368.541	368.065	368.696
6	1.2	368.073	368.730	368.139	368.700	13	1.2	368.063	368.094	368.115	368.698	20	1.2	368.329	368.252	368.197	368.035
6	1.5	368.614	368.427	368.833	368.474	13	1.5	368.066	368.229	368.064	368.305	20	1.5	368.112	368.069	368.104	368.005
6	2	368.086	368.057	368.054	368.590	13	2	368.180	368.146	368.206	368.263	20	2	368.006	368.091	368.074	368.161
7	1.1	368.337	368.644	368.234	368.413	14	1.1	368.278	368.663	368.733	368.749	21	1.1	368.100	369.270	368.394	368.235
7	1.2	368.726	368.183	368.870	368.058	14	1.2	368.500	368.320	368.361	368.367	21	1.2	368.293	368.290	368.653	368.516
7	1.5	369.024	368.571	368.539	368.590	14	1.5	368.263	368.176	368.222	368.210	21	1.5	368.186	368.135	368.042	368.134
7	2	368.217	368.172	368.436	368.463	14	2	368.142	368.194	368.110	368.868	21	2	368.077	368.087	368.045	368.204
8	1.1	368.380	368.243	368.336	368.120	15	1.1	368.086	369.063	368.645	368.502	22	1.1	368.262	368.756	368.283	368.830
8	1.2	368.146	368.971	368.364	368.643	15	1.2	368.297	369.061	368.551	368.911	22	1.2	368.006	368.260	368.375	368.624
8	1.5	368.332	368.671	368.083	368.559	15	1.5	368.148	368.085	368.329	368.610	22	1.5	368.087	368.085	368.234	368.090
8	2	368.189	368.235	368.080	368.045	15	2	368.302	368.028	368.263	368.259	22	2	368.119	368.090	368.136	368.215
9	1.1	368.630	368.785	368.015	368.593	16	1.1	368.569	368.356	368.424	368.430	23	1.1	368.312	368.116	368.078	368.498
9	1.2	368.095	368.972	368.675	368.849	16	1.2	368.107	368.988	368.432	368.384	23	1.2	368.136	368.222	368.087	368.291
9	1.5	368.333	368.518	368.590	368.395	16	1.5	368.153	368.103	368.293	368.526	23	1.5	368.250	368.321	368.287	368.166
9	2	368.012	368.034	368.607	368.724	16	2	368.229	368.287	368.037	368.264	23	2	368.239	368.209	368.222	368.390
10	1.1	368.053	368.104	368.041	368.643	17	1.1	368.847	368.015	368.142	368.638	24	1.1	368.308	368.062	368.498	368.062
10	1.2	368.195	368.214	368.045	368.667	17	1.2	368.360	368.051	368.389	368.599	24	1.2	368.367	368.202	368.383	368.301
10	1.5	368.099	368.006	368.116	368.026	17	1.5	368.228	368.400	368.150	368.220	24	1.5	368.165	368.100	368.221	368.036
10	2	368.469	368.033	368.087	368.535	17	2	368.242	368.213	368.118	368.048	24	2	368.039	368.048	368.289	368.163
11	1.1	368.128	368.185	368.067	368.259	18	1.1	368.824	368.108	368.168	368.321	25	1.1	368.203	368.955	368.100	368.091
11	1.2	368.117	368.505	368.458	368.445	18	1.2	368.343	368.240	368.136	368.548	25	1.2	368.220	368.091	368.239	368.116
11	1.5	368.000	368.048	368.079	368.062	18	1.5	368.183	368.130	368.116	368.171	25	1.5	368.089	368.158	368.416	368.196
11	2	368.124	368.138	368.154	368.316	18	2	368.246	368.041	368.371	368.060	25	2	368.034	368.239	368.087	368.046

Então, a partir dos resultados obtidos, o gráfico de controle G_{S^2} a ser considerado é o do Caso 1: com limites discriminantes simétricos, $U = -L$, e parâmetro $a > 1$ constante.

Como os limites são simétricos, o monitoramento do processo é feito observando-se o comportamento das frequências nas caudas da distribuição de X .

Consideram-se apenas as quantidades de itens classificados no primeiro (n_1) e terceiro (n_3) grupos para determinar o valor da estatística g . A Tabela 14 apresenta os valores dos pesos relativos aos respectivos grupos de classificação (w_1p_1, w_3p_3) para o cálculo da estatística g conforme expresso em (3.3), o limite discriminante inferior (L) e o limite de controle (LC) do gráfico G_{S^2} para os dados normalizados.

Tabela 14: Gráfico de controle G_{52} : valores de $w_j p_j$, limite discriminante L e limite de controle LC

N	δ	L	LC	$w_1 p_1$	$w_3 p_3$	N	δ	L	LC	$w_1 p_1$	$w_3 p_3$	N	δ	L	LC	$w_1 p_1$	$w_3 p_3$
5	1.1	-1.8315	0.2336	0.1101	0.1147	12	1.1	-1.9373	0.3161	0.0937	0.1041	19	1.1	-1.9306	0.4248	0.0960	0.1035
5	1.2	-1.8317	0.2297	0.1118	0.1130	12	1.2	-1.9372	0.3112	0.0964	0.1015	19	1.2	-1.9305	0.4354	0.0922	0.1074
5	1.5	-1.8315	0.2364	0.1087	0.1162	12	1.5	-1.9372	0.3055	0.0986	0.0993	19	1.5	-1.9305	0.4230	0.0973	0.1023
5	2	-1.8316	0.2300	0.1118	0.1130	12	2	-1.9371	0.3176	0.0939	0.1039	19	2	-1.9305	0.4269	0.0956	0.1040
6	1.1	-1.9308	0.2081	0.0964	0.1031	13	1.1	-1.9757	0.3152	0.0835	0.1046	20	1.1	-1.9547	0.4054	0.0964	0.0970
6	1.2	-1.9305	0.2328	0.0836	0.1160	13	1.2	-1.9755	0.2931	0.0931	0.0950	20	1.2	-1.9547	0.4285	0.0864	0.1070
6	1.5	-1.9307	0.2038	0.0991	0.1004	13	1.5	-1.9755	0.2913	0.0939	0.0943	20	1.5	-1.9547	0.4063	0.0961	0.0973
6	2	-1.9305	0.2240	0.0885	0.1110	13	2	-1.9756	0.3038	0.0884	0.0997	20	2	-1.9546	0.4173	0.0916	0.1018
7	1.1	-1.9895	0.2742	0.0914	0.0932	14	1.1	-1.7787	0.5113	0.1131	0.1251	21	1.1	-1.9773	0.4013	0.0903	0.0974
7	1.2	-1.9897	0.2749	0.0916	0.0930	14	1.2	-1.7788	0.5100	0.1131	0.1251	21	1.2	-1.9774	0.3934	0.0930	0.0947
7	1.5	-1.9898	0.2485	0.0828	0.1018	14	1.5	-1.7787	0.4967	0.1191	0.1191	21	1.5	-1.9773	0.4036	0.0891	0.0986
7	2	-1.9895	0.2439	0.0812	0.1034	14	2	-1.7787	0.5142	0.1123	0.1259	21	2	-1.9773	0.4007	0.0906	0.0971
8	1.1	-1.7245	0.4111	0.1161	0.1356	15	1.1	-1.8143	0.4904	0.1101	0.1191	22	1.1	-1.8294	0.6057	0.1109	0.1145
8	1.2	-1.7244	0.4123	0.1158	0.1358	15	1.2	-1.8144	0.4822	0.1128	0.1164	22	1.2	-1.8293	0.6125	0.1071	0.1183
8	1.5	-1.7245	0.4017	0.1200	0.1317	15	1.5	-1.8143	0.5048	0.1038	0.1254	22	1.5	-1.8293	0.6080	0.1125	0.1129
8	2	-1.7244	0.3899	0.1251	0.1266	15	2	-1.8144	0.4866	0.1110	0.1182	22	2	-1.8293	0.6074	0.1123	0.1131
9	1.1	-1.7901	0.3795	0.1102	0.1251	16	1.1	-1.8471	0.4636	0.1081	0.1127	23	1.1	-1.8512	0.5994	0.0999	0.1199
9	1.2	-1.7899	0.3685	0.1156	0.1198	16	1.2	-1.8469	0.4888	0.0991	0.1218	23	1.2	-1.8512	0.5982	0.1015	0.1183
9	1.5	-1.7900	0.3670	0.1157	0.1196	16	1.5	-1.8469	0.4731	0.1057	0.1152	23	1.5	-1.8512	0.5929	0.1064	0.1135
9	2	-1.7899	0.3756	0.1128	0.1226	16	2	-1.8470	0.4651	0.1088	0.1121	23	2	-1.8512	0.5967	0.1027	0.1171
10	1.1	-1.8457	0.3472	0.1084	0.1128	17	1.1	-1.8771	0.4664	0.0972	0.1160	24	1.1	-1.8718	0.5805	0.1015	0.1130
10	1.2	-1.8457	0.3688	0.0991	0.1221	17	1.2	-1.8770	0.4727	0.0952	0.1180	24	1.2	-1.8719	0.5796	0.1018	0.1128
10	1.5	-1.8457	0.3518	0.1064	0.1149	17	1.5	-1.8770	0.4567	0.1018	0.1114	24	1.5	-1.8718	0.5804	0.1032	0.1114
10	2	-1.8458	0.3411	0.1100	0.1111	17	2	-1.8770	0.4677	0.0973	0.1159	24	2	-1.8718	0.5818	0.1036	0.1110
11	1.1	-1.8942	0.3420	0.0962	0.1126	18	1.1	-1.9049	0.4509	0.0940	0.1121	25	1.1	-1.8914	0.5689	0.0980	0.1115
11	1.2	-1.8942	0.3534	0.0914	0.1174	18	1.2	-1.9048	0.4296	0.1029	0.1032	25	1.2	-1.8914	0.5675	0.0994	0.1101
11	1.5	-1.8942	0.3567	0.0900	0.1188	18	1.5	-1.9047	0.4437	0.0977	0.1085	25	1.5	-1.8914	0.5688	0.0993	0.1103
11	2	-1.8942	0.3408	0.0967	0.1121	18	2	-1.9047	0.4520	0.0941	0.1120	25	2	-1.8913	0.5692	0.0995	0.1100

Monitorar uma característica da qualidade através de gráficos de controle por variáveis é sempre mais informativo que o monitoramento por atributos. Por outro lado, mensurar itens para controle de um processo requer, muitas vezes, maior treinamento do operador e demanda um tempo maior de inspeção. Classificar os mesmos itens utilizando, por exemplo, um dispositivo, normalmente requer menos treino e demanda um tempo menor de inspeção o que pode resultar num custo por unidade de inspeção menor.

Embora o gráfico de controle S^2 seja mais informativo para monitorar mudanças na variância do processo do que um gráfico por atributos, o mesmo possui um custo maior por unidade de inspeção.

Pretende-se que o gráfico de controle proposto tenha menor custo por unidade de inspeção. Para tanto é preciso determinar o tamanho de amostra necessário para que seu desempenho alcance o desempenho do gráfico S^2 , em termos de ARL_1 . Observa-se na Tabela 12 que, por exemplo, para detectar uma mudança na variância de magnitude $\delta^2 = 1.1^2$, o gráfico S^2 possui desempenho $ARL_1^{S^2} = 106.407$ com uma amostra de tamanho $n_{S^2} = 5$. O gráfico G_{S^2} atinge o mesmo desempenho com amostras de tamanho $n_{G_{S^2}} \geq 9$, com desempenho $ARL_1^{G_{S^2}} = 105.576$.

A Tabela 15 apresenta o tamanho da amostra do gráfico G_{S^2} , $n_{G_{S^2}}$, necessário para que o mesmo tenha desempenho similar ao gráfico S^2 com tamanho de amostra n_{S^2} para o Caso 1.

Tabela 15: Menor tamanho de amostra $n_{G_{S^2}}$ para o gráfico G_{S^2} com ARL_1 equivalente ao gráfico S^2 com amostra de tamanho n_{S^2}

N_{S^2}	$\delta = 1.1$	$\delta = 1.2$	$\delta = 1.5$	$\delta = 2$
5	9	9	9	9
6	11	11	10	10
7	12	12	12	11
8	15	14	13	12
9	16	16	15	15
10	18	17	17	16
11	19	19	18	17
12	21	20	19	19
13	23	22	21	20
14	24	24	23	21
15	26	25	24	23
$\bar{r}^0$	1.77	1.73	1.66	1.59
$\min r^0$	1.71	1.67	1.58	1.50
$\max r^0$	1.88	1.83	1.80	1.80

Seja n^0 o tamanho mínimo da amostra para que o gráfico G_{S^2} tenha ARL_1 equivalente ao do gráfico S^2 . A razão entre o tamanho mínimo n^0 necessário ao gráfico proposto e o tamanho da amostra do gráfico S^2 é $r^0 = \frac{n^0}{n_{S^2}}$. O valor do r^0 médio para os diferentes

valores de δ^2 encontra-se na Tabela 15. Observa-se que o valor de r^0 diminui conforme a magnitude da mudança aumenta.

Analisando a Tabela 15, uma regra simples pode ser estabelecida: se utilizar uma amostra com tamanho igual ao dobro do tamanho empregado no gráfico S^2 , o gráfico G_{S^2} terá um desempenho melhor ou similar ao S^2 , ou seja, para $n^0 \approx 2n_{S^2}$ tem-se $ARL_1^{G_{S^2}} \leq ARL_1^{S^2}$.

O desempenho do gráfico de controle também pode ser avaliado do ponto de vista econômico através do custo por unidade de inspeção para o gráfico de controle. O custo por unidade de inspeção compõe o custo de prevenção que por sua vez é uma das categorias de custo da qualidade.

Segundo Montgomery (2009) os custos da qualidade podem ser divididos em quatro categorias: custo de prevenção que inclui, entre outros, planejamento da qualidade e controle do processo; custo de avaliação, associado à qualidade em relação ao atendimento das especificações; custo de falha interna, que ocorre antes da entrega do produto ao cliente e; custo de falha externa, quando o produto possui desempenho insatisfatório após a entrega ao cliente.

O custo por unidade de inspeção pode englobar o custo fixo do instrumento de mensuração C_{inst} , o custo horário do operador C_{hh} e o custo horário de ociosidade da máquina C_{hmaq} . Seja t_c o tempo para coletar uma amostra, mensurar a característica da qualidade de interesse e registrar a informação. O custo por unidade de inspeção (C) pode ser definido por:

$$C = C_{inst} + t_c(C_{hh} + C_{hmaq}) \quad (4.5)$$

Sejam $C_{G_{S^2}}$ e C_{S^2} os custos por unidade de inspeção dos gráficos de controle G_{S^2} e S^2 respectivamente. Assume-se que os custos dos instrumentos de mensuração para os gráficos G_{S^2} e S^2 são os mesmos. Então, tem-se:

$$C_{G_{S^2}} = t_c^{G_{S^2}}(C_{hh} + C_{hmaq}) \quad \text{e} \quad C_{S^2} = t_c^{S^2}(C_{hh} + C_{hmaq}) \quad (4.6)$$

Portanto, o custo por unidade de inspeção é dado em função de t_c . O custo médio por inspeção (AIC) dos gráficos são $AIC_{G_{S^2}} = n_{G_{S^2}}C_{G_{S^2}}$ e $AIC_{S^2} = n_{S^2}C_{S^2}$.

Sabe-se que, geralmente, o custo de inspeção para o gráfico de controle por atributo é menor que o por variáveis. Tem-se, então, $C_{S^2} = kC_{G_{S^2}}$ onde $k > 1$ é a razão entre os custos por unidade de inspeção por atributo e variável.

$$\text{A razão entre os custos médios dos gráficos } G_{S^2} \text{ e } S^2 \text{ é } RC = \frac{n_{G_{S^2}}}{kn_{S^2}}.$$

Fazendo $n_{G_{S^2}} = rn_{S^2}$, onde $r > 1$ é a razão entre os tamanhos de amostra dos gráficos por atributo e variável, RC pode ser definida como

$$RC = \frac{r}{k} \quad (4.7)$$

A Figura 8 apresenta a razão do custo médio (RC) em função de k e r .

Quando o tamanho do gráfico G_{S^2} é $n_{G_{S^2}} \approx 2n_{S^2}$, o custo por unidade de inspeção do gráfico por variável deve ser no mínimo o dobro do custo por inspeção do gráfico por atributo. Nesta condição o desempenho do gráfico por atributo G_{S^2} atende tanto o critério econômico quanto o ARL_1 .

Figura 8: Razão do custo médio por unidade de inspeção para o gráfico G_{S^2} vs S^2 .

4.2 Exemplo numérico

Para demonstrar o uso do gráfico de controle G_{S^2} , considera-se o exemplo apresentado por [Montgomery \(2009\)](#) que descreve a necessidade de monitorar a espessura da placa de circuito impresso, que é uma importante característica da qualidade.

Quando o processo está sob controle, as placas são produzidas com média 0.06 *pol.* e desvio padrão 0.004 *pol.*.

Para monitorar a variabilidade da espessura da placa de circuito impresso, tomam-se 15 amostras de tamanho $n = 15$. Assume-se que as 10 primeiras amostras são coletadas com o processo sob controle e que as seguintes são coletadas após a variância do processo sofrer uma alteração de magnitude $\delta^2 = 2^2$.

O limite discriminante e o limite de controle para os dados normalizados são, respectivamente, $L = -1.8144$ e $LC = 0.4866$ (Tabela 14).

Um dispositivo passa-não passa, como o da Figura 3, é calibrado com limites discriminantes (0.0527424, 0.0672576) *pol.*.

A amostra é coletada, cada item é classificado pelo dispositivo e a estatística g é calculada segundo (3.3) considerando-se os pesos $w_j p_j$ da Tabela 14. O valor da estatística g e a quantidade de observações alocadas em cada um dos três grupos (n_1, n_2, n_3) das 15 amostras estão na Tabela 16

Tabela 16: Qtde de itens classificados por grupo e valor da estatística g

amostra	n_1	n_2	n_3	g
1	0	15	0	0.0000000
2	1	14	0	0.1109574
3	1	14	0	0.1109574
4	1	13	1	0.2291797
5	1	14	0	0.1109574
6	2	13	0	0.2219147
7	0	14	1	0.1182224
8	1	12	2	0.3474021
9	0	14	1	0.1182224
10	0	14	1	0.1182224
11	2	11	2	0.4583594
12	2	10	3	0.5765818
13	4	8	3	0.7984965
14	3	8	4	0.8057615
15	1	10	4	0.5838468

Os valores de g e do limite de controle (LC) são plotados na Figura 9. A mudança na variância é detectada na segunda amostra do processo fora de controle.

Figura 9: Gráfico de Controle G_{S^2}

5 Conclusão

Este trabalho propôs um novo gráfico de controle por atributos para monitorar a variabilidade de uma característica da qualidade num processo em que a média mantém-se inalterada: o gráfico de controle G_{S^2} .

A proposta do gráfico G_{S^2} para monitorar mudanças na variância de um processo é classificar itens segundo um dispositivo passa-não passa, monitorando a estatística g_{S^2} calculada conforme o resultado da classificação. O gráfico sinaliza se o valor da estatística é maior que o limite de controle.

O gráfico proposto foi comparado com o gráfico de controle por variáveis S^2 sob dois aspectos: o tamanho de amostra necessário para que tenha mesmo desempenho que o gráfico de Shewhart e o custo por unidade de inspeção.

Para a comparação foram considerados tamanhos de amostra variando de 5 a 25 unidades e aumento da variância de magnitudes $\delta^2 = (1.1^2, 1.2^2, 1.5^2, 2^2)$ sem alteração na média.

Mantendo-se o mesmo tamanho de amostra, o desempenho do gráfico de controle G_{S^2} , em termos de ARL_1 , é sempre inferior ao gráfico S^2 . Quando a magnitude de mudança é de $\delta = 2^2$, os desempenhos são semelhantes para amostras de tamanho maior que 25.

Porém, com um tamanho de amostra próximo ao dobro do requerido pelo gráfico S^2 , o gráfico proposto apresenta um desempenho melhor. Por exemplo, com uma amostra de tamanho $n_{G_{S^2}} = 9$, o gráfico G_{S^2} apresenta um desempenho melhor que o gráfico S^2 com amostra de tamanho $n_{S^2} = 5$ para detectar mudanças na variância do processo nas magnitudes avaliadas.

O uso gráfico G_{S^2} também é interessante quando seu custo é, no mínimo, a metade do custo do gráfico S^2 .

Portanto, para um tamanho de amostra aproximadamente igual ao dobro do requerido pelo gráfico S^2 , a utilização do gráfico G_{S^2} é interessante pois atende tanto ao critério de desempenho em termos do número médio de amostras coletadas até a emissão de um sinal fora de controle, quanto ao critério econômico em termos de custo por unidade de inspeção.

Referências

- APARISI, F.; GARCÍA-DÍAZ, J. Optimization of univariate and multivariate exponentially weighted moving-average control charts using genetic algorithms. *Computers Operations Research*, v. 31, p. 1437–1454, 2004. Citado na página 46.
- APARISI, F.; GARCÍA-DÍAZ, J. Design and optimization of ewma control charts for in-control, indifference, and out-of-control regions. *Computers Operations Research*, v. 34, p. 2096–2108, 2007. Citado na página 46.
- BAKIR, M.; ALTUNKAYNAK, B. The optimization with the genetic algorithm approach of the multi-objective, joint economical design of the xbar and r control charts. *Journal of Applied Statistics*, v. 31, p. 753–772, 2004. Citado na página 46.
- CARLYLE, W.; MONTGOMERY, D.; RUNGER, G. Optimization problems and methods in quality control and improvement. *Journal of Quality Technology*, v. 32, p. 1–17, 2000. Citado na página 46.
- CHEN, Y.; HSIEH, K.; CHANG, C. Economic design of the {VSSI} control charts for correlated data. *International Journal of Production Economics*, v. 107, n. 2, p. 528–539, 2007. Citado na página 46.
- CHOU, C.; WU, C.; CHEN, C. Joint economic design of variable sampling intervals (x) and r charts using genetic algorithms. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, v. 35, n. 4, p. 1027–1043, 2006. Citado na página 46.
- CROSBY, P. B. *Qualidade é investimento*. 6th. ed. Rio de Janeiro: José Olympio, 1994. Citado na página 20.
- DEB, K. et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: nsga-ii. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, v. 6, n. 2, p. 182–197, 2002. Citado na página 45.
- FEIGENBAUM, A. V. *Controle da qualidade total: gestão e sistemas*. São Paulo: Makron Books, 1994. Citado na página 20.
- GOLDBERG, D. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1989. (Artificial Intelligence). Citado na página 45.
- HAITOVSKY, Y. Grouped data. In: KOTZ, N. L. J. S.; READ, C. B. (Ed.). *Encyclopedia of Statistical Sciences*. 3rd. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1982. v. 3, p. 527–536. Citado na página 28.
- HAWKINS, D. M.; OLWELL, D. H. *Cumulative sum charts and charting for quality improvement*. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 1998. (Statistics for engineering and physical science). Citado na página 24.
- HE, D.; GRIGORYAN, A.; SIGH, M. Design of double- and triple-sampling x-bar control charts using genetic algorithms. *International Journal of Production Research*, v. 40, n. 6, p. 1387–1404, 2002. Citado na página 46.

- HO, L.; APARISI, F. Attrivar: Optimized control charts to monitor process mean with lower operational cost. *International Journal of Production Economics*, v. 182, p. 472–483, 2016. Citado na página 46.
- HO, L. L.; QUININO, R. C. An attribute control chart for monitoring the variability of a process. *International Journal of Production Economics*, v. 45, p. 263–267, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 28, 29, 34 e 36.
- HOLLAND, J. *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. [S.l.]: University of Michigan Press, 1975. Citado na página 44.
- JOHNSON, N.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. *Discrete Multivariate Distributions*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc, 2004. (Wiley series in probability and statistics). Citado 2 vezes nas páginas 30 e 39.
- JURAN, J. M.; GRUNA, F. M. *Controle da qualidade handbook: conceitos, políticas e filosofia da qualidade*. São Paulo: Makron Books, 1991. Citado na página 20.
- MERSMANN, O. *MCO: Multiple Criteria Optimization Algorithms and Related Functions*. [S.l.], 2014. R package version 1.0-15.1. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=mco>>. Citado na página 49.
- MONTGOMERY, D. C. *Introduction to Statistical Quality Control*. 6. ed. USA: John Wiley Sons, Inc., 2009. Citado 8 vezes nas páginas 19, 20, 21, 23, 26, 27, 62 e 63.
- ROSS, S. M. *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*. 5. ed. [S.l.]: Elsevier Science, 2009. Citado na página 27.
- SLACK, N.; CHAMBERS, S.; JOHNSTON, R. *Administração da produção*. 2nd. ed. São Paulo: Atlas, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- STEINER, S.; GEYER, P.; WESOLOWSKY, G. Control charts based on grouped data. *International Journal of Production Research*, v. 32, n. 1, p. 75–91, 1994. Citado 4 vezes nas páginas 28, 29, 30 e 31.
- STEINER, S.; GEYER, P.; WESOLOWSKY, G. Shewhart control charts to detect mean and standard deviation shifts based on grouped data. *Quality and reliability engineering international*, v. 12, p. 345–353, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 28, 32 e 34.
- STEVENS, W. L. Control by gauging. *Journal of the Royal Statistical Society*, v. 10, n. 1, p. 54–108, 1948. Citado 3 vezes nas páginas 28, 29 e 30.
- TIPPETT, L. H. C. On the extreme individuals and the range of samples from a normal population. *Biometrika*, v. 17, p. 364–387, 1925. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- TIPPETT, L. H. C. The efficient use of gauges in quality control. *Engineer*, v. 177, p. 481–483, 1944. Citado na página 28.
- TORNG, C.; LEE, P.; LIAO, N. An economic-statistical design of double sampling control chart. *International Journal of Production Economics*, v. 120, n. 2, p. 495–500, 2009. Citado na página 46.

WU, Z. et al. An np control chart for monitoring the mean of a variable based on an attribute inspection. *International Journal of Production Economics*, v. 121, p. 141–147, 2009. Citado na página [34](#).

ZHANG, L. et al. On statistical design of the s^2 chart. *Communications in Statistics — Theory and Methods*, v. 34, p. 229–244, 2005. Citado na página [27](#).

Anexos

ANEXO A – Rotina R

Segue abaixo a rotina de otimização para obtenção dos parâmetros do gráfico de controle G_{S^2} através de Algoritmos Genéticos NSGA-II para os casos 1, 2, 3 e 4.

```
#####
# Caso 1 - simétrico com t = 0
#####
#
# carregar pacote
require(mco)
#
# Valores
# ARL0
ARL0<-370
#
# matriz dos valores das partições de X
N<-5
X <- t(as.matrix(expand.grid(0:N,0:N,0:N))); X <- X[, colSums(X) == N]
#
# limites parâmetros
lb<-c(-2,1)
ub<-c(-0.1,2)
#
# delta
d<-c(1.1,1.2,1.5,2)
nd<-length(d)
#
# Resultados
Saida<-matrix(ncol=7)
colnames(Saida)<-c('N','delta','L','a','ARL1','ARLOv','g')
#
Result<-matrix(ncol=7,nrow=nd)
colnames(Result)<-c('N','delta','L','a','ARL1','ARLOv','g')
#
```

```

i<-1
for(i in 1:nd){
  delta<-d[i]
  #
  # Estatística g
  g<-function(y){
    L<-y[1]
    a<-y[2]
    ((2-a)*((L)^2)*(pnorm(L))*X[1,])+(a*((L)^2)*(1-pnorm(-L))*X[3,])
  }
  # probabilidades sob controle
  q0<-function(y){
    L<-y[1]
    a<-y[2]
    apply(X,2,function(x)
      dmultinom(x,prob=c(pnorm(L),(pnorm(-L)-pnorm(L)),(1-pnorm(-L)))))
  }
  # probabilidades fora de controle
  q1<-function(y){
    L<-y[1]
    a<-y[2]
    apply(X,2,function(x)
      dmultinom(x,prob=c(pnorm(L/delta),(pnorm(-L/delta)-pnorm(L/delta)),
        (1-pnorm(-L/delta)))))
  }
  # corte
  C<-function(y){
    L<-y[1]
    a<-y[2]
    approxfun(cumsum(q0(y)[order(g(y),decreasing=F)]),g(y)[order(g(y),
      decreasing=F)],yleft=0,yright=0)(1-(1/ARL0))
  }
  #
  # ARL1
  ARL1<-function(y){
    L<-y[1]
    a<-y[2]
    1/(1-(approxfun(g(y)[order(g(y),decreasing=F)],cumsum(q1(y)[order(g(y),
      decreasing=F)]),method='constant',yleft=0,yright=0)

```

```

      (approxfun(cumsum(q0(y)[order(g(y),decreasing=F)]),g(y)[order(g(y),
decreasing=F)],yleft=0,yright=0)(1-(1/ARL0))))))
}
#
# ARL0* (verdadeiro)
ARL0v<-function(y){
  L<-y[1]
  a<-y[2]
  1/(1-approxfun(g(y)[order(g(y),decreasing=F)],
cumsum(q0(y)[order(g(y),decreasing=F)]),method='constant',
yleft=0,yright=0)(approxfun(cumsum(q0(y)[order(g(y),decreasing=F)]),
g(y)[order(g(y),decreasing=F)],yleft=0,yright=0)(1-(1/ARL0))))))
}
#
# multiobjetivo
mARL<-function(x){
  y<-numeric(2)
  y[1]<-ARL1(x)
  y[2]<-abs(ARL0v(x)-370)
  return(y)
}
#
# otimização
MAmin<-nsga2(mARL,2,2,generations=150,popsize=500,lower.bounds=lb,
upper.bounds=ub)
#
# tabela de resultados
tab<-cbind(N,delta,MAmin$par,MAmin$value[,1],NA,NA,MAmin$pareto.optimal)
colnames(tab)<-c('N','delta','L','a','ARL1','ARL0v','g','otimo')
tab[,6]<-apply(tab[,3:4],1,ARL0v)
tab[,7]<-apply(tab[,3:4],1,C)
#
# seleciona ARL0
sub1<-cbind(subset(tab[,1:7],(tab[,6]>368)&(tab[,8]==1)))
# seleciona ARL1
valor<-min(sub1[,5])
sub2<-subset(sub1,sub1[,5]==valor)
#
Result[i,]<-sub2[1,]

```

```

  Saida<-rbind(Saida,sub1)
  i<-i+1
}
#
Saida
#
#
#####
# Caso 2 - simétrico com  $0 < t < 1$ 
#####
#
# carregar pacote
require(mco)
#
# Valores
# ARL0
ARL0<-370
#
# matriz dos valores das partições de X
N<-5
X <- t(as.matrix(expand.grid(0:N,0:N,0:N))); X <- X[, colSums(X) == N]
#
# limites parâmetros
lb<-c(-2,1,0)
ub<-c(-0.1,2,1)
#
# delta
d<-c(1.1,1.2,1.5,2)
nd<-length(d)
#
# Resultados
Saida<-matrix(ncol=8)
colnames(Saida)<-c('N','delta','L','a','t','ARL1','ARL0v','g')
#
Result<-matrix(ncol=8,nrow=nd)
colnames(Result)<-c('N','delta','L','a','t','ARL1','ARL0v','g')
#
i<-1
for(i in 1:nd){

```

```

delta<-d[i]
#
# Estatística g
g<-function(y){
  L<-y[1]
  a<-y[2]
  t<-y[3]
  ((2-a)*((L-t)^2)*(pnorm(L))*X[1,])+((t^2)*(pnorm(-L)-
  pnorm(L))*X[2,]) +(a*((-L-t)^2)*(1-pnorm(-L))*X[3,])
}
# probabilidades sob controle
q0<-function(y){
  L<-y[1]
  a<-y[2]
  t<-y[3]
  apply(X,2,function(x)
    dmultinom(x,prob=c(pnorm(L),(pnorm(-L)-pnorm(L)),(1-pnorm(-L))))
  )
# probabilidades fora de controle
q1<-function(y){
  L<-y[1]
  a<-y[2]
  t<-y[3]
  apply(X,2,function(x)
    dmultinom(x,prob=c(pnorm(L/delta),(pnorm(-L/delta)-pnorm(L/delta)),
    (1-pnorm(-L/delta))))
  )
# corte
C<-function(y){
  L<-y[1]
  a<-y[2]
  t<-y[3]
  approxfun(cumsum(q0(y)[order(g(y),decreasing=F)]),g(y)[order(g(y),
  decreasing=F)],yleft=0,yright=0)(1-(1/ARL0))
}
#
# ARL1
ARL1<-function(y){
  L<-y[1]

```

```

a<-y[2]
t<-y[3]
1/(1-(approxfun(g(y)[order(g(y),decreasing=F)],
cumsum(q1(y)[order(g(y),decreasing=F)]),method='constant',
yleft=0,yright=0)(approxfun(cumsum(q0(y)[order(g(y),decreasing=F)]),
g(y)[order(g(y),decreasing=F)],yleft=0,yright=0)(1-(1/ARL0))))))
}
#
# ARL0* (verdadeiro)
ARL0v<-function(y){
  L<-y[1]
  a<-y[2]
  t<-y[3]
  1/(1-(approxfun(g(y)[order(g(y),decreasing=F)],
cumsum(q0(y)[order(g(y),decreasing=F)]),method='constant',
yleft=0,yright=0)(approxfun(cumsum(q0(y)[order(g(y),decreasing=F)]),
g(y)[order(g(y),decreasing=F)],yleft=0,yright=0)(1-(1/ARL0))))))
}
#
# multiobjetivo
mARL<-function(x){
  y<-numeric(2)
  y[1]<-ARL1(x)
  y[2]<-abs(ARL0v(x)-370)
  return(y)
}
#
MAmin<-nsga2(mARL,3,2,generations=150,popsize=500,lower.bounds=lb,
upper.bounds=ub)
#
# tabela de resultados
tab<-cbind(N,delta,MAmin$par,MAmin$value[,1],NA,NA,MAmin$pareto.optimal)
colnames(tab)<-c('N','delta','L','a','t','ARL1','ARL0v','g','otimo')
tab[,7]<-apply(tab[,3:5],1,ARL0v)
tab[,8]<-apply(tab[,3:5],1,C)
#
# seleciona ARL0
sub1<-cbind(subset(tab[,1:8],(tab[,7]>368)&(tab[,9]==1)))
# seleciona ARL1

```

```

    valor<-min(sub1[,6])
    sub2<-subset(sub1,sub1[,6]==valor)
    #
    Result[i,<-sub2[1,]
    Saida<-rbind(Saida,sub1)
    i<-i+1
  }
  #
  Saida
  #
  #
  #####
  # Caso 3 - assimétrico com  $t = (L+u)/2$ 
  #####
  #
  # carregar pacote
  require(mco)
  #
  # Valores
  # ARL0
  ARL0<-370
  #
  # matriz dos valores das partições de X
  N<-5
  X <- t(as.matrix(expand.grid(0:N,0:N,0:N))); X <- X[, colSums(X) == N]
  #
  # limites parâmetros
  lb<-c(-2,0.1,1)
  ub<-c(-0.1,2,2)
  #
  # delta
  d<-c(1.1,1.2,1.5,2)
  nd<-length(d)
  #
  # Resultados
  Saida<-matrix(ncol=8)
  colnames(Saida)<-c('N','delta','L','U','a','ARL1','ARL0v','g')
  #
  Result<-matrix(ncol=8,nrow=nd)

```

```

colnames(Result)<-c('N','delta','L','U','a','ARL1','ARL0v','g')
#
i<-1
for(i in 1:nd){
  delta<-d[i]
  #
  # Estatística g
  g<-function(y){
    L<-y[1]
    U<-y[2]
    a<-y[3]
    ((2-a)*((L-((L+U)/2))^2)*(pnorm(L))*X[1,])+(((L+U)/2)^2)*(pnorm(U)
    - pnorm(L))*X[2,]) +(a*((U-((L+U)/2))^2)*(1-pnorm(U))*X[3,])
  }
  # probabilidades sob controle
  q0<-function(y){
    L<-y[1]
    U<-y[2]
    a<-y[3]
    apply(X,2,function(x) dmultinom(x,prob=c(pnorm(L),(pnorm(U)
    -pnorm(L)),(1-pnorm(U))))))
  }
  # probabilidades fora de controle
  q1<-function(y){
    L<-y[1]
    U<-y[2]
    a<-y[3]
    apply(X,2,function(x)
    dmultinom(x,prob=c(pnorm(L/delta),(pnorm(U/delta)-pnorm(L/delta)),
    (1-pnorm(U/delta))))))
  }
  # corte
  C<-function(y){
    L<-y[1]
    U<-y[2]
    a<-y[3]
    approxfun(cumsum(q0(y)[order(g(y),decreasing=F)]),
    g(y)[order(g(y),decreasing=F)],yleft=0,yright=0)(1-(1/ARL0))
  }
}

```

```

#
# ARL1
ARL1<-function(y){
  L<-y[1]
  U<-y[2]
  a<-y[3]
  1/(1-(approxfun(g(y)[order(g(y),decreasing=F)],
    cumsum(q1(y)[order(g(y),decreasing=F)]),method='constant',yleft=0,
    yright=0)(approxfun(cumsum(q0(y)[order(g(y),decreasing=F)]),
    g(y)[order(g(y),decreasing=F)],yleft=0,yright=0)(1-(1/ARL0))))))
}
#
# ARL0* (verdadeiro)
ARL0v<-function(y){
  L<-y[1]
  U<-y[2]
  a<-y[3]
  1/(1-approxfun(g(y)[order(g(y),decreasing=F)],
    cumsum(q0(y)[order(g(y),decreasing=F)]),method='constant',yleft=0,
    yright=0)(approxfun(cumsum(q0(y)[order(g(y),decreasing=F)]),
    g(y)[order(g(y),decreasing=F)],yleft=0,yright=0)(1-(1/ARL0))))))
}
#
# multiobjetivo
mARL<-function(x){
  y<-numeric(2)
  y[1]<-ARL1(x)
  y[2]<-abs(ARL0v(x)-370)
  return(y)
}
#
MAmin<-nsga2(mARL,3,2,generations=150,popsize=500,lower.bounds=lb,
upper.bounds=ub)
#
# tabela de resultados
tab<-cbind(N,delta,MAmin$par,MAmin$value[,1],NA,NA,MAmin$pareto.optimal)
colnames(tab)<-c('N','delta','L','U','a','ARL1','ARL0v','g','otimo')
tab[,7]<-apply(tab[,3:5],1,ARL0v)
tab[,8]<-apply(tab[,3:5],1,C)

```

```

#
# seleciona ARL0
sub1<-cbind(subset(tab[,1:8],(tab[,7]>368)&(tab[,9]==1)))
# seleciona ARL1
valor<-min(sub1[,6])
sub2<-subset(sub1,sub1[,6]==valor)
#
Result[i,]<-sub2[1,]
Saida<-rbind(Saida,sub1)
i<-i+1
}
#
Saida
#
#
#####
# Caso 4 - assimétrico com  $0 < t < 1$ 
#####
#
# carregar pacote
require(mco)
#
# Valores
# ARL0
ARL0<-370
#
# matriz dos valores das partições de X
N<-5
X <- t(as.matrix(expand.grid(0:N,0:N,0:N))); X <- X[, colSums(X) == N]
#
# limites parâmetros
lb<-c(-2,0.1,1,0)
ub<-c(-0.1,2,2,1)
#
# delta
d<-c(1.1,1.2,1.5,2)
nd<-length(d)
#
# Resultados

```

```

Saida<-matrix(ncol=9)
colnames(Saida)<-c('N','delta','L','U','a','t','ARL1','ARL0v','g')
#
Result<-matrix(ncol=9,nrow=nd)
colnames(Result)<-c('N','delta','L','U','a','t','ARL1','ARL0v','g')
#
i<-1
for(i in 1:nd){
  delta<-d[i]
  #
  # Estatística g
  g<-function(y){
    L<-y[1]
    U<-y[2]
    a<-y[3]
    t<-y[4]
    ((2-a)*((L-t)^2)*(pnorm(L))*X[1,])+((t^2)*(pnorm(U)
    - pnorm(L))*X[2,]) +(a*((U-t)^2)*(1-pnorm(U))*X[3,])
  }
  # probabilidades sob controle
  q0<-function(y){
    L<-y[1]
    U<-y[2]
    a<-y[3]
    t<-y[4]
    apply(X,2,function(x) dmultinom(x,prob=c(pnorm(L),(pnorm(U)
    -pnorm(L)),(1-pnorm(U))))))
  }
  # probabilidades fora de controle
  q1<-function(y){
    L<-y[1]
    U<-y[2]
    a<-y[3]
    t<-y[4]
    apply(X,2,function(x)
    dmultinom(x,prob=c(pnorm(L/delta),(pnorm(U/delta)-pnorm(L/delta)),
    (1-pnorm(U/delta))))))
  }
  # corte

```

```

C<-function(y){
  L<-y[1]
  U<-y[2]
  a<-y[3]
  t<-y[4]
  approxfun(cumsum(q0(y)[order(g(y),decreasing=F)]),
    g(y)[order(g(y),decreasing=F)],yleft=0,yright=0)(1-(1/ARL0))
}
#
# ARL1
ARL1<-function(y){
  L<-y[1]
  U<-y[2]
  a<-y[3]
  t<-y[4]
  1/(1-(approxfun(g(y)[order(g(y),decreasing=F)],
    cumsum(q1(y)[order(g(y),decreasing=F)]),method='constant',yleft=0,
    yright=0)(approxfun(cumsum(q0(y)[order(g(y),decreasing=F)]),
    g(y)[order(g(y),decreasing=F)],yleft=0,yright=0)(1-(1/ARL0))))))
}
#
# ARL0* (verdadeiro)
ARL0v<-function(y){
  L<-y[1]
  U<-y[2]
  a<-y[3]
  t<-y[4]
  1/(1-approxfun(g(y)[order(g(y),decreasing=F)],
    cumsum(q0(y)[order(g(y),decreasing=F)]),method='constant',yleft=0,
    yright=0)(approxfun(cumsum(q0(y)[order(g(y),decreasing=F)]),
    g(y)[order(g(y),decreasing=F)],yleft=0,yright=0)(1-(1/ARL0))))))
}
#
# multiobjetivo
mARL<-function(x){
  y<-numeric(2)
  y[1]<-ARL1(x)
  y[2]<-abs(ARL0v(x)-370)
  return(y)
}

```

```

}
#
MAmin<-nsga2(mARL,4,2,generations=150,popsize=500,lower.bounds=lb,
upper.bounds=ub)
#
# tabela de resultados
tab<-cbind(N,delta,MAmin$par,MAmin$value[,1],NA,NA,MAmin$pareto.optimal)
colnames(tab)<-c('N','delta','L','U','a','t','ARL1','ARL0v','g','otimo')
tab[,8]<-apply(tab[,3:6],1,ARL0v)
tab[,9]<-apply(tab[,3:6],1,C)
#
# seleciona ARL0
sub1<-cbind(subset(tab[,1:9],(tab[,8]>368)&(tab[,10]==1)))
# seleciona ARL1
valor<-min(sub1[,7])
sub2<-subset(sub1,sub1[,7]==valor)
#
Result[i,]<-sub2[1,]
Saida<-rbind(Saida,sub1)
i<-i+1
}
#
Saida
#
#
#####

```


ANEXO B – Valores simulados de ARL_0 e ARL_1 do gráfico de controle G_{S^2} para os Casos 2, 3 e 4

Tabela 17: Valores de ARL simulados para os parâmetros ótimos do gráfico G_{S^2} – Caso 2

N	δ	$ARL_1^{(sim)}$	$ARL_0^{(sim)}$	N	δ	$ARL_1^{(sim)}$	$ARL_0^{(sim)}$	N	δ	$ARL_1^{(sim)}$	$ARL_0^{(sim)}$
5	1.1	132.335	374.758	12	1.1	88.759	371.286	19	1.1	69.075	370.228
5	1.2	60.975	363.233	12	1.2	31.101	375.637	19	1.2	21.824	378.755
5	1.5	13.015	365.154	12	1.5	5.207	359.288	19	1.5	3.170	359.007
5	2	3.956	364.445	12	2	1.657	368.792	19	2	1.227	376.440
6	1.1	123.529	365.570	13	1.1	86.156	359.476	20	1.1	68.617	360.195
6	1.2	51.935	372.970	13	1.2	29.344	359.619	20	1.2	20.713	366.871
6	1.5	10.235	357.917	13	1.5	4.615	369.725	20	1.5	2.965	358.965
6	2	3.115	367.222	13	2	1.537	366.518	20	2	1.184	371.066
7	1.1	116.565	368.823	14	1.1	84.663	370.073	21	1.1	66.022	359.049
7	1.2	46.883	369.529	14	1.2	29.390	377.481	21	1.2	19.671	356.117
7	1.5	9.015	381.656	14	1.5	4.567	372.421	21	1.5	2.810	364.873
7	2	2.713	371.686	14	2	1.538	355.880	21	2	1.174	356.553
8	1.1	111.741	371.026	15	1.1	80.998	373.269	22	1.1	65.346	360.849
8	1.2	44.688	367.426	15	1.2	27.789	376.473	22	1.2	18.974	363.961
8	1.5	8.871	371.282	15	1.5	4.234	376.259	22	1.5	2.750	363.469
8	2	2.609	363.202	15	2	1.425	369.641	22	2	1.155	366.817
9	1.1	106.046	367.999	16	1.1	77.475	370.872	23	1.1	64.351	364.711
9	1.2	41.005	365.029	16	1.2	24.776	374.306	23	1.2	17.754	364.569
9	1.5	7.377	372.850	16	1.5	3.852	365.033	23	1.5	2.688	365.749
9	2	2.250	372.799	16	2	1.377	366.852	23	2	1.132	367.829
10	1.1	99.481	373.514	17	1.1	75.112	361.248	24	1.1	60.867	371.790
10	1.2	36.562	370.622	17	1.2	23.945	371.447	24	1.2	17.445	369.093
10	1.5	6.458	359.038	17	1.5	3.528	365.079	24	1.5	2.503	366.669
10	2	1.980	372.796	17	2	1.324	370.613	24	2	1.121	364.697
11	1.1	95.630	365.969	18	1.1	71.025	365.871	25	1.1	60.716	370.104
11	1.2	33.444	368.023	18	1.2	23.236	367.046	25	1.2	17.076	360.797
11	1.5	5.644	368.447	18	1.5	3.345	363.162	25	1.5	2.418	379.470
11	2	1.795	361.887	18	2	1.254	372.383	25	2	1.100	374.801

Tabela 18: Valores de ARL simulados para os parâmetros ótimos do gráfico G_{S^2} – Caso 3

N	δ	$ARL_1^{(sim)}$	$ARL_0^{(sim)}$	N	δ	$ARL_1^{(sim)}$	$ARL_0^{(sim)}$	N	δ	$ARL_1^{(sim)}$	$ARL_0^{(sim)}$
5	1.1	131.832	368.919	12	1.1	90.191	362.646	19	1.1	69.421	363.584
5	1.2	60.126	363.098	12	1.2	31.984	378.445	19	1.2	21.660	362.430
5	1.5	13.013	364.770	12	1.5	5.084	365.436	19	1.5	3.144	357.128
5	2	3.919	365.556	12	2	1.657	371.719	19	2	1.231	368.648
6	1.1	118.630	374.458	13	1.1	83.949	374.498	20	1.1	67.431	368.793
6	1.2	51.748	365.574	13	1.2	29.285	371.563	20	1.2	20.771	372.853
6	1.5	10.204	372.288	13	1.5	4.659	370.983	20	1.5	2.937	374.655
6	2	3.127	361.989	13	2	1.546	363.244	20	2	1.193	370.632
7	1.1	112.663	373.457	14	1.1	85.522	363.565	21	1.1	66.711	373.827
7	1.2	47.276	364.643	14	1.2	29.313	368.545	21	1.2	20.011	356.766
7	1.5	9.055	362.350	14	1.5	4.647	359.598	21	1.5	2.775	367.441
7	2	2.725	368.096	14	2	1.541	369.171	21	2	1.169	372.588
8	1.1	114.876	362.553	15	1.1	80.538	371.941	22	1.1	65.955	371.140
8	1.2	46.602	368.667	15	1.2	26.743	369.323	22	1.2	18.957	367.118
8	1.5	8.785	372.271	15	1.5	4.128	362.438	22	1.5	2.674	359.892
8	2	2.595	369.826	15	2	1.453	366.044	22	2	1.161	356.351
9	1.1	103.263	369.947	16	1.1	77.718	365.567	23	1.1	63.389	364.861
9	1.2	41.223	379.471	16	1.2	25.625	362.981	23	1.2	18.553	367.032
9	1.5	7.402	366.486	16	1.5	3.826	372.585	23	1.5	2.646	375.709
9	2	2.232	372.310	16	2	1.385	364.191	23	2	1.127	371.681
10	1.1	100.413	370.182	17	1.1	76.823	365.642	24	1.1	61.384	377.419
10	1.2	37.801	375.027	17	1.2	23.508	369.787	24	1.2	17.268	368.741
10	1.5	6.304	367.088	17	1.5	3.597	366.325	24	1.5	2.467	369.754
10	2	1.964	363.780	17	2	1.323	370.020	24	2	1.119	365.009
11	1.1	94.579	366.547	18	1.1	72.265	362.905	25	1.1	59.955	358.281
11	1.2	34.493	369.762	18	1.2	22.859	373.427	25	1.2	16.413	366.709
11	1.5	5.664	368.544	18	1.5	3.295	372.529	25	1.5	2.410	371.101
11	2	1.798	364.600	18	2	1.278	365.591	25	2	1.100	364.712

Tabela 19: Valores de ARL simulados para os parâmetros ótimos do gráfico G_{S^2} – Caso 4

N	δ	$ARL_1^{(sim)}$	$ARL_0^{(sim)}$	N	δ	$ARL_1^{(sim)}$	$ARL_0^{(sim)}$	N	δ	$ARL_1^{(sim)}$	$ARL_0^{(sim)}$
5	1.1	131.982	377.900	12	1.1	91.482	368.512	19	1.1	72.532	371.343
5	1.2	60.439	369.562	12	1.2	31.963	364.307	19	1.2	21.665	372.897
5	1.5	12.638	371.779	12	1.5	5.115	371.731	19	1.5	3.048	366.337
5	2	4.011	377.271	12	2	1.641	366.743	19	2	1.222	365.869
6	1.1	119.571	374.099	13	1.1	86.489	374.954	20	1.1	69.531	367.069
6	1.2	52.037	372.869	13	1.2	30.163	366.922	20	1.2	20.165	376.067
6	1.5	10.436	365.920	13	1.5	4.558	367.633	20	1.5	2.965	367.590
6	2	3.093	371.283	13	2	1.525	369.317	20	2	1.188	374.695
7	1.1	115.448	374.509	14	1.1	83.969	369.686	21	1.1	66.777	375.647
7	1.2	47.004	364.663	14	1.2	29.317	375.582	21	1.2	19.500	366.711
7	1.5	9.064	369.373	14	1.5	4.578	373.236	21	1.5	2.779	365.911
7	2	2.742	372.961	14	2	1.540	375.826	21	2	1.175	361.437
8	1.1	113.311	369.827	15	1.1	81.868	367.722	22	1.1	64.807	373.710
8	1.2	45.560	374.479	15	1.2	27.256	371.705	22	1.2	19.198	364.022
8	1.5	8.744	358.306	15	1.5	4.151	363.610	22	1.5	2.730	368.423
8	2	2.673	381.114	15	2	1.461	376.899	22	2	1.145	371.044
9	1.1	104.968	363.643	16	1.1	77.217	366.309	23	1.1	64.774	373.667
9	1.2	40.727	374.610	16	1.2	25.746	376.621	23	1.2	18.472	372.918
9	1.5	7.322	371.877	16	1.5	3.886	368.050	23	1.5	2.620	373.018
9	2	2.265	366.498	16	2	1.375	362.212	23	2	1.139	362.603
10	1.1	98.699	368.392	17	1.1	77.616	370.244	24	1.1	60.572	369.942
10	1.2	37.732	374.626	17	1.2	23.786	371.576	24	1.2	17.303	367.976
10	1.5	6.351	368.387	17	1.5	3.589	371.024	24	1.5	2.468	359.231
10	2	1.993	365.764	17	2	1.301	364.366	24	2	1.116	372.677
11	1.1	94.758	366.306	18	1.1	74.008	365.316	25	1.1	58.600	360.206
11	1.2	33.155	363.756	18	1.2	22.055	367.711	25	1.2	17.317	381.800
11	1.5	5.590	358.165	18	1.5	3.245	367.261	25	1.5	2.322	362.668
11	2	1.791	368.406	18	2	1.264	376.132	25	2	1.100	366.432

ANEXO C – Comparação do desempenho dos gráficos de controle G_{S^2} e S^2 para os Casos 2, 3 e 4

Tabela 20: Desempenho dos gráficos de controle G_{S^2} e S^2 – Caso 2

N	δ	$ARL_{1S^2}^{G_{S^2}}$	$ARL_{1S^2}^{S^2}$	N	δ	$ARL_{1S^2}^{G_{S^2}}$	$ARL_{1S^2}^{S^2}$	N	δ	$ARL_{1S^2}^{G_{S^2}}$	$ARL_{1S^2}^{S^2}$
5	1.1	131.538	106.405	12	1.1	89.978	67.715	19	1.1	70.779	50.295
5	1.2	59.675	42.325	12	1.2	31.728	20.700	19	1.2	21.565	13.245
5	1.5	13.129	8.019	12	1.5	5.092	3.166	19	1.5	3.135	2.017
5	2	3.992	2.513	12	2	1.652	1.267	19	2	1.227	1.065
6	1.1	120.617	97.890	13	1.1	86.257	64.560	20	1.1	68.489	48.413
6	1.2	51.541	36.972	13	1.2	29.557	19.216	20	1.2	20.535	12.567
6	1.5	10.360	6.597	13	1.5	4.626	2.917	20	1.5	2.959	1.926
6	2	3.108	2.112	13	2	1.540	1.217	20	2	1.194	1.054
7	1.1	114.523	90.929	14	1.1	85.431	61.645	21	1.1	66.592	46.791
7	1.2	47.131	32.764	14	1.2	29.203	17.925	21	1.2	19.601	11.944
7	1.5	9.044	5.598	14	1.5	4.592	2.706	21	1.5	2.804	1.846
7	2	2.720	1.844	14	2	1.541	1.177	21	2	1.166	1.044
8	1.1	112.810	84.903	15	1.1	81.877	59.023	22	1.1	65.308	45.160
8	1.2	46.144	29.457	15	1.2	27.269	16.794	22	1.2	19.129	11.373
8	1.5	8.760	4.855	15	1.5	4.189	2.527	22	1.5	2.756	1.773
8	2	2.635	1.655	15	2	1.449	1.145	22	2	1.162	1.036
9	1.1	105.612	79.863	16	1.1	78.528	56.489	23	1.1	63.273	43.620
9	1.2	41.266	26.700	16	1.2	25.561	15.766	23	1.2	18.250	10.847
9	1.5	7.408	4.283	16	1.5	3.857	2.372	23	1.5	2.617	1.709
9	2	2.254	1.516	16	2	1.375	1.119	23	2	1.138	1.030
10	1.1	99.421	75.255	17	1.1	75.579	54.195	24	1.1	61.463	42.219
10	1.2	37.381	24.358	17	1.2	24.036	14.825	24	1.2	17.452	10.363
10	1.5	6.421	3.830	17	1.5	3.578	2.238	24	1.5	2.494	1.650
10	2	1.989	1.411	17	2	1.316	1.097	24	2	1.118	1.024
11	1.1	94.352	71.284	18	1.1	72.979	52.117	25	1.1	59.900	40.974
11	1.2	34.303	22.402	18	1.2	22.735	14.000	25	1.2	16.722	9.914
11	1.5	5.676	3.466	18	1.5	3.340	2.121	25	1.5	2.384	1.598
11	2	1.797	1.331	18	2	1.267	1.080	25	2	1.101	1.020

Tabela 21: Desempenho dos gráficos de controle G_{S^2} e S^2 – Caso 3

N	δ	$ARL_1^{G_{S^2}}$	$ARL_1^{S^2}$	N	δ	$ARL_1^{G_{S^2}}$	$ARL_1^{S^2}$	N	δ	$ARL_1^{G_{S^2}}$	$ARL_1^{S^2}$
5	1.1	131.577	106.434	12	1.1	90.114	67.805	19	1.1	70.663	50.196
5	1.2	59.702	42.331	12	1.2	31.737	20.703	19	1.2	21.570	13.247
5	1.5	13.117	8.010	12	1.5	5.094	3.167	19	1.5	3.136	2.018
5	2	3.991	2.512	12	2	1.652	1.268	19	2	1.227	1.065
6	1.1	120.773	98.005	13	1.1	86.255	64.554	20	1.1	68.448	48.367
6	1.2	51.484	36.933	13	1.2	29.559	19.217	20	1.2	20.536	12.566
6	1.5	10.367	6.600	13	1.5	4.625	2.917	20	1.5	2.959	1.926
6	2	3.108	2.112	13	2	1.540	1.217	20	2	1.194	1.054
7	1.1	114.418	90.849	14	1.1	85.445	61.653	21	1.1	66.471	46.710
7	1.2	47.192	32.803	14	1.2	29.205	17.926	21	1.2	19.613	11.950
7	1.5	9.044	5.598	14	1.5	4.593	2.706	21	1.5	2.804	1.845
7	2	2.720	1.844	14	2	1.541	1.177	21	2	1.166	1.044
8	1.1	112.858	84.920	15	1.1	81.804	58.973	22	1.1	65.251	45.119
8	1.2	46.133	29.426	15	1.2	27.247	16.781	22	1.2	19.136	11.374
8	1.5	8.754	4.853	15	1.5	4.190	2.527	22	1.5	2.757	1.773
8	2	2.635	1.655	15	2	1.449	1.145	22	2	1.162	1.036
9	1.1	105.456	79.733	16	1.1	78.580	56.497	23	1.1	63.277	43.617
9	1.2	41.255	26.687	16	1.2	25.538	15.753	23	1.2	18.248	10.845
9	1.5	7.409	4.284	16	1.5	3.857	2.372	23	1.5	2.617	1.709
9	2	2.255	1.516	16	2	1.375	1.119	23	2	1.138	1.030
10	1.1	99.416	75.245	17	1.1	75.642	54.209	24	1.1	61.519	42.255
10	1.2	37.372	24.351	17	1.2	24.051	14.832	24	1.2	17.462	10.365
10	1.5	6.423	3.830	17	1.5	3.577	2.238	24	1.5	2.494	1.651
10	2	1.989	1.411	17	2	1.316	1.097	24	2	1.118	1.024
11	1.1	94.369	71.267	18	1.1	72.991	52.123	25	1.1	59.798	40.907
11	1.2	34.321	22.401	18	1.2	22.733	13.998	25	1.2	16.729	9.916
11	1.5	5.676	3.466	18	1.5	3.340	2.121	25	1.5	2.385	1.598
11	2	1.797	1.331	18	2	1.268	1.080	25	2	1.101	1.020

Tabela 22: Desempenho dos gráficos de controle G_{S^2} e S^2 – Caso 4

N	δ	$ARL_{1^{G_{S^2}}}$	$ARL_{1^{S^2}}$	N	δ	$ARL_{1^{G_{S^2}}}$	$ARL_{1^{S^2}}$	N	δ	$ARL_{1^{G_{S^2}}}$	$ARL_{1^{S^2}}$
5	1.1	131.690	106.521	12	1.1	90.051	67.755	19	1.1	70.730	50.239
5	1.2	59.734	42.358	12	1.2	31.745	20.697	19	1.2	21.625	13.247
5	1.5	13.115	8.007	12	1.5	5.093	3.166	19	1.5	3.136	2.018
5	2	3.994	2.513	12	2	1.652	1.267	19	2	1.227	1.065
6	1.1	120.871	98.049	13	1.1	86.280	64.573	20	1.1	68.593	48.428
6	1.2	51.562	36.970	13	1.2	29.598	19.235	20	1.2	20.530	12.563
6	1.5	10.369	6.598	13	1.5	4.626	2.917	20	1.5	2.959	1.926
6	2	3.109	2.112	13	2	1.540	1.217	20	2	1.194	1.054
7	1.1	114.464	90.884	14	1.1	85.450	61.656	21	1.1	66.455	46.696
7	1.2	47.120	32.757	14	1.2	29.206	17.926	21	1.2	19.609	11.948
7	1.5	9.044	5.598	14	1.5	4.592	2.706	21	1.5	2.804	1.846
7	2	2.720	1.844	14	2	1.542	1.177	21	2	1.166	1.044
8	1.1	112.782	84.881	15	1.1	81.785	58.956	22	1.1	65.329	45.167
8	1.2	46.118	29.440	15	1.2	27.264	16.790	22	1.2	19.144	11.378
8	1.5	8.758	4.855	15	1.5	4.192	2.527	22	1.5	2.756	1.773
8	2	2.635	1.655	15	2	1.449	1.145	22	2	1.162	1.036
9	1.1	105.568	79.831	16	1.1	78.542	56.498	23	1.1	63.331	43.652
9	1.2	41.270	26.694	16	1.2	25.536	15.752	23	1.2	18.253	10.848
9	1.5	7.408	4.283	16	1.5	3.858	2.373	23	1.5	2.617	1.709
9	2	2.255	1.516	16	2	1.375	1.119	23	2	1.138	1.030
10	1.1	99.629	75.340	17	1.1	75.706	54.263	24	1.1	61.492	42.219
10	1.2	37.419	24.376	17	1.2	24.061	14.837	24	1.2	17.455	10.364
10	1.5	6.421	3.830	17	1.5	3.578	2.238	24	1.5	2.494	1.650
10	2	1.990	1.412	17	2	1.316	1.097	24	2	1.118	1.024
11	1.1	94.397	71.295	18	1.1	73.014	52.139	25	1.1	59.901	40.906
11	1.2	34.303	22.400	18	1.2	22.747	14.006	25	1.2	16.724	9.914
11	1.5	5.676	3.466	18	1.5	3.340	2.121	25	1.5	2.385	1.598
11	2	1.797	1.331	18	2	1.267	1.080	25	2	1.101	1.020