NICOLAS SOUDKI SAAD

**PROPOSTA DE MODELOS DE APREÇAMENTO DE OPÇÕES
EMBTIDAS EM PRODUTOS DE PREVIDÊNCIA NO BRASIL**

**Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção de título de Mestre
em Engenharia**

**São Paulo
2007**

NICOLAS SOUDKI SAAD

**PROPOSTA DE MODELOS DE APREÇAMENTO DE OPÇÕES
EM BUTIDAS EM PRODUTOS DE PREVIDÊNCIA NO BRASIL**

**Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção de título de Mestre
em Engenharia**

**Área de Concentração: Engenharia de
Produção – Economia da Produção e
Finanças**

**Orientadora: Profa. Dra. Celma de
Oliveira Ribeiro**

**São Paulo
2007**

FICHA CATALOGRÁFICA

Saad, Nicolas Soudki

Proposta de modelos de apreçamento de opções embutidas em produtos de previdência no Brasil / N.S. Saad. -- São Paulo, 2007.

p.112

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Produção.

1.Modelagem matemática 2.Opções financeiras 3.Previdência privada 4.Seguro I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Produção II.t.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha esposa Caroline.

AGRADECIMENTOS

À professora Celma Ribeiro, pela orientação e pela motivação transmitida durante a pesquisa.

À minha esposa Caroline, pelo apoio para cursar o mestrado e pelo auxílio na revisão do texto da dissertação.

Aos colegas de trabalho Mario Sergio Felisberto e Renato Ramos, pelo apoio ao desenvolvimento do trabalho e pela confiança depositada.

Aos amigos Carlos Uema, Marcos De Callis e Sandra Petroncare pela contribuição para meu amadurecimento intelectual e pessoal.

Aos meus pais, que desde cedo possibilitaram meu desenvolvimento acadêmico.

RESUMO

Este trabalho de pesquisa quantitativa em gestão de operações de seguradoras apresenta o desenvolvimento de modelos matemáticos para apreamento de opções embutidas em produtos de previdência. O problema de pesquisa se refere à opção concedida aos participantes de planos de previdência aberta, que permite a conversão de um saldo futuro de poupança em renda vitalícia sobre condições pré-estabelecidas. Os modelos apresentados têm o intuito de determinar o valor e as sensibilidades do passivo gerado, considerando os riscos financeiros envolvidos. O problema é tratado em duas etapas. Inicialmente, apresenta-se a modelagem dos riscos assumidos pela seguradora e identificam-se as características da opção concedida, permitindo, sob hipóteses a respeito das condições de investimento e mortalidade, a utilização de modelos consolidados de apreamento de opções financeiras na determinação do passivo em questão. Na segunda parte, analisa-se a utilização de modelos de otimização da carteira de ativos que deve proteger a instituição lançadora do passivo de eventuais oscilações no valor de suas obrigações. Além disso, aplica-se o modelo de apreamento à determinação da taxa de carregamento para participantes representativos, analisando-se as mudanças em seu valor decorrentes de variações nas taxas de juros e nas volatilidades dos ativos objeto. Por fim, apresenta-se a aplicação dos modelos à situação real de uma empresa seguradora. A análise dos resultados obtidos mostra que, embora o valor inicial do passivo seja relativamente baixo, sua alta sensibilidade em relação às taxas de juros e as dificuldades de *hedge* devido ao prazo dos passivos tornam o problema relevante do ponto de vista da instituição seguradora.

ABSTRACT

This work, which consists of quantitative research within operations management, presents the development of mathematical models for pricing options embedded in Brazilian insurance retirement-related products. The problem studied refers to the financial option that an insurance company writes to its clients who purchase open ended retirement plans. Such option allows the participant to purchase, in the date of his or her retirement, an annuity under terms and conditions defined at the date the participant adheres to the plan. Models presented intend to calculate the value and sensibilities of the liability incurred, considering the financial risks involved. The problem is approached in two steps. Firstly, risks acquired by the insurance company are modeled and the characteristics of the option written to the participant are identified. This allows, under certain assumptions for investment choices and mortality behavior, the use of option pricing models traditional in Finance Theory to determine the value of liabilities. Secondly, the use of portfolio optimization models to hedge the insurance company against changes in the value of liabilities is analyzed. Moreover, the pricing model is applied to calculate the adequate fee to be applied to each contribution an individual makes to the plan (known as *taxa de carregamento*). Changes to such adequate fees resulting from changes in interest rate and volatility levels are also analyzed. Finally, the models presented are applied to a real problem of an insurance company. Results achieved indicate that, although the current value of liabilities is relatively small, the significant sensitivity to decreases in interest rates and hedge difficulties stemming from the long maturity of liabilities make the problem relevant from the perspective of the insurance company.

SUMÁRIO

1	Introdução.....	11
1.1	Situação Problema	16
1.2	Objetivos	18
1.3	Aspectos Metodológicos	19
1.4	Estrutura do Trabalho	21
2	Referencial Teórico	23
2.1	Opções Financeiras Embutidas no Contrato de Previdência	23
<i>2.1.1</i>	<i>Risco de sobrevivência</i>	<i>33</i>
<i>2.1.2</i>	<i>Risco de queda nas taxas de juros.....</i>	<i>36</i>
<i>2.1.3</i>	<i>Prêmio pago pelo seguro</i>	<i>38</i>
2.2	Características do Problema de Pesquisa	39
2.3	Revisão Bibliográfica	41
3	Apreçamento da Opção pelo Modelo de Fisher.....	45
3.1	Determinação do ativo objeto	45
3.2	Determinação do preço de exercício	50
3.3	Características da opção	51
3.4	Modelo de Fisher	51
<i>3.4.1</i>	<i>Preço à vista do ativo objeto.....</i>	<i>53</i>
<i>3.4.2</i>	<i>Volatilidade do ativo objeto.....</i>	<i>54</i>
3.5	Ajuste do modelo de Fisher-Black.....	56

4	Gestão da Carteira de Riscos.....	62
4.1	Modelos de Otimização de Carteiras.....	63
4.2	Duração e convexidade.....	66
4.3	Modelo de Imunização	70
4.4	Modelo de dedicação	72
4.5	Determinação dos Parâmetros para os Modelos	75
4.5.1	<i>Estimativa da duração do passivo.....</i>	<i>75</i>
4.5.2	<i>Estimativa da convexidade do passivo.....</i>	<i>77</i>
4.5.3	<i>Estimativa dos fluxos de caixa do passivo equivalente</i>	<i>79</i>
4.6	Limitações dos modelos de otimização	81
5	Aplicação e validação do modelo.	82
5.1	Aplicação na determinação do valor do seguro individual.....	82
5.1.1	<i>Metodologia de aplicação do modelo.....</i>	<i>82</i>
5.1.2	<i>Cálculo do valor do seguro (taxa de carregamento) para diferentes participantes.....</i>	<i>88</i>
5.1.3	<i>Análise de sensibilidade em relação ao nível da taxa de juros real</i>	<i>93</i>
5.1.4	<i>Análise de sensibilidade em relação à volatilidade</i>	<i>95</i>
5.2	Aplicação na determinação do passivo agregado de uma instituição seguradora	97
5.2.1	<i>Levantamento de dados</i>	<i>98</i>
5.2.2	<i>Estimativa do Valor do Passivo</i>	<i>98</i>
5.2.3	<i>Duração e Convexidade do Passivo.....</i>	<i>99</i>
5.2.4	<i>Fluxo de Caixa do Passivo “delta-equivalente”</i>	<i>100</i>
5.2.5	<i>Análises de sensibilidade.....</i>	<i>101</i>

5.3 Aplicação na Otimização da Carteira	102
5.3.1 Método de Implementação dos Modelos	103
5.3.2 Resultados dos Modelos de Otimização	104
5.3.3 Análise dos Resultados da Otimização: Oportunidade para Alongamento da Dívida Pública Interna.....	105
6 Conclusão e Trabalhos Futuros.....	107
REFERÊNCIAS.....	110

1 Introdução

As atividades de seguros e previdência complementar são de fundamental importância para o desenvolvimento econômico dos países no longo prazo.

Por um lado, o setor de seguros permite que os investimentos em atividades produtivas sejam protegidos de riscos exógenos a essas atividades propriamente ditas. Por exemplo, ao suprir indenização a uma cadeia de hotéis na hipótese de um incêndio em um edifício na qual ela opera, a atividade é protegida das consequências econômicas decorrentes desse tipo de risco, e permite-se que os recursos investidos nesse negócio sejam utilizados com maior eficiência nas atividades produtivas. No caso dos seguros de vida e patrimoniais, a atividade das instituições seguradoras permite a redução dos riscos de instabilidade na poupança das famílias, à medida que atenuam os efeitos financeiros gerados por acidentes que causem danos patrimoniais ou falecimentos prematuros.

Os sistemas de previdência complementar, por outro lado, permitem um complemento de renda que auxilia na manutenção do padrão de vida das famílias após a aposentadoria de seus membros. Esses planos agregam volumosos recursos financeiros cujo objetivo de investimento é o de crescimento num horizonte de tempo longo. Por isso, do ponto de vista macroeconômico, os planos de previdência complementar catalisam a formação de poupança de longo prazo de um país. Tal poupança representa oferta de capital aos investimentos produtivos em geral, mas em especial àqueles que possuem como característica longos períodos de maturação.

No caso brasileiro, a atividade de previdência complementar vem ganhando importância em função das deficiências do sistema público no atendimento das necessidades das pessoas com maior renda. Particularmente, os planos de previdência complementar aberta, assim denominados por permitirem a adesão voluntária de qualquer cliente, vêm apresentando expressivo crescimento nos últimos anos. Dessa forma, a arrecadação anual de contribuições para esses planos subiu de R\$1 bilhão em 1995 para R\$7,7 bilhões em 2005, segundo dados da Fenaseg (Federação Nacional das Empresas de Seguros Privados e de Capitalização).

No Brasil, as atividades de seguros e previdência complementar estão fortemente associadas, na medida em que os produtos de previdência complementar aberta são comercializados e garantidos por instituições seguradoras. Dentre os produtos de previdência aberta, destacam-se, pelo crescimento recente, os PGBLs (Plano Gerador de Benefício Livre) e VGBLs (Vida Gerador de Benefício Livre).

Por sua importância para o desenvolvimento econômico, portanto, a indústria de seguros e previdência complementar necessita de uma administração que preze não somente a obtenção de resultados financeiros como também o equilíbrio de longo prazo entre seus ativos financeiros e suas obrigações. Nesse sentido, a adequada modelagem matemática dos riscos de longo prazo a que essas instituições estão sujeitas torna-se importante.

Nesse contexto, a presente pesquisa consiste no estudo dos seguros associados aos planos de previdência complementar aberta. Para apresentar em detalhes a situação problema da pesquisa, cabe descrever mais profundamente o negócio de seguros e sua relação com a previdência complementar aberta.

Com relação às instituições seguradoras, o processo operacional por elas desempenhado, conforme delineado na descrição de Stone; Foss e Machtynger, (1997), consiste no recebimento de uma carteira de riscos, oriundas de seus diversos clientes, em troca de um valor financeiro atrelado a cada risco assumido, e individualmente denominado prêmio do seguro.

Ao agrupar um conjunto de riscos, pode haver situações em que a carteira de riscos assumidos não possua características adequadas de diversificação. Em outras palavras, a carteira de riscos assumida pode ser tal que a ocorrência de um único evento adverso (um terremoto, por exemplo) poderia trazer consequências financeiras desastrosas para a seguradora. Nessa situação, utiliza-se o instrumento denominado resseguro para fazer com que a carteira de riscos se torne adequadamente diversificada. O resseguro consiste na transferência de parte dos riscos a outras instituições seguradoras (usualmente especializadas em resseguros), através do pagamento dos respectivos prêmios deduzidos das margens de distribuição. Para a carteira remanescente, no entanto, continuam existindo riscos não diversificados, especialmente de natureza financeira.

Ao fazer a administração dos recursos recebidos dos clientes (denominados recursos garantidores) de forma eficiente e de modo a proteger-se dos riscos financeiros da carteira, a instituição seguradora gera sua margem de lucro bruta. Naturalmente, conforme ocorre a materialização dos riscos assumidos pela seguradora, os clientes comunicam a organização que, por sua vez, verifica a legitimidade da demanda, resgata os recursos garantidores associados àquele risco e efetua o pagamento do valor segurado, renda etc. ao cliente. As figuras 1 e 2 apresentam o modelo conceitual do processo operacional de uma instituição seguradora, descrito acima.

Figura 1 – O processo operacional de uma instituição seguradora

Figura 2 – Geração da margem bruta de uma instituição seguradora

Conforme apresenta a figura 2, a correta administração dos riscos financeiros é muito importante para o processo de geração de valor na indústria de seguros. Essa etapa do processo operacional engloba a identificação dos riscos sistemáticos e dos riscos não passíveis de proteção, o dimensionamento do resseguro, o dimensionamento dos valores necessários para cobertura dos riscos (ou seja, do custo associado aos riscos dos seguros oferecidos), a modelagem dos riscos financeiros que afetam esses custos, a definição dos instrumentos de proteção e a quantificação da utilização desses instrumentos.

A natureza dos riscos transferidos para as instituições seguradoras pode ser bastante diversa. O exemplo clássico se refere ao risco patrimonial. Nesse caso, a seguradora assume o risco financeiro de um determinado ativo sofrer danos por um certo período de tempo. Dessa forma, quando se faz o seguro de um automóvel pelo período de 1 ano, transfere-se à instituição seguradora os custos associados ao conserto do veículo no caso de acidente, incêndio, etc. Em outras palavras, o segurado adquire (compra) da seguradora o direito de dela cobrar os prejuízos decorrentes dos reparos ao veículo.

Outro risco comumente transferido é o risco financeiro causado por falecimento prematuro ou invalidez. Quando um cliente faz um seguro de vida e acidentes

pessoais, está transferindo à seguradora (parcial ou integralmente) o impacto financeiro que esses eventos poderiam trazer a ele ou a sua família.

Naturalmente, a instituição seguradora, ao assumir qualquer um dos riscos descritos acima, e portanto ao conceder qualquer um dos direitos descritos aos segurados, assume obrigações financeiras para com eles. Essas obrigações assumidas pela seguradora (as apólices de seguro) podem ser entendidas portanto como passivos intangíveis. Tratam-se de passivos porque, a partir da ocorrência dos eventos previstos na apólice, os detentores dessas apólices passam a ter o direito de receber os valores financeiros correspondentes da seguradora. Portanto, para assumir essas obrigações, que têm valor financeiro, a seguradora cobra o prêmio (preço) do seguro. O objetivo da seguradora é, conforme descrito, agregar um grande número de apólices, cujos riscos assumidos estejam preferencialmente pulverizados, de forma que, em média, os valores cobrados na forma de prêmio superem os pagamentos de indenizações, gerando lucro.

Por outro lado, as instituições seguradoras podem assumir um tipo de risco de natureza diferente dos descritos anteriormente. Tratam-se dos riscos de natureza previdenciária. Um exemplo desse tipo de risco é a possibilidade de um indivíduo viver por um longo período de tempo após sua aposentadoria, consumindo todos os seus recursos financeiros acumulados no período de atividade. Isso é um risco relevante para o indivíduo, uma vez que o término prematuro desses recursos traz, no mínimo, a oneração financeira das gerações mais jovens da família. Os seguros que protegem os clientes desses tipos de riscos são, portanto, de natureza previdenciária. Em resumo, esse tipo de seguro protege os detentores de apólice de riscos tais como o “risco de sobrevivência” acima descrito.

Essa possibilidade levou à associação, no Brasil, dos produtos de previdência complementar aberta às instituições seguradoras. Esse é o tipo de seguro que será examinado em detalhes neste trabalho. No caso dos produtos em questão, a instituição seguradora comercializa, juntamente com o plano de previdência, seguros desenhados para proteger os participantes dos riscos previdenciários. Na seção 1.1, descreve-se conceitualmente o seguro atrelado aos planos de previdência complementar aberta, apresentando-se em maiores detalhes o problema a ser abordado nesta pesquisa.

1.1 Situação Problema

A norma que determina os requerimentos e procedimentos a serem seguidos pelos planos de previdência complementar aberta e pelos contratos de seguros a eles atrelados é a Resolução No. 139 do Conselho Nacional de Seguros Privados – CNSP – de 27 de dezembro de 2005 (MINISTÉRIO DA FAZENDA, 2005). Baseando-se nessa resolução, pode-se descrever o funcionamento dos planos de previdência aberta no Brasil de forma a apresentar o contrato de seguro que se pretende analisar nesse trabalho.

Tomemos, dessa forma, um indivíduo que decide aderir a um plano de previdência complementar aberta. O objetivo desse investidor é o de formar uma poupança para ser consumida como complemento de rendimentos após o momento de sua aposentadoria. Esse objetivo se justifica, no caso desse indivíduo hipotético, pelo fato de que o valor máximo de benefício pago na forma de aposentadoria pela previdência oficial é inferior ao que considera necessário para a manutenção de seu padrão de vida após a aposentadoria.

A formação de tal poupança se dará através de contribuições periódicas a serem realizadas pelo investidor ao longo do período anterior à sua aposentadoria. Esse período é denominado período de acumulação. Ao aderir a um plano de previdência complementar aberta comercializado por uma instituição seguradora, é criada para o indivíduo uma conta individual de previdência na qual as contribuições periódicas serão agrupadas. Passa-se então a denominar o investidor de participante do plano de previdência. O participante pode então determinar discricionariamente o valor e a periodicidade das contribuições. Essas decisões dependem principalmente de quanto o participante deseja acumular até a data de sua aposentadoria, mas também são afetadas por considerações de cunho fiscal. As contribuições realizadas pelo participante são então aplicadas em fundos de investimento, e a rentabilidade obtida através desses fundos, líquida de taxas de administração, é adicionada ao saldo de poupança do investidor.

Cabe destacar que, até esse ponto da apresentação da situação problema, a instituição seguradora não atuou como tal, pois não assumiu nenhum risco do participante. Isso é válido até mesmo em relação ao risco dos investimentos durante o período de acumulação. Em outras palavras, após a seleção da política de

investimentos melhor adequada ao seu perfil, o participante assume todo o risco do investimento, pois a ele é transferido integralmente o resultado financeiro da aplicação no fundo.

Suponhamos então que, tendo aderido ao plano e contribuído para o mesmo durante o período de acumulação, o participante tenha conseguido, na data da aposentadoria, atingir um objetivo de poupança que havia estabelecido. Essa poupança será gradativamente consumida após a data da aposentadoria, através de resgates, para ser utilizada como complemento do benefício pago pelo sistema público de aposentadorias.

A Figura 3 esquematiza a evolução até aqui descrita da formação da poupança pelo participante e de seu posterior consumo.

Figura 3 – Acumulação de poupança por um participante hipotético

Naturalmente, a poupança constituída terá sido adequada se o participante puder resgatar seu complemento de renda até a data de seu falecimento, sem que seu saldo de poupança seja consumido anteriormente a esta data. No entanto, ao realizar o planejamento de sua aposentadoria, o participante desconhece duas variáveis de fundamental importância para determinar se sua poupança será suficiente para manter seu padrão de vida após a aposentadoria. Essas variáveis são:

1. quanto o participante vai viver após a data de aposentadoria. Se o participante apresentar uma longevidade maior, poderá consumir prematuramente os recursos acumulados em sua conta de poupança;
2. quanto será possível obter como rendimento da poupança após a data de aposentadoria. Se a rentabilidade possível de ser obtida para a

poupança acumulada for menor, um mesmo saldo será consumido mais rapidamente, podendo se extinguir antes da data de falecimento.

Para que o participante do plano possa se proteger dessas duas situações indesejadas, na data em que ocorre sua adesão ao plano, a instituição seguradora, atuando como tal, assume ambos os riscos acima mencionados. Mais do que isso, a instituição seguradora concede o direito ao participante de, no futuro, trocar seu saldo de poupança acumulado por uma renda fixa mensal vitalícia, corrigida pela inflação. Cabe notar que esse direito difere dos direitos concedidos no caso de seguros patrimoniais, como por exemplo o seguro de um carro. Isso ocorre porque, no caso do seguro associado ao plano, o participante adquire o direito de escolher entre permanecer com seu saldo de poupança ou trocá-lo por uma renda fixa. No caso do seguro do carro, por outro lado, o recebimento do direito (indenização) está condicionado à ocorrência de um sinistro, e não à vontade do segurado.

Esses dois riscos são o cerne da situação problema que se deseja estudar. Ao assumi-los na data de adesão ao plano, a instituição seguradora efetivamente vende um contrato de seguro ao participante. Assim, conforme esquematizado na Figura 1, a instituição seguradora deve cobrar do participante um prêmio, que deverá englobar o custo financeiro de assumir os riscos de sobrevida e de baixa rentabilidade, adicionado da margem de lucro da mesma. Esse prêmio é denominado taxa de carregamento, e será tratado em maiores detalhes no capítulo 2.

Pelo lado da seguradora, portanto, é essencial conhecer o custo efetivo do direito concedido ao participante, para determinar adequadamente a taxa de carregamento a ser cobrada. Além disso, quando uma instituição seguradora comercializa constantemente os produtos de previdência aberta acima mencionados, ela assume uma carteira de riscos e, ao mesmo tempo, coleta os prêmios a ela associados. Dessa forma, assim como esquematizado na Figura 2 a seguradora precisa administrar de forma eficiente os ativos garantidores de forma a se proteger dos riscos assumidos pela comercialização dos planos de previdência.

1.2 Objetivos

Conforme destacado anteriormente, é de fundamental importância para a instituição seguradora conhecer o valor do direito que concede a cada participante

que adere ao plano de previdência, para que possa determinar adequadamente o prêmio a ser cobrado.

Assim, o primeiro objetivo do presente trabalho é apresentar uma modelagem matemática que determine o valor do direito que a instituição seguradora concede ao participante na data da adesão ao plano. Além disso, essa pesquisa visa aplicar esses modelos e apresentar as taxas de carregamento adequadas a serem cobradas de cada participante em função de suas características específicas.

Ao se determinar o valor do direito concedido a cada participante, é possível também determinar o valor total das obrigações assumidas pela seguradora em sua carteira previdenciária. Além de representar o custo associado a cada contrato, portanto, a modelagem mencionada objetiva determinar o valor total do passivo já assumido pela instituição seguradora.

No entanto, não basta à seguradora conhecer o valor das obrigações assumidas. Conforme indicado na Figura 2, faz-se também necessária a administração adequada dos recursos garantidores, de forma a se proteger dos riscos sistemáticos a que está sujeita. Outro objetivo desse trabalho será, portanto, apresentar a aplicação de técnicas de otimização que permitam determinar as estratégias de investimento que protejam adequadamente a instituição seguradora dos riscos sistemáticos a que sua carteira está exposta.

Por fim, o presente trabalho tem o objetivo de aplicar a modelagem desenvolvida e as técnicas de otimização propostas à situação de uma seguradora que comercializa planos de previdência aberta.

1.3 Aspectos Metodológicos

No que se refere ao método de pesquisa, o desenvolvimento de modelos matemáticos corresponde, no universo da pesquisa em gestão de operações, à pesquisa quantitativa. Conforme a tipologia de pesquisa apresentada por Will; Bertrand e Fransoo (2002), a pesquisa em questão se caracteriza, na subdivisão da pesquisa quantitativa, como pesquisa quantitativa axiomática normativa e, em menor grau, como pesquisa quantitativa empírica descritiva.

Will; Bertrand e Fransoo (2002) descrevem as etapas do processo de produção de teoria através da pesquisa quantitativa em gestão de operações. As quatro

etapas apresentadas são a conceptualização, modelagem, solução e implementação. Essas etapas percorrem respectivamente e ciclicamente o problema real, o modelo conceitual, o modelo científico e a solução. Os autores chamam a atenção para a confusão de “atalhos” com as fases em si do modelo, levando os pesquisadores a asserções imprecisas.

Ainda conforme esses autores, na pesquisa axiomática descritiva, há apenas as fases de conceptualização e modelagem, sendo esta última a fase central. Na pesquisa axiomática normativa, estende-se pesquisa axiomática descritiva na fase de solução do modelo. Os resultados dessa pesquisa podem ser realimentados ao modelo, mas essa etapa (“atalho”) não pode ser confundida com a implementação. Para a pesquisa empírica descritiva, o ciclo percorrido é o de conceptualização, modelagem e validação, sendo esta última a associação do modelo científico ao problema real. Por fim, a pesquisa empírica normativa percorre o ciclo completo, e busca construir a pesquisa a partir de conhecimento já produzido.

A etapa de conceptualização do processo operacional correspondeu à criação do modelo conceitual do negócio de seguros, cujo resultado está apresentado nas figuras 1 e 2. A modelagem e solução do modelo serão apresentadas nas seções 3, 5.1.2 e 5.2.2. Entende-se que o componente normativo da pesquisa reside na prescrição do custo associado ao seguro vendido, que deve ser utilizado na determinação das taxas de carregamento.

A etapa de aplicação da modelagem ao caso da seguradora em questão, com posterior análise de sensibilidade e análise dos resultados obtidos, consiste no que Will; Bertrand e Fransoo (2002) denominam validação, uma etapa da pesquisa quantitativa empírica descritiva em que se faz uma verificação da situação prescrita pela teoria para o caso em questão.

Sob esse referencial, os autores propõe que o trabalho seja dividido metodologicamente e apresentado em cinco etapas. A primeira etapa corresponde ao desenvolvimento conceitual, cujo principal resultado está apresentado nas figuras 1 e 2. A seguir, desenvolve-se o modelo científico, baseado na teoria de finanças. Esse modelo engloba a utilização dos modelos tradicionais para apreçamento das opções e a modelagem do valor financeiro futuro da opção. A terceira etapa da pesquisa corresponde à solução dos modelos. A quarta etapa, ainda

correspondendo à pesquisa axiomática normativa, é representada pela análise dos resultados obtidos através das duas diferentes modelagens à luz da lógica do modelo conceitual. Essa etapa consiste no que Will; Bertrand e Fransoo (2002) denominam *feedback narrow sense* e, embora limitada no sentido de produção de afirmações relacionadas à implementação, pode ser útil para verificar a consistência interna da modelagem apresentada.

Por fim, a etapa de tomada de dados e aplicação do modelo à situação real em questão corresponderá à validação do modelo, ou seja, à pesquisa empírica descritiva. Naturalmente essa etapa englobará a identificação das hipóteses e dos processos, as definições operacionais dos processos, a tomada de dados e aplicação do modelo e as análises de sensibilidade e interpretação dos resultados em relação às hipóteses.

1.4 Estrutura do Trabalho

Este texto está dividido em cinco partes. Na seção 2, apresenta-se o referencial teórico utilizado para modelagem do problema, com a caracterização do direito concedido ao participante como uma opção financeira. Apresentam-se também a definição das variáveis relevantes para o problema de pesquisa e os resultados da revisão bibliográfica.

No capítulo 3, desenvolve-se uma modelagem matemática para determinação do preço da opção caracterizada na seção anterior, válida sob a hipótese de que os investimentos do participante são feitos em ativos de renda fixa. Com a determinação do valor da opção, calculam-se tanto o custo do direito concedido quanto o valor total do passivo da seguradora.

Na seção 4, discutem-se os modelos de otimização que podem ser utilizados para a adequada administração dos riscos aos quais a instituição seguradora fica sujeita pela comercialização de seus produtos de previdência. Apresentam-se, também, os desenvolvimentos do modelo proposto no capítulo 3 necessários à implementação dos modelos de otimização.

Na parte 5, aplica-se a modelagem proposta na seção 3 e os modelos de otimização propostos na seção 4 em duas etapas. Inicialmente, é apresentada a aplicação do modelo para a determinação do custo do seguro para diferentes

participantes, e elaboram-se as análises de sensibilidade para esse custo. A seguir, aplica-se a modelagem a uma carteira de clientes de uma instituição seguradora que investem em fundos de renda fixa. Apresenta-se também a análise de sensibilidade dos resultados em relação às principais variáveis.

Por fim, no capítulo 6, discutem-se as principais conclusões obtidas da pesquisa e propõem-se desenvolvimentos futuros ao presente trabalho.

2 Referencial Teórico

O objetivo deste capítulo é aprofundar a modelagem da situação problema identificada no capítulo 1 e apresentar os resultados da revisão bibliográfica sobre o problema de pesquisa e o referencial teórico a ser utilizado no modelo matemático do seguro em estudo.

2.1 Opções Financeiras Embutidas no Contrato de Previdência

Um opção financeira, ou simplesmente opção, corresponde genericamente a um contrato que transfere um direito entre duas partes. A partir dessa definição, já se verifica a analogia com um seguro. O seguro de um automóvel, por exemplo, corresponde ao direito de o detentor do seguro receber uma indenização contingencialmente à ocorrência de eventos adversos, como um acidente envolvendo o veículo ou um incêndio no mesmo.

As opções financeiras mais comuns, denominadas opções *plain vanilla*, são as opções de compra e opções de venda. Opções de compra são contratos que transferem ao seu titular o direito de comprar um determinado ativo. A parte do contrato que assume a obrigação de vender o ativo é denominada lançador da opção. Analogamente, opções de venda são contratos que transferem ao seu titular o direito de vender um determinado ativo (DAMODARAN, 2002). Por corresponderem a um direito, ou seja, a um ativo intangível, as opções tem valor financeiro. Assim, como o lançador da opção concede ao titular o direito de negociar o ativo sem a obrigação de fazê-lo, ele (lançador) deve ser remunerado pela venda da opção. Denomina-se prêmio da opção o valor financeiro pago pelo titular ao lançador, na data da iniciação do contrato, para compensá-lo pela transferência do direito. Não por acaso, o valor pago às instituições seguradoras como compensação pela transferência dos riscos é também denominado prêmio.

Naturalmente, os contratos correspondentes às opções estabelecem as condições nas quais o direito transferido pode ser exercido. Assim, uma opção de compra será caracterizada não somente pelo ativo sobre o qual há o direito de compra (denominado ativo objeto) como também pelo preço pelo qual esse ativo poderá ser comprado (preço de exercício) e pela data na qual o contrato expira (data de vencimento). A possibilidade de exercício ao longo do período de vigência do

contrato também é uma característica da opção. Se a opção dá ao titular a possibilidade de exercer o direito de compra a qualquer tempo durante a vigência do contrato, a opção é denominada americana. Se, por outro lado, o detentor somente pode exercer o direito de compra na data de vencimento, a opção denomina-se européia.

Portanto, para se especificar completamente uma opção *plain vanilla*, são necessárias as seguintes características:

- O ativo objeto
- O direito transferido (compra ou venda)
- O preço de exercício
- A data de vencimento
- A característica em termos do direito de exercício (européia ou americana)

Além de identificar a opção, as características enumeradas anteriormente permitem calcular, na data de vencimento, o lucro ou perda obtido pelo titular de uma opção européia. Nessa data, o direito de adquirir o ativo vai ser tanto maior quanto maior for o preço do ativo. De fato, se o preço do ativo objeto for superior ao preço de exercício da opção na data de vencimento, ao exercer seu direito o titular terá um lucro igual à diferença entre o preço do ativo e o preço de exercício. Assim, o lucro total do titular com a operação será igual à diferença entre o lucro obtido com o exercício e o prêmio pago pela opção (corrigido pela taxa de juros). Por outro lado, se o preço do ativo objeto for inferior ao preço de exercício da opção, o titular, que não tem a obrigação de exercer a opção, terá apenas um prejuízo igual ao valor do prêmio pago. A Figura 4 apresenta o gráfico de ganhos e perdas obtido por um investidor que compra uma opção de compra, na data do vencimento.

Figura 4 – Lucro obtido pelo titular de uma opção de compra na data do vencimento

Para uma opção de venda, se o preço do ativo objeto for inferior ao preço de exercício da opção na data de vencimento, ao exercer seu direito o titular terá um lucro igual à diferença entre o preço de exercício e o preço do ativo. O seu lucro total com a operação será igual à diferença entre o lucro obtido com o exercício e o prêmio corrigido. Por outro lado, se o preço do ativo objeto for superior ao preço de exercício da opção, o titular terá um prejuízo igual ao valor do prêmio pago. A Figura 5 apresenta o gráfico de ganhos e perdas obtido por um investidor que compra uma opção de venda, na data do vencimento.

Figura 5– Lucro obtido pelo titular de uma opção de venda na data do vencimento

Tendo apresentado esses conceitos básicos a respeito das opções financeiras, pode-se voltar à situação proposta na introdução e discutir a analogia existente entre o direito concedido ao participante do plano no problema de interesse e uma opção de compra européia.

Na situação em estudo, o participante aderiu a um plano de previdência complementar aberta e, nessa data, transferiu à instituição seguradora tanto o risco de sobreviver por um período de tempo superior ao esperado quanto o risco de a rentabilidade obtida sobre a poupança acumulada ser menor que a esperada. O risco de sobrevivência é conhecido como risco atuarial, enquanto o risco de queda na rentabilidade é denominado risco financeiro. Cabe destacar que esses riscos serão materializados apenas na data da aposentadoria, ou seja, como discutido anteriormente, a instituição seguradora não dará ao participante nenhuma garantia em relação ao que ocorrerá com a poupança do participante até então.

No escopo desta pesquisa, assumiremos que o participante do plano somente poderá exercer seus direitos em relação à instituição seguradora na data de sua aposentadoria. Surge daí uma primeira semelhança entre a situação problema e uma opção européia. Essa semelhança corresponde ao fato de que tanto o direito do participante do plano quanto o direito do titular da opção européia são adquiridos

em uma data inicial e poderão ser exercidos somente em uma data futura. Portanto, a data de aposentadoria do participante, quando ele exerce seus direitos em relação à seguradora, corresponde à data de vencimento da opção existente na situação problema.

Para detalhar a semelhança entre a situação em análise e a opção européia, é necessário desenvolver matematicamente o problema apresentado na introdução. Em outras palavras, cabe destacar como a seguradora assume contratualmente os riscos atuariais e financeiros do participante sem dar garantias relacionadas a seu saldo de poupança.

Suponhamos, inicialmente, que o participante em questão faz, na data de adesão ao plano $t = 0$, uma contribuição única de valor A_0 ao plano de previdência. Essa contribuição é então aplicada e gerida segundo a política de investimentos escolhida, de forma que seu valor oscila entre a data da contribuição e a data de aposentadoria que será chamada $t = T_a$, conforme indicado na Figura 6 a seguir.

Figura 6 – Evolução de uma contribuição única realizada pelo participante

O risco do participante consiste no fato de que ele não sabe, em $t = 0$, por quanto tempo seu saldo acumulado até a data da aposentadoria A_{T_a} poderá prover um certo complemento de renda, após tal aposentadoria. Para que o participante

pudesse calcular, no instante inicial, a renda que poderia ser obtida com seu saldo acumulado, precisaria conhecer o número de meses que viverá após a aposentadoria (v) e as taxas de juros reais praticadas pelo mercado em $t = T_a$. Chamando de $R(m)$ a taxa de juros real praticada em T_a , para o prazo de m meses ($m = 1, 2, 3, \dots, v$), o saldo final do participante seria suficiente para “comprar”, na data da aposentadoria, **a preço de mercado**, uma renda mensal RM tal que:

$$A_{T_a} = \sum_{m=1}^v \frac{RM}{(1 + R(m))^{m/12}} \quad (1)$$

Observe que a utilização da taxa de juros real em vez da taxa nominal permite que a renda mensal obtida RM esteja em valores reais, ou seja, permite que a renda recebida seja corrigida pelas taxas de inflação de forma a manter seu poder de compra até a data de falecimento do participante. Isso permite desconsiderar, nos cálculos do modelo, o índice de reajuste escolhido, desde que todas as taxas de juros utilizadas nos cálculos sejam as taxas reais para aquele indexador.

Em outras palavras, o que a equação (1) indica é que a renda obtida em $t = T_a$ dependerá tanto das taxas de juros reais vigentes nesse instante quanto do tempo de recebimento do benefício esperado. Essa situação está ilustrada na Figura 7.

Figura 7 - Risco de conversão do saldo final de poupança em renda

Como indicado, no entanto, a seguradora assumirá do participante os riscos da conversão de seu saldo final em renda. Para isso, estabelecerá contratualmente, **na data de adesão ao plano, os parâmetros para conversão do saldo final A_{T_a} em uma renda vitalícia RM** . Mais especificamente, o contrato com a seguradora fixará:

1. A **taxa contratual** de juros reais a ser utilizada para a conversão do saldo final em renda vitalícia. Essa taxa de juros contratual será denominada R_c .
2. A **tábua atuarial** a ser utilizada. A tabela atuarial corresponde a um mapeamento das expectativas de sobrevivência dos indivíduos da população de interesse, em função de sua idade. Ou seja, o contrato fixará o número de meses a ser utilizado no cálculo da renda, que denominaremos v_c . Cabe frisar que esse valor, embora fixado contratualmente, depende da idade do participante na data da aposentadoria. Ou seja, se denominarmos por x a idade do participante em $t = 0$, teremos que v_c será uma função de $x + T_a$: $v_c = v_c(x, T_a)$. Assumiremos, para esta pesquisa, que a data da aposentadoria T_a é conhecida.

Com essas garantias, é possível calcular a renda mensal vitalícia real RM_c que é contratualmente garantida ao participante a partir de sua idade atual x , do tempo até sua aposentadoria T_a e de seu saldo final de poupança A_{T_a} . Para isso, basta retomar e resolver a equação (1), substituindo v por v_c e $R(m)$ por R_c :

$$A_{T_a} = \sum_{m=1}^{v_c(x+T_a)} \frac{RM_c}{(1 + R_c)^{m/12}} = RM_c \times \sum_{m=1}^{v_c(x+T_a)} \frac{1}{(1 + R_c)^{m/12}} \quad (2)$$

Em (2), nota-se que a renda mensal garantida pela seguradora é proporcional ao saldo final do participante A_{T_a} , e que a proporcionalidade é uma função das variáveis fixadas contratualmente R_c e $v_c(x + T_a)$. Para simplificar a notação, chamaremos o somatório da equação (2), de $1/g$. Naturalmente, esse fator dependerá da taxa de juros contratual, da tábua atuarial contratual e da idade do participante na data da aposentadoria:

$$1/g = \sum_{m=1}^{v_c(x+T_a)} \frac{1}{(1 + R_c)^{m/12}} \quad (3)$$

$$A_{T_a} = RM_c \times 1/g \Rightarrow RM_c = g \times A_{T_a} \quad (4)$$

Retomando a análise da Figura 7, com as garantias contratuais agora oferecidas ao participante, é possível calcular a renda vitalícia recebida **caso o participante exerça seu direito em relação à instituição seguradora**. Ou seja, ao chegar a data da aposentadoria $t = T_a$, o participante estará num ponto de escolha, assim como o titular de uma opção européia na data do vencimento. Por um lado, o participante pode continuar com seu saldo final de poupança A_{T_a} . Por outro lado, pode convertê-lo em uma renda mensal vitalícia usando as equações (2) a (4), conforme ilustrado na Figura 8.

Figura 8 – Garantia de conversão oferecida contratualmente pela instituição seguradora

Cabe notar que, nessa figura, indicou-se como o último mês do recebimento da renda a data efetiva de falecimento do participante (v), e não a data utilizada no cálculo de seu benefício (v_c). Isso ocorre porque, independentemente do parâmetro utilizado para o cálculo da renda vitalícia, a seguradora tem a obrigação de pagar o benefício ao participante até a data de seu falecimento, caso seja escolhida tal alternativa. Dessa forma, se houver alguma alteração na expectativa de vida do participante, a instituição seguradora deve assumir a hipótese mais realista para o prazo de pagamento da renda, eventualmente usando um valor diferente de v_c para tal expectativa de vida.

Retomando, na data da aposentadoria, o participante deverá optar entre:

1. Receber uma renda mensal vitalícia RM_c em troca de seu saldo acumulado no plano A_{T_a} , ou
2. Continuar com o saldo A_{T_a} .

Assumiremos, neste trabalho, que o participante decide entre as opções 1 e 2 indicadas acima de forma racional e baseado somente no **valor financeiro de sua riqueza** em cada uma das alternativas. O valor financeiro da alternativa 2 é o próprio saldo acumulado A_{T_a} . No entanto, é preciso determinar o valor financeiro, em $t = T_a$,

do fluxo de pagamentos da opção 1, que está indicado na parte direita da Figura 8. Para isso, basta descontar tal fluxo de caixa pelas taxas de juros reais de mercado **vigentes na data da aposentadoria**. Diferentemente da taxa de juros contratual, a taxa de mercado não é constante em relação ao prazo de vencimento, então, para cada fluxo mensal deve ser utilizada a taxa de juros aplicável ao prazo em questão. Chamando o valor presente desses fluxos de valor de mercado da renda contratual V_m , tem-se:

$$V_m = \sum_{m=1}^v \frac{RM_c}{(1 + R(m))^{m/12}} \quad (5)$$

Levando (4) em (5), tem-se:

$$V_m = \sum_{m=1}^v \frac{g \times A_{T_a}}{(1 + R(m))^{m/12}} = A_{T_a} \times g \times \sum_{m=1}^v \frac{1}{(1 + R(m))^{m/12}} \quad (6)$$

Na data da aposentadoria, o participante escolherá entre as opções 1 e 2 segundo o seguinte critério:

- Se $V_m \geq A_{T_a}$, o participante troca seu saldo acumulado por uma renda vitalícia.
- Se $V_m < A_{T_a}$, o participante mantém seu saldo A_{T_a} .

Optou-se por incluir a igualdade na primeira alternativa pois isso corresponde a um participante que é avesso ao risco no sentido de que, na situação de indiferença, opta pela garantia de renda vitalícia.

Neste ponto, é possível estender a analogia da situação em estudo com a situação da opção financeira. Para isso, tomemos o exemplo de um participante com idade de 35 anos para o qual o contrato estabelecido com a seguradora garante a conversão do seu saldo em renda conforme as seguintes condições:

- Taxa de juros reais de 6% a.a. ($R_c = 0,06$)
- Idade de aposentadoria: 65 anos ($T_a = 65 - 35 = 30$)
- Expectativa de vida na data de aposentadoria: 15 anos ($v_c = 12 \times 15 = 180$ meses)

Nesse caso, pode-se calcular o fator de conversão da poupança acumulada em renda através de (3):

$$1/g = \sum_{m=1}^{180} \frac{1}{(1 + 0,06)^{m/12}} \Rightarrow g = 0,0083529 \quad (7)$$

Suponhamos, adicionalmente, que o saldo de poupança acumulado pelo participante seja de R\$100.000 ($A_{T_a} = 100.000$). Conforme (4), o participante poderá optar entre:

1. Uma renda mensal vitalícia de $100.000 \times 0,0083529 = R\$835,29$ ou
2. O valor acumulado de R\$100.000.

Para determinar a opção do participante, é preciso calcular o valor da renda obtida na alternativa 1.

2.1.1 Risco de sobrevivência

Analisemos primeiro a garantia de pagamento da renda sob a ótica do risco de longevidade. Para isso, suponhamos as taxas de juros reais de mercado constantes e iguais a 6% a.a. ao longo de todo o período entre $t = 0$ e $t = T_a$, ou seja, que $R(m) = 0,06; 1 \leq m \leq v$. Nesse caso, a equação (5) torna-se:

$$V_m = 100.000 \times 0,0083529 \times \sum_{m=1}^v \frac{1}{(1 + 0,06)^{m/12}} = 835,29 \times \sum_{m=1}^v \frac{1}{(1 + 0,06)^{m/12}} \quad (8)$$

A partir da equação (8), observa-se que o valor de mercado da renda vitalícia dependerá do tempo efetivo de sobrevivência do participante após sua aposentadoria. O gráfico da Figura 9 compara o valor de mercado da renda vitalícia com o valor do saldo do participante em função do tempo ele espera viver após a aposentadoria. Observa-se que o valor da renda somente é superior ao valor do saldo se o participante espera viver mais que a idade estabelecida contratualmente, ou seja, 15 anos.

Figura 9 – Valor de mercado da renda vitalícia e da poupança acumulada em função do tempo de sobrevivência do participante após a aposentadoria

Portanto, na data da aposentadoria (data de exercício), se o participante espera sobreviver por mais de 15 anos, ele opta pela renda vitalícia. Caso contrário, decide por manter seu saldo no plano. Em outras palavras, o valor do seu direito, na data da decisão é igual a:

- $V_m - A_{T_a}$, se $v \geq 180$ meses ou
- Zero, se $v < 180$ meses.

O gráfico da Figura 10 indica o valor do direito do participante na data de escolha em função de sua expectativa de vida efetiva.

Figura 10 – Valor do direito de escolha do participante na data da aposentadoria

Observando-se a semelhança entre o gráfico da Figura 10 e o diagrama da Figura 4, conclui-se que a transferência do risco de sobrevivência do participante para a seguradora corresponde, para o primeiro, a uma opção de compra sobre o seu tempo de sobrevivência após a aposentadoria. As características dessa opção estão resumidas na Tabela 1 a seguir.

Tabela 1 – Características da opção associada ao risco de sobrevivência

Ativo Objeto	tempo de sobrevivência
Direito Transferido	direito de compra
Preço de Exercício	15 anos
Data de Vencimento	em 30 anos
Tipo de Exercício	européu

Para o escopo dessa pesquisa, conforme será detalhado no capítulo 3, o tempo efetivo de sobrevivência do participante será tratado como determinístico. Isso quer dizer que a data de falecimento do participante será conhecida na data da análise. No entanto, isso não impede que se considere o risco de sobrevivência para as apólices de seguro já concedidas, conforme será detalhado também no capítulo 3.

2.1.2 Risco de queda nas taxas de juros

Seguindo o exemplo introduzido na seção anterior, será analisado o risco financeiro que é assumido pela instituição seguradora ao conceder o direito de conversão ao participante. O seguro concedido em relação ao risco financeiro constitui o principal aspecto a ser modelado neste trabalho. Admita-se, assim, que a data de falecimento do participante é conhecida na data em que é feita a contribuição inicial, e que ela seja de fato de 15 anos na data da aposentadoria. Suponhamos, no entanto, que a taxa de juros real em $t = T_a$ não seja conhecida em $t = 0$, mas que seja constante em relação ao prazo de vencimento, ou seja, que $R(m) = R$ na data da aposentadoria. Nesse caso, a equação (5) torna-se:

$$V_m = 100.000 \times 0,0083529 \times \sum_{m=1}^{180} \frac{1}{(1 + R)^{m/12}} = 835,29 \times \sum_{m=1}^{180} \frac{1}{(1 + R)^{m/12}} \quad (9)$$

Em (9), observa-se que o valor de mercado da renda vitalícia dependerá, agora, do valor da taxa de juros reais de mercado praticadas em $t = T_a$. Pode-se então construir um gráfico análogo ao da Figura 9, mas agora em função da taxa de juros praticada na data da aposentadoria:

Figura 11 - Valor de mercado da renda vitalícia e da poupança acumulada em função da taxa de juros real de mercado na data da aposentadoria

Portanto, se a taxa de juros real na data de decisão for menor ou igual a 6% a.a., o participante opta pela renda vitalícia. Caso contrário, decide por manter seu saldo no plano. Em outras palavras, o valor do seu direito, na data da decisão, é igual a:

- $V_m - A_{T_a}$, se $R \leq 6\%$ a.a. ou
- Zero, se $R > 6\%$ a.a.

O gráfico da Figura 12 indica o valor do direito do participante na data de escolha em função da taxa de juros reais praticada em $t = T_a$.

Figura 12 – Valor do direito de escolha do participante na data da aposentadoria

Nesse caso, fica clara a analogia entre o valor final do direito do participante e o valor de exercício de uma opção de venda sobre o nível da taxa de juros real. A Tabela 2 apresenta as características da opção com essas características.

Tabela 2 – Características da opção associada ao risco de taxa de juros real

Ativo Objeto	taxa de juros real
Direito Transferido	direito de venda
Preço de Exercício	6% a.a.
Data de Vencimento	em 30 anos
Tipo de Exercício	européu

Como se pode ver, o direito adquirido pelo participante ao fazer uma contribuição de valor A_0 ao plano de previdência pode ser modelado como uma opção de venda sobre a taxa de juros real. Naturalmente, é necessário, no desenvolvimento do modelo, considerar a não linearidade presente no gráfico da Figura 12. Isso será elaborado no desenvolvimento da modelagem no capítulo 3.

2.1.3 Prêmio pago pelo seguro

Como se pôde observar pela argumentação da seção anterior, o seguro concedido ao participante quando este adere ao plano pode ser considerado análogo a uma opção de venda sobre a taxa de juros. Mais do que isso, a cada

contribuição realizada, a instituição seguradora atua como lançadora de uma nova opção de venda. Portanto, a cada contribuição realizada, a instituição deveria cobrar um prêmio pelo seguro de conversão em renda adicional concedido. De fato, a instituição seguradora cobra uma taxa sobre cada contribuição realizada. Essa taxa é denominada **taxa de carregamento** e corresponde a um percentual **fixo** da contribuição realizada.

Voltamos, assim, a um dos objetivos do trabalho, apresentado na seção 1.2 da Introdução. Esse objetivo é a determinação do valor de cada seguro (opção) concedido ao participante quando este faz uma contribuição adicional ao plano. Ao se comparar o valor do seguro à taxa de carregamento cobrada, pode-se verificar a adequação do prêmio cobrado pela seguradora ao risco de taxas de juros que é por ela assumido.

Cabe ressaltar neste ponto que, apesar de a modelagem e o exemplo acima terem sido desenvolvidos a partir da hipótese de uma contribuição única do participante, não há perda de generalidade. Isso ocorre porque a instituição seguradora cobra a taxa de carregamento para cada contribuição feita pelo participante. Além disso, num determinado ponto do tempo, o valor do direito do participante em relação a uma contribuição adicional é análogo ao valor do direito em relação ao seu saldo atual no plano. Em outras palavras, embora o valor do direito concedido ao participante aumente com as contribuições adicionais, o valor total do seguro adquirido será a soma do direito adquirido no caso de cada contribuição.

2.2 Características do Problema de Pesquisa

Tendo examinado em detalhes a opção a ser analisada nessa pesquisa, cabe apresentar resumidamente as variáveis e hipóteses a partir das quais será desenvolvido o modelo que determinará o valor justo da taxa de carregamento e a estratégia ótima de proteção da carteira.

No que tange às variáveis de entrada, destacam-se:

- as características atuariais da carteira de clientes do plano de previdência em questão:
 - a idade de cada participante

- a data esperada da aposentadoria de cada participante
- a expectativa de vida contratual para cada participante
- a expectativa de vida real (atualizada) para cada participante
- as características financeiras contratuais:
 - a taxa contratual fixada para cálculo da renda vitalícia
 - o índice de inflação segundo o qual essa renda vitalícia será corrigida, caso adquirida
- as variáveis financeiras:
 - o desempenho dos ativos financeiros que compõem as carteiras de investimentos dos participantes
 - o valor das taxas de juros reais na data da análise
 - a volatilidade das taxas de juros reais na data de análise

Esses dois últimos itens são necessários para a modelagem porque a garantia de conversão do saldo do participante em renda se dá através da fixação de uma taxa contratual. Assim, como será desenvolvido no capítulo 3, tanto o nível da taxa real de juros atrelada ao índice de inflação relevante quanto a sua volatilidade, que podem ser estimadas a partir de dados de mercado, terão efeito sobre o valor do seguro vendido ao participante.

As hipóteses utilizadas para o desenvolvimento do modelo são:

- o investimento do participante é feito na taxa real livre de risco para a data da aposentadoria
- o preço do ativo objeto da opção (ver seção 3.4) possui uma distribuição de probabilidade risco-neutra log-normal
- a data de aposentadoria do participante é determinística
- o participante opta entre a renda e o saldo acumulado somente na data da aposentadoria
- o participante opta sistematicamente pela alternativa que maximiza sua riqueza na data da aposentadoria

- a tributação é igual para a opção de resgate do saldo final e para a renda recebida no caso de conversão
- a idade de falecimento do participante é determinística (mas não necessariamente igual à idade de falecimento contratual)

As consequências da adoção dessas hipóteses simplificadoras são discutidas na seção 2.3, bem como no capítulo 3.

Por fim, a partir das variáveis e hipóteses acima listadas, desenvolvem-se os modelos para determinação:

- do valor do seguro concedido ao participante, e por consequência, o valor do passivo total da instituição seguradora (capítulo 3)
- da estratégia ótima de investimentos para os recursos garantidores, de forma a minimizar os riscos financeiros assumidos pela seguradora (capítulo 4)

Assim, tendo definido o problema de pesquisa, as hipóteses adotadas e as variáveis de entrada, apresenta-se, a seguir, a modelagem matemática da opção de conversão em renda lançada pela seguradora em favor do participante.

2.3 Revisão Bibliográfica

O problema de administração de seguros que trazem garantias em relação ao comportamento de variáveis financeiras é coberto por uma extensa literatura. No entanto, a maior parte das referências sobre o assunto trata da modelagem de garantias de rentabilidade oferecidas entre a data de adesão a planos de aposentadoria e a data de aposentadoria. Por outro lado, na estrutura dos produtos de previdência em questão, a instituição seguradora não carrega os riscos financeiros durante a etapa de acumulação de poupança pelo participante, uma vez que as reservas garantidoras do benefício são definidas como o próprio saldo do participante no plano.

Isso está, portanto, em contraste com a situação internacional pois, conforme a revisão bibliográfica indica, em países como Estados Unidos e Reino Unido, a situação atualmente mais comum é que haja garantias de rentabilidade mínima para o segurado durante o próprio período de acumulação.

Assim, Milevsky e Salisbury (2006), por exemplo, apresentam duas abordagens para avaliação do valor de apólices denominadas “benefício com resgate mínimo garantido” (*Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit - GMWB*). Esse benefício permite ao participante a seleção da política de investimento de suas reservas mas com a garantia de que no mínimo o valor investido lhe será retornado, sob condições de resgate anual máximo. Apresentam-se um modelo estático, sob o qual o investidor passivamente utiliza a garantia; e uma abordagem dinâmica, na qual o investidor maximiza o valor da opção otimizando o momento do encerramento da apólice.

Analogamente, Coleman; Li e Patron (2006) estudam a minimização de risco gerado pela garantia de benefício mínimo (*Guaranteed minimum death benefits - GMDb*) associada a produtos de “anuidade variável” num mercado incompleto. Os autores concluem ser mais eficiente a utilização de opções sobre os ativos da carteira que a utilização dos próprios ativos para montagem da estratégia de proteção. No entanto, destacam a forte sensibilidade dos valores do passivo sob as causas das distribuições dos retornos dos ativos.

Schrager e Pelsser (2004) derivam uma fórmula geral de apreçamento da garantia mínima de retorno presentes nas apólices denominadas *unit linked*, modelando as garantias como uma opção de venda sobre uma ponderação do preço do ativo de risco presente nas carteiras de investimento dos segurados.

Na situação brasileira, por outro lado, a garantia que a seguradora estabelece, quando da entrada do participante no plano, corresponde às condições válidas para a conversão do saldo final do segurado em renda vitalícia. As condições pré-determinadas incluem, conforme descrito, a tabela de mortalidade e a taxa de juros real que serão utilizadas para se calcular o fator que converte o saldo final do participante em renda vitalícia. Isso equivale a dizer que a seguradora assume uma expectativa de vida para o participante e uma taxa de juros real que serão válidas para a data de aposentadoria do participante. No entanto, nessa ocasião, o participante não tem a obrigação de converter seu saldo em renda vitalícia, podendo-se assumir que ele somente o fará se for financeiramente vantajoso. Essa decisão naturalmente deverá levar em conta as questões de natureza tributária. Da forma tratada nesta pesquisa, assume-se que a tributação é igual para a opção de

resgate do saldo final e para a renda recebida no caso de conversão. Isso é verdadeiro para participantes que não optaram pela alteração de regime de tributação a partir de 2005. Na situação em que o participante fez a opção pelo novo regime, sua situação tributária deve ser considerada, sendo este um refinamento ao modelo aqui apresentado.

Diferentemente das situações mais comuns encontradas na literatura, a opção atrelada a esse tipo de garantia possui como ativo objeto um título de renda fixa, e não uma carteira composta por ativos de renda fixa e renda variável.

Lachance; Mitchell e Smetters (2003) apresentam resultados obtidos por simulação para o custo de uma opção concedida aos participantes do fundo de pensão do Estado da Flórida. A opção consiste no direito de, pagando-se um prêmio, trocar-se uma vez, durante o período ativo, o benefício que será recebido após a aposentadoria. Os autores mostram que a concessão da opção pode dobrar o custo do plano para o patrocinador em determinadas situações.

Kühn (2002) trata analiticamente o problema genérico de um produto em que o comprador do seguro recebe uma opção embutida, e Ballotta e Haberman (2003) analisam a situação, análoga ao caso brasileiro, em que o segurado pode optar, numa data futura, por um saldo financeiro ou uma renda vitalícia. Nesse caso, os autores apresentam uma modelagem específica para o tratamento da opção de conversão em renda, porém num ambiente em que o participante aplica seus recursos num ativo de risco e em que a garantia de conversão em renda é aplicada sobre uma curva de juros nominal (caso inglês). Esses autores evidenciam que a opção em questão pode ser entendida como uma opção de compra sobre um título de renda fixa pré-fixado. No entanto, o valor dessa opção é aumentado se houver correlação positiva entre os preços finais do mercado de ações e do título de renda fixa. Isso ocorre porque, se movimentos de alta nos preços dos títulos (e portanto quedas nas taxas de juros nominais) estiverem associados a altas no valor do ativo de risco, a opção do participante tenderá a ter maior valor (por unidade monetária investida no plano de previdência), exatamente quando seu saldo, dado pelo valor do ativo de risco, for maior.

Em função desse complicador, optou-se por estudar o problema sob a hipótese de que política de investimentos dos recursos contribuídos ao plano é conservadora

durante o período de acumulação. Ou seja, tomou-se a hipótese de que os ativos estão investidos, até a data de aposentadoria, a uma taxa de juros real livre de risco. Isso torna o resultado da opção independente do desempenho dos ativos (que está fixo), permitindo a utilização de modelos financeiros tradicionais para a determinação do valor da opção. No entanto, o modelo da opção foi adaptado à situação brasileira, na qual o benefício concedido é indexado à taxa de inflação e não pré-fixado.

Ballotta e Haberman (2006) também desenvolvem o modelo através de simulação para tratar conjuntamente a natureza estocástica da expectativa de vida. Esse aspecto do problema, no entanto, não será abordado na presente pesquisa.

Por fim, a modelagem do passivo correspondente às opções concedidas ao conjunto dos participantes permite a aplicação de modelos de otimização para a definição da carteira da seguradora. Os modelos podem ser estáticos como os modelos de imunização e dedicação apresentados em Saad e Ribeiro (2004), seguindo Zenios (1993), ou dinâmicos. Consiglio; Saunders e Zenios (2006) propõem um modelo de otimização dinâmica para a carteira de ativos e analisam a variação da carteira e do custo das apólices quando se variam as garantias mínimas de rentabilidade obtida.

Em resumo, a revisão da literatura sobre seguros previdenciários confirma a adequação da modelagem do valor do seguro através da determinação da opção financeira embutida no contrato para posterior otimização da carteira de ativos.

Dessa forma, a próxima etapa da pesquisa passa a ser a determinação do valor da opção caracterizada neste capítulo. Para isso, faz-se necessária a correção da não linearidade do gráfico de ganhos e perdas da Figura 12 e a aplicação de um modelo de apreçamento de opções adequado à situação em estudo.

3 Apreçamento da Opção pelo Modelo de Fisher

Conforme a modelagem do problema apresentada na seção anterior, o seguro transferido ao participante quando este faz um aporte em seu plano de previdência corresponde a uma opção financeira sobre as taxas de juros reais que vigorarão na data de sua aposentadoria. Portanto, para se determinar o valor financeiro desse seguro, como forma de estabelecer a taxa de carregamento adequada, faz-se necessária a determinação do preço dessa opção em função das informações disponíveis na data do aporte.

O objetivo deste capítulo é apresentar um modelo de apreçamento que seja adequado para determinar o valor da opção concedida ao participante na data da aposentadoria, sob as hipóteses de trabalho já discutidas.

3.1 Determinação do ativo objeto

Conforme verificado através do gráfico da Figura 12, o direito concedido ao participante se caracteriza como uma opção de venda sobre o nível das taxas de juros na data de sua aposentadoria. No entanto, observa-se uma importante diferença entre o caso em análise e o gráfico de ganhos e perdas do detentor de uma opção de venda da Figura 5. Essa diferença se refere ao fato de que o ganho obtido não é linear com a queda na taxa de juros, o que faz a opção em estudo ser diferente da opção de venda *plain vanilla* quando considerada sobre o nível das taxas de juros. Isso impede que os modelos de precificação de opções sejam utilizados diretamente para avaliar o valor do contrato.

No entanto, é possível eliminar esta não linearidade através da análise detalhada da condição de exercício estudada anteriormente. Retomando o exemplo da seção 2.1.2, tínhamos que o valor de mercado da renda vitalícia pelo qual o participante poderia optar era dado pela equação (9), replicada abaixo.

$$V_m = \sum_{m=1}^{180} \frac{835,29}{(1+R)^{m/12}} \quad (10)$$

Quando o valor de V_m for superior a A_{T_a} , verificou-se que o participante exerce seu direito de conversão em renda. O valor do direito do participante na data de exercício seria, então:

- A_{T_a} , se $A_{T_a} > \left(\sum_{m=1}^{180} \frac{835,29}{(1+R)^{m/12}} \right)$
- $\left(\sum_{m=1}^{180} \frac{835,29}{(1+R)^{m/12}} \right)$, se $\left(\sum_{m=1}^{180} \frac{835,29}{(1+R)^{m/12}} \right) \geq A_{T_a}$

A não linearidade referida acima, que impede a utilização direta de modelos de apreçamento de opções, decorre do fato de que o somatório da equação (10), replicado nas condições de exercício acima, é não linear em relação ao nível das taxas de juros R . No entanto, observa-se que o valor de mercado da renda é linear em relação ao somatório $B = \sum_{m=1}^{180} \frac{835,29}{(1+R)^{m/12}}$ como um todo. De fato, se o gráfico da Figura 11 for refeito, agora em função do somatório denominado B , teremos:

Figura 13 – Valor de mercado da renda vitalícia e da poupança acumulada em função do somatório B

Analogamente, pode-se redesenhar o gráfico da Figura 12 em função de B :

Figura 14 - Valor do direito de escolha do participante na data da aposentadoria em função do somatório B

Agora, percebe-se que o gráfico valor do direito do participante na data da decisão em função de B possui forma idêntica ao gráfico de ganhos e perdas do detentor da opção de compra (Figura 4), pois é representado por uma reta horizontal até o valor de exercício e por uma reta de inclinação igual a 45 graus a partir daí. É interessante notar que a opção de venda (não linear) em relação às taxas de juros correspondeu a uma opção de compra sobre B em função da relação inversa entre o valor do somatório e o nível das taxas de juros. Além disso, conclui-se que o direito concedido ao participante corresponde a uma opção *plain vanilla* europeia de compra sobre o valor de B . Resta, portanto, identificar o ativo representado por tal somatório.

Conforme indicado anteriormente, para o exemplo em estudo, tem-se:

$$B = \sum_{m=1}^{180} \frac{835,29}{(1+R)^{m/12}} \quad (11)$$

Analisando a equação (11), verifica-se que o valor de B foi obtido somando-se o termo $\frac{835,29}{(1+R)^{m/12}}$ para todos os meses m entre a data de aposentadoria e a última data do efetivo recebimento da renda pelo participante, e multiplicando-o pelo valor da renda projetada. Adicionalmente, observa-se que o valor de cada termo do

somatório $\frac{835,29}{(1+R)^{m/12}}$ corresponde ao **valor presente, na data $t = T_a$, de um mês de renda ser recebida na data m , trazida pela taxa de juros real**. Ou seja, os termos do somatório são fluxos de caixa iguais à renda mensal contratual, vincendos em cada mês subsequente à aposentadoria, todos trazidos a valor presente pela taxa de juros real de mercado em $t = T_a$. Como B é calculado pela adição de todos esses fluxos, conclui-se que se trata **do preço, na data $t = T_a$, de um fluxo de caixa mensal uniforme e corrigido pela taxa de inflação**, conforme esquematizado na Figura 15.

Figura 15 – Fluxo de caixa correspondente ao ativo B

Em outras palavras, o ativo B corresponde a um título de renda fixa, com 180 fluxos mensais uniformes corrigidos pela taxa de inflação.

Genericamente, o ativo associado ao direito de um participante k , que será denominado B_k , **corresponderá a um título de renda fixa composto por fluxos uniformes corrigidos pela taxa de inflação e pagos mensalmente a partir do mês subsequente à aposentadoria até o mês anterior ao falecimento do referido participante (v_k)**. O valor desse fluxo uniforme será igual à renda mensal que o participante pode receber a partir de um saldo final de poupança igual a A_{T_a} que, conforme a equação (4), é dada por $RM_c = g \times A_{T_a}$, sendo g um fator que depende exclusivamente das condições contratuais para o participante k . A Figura 16 ilustra esse fluxo de caixa.

Figura 16 – Fluxo de caixa correspondente ao ativo B_k

Cumprе destacar que, ao tratar o problema como uma opção sobre B_k , elimina-se a hipótese utilizada na situação exemplo de que as taxas de juros na data da aposentadoria são iguais para quaisquer datas de vencimento. Em outras palavras, se o ativo objeto da opção é definido conforme o fluxo da Figura 16, seu preço pode ser calculado usando-se uma curva de juros não constante com o prazo de vencimento, ou seja, conforme a equação (12) abaixo.

$$B_k = \sum_{m=1}^{v_k} \frac{g_k \times A_{T_a,k}}{(1 + R(m))^{m/12}} \quad (12)$$

Cumprе aqui discutir a hipótese relacionada à evolução da poupança do participante durante o período de acumulação. O valor da renda contratual mensal que caracteriza o título de renda fixa que é o objeto da opção somente pode ser determinado a partir do valor final da poupança do participante A_{T_a} . Isso introduz um complicador relevante para o modelo, pois esse saldo final pode ser correlacionado ao valor do título de renda fixa B_k , potencializando o valor do direito do participante (BALLOTTA; HABERMAN, 2003).

Em função disso, no escopo dessa pesquisa optou-se por utilizar a hipótese de que o saldo final de poupança do participante na data de aposentadoria T_a , em termos reais, é determinístico. Em outras palavras, adotou-se a hipótese de que o participante investirá suas contribuições exclusivamente em um ativo livre de risco. O ativo livre de risco, nesse caso, será um título indexado à taxa de inflação com vencimento na data da aposentadoria. Dessa forma, supondo-se que é cobrada uma taxa de administração dos recursos igual a ta durante o período de acumulação e supondo-se que a taxa de juros real para o prazo T_a no instante da análise é igual a $R_0(T_a)$, pode-se determinar o saldo final de poupança do participante a partir do seu saldo inicial A_0 :

$$A_{T_a} = A_0 \times \left(\frac{1 + R_0(T_a)}{1 + ta} \right)^{T_a} \quad (13)$$

A partir das equações (12) e (13), portanto, podem-se calcular os fluxos de caixa que caracterizam o ativo objeto da opção B_k , a partir dos seguintes dados de mercado e do participante:

- Saldo inicial de poupança: A_0
- Tempo esperado para a aposentadoria: T_a
- Taxa de administração: ta
- Taxa de juros real livre de risco para T_a , em $t = 0$: $R_0(T_a)$
- Condições contratuais de expectativa de vida e taxa de juros de conversão: g
- Expectativa de vida real (que pode diferir da contratual): v

Vale ressaltar que, apesar do tratamento determinístico dado à expectativa de vida, não é desconsiderado o avanço das tabelas atuariais tomado desde a entrada de um participante específico no plano até a data de análise. Isso ocorre porque, ao se desenvolver o modelo de apuração da opção, pode-se considerar uma expectativa de vida v para o participante que independe daquela estabelecida em seu contrato $v_c(x + T_a)$, utilizada no cálculo da renda adquirida. Dessa forma, se um participante possui em seu contrato a conversão de seu saldo em renda por uma expectativa de vida de 15 anos, como no exemplo, mas a tabela atuarial atualizada indica uma expectativa de vida de 18 anos, o modelo assumirá que a renda será calculada contratualmente para um período de 15 anos mas será efetivamente paga por um período de 18 anos, aumentando o valor do direito do participante.

3.2 Determinação do preço de exercício

Tendo-se estabelecido o ativo objeto da opção recebida pelo participante, é necessário determinar, em função dos dados do problema, o preço de exercício da opção sobre o ativo B_k . Retomando o exemplo, verificou-se que a decisão do participante, em $t = T_a$, era:

- Manter o saldo A_{T_a} , se $A_{T_a} > \left(\sum_{m=1}^{180} \frac{835,29}{(1+R)^{m/12}} \right)$

- Converter em renda igual a $\left(\sum_{m=1}^{180} \frac{835,29}{(1+R)^{m/12}}\right)$, se $\left(\sum_{m=1}^{180} \frac{835,29}{(1+R)^{m/12}}\right) \geq A_{T_a}$

Observa-se, assim, que o preço de exercício para o exemplo é exatamente igual ao valor final da poupança do participante, pois o somatório $\left(\sum_{m=1}^{180} \frac{835,29}{(1+R)^{m/12}}\right)$ é o termo que varia conforme as taxas de juros e que define a decisão.

Portanto, o preço de exercício da opção, para qualquer participante, será o saldo de poupança acumulado na data $t = T_a$, que está sendo tratado como determinístico. Isso era de se esperar, uma vez que o preço de exercício da opção de compra é o valor que deve ser pago para que haja o exercício, e que o valor A_{T_a} é o ativo de que o participante deverá abrir mão caso opte por receber a renda vitalícia.

Além disso, assim como os fluxos do ativo objeto, pode-se determinar o preço de exercício a partir dos dados listados acima, aplicando-se a equação (13).

3.3 Características da opção

Em resumo, a opção concedida ao participante pode agora ser **exatamente** caracterizada conforme a Tabela 3 a seguir:

Tabela 3 – Opção concedida ao participante	
Ativo Objeto	título de renda fixa de fluxo mensal uniforme (B)
Direito Transferido	direito de compra
Preço de Exercício	saldo final de poupança
Data de Vencimento	data da aposentadoria
Tipo de Exercício	européu

3.4 Modelo de Fisher

Lee e Stock (2000) apresentam uma revisão de modelos de apreçamento de opções sobre títulos de renda fixa que assumem processos estocásticos com reversão à média para a taxa de juros. No caso brasileiro, a hipótese de reversão à média pode ser muito forte, uma vez que não se pode assumir que as taxas de juros reais na data da pesquisa são válidas para o longo prazo. Além disso, impor uma média arbitrária para o processo da taxa de juros introduz uma forte dependência dos resultados em relação a esse parâmetro. Dessa forma, preferiu-se assumir como hipótese de trabalho um modelo log-normal para o preço do ativo.

Kolb (2000) apresenta o modelo de Fisher-Black como um modelo adequado para apreamento de opções sobre títulos de renda fixa (*bonds*), sob a hipótese implícita de distribuição log-normal para os preços do ativo objeto. Ainda conforme Kolb (2000), o modelo de Fisher simplifica o modelo de Merton (desenvolvido para opções sobre ativos com pagamento de dividendos) para apreamento de opções sobre preços futuros. A conveniência desse modelo para ativos de renda fixa é que a expressão matemática é bastante simplificada pela equivalência entre a taxa livre de risco e a taxa esperada de crescimento do preço do título. A equação de Fisher Black para apreamento de opções sobre títulos de renda fixa é, então:

$$c_F = (1 + r)^T \times [S \times N(d_1^F) - K \times N(d_2^F)]$$

$$d_1^F = \frac{\ln(S/K) + 0,5 \times \sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2^F = \frac{\ln(S/K) - 0,5 \times \sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}} \quad (14)$$

Em (14), tem-se:

- c_F é o preço da opção de compra, em $t = 0$, pelo modelo de Fisher Black
- T é o prazo de vencimento da opção
- K é o preço de exercício da opção
- r é a taxa de juros livre de risco (composta) para o prazo T
- S é o preço à vista do ativo objeto
- σ é a volatilidade do preço à vista do ativo objeto
- $N(d)$ é a função distribuição normal padrão acumulada de d

Com a definição das características da opção apresentadas na Tabela 3, é possível determinar cada uma das variáveis necessárias para o cálculo do valor da opção conforme a equação de Fisher.

De imediato, sabe-se que o prazo de vencimento da opção, no caso do problema em estudo, é o tempo esperado até a aposentadoria do participante, ou seja, que $T = T_a$. Além disso, conforme apresentado na seção 3.2, sabe-se que o

preço de exercício é igual ao saldo final de poupança do participante, calculado conforme (13): $K = A_{T_a}$.

Para determinar a taxa de juros livre de risco a ser utilizada, no entanto, é necessário lembrar que, na modelagem que está sendo desenvolvida, todos os fluxos de caixa estão sendo tratados em termos reais. Dessa forma, ao se aplicar a equação (14), a taxa de juros que deve ser utilizada é a **taxa de juros real livre de risco** para o prazo em questão, que foi denominada $R_0(T_a)$.

Resta, portanto, estimar-se o preço à vista do ativo objeto, bem como a volatilidade desse preço.

3.4.1 Preço à vista do ativo objeto

Conforme indicado na Figura 16, o ativo objeto da opção concedida ao participante corresponde a um fluxo de caixa uniforme entre o mês subsequente à data de aposentadoria e a data de recebimento do último benefício mensal. Para aplicação da fórmula de Fisher, é necessário calcular o preço desse ativo na data de análise, ou seja, em $t = 0$.

Então, é preciso descontar a valor presente os fluxos de caixa correspondentes à renda mensal contratual estimada para cada participante. Para isso, será necessária uma estimativa da curva de juros para os títulos indexados à taxa de inflação em $t = 0$. Chamando os valores assumidos por essa curva de juros reais $R_0(T)$, pode-se então calcular o preço à vista do ativo B_k na data de análise:

$$S = \sum_{m=1+[12 \times T_a]}^{v_k+[12 \times T_a]} \frac{g \times A_{T_a}}{(1 + R_0(m + [12 \times T_a]))^{(m+[12 \times T_a])/12}} \quad (15)$$

A equação (15) difere da expressão que calculava o valor do fluxo em $t = T_a$ apenas pelo fato de que considera um fluxo de caixa diferido no tempo até a data da aposentadoria, conforme esquematizado na Figura 17. Dessa forma, para todos os prazos em questão, adiciona-se o número de meses até a data da aposentadoria, igual a $[12 \times T_a]$.

Figura 17 – Fluxo de caixa do ativo B_k visto de $t = 0$

3.4.2 Volatilidade do ativo objeto

A volatilidade do preço à vista do ativo objeto, conforme definida para a utilização na fórmula de Fisher, corresponde ao desvio padrão distribuição de probabilidades das taxas de variação contínuas do preço do ativo objeto. Ou seja, para se aplicar a fórmula de Fisher, é necessária uma estimativa desse desvio padrão que é uma medida do risco do ativo B_k .

Usualmente, utiliza-se uma estimativa da volatilidade do ativo calculada com base no desvio padrão dos retornos observados para esse ativo no passado. No entanto, há uma dificuldade em se aplicar esse método para títulos de renda fixa. Tal dificuldade advém do fato de que o retorno de um ativo de renda fixa depende não somente de quanto oscilam as taxas de juros que determinam seu valor presente como também do prazo a transcorrer até a data de vencimento do título. Assim, ativos com prazo de vencimento mais longo terão uma volatilidade potencialmente maior que ativos mais curtos. Portanto, não se pode assumir que a volatilidade passada de um título de renda fixa é a melhor estimativa de sua volatilidade futura, especialmente quando se tratam de ativos de prazos longos, analisados sob horizontes de tempo também significativos.

Portanto, para determinação do risco desse tipo de ativo, utiliza-se uma modelagem baseada no cálculo da volatilidade de títulos que possuem certos prazos de investimento pré determinados. Por exemplo, suponhamos que em 31/ago/2006 se está considerando um título com um único pagamento vencendo em 31/out/2006. Esse título possui, na data da análise, prazo de vencimento de 2 meses. Se fossem tomados seu retornos diários retroativos a 1 mês (desde 31/jul/2006), estaria sendo analisado, efetivamente, um ativo que apresentou prazos de vencimento que variaram de 3 a 2 meses, e, portanto, para o qual não se pode admitir volatilidade constante.

Em vez disso, é adequado estudarem-se os retornos de ativos com prazos de vencimento fixos (JORION, 1998). Por exemplo, se forem tomados os prazos de 1 mês e 12 meses como referência, podem ser estudados os retornos diários de ativos com esses prazos de vencimento, de forma que se determine o risco desses chamados “prazos-chave”. A partir daí, considera-se que cada fluxo de caixa de um ativo pode ter seus retornos decompostos nos retornos dos prazos-chave. No entanto, essa decomposição varia dia a dia, o que permite corrigir a medida de risco do título pelo seu prazo de vencimento decrescente.

Para ilustrar, o título vencendo em 31/out/2006, no início do período de análise (31/jul/2006), teria 3 meses para o vencimento, ou seja, seria decomposto em 82% do vértice de 1 mês e 18% do vértice de 12 meses (pois $82\% \times 1 \text{ mês} + 18\% \times 12 \text{ meses} = 3 \text{ meses}$). Já no final do período, o mesmo título seria decomposto em 91% do vértice de 1 mês e 9% do vértice de 1 ano (pois $91\% \times 1 \text{ mês} + 9\% \times 12 \text{ meses} = 2 \text{ meses}$). Sendo assim, o ativo efetivamente se tornaria uma carteira composta por dois vencimentos. Para esses vencimentos fixos pode-se, sim, assumir que a volatilidade (e as correlações) passadas são estimativas adequadas da volatilidade futura.

Naturalmente, os títulos de renda fixa envolvidos no problema desta pesquisa possuem mais de um fluxo de caixa. Cada um dos fluxos de caixa, no entanto, pode ser decomposto, conforme o método descrito acima, em uma combinação de fluxos de caixa em dois prazos-chave. Assim, o ativo original poderia ser decomposto na combinação da decomposição de cada um de seus fluxos individuais. Portanto, cada título de renda fixa seria decomposto em um portfólio de títulos vencendo nos prazos-chave. A cada dia, a composição desse portfólio (os pesos em cada vértice) mudaria, e a volatilidade desse título poderia ser calculada por:

$$\sigma_B = \sqrt{p^T \times \Sigma \times p} \quad (16)$$

Em (16), tem-se:

- σ_B é a volatilidade estimada dos retornos do título em análise
- p é o vetor de exposições do título aos prazos-chave, ou seja, os pesos de cada prazo-chave na composição do título

- Σ é a matriz de covariâncias entre os retornos dos fluxos com vencimento nos prazos-chave.

Dessa forma, para se calcular o risco dos títulos de renda fixa, fixam-se vértices da curva de juros que serão utilizados para modelar o comportamento da curva como um todo. Conforme mencionado, esses vértices modelados são denominados os *prazos-chave*. Por exemplo, poder-se-iam utilizar como prazos-chave os períodos de 1 dia útil, 5 dias úteis, 21 dias úteis, 156 dias úteis, 252 dias úteis, 2 x 252 dias úteis, 5 x 252 dias úteis, 10 x 252 dias úteis, 20 x 252 dias úteis, 30 x 252 dias úteis e 50 x 252 dias úteis. Para esses vértices faz-se então necessário estimar a matriz de covariâncias dos retornos Σ . Como no exemplo dado há 11 prazos-chave, a matriz de covariâncias teria dimensão 11 x 11, e cada título de renda fixa seria decomposto em um *portfólio* composto por, no máximo, 11 fluxos, permitindo a aplicação da expressão (16).

Portanto, com as metodologias descritas nas seções 3.4.1 e 3.4.2, para cada ativo específico B_k , atrelado a um participante, torna-se possível determinar não somente o preço como também a volatilidade de seus retornos.

3.5 Ajuste do modelo de Fisher-Black

Outra característica particular dos ativos de renda fixa que demanda atenção no modelo desta pesquisa é o fato de que esses títulos apresentam um limite superior para seu preço. De fato, se as taxas de juros em um mercado caem a zero, qualquer título nesse mercado terá um valor determinado pela soma algébrica dos vencimentos a serem recebidos. Como é razoável assumir que as taxas de juros não assumem valores negativos, é também razoável admitir a existência de tal limite superior para o preço dos ativos de renda fixa.

No entanto, conforme mencionado, o modelo de Fisher considera que a distribuição de probabilidades dos retornos do ativo objeto é log-normal, distribuição essa que apresenta apenas um limite inferior. Em outras palavras, sob a hipótese do modelo de Fisher, o preço do ativo possui um limite teórico inferior (igual a zero) mas não possui um limite teórico superior. Como se está tratando com opções de prazo de vencimento longo (da mesma ordem dos prazos indicados na Figura 17), o modelo implicitamente atribui probabilidade relevante, e portanto parte importante do

valor das opções, a essas situações em que o ativo apresenta um valor final superior ao limite existente na prática.

Para ilustrar essa situação, estendemos o gráfico da Figura 12, que apresenta o valor do direito do participante em função do nível da taxa de juros real final, para valores negativos de tal taxa. Como se pode verificar pelo gráfico da Figura 18, o valor considerado cresce expressivamente com a queda das taxas de juros, devido à convexidade da função valor presente.

Figura 18 – Valor do direito de escolha do participante na data da aposentadoria, incluindo valores negativos para a taxa de juros reais

Em relação a essa questão, Black (1995) argumenta que a taxa de juros nominal possui dinâmica de evolução assimétrica por não assumir valores negativos, e propõe o ajuste das distribuições de probabilidade utilizadas nos modelos para compreender esse fenômeno, especialmente relevante em períodos de taxa de juros baixa e para opções de prazo de vencimento longo.

Seguindo essa linha de raciocínio, é necessário ajustar-se o modelo de precificação da opção de forma a desconsiderar a cauda superior da distribuição de probabilidades de retornos do ativo B_k . Para isso, propomos, neste trabalho, assumir a hipótese de que a taxa de juros real possua, no longo prazo, a característica de não negatividade indicada por Black (1995) para a taxa de juros nominal.

Propõe-se ainda, como contribuição desta pesquisa, a utilização de uma distribuição de probabilidades risco-neutra que possua a característica de desconsiderar os valores negativos da taxa de juros real. Por simplicidade matemática, no entanto, em vez de ajustar as hipóteses e equações do modelo de apreçamento, assume-se que, juntamente à obrigação assumida perante o participante, a seguradora possui um direito de adquirir o fluxo ao preço dado por uma taxa de juros real nula (para uma discussão sobre o limite inferior para a taxa de juros real, ver BLACK, 1995).

Ou seja, atrelada à opção lançada ao participante, assume-se que a seguradora possua uma posição comprada em uma outra opção de compra com as mesmas características, exceto que a taxa de juros real utilizada para determinação do preço de exercício desta nova opção é igual a zero. O valor do direito para essa opção, ainda assumindo os valores do exemplo, corresponde ao desenho da curva da Figura 18 à esquerda do eixo vertical. Tal gráfico está indicado na Figura 19 abaixo.

Figura 19 - Valor do direito de escolha da opção hipotética da seguradora

Ao subtrair-se do valor do direito do participante (Figura 18) o valor do direito da seguradora (Figura 19), tem-se um valor do direito ajustado na data de vencimento, no gráfico da Figura 20:

Figura 20 - Valor ajustado do direito de escolha do participante

Analogamente, pode-se construir o gráfico em função do preço do ativo objeto da opção na data da aposentadoria:

Figura 21 - Valor ajustado do direito de escolha do participante

O valor do ativo objeto no qual a distribuição de probabilidade é truncada corresponde, portanto, ao valor presente dos fluxos na data $t = T_a$, calculado

fazendo-se a taxa de juros real igual a zero para todos os prazos. Esse preço de exercício, que será denominado X , pode ser calculado aplicando-se a equação (12):

$$X = \sum_{m=1}^{v_k} \frac{g_k \times A_{T_a,k}}{(1 + 0\%)^{m/12}} = \sum_{m=1}^{v_k} g_k \times A_{T_a,k} \quad (17)$$

Chega-se, assim, à formulação final proposta para o valor da obrigação da instituição seguradora para com o participante k , denominado l_k :

$$l_k = c_A - c_X \quad (18)$$

Na equação (18), c_A e c_X correspondem aos prêmios de duas opções determinados pelo modelo de Fisher. As características dessas opções são idênticas exceto pelo preço de exercício, conforme resumido na Tabela 4 abaixo.

Tabela 4 – Características das opções da equação (18)

Característica	c_A	c_X
Ativo Objeto	B_k	B_k
Direito Transferido	Compra	Compra
Preço de Exercício	A_{T_a}	X
Data de Vencimento	$t = T_a$	$t = T_a$
Tipo de Exercício	Europeu	Europeu

Cabe destacar que, como $A_{T_a} \geq X$, o valor da opção c_A será sempre superior ao valor da opção c_X , e, como era de se esperar, o valor da obrigação assumida com o participante k terá sempre valor não negativo.

Assim, conclui-se a modelagem para determinação do valor da opção concedida a um participante específico.

Para se calcular, então, o valor da obrigação total da seguradora L (ou seja, o valor do passivo considerando-se todos os participantes), basta somar o valor de cada obrigação individualmente:

$$L = \sum_{k=1}^U l_k \quad (19)$$

Como a taxa de carregamento é cobrada como um percentual da contribuição realizada pelo participante, é conveniente também calcular-se o passivo total como percentual do valor agregado dos saldos dos participantes no plano, que será denominado $L_{\%}$:

$$L_{\%} = \frac{L}{\sum_k A_{0,k}} \times 100 \quad (20)$$

Portanto, com a modelagem proposta neste capítulo, é possível não somente determinar o custo do seguro concedido a cada participante como também determinar o valor total do passivo da seguradora.

No entanto, o modelo de apuração apresentado implica o valor do passivo ser suscetível a oscilações decorrentes da variação de cada uma das variáveis de mercado que afetam o preço das opções conforme o modelo de Fisher. É necessário então definir como administrar a carteira de recursos garantidores, ou seja, os recursos coletados a título de taxa de carregamento, de forma a proteger o resultado da instituição seguradora das oscilações nesses preços de mercado.

4 Gestão da Carteira de Riscos

No capítulo 3, estudou-se em detalhes a garantia contratual fornecida pela seguradora ao participante para cada aporte realizado por este último no plano de previdência complementar aberto. Verificou-se que, pelas características da garantia concedida, ela era equivalente a uma opção de compra sobre um título de renda fixa formado por fluxos de caixa mensais indexados à taxa de inflação.

A partir dessa conceptualização (WILL; BERTRAND; FRANSOO, 2002), foi possível aplicar o modelo de Fisher para determinar o preço da opção com base na teoria de finanças. Em outras palavras, na seção anterior aplicou-se um modelo de precificação à opção concedida como forma de determinar o custo do seguro oferecido ao participante e, portanto, o preço mínimo a ser dele cobrado como taxa de carregamento.

No entanto, assumindo-se que a instituição seguradora comercializa rotineiramente os contratos associados a produtos de previdência, não é suficiente para seu sucesso financeiro de longo prazo que o preço cobrado pelo seguro seja justo. Isso ocorre porque o modelo de apreçamento de opções baseado na teoria moderna de finanças apresenta o valor da opção para a condição de não arbitragem, ou seja, para a condição em que não haja oportunidades de ganho sem risco através da negociação da opção e de seu ativo objeto.

Em função disso, para que o valor cobrado pelo seguro adequadamente remunere a seguradora pelo risco assumido, é necessário que essa instituição neutralize os riscos sistemáticos assumidos através dos instrumentos disponíveis no mercado de capitais.

Em complemento aos modelos de precificação, a área de conhecimento em finanças que estuda a montagem de carteiras otimizadas é a teoria moderna de portfólio. No caso do problema de pesquisa, minimizar os riscos sistemáticos incorridos pela instituição seguradora envolve a determinação da carteira ótima de investimentos que apresenta características adequadas ao passivo agregado.

Assim, enquanto no capítulo anterior foi apresentado um modelo para determinar o valor do passivo da seguradora num instante do tempo, o objetivo desta seção é aplicar modelos de otimização de carteira que permitam à instituição

seguradora se proteger dos riscos envolvidos na concessão do direito aos participantes.

4.1 Modelos de Otimização de Carteiras

A teoria moderna de carteiras iniciou seu desenvolvimento a partir clássico artigo *Portfolio Selection* de Harry Markowitz de 1952 (apud REILLY; BROWN, 2000). Segundo o modelo apresentado nesse artigo, os indivíduos tratam seus investimentos financeiros como distribuições de probabilidade do retorno a ser obtido para um certo período, e escolhem entre diferentes carteiras através das características dessas distribuições de probabilidade.

Adicionalmente, assume-se que os investidores são avessos ao risco, ou seja, que dadas duas opções de investimento que apresentem o mesmo retorno esperado para o período em questão, os indivíduos sempre optarão por aquela que apresentar o menor risco.

Além disso, assumem-se distribuições de probabilidade normal (ou Gaussianas) para os retornos, uma vez que essa distribuição é integralmente caracterizada por sua média e variância. Assim, pode-se utilizar como medida de risco de uma carteira de investimentos a própria variância da sua distribuição de retornos. Nesse caso, por se estarem considerando como variáveis de decisão o retorno esperado (média) e a variância da distribuição de retornos, o modelo é denominado por modelo média-variância (COSTA; ASSUNÇÃO, 2005).

A conveniência matemática dessa classe de modelos decorre do fato de que, em função das propriedades matemáticas da média e da variância, pode-se facilmente calcular as características de uma carteira a partir das características dos ativos que a compõem. Em particular, pode-se demonstrar que, sob tais circunstâncias, a região de carteiras que podem ser construídas a partir de um determinado conjunto de ativos corresponde a uma semi-hipérbole no plano retorno esperado vs. risco (LUENBERGER, 1998), conforme ilustrado na Figura 22.

Esse formato não linear é resultante da propriedade de que as variâncias das combinações de ativos dependerão não somente das variâncias dos ativos individualmente, mas também do grau de relacionamento entre os retornos desses ativos, medidos pelas covariâncias dos retornos dois a dois.

Figura 22 – Região de carteiras viáveis e fronteira de eficiência

Como cada investidor é avesso ao risco, qualquer carteira otimizada nesse modelo deverá pertencer à curva da Figura 22 destacada em negrito, porque nessa linha os retornos esperados das carteiras são máximos para cada nível possível de risco. Assim, as carteiras pertencentes a essa linha dominam, numa avaliação risco vs. retorno, as que não pertencem a ela. Em função disso, esse conjunto de carteiras é denominado fronteira de eficiência.

Para as carteiras pertencentes à fronteira de eficiência, no entanto, há um *trade off* côncavo entre risco e retorno esperado, ou seja, para obter um maior retorno esperado, o investidor deve aceitar carteiras ótimas com mais risco. Adicionalmente, aumentos sucessivos idênticos no risco de uma carteira ótima implicam aumentos sucessivos decrescentes em termos do retorno esperado. A decisão entre qual carteira da fronteira de eficiência deter será, portanto, uma função apenas do grau de aversão ao risco de um determinado investidor.

Matematicamente, portanto, pode-se determinar a carteira otimizada para um investidor num universo de n ativos aplicando-se o modelo média-variância (ZENIOS, 1993):

$$\min_{x_i} \left(\lambda \times \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i P_i \times x_j P_j \times \sigma_{i,j} - \sum_{i=1}^n x_i P_i \times \bar{r}_i \right)$$

sa:

$$\sum_{i=1}^n x_i P_i \leq Cp$$

$$x_i \geq 0 \quad (21)$$

Em (21), tem-se:

x_i são as variáveis de decisão, correspondentes às quantidades de cada ativo i a serem adquiridas.

λ é o coeficiente de aversão ao risco do investidor. Quanto maior for esse coeficiente, mais o investidor preferirá sacrificar retorno esperado em troca de menor risco.

- P_i é o preço de mercado do ativo i .
- $x_i P_i$ é, portanto, o valor financeiro a ser investido no ativo i .
- $\sigma_{i,j}$ é a covariância entre os retornos dos ativos i e j . Em particular, se $i = j$, $\sigma_{i,i} = \sigma_i^2$ é a variância dos retornos do ativo i .
- $\bar{r}_i$ é o retorno esperado para o ativo i .
- Cp é o capital total do investidor.

O modelo acima corresponde portanto a uma decisão tomada com base na maximização de uma função utilidade quadrática do retorno esperado e da variância da carteira de ativos, e leva a alguma carteira pertencente à fronteira de eficiência da Figura 22. No caso apresentado, não se considera a eventual existência de um passivo para o investidor, mas o modelo poderia ser ajustado a isso adicionando-se ao cálculo da função objetivo termos correspondentes à exposição passiva do indivíduo ou, como no caso do problema em estudo, da seguradora.

O modelo de média-variância pode, portanto, ser utilizado para determinação de uma carteira ótima de ativos que têm determinadas características de risco, retorno e covariâncias. Naturalmente, esse tipo de modelo será mais apropriado se

essas características das distribuições de probabilidade forem estacionárias. Mesmo assim, o número de parâmetros necessários para implementação de tal modelo é potencialmente elevado, pois cresce quadraticamente com o número de ativos.

No entanto, as características do problema de interesse não recomendam a utilização do modelo de média-variância. Em primeiro lugar, retomando a análise do passivo da seguradora, sabe-se que este é constituído por um grande número de posições lançadoras (vendidas) em opções de compra sobre títulos de renda fixa. Portanto, é de se esperar que o número de variâncias e covariâncias a ser estimado seria elevado, dando origem a um grande número de erros de estimativa.

Com relação à esperada variação temporal dos parâmetros das distribuições de retorno para ativos de renda fixa, cabe destacar que é possível contornar tal restrição implementando-se re-estimações periódicas do modelo. No entanto, permanece a dificuldade do número de parâmetros.

4.2 Duração e convexidade

É conveniente, portanto, aplicar modelos que reduzam o número de parâmetros a serem estimados. Como foi visto, o valor do passivo da seguradora está ligado aos preços de um certo conjunto de ativos de renda fixa indexados à taxa de inflação. Para esses casos, é possível simplificar o modelo de média-variância utilizando-se como descritores dos riscos dos ativos sua **duração financeira** e sua **convexidade financeira**.

Isso é possível porque, para ativos (ou passivos) de renda fixa, é possível descrever os movimentos de preços através de um fator comum, a saber, a taxa de juros. De fato, sabe-se que o preço de um ativo de renda fixa pode ser calculado com base em seus fluxos de caixa futuros e nas taxas de juros praticadas para cada prazo (Fabozzi, 2000):

$$P_i = \sum_j \frac{FlCx_{i,j}}{(1 + R(T_j))^{T_j}} \quad (22)$$

Em (22), tem-se:

- P_i é o preço de mercado do ativo de renda fixa i .

- $FlCx_{i,j}$ é o j -ésimo fluxo de caixa do ativo de renda fixa i .
- T_j é a data do pagamento do j -ésimo fluxo de caixa.
- $R(T_j)$ é a taxa de juros para o prazo T_j .

Como a relação entre o preço dos ativos e a taxa de juros segue a relação dada pela equação (22), é possível calcular o impacto sobre o preço de uma dada mudança na estrutura temporal da taxa de juros $R(T_j)$. Em particular, pode-se supor que essas taxas estão sujeitas apenas a deslocamentos paralelos. Ou seja, as variações na estrutura temporal podem ser integralmente descritas através de um deslocamento paralelo ε da curva de juros, conforme ilustrado no gráfico da figura a seguir.

Figura 23 – Deslocamentos paralelos da estrutura temporal da taxa de juros - $R(T_j)$

Sob essa condição, pode-se reescrever o valor da taxa de juros válida para cada prazo em função da taxa inicial $R_0(T_j)$ e do deslocamento:

$$R(T_j) = R_0(T_j) + \varepsilon \quad (23)$$

Define-se **duração financeira** (*dollar duration* - d_i) de um ativo a sensibilidade de seu preço a deslocamentos paralelos da curva de juros, medida pela primeira derivada de tal preço em relação ao termo ε (ZENIOS, 1993):

$$d_i = \frac{d}{d\varepsilon}(P_i) = \frac{d}{d\varepsilon} \left(\sum_j \frac{FlCx_{i,j}}{(1 + R(T_j))^{T_j}} \right) = \sum_j -T_j \times \frac{FlCx_{i,j}}{(1 + R(T_j))^{1+T_j}} \times \underbrace{\frac{d}{d\varepsilon}(R(T_j))}_{=1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_i = \sum_j -T_j \times \frac{FlCx_{i,j}}{(1 + R(T_j))^{1+T_j}} \quad (24)$$

Cabe notar que o valor da duração financeira será sempre negativo, porque sempre que houver um deslocamento para cima da curva de juros o preço do ativo cairá.

Adicionalmente, **convexidade financeira** (*dollar convexity* - q_i) de um ativo é a sensibilidade de sua duração financeira a deslocamentos paralelos da curva de juros, medidos pela segunda derivada do preço em relação ao termo ε (ZENIOS, 1993):

$$q_i = \frac{d^2}{d\varepsilon^2}(P_i) = \frac{d}{d\varepsilon} \left(\sum_j -T_j \times \frac{FlCx_{i,j}}{(1 + R(T_j))^{1+T_j}} \right) = \sum_j (T_j + T_j^2) \times \frac{FlCx_{i,j}}{(1 + R(T_j))^{2+T_j}} \Rightarrow$$

$$q_i = \sum_j (T_j + T_j^2) \times \frac{FlCx_{i,j}}{(1 + R(T_j))^{2+T_j}} \quad (25)$$

Ao contrário da duração financeira, a convexidade financeira é sempre positiva, o que indica que o gráfico do preço do ativo em função dos deslocamentos paralelos ε é uma curva convexa (daí o nome convexidade), conforme indicado no gráfico da Figura 24.

Figura 24 – Preço de um ativo de renda fixa em função do deslocamento paralelo ε .

É interessante enfatizar que as definições das equações (24) e (25) são convenientes do ponto de vista algébrico porque são lineares em relação ao preço do ativo. Por conta disso, tanto a duração financeira quanto a convexidade financeira de uma carteira de ativos serão combinações lineares das durações e convexidades financeiras dos ativos componentes da carteira, sendo que os pesos serão as quantidades detidas em cada ativo.

Adicionalmente, com os valores da duração e convexidade financeira para um ativo ou carteira, pode-se aplicar uma aproximação de Taylor de segunda ordem para o preço desse ativo/carteira em relação a pequenos deslocamentos paralelos da curva de juros:

$$\Delta P_i \cong d_i \times \Delta \varepsilon + q_i \times \frac{(\Delta \varepsilon)^2}{2} \quad (26)$$

Com base nessa aproximação, fica claro que, sob a hipótese de deslocamentos paralelos da curva de juros, o risco incorrido decorre diretamente da duração financeira, enquanto a convexidade financeira passa a ser uma característica desejável para a carteira, uma vez que atua positivamente sobre a

variação de preço independentemente da direção do deslocamento da curva de juros.

Ao adotar como medidas de risco da carteira a duração e convexidade financeiras, torna-se possível substituir o modelo média-variância por um modelo que, utilizando menos parâmetros, otimiza uma carteira de ativos de renda fixa em relação a um passivo. Esse modelo é denominado modelo de imunização.

4.3 Modelo de Imunização

Diferentemente da situação usual de otimização de carteiras, quando o objetivo do investidor é proteger-se das oscilações no valor de um passivo, a carteira ótima pode ser determinada por métodos que considerem características agregadas do passivo como as indicadas na subseção anterior.

Suponhamos, assim, que sejam conhecidas a duração financeira D_L e a convexidade financeira C_L do passivo estimado no capítulo 3 (para estimação desses parâmetros, vide seção 4.5).

Assim, um dos modelos que se pode aplicar para determinação de tal carteira otimizada é o modelo de imunização, conforme apresentado em Saad e Ribeiro (2004), seguindo Zenios (1993). Esse modelo otimiza a composição de uma carteira de ativos disponíveis no mercado de forma a minimizar descasamentos entre as oscilações do valor dessa carteira e do valor do passivo que se pretende “imunizar”.

Suponhamos, assim, que, da mesma forma que no modelos média-variância, o universo de ativos disponíveis seja constituído por um conjunto de n ativos, para os quais se conhece o preço P_i , a duração financeira d_i (conforme (24)) e a convexidade financeira q_i (conforme (25)). Chamemos, adicionalmente, o valor total da carteira de ativos a ser gerada de P_C . A essência do modelo de imunização consiste em se construir a carteira de mínimo custo (P_C) composta por quantidades $x_i \geq 0$ em cada ativo, de forma que as variações do valor da carteira total (ativos menos passivos) aos deslocamentos paralelos nas taxas de juros sejam sempre positivas. Ou seja:

$$\Delta P_C - \Delta L \geq 0 \quad (27)$$

sendo que:

$$P_C = \sum_{i=1}^n x_i \times P_i \quad (28)$$

A variável P_C da equação (28) é a função objetivo do modelo, pois representa o capital necessário para montagem da carteira a ser minimizado. Quando se minimiza o capital a ser utilizado, está-se implicitamente maximizando a rentabilidade da carteira. No entanto, a otimização de (27) é dificultada por sua não linearidade em relação à taxa de juros. Aplica-se, então, a aproximação de Taylor de segunda ordem para as variações ΔP_C e ΔL , conforme (26):

$$\Delta P_C \cong D_C \times \Delta \varepsilon + Q_C \times \frac{(\Delta \varepsilon)^2}{2} \quad (29)$$

$$\Delta L \cong D_L \times \Delta \varepsilon + Q_L \times \frac{(\Delta \varepsilon)^2}{2} \quad (30)$$

Em (29), D_C e Q_C representam respectivamente as durações e convexidades financeiras da carteira, que podem ser calculados através das derivadas de (28) em relação aos deslocamentos paralelos da curva ε :

$$D_C = \frac{d}{d\varepsilon} P_C = \frac{d}{d\varepsilon} \sum_{i=1}^n x_i \times P_i = \sum_{i=1}^n x_i \times d_i \quad (31)$$

$$Q_C = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} P_C = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n x_i \times P_i = \sum_{i=1}^n x_i \times q_i \quad (32)$$

Levando (29) e (30) em (27), tem-se:

$$\begin{aligned} & \left(D_C \times \Delta \varepsilon + Q_C \times \frac{(\Delta \varepsilon)^2}{2} \right) - \left(D_L \times \Delta \varepsilon + Q_L \times \frac{(\Delta \varepsilon)^2}{2} \right) \geq 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow (D_C - D_L) \times \Delta \varepsilon + \frac{1}{2} (Q_C - Q_L) \times (\Delta \varepsilon)^2 \geq 0 \quad (33) \end{aligned}$$

Para que (33) seja válida independentemente do valor de $\Delta \varepsilon$, é necessário que o termo de primeiro grau desse polinômio seja não negativo pois, para $\Delta \varepsilon$ suficientemente pequeno, esse termo domina o valor do polinômio. Por sua vez, para que esse termo seja não negativo independentemente de $\Delta \varepsilon$, que pode assumir

valores positivos ou negativos, é necessário impor a primeira restrição do modelo de imunização, ou seja, que o coeficiente de $\Delta\varepsilon$ seja nulo:

$$D_C - D_L = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \times d_i = D_L \quad (34)$$

Isso reduz (33) a:

$$\frac{1}{2}(Q_C - Q_L) \times (\Delta\varepsilon)^2 \geq 0 \quad (35)$$

Como $(\Delta\varepsilon)^2$ é estritamente positivo, ao rearranjarem-se os termos de (35), chega-se à segunda restrição do modelo de imunização:

$$\frac{1}{2}(Q_C - Q_L) \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \times q_i \geq Q_L \quad (36)$$

Portanto, agregando-se a função objetivo definida em (28) às restrições de duração e convexidade definidas respectivamente em (34) e (36), chega-se à formulação do modelo de imunização como um problema de otimização linear nas variáveis de decisão x_i , quantidades investidas em cada ativo:

$$\min_{x_i}(x_i \times P_i)$$

sa:

$$\sum_{i=1}^n x_i \times d_i = D_L$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \times q_i \geq Q_L$$

$$x_i \geq 0 \quad (37)$$

4.4 Modelo de dedicação

A otimização apresentada em (37), embora represente uma aproximação da carteira de proteção ótima, pode ser considerada uma solução restrita para o problema, uma vez que leva em conta apenas duas características agregadas do passivo (duração e convexidade financeiras). É de se esperar que uma carteira de proteção mais completa leve em conta também a distribuição dos fluxos implícitos no

passivo da seguradora. O modelo de dedicação, que otimiza os descasamentos entre fluxos de caixa dos ativos e dos passivos (Saad e Ribeiro (2004), seguindo Zenios (1993)), se apresenta como uma alternativa mais abrangente para a solução do problema.

Nesse modelo, usa-se como dado a distribuição temporal dos fluxos de caixa projetados para o passivo. Analogamente ao modelo de imunização, minimiza-se o valor inicial da carteira, mas exige-se a antecedência dos fluxos de caixa dos ativos em relação aos fluxos de caixa dos passivos. Para impor tal condição, faz-se necessário calcular o caixa “acumulado” após cada pagamento do passivo e impô-lo não negativo. Chamando esse caixa acumulado ou superávit na data τ de s_τ , indicando por L_τ o valor nominal do fluxo do passivo na data τ , $FlCx_{i,j}$ o fluxo de caixa nominal de cada ativo na data j , pode-se calcular o valor atualizado dos fluxos dos ativos que ocorrem entre duas datas de pagamento de passivo $\tau - 1$ e τ , corrigidos pela taxa de reinvestimento:

$$FlCx_{[\tau-1,\tau]} = \sum_{i,j \in [\tau-1,\tau]} FlCx_{i,j} \times \rho_\tau / \rho_j \quad (38)$$

Em (38), ρ_t corresponde ao valor acumulado da taxa de reinvestimento (taxa livre de risco) na data t . Assim, o excesso de caixa s_τ nas datas em que há fluxo de caixa do passivo é dado pelo excesso do período anterior corrigido pela taxa livre de risco, acrescido dos fluxos que ocorrem entre $\tau - 1$ e τ dados em (38) e subtraído do passivo vincendo na data τ , L_τ :

$$s_\tau = s_{\tau-1} \times \rho_\tau / \rho_{\tau-1} + FlCx_{[\tau-1,\tau]} - L_\tau \quad (39)$$

Assim, ao se minimizar a mesma função objetivo do modelo de imunização, ou seja, o preço da carteira de ativos em $t = 0$, impondo-se não negatividade dos superávits s_τ chega-se à formulação do modelo de dedicação como um problema linear estático de minimização nas variáveis não negativas x_i e s_τ :

$$\min_{x_i}(x_i \times P_i)$$

sa:

$$s_\tau = s_{\tau-1} \times \rho_\tau / \rho_{\tau-1} + FlCx_{[\tau-1, \tau]} - L_\tau$$

$$FlCx_{[\tau-1, \tau]} = \sum_{i,j \in [\tau-1, \tau]} FlCx_{i,j} \times \rho_\tau / \rho_j$$

$$x_i \geq 0$$

$$s_\tau \geq 0 \quad (40)$$

O modelo em (40) pode ainda ser adaptado (Saad e Ribeiro, 2006) para tratar adequadamente os diferentes níveis de risco que diferentes indexadores trazem para os ativos (Selic, IPCA, IGP-M etc.) e para o passivo. Isso é feito penalizando-se o fluxo de caixa de cada ativo em função de seu potencial descasamento em relação ao indexador do passivo. Ou seja, ao se aplicar tal ajuste, desconta-se um “prêmio” exigido da taxa de retorno de cada ativo, de forma que ativos que apresentam maiores descolamentos em relação ao indexador do passivo deverão apresentar taxas de retorno maiores para serem incorporados à carteira. Naturalmente, a contrapartida do menor risco é um valor para função objetivo maior ou igual ao que se obteria sem a aplicação da penalização.

Matematicamente, partindo-se dos fluxos de caixa projetados inicialmente para cada ativo $FlCx_{i,j,0}$, e chamando π_i a penalização aplicável ao ativo i , os fluxos de caixa a serem utilizados no modelo (40) são calculados como:

$$FlCx_{i,j} = FlCx_{i,j,0} \times \exp\{-j \times \pi_i\} \quad (41)$$

Adicionalmente, é necessária a penalização da taxa de reinvestimento. Partindo-se de uma taxa acumulada no instante t igual a $\rho_{t,0}$ e chamando π_ρ a taxa de penalização do reinvestimento, calculam-se os valores de ρ_t a serem usados em (40) conforme:

$$\rho_t = \rho_{t,0} \times \exp\{-t \times \pi_\rho\} \quad (42)$$

As correções aplicadas aos fluxos de caixa em (41) e (42) equivalem a exigir, para cada ativo e para a taxa de reinvestimento, um prêmio calculado sobre sua taxa de retorno em tempo contínuo iguais a π_i e π_p , respectivamente. Ou seja, se um ativo é livre de risco em relação ao indexador do passivo, π_i será igual a zero e o fluxo desse ativo não é penalizado, pois $FlCx_{i,j} = FlCx_{i,j,0} \times \exp\{-j \times 0\} = FlCx_{i,j}$. No entanto, se $\pi_i > 0$, teremos $FlCx_{i,j} = FlCx_{i,j,0} \times \exp\{-j \times \pi_i\} < FlCx_{i,j}$, e o fluxo desse ativo será penalizado pelo fator $\exp\{-j \times \pi_i\}$. Naturalmente, quanto maior o descasamento potencial entre os fluxos de caixa do ativo em questão e os fluxos de caixa do passivo, maior deverá ser o prêmio exigido do ativo π_i . O mesmo vale para a taxa de reinvestimento.

No entanto, retomando a otimização da carteira de *hedge*, para aplicação do modelo de dedicação à carteira de opções da seguradora é necessário determinarem-se os fluxos de caixa do passivo formado pelas opções concedidas ao participante. Para isso, no entanto, é necessário determinar o passivo “equivalente” à exposição criada pelas opções. Em outras palavras, é necessário definir-se um conjunto de fluxos de caixa L_τ que caracterize o passivo gerado pelas opções concedidas. Na seção a seguir, determinam-se os fluxos de caixa assim definidos, bem como os parâmetros para a aplicação do modelo de imunização.

4.5 Determinação dos Parâmetros para os Modelos

Conforme detalhado nas seções 4.3 e 4.4, a otimização da carteira de ativos que minimiza o risco gerado pela concessão das opções aos participantes do plano pode ser realizada através da aplicação de modelos de imunização ou dedicação. No entanto, para que tais modelos possam ser aplicados, é necessário estimar os parâmetros que caracterizam o passivo em cada modelo de otimização, ou seja, sua duração e convexidade financeiras (D_L e Q_L) para o modelo de imunização e seus fluxos de caixa equivalentes L_τ para o modelo de dedicação.

4.5.1 Estimativa da duração do passivo

Em decorrência da linearidade da equação (19), para determinar a duração do passivo total da seguradora, faz-se necessário o cálculo da sensibilidade da obrigação da instituição para com cada participante em relação a deslocamentos paralelos da curva de juros:

$$D_L = \frac{d}{d\varepsilon} L = \frac{d}{d\varepsilon} \sum_{k=1}^U l_k = \sum_{k=1}^U \frac{d}{d\varepsilon} l_k \quad (43)$$

Naturalmente, essa sensibilidade $\frac{d}{d\varepsilon} l_k$ dependerá de como variam, na margem, os preços das opções da equação (18) em relação a variações no preço de cada ativo objeto B_k . A duração $\frac{d}{d\varepsilon} l_k$ dependerá também, mas indiretamente, de como varia cada preço B_k em relação aos deslocamentos paralelos ε , ou seja, em relação à duração de cada ativo B_k . Matematicamente, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} l_k &= \frac{d}{d\varepsilon} (c_A - c_X) = \frac{d}{d\varepsilon} c_A - \frac{d}{d\varepsilon} c_X = \frac{d}{dB_k} c_A \times \frac{d}{d\varepsilon} B_k - \frac{d}{dB_k} c_X \times \frac{d}{d\varepsilon} B_k \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d}{d\varepsilon} l_k = \left(\frac{d}{dB_k} c_A - \frac{d}{dB_k} c_X \right) \times \frac{d}{d\varepsilon} B_k = \left(\frac{d}{dB_k} c_A - \frac{d}{dB_k} c_X \right) \times d_k \quad (44) \end{aligned}$$

Ou seja, chamando-se a duração financeira do ativo B_k de d_k - calculada conforme (24) -, pode-se determinar a duração de cada passivo l_k conhecendo-se as primeiras derivadas dos preços das opções em relação ao preço à vista do ativo objeto B_k . Na literatura financeira, a primeira derivada do preço da opção em relação ao preço do ativo objeto é usualmente denominada delta (Δ) da opção. Pelo modelo de Merton (Kolb, 2000), pode-se determinar o delta de uma opção de compra através de:

$$\begin{aligned} \Delta_M &= \partial / \partial S c = (1+r)^T \times N(d_1^M) \\ d_1^M &= \frac{\ln(S/K) + 0,5 \times \sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}} \quad (45) \end{aligned}$$

Em (45), tem-se:

- Δ_M é o delta da opção de compra, em $t = 0$, pelo modelo de Merton
- S é o preço à vista do ativo objeto, em $t = 0$
- c é o preço da opção de compra, em $t = 0$
- r é a taxa de juros livre de risco (composta) para o prazo T
- T é o prazo de vencimento da opção
- $N(d)$ é a função distribuição normal padrão acumulada de d

- σ é a volatilidade do preço à vista do ativo objeto
- K é o preço de exercício da opção

Assim, substituindo (45) em (44), vem:

$$\frac{d}{d\varepsilon} l_k = (\Delta_A - \Delta_X) \times d_k \quad (46)$$

Vale notar que, analogamente à equação (18), o delta da opção concedida é maior ou igual ao delta da opção detida. Isso ocorre porque, matematicamente, quando o preço de exercício está mais próximo do preço à vista, o numerador de d_1^M em (45) se eleva, fazendo $N(d_1^M)$ ser mais próximo de 1. Esse aspecto, combinado à negatividade de d_k , leva $\frac{d}{d\varepsilon} l_k$ a ser sempre negativo. Portanto, para um deslocamento paralelo positivo (negativo) unitário no nível das taxas de juros, o valor da obrigação referente ao participante k diminui (aumenta) em $|(\Delta_A - \Delta_X) \times d_k|$. Em outras palavras, como era de se esperar, quando se elevam as taxas de juros, o passivo da seguradora diminui, pois reduz-se o risco de não se conseguir obter uma certa renda a partir de um mesmo saldo de poupança.

Agregando-se as durações individuais calculadas em (46) utilizando (43), tem-se finalmente o valor da duração financeira do passivo:

$$D_L = \sum_{k=1}^U \frac{d}{d\varepsilon} l_k = \sum_{k=1}^U [(\Delta_A - \Delta_X) \times d_k] \quad (47)$$

4.5.2 Estimativa da convexidade do passivo

Assim como no caso da duração, a convexidade financeira do passivo deve ser estimada a partir de:

$$Q_L = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} L = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \sum_{k=1}^U l_k = \sum_{k=1}^U \frac{d^2}{d\varepsilon^2} l_k \quad (48)$$

Novamente, o valor de $\frac{d^2}{d\varepsilon^2} l_k$ poderá ser calculado como:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\varepsilon^2} l_k &= \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{d}{d\varepsilon} l_k \right) = \frac{d}{d\varepsilon} [(\Delta_A - \Delta_X) \times d_k] = \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Delta_A - \frac{d}{d\varepsilon} \Delta_X \right) \times d_k + (\Delta_A - \Delta_X) \frac{d}{d\varepsilon} d_k \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d^2}{d\varepsilon^2} l_k = \left(\frac{d}{dB_k} \Delta_A \times \frac{d}{d\varepsilon} B_k - \frac{d}{dB_k} \Delta_X \times \frac{d}{d\varepsilon} B_k \right) \times d_k + (\Delta_A - \Delta_X) q_k \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{d\varepsilon^2} l_k = \left(\frac{d}{dB_k} \Delta_A - \frac{d}{dB_k} \Delta_X \right) \times d_k^2 + (\Delta_A - \Delta_X) q_k \quad (49)$$

A equação (49) mostra que a convexidade do passivo da seguradora em relação a cada participante $\frac{d^2}{d\varepsilon^2} l_k$ dependerá da duração e convexidade financeiras do ativo objeto B_k - calculadas conforme (24) e (25) - e das derivadas dos deltas das opções em relação ao preço à vista do ativo objeto B_k . Na literatura financeira, a primeira derivada do delta da opção em relação ao preço do ativo objeto, ou seja, a segunda derivada do preço da opção em relação ao ativo objeto, é usualmente denominada gama (γ) da opção. Pelo modelo de Merton (Kolb, 2000), pode-se determinar o gama de uma opção de compra através de:

$$\gamma_M = \partial^2 / \partial S^2 c = \partial / \partial S \Delta = \frac{(1+r)^T \times N'(d_1^M)}{S\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_1^M = \frac{\ln(S/K) + 0,5 \times \sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (50)$$

Em (50), tem-se:

- γ_M é o gama da opção de compra, em $t = 0$, pelo modelo de Merton
- S é o preço à vista do ativo objeto, em $t = 0$
- c é o preço da opção de compra, em $t = 0$
- Δ é o delta da opção de compra, em $t = 0$
- r é a taxa de juros livre de risco (composta) para o prazo T
- T é o prazo de vencimento da opção
- $N'(d)$ é a função densidade da distribuição normal padrão de d
- σ é a volatilidade do preço à vista do ativo objeto
- K é o preço de exercício da opção

Assim, substituindo (50) em (49), tem-se:

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2} l_k = (\gamma_A - \gamma_X) \times d_k^2 + (\Delta_A - \Delta_X) q_k \quad (51)$$

Vale notar que, analogamente à equação (18), o gama da opção concedida é maior ou igual ao gama da opção detida. Isso ocorre porque, assumindo opções *deep out of the money*, quando o preço de exercício está mais próximo do preço à vista, o numerador de d_1^M em (50) se aproxima de zero pela direita, fazendo $N'(d_1^M)$ ser mais próximo de seu valor máximo. Esse aspecto, combinado à não negatividade de d_k^2 , $(\Delta_A - \Delta_X)$ e q_k leva $\frac{d^2}{d\varepsilon^2} l_k$ a ser sempre positivo, como era de se esperar para uma medida de convexidade.

Agregando-se as durações individuais calculadas em (51) utilizando (48), tem-se finalmente o valor da convexidade financeira do passivo:

$$Q_L = \sum_{k=1}^U \frac{d^2}{d\varepsilon^2} l_k = \sum_{k=1}^U [(\gamma_A - \gamma_X) \times d_k^2 + (\Delta_A - \Delta_X) q_k] \quad (52)$$

4.5.3 Estimativa dos fluxos de caixa do passivo equivalente

Conforme apresentado, a aplicação do modelo de dedicação requer a estimativa dos fluxos de caixa do passivo que se pretende proteger. No entanto, na situação apresentada, não é possível estimarem-se *ex-ante* os valores desses fluxos L_τ . Isso ocorre porque não é possível saber se cada participante efetivamente converterá seu saldo final em renda.

No entanto, analogamente ao desenvolvimento apresentado no cálculo da duração financeira do passivo, pode-se escrever uma aproximação de primeira ordem para o valor do passivo atrelado a um participante (l_k) através da primeira derivada do valor desse passivo em relação ao preço do título de renda fixa atrelado àquele participante:

$$\begin{aligned} \Delta l_k &\approx \frac{d}{dB_k} l_k \times \Delta B_k = \frac{d}{dB_k} (c_A - c_X) \times \Delta B_k \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta l_k \approx (\Delta_A - \Delta_X) \times \Delta B_k \quad (53) \end{aligned}$$

Isso significa dizer que a variação no valor da parcela l_k do passivo tem suas variações aproximadas pelas variações de preço do ativo objeto B_k multiplicadas por $\Delta_A - \Delta_X$. Ou seja, se o preço do ativo sobe em ΔB_k , o passivo aumentará em aproximadamente $(\Delta_A - \Delta_X) \times \Delta B_k$. Isso quer dizer que o valor do passivo se comportará aproximadamente como uma posição de $\Delta_A - \Delta_X$ quantidades do próprio

ativo B_k . Por arbitragem (LUENBERGER, 1998), isso é equivalente a uma exposição de $\Delta_A - \Delta_X$ unidades ao ativo B_k e, por consequência, a seus fluxos de caixa (representados na Figura 16). Ou seja, é possível entender o passivo referente ao participante k como uma fração dos fluxos de caixa do ativo objeto referente àquele participante, sendo que a proporcionalidade é dada pela diferença entre os deltas das opções da equação (18).

Esses fluxos de caixa podem, portanto, ser denominados fluxos de caixa do passivo *delta equivalente*. Ou seja, para se determinarem os parâmetros L_τ necessários à implementação do modelo de dedicação, basta tomarem-se os fluxos individuais projetados para o ativo objeto B_k , multiplicá-los por $\Delta_A - \Delta_X$ do participante k e agregá-los para todos os participantes, conforme esquematizado na figura a seguir.

Figura 25 – Cálculo do passivo delta-equivalente.

4.6 Limitações dos modelos de otimização

Vale destacar, para concluir esta parte do trabalho, que, diferentemente da situação ideal para o qual os modelos de otimização e dedicação são construídos, na situação em questão o passivo é dinâmico. As modelagens apresentadas são estáticas, pois implicam a otimização da carteira de investimentos num momento inicial sem prever rebalanceamentos futuros.

Isso pode ser um problema especialmente importante na situação de pesquisa porque as variáveis necessárias para implementação dos modelos (37) e (40) podem oscilar expressivamente ao longo do tempo. Essa oscilação deve ser estudada, de forma a se determinar se os custos de transação mais elevados são compensados pela sofisticação adicional do modelo. Portanto, é adequada uma análise de sensibilidade dos parâmetros calculados previamente à implementação dos modelos e, eventualmente, a definição de uma rotina de atualização dos mesmos.

5 Aplicação e validação do modelo.

Os modelos de apreçamento e otimização apresentados respectivamente nas seções 3 e 4 podem ser diretamente aplicados à determinação do preço do seguro embutido num plano de previdência, bem como à otimização da carteira dos recursos garantidores. Neste capítulo, apresenta-se a aplicação dos modelos desenvolvidos a essas duas situações.

Inicialmente, apresenta-se a análise para determinação do custo do seguro associado a cada aplicação realizada pelo participante. Assim como na prática do setor de seguros, estuda-se o valor do prêmio do seguro como percentual da aplicação realizada, indicando-se qual seria a taxa de carregamento adequada.

Na segunda parte do capítulo, apresenta-se a aplicação dos modelos para determinação do valor do passivo e da carteira ótima de ativos para a situação de uma instituição seguradora. Na aplicação apresentada, foram tomados dados de todos os participantes vinculados a um fundo PGBL com perfil de investimento de renda fixa. Por questões de sigilo, apresentam-se valores de saldos financeiros arbitrariamente proporcionais aos valores reais para as variáveis. As demais variáveis foram mantidas em seus valores originais.

5.1 Aplicação na determinação do valor do seguro individual

Nesta seção, analisam-se os resultados do modelo na determinação do valor do seguro para alguns participantes hipotéticos. Apresenta-se, também, a análise de sensibilidade dos valores obtidos em relação aos níveis de taxas de juros e em relação à volatilidade projetada para os ativos.

5.1.1 Metodologia de aplicação do modelo

Conforme o modelo de apreçamento do seguro embutido no produto de previdência, apresentado no capítulo 3, sabe-se que o valor de tal seguro depende das características da opção concedida ao segurado, identificadas na Tabela 4, reproduzida a seguir:

Tabela 5 – Características das opções da equação (18)

Característica	c_A	c_X
Ativo Objeto	B_k	B_k
Direito Transferido	Compra	Compra
Preço de Exercício	A_{T_a}	X
Data de Vencimento	$t = T_a$	$t = T_a$
Tipo de Exercício	Europeu	Europeu

Ou seja, se forem mapeadas as informações acima para um certo participante, ter-se-ão os dados necessários para caracterização da opção financeira a ele concedida, e portanto para se calcular o valor justo do seguro, segundo o modelo. Especificamente, faz-se necessária a identificação de T_a , A_{T_a} , B_k e X .

Para exemplificar a determinação desses parâmetros, tomemos o exemplo de um participante hipotético que vai realizar uma contribuição ao seu plano. Deseja-se determinar qual o valor do seguro vendido a esse participante, de forma a determinar a taxa de carregamento adequada a ser cobrada. As características desse participante são as seguintes:

Tabela 6 – Características de um participante hipotético

Característica	Valor
Valor da Contribuição	R\$100,00
Idade Atual	25 anos
Idade da Aposentadoria	65 anos
Expectativa de Sobrevivência	85 anos
Índice de Reajuste da Renda	IGP-M
Taxa de Juros Real Contratual	6,0% a.a.

Para simplificar a análise, é interessante trabalhar-se tomando os valores reais para todas as variáveis. Sendo assim, vamos assumir todos os valores indexados ao IGP-M. Dessa forma, podem-se determinar as variáveis identificadas na Tabela 5.

Inicialmente, é fácil notar que o instante da aposentadoria T_a é determinado subtraindo-se da idade da aposentadoria a idade atual, ou seja, $T_a = 65 - 25 = 40$ anos.

O saldo do participante na data da aposentadoria resulta da aplicação da hipótese de que sua contribuição será aplicada à taxa livre de risco $R_0(T_a)$, válida de hoje ($t = 0$) até tal data ($t = T_a$). Ou seja:

$$A_{T_a} = R\$100,00 \times (1 + R_0(T_a))^{T_a} = R\$100,00 \times (1 + R_0(40))^{40} \quad (54)$$

Em (54), o saldo A_{T_a} é medido em unidades monetárias da data da análise ($t = 0$) e a taxa de juros $R_0(40)$ é a taxa de juros real implícita nos ativos indexados à variação do IGP-M, válida para o prazo de 40 anos. É necessário, então, conhecer a estrutura temporal da taxa de juros real praticada para esses instrumentos. Para as aplicações aqui utilizadas, tomou-se uma estimativa de tal curva de juros em 26/jul/2006, extrapolada para prazos superiores a 50 anos. A extrapolação foi feita mantendo-se constante a taxa de juros real para prazos superiores a esse. O gráfico a seguir apresenta a estrutura a termo de taxa de juros utilizada.

Figura 26 – Estrutura temporal da taxa de juros utilizada

Utilizando-se essa curva de juros, tem-se que $R_0(40) = 8,11\%a. a.$, o que leva ao saldo projetado na data da aposentadoria de $A_{T_a} = R\$2.260,56$.

Resta agora caracterizar o ativo objeto da opção concedida a esse participante. Retomando a Figura 16, sabe-se que o ativo B corresponde a um título de renda fixa cujos fluxos de caixa, em termos reais, correspondem à renda que pode ser adquirida com o saldo A_{T_a} , utilizando-se as condições contratuais:

Figura 27 – Fluxo de caixa correspondente ao ativo B para o participante em análise

Ou seja, o ativo-objeto B para esse participante é integralmente caracterizado pela renda mensal contratual RM_C , pelo prazo de recebimento da renda, em meses (v), e pela data a partir da qual se inicia o fluxo, ou seja, um mês após a data da aposentadoria ($T_a + 1/12$). Para o caso do participante em estudo, o recebimento da

renda se dará por $85 - 65 = 20$ anos, ou 240 meses. Logo, $v = 240$ meses. Além disso, a renda real contratual será tal que:

$$A_{T_a} = R\$2.260,56 = RM_C \times \sum_{m=1}^{240} \frac{1}{(1 + 6\%)^{m/12}} = RM_C \times 141,38 \quad (55)$$

Em $RM_C \times \sum_{m=1}^{240} \frac{1}{(1+6\%)^{m/12}} = RM_C \times 141,38$ (55), a taxa de juros real utilizada é a taxa contratual de 6,0%a.a. Resolvendo-se tal equação em RM_C , chega-se a uma renda mensal real de R\$15,99. Por fim, redesenhando a Figura 27 com os valores determinados acima, tem-se a completa caracterização do ativo objeto da opção, B :

Figura 28 – Caracterização do ativo B para o participante em análise

Ainda utilizando-se a estrutura temporal da taxa de juros indicada na Figura 26, pode-se calcular o preço de tal ativo B em $t = 0$, chegando-se a $B = R\$86,52$. Adicionalmente, aplicando-se a metodologia de estimativa de volatilidades apresentada na seção 3.4.2, chega-se a uma volatilidade de retornos de $\sigma = 16,8\%a.a.$ para tal participante. Essa volatilidade, relativamente alta, é explicada pelo longo prazo que decorrerá até a data de recebimento dos fluxos (entre 40 e 60 anos).

Por fim, cabe determinar o preço de exercício da opção quando se utiliza uma taxa de juros real igual a zero. Conforme apresentado na equação (17), tal preço de exercício corresponderá à soma algébrica dos fluxos indicados na Figura 28, ou seja:

$$X = 240 \times R\$15,99 = R\$3.837,31 \quad (56)$$

Calcularam-se, assim, todos os dados necessários para determinação do valor do seguro para esse participante. Tais dados estão resumidos na tabela a seguir.

Tabela 7 – Dados para o cálculo do valor do seguro

Característica	Valor
Preço do Ativo Objeto (S)	R\$86,52
Volatilidade do Ativo Objeto (σ)	16,8% a.a.
Preço de Exercício da Opção Concedida ($K_A = A_{T_a}$)	R\$2.260,56
Preço de Exercício da Opção Recebida ($K_X = X$)	R\$3.837,31
Data de Vencimento ($T = T_a$)	40 anos
Taxa de Juros Real até a Data de Vencimento (r)	8,11% a.a.

Com esses dados, torna-se possível a aplicação do Modelo de Fisher e da equação (18) para determinação do valor do seguro e da taxa de carregamento. A Tabela 8 a seguir apresenta a memória de cálculo para o participante em estudo.

Tabela 8 – Memória de cálculo do valor do seguro para o participante hipotético

Variável/Função	Valor para c_A	Valor para c_X
$\ln(S/K)$	-3,26	-3,79
$0,5 \times \sigma^2 T$	0,56	0,56
$\sigma\sqrt{T}$	1,06	1,06
d_1^F	-2,54	-3,04
d_2^F	-3,60	-4,10
$N(d_1^F)$	0,56%	0,12%
$N(d_2^F)$	0,02%	0,00%
$S \times N(d_1^F) - K \times N(d_2^F)$	0,1234	0,0240
$(1 + r)^T$	22,61	22,61
c_F (valor da opção)	R\$2,79	R\$0,54
Valor da opção em relação à aplicação	2,79%	0,54%

Portanto, para esse participante hipotético, o valor do seguro será de R\$2,79 – R\$0,54 = R\$2,25. Isso corresponde a 2,25% do valor da aplicação, ou seja, segundo o modelo, no momento em que as taxas de juros reais são dadas pelo gráfico da Figura 26, a taxa de carregamento adequada é de 2,25%.

Repetindo-se o método acima, podem-se analisar os custos do seguro para diferentes participantes, bem como aplicar-se uma análise de sensibilidade em relação aos parâmetros utilizados, especificamente o nível das taxas de juros e a volatilidade do ativo objeto.

5.1.2 Cálculo do valor do seguro (taxa de carregamento) para diferentes participantes

Para se avaliarem os resultados do modelo, serão consideradas algumas características para os participantes, a partir das quais serão determinados os

valores justos para a taxa de carregamento. Consideraremos, inicialmente, o valor contratual para a taxa de juros de 6,0% a.a. que, se não é mais tão comumente aplicado pelo mercado, já o foi em larga escala.

Para a caracterização dos participantes, tomemos a hipótese de que segurados do sexo masculino se aposentam com 65 anos e vivem até 85 anos, enquanto seguradas do sexo feminino se aposentam com 60 anos e vivem até 88 anos. Variando-se a idade atual para os homens entre 22,5 anos e 42,5 anos, e para as mulheres entre 20 e 37,5 anos, determinam-se valores para as taxas de carregamento entre 0,0% e 7,6%. Os gráficos das figuras seguintes apresentam os resultados.

Figura 29 – Valor da taxa de carregamento em função da idade para participantes do sexo masculino

Figura 30 – Valor da taxa de carregamento em função da idade para participantes do sexo feminino

É interessante destacar algumas características dos resultados obtidos. Inicialmente, observa-se que, para participantes mais jovens, o valor da opção concedido a participantes do sexo masculino é maior que para participantes do sexo feminino. Por exemplo, a taxa de carregamento para um homem de 22,5 anos é de 7,6%, contra apenas 2,1% para uma mulher. Uma explicação para isso decorre do

fato de que o prazo de vencimento da opção é maior para os homens, que se aposentam com idade maior.

De fato, conforme se aumenta a idade do participante, observa-se que o valor da opção para homens cai mais rapidamente. Nos gráficos, vê-se que para um participante de 30 anos do sexo masculino a taxa de carregamento é de 0,3% contra 0,7% para uma participante do sexo feminino. Nesse caso, o que ocorre é que, conforme se aproxima a aposentadoria, passa a ter mais peso o fato de que a sobrevivência de participantes do sexo feminino é maior, aumentando potencialmente o valor da renda a ser adquirida.

Naturalmente, se as taxas contratuais fossem mais altas, todas as taxas de carregamento teriam seu valor aumentado, pois maiores taxas permitem a aquisição de rendas de valor maior, portanto aumentando o valor do seguro concedido. Os gráficos a seguir mostram os cálculos para os mesmos participantes, mas utilizando-se uma taxa real contratual de 7,0% a.a.

Figura 31 – Valor da taxa de carregamento em função da idade para participantes do sexo masculino, para taxa contratual de 7,0% a.a.

Figura 32 – Valor da taxa de carregamento em função da idade para participantes do sexo feminino, para taxa contratual de 7,0% a.a.

Cabe aqui um comentário a respeito do contraste entre os resultados apresentados acima e as práticas comerciais atualmente adotadas. Conforme visto, o valor do seguro concedido depende das características específicas do participante para o qual se está vendendo o seguro. Além disso, depende da taxa contratual de

conversão em renda. No entanto, a taxa de carregamento é usualmente fixada para o participante independentemente dessas variáveis. Isso quer dizer que participantes mais jovens tendem a pagar taxas de carregamento mais baixas que a justa, enquanto participantes mais maduros pagam mais caro. Isso é parcialmente compensado pela possibilidade de que participantes mais maduros usualmente terão renda maior e farão contribuições maiores. No entanto, o maior custo para participantes que recebem taxa contratual mais alta acaba não sendo compensado, sugerindo que há espaço para se aprimorar as práticas de cobrança da taxa de carregamento.

5.1.3 Análise de sensibilidade em relação ao nível da taxa de juros real

Mantendo-se constante a taxa contratual de 6,0% a.a. utilizada anteriormente, pode-se fazer um exercício para avaliar quanto varia a taxa de carregamento conforme variam as taxas de juros.

Em especial, é interessante notar que, conforme caem as taxas de juros, aumenta o valor do direito concedido ao participante, e seria interessante determinar quanto oscila o valor calculado para a taxa de carregamento. Tomando-se como base a curva de juros da Figura 26, desenharam-se cenários alternativos em que tais taxas de juros sofriam deslocamentos paralelos (para baixo) de 0,40; 0,80; 1,20; 1,60; 2,00; 2,40; 2,80 e 3,20 pontos percentuais. Para cada cenário, determinou-se novamente o valor da taxa de carregamento para participantes do sexo masculino e feminino de 25 e 35 anos. O gráfico da figura a seguir apresenta o comportamento da taxa de carregamento calculada para cada uma das situações.

Figura 33 – Análise de sensibilidade da taxa de carregamento em relação a deslocamentos paralelos da estrutura temporal das taxas de juros

Como era de se esperar, conforme caem as taxas de juros, as taxas de carregamento sobem. No entanto, a não linearidade do preço das opções em relação ao nível da taxa de juros faz com que o crescimento das taxas de carregamento se dê de forma não linear. Mais do que isso, as curvas do gráfico acima são todas convexas, mostrando que a variação da taxa de carregamento aumenta conforme as taxas de juros se reduzem.

Cabe observar, em especial, que a variação da taxa de carregamento para uma mulher de 25 anos a partir de um certo ponto supera aquela para um homem de 25 anos, também devido ao fato de que, para taxas de juros baixas, o prazo de vencimento da renda se torna mais importante que o prazo de vencimento da opção.

Por fim, vale destacar novamente a questão de que os resultados acima sugerem uma prática comercial que permita o ajuste das taxas de carregamento conforme variam as taxas de juros. Em especial, destaca-se que, não existindo tal ajuste, cria-se a possibilidade de transferência de riqueza da instituição seguradora para o participante, que se beneficia de um seguro sub-avaliado no caso de queda nas taxas de juros, mas que não é obrigado a adquiri-lo no caso de alta das taxas de juros.

5.1.4 Análise de sensibilidade em relação à volatilidade

A outra variável de grande importância para determinação da taxa de carregamento é a volatilidade utilizada para os preços dos títulos indexados à variação do IGP-M. Para se observar os valores alternativos da taxa de carregamento em diferentes cenários para a volatilidade do ativo objeto, recalcularam-se as curvas do gráfico da Figura 33 para os cenários em que a volatilidade dos ativos varia em -10%, +10%, +20% e +30% em relação aos seus patamares iniciais. Os gráficos das figuras a seguir mostram os resultados em cada cenário.

Figura 34 – Análise de sensibilidade da taxa de carregamento em relação à volatilidade (-10%)

Figura 35 – Análise de sensibilidade da taxa de carregamento em relação à volatilidade (+10%)

Figura 36 – Análise de sensibilidade da taxa de carregamento em relação à volatilidade (+20%)

Figura 37 – Análise de sensibilidade da taxa de carregamento em relação à volatilidade (+30%)

Novamente, evidencia-se a necessidade de ajustar a taxa de carregamento à condição de mercado vigente quando da realização de cada aporte.

Além disso, os gráficos acima evidenciam que o resultado do modelo depende de forma importante do valor da volatilidade dos títulos de renda fixa, sugerindo que a instituição seguradora cobre uma taxa de carregamento que inclua uma margem de segurança relacionada ao fato de que a concessão do seguro corresponde, na prática, a uma “venda de volatilidade”.

5.2 Aplicação na determinação do passivo agregado de uma instituição seguradora

Outra aplicação direta dos modelos de apreçamento e otimização apresentados neste trabalho se refere à utilização dos mesmos na análise de um passivo já assumido por uma instituição seguradora dados os saldos atuais dos participantes em seus planos de previdência aberta.

Para tal aplicação, necessitam-se, além dos dados de mercado já levantados, das características específicas dos participantes dos planos de aposentadoria. Para a análise apresentada, foram levantados os dados dos participantes de um plano de

aposentadoria cujos recursos são investidos em um fundo de renda fixa. A seguir, descreve-se a metodologia utilizada para aplicação dos modelos.

5.2.1 Levantamento de dados

A área atuarial da seguradora que comercializa o fundo analisado, através de pesquisa no sistema de passivos da própria seguradora, forneceu os dados necessários à realização do estudo em questão. Especificamente, foram levantados, para cada participante com saldo no fundo, as seguintes informações:

- saldo do participante no fundo
- idade do participante
- data esperada de aposentadoria
- o fator de conversão em renda (determinado pela combinação da taxa de juros pré determinada para conversão do saldo do participante em renda e pela expectativa de vida do participante na data da aposentadoria, de acordo com a tábua atuarial contratual para o participante)
- expectativa de vida do participante na data da aposentadoria, de acordo com a tábua atuarial atualizada

Como conciliação, verificou-se que a soma dos saldos individuais de cada participante correspondia ao patrimônio líquido do plano, obtido junto à instituição gestora do fundo, na data da análise.

5.2.2 Estimativa do Valor do Passivo

Para cada participante, determinaram-se os dados necessários e calcularam-se os preços das opções presentes na equação (18), da mesma forma que apresentada no item 5.1.1 e, em especial, na Tabela 8. Com os valores dos passivos individuais, obteve-se o valor total do passivo conforme (19). A Tabela 9 apresenta as estatísticas para o valor individual da opção. As médias apresentadas não são ponderadas pelo saldo do participante.

Tabela 9 – Valores Individuais das Opções

	Média	Desvio Padrão
Valor da Opção Concedida	R\$ 1.518	R\$ 5.345
Valor em Percentual do Saldo Atual	1,6%	3,4%

Agregando-se os valores dos passivos individuais, chega-se, conforme (19), a um valor total para o passivo de R\$ 4,27 milhões, ou 0,81% do saldo total dos participantes no fundo. É interessante notar que, para a condição específica do plano em questão, o valor financeiro da obrigação assumida é razoavelmente baixo, sendo compensado pelas taxas de carregamento praticadas. No entanto, conforme visto, esses valores são bastante sensíveis aos dados específicos do problema, especialmente no que se refere ao nível das taxas de juros. Portanto, para planos com diferentes perfis de participante, o valor total do passivo poderia ser maior. Além disso, vale destacar, conforme será detalhado na seção 5.2.3, que a duração financeira do passivo é relativamente alta quando comparada com o valor do mesmo, de forma que a proteção dos riscos em relação a variações nas taxas de juros é recomendável.

5.2.3 Duração e Convexidade do Passivo

Conforme as relações (47) e (52), é possível calcular a duração e a convexidade do valor calculado para o passivo, ou seja, a primeira e segunda derivadas do valor financeiro do passivo em relação a deslocamentos paralelos da estrutura temporal de taxas de juros.

A Tabela 10 apresenta as estatísticas dos valores necessários para a determinação da duração e convexidade do ativo, ou seja, o valor atual do ativo objeto, a duração e convexidade financeiras do ativo objeto e as gregas referentes a cada opção.

Tabela 10 – Duração e Convexidade Individual das Opções

	Média	Desvio Padrão
Preço do Ativo Objeto	R\$ 112.862	R\$ 229.830
Duração Financeira do Ativo (para 1% de variação na taxa)	(R\$ 21.978)	R\$ 42.878
Convexidade Financeira do Ativo (para 1% ² de variação na taxa)	R\$ 5.565	R\$ 10.677
Delta da Opção	8,1%	11,8%
Gama da Opção	0,03%	0,47%

Dessa forma, calcula-se a contribuição do passivo referente a cada participante para a duração e convexidade do passivo, indicados a seguir.

Tabela 11 – Contribuição Individual para Duração Financeira e Convexidade

	Média	Desvio Padrão
Contribuição para a Duração Financeira do Passivo	R\$ 1.942	R\$ 6.148
Contribuição para a Convexidade Financeira do Passivo	(R\$ 780)	R\$ 2.247

Esses valores levam a uma duração financeira total do passivo de R\$ 5,46 milhões e a uma convexidade financeira total do passivo de -R\$ 2,19 milhões. Cabe notar que, por ser o passivo uma posição vendida em opções de compra, a duração e convexidade delta equivalentes possuem sinal oposto às durações e convexidades dos ativos objeto referentes a cada participante individualmente.

5.2.4 Fluxo de Caixa do Passivo “delta-equivalente”

Pode-se estimar, também, conforme esquematizado na seção 4.4, o passivo delta equivalente correspondente ao conjunto dos participantes em análise. O gráfico da Figura 38 apresenta o fluxo de caixa real ano a ano assim determinado.

Figura 38 – Passivo Real Delta Equivalente

Esse passivo possui um valor presente total de R\$ 21,7 milhões, uma duração financeira de R\$ 5,40 milhões e uma convexidade financeira de R\$ -1,55 milhões. É interessante notar que a duração e convexidade se assemelham às calculadas no item 5.2.3. No entanto, por se tratar do valor delta equivalente do ativo objeto e não mais do valor da opção, o montante financeiro é significativamente superior ao prêmio calculado anteriormente.

5.2.5 Análises de sensibilidade

Conforme mencionado, para a aplicação de modelos de otimização cuja solução seja robusta, é importante verificar a variabilidade dos parâmetros calculados conforme mudam os dados do problema. Para isso, foram recalculados o valor do passivo, a duração financeira e a convexidade financeira variando-se a volatilidade e o patamar da estrutura a termo de taxas de juros. Vale destacar que, nesse último caso, o deslocamento da estrutura a termo provoca um recálculo da volatilidade para cada opção. No entanto, não se recalculou o saldo futuro do participante conforme (11), uma vez que o objetivo da análise é determinar o efeito da variação das taxas sobre o passivo da seguradora pelo ponto de vista da opção. Para se considerar os co-movimentos entre o valor da opção e o valor do investimento, é necessário um refinamento prévio do modelo.

Especificamente, variou-se a volatilidade de cada opção em +20%, +10%, -10% e -20%. No que se refere à taxa de juros, testaram-se deslocamentos paralelos de +2, +1, -1, -2, -3 e -4 pontos percentuais.

A Tabela 12 e a Tabela 13 apresentam os resultados da análise de sensibilidade. Observa-se que os resultados apresentam significativa variação com relação ao patamar de volatilidade de mercado, o que ocorre devido ao elevado valor tempo das opções (que são de prazo longo). Com relação à taxa de juros, observa-se que, conforme as opções entram no dinheiro (ou seja, conforme as taxas de longo prazo caem em 4 pontos percentuais ao ano), tanto o valor nominal do passivo quanto sua duração e convexidade aumentam significativamente (cerca de 20 vezes). A sensibilidade na direção de elevação da taxa de juros é também significativa.

Tabela 12 – Análise de Sensibilidade em Relação à Volatilidade

Variação na Volatilidade (%)	Valor do Passivo (R\$ milhões)	Duração Financeira (R\$ milhões)	Convexidade Financeira (R\$ milhões)
+20%	5,68	6,30	(2,48)
+10%	4,97	5,87	(2,34)
0%	4,27	5,46	(2,19)
-10%	3,57	4,90	(2,03)
-20%	2,90	4,35	(1,84)

Tabela 13 – Análise de Sensibilidade em Relação ao Patamar das Taxas de Juros

Deslocamento Paralelo na Estrutura Temporal de Taxa de Juros (p.p.)	Valor do Passivo (R\$ milhões)	Duração Financeira (R\$ milhões)	Convexidade Financeira (R\$ milhões)
+2,00	1,05	1,15	(0,38)
+1,00	2,07	2,42	(0,87)
0,00	4,27	5,46	(2,19)
-1,00	9,07	12,22	(5,89)
-2,00	20,19	27,42	(15,09)
-3,00	43,78	51,02	(21,33)
-4,00	85,51	87,22	(40,38)

5.3 Aplicação na Otimização da Carteira

Após determinadas as características do passivo necessárias à implementação dos modelos de imunização e dedicação (sem correção), esses modelos foram aplicados à situação do produto de previdência em questão.

Essa subseção apresenta os resultados da implementação desses modelos que, embora de utilização prática limitada, são elucidativos no sentido de identificar os importantes riscos associados ao lançamento das opções que caracterizam o problema de pesquisa.

Em resumo, a aplicação dos modelos indica que os ativos disponíveis no mercado são insuficientes para adequada proteção dos riscos do passivo, porque tal passivo se caracteriza por fluxos de caixa diferidos por prazos extremamente longos (mais de 30 anos). Como o ativo indexado ao IGP-M mais longo disponível no mercado brasileiro possui vencimento em 2031, ou seja em cerca de 25 anos, eles se mostram insuficientes para a proteção da carteira. A seguir, descrevem-se as etapas de implementação dos modelos, bem como seus resultados.

5.3.1 Método de Implementação dos Modelos

Para a aplicação de ambos os modelos, faz-se necessário um levantamento dos ativos disponíveis para investimento. Tomaram-se, para tanto, os títulos públicos federais disponíveis para negociação em mercado, conforme publicação de preços diária realizada pela Andima (Associação Nacional das Instituições do Mercado Financeiro).

Utilizaram-se duas classes de ativos, a saber, os títulos indexados à taxa de juros referencial do Sistema Especial de Liquidação e de Custódia (taxa Selic) e os títulos indexados à variação do Índice Geral de Preços de Mercado (IGP-M) da Fundação Getúlio Vargas. Os títulos públicos em circulação indexados à taxa Selic denominam-se Letras Financeiras do Tesouro (LFTs), enquanto os ativos indexados à variação do IGP-M são denominados Notas do Tesouro Nacional - série C (NTN-Cs) (ANDIMA, 1993) Optou-se por utilizar as NTN-Cs devido ao fato de que os fluxos do passivo são atrelados a esse indexador.

Tomou-se, assim, um conjunto de 61 ativos disponíveis em 11 de agosto de 2006, sendo 55 LFTs com vencimentos entre 13/set/2006 e 18/dez/2013 e 6 NTN-Cs com vencimentos em 01/dez/06, 01/abr/08, 01/mar/11, 01/jul/17, 01/abr/21 e 01/jan/31. Os preços desses ativos P_i foram tomados conforme divulgação da Andima de 14/ago/2006. Os fluxos de caixa foram determinados de acordo com as projeções de longo prazo da taxa Selic e da variação do IGP-M elaboradas pela área

econômica da gestora dos recursos responsável pela administração dos ativos da seguradora. Como as NTN-Cs possuem pagamento semestral de cupom (SECURATO, 2005), esse grupo de ativos resultou em um conjunto 174 fluxos de caixa em 144 diferentes datas. O fluxo de caixa do passivo, necessário ao modelo de dedicação é indicado na Figura 38, compunha-se por 1028 fluxos de caixa mensais iniciando-se em 31/ago/2006 e terminando em 31/mar/2092. Os dados de duração financeira e convexidade do passivo, calculados na seção 5.2.3, foram usados para implementação do modelo de imunização.

5.3.2 Resultados dos Modelos de Otimização

A aplicação do modelo de imunização indicou não haver solução viável para o problema de otimização de carteira. Isso ocorre porque a convexidade financeira dos fluxos do passivo é significativamente superior àquelas apresentadas pelos ativos disponíveis para investimentos. Em outras palavras, não é possível, com os ativos de mercado, construir uma carteira com duração financeira igual à do passivo e convexidade superior. Naturalmente, para tornar o problema viável, pode-se relaxar a restrição de segunda ordem (36) do modelo de imunização, fazendo com que as variações no valor dos ativos sejam próximas embora menores que aquelas observadas para o passivo. Nessa situação, o resultado da otimização é o investimento no ativo que apresente a menor razão preço/duração financeira, num valor igual à duração financeira do passivo multiplicado pelo valor de tal razão. Isso indica, portanto, um investimento de R\$60,8 milhões na NTN-C com vencimento em 01/jan/2031.

Para o modelo de dedicação, a resposta da otimização corresponde a uma aplicação de R\$36,9 milhões também no ativo de maior prazo de vencimento. O menor valor financeiro do modelo de dedicação em relação ao modelo de imunização pode ser explicado pelo fato de que, neste caso, o modelo não considera a necessidade de proteger a carteira em relação a oscilações das taxas de juros, uma vez que o objetivo é exclusivamente atender parcialmente (delta) os fluxos de caixa dos ativos objeto das opções.

5.3.3 *Análise dos Resultados da Otimização: Oportunidade para Alongamento da Dívida Pública Interna*

Como se pôde observar pelos resultados da otimização apresentada na seção anterior, o mercado de capitais brasileiro oferece desafios para a adequada proteção dos riscos oriundos das carteiras de previdência aberta de instituições seguradoras.

Isso ocorre porque os ativos indexados às taxas de inflação disponíveis no mercado brasileiro apresentam prazos de vencimento inferiores aos prazos característicos do passivo em questão. Em especial, os ativos indexados à taxa de variação do IGP-M possuem data de vencimento máxima em 2031. Os ativos indexados à taxa de variação do IPCA, embora apresentem prazos de vencimento mais longos, também não apresentam emissão com maturidade posterior a 2045.

Pelo lado do passivo, porém, os prazos de vencimento são significativamente mais longos. De fato, pela própria observação das características das obrigações, conforme apresentadas nas seções 5.2.3 e 5.2.4, é possível perceber que o passivo no problema de pesquisa apresenta prazos de vencimento muito mais longos que os oferecidos pelos ativos.

Na seção 5.2.3, apresentou-se o resultado de que a duração financeira efetiva do passivo era de R\$5,26 milhões por ponto percentual de variação da taxa de juros. Considerando-se que o valor do passivo era de R\$4,27 milhões, essa duração efetiva seria equivalente, para um título sem pagamento de cupom (título *bullet*), a uma duração de mais de 100 anos (pelo conceito de Macaulay, conforme FABOZZI, 2000). Naturalmente, a convexidade das opções distorce para cima essa medida. Mesmo assim, observando-se o gráfico da Figura 38 na seção 5.2.4, verifica-se que parcela significativa do passivo delta-equivalente apresenta vencimentos posteriores a 2031 (e mesmo a 2045).

No entanto, a dificuldade observada para proteção dessas carteiras seria reduzida se houvesse vencimentos de ativos mais longos. É verdade que, para que haja disposição de instituições privadas para realizar aplicações de prazos tão longos em títulos de dívida faz-se necessário um emissor com elevada qualidade de crédito, potencialmente um emissor identificado pelas agências classificadoras de risco como pertencente ao “grau de investimento”.

Assim, considerando-se o potencial interesse dessas instituições por ativos de prazo de vencimento longos juntamente com a trajetória de convergência gradual da classificação de risco do Tesouro Nacional na direção do “grau de investimento”, que pôde ser observada nos últimos anos, observa-se uma potencial oportunidade para alongamento dos vencimentos da dívida pública interna no Brasil.

Uma das vantagens desse alongamento seria a própria melhora na avaliação de risco de crédito do país, que por sua vez permite quedas adicionais nos níveis de taxas de juros praticados na economia brasileira. Esse movimento daria também mais credibilidade ao regime de metas para a inflação, que vem sendo seguido pelo Banco Central do Brasil desde 1999, uma vez que poderia atrelar um passivo relevante da República às taxas de variação do IPCA, mostrando comprometimento com a manutenção das taxas de inflação em patamares baixos, no longo prazo.

Portanto, apesar da dificuldade de implementação do *hedge* do passivo estudado nas atuais condições de mercado, o interesse que esse tipo de operação gera em títulos públicos de vencimentos longos poderia levar à emissão dos ativos que hoje faltam para a implementação de uma carteira de proteção adequada.

6 Conclusão e Trabalhos Futuros

O presente trabalho apresentou modelos financeiros para determinação do valor do seguro concedido aos participantes de planos de previdência aberta no Brasil. A pesquisa também propôs modelos de otimização que poderiam ser utilizados para determinação da carteira de investimentos da instituição seguradora, de forma a protegê-la de oscilações no valor dos passivos.

Na aplicação apresentada, evidenciou-se a importância de se permitir a aplicação de taxas de carregamento, cobradas como prêmio pelo seguro concedido, que sejam adequadas não somente às características individuais do participante (idade, data de aposentadoria, expectativa de vida e taxa contratual) como também às condições de mercado que prevaleçam na data da realização da aplicação. Embora o arcabouço teórico aponte para tal solução, não se verifica na prática tal diferenciação, o que aponta para a necessidade de mudança de tal prática no futuro.

Além disso, verificou-se, através da implementação do modelo para o caso de um plano de previdência de uma instituição seguradora, que o passivo já assumido, quando comparado com o total de ativos do plano, é relativamente pequeno, devido ao fato de as taxas de juros reais na data da análise estarem em patamares mais elevados que as taxas de juros contratuais. Verificou-se, inclusive, um valor de passivo compatível com as taxas de carregamento comumente aplicadas. No entanto, a elevada sensibilidade do valor do passivo em relação a quedas nas taxas de juros reais sugere que seja adequada a utilização de métodos de proteção para a carteira de recursos garantidores, em relação a tais cenários.

No que tange à aplicação dos modelos de otimização, verificou-se a dificuldade de se montar uma carteira com prazo compatível com os vencimentos do passivo, devido à inexistência de ativos de prazo tão longo. Naturalmente, com a convergência do risco de crédito da República para o grau de investimento, esperada para os próximos anos, haverá uma oportunidade de alongamento do perfil da dívida pública, à medida que o Tesouro Nacional pode oferecer o *hedge* necessário a essas carteiras através de títulos indexados à variação da taxa de inflação, em especial ao IPCA. Esse movimento daria também mais credibilidade ao regime de metas para a inflação, que vem sendo seguido pelo Banco Central do Brasil desde 1999, uma vez que atrelaria um passivo relevante da República às

taxas de variação do IPCA, mostrando comprometimento com a manutenção das taxas de inflação em patamares baixos, no longo prazo.

O modelo aqui apresentado, no entanto, apresenta algumas limitações que dão margem a temas para serem abordados em pesquisas futuras. A principal limitação da modelagem aqui apresentada naturalmente se refere à aplicabilidade do modelos somente a planos cujos investimentos sejam feitos em renda fixa, e, em especial, na taxa real livre de risco. Para produtos de previdência, a aplicação de uma parcela dos recursos em ativos que apresentam maiores retornos esperados é não somente desejada, mas altamente recomendável. Além disso, com a constante queda que vem sendo observada nos níveis de taxa de juros reais, é razoável supor que o patrimônio dos produtos de previdência balanceados, ou seja, que aplicam parcela de seus recursos em renda variável, deverá crescer. Nesse caso, surgem dois complicadores para o modelo. O primeiro deles corresponde à incerteza que se passa a ter a respeito do saldo final de poupança do participante, que não mais poderá ser determinado no instante inicial. Mais do que isso, ele corresponderá a uma variável aleatória que provavelmente apresentará correlação negativa com o nível das taxas de juros. Em outras palavras, o participante terá mais recursos em sua poupança exatamente nas situações em que seu direito terá o valor mais alto, o que potencialmente aumentará o valor do seguro concedido. Dessa forma, um desenvolvimento futuro para o presente trabalho consiste na aplicação de um modelo financeiro que descreva a dinâmica temporal de cada uma das variáveis financeiras envolvidas, chegando a uma estimativa válida para produtos balanceados.

Outro aprimoramento possível seria a consideração e estudo em maiores detalhes dos efeitos de diferentes regimes fiscais, que podem, dependendo da faixa de renda do participante, alterar a atratividade da conversão do saldo em renda.

Além dessas, uma abordagem alternativa seria a consideração da natureza americana da opção de conversão em renda, que dificulta o problema não só por demandar a utilização de um modelo binomial mas também por exigir a definição da otimização das condições de exercício, de forma análoga à otimização do momento do encerramento da apólice apresentada por Milevsky e Salisbury (2006). Ou seja, para esse aprimoramento, pode ser necessária a utilização de técnicas de

otimização dinâmica para definir o momento ótimo de exercício, que então é levado ao modelo binomial de apreçamento.

A consideração da natureza estocástica da mortalidade, possivelmente correlacionada ao desempenho dos ativos de mercado conforme Ballotta e Haberman (2006), também é um aprimoramento futuro a ser incorporado ao modelo.

Por fim, a implementação de um modelo que considere garantia de rentabilidade no período de acumulação adicionalmente ao direito de conversão em renda pode ser desenvolvida para os chamados planos “tradicionais” que, diferentemente de PGBLs e VGBLs, garantem uma taxa de retorno mínima até o momento da aposentadoria.

REFERÊNCIAS

- ANDIMA. **Séries históricas – dívida pública**. Rio de Janeiro : Andima, 1993.
- BALLOTTA, L. HABERMAN, S. Valuation of guaranteed annuity conversion options. **Insurance: Mathematics and Economics** n. 33 p. 87–108, 2003.
- BALLOTTA, L. HABERMAN, S. The fair valuation problem of guaranteed annuity options: The stochastic mortality environment case. **Insurance: Mathematics and Economics** n. 38 p. 195–214, 2006.
- BLACK, F. Interest rates as options. **Journal of Finance** n. 50, p. 1371–1376, 1995.
- COLEMAN, T. F. LI, Y. PATRON, M. C. Hedging guarantees in variable annuities under both equity and interest rate risks. **Insurance: Mathematics and Economics** n. 38 p. 215–228, 2006.
- CONSIGLIO, A. SAUNDERS, D. ZENIOS, S. A.. Asset and liability management for insurance products with minimum guarantees: The UK case. **Journal of Banking & Finance** n. 30, p. 645–667, 2006.
- COSTA, O. L. V. ASSUNÇÃO, H. G. V. **Análise de Risco e Retorno em Investimentos Financeiros**. São Paulo: Manole, 2005.
- ZENIOS, S. A. (Org.). **Financial optimization**. Cambridge: Cambridge University, 1993.
- DAMODARAN, A. **A face oculta da avaliação. Avaliação de empresas da velha tecnologia, da nova tecnologia e da nova economia**. São Paulo: Makron Books, 2002.
- FABOZZI, F. J. **Fixed Income Readings for the Chartered Financial Analyst® Program**. New Hope : Frank J. Fabozzi Associates, 2000.
- JORION, P. **Value at Risk: A nova fonte de referência para o controle do risco de mercado**. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, mediante contrato firmado com The McGraw-Hill Companies, Inc., 1998.
- KOLB, R. W. **Futures, Options and Swaps**. Malden: Blackwell Publishers, 2000.

LACHANCE, M. E. MITCHELL, O. S. SMETTERS, K. Guaranteeing defined contribution pensions: the option to buy back a defined benefit promise. **The Journal of Risk and Insurance**, v. 70, n. 1, p. 1-16, 2003.

LUENBERGER, D. G. **Investment Science**. Nova Iorque: Oxford University Press, 1998.

MILEVSKY, M. A. SALISBURY, T. S. Financial valuation of guaranteed minimum withdrawal benefits. **Insurance: Mathematics and Economics** n. 38, p. 21–38, 2006.

KÜHN, C. Pricing contingent claims in incomplete markets when the holder can choose among different payoffs. **Insurance: Mathematics and Economics** n. 31, p. 215–233, 2002.

LEE, J. H. STOCK, D. R. Embedded options and interest rate risk for insurance companies, banks and other financial institutions. **The Quarterly Review of Economics and Finance** n. 40, p. 169–187, 2000.

MINISTÉRIO DA FAZENDA. Conselho Nacional de Seguros Privados. Altera e consolida as regras de funcionamento e os critérios para operação da cobertura por sobrevivência oferecida em plano de previdência complementar aberta e dá outras providências. Resolução n. 139, 27 de dezembro de 2005. Disponível em: <<http://www.susep.gov.br/textos/resol139.pdf>>. Acesso em 21 nov 2007.

REILLY, F. K. BROWN, K. C **Investment Analysis and Portfolio Management** Orlando: The Dryden Press, 2000.

SAAD, N. RIBEIRO, C.O. Modelos determinísticos de gestão de ativo/passivo: uma aplicação no Brasil. **Revista de Contabilidade e Finanças**, n. 34, p. 50-62, 2004.

SAAD, N. RIBEIRO, C.O. Um modelo de gestão de ativo/passivo: aplicação para fundos de benefício definido com ativos de fluxo incerto. **Revista de Contabilidade e Finanças**, v. 5, n. Especial Atuária, p.75-87, 2006.

SCHRAGER, D. F. PELSSER, D. F. Pricing Rate of Return Guarantees in Regular Premium Unit Linked Insurance. **Insurance: Mathematics and Economics**, n. 35, p. 369–398, 2004.

SECURATO, J. R. **Mercado Financeiro e Análise de Investimento**. São Paulo: Saint Paul, 2005

STONE, M. FOSS, B. MACHTYNGER, L. The UK Consumer Direct Insurance Industry: a Role Model for Relationship Management? **Long Range Planning**. v. 30, p. 353-363, 1997.

WILL, J. BERTRAND, M. FRANSOO, J. C. Operations management research methodologies using quantitative modeling. **International Journal of Operations and Production Management**. Vol. 22, No. 2, p.241–264, 2002.