RODRIGO LOUREIRO PRADO ALVAREZ

**OTIMIZAÇÃO DAS FORMAS DE CASCOS DE DESLOCAMENTO EM RELAÇÃO
A SUA RESISTÊNCIA AO AVANÇO**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
Título de Mestre em Engenharia

São Paulo
2008

RODRIGO LOUREIRO PRADO ALVAREZ

**OTIMIZAÇÃO DAS FORMAS DE CASCOS DE DESLOCAMENTO EM RELAÇÃO
A SUA RESISTÊNCIA AO AVANÇO**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do Título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração:
Engenharia Naval

Orientador:
Prof. Dr. Marcelo Ramos Martins

São Paulo
2008

FICHA CATALOGRÁFICA

Alvarez, Rodrigo Loureiro Prado

Otimização das formas de cascos de deslocamento em relação a sua resistência ao avanço / R.L.P. Alvarez. -- São Paulo, 2008.

156 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Naval e Oceânica.

**1.Casco de embarcações (Projeto) 2.Petroleiros (Projeto)
3.Superfícies de resposta (Otimização) 4.Resistência de navios
I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Naval e Oceânica II.t.**

“Assim como o ferro, sem exercício, se oxida, assim como a água se putrefaz,
e no frio gela, assim também a mente humana, não exercitada, se arruína.”

Leonardo da Vinci

À minha família, que nunca economizou incentivo e
apoio na concepção deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador pelos conselhos, orientação e incentivo na construção deste trabalho.

Aos amigos Luiz Henrique M. Barbarini e Igor M. Rodrigues, pela cumplicidade e dicas, que muito me ajudaram nos momentos críticos dos estudos.

À minha família que sempre apoiou e incentivou o desenvolvimento deste trabalho.

À Clarissa, que ao longo deste trabalho e de todos os outros nos últimos oito anos não economizou em apoio e compreensão pelo tempo dedicado.

RESUMO

Devido à constante necessidade de construções de novas embarcações, quer seja pela demanda do mercado, quer seja pela renovação da frota, o desenvolvimento de programas computacionais que auxiliem na fase inicial de projeto torna-se bastante útil. Assim, o desenvolvimento de um procedimento de análise que permita obter formas de melhor desempenho vem a agregar valor nesta etapa de conceituação da geometria do navio. O trabalho aqui apresentado tem como objetivo discorrer sobre um método capaz de otimizar a geometria de um casco de deslocamento conhecido em relação a sua resistência ao avanço, sem perder, porém, as suas características principais, como corpo paralelo médio, por exemplo. Para tanto, dentro deste processo de otimização já estão inseridas algumas restrições que garantem a viabilidade da solução final, tais como variação máxima no comprimento, no volume total e na estabilidade do navio. A modelagem da embarcação pode ser feita através de funções *B-Splines* cúbicas de superfície, cujos pontos de controle (parâmetros inerentes à função) podem ser modificados de tal sorte a atingir um valor ótimo para a resistência ao avanço. Esta, por sua vez, será obtida através da soma de duas parcelas, sendo uma referente ao atrito e outra à geração de ondas pelo casco. Como a maior parte da resistência provém desta segunda parcela para a velocidade de projeto a ser considerada (alto número de Froude), a redução da resistência total pode ser assumida como consequência da diminuição da resistência devido à geração de ondas, a qual pode ser obtida através da formulação apresentada por Michell, em 1898. O cálculo das propriedades hidrostáticas como deslocamento, estabilidade (*KM* transversal) e superfície molhada, usada para cálculo da resistência ao avanço, pode ser encontrado fazendo-se uso do cálculo vetorial. O procedimento a ser descrito foi desenvolvido em linguagem C++ (modelagem do casco) e com o auxílio do **MATLAB**® (método de otimização). Este trabalho foi realizado no Dep. de Eng. Naval e Oceânica da USP.

Palavras-chaves: *B-Splines*, otimização, casco de deslocamento, resistência de navios.

ABSTRACT

Due to an increasing necessity of building new vessels, whether by new orders or fleet renewal, the development of computational programs that could allow optimization of hull shapes is always helpful, saving project time and ensuring better performance at sea. Thus, the development of a synthesis procedure that allows obtaining shapes with better performance adds value to the initial phase of the ship geometry concept. The work to be presented herein objectives the presentation of a methodology to achieve optimal shapes for displacement hulls in relation to the total resistance, starting from an initial geometry given, describing hull form and applying specific constraints to optimization problem with the purpose of guarantee a reliable solution. Therefore, inside this optimization process there are included some constraints that ensure a feasible final solution, as maximum variation of ship length, total volume and stability. Hull geometry is described by using *B-Spline* surface functions and the ship wave resistance is calculated using Michell's formulation as a first approximation of the total resistance for high Froude numbers. Once vessel surface is well defined, *B-Spline* parameters are varied until an optimal form is attained and the minimum resistance is achieved. It can take a little time to calculate, depending on ship definition (number of buttocks and waterlines) and the problem complexity (number of constraints and variables). Ship displacement and other hydrostatic properties as stability, given by transversal KM , wetted surface, used for calculating ship resistance, can be obtained using the vectorial calculus. This work has been developed using C++ language, except the optimization process which makes use of a **MATLAB**® function called *fmincon*. This study has been held at the Department of Naval and Ocean Engineering of the University of São Paulo, Brazil.

Keywords: *B-Splines*, optimization, displacement hull, ship resistance.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	X
LISTA DE GRÁFICOS	XII
LISTA DE TABELAS.....	XIII
LISTA DE SÍMBOLOS	XIV
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO	1
1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO	4
1.3 METODOLOGIA DO TRABALHO.....	6
1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	10
2 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO	12
2.1 TIPOS DE FUNÇÃO INTERPOLADORAS	15
2.2 FUNÇÕES B-SPLINES	20
2.2.1 Polinômios de Bernstein e curvas de Bézier.....	21
2.2.2 Funções-bases para B-Splines.....	23
2.2.3 Funções B-Splines cúbicas e suas derivadas.....	28
2.2.4 Interpolação de curvas por B-Splines cúbicas	31
2.2.5 Interpolação das curvas de um casco conhecido (Versluis, 1977) através de funções B-Splines cúbicas	34
2.3 FUNÇÕES B-SPLINES CÚBICAS DE SUPERFÍCIE	40
2.3.1 Interpolação da superfície de um casco conhecido (Versluis, 1977) através de funções B-Splines cúbicas	41
3 CÁLCULO DAS PROPRIEDADES HIDROSTÁTICAS.....	46
3.1 GERAÇÃO DE PAINÉIS SOBRE UMA SUPERFÍCIE DE UM CASCO.....	47
3.2 PROPRIEDADES HIDROSTÁTICAS DE UM NAVIO A PARTIR DO CÁLCULO VETORIAL	48
3.3 RESULTADOS DAS PROPRIEDADES HIDROSTÁTICAS PARA UM NAVIO CONHECIDO (VERSLUIS, 1977)	54
4 ESTIMATIVA DA RESISTÊNCIA AO AVANÇO.....	58
4.1 CÁLCULO DA RESISTÊNCIA TOTAL (R_t)	60
4.2 MÉTODO DE MICHELL OU DO “NAVIO-FINO”	61
4.3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MÉTODO DE MICHELL	66
4.3.1 Validação da Implementação do Método de Michell.....	67
4.4 CÁLCULO DA RESISTÊNCIA DE UM CASCO CONHECIDO (VERSLUIS, 1977)	76
4.5 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	79
4.5.1 Sensibilidade quanto à variação do parâmetro θ	80
4.5.2 Sensibilidade quanto à variação da quantidade de linhas d’água e balizas.....	82
4.5.3 Variação da quantidade de intervalos de θ e quantidade de balizas e linhas d’água.....	85
5 MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO.....	89
5.1 CONCEITOS BÁSICOS DE OTIMIZAÇÃO	90
5.2 MÉTODO DA FUNÇÃO “FMINCON”	91
5.3 MÉTODO DE MÉDIA ESCALA (MEDIUM-SCALE METHOD).....	92
5.4 APLICAÇÃO DA FUNÇÃO “FMINCON”	95
6 O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DA RESISTÊNCIA AO AVANÇO.....	100
7 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	114
8 CONCLUSÕES.....	117
9 REFERÊNCIAS.....	121

APÊNDICE A: FUNÇÕES <i>B-SPLINES</i> RACIONAIS	126
APÊNDICE B: CÁLCULO DA ENERGIA DAS LINHAS E SUPERFÍCIE	128
APÊNDICE C: DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MICHELL	131
APÊNDICE D: A PRIMEIRA FORMA FUNDAMENTAL DE UMA SUPERFÍCIE	137
APÊNDICE E: A SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL DE UMA SUPERFÍCIE.....	138

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1: FOTO TÍPICA DE UM NAVIO COM CASCO DE DESLOCAMENTO.	2
FIGURA 1.2: EXEMPLO DE <i>ESPIRAL DE PROJETO</i> CONSTRUÍDO POR EVANS (1959).....	3
FIGURA 1.3: VISÃO INICIAL DO PROCEDIMENTO A SER ESTUDADO NESTA DISSERTAÇÃO.....	4
FIGURA 2.1: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA INTERPOLAÇÃO (À ESQUERDA) E APROXIMAÇÃO (À DIREITA).	13
FIGURA 2.2: FUNÇÕES-BASES DE BERNSTEIN PARA INCREMENTO DE $t = 0.1$ E $k = 5$ (ACIMA E À ESQUERDA), $k =$ 10 (ACIMA E À DIREITA), $k = 50$ (ABAIXO E À ESQUERDA) E $k = 100$ (ABAIXO E À DIREITA).....	22
FIGURA 2.3: FUNÇÕES-BASES DE BERNSTEIN PARA INCREMENTO DE $t = 0.01$ E $k = 5$ (ACIMA E À ESQUERDA), $k =$ 10 (ACIMA E À DIREITA), $k = 50$ (ABAIXO E À ESQUERDA) E $k = 100$ (ABAIXO E À DIREITA).....	22
FIGURA 2.4: FUNÇÕES-BASES DAS <i>B-SPLINES</i> DE GRAU 0 PARA INTERVALO DE t_{j-1} A t_j (À ESQUERDA) E DE $0 \leq t$ ≤ 1 COM 20 NÓS (À DIREITA).	25
FIGURA 2.5: FUNÇÕES-BASES DAS <i>B-SPLINES</i> DE GRAU 1 PARA INTERVALO DE t_{j-1} A t_{j+1} (À ESQUERDA) E DE $0 \leq$ $t \leq 1$ COM 20 NÓS (À DIREITA).....	26
FIGURA 2.6: FUNÇÕES-BASES DAS <i>B-SPLINES</i> DE GRAU 2 PARA INTERVALO DE t_{j-1} A t_{j+2} (À ESQUERDA) E DE $0 \leq$ $t \leq 1$ COM 20 NÓS (À DIREITA).....	27
FIGURA 2.7: FUNÇÕES-BASES DAS <i>B-SPLINES</i> DE GRAU 3 PARA INTERVALO DE t_{j-1} A t_{j+3} (À ESQUERDA) E DE $0 \leq$ $t \leq 1$ COM 20 NÓS (À DIREITA).....	27
FIGURA 2.8: PRIMEIRA DERIVADA DAS FUNÇÕES-BASES DAS <i>B-SPLINES</i> DE GRAU 3 PARA INTERVALO DE t_{j-1} A t_{j+3} (À ESQUERDA) E DE $0 \leq t \leq 1$ COM 20 NÓS (À DIREITA).....	30
FIGURA 2.9: SEGUNDA DERIVADA DAS FUNÇÕES-BASES DAS <i>B-SPLINES</i> DE GRAU 3 PARA INTERVALO DE t_{j-1} A t_{j+3} (À ESQUERDA) E DE $0 \leq t \leq 1$ COM 20 NÓS (À DIREITA).	30
FIGURA 2.10: INTERPOLAÇÃO COM 8 PONTOS DE CONTROLE - SITUAÇÃO 1: SOBREDETERMINADO – (À ESQUERDA E ACIMA), INTERPOLAÇÃO COM 12 PONTOS DE CONTROLE – SITUAÇÃO 3: SUBDETERMINADO – (À DIREITA E ACIMA) E INTERPOLAÇÃO COM 10 PONTOS DE CONTROLE – SITUAÇÃO 2: DETERMINADO (ABAIXO).	32
FIGURA 2.11: PARAMETRIZAÇÃO DAS LINHAS D'ÁGUA DO CASCO (VISTA DE TOPO).	35
FIGURA 2.12: PARAMETRIZAÇÃO DAS LINHAS D'ÁGUA DO CASCO (VISTA LATERAL).	36
FIGURA 2.13: INTERPOLAÇÃO DAS BALIZAS.	36
FIGURA 2.14: CASCO DE DESLOCAMENTO USADO NA INTERPOLAÇÃO POR <i>B-SPLINES</i>	38
FIGURA 2.15: CASCO DE DESLOCAMENTO INTERPOLADO POR <i>B-SPLINES</i> (PLANO DE LINHAS D'ÁGUA).	38
FIGURA 2.16: CASCO DE DESLOCAMENTO INTERPOLADO POR <i>B-SPLINES</i> (PLANO DE BALIZAS) COM 15 PONTOS DE CONTROLE.	39
FIGURA 2.17: CASCO DE DESLOCAMENTO INTERPOLADO POR <i>B-SPLINES</i> (PLANO DE BALIZAS) COM 100 PONTOS DE CONTROLE.	40
FIGURA 2.18: ADIÇÃO DE BALIZAS E LINHAS D'ÁGUA SOBRE A SUPERFÍCIE DO CASCO.	42
FIGURA 2.19: INTERPOLAÇÃO DE CASCO DE DESLOCAMENTO PARA (PLANO DE BALIZAS): 15 BALIZAS E LINHAS D'ÁGUA (À ESQUERDA E ACIMA), 30 BALIZAS E LINHAS D'ÁGUA (À DIREITA E ACIMA), 60 BALIZAS E LINHAS D'ÁGUA (À ESQUERDA E ABAIXO), 150 BALIZAS E LINHAS D'ÁGUA (À DIREITA E ABAIXO).	43
FIGURA 2.20: INTERPOLAÇÃO DA POPA PARA UM CASCO DE DESLOCAMENTO QUANDO HÁ A MUDANÇA DE UMA BALIZA PARA OUTRA COM LINHA D'ÁGUA MAIS BAIXA.	44
FIGURA 2.21: INTERPOLAÇÃO DE CASCO DE DESLOCAMENTO PARA 300 BALIZAS E LINHAS D'ÁGUA (PLANO DE LINHAS D'ÁGUA).....	45
FIGURA 2.22: INTERPOLAÇÃO DE CASCO DE DESLOCAMENTO PARA 300 BALIZAS E LINHAS D'ÁGUA (CASCO EM TRÊS DIMENSÕES).	45
FIGURA 3.1: PAINEL CRIADO COM A LINHA D'ÁGUA E A BALIZA INTERPOLADAS.	47
FIGURA 3.2: PAINEL UTILIZADO PARA O CÁLCULO VETORIAL.	48
FIGURA 3.3: ORDENAÇÃO DOS PONTOS PARA QUE O VETOR TENHA SENTIDO PARA FORA DA EMBARCAÇÃO.	48
FIGURA 3.4: CUBO UTILIZADO PARA EXEMPLIFICAÇÃO DO PROCEDIMENTO PARA DETERMINAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS HIDROSTÁTICAS A PARTIR DA GEOMETRIA DE UM CORPO.	49
FIGURA 3.5: CUBO UTILIZADO PARA EXEMPLIFICAÇÃO DO PROCEDIMENTO PARA DETERMINAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS HIDROSTÁTICAS A PARTIR DA GEOMETRIA DE UM CORPO (CUBO COM VETORES-ÁREAS SOBRE PAINÉIS).....	49
FIGURA 3.6: CUBO COM SISTEMA DE COORDENADAS POSICIONADO NA LINHA D'ÁGUA.	51

FIGURA 4.1: CASCO E SISTEMA DE COORDENADAS DEFINIDO PARA INTEGRAL DE MICHELL.	63
FIGURA 4.2: VISTA SUPERIOR DO CASCO DA PRIMEIRA CHATA UTILIZADO PARA VALIDAÇÃO DO CÁLCULO DE RESISTÊNCIA DEVIDO À GERAÇÃO DE ONDAS POR MICHELL.	68
FIGURA 4.3: VISTA SUPERIOR DO CASCO DA SEGUNDA CHATA UTILIZADO PARA VALIDAÇÃO DO CÁLCULO DE RESISTÊNCIA DEVIDO À GERAÇÃO DE ONDAS POR MICHELL.	70
FIGURA 4.4: VISTA SUPERIOR DO CASCO PADRÃO DA SÉRIE DE TAYLOR.	72
FIGURA 4.5: VISTA SUPERIOR DO CASCO DA QUINTA EMBARCAÇÃO AVALIADA.	74
FIGURA 4.6: VISTA SUPERIOR DO CASCO DA QUARTA EMBARCAÇÃO AVALIADA.	77
FIGURA 4.7: VARIAÇÃO DA RESISTÊNCIA DEVIDO À GERAÇÃO DE ONDAS PARA O NAVIO DA FIGURA 2.14 PARA UM FROUDE DE 0.14.	87
FIGURA 4.8: VARIAÇÃO DA RESISTÊNCIA DEVIDO À GERAÇÃO DE ONDAS PARA O NAVIO DA FIGURA 2.14 PARA UM FROUDE DE 0.24.	88
FIGURA 6.1: VISTA SUPERIOR DO CASCO DA EMBARCAÇÃO OTIMIZADA COM VARIAÇÃO MÁXIMA DO VOLUME EM 5%.	107
FIGURA 6.2: VISTA SUPERIOR DO CASCO DA EMBARCAÇÃO OTIMIZADA COM VARIAÇÃO MÁXIMA DO VOLUME EM 10%.	109
FIGURA 6.3: VISTA SUPERIOR DO CASCO DA EMBARCAÇÃO OTIMIZADA SEM VARIAÇÃO DO VOLUME.	110
FIGURA 6.4: VISTA SUPERIOR DO CASCO DA EMBARCAÇÃO OTIMIZADA COM VARIAÇÃO MÁXIMA DO VOLUME EM 5% E VELOCIDADE DE 16 M/S.	111
FIGURA 8.1: VISÃO FINAL DO PROCEDIMENTO ESTUDADO NESTA DISSERTAÇÃO.	119
FIGURA C.1: NAVIO “FINO” DE MICHELL.	132

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 3.1: PROPRIEDADES HIDROSTÁTICAS DO CASCO DE REFERÊNCIA DESTE TRABALHO (FIGURA 2.14) INTERPOLADO POR CURVAS <i>B-SPLINES</i> CÚBICAS DE SUPERFÍCIE.	57
GRÁFICO 4.1: CURVA DO COEFICIENTE C_w PARA A PRIMEIRA CHATA, ATRAVÉS DOS MÉTODOS DE HOLTROP, MICHELL E SÉRIE DE TAYLOR, EM RELAÇÃO AO NÚMERO DE FROUDE.....	70
GRÁFICO 4.2: CURVA DO COEFICIENTE C_w PARA A SEGUNDA CHATA, ATRAVÉS DOS MÉTODOS DE HOLTROP, MICHELL E SÉRIE DE TAYLOR, EM RELAÇÃO AO NÚMERO DE FROUDE.....	71
GRÁFICO 4.3: CURVA DO COEFICIENTE C_w PARA O CASCO PADRÃO DA SÉRIE DE TAYLOR, ATRAVÉS DOS MÉTODOS DE HOLTROP, MICHELL E SÉRIE DE TAYLOR, EM RELAÇÃO AO NÚMERO DE FROUDE.....	73
GRÁFICO 4.4: CURVA DO COEFICIENTE C_w PARA O QUINTO CASCO DE DESLOCAMENTO AVALIADO, ATRAVÉS DOS MÉTODOS DE HOLTROP, MICHELL E SÉRIE DE TAYLOR, EM RELAÇÃO AO NÚMERO DE FROUDE.....	75
GRÁFICO 4.5: CURVA DO COEFICIENTE C_w PARA O QUARTO CASCO DE DESLOCAMENTO AVALIADO, ATRAVÉS DOS MÉTODOS DE HOLTROP, MICHELL E SÉRIE DE TAYLOR, EM RELAÇÃO AO NÚMERO DE FROUDE.....	78
GRÁFICO 4.6: CURVA DO COEFICIENTE C_w , C_f E C_t EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE FROUDE (À ESQUERDA) E DAS PARCELAS DE RESISTÊNCIA R_w , R_f E R_t , TAMBÉM EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE FROUDE (À DIREITA).....	78
GRÁFICO 4.7: RESULTADO DO COEFICIENTE C_w EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE INTERVALOS DE θ	80
GRÁFICO 4.8: VARIAÇÃO DA CURVA DO COEFICIENTE C_w PARA NÚMERO DE FROUDE MENOR QUE 0.3 (À ESQUERDA) E MAIOR QUE 0.3 (À DIREITA), PARA DIVERSOS INTERVALOS DE θ	81
GRÁFICO 4.9: VARIAÇÃO DA CURVA DO COEFICIENTE C_w PARA INTERVALO DE θ INFERIOR A 10 (À ESQUERDA) E SUPERIOR OU IGUAL A 15 (À DIREITA).....	82
GRÁFICO 4.10: RESULTADO DO COEFICIENTE C_w EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE BALIZAS E LINHAS D'ÁGUA.	83
GRÁFICO 4.11: VARIAÇÃO DA CURVA DO COEFICIENTE C_w PARA NÚMERO DE FROUDE MENOR QUE 0.4 (À ESQUERDA) E MAIOR QUE 0.4 (À DIREITA), PARA DIFERENTES VALORES DE p	84
GRÁFICO 4.12: VARIAÇÃO DA CURVA DO COEFICIENTE C_w PARA INTERVALOS DE BALIZAS E LINHAS D'ÁGUA INFERIORES A 30 (À ESQUERDA), SUPERIORES OU IGUAIS A 45 (À DIREITA).....	84
GRÁFICO 5.1: APROXIMAÇÃO POR UMA <i>B-SPLINE</i> CÚBICA COM $\varepsilon = 10^{-5}$ COM 12 PONTOS DE CONTROLE (À ESQUERDA E ACIMA), 22 PONTOS DE CONTROLE (À ESQUERDA E ACIMA) E 52 PONTOS DE CONTROLE (ABAIXO).	97
GRÁFICO 5.2: APROXIMAÇÃO POR UMA <i>B-SPLINE</i> CÚBICA COM 10 PONTOS DE CONTROLE DA CURVA DOS PONTOS DA TABELA 2.2 COM $\varepsilon = 1.0$ (À ESQUERDA E ACIMA), $\varepsilon = 2.5$ (À DIREITA E ACIMA) E $\varepsilon = 5.0$ (ABAIXO). ..	98
GRÁFICO 6.1: CURVA DO COEFICIENTE C_w , C_f E C_t EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE FROUDE (À ESQUERDA) E DAS PARCELAS DE RESISTÊNCIA R_w , R_f E R_t , TAMBÉM EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE FROUDE (À DIREITA), PARA VARIAÇÃO EM 5% DO VOLUME DO NAVIO.....	108
GRÁFICO 6.2: CURVA DO COEFICIENTE C_w , C_f E C_t EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE FROUDE (À ESQUERDA) E DAS PARCELAS DE RESISTÊNCIA R_w , R_f E R_t , TAMBÉM EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE FROUDE (À DIREITA), PARA VARIAÇÃO EM 10% DO VOLUME DO NAVIO.....	110
GRÁFICO 6.3: CURVA DO COEFICIENTE C_w , C_f E C_t EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE FROUDE (À ESQUERDA) E DAS PARCELAS DE RESISTÊNCIA R_w , R_f E R_t , TAMBÉM EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE FROUDE (À DIREITA), PARA VOLUME DO NAVIO SEM VARIAÇÃO.	111
GRÁFICO 6.4: CURVA DO COEFICIENTE C_w , C_f E C_t EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE FROUDE (À ESQUERDA) E DAS PARCELAS DE RESISTÊNCIA R_w , R_f E R_t , TAMBÉM EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE FROUDE (À DIREITA), PARA VOLUME DO NAVIO COM VARIAÇÃO DE 5% E VELOCIDADE DE 16M/S.	112

LISTA DE TABELAS

TABELA 2.1: PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES-BASES DAS <i>B-SPLINES</i> (Cf. NOWACKI; BLOOR; OLEKSIEWICKZ, 1995).	
.....	24
TABELA 2.2: COTAS X E Y DE UM CURVA QUALQUER.	31
TABELA 3.1: PROPRIEDADES HIDROSTÁTICAS DO CASCO DE REFERÊNCIA DESTE TRABALHO (FIGURA 2.14)	
CALCULADAS A PARTIR DO CÁLCULO VETORIAL, COMPARADAS COM A REFERÊNCIA DE VERSLUIS (1977)...	55
TABELA 4.1: DIMENSÕES PRINCIPAIS DA PRIMEIRA CHATA.	69
TABELA 4.2: DIMENSÕES PRINCIPAIS DA SEGUNDA CHATA.	71
TABELA 4.3: DIMENSÕES PRINCIPAIS DO CASCO PADRÃO DA SÉRIE DE TAYLOR.	73
TABELA 4.4: DIMENSÕES PRINCIPAIS DO QUINTO CASCO DE DESLOCAMENTO.	74
TABELA 4.5: DIMENSÕES PRINCIPAIS DO QUARTO CASCO DE DESLOCAMENTO.	77

LISTA DE SÍMBOLOS

α_j	Passo em cada iteração
α_r	Pesos da função das medidas de carenagem (energia)
$\alpha_{ij}^{x,y}$	Fator de escala
ε	Tolerância de desvio
$\zeta^{(x,z)}$	Coordenada y em função de x e z
θ	Ângulo de propagação da onda gerada
κ	$\kappa = g/v_0^2$
κ_1, κ_2	Curvaturas normais principais
λ_i	Multiplicadores de Lagrange
ρ	Densidade da água
σ	Magnitude da fonte
ν	Viscosidade cinemática da água
ϕ	Potencial de velocidades
Ω	Superfície a ser integrada
Ω_t, Ω_c	Superfície da popa transom, Superfície do casco
a_i, b_i, c_i, d_i	Coeficientes da <i>spline</i> interpoladora
A_i	Vetor cujo módulo é a área da face de um painel
A_ϕ	Área da seção média
A_{WL}	Área do plano da linha d'água
A, b	Matriz e vetor das equações do sistema linear de desigualdade
Aeq, beq	Matriz e vetor das equações do sistema linear de igualdade
B_T	Boca do navio
B_{WL}	Boca do navio na linha d'água de projeto
BM_T, BM_L	Raio metacêntrico transversal, longitudinal
$B_k(t)$	Polinômio de grau k em função do parâmetro t
$B_{i,k}(t)$	Função-base de Bernstein
$c(x), ceq(x)$	Restrições não-lineares
C_i	Coordenada do centro de um painel
C_b	Coeficiente de bloco
C_p	Coeficiente prismático
C_w	Coeficiente de resistência devido à geração de ondas
C_f	Coeficiente de resistência devido ao atrito

C_t	Coeficiente de resistência total
C_r	Coeficiente de resistência residual
C_{wp}	Coeficiente de linha d'água
C_M	Coeficiente de seção média
CB	Centro de carena
CF	Centro de flutuação
$\vec{d}_j^{(s)}, \vec{d}_{ij}^{(s)}$	Ponto de controle de uma <i>B-Spline</i> linear, de superfície (na coordenada $s = x, y, z$)
D_{bal}	Pontal de uma baliza
E_r	Medidas de carenagem ($r = 1, 2, 3$)
E, F, G, e, f, g	Coeficientes fundamentais das 1ª e 2ª formas fundamentais (g também é encontrado como aceleração da gravidade no Capítulo 4)
$f(t)$	Função arbitrária em relação à variável t
$F(x)$	Função objetivo da variável de projeto x
g_i	Segunda derivada da função $r_i(t)$
$G_i(x)$	Restrição em função da variável x
$G_i(t), H_i(t)$	Funções-bases de Hermite
h_i	Incremento do parâmetro t_{i-1} a t_i
H	Calado (Capítulo 4); Matriz Hessiana (Capítulo 5)
H_s, H_c	Termos da fórmula de R_w para seno, co-seno
i, j	Índices
I	Matriz identidade
$I_L^{(i)}, I_T^{(i)}$	Momento de inércia do painel i na longitudinal, transversal
k	Grau de um polinômio, <i>B-Spline</i> (Capítulo 2); Índice que se refere aos pontos do corpo paralelo médio (Capítulo 6)
k_a, k_b	Grau de um polinômio na direção do parâmetro u, v
KM_T, KM_L	Distância da quilha ao metacentro do navio transversal, longitudinal
KB_T, KB_L	Distância da quilha ao centro de carena na transversal, longitudinal
lb, ub	Limites inferiores e superiores de uma restrição do tipo caixa
L_{ag}	Comprimento de uma linha d'água
L_T	Comprimento total do navio
L_{WL}	Comprimento do navio na linha d'água de projeto
L_a, L_b	Quantidade de trechos de uma curva na direção do parâmetro u, v
$L, L_{(i)}$	Quantidade de trechos de uma curva (i -ésimo elemento)

LCF	Posição longitudinal do centro de flutuação
LCB	Posição longitudinal do centro de carena
$L(t), L_i(t)$	Base cardinal da interpolação de Lagrange (i -ésimo elemento)
$L(x, \lambda)$	Lagrangeana
m	Quantidade de balizas (Capítulo 2); Número de restrições (Capítulo 5)
m_i	Multiplicidade de um nó
n	Quantidade de pontos e linhas d'água (Capítulo 2); Quantidade de faces/painéis (Capítulo 3); Quantidade de intervalos para integral em θ (Capítulo 4)
$\vec{n}$	Versor normal a uma superfície
N	Número de balizas
$N_j^k(t)$	Função-base de uma <i>B-Spline</i> de grau k do parâmetro t
O	Origem do sistema de coordenadas
p	Ordem da curva paramétrica de Hermite (Capítulo 2); Número de balizas e linhas d'água (Capítulo 4)
p_i^s	Ponto i dado para coordenada $s = x, y, z$
P_n	Polígono formado pelos pontos do vetor posição
P_i, V_i	Vetor de controle/posição
Q	Autovalores
Q_i	Vetor de controle/tangente
s	Índice das coordenadas ($s = x, y, z$); Direção da solução (Capítulo 5)
r_i	Fator de penalização
$r_k(t), r(u, v)$	Curva parametrizada em relação ao parâmetro t, u, v de grau k
Re	Número de Reynolds
R_f	Resistência devido ao atrito
R_w	Resistência devido à geração de ondas
R_t	Resistência total
R_r	Resistência residual
$R_k(t)$	Função <i>spline</i>
S_i, S_C	Área molhada da popa transom e do casco
S_w	Área molhada do navio
t	Parâmetro de funções de linha (2D)
t_i	i -ésimo parâmetro (Capítulo 2); Variáveis extras (Capítulo 5)

T	Vetor de nós $T = (t_0, t_1, \dots, t_n)$
TCB	Posição transversal do centro de carena
TCF	Posição transversal do centro de flutuação
u, v	Parâmetros de uma superfície
v_0	Velocidade de projeto
V	Vetor de controle (Capítulo 2); Volume total
$V_{submerso}$	Volume submerso
$x, x_{(j)}$	Variável de projeto e j -ésima iteração (Capítulo 5)
x_i, y_i	Coordenadas do i -ésimo ponto
x, y, z	Coordenadas de um ponto
X, Y, Z	Eixos coordenados
w_j, w_{ij}	Pesos associados a cada ponto de controle $\vec{d}_j^{(s)}, \vec{d}_{ij}^{(s)}$

1 Introdução

1.1 Contextualização

Atualmente, a construção de cascos de deslocamento¹ e mais especificamente petroleiros, tem se tornado quase uma produção em série em estaleiros de grande porte no hemisfério oriental, principalmente em países como Coréia do Sul e Japão. Mais recentemente, a China vem aplicando uma quantidade significativa de recursos em construções de estaleiros, portos e aquisições de novas embarcações, com o intuito de continuar crescendo e expandindo suas exportações, além de garantir entrada de matéria-prima para suas indústrias de base.

O Brasil, no final dos anos 70 e início da década de 80, dentro do período que se refere ao segundo milagre econômico, chegou a ser o segundo maior construtor mundial de navios em tonelagem bruta, perdendo unicamente para o Japão.

Já na década seguinte, também conhecida como a “década perdida”, a indústria naval passou por inúmeras dificuldades, culminando com o fechamento de estaleiros e também de muitas indústrias fornecedoras de equipamentos navais.

A necessidade de retomada do crescimento no setor, aliada a obsolescência da frota brasileira para transporte de petróleo, conjeturoou um ambiente propício ao incentivo e “alavancamento” de novas oportunidades. A renovação da frota da TRANSPETRO² no início deste século tem por idéia não somente reacender a indústria naval internamente como também permitir um desenvolvimento de tecnologia e geração de milhares de novos empregos diretos e indiretos.

Apesar de navios de grande porte como petroleiros, LNG³ e porta-contêineres terem quase a característica de produtos de “prateleira”, o projeto dos mesmos requer sempre uma atenção especial dada a sua complexidade.

A grande característica destes tipos de embarcação supramencionados é a sua geometria. Possuindo um casco de deslocamento, elas sempre apresentam um

---

¹ Uma “embarcação de deslocamento” é aquela cujo peso, em situação estática ou dinâmica, é equilibrado exclusivamente pelo empuxo.

² A **Petrobrás Transporte S.A. – Transpetro** foi constituída em 1998 com a finalidade de construir e operar a rede de transportes da **Petrobrás**.

³ LNG: Liquefied Natural Gas são navios que transportam gás liquefeito natural.

corpo paralelo médio, além de uma simetria em relação ao seu eixo longitudinal. É a forma de seu casco que irá impactar em seu desempenho hidrodinâmico, permitindo desenvolvimento de maior ou menor velocidade de cruzeiro, conferindo melhor ou pior manobrabilidade e estabilidade, entre outras propriedades. A Figura 1.1⁴ mostra a foto de um petroleiro típico, cujo casco apresenta a geometria aqui descrita.

Figura 1.1: Foto típica de um navio com casco de deslocamento.

Hoje em dia, os navios petroleiros estão em voga para construção no país, haja vista justamente a renovação da frota da TRANSPETRO. Não obstante, outros tipos de navio com casco de deslocamento também têm forte demanda no mercado naval como é o caso de porta-contêineres, navios de transporte de produtos químicos e até mesmo navios de cruzeiro. Não importando o tipo de navio, todos eles requerem uma fase preliminar de projeto, quando são definidas não somente suas dimensões e seu arranjo interno, como também é estudada a melhor maneira para sua construção, adequando-o às capacidades e restrições do estaleiro. Esta etapa inicial pertence ao projeto de concepção do navio que, mesmo durante o período de manufatura, poderá sofrer modificações.

Uma das maneiras mais antigas de se definir um projeto na indústria naval é utilizando o conceito da *Espiral de Projeto*. Um exemplo típico desta espiral pode ser encontrado em Evans (1959), apresentado na Figura 1.2.

O primeiro item desta espiral refere-se aos requisitos do armador. Todo princípio de projeto parte destas definições iniciais de necessidade. É com base nestas necessidades que outro conceito básico referente ao projeto de embarcações é utilizado: a consulta ou busca por navios semelhantes. Através deste método,

⁴ Foto retirada de: https://www.doschdesign.com/products/selections/Tanker_ship.html.

procuram-se no mercado navios cujas características sejam similares à encomenda do armador e, finalmente, faz-se uma adaptação de acordo com as necessidades do cliente.

Em um primeiro momento, ou ainda, na primeira volta desta *Espiral de Projeto*, pode-se adotar um navio que já foi produzido pelo próprio estaleiro cujas dimensões e desenhos já existam. Tomando-se este desenho como ponto inicial, pode-se alterar sua forma a fim de que atenda aos requisitos do armador e que também conduza a uma redução de custos até mesmo na fase de fabricação, adaptando-se o projeto ao estaleiro.

Figura 1.2: Exemplo de *Espiral de Projeto* construído por Evans (1959).

Pensando neste momento também na redução de custos de operação para o armador, um navio capaz de andar em velocidade de cruzeiro superior a outro semelhante com uma mesma potência instalada, seguramente terá preferência na seleção. A propriedade da embarcação que deve ser reduzida para garantir isto é justamente a resistência ao avanço. A alteração na forma de um casco já existente que permita uma redução desta propriedade é de grande valia, desde que outras características ou requisitos não sejam afetados como, por exemplo, o deslocamento e estabilidade.

Assim, o desenvolvimento de um procedimento de análise que permita obter formas de melhor desempenho vem a agregar valor na fase inicial de conceituação da geometria do navio.

1.2 Objetivos do Trabalho

O objetivo deste trabalho é estudar, modelar, descrever e otimizar embarcações com a existência de um corpo paralelo médio, implementando em uma ferramenta computacional⁵ um procedimento para, a partir de uma forma de casco previamente conhecida (navio semelhante), aprimorar sua geometria de tal maneira a garantir a minimização da resistência ao avanço para uma dada velocidade de cruzeiro.

A Figura 1.3 apresenta de maneira sintética as etapas que serão estudadas neste trabalho e que comporão o corpo do procedimento a ser estudado.

Figura 1.3: Visão inicial do procedimento a ser estudado nesta dissertação.

Dá-se início ao procedimento através de análise prévia dos requisitos do armador, os quais fornecem as características principais mais importantes para a embarcação. Em seguida, modela-se um casco conhecido e que tenha características semelhantes às necessidades do armador, efetuando posteriormente o cálculo de suas propriedades hidrostáticas e resistência ao avanço. Estas são as entradas para o processo de otimização que, depois de concluído, permite o cálculo das propriedades hidrostáticas e resistência ao avanço finais, bem como concebe uma nova geometria ao navio.

Assim, o resultado final do procedimento gerará uma nova forma de casco, a qual seria considerada como de melhor desempenho do ponto de vista da resistência ao avanço. Em outras palavras, será gerada uma nova geometria cuja necessidade de potência instalada em relação à inicial seja menor, navegando a uma mesma velocidade projetada.

⁵ Serão utilizadas duas ferramentas computacionais para desenvolvimento do procedimento de análise e minimização da resistência ao avanço: Visual Studio C++, para a modelagem inicial do casco e; **MATLAB**®, no que se refere ao processo de visualização e otimização da forma.

Logo, a finalidade a que se propõe este estudo vem de encontro a uma necessidade recorrente do mercado já que se está focando em uma forma de casco largamente comercializada (cascos de deslocamento). Além disso, sua principal contribuição está em possibilitar a redução de custos no que se refere à fase de projeto, através de um procedimento de otimização que permita modelar sua geometria; e também em sua operação, como resultado da melhoria em seu desempenho hidrodinâmico (relacionado somente à resistência ao avanço), como será explicado nesta dissertação.

Para limitar o universo de soluções possíveis e garantir que será preservada a característica geométrica do casco, utilizar-se-ão algumas restrições que serão explicadas detalhadamente no capítulo referente à otimização (Capítulo 6), a saber:

- Limite de variação, em cada iteração, de fatores de escala $\alpha_{ij}^{x,y}$ ⁶ para os pontos de controle $\vec{d}_{ij}^{x,y}$ ⁷ de curvas *B-Splines* cúbicas de superfície⁸;
- Limite de variação do volume total do navio (V) e de seu KM ⁹ transversal (KM_T);
- Manutenção das derivadas do corpo paralelo médio para cada linha d'água que devem permanecer constantes e iguais a zero.

Para modelagem da geometria do casco será conduzida uma interpolação através de funções *B-Splines* cúbicas de superfície. Os pontos de controle inicialmente encontrados serão variados de tal sorte que, no final, obtenha-se uma forma de menor resistência ao avanço. No entanto, os parâmetros do método de otimização a serem realmente utilizados serão fatores de escala, cujo conceito, aplicação e justificativa serão apresentados no decorrer desta dissertação.

O procedimento a ser elaborado terá como foco a geometria de cascos que contêm um corpo paralelo médio sem a presença de bulbo de proa ou de popa do tipo transom. Exemplos de cascos com esta geometria podem ser encontrados na

⁶ Este termo será apresentado e definido no Capítulo 6.

⁷ Este termo será apresentado e definido no Capítulo 2.

⁸ O conceito das curvas *B-Splines* cúbicas será apresentado no Capítulo 2.

⁹ KM é a distância da quilha (K) ao metacentro do navio (M).

série de Taylor (Cf. Morton, 1954), série 60 (Cf. Todd, 1953) e cascos de Wigley, os quais apresentam resultados de resistência para geometrias de navios de deslocamento sem a presença destas protuberâncias. Tais geometrias serão utilizadas para avaliação dos resultados obtidos neste estudo.

Este procedimento deve estar concatenado a uma metodologia de projeto para que possa apoiá-lo efetivamente. Neste contexto, aplica-se o conceito já definido da *Espiral de Projeto*. Associado a ela, também está aplicada a análise preliminar de formas semelhantes para a geração prévia de uma forma que atenda aos requisitos do armador.

Mais especificamente, o procedimento proposto irá afetar basicamente os quatro primeiros pontos mencionados por Evans (1959): 1. atendimento ao requisitos do armador, neste caso focando unicamente as dimensões principais como boca, comprimento e deslocamento; 2. estimativa de resistência ao avanço do casco; 3. plano de balizas, de altos e visualização em três dimensões e; 4. propriedades hidrostáticas.

1.3 Metodologia do Trabalho

A metodologia utilizada nesta dissertação segue uma lógica capaz de explicar os conceitos que serão aplicados em seu último capítulo, relacionado ao processo de otimização das formas do casco quanto a sua resistência total ao avanço. Para a aplicação do procedimento desenvolvido, será utilizado como exemplo um casco cujas cotas são conhecidas e foram obtidas em Versluis (1977). Esta embarcação será estudada ao longo do trabalho, sobre a qual discorrerão algumas análises e críticas. Ao final, esta será a geometria a ser otimizada. Não obstante, outros cascos também serão avaliados durante o decorrer desta dissertação de forma a comprovar os resultados obtidos através do procedimento desenvolvido em alguns pontos específicos do trabalho.

Para a modelagem do casco, podem-se utilizar diversas funções interpoladoras. Ruggiero (1996) relata a respeito de alguns métodos, descrevendo os seguintes tipos de funções interpoladoras:

- Polinomiais: obtém-se um polinômio de grau menor ou igual ao número de pontos fornecidos menos um;

- Spline: obtêm-se polinômios de graus menores para um conjunto de pontos também menores, dentro do conjunto de pontos fornecidos, impondo-se algumas condições para que a função seja contínua e que tenha derivadas contínuas até uma determinada ordem.

O primeiro tipo de interpolação consiste na obtenção de um polinômio interpolador que passe pelos pontos fornecidos e que tenha grau menor ou igual ao número destes pontos menos um. A obtenção deste polinômio pode ser conseguida ou através da solução de um sistema linear, ou pelos métodos de Lagrange, Hermite ou de Ferguson, os quais podem ser encontrados em Nowacki; Bloor e Oleksiewickz (1995) e estão sintetizados no Capítulo 2.

Devido às oscilações, porém, a utilização de uma função interpoladora do tipo polinomial pode gerar resultados muito ruins para pontos intermediários aos pontos fornecidos para a geração da função, não servindo como bom interpolador. Outro ponto crítico na utilização de polinômios é a falta de garantia do carenamento das linhas. A interpolação através de polinômios aplica-se a casos em que se pode representar a curva por polinômios até terceiro ou quarto graus. Mais que isso, sugere-se a utilização de *splines*.

Uma das aplicações das curvas *splines* são as funções *B-Splines*. Na verdade, estas funções são provenientes do método de Bézier, mas em lugar de se utilizar as funções-base de Bernstein, utiliza-se como função-base uma *spline* polinomial (Nowacki; Bloor; Oleksiewickz, 1995). Como será visto no Capítulo 2, estas funções possuem propriedades muito interessantes, as quais as tornam uma aplicação padrão entre as ferramentas de geometria computacional. A aplicação de *B-Splines* é tão difundida que a grande maioria dos estudos feitos sobre modelagem da geometria de navios envolve este conceito, como é o caso do trabalho realizado por De Conti (2004), Nowacki; Bloor e Oleksiewickz (1995), Harries e Nowacki (1999) e Gammon (1990). Para estudo das *B-Splines*, pode-se tomar como referência Farin (1997).

Neste trabalho, a modelagem do casco será feita em três dimensões (3D) através da interpolação por *B-Splines* cúbicas de superfície. Sua utilização apresenta como vantagem a existência de parâmetros que interferem nas três

coordenadas (x, y, z) dos pontos da superfície, permitindo que eles sejam utilizados no processo de otimização a ser tratado no Capítulo 6. O método de aproximação por *B-Splines* também é abordado neste trabalho dentro do Capítulo 2 e exemplificado dentro do Capítulo 5. Sua grande desvantagem está relacionada ao custo computacional, uma vez que envolve um processo de otimização.

Uma vez com o casco modelado e encontrado um equacionamento para toda sua superfície, podem-se calcular as propriedades hidrostáticas da embarcação a partir da geração de painéis e do cálculo vetorial, além do cálculo de sua resistência ao avanço.

Para as propriedades hidrostáticas, far-se-á uso do programa **NAVSTAB** que foi desenvolvido por Alvarez e Martins (2005). Não será detalhado todo o estudo e análise envolvidos neste programa, tendo em vista a sua extensão e por não ser o foco principal do trabalho. Serão relatados aqui, mais especificamente no Capítulo 3, somente o conceito de geração de painéis sobre o casco interpolado e a utilização do cálculo vetorial para obtenção das curvas hidrostáticas.

Tanto a modelagem do navio quanto o cálculo das curvas hidrostáticas foram desenvolvidos em linguagem C++.

Para a estimativa da resistência total ao avanço R_t , existem alguns modelos disponíveis na literatura. Conforme apresentado por Lewis (1988), basicamente todos os modelos consideram a independência dos efeitos viscosos e dos efeitos gravitacionais, apresentando a resistência total ao avanço sendo composta por duas componentes principais: uma parcela devido ao atrito (R_f) e outra devido à formação de ondas (R_w). Há outras componentes que são menos significativas e que não serão abordadas neste trabalho, como é o caso da resistência do ar, por exemplo.

Para valorar R_f , pode-se recorrer à regressão apresentada na ITTC-1957¹⁰ para a estimativa da resistência viscosa de uma placa plana. Já para a segunda parcela, R_w , podem-se usar desde previsões analíticas ou teóricas como

---

¹⁰ ITTC: *International Towing Tank Conference*, que em 1957 ocorreu em Madri e foi quando houve a proposta desta fórmula de correlação.

desenvolvido por De Conti (2004) e Michell (1898), análise de regressão como Holtrop (1977, 1984), programas comerciais como **AUTOPOWER**^{®11}, até séries sistemáticas como a série de Taylor reanalisada por Morton (1954), por exemplo, a qual está baseada em experimentos.

Conforme já mencionado, o foco deste trabalho está na modelagem e alteração da geometria do casco utilizando funções do tipo *B-Splines* para descrição da sua superfície. Logo, predições analíticas que levem em conta as curvas do casco em cada ponto aplicam-se a esta análise já que sua geometria pode ser representada através de equações, tornando conveniente a utilização de um método para a estimativa da resistência que forneça subsídios para o processo de otimização de como alterar a geometria e não apenas as dimensões principais da embarcação.

Assim, após uma pesquisa que será detalhada no Capítulo 4, o método de Michell (1898) apresenta-se como a solução que melhor se adapta a modelagem do problema em questão. Tal método, proposto no final do século XIX, é empregado até hoje, mesmo após um longo período de esquecimento até ser retomado por Havelock (1923, 1925a, 1925b, 1943-1944, 1951) em muitos de seus experimentos.

Por outro lado, é importante ter em mente que este método foi baseado em hipóteses que necessitam ser consideradas e garantidas dentro do problema, a fim de poder gerar resultados precisos. Estas hipóteses estão listadas no Capítulo 4 e é necessário que sejam entendidas para correta análise e modelagem do problema a que se propõe este estudo.

É importante também comentar que algumas propriedades hidrostáticas do navio como superfície molhada e volume são calculados pelo **NAVSTAB** e incorporados ao procedimento de modelagem e otimização, dado que são termos necessários para o cálculo da resistência total do navio.

Para o método de otimização, serão utilizadas as funções existentes dentro do programa **MATLAB**®. A função que permite a solução de um problema com restrições não lineares é a *fmincon*, cujos conceitos serão explorados no Capítulo 5.

---

¹¹ O **AUTOPOWER**® é um programa desenvolvido por *Autoship Systems Corporation*. Mais informações em www.autoship.com.

Não está no escopo deste trabalho criar novas rotinas de otimização. No entanto, um desenvolvimento futuro que garanta uma convergência mais rápida para o problema seria de grande valia, dado que o tempo de processamento para uma malha bem discretizada do problema apresenta um alto custo computacional e, dependendo da complexidade, pode ser inviável chegar à solução ótima, apesar da convergência.

Para as restrições do problema, descritas no Capítulo 6, serão utilizadas não somente a variação nas dimensões do casco, mas também critérios de estabilidade, como o KM_T .

1.4 Organização da Dissertação

Esta dissertação está organizada em 9 Capítulos, incluindo este inicial de contextualização, objetivos e metodologia do trabalho e esta breve explicação sobre a organização da dissertação.

No **Capítulo 2** serão apresentados os conceitos avaliados e empregados quando da modelagem do casco através da utilização de funções *B-Splines* cúbicas. Neste momento, serão mostradas aplicações em duas e três dimensões. As *B-Splines* cúbicas em três dimensões terão seus pontos de controle utilizados no processo de minimização da resistência ao avanço do casco. No procedimento de otimização desenvolvido, todas as fórmulas implementadas consideram uma *B-Spline* cúbica racional, cujos pesos têm valor unitário. No entanto, a implementação destas fórmulas com variação destes pesos poderá gerar um processo de otimização distinto em trabalhos futuros. Detalhes sobre as *B-Splines* racionais e também sobre o cálculo da energia (medidas de carenagem) para linhas e superfície podem ser encontrados nos Apêndices A e B deste trabalho.

No **Capítulo 3**, far-se-á uma breve discussão do cálculo das propriedades hidrostáticas de uma embarcação, apresentando seus resultados e como estes serão aplicados dentro do procedimento a ser descrito. Apresentar-se-ão aqui fundamentos relacionados ao cálculo vetorial e à geração de painéis sobre o casco. Neste capítulo, não haverá o detalhamento da implementação desta rotina visto que sua descrição foi feita em trabalhos prévios e podem ser consultados na bibliografia correspondente.

No **Capítulo 4** será feita uma análise detalhada do cálculo da resistência ao avanço para uma embarcação. Existem muitos métodos e formas de se estimar esta resistência. Neste trabalho, utilizar-se-á o método desenvolvido por Michell (1898), cujos conceitos e resultados vêm sendo estudados há muito tempo e são aplicados até hoje em programas comerciais. Apesar de suas restrições e hipóteses adotadas, os resultados obtidos são considerados muito bons.

No **Capítulo 5** haverá uma breve descrição do método de otimização utilizado pela função *fmincon* do **MATLAB**®, função esta que será empregada para os problemas a serem propostos neste trabalho, dado que já está pronta dentro deste programa comercial e que se adapta ao problema de otimização proposto. Todos os detalhes desta documentação estão presentes no manual do **MATLAB**®, mas também serão lembrados nesta dissertação.

No **Capítulo 6**, todos os conceitos apresentados nos capítulos anteriores serão aplicados de maneira prática no modelo de otimização construído, fazendo-se uma análise mais detalhada dos resultados encontrados, aplicação das restrições e função objetivo.

No **Capítulo 7** serão levantadas possíveis propostas para desenvolvimento de trabalhos futuros e considerações que aqui não estão apresentadas, mas que podem ser inseridas de acordo com a necessidade de implementação, levando em conta alguns conceitos que serão apresentados neste capítulo.

No **Capítulo 8** será feita uma conclusão final dos resultados do trabalho, dificuldades encontradas e as últimas considerações a respeito desta dissertação.

Por fim, no **Capítulo 9**, estão todas as referências consultadas para desenvolvimento deste estudo e que podem ser utilizadas como base para aprofundamento do conhecimento explanado em cada capítulo, além de poder servir como ponto de partida para o desenvolvimento de trabalhos posteriores a este.

2 Funções de Interpolação

A representação de linhas e curvas através de equações matemáticas permite uma série de vantagens sobre as formas cujas representações são desconhecidas. Dentre os principais benefícios, pode ser citada a vantagem de implementação computacional para estudo e análise de modelos. Atualmente, com a utilização de computadores cada vez mais rápidos e sofisticados, descrições de linhas e superfícies através de funções representam de alguma forma a construção e simulação virtuais, geralmente mais rápidas, baratas e, às vezes, mais precisas que experiências práticas.

Tais proveitos também foram absorvidos pelos construtores navais há alguns séculos atrás, mesmo sem o advento da computação, mas já com a simplificação que trazia à época tais representações. Talvez, um dos primeiros trabalhos efetuados nesta área foi apresentado por Chapman (1760) apud Lewis (1988) com a definição de linhas d'água através de polinômios. Mais tarde, no início do século XX, Taylor (1915) também definiu as formas de seus modelos através de polinômios de quinto grau e que mais tarde dariam origem a sua famosa série sistemática, a qual inclusive é utilizada neste trabalho como referência.

Hoje em dia, praticamente não existe e nem se pode imaginar a concepção e definição das formas de um navio sem uma modelagem computacional. Primeiramente por sua facilidade de construção e simulação em inúmeros programas comerciais disponíveis no mercado. Segundo, porque é uma maneira mais barata e mais precisa para cálculos e visualização de formas. Por último, porque rapidez e custo estão sempre envolvidos e, como é sabido, estes dois fatores são extremamente importantes em qualquer área ou projeto.

É importante nesta breve introdução, antes de qualquer análise prévia, ter bem claro em mente dois conceitos primordiais: interpolação e aproximação. Ambas as operações são efetuadas para se estimar o comportamento de certa propriedade ou função em uma determinada situação, conhecendo-se alguns pontos desta propriedade, ou função, em algumas condições. Porém, a primeira define uma curva para a qual todos os pontos conhecidos devem ser raízes da função que a define. A

segunda, por sua vez, requer unicamente que a função passe o mais próximo possível destes pontos sem a exatidão e garantia de que se passe por eles. A vantagem proporcionada pelo segundo método consiste em suavizar curvas de modo que não haja distorções consideráveis. A Figura 2.1 mostra a diferença gráfica entre estes dois métodos.

Figura 2.1: Representação gráfica da interpolação (à esquerda) e aproximação (à direita).

O método de aproximação consiste tão somente em um processo de otimização cuja função objetivo pode ser dada, por exemplo, por uma medida de “suavidade” através da energia associada à deformação da sua curva (elasticidade, flexão e torção), com restrições de que a diferença entre os pontos aproximados e os pontos originais seja menor que um dado delta permitido. Um processo como este pode ser encontrado em Harries e Nowacki (1999), De Conti (2004) e Nowacki; Bloor e Oleksiewickz (1995).

Reforçando o que já foi mencionado, o grande benefício deste método está associado à suavidade da curva, o que na área naval pode ser interpretado como carenamento do casco. No entanto, todo processo de otimização exige um tempo de processamento que, para alguns casos, pode ser demasiadamente custoso.

Para este trabalho em questão, como o ponto de partida é um casco inicial (semelhante) e, a partir dele, é gerada uma forma de melhor desempenho hidrodinâmico (resistência ao avanço, neste caso), será utilizado o método de interpolação, por ser significativamente mais rápido que um método de aproximação e por apresentar resultados muito bons. Mais que isso, não existe uma necessidade de aproximar os pontos iniciais, visto que os mesmos sofrerão alteração no método de otimização a ser proposto no Capítulo 6.

Outro conceito muito ligado a processos de interpolação e aproximação é a definição de parâmetros ou o que se chama de processo de parametrização de uma curva ou superfície. Como vantagens, Nowacki; Bloor e Oleksiewickz (1995) enumera: 1. facilidade em manipular a curva e 2. avaliação mais rápida e fácil de suas propriedades matemáticas. Uma curva $r(t)$ está parametrizada em t (parâmetro único) ou em u e v (dois parâmetros) quando as coordenadas dos pontos que a compõem podem ser representadas, respectivamente, por:

$$r(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t)) \text{ ou } r(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v)) \quad (2.1)$$

onde $r_1(t)$, $r_2(t)$, $r_3(t)$, $r_1(u, v)$, $r_2(u, v)$ e $r_3(u, v)$ são funções escalares chamadas de funções das coordenadas x , y e z da curva $r(t)$ sobre sua linha e $r(u, v)$ sobre sua superfície.

Para este trabalho em específico, cuja proposta é modelar toda a geometria do casco, fica bastante complicado defini-lo em função de um único parâmetro t . Harries e Nowacki (1999) sugerem em sua análise que se conduza a modelagem da superfície de um casco através da utilização de dois parâmetros (u e v), deixando a utilização de um único parâmetro para representação de linhas d'água ou balizas individualmente.

Neste capítulo, pretende-se discorrer, em um primeiro momento, a respeito das funções interpoladoras, apresentando as principais formas de representá-las e as mais comumente conhecidas. Após esta breve consideração, far-se-á um aprofundamento a respeito da teoria relacionada às curvas *B-Splines*. Esta contextualização inicial para o processo de interpolação serve como referência para introduzir as diversas formas que existem para caracterização de curvas que possam representar um conjunto de pontos conhecidos.

As funções *B-Splines* terão um tratamento especial, dada a necessidade de esclarecimento de muitos conceitos importantes que serão mais tarde necessários neste trabalho, passando neste capítulo por assuntos desde sua representação básica (funções-bases de Bernstein e curvas de Bézier), até a caracterização das funções *B-Splines* cúbicas de superfície.

No entanto, antes de chegar a este ponto, será demonstrado como empregar a modelagem de um casco em duas dimensões também através de funções *B-Splines* cúbicas. Como complementação do capítulo, sugere-se ao leitor que consulte o Apêndice, onde será apresentada uma forma mais elaborada de se escrever curvas através de funções *B-Splines* racionais (Apêndice A) e uma consideração importante quanto ao conceito de medida de carenamento ou energia (Apêndice B), associada a linhas e superfícies, para emprego posterior no Capítulo 5, quando da validação da função *fmincon* do **MATLAB**®, a qual poderá ser usada em trabalhos futuros, como será proposto no Capítulo 7.

2.1 Tipos de Função Interpoladoras

Conforme já descrito inicialmente na Introdução desta dissertação, a interpolação de curvas de navios pode ser feita através de polinômios ou de *splines*. Para o primeiro caso, podem-se citar as seguintes técnicas:

- Técnica de Lagrange;
- Técnica de Hermite;
- Técnica de Ferguson.

Nowacki; Bloor e Oleksiewickz (1995) apresentam para cada um destes métodos suas principais vantagens e desvantagens. Na interpolação por Lagrange, para uma curva $r(t)$, considera-se um vetor de nós $T = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ e uma seqüência de vetores posição dados por $P_i = V_i$, com $i = 0, 1, \dots, n$. Estas considerações levam a um sistema de equações dado por:

$$r(t_i) = P_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2.2)$$

Segundo Prenter (1985), existe uma única solução que resolve este sistema quando o polinômio $r(t)$ tem grau k igual a n .

A solução da interpolação de Lagrange pode ser dada quando se define:

$$r(t) = [P_0, P_1, \dots, P_n] L(t) = P \cdot L(t) \quad (2.3)$$

onde $L(t)$ é chamado de base cardinal da interpolação de Lagrange e cada um de seus elementos $L_i(t)$ são dados por:

$$L_i(t) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t - t_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t_i - t_j)} \quad (2.4)$$

As vantagens que apresentam Nowacki; Bloor e Oleksiewickz (1995) para este método são:

- Homogeneidade dos vetores posição ou de controle P_i (possuem mesmo grau sem a necessidade de conhecimento de vetores tangentes ou vetores com derivada de maior ordem);
- Suavidade infinita da curva resultante ($r \in C^\infty$);
- Simplicidade computacional.

Por outro lado, como desvantagem, cita-se que o simples fato de se aumentar a quantidade de nós n não significa que haverá uma boa interpolação. Os pontos intermediários aos vetores ou pontos de controle P_i terão forte oscilação dado que o grau do polinômio é igual a esta quantidade de pontos. Assim, para n maior que cinco, esta desvantagem praticamente não justifica esta técnica.

A segunda técnica (Hermite) é um método generalizado de Lagrange. Dado um vetor de nós $T = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ e duas correspondentes seqüências positivas: uma de inteiros dada por: $p_n = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ e outra de vetores de controle dada por: $Q_n = \{Q_{ij}\}$, com $i = 0, 1, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, k_i = p_i - 1$, o método encontra o polinômio para a curva paramétrica $r(t)$ de ordem $p = \sum_{i=0}^n p_i$ e grau $k = p - 1$ que resolva o problema:

$$r_j(t_i) = Q_{ij}, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, k_i \quad (2.5)$$

Prenter (1985) também garante a existência de uma solução única para o sistema montado.

A função $r(t)$ é dada neste método por:

$$r(t) = \sum_{i=0}^n P_i G_i(t) + \sum_{i=0}^n Q_i H_i(t) \quad (2.6)$$

onde P_i é o vetor posição, Q_i é o vetor tangente, com $i = 0, 1, \dots, n$, $G_i(t)$ e $H_i(t)$ são as funções-bases de Hermite, obtidas através de:

$$\left. \begin{aligned} G_i(t) &= (1 - 2L_i'(t_i)(t - t_i))L_i^2(t) \\ H_i(t) &= (t - t_i)L_i^2(t) \end{aligned} \right\} i = 0, 1, \dots, n \quad (2.7)$$

A grande vantagem do método de Hermite é que não somente o vetor posição está sob controle, mas também o vetor das tangentes, dado que os termos de Q_{ij} são compostos por vetores de posição, vetores tangentes e por vetores com derivadas de ordem superior. Daí o fato da técnica de Lagrange ser um caso particular da técnica de Hermite (consideração apenas de vetores posição). Como desvantagem, listam-se:

- Vetores de controle tornam-se não-homogêneos (consideração de distintos graus);
- A curva $r(t)$ é ainda um polinômio ordinário (muitas vezes diferenciável) e para $n+1$ vetores de posição e $n+1$ vetores tangentes, tem grau $k = 2n+1$ (muito maior que o polinômio de Lagrange);
- A curva $r(t)$ tende a oscilar em torno do polígono definido P_n (polígono formado pelos pontos do vetor posição), assim como citado no caso da técnica de Lagrange.

Tendo em vista estas desvantagens, o método de Ferguson utiliza um caso especial da interpolação polinomial de Hermite, mas agora com as funções-bases $G_i(t)$ e $H_i(t)$ dadas por:

$$G_i(t) = \begin{cases} \frac{(t_{i-1} - t)^2 [2(t_i - t) + (t_i - t_{i-1})]}{(t_i - t_{i-1})^3}, & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ \frac{(t_{i+1} - t)^2 [2(t_i - t) + (t_{i+1} - t_i)]}{(t_{i+1} - t_i)^3}, & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.8)$$

$$H_i(t) = \begin{cases} \frac{(t-t_{i-1})^2(t-t_{i+1})}{(t_i-t_{i-1})^2}, & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ \frac{(t-t_i)(t-t_{i+1})^2}{(t_{i+1}-t_i)^2}, & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.9)$$

Como grande vantagem para este método, Nowacki; Bloor e Oleksiewickz (1995) mencionam ser melhor aproximação que os métodos de Lagrange e Hermite para os pontos intermediários aos interpolados. No entanto, como desvantagem, comentam:

- Curva $r(t)$ tem baixo grau de diferenciação ($r \in C^1$);
- Vetores de controle são não-homogêneos (vetores posição e tangente ao mesmo tempo).

Para solucionar estes problemas, eis que se pode fazer uso do método das *splines*, o qual parte justamente dos resultados de interpolação de Ferguson. Uma possível definição deste tipo de interpolação pode ser encontrada em Alvarez e Martins (2005) e Ruggiero (1996).

Uma função *spline* $R_k(t)$ de grau k com os nós nos pontos t_i ($i = 0, 1, \dots, n$) é definida com as seguintes condições:

- Em cada subintervalo de pontos $[t_i, t_{i+1}]$, com ($i = 0, 1, \dots, n-1$), $R_k(t)$ é um polinômio de grau k : $r_k(t)$;
- $R_k(t)$ é contínua e tem derivada contínua até ordem $(k-1)$ no intervalo em que é considerada;
- $R_k(t)$ passa pelos pontos do intervalo.

Há alguns graus de funções *splines* que são utilizados para interpolação. São eles: grau 1 (função linear), grau 2 (função quadrática) e grau 3 (função cúbica).

Considerando a *spline* linear para interpolar pontos, percebe-se que ela apresenta como grande desvantagem o fato de ter derivada primeira descontínua

nos nós. Já as *splines* quadráticas têm derivadas contínuas até ordem 1, não garantindo que a curvatura mantenha-se a mesma nos nós (pontos fornecidos). Desta forma, a *spline* mais utilizada é a *spline* de grau três ou *spline* cúbica interpolante.

A *spline* de grau 3 apresenta duas derivadas contínuas, não permitindo que a função interpoladora tenha picos ou mudança abrupta em sua curvatura nos nós.

Para cada intervalo entre dois pontos $[t_i, t_{i+1}]$ com $(i = 1, 2, \dots, n-1)$, onde n é o número de pontos fornecidos por onde deve passar a função *spline* interpoladora, existe um polinômio $r_k(t)$ de grau 3, que é escrito como:

$$r_i(t) = a_i(t-t_i)^3 + b_i(t-t_i)^2 + c_i(t-t_i) + d_i \quad (2.10)$$

onde a_i , b_i , c_i e d_i são os coeficientes que devem ser encontrados para cada valor de $i = 1, 2, \dots, n-1$. Denotando-se:

$$g_i = r_i''(t_i) \text{ e } h_i = t_i - t_{i-1} \quad (2.11)$$

podem-se encontrar os valores de a_i , b_i , c_i e d_i , pelas seguintes expressões:

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{g_i - g_{i-1}}{6h_i} \\ b_i &= \frac{g_i}{2} \\ c_i &= \left[\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \frac{2h_i g_i + g_{i-1} h_i}{6} \right] \\ d_i &= y_i \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

e os valores de g_i podem ser obtidos pela solução do sistema $At = b$, em que:

$$A = \begin{pmatrix} h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_n) & h_n \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \quad (2.13)$$

$$b = \begin{pmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_3} - \frac{y_2 - y_1}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

e:

$$t = (g_0, g_1, \dots, g_n)^T \quad (2.15)$$

A teoria matemática moderna leva em conta o conceito de *spline* definido por Schoenberg apud Nowacki; Bloor e Oleksiewickz (1995) em 1966, o qual desconsiderou a utilização de vetores tangentes como vetores de controle, adicionando condições de “suavidade” em C^2 das curvas de Ferguson cúbicas. Este conceito originou o que atualmente chama-se *B-Spline*.

2.2 Funções B-Splines

Grande parte das modelagens computacionais é feita a partir das funções *B-Splines*. Até mesmo imagens de filmes fazem uso desta técnica para melhor representar seus personagens, como foi o caso do Exterminador do Futuro 2, com Arnold Schwarzenegger¹². Estas funções tiveram origem na área automobilística francesa por volta da década de 60, mas seu emprego atual expandiu-se para outras áreas da engenharia como naval e aeronáutica, por exemplo.

O entendimento das funções *B-Splines* é mais fácil após a descrição de sua origem, através das curvas de Bézier e das funções-bases de Bernstein. Várias são as bibliografias que comentam sobre este assunto e as suas aplicações práticas (Cf. Farin, 1997, De Conti, 2004, Nowacki; Bloor; Oleksiewickz 1995).

As funções *B-Splines* podem ser classificadas em uniformes e não-uniformes, sendo que a primeira ocorre quando o espaçamento de seu(s) parâmetro(s) é constante (equi-espaçado). Já para o segundo caso não existe esta propriedade. Também podem ser classificadas quanto ao seu grau em constante, linear, quadrática ou cúbica. Outra possível classificação é quanto a sua periodicidade. *B-*

¹² Retirado de: <http://users.wpi.edu/~pwdavis/sinews/spline17.htm>.

Splines periódicas são aquelas que resultam de polígonos fechados (primeiro e último nós são iguais), ao contrário das não-periódicas que estão relacionadas a polígonos abertos. Existem também as que são denominadas *B-Splines* racionais, cuja principal diferença está na inserção de pesos para cada ponto considerado.

Nesta seção, será feita uma introdução à base das funções *B-Splines* (polinômios de Bernstein e curvas de Bézier), demonstrando suas funções-bases desde grau 0 (constante) até grau 3 (cúbica), com aplicações na modelagem de um casco de navio conhecido, apresentando resultados obtidos pelo método. A aplicação destas funções poderá ser vista não somente para curvas como também para superfície, a qual será adotada neste trabalho para a modelagem dos cascos. O foco principal será dado às funções-bases cúbicas.

Além do embasamento das funções *B-Splines*, serão apresentadas as principais fórmulas advindas de sua formulação que serão empregadas nos próximos capítulos, como as derivadas de primeira e segunda ordens. Por último, sugere-se o aprofundamento sobre o tema das funções *B-Splines* racionais e também de critérios para otimização de curvas ou superfícies através destas funções, cuja exemplificação será feita no Capítulo 5, mas que encontra-se detalhado nos Apêndices A e B.

2.2.1 Polinômios de Bernstein e curvas de Bézier

Dada uma função arbitrária $f(t)$ contínua com $t \in [0,1]$, ela pode ser expressa aproximadamente por um polinômio $B_k(t)$ de k -ésimo grau na forma (Nowacki; Bloor; Oleksiewicz, 1995):

$$B_k(t) = \sum_{i=0}^k B_{i,k}(t) \cdot f\left(\frac{i}{k}\right) \quad (2.16)$$

onde:

$$B_{i,k}(t) = \begin{cases} \binom{k}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{k-i}, & i \in [0, k]; \quad t \in [0, 1] \\ 0, & i < 0 \quad \text{ou} \quad i > k. \end{cases} \quad (2.17)$$

são as funções-bases de Bernstein.

A Figura 2.2 mostra as funções-bases de Bernstein para t variando dentro do intervalo de 0 a 1 com incremento de 0.1 e a Figura 2.3 mostra as mesmas funções-bases para o mesmo intervalo, porém com um incremento de 0.01.

Figura 2.2: Funções-bases de Bernstein para incremento de $t = 0.1$ e $k = 5$ (acima e à esquerda), $k = 10$ (acima e à direita), $k = 50$ (abaixo e à esquerda) e $k = 100$ (abaixo e à direita).

Figura 2.3: Funções-bases de Bernstein para incremento de $t = 0.01$ e $k = 5$ (acima e à esquerda), $k = 10$ (acima e à direita), $k = 50$ (abaixo e à esquerda) e $k = 100$ (abaixo e à direita).

As funções-bases de Bernstein são responsáveis pelo comportamento das curvas de Bézier. Ela é uma versão em três dimensões de uma função representada pelo polinômio de Bernstein. De modo geral, uma curva de Bézier de grau k pode ser definida como:

$$r(t) = \sum_{i=0}^k V_i \cdot B_{i,k}(t) = V \cdot B_k(t), \quad t \in [0,1] \quad (2.18)$$

onde V é um vetor de controle que contém os vetores posição V_i .

2.2.2 Funções-bases para *B-Splines*

Como já comentado anteriormente, as funções *B-Splines* são fruto de um desenvolvimento do método de Bézier, como é apresentado em Nowacki; Bloor e Oleksiewickz (1995). Sua grande vantagem, no entanto, consiste em suas propriedades que estão sintetizadas na Tabela 2.1. A notação adotada e as funções-bases das *B-Splines* $N_j^k(t)$ (k é o grau da *B-Spline*) foram retiradas de De Conti (2004) e são dadas por:

$$N_j^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } t_{j-1} < t \leq t_j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.19)$$

$$N_j^1(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}, & \text{para } t_{j-1} \leq t \leq t_j \\ \frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j}, & \text{para } t_j < t \leq t_{j+1} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.20)$$

$$N_j^2(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{j-1}}{t_{j+1} - t_{j-1}} \cdot \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}, & \text{para } t_{j-1} \leq t \leq t_j \\ \left(\frac{t - t_{j-1}}{t_{j+1} - t_{j-1}} \cdot \frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j} + \frac{t_{j+2} - t}{t_{j+2} - t_j} \cdot \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} \right), & \text{para } t_j < t \leq t_{j+1} \\ \frac{t_{j+2} - t}{t_{j+2} - t_j} \cdot \frac{t_{j+2} - t}{t_{j+2} - t_{j+1}}, & \text{para } t_{j+1} < t \leq t_{j+2} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.21)$$

$$N_j^3(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{j-1}}{t_{j+2}-t_{j-1}} \cdot \frac{t-t_{j-1}}{t_{j+1}-t_{j-1}} \cdot \frac{t-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}}, & \text{para } t_{j-1} \leq t \leq t_j \\ \left[\frac{t-t_{j-1}}{t_{j+2}-t_{j-1}} \cdot \left(\frac{t-t_{j-1}}{t_{j+1}-t_{j-1}} \cdot \frac{t_{j+1}-t}{t_{j+1}-t_j} + \frac{t_{j+2}-t}{t_{j+2}-t_j} \cdot \frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j} \right) + \right. \\ \left. + \frac{t_{j+3}-t}{t_{j+3}-t_j} \cdot \frac{t-t_j}{t_{j+2}-t_j} \cdot \frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j} \right], & \text{para } t_j < t \leq t_{j+1} \\ \left[\frac{t_{j+3}-t}{t_{j+3}-t_j} \cdot \left(\frac{t-t_j}{t_{j+2}-t_j} \cdot \frac{t_{j+2}-t}{t_{j+2}-t_{j+1}} + \frac{t_{j+3}-t}{t_{j+3}-t_{j+1}} \cdot \frac{t-t_{j+1}}{t_{j+2}-t_{j+1}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{t-t_{j-1}}{t_{j+2}-t_{j-1}} \cdot \frac{t_{j+2}-t}{t_{j+2}-t_j} \cdot \frac{t_{j+2}-t}{t_{j+2}-t_{j+1}} \right], & \text{para } t_{j+1} < t \leq t_{j+2} \\ \frac{t_{j+3}-t}{t_{j+3}-t_j} \cdot \frac{t_{j+3}-t}{t_{j+3}-t_{j+1}} \cdot \frac{t_{j+3}-t}{t_{j+3}-t_{j+2}}, & \text{para } t_{j+2} < t \leq t_{j+3} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.22)$$

onde a Equação (2.19) refere-se à função-base de grau 0, a Equação (2.20) a de grau 1, a Equação (2.21) a de grau 2 e a Equação (2.22) a de grau 3. $T = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ é o vetor de nós que serve de parâmetro para a curva.

Tabela 2.1: Propriedades das funções-bases das *B-Splines* (Cf. Nowacki; Bloor; Oleksiewicz, 1995).

Propriedades	Forma Analítica
Suporte local	$N_j^k(t) \neq 0$ para $t_j \leq t \leq t_{j+k}$ $N_j^k(t) = 0$ para outro valor de t
Positividade	$N_j^k(t) \geq 0$
Relação de Cauchy	$\sum_{j=0}^n N_j^k(t) = 1$
Recursividade	Equação (2.23)

De maneira recursiva, Farin (1997) propõe:

$$N_j^k(t) = \frac{t - t_{j-1}}{t_{j+k-1} - t_{j-1}} N_j^{k-1}(t) + \frac{t_{j+k} - t}{t_{j+k} - t_j} N_{j+1}^{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.23)$$

A Figura 2.4 mostra as funções-bases da *B-Spline* de grau 0 (Equação (2.19)). Repare que se trata de uma função degrau ou binária já que os possíveis valores de $N_j^k(t)$ são 0 ou 1. É importante relatar aqui que para a função da figura tornar-se degrau é preciso que o valor da função-base seja calculado em intervalos pequenos entre t_{j-1} e t_j ou que os pontos calculados sejam exatamente iguais às posições dos nós. Neste caso da figura, utilizaram-se 2000 intervalos para atingir esta precisão. Mesmo assim, notam-se ainda algumas imperfeições. Repare que nas extremidades do intervalo entre t_{j-1} e t_j na Figura 2.4, o valor de t não é constante, apesar de bem próximo. Assim, quanto maior a quantidade de intervalos calculados (menor distância entre t_{j-1} e t_j), melhor a precisão.

Figura 2.4: Funções-bases das *B-Splines* de grau 0 para intervalo de t_{j-1} a t_j (à esquerda) e de $0 \leq t \leq 1$ com 20 nós (à direita).

A Figura 2.5 mostra as funções-bases para a *B-Spline* de grau 1 (Equação (2.20)). Neste caso, há um único ponto em que o valor de $N_j^k(t)$ é unitário, que é justamente no nó t_j , quando a função-base subsequente e anterior são nulas.

Graficamente, verifica-se o teorema de Cauchy para cada t : $\sum_{j=0}^n N_j^k(t) = 1$,

independentemente do valor de k (vide também Figura 2.4, Figura 2.6 e Figura 2.7). Para uma *B-Spline* de grau 1, a quantidade de intervalos de t necessária reduz

bastante para que sua forma seja idêntica a da Figura 2.5. Bastam, para esta situação, apenas 1000 intervalos aproximadamente ou, novamente, por ser linear, escolher como espaçamento a diferença entre t_{j+1} e t_j .

Figura 2.5: Funções-bases das *B-Splines* de grau 1 para intervalo de t_{j-1} a t_{j+1} (à esquerda) e de $0 \leq t \leq 1$ com 20 nós (à direita).

Para a Figura 2.6 têm-se as funções-bases para a *B-Spline* de grau 2 ou quadrática (Equação (2.21)). Repare que em nenhum ponto desta curva o valor de $N_j^k(t)$ é igual a 1. No entanto, note que o teorema de Cauchy ainda segue válido. Para se obter uma curva com a precisão mostrada na figura, foram necessários 500 intervalos para o parâmetro t . Nesta situação, já não se pode escolher unicamente valores para t que coincidam com a posição dos nós já que seu formato assemelha-se mais a uma parábola e não a uma reta.

Olhando mais atentamente, percebe-se que nas extremidades do intervalo 0 e 1 para o eixo das abscissas as funções-bases não têm a mesma forma dos intervalos intermediários. Isto ocorre porque os nós adicionais requeridos estão sobrepostos ao primeiro ($t=0$) e último ($t=1$) nós (*B-Spline* não-periódica). Se os nós adicionais fossem equi-espaçados (*B-Spline* uniforme/periódica), não haveria variação de forma dos valores das funções-bases nas extremidades. No entanto, os nós da extremidade da curva não seriam interpolados. *B-Splines* não-periódicas repetem os nós inicial e final da curva e garantem sua interpolação. O mesmo fenômeno pode ser visto na Figura 2.7.

Figura 2.6: Funções-bases das *B-Splines* de grau 2 para intervalo de t_{j-1} a t_{j+2} (à esquerda) e de $0 \leq t \leq 1$ com 20 nós (à direita).

Por último, a Figura 2.7 mostra as funções-bases para a *B-Spline* de grau 3 ou cúbica (Equação (2.22)). Novamente, percebe-se aqui a redução do valor de $N_j^k(t)$. A quantidade de intervalos utilizada para t entre 0 e 1 foi igual a 100. Outro comentário pertinente a todas as figuras que contêm as funções-bases para os diversos graus analisados é que todas elas são uniformes, ou seja, têm mesmo espaçamento entre t_j e t_{j+1} , seja qual for j dentro da quantidade de intervalos considerada, excetuando-se os nós das extremidades, os quais são sobrepostos. É necessária a adição de 3 nós no início e no final da curva.

Figura 2.7: Funções-bases das *B-Splines* de grau 3 para intervalo de t_{j-1} a t_{j+3} (à esquerda) e de $0 \leq t \leq 1$ com 20 nós (à direita).

Devido a sua maior precisão e por serem de classe C^2 , as *B-Splines* cúbicas são as mais comumente adotadas em programas computacionais. Têm por outro lado a desvantagem de que cada subintervalo entre t_j e t_{j+1} tem uma maior quantidade de outras funções-bases que influem no resultado da interpolação, tornando seu processamento um pouco mais custoso.

Segundo Nowacki; Bloor e Oleksiewickz (1995), existem apenas dois momentos em que uma *B-Spline* reduz-se a uma base de Bernstein:

- Quando todos os nós não têm qualquer multiplicidade;
- Quando o vetor de nós consiste em apenas pontos $t_0 = 0$ e $t_m = 1$, ambos com multiplicidade $m_0 = m_m = k$ (grau), com $k \geq 1$.

A partir deste momento, serão utilizadas somente funções-bases para *B-Splines* cúbicas, definidas pela Equação (2.22).

2.2.3 Funções *B-Splines* cúbicas e suas derivadas

Segundo De Conti (2004), se L é a quantidade de trechos¹³ que compõe uma curva, para uma *B-Spline* cúbica ($k = 3$), com base na expressão recorrente (Equação (2.23)), tem-se:

$$\vec{r}(t) = \sum_{j=0}^{L+k-1} \vec{d}_j \cdot N_j^k(t) \quad (2.24)$$

onde $\vec{d}_j$ é o vetor que representa os $L+3$ pontos de controle nas direções X , Y e Z . O acréscimo de k índices a mais no somatório refere-se ao número adicional de nós que devem ser inseridos e, conseqüente, aumento de k pontos de controle.

A primeira e a segunda derivadas para a Equação (2.24) são dadas por:

$$\frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^{L+k-1} \vec{d}_j \cdot \frac{\partial N_j^k(t)}{\partial t} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}(t)}{\partial t^2} = \sum_{j=0}^{L+k-1} \vec{d}_j \cdot \frac{\partial^2 N_j^k(t)}{\partial t^2} \quad (2.26)$$

¹³ A quantidade de trechos que compõem uma curva é dada pela quantidade de nós desta curva menos 1.

onde, derivando-se a Equação (2.23) uma vez e depois uma segunda vez, obtêm-se:

$$\frac{\partial N_j^k(t)}{\partial t} = \frac{1}{t_{k+j-1} - t_{j-1}} N_j^{k-1}(t) - \frac{1}{t_{k+j} - t_j} N_{j+1}^{k-1}(t) + \frac{t - t_{j-1}}{t_{k+j-1} - t_{j-1}} \cdot \frac{\partial N_j^{k-1}(t)}{\partial t} + \frac{t_{k+j} - t}{t_{k+j} - t_j} \cdot \frac{\partial N_{j+1}^{k-1}(t)}{\partial t} \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial^2 N_j^k(t)}{\partial t^2} = \frac{2}{t_{k+j-1} - t_{j-1}} \frac{\partial N_j^{k-1}(t)}{\partial t} - \frac{2}{t_{k+j} - t_j} \frac{\partial N_{j+1}^{k-1}(t)}{\partial t} + \frac{t - t_{j-1}}{t_{k+j-1} - t_{j-1}} \cdot \frac{\partial^2 N_j^{k-1}(t)}{\partial t^2} + \frac{t_{k+j} - t}{t_{k+j} - t_j} \cdot \frac{\partial^2 N_{j+1}^{k-1}(t)}{\partial t^2} \quad (2.28)$$

com $k=3$. Note que $\frac{\partial N_j^0(t)}{\partial t} = 0$ e $\frac{\partial^2 N_j^1(t)}{\partial t^2} = 0$, pois $N_j^0(t)$ e $\frac{\partial N_j^1(t)}{\partial t}$ são constantes para todo t pertencente ao domínio (pode-se verificar a segunda afirmação derivando-se a Equação (2.20)).

A Figura 2.8 mostra o resultado da primeira derivada (Equação (2.27)) para as funções-bases de uma *B-Spline* cúbica. Como pode ser visto na equação, as duas primeiras parcelas não são adimensionais. Logo, o tamanho do intervalo entre t_j e t_{j+1} influi nos valores de máximo e mínimo da curva. Nas extremidades do domínio ($t=0$ e $t=1$), as curvas das derivadas das funções-bases são distorcidas, como consequência da não-periodicidade da curva ou simplesmente pelo fato dos nós adicionais nos extremos do domínio não serem equi-espaçados e sim sobrepostos aos extremos ($t=0$ e $t=1$). Note também que $\sum_{j=0}^{L+k-1} \frac{\partial N_j^k(t)}{\partial t} = 0$ (esta relação pode ser facilmente obtida derivando-se a relação de Cauchy apresentado na Tabela 2.1, a qual é constante e igual a um).

Figura 2.8: Primeira derivada das funções-bases das *B-Splines* de grau 3 para intervalo de t_{j-1} a t_{j+3} (à esquerda) e de $0 \leq t \leq 1$ com 20 nós (à direita).

Já a segunda derivada (Equação (2.28)) para as funções-bases de uma *B-Spline* cúbica estão apresentadas na Figura 2.9. Como se tratam de diversos segmentos de reta, recai-se novamente na necessidade de avaliar mais pontos no intervalo entre t_j e t_{j+1} para que se obtenha um resultado condizente. Aqui, utilizaram-se 1000 intervalos de t entre 0 e 1, que foi o mesmo espaçamento usado na Figura 2.5. Para a segunda derivada, vale também que $\sum_{j=0}^{L+k-1} \frac{\partial^2 N_j^k(t)}{\partial t^2} = 0$, já que

$$\sum_{j=0}^{L+k-1} \frac{\partial N_j^k(t)}{\partial t} = 0.$$

Figura 2.9: Segunda derivada das funções-bases das *B-Splines* de grau 3 para intervalo de t_{j-1} a t_{j+3} (à esquerda) e de $0 \leq t \leq 1$ com 20 nós (à direita).

2.2.4 Interpolação de curvas por *B-Splines* cúbicas

Considere um conjunto de pontos cujas coordenadas ou cotas (x, y) são apresentadas na Tabela 2.2.

Tabela 2.2: Cotas x e y de um curva qualquer.

Cota x	0.0	1.0	2.5	4.0	5.3	6.0	7.0	9.0	10.0	12.0
Cota y	0.0	2.0	1.5	3.0	4.0	4.2	3.7	2.2	3.0	2.5

Se a interpolação for feita através de uma curva *B-Spline* cúbica, existem 3 situações para o problema e pelo menos 2 soluções possíveis. Considere L como sendo o número de trechos que a curva será dividida em sua parametrização e n a quantidade de cotas x e y (neste exemplo $n = 10$). As situações são:

- Número de pontos de controle d_j^s definido é menor que número de pontos dados p_i^s , ou seja, $(L + 3 < n)$;
- Número de pontos de controle d_j^s definido é igual ao número de pontos dados p_i^s , ou seja, $(L + 3 = n)$;
- Número de pontos de controle d_j^s definido é maior que número de pontos dados p_i^s , ou seja, $(L + 3 > n)$.

O sistema a ser resolvido de forma a obter os pontos de controle d_j^s , sendo $s = x, y$, é dado por:

$$[N_j(t_i)]_{n \times (L+3)} * \{d_j^s\}_{(L+3)} = \{p_i^s\}_n, \quad j = 1, 2, \dots, L+3 \text{ e } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.29)$$

Para a primeira situação (quantidade de pontos de controle inferior à quantidade de cotas (x, y)), apresenta-se um sistema de equações sobredeterminado, ou seja, número de incógnitas (pontos de controle) é menor que o número de equações (pontos dados). Na segunda, tem-se um sistema determinado, com número de incógnitas igual ao número de equações. Por último, na terceira situação, constata-se um sistema subdeterminado ou um sistema cujo número de incógnitas é maior que o número de equações.

Para a segunda situação, a solução do sistema pode ser obtida de maneira trivial, pois a matriz $[N_j(t_i)]$ é quadrada. Logo, obtêm-se os pontos de controle a partir da solução do sistema e a curva pode ser interpolada.

Na primeira situação, um possível tratamento seria dividir a curva parametrizada em $n-1$ trechos, interpolando-se linearmente os pontos dados, a fim de garantir que o sistema apresentado em (2.29) seja determinado. A desvantagem deste processo é que não obrigatoriamente a curva passará por todos os pontos dados inicialmente, mas apenas pelos pontos utilizados na equação.

Já no terceiro caso, pode-se também conduzir uma interpolação linear entre os pontos dados de forma a adicionar $L+3-n$ pontos. Neste caso, a curva passará por todos os pontos dados inicialmente, além dos pontos adicionados.

A Figura 2.10 mostra os resultados obtidos para a interpolação nas 3 situações mencionadas.

Figura 2.10: Interpolação com 8 pontos de controle - situação 1: sobredeterminado – (à esquerda e acima), interpolação com 12 pontos de controle – situação 3: subdeterminado – (à direita e acima) e interpolação com 10 pontos de controle – situação 2: determinado (abaixo).

Comparando-se as três situações, observa-se que a interpolação para casos com número de pontos de controle menor que o número de pontos dados (situação 1) é a única na qual não há a passagem da curva obrigatoriamente pelos pontos originais. Isto porque o parâmetro t é adotado como sendo o “girth” (perímetro) da curva. Assim, a posição dos nós é tomada de acordo com a quantidade de segmentos que o parâmetro t é dividido, tendo estes um mesmo espaçamento, o que não necessariamente coincidirá com os pontos da curva inicial.

No caso do problema ser subdeterminado (situação 3), adicionam-se pontos sobre a curva de tal forma que o sistema torne-se possível de ser resolvido. Isso garante não só que a curva passe pelas cotas iniciais como também pelos demais pontos acrescidos. Assim, esta situação apresenta uma solução mais controlada quando comparada com as outras duas possibilidades.

No caso do problema determinado (situação 2), a curva interpolada obrigatoriamente passa por todos os pontos fornecidos. No entanto, tal imposição traz como revés uma variação acentuada da curva interpoladora entre os pontos originalmente conhecidos.

Neste trabalho, o procedimento aplicado é semelhante ao mostrado na situação 1 da Figura 2.10, independentemente da quantidade de pontos de controle requerida pelo usuário. Desta forma, é sempre tomado como parâmetro o comprimento dos segmentos de reta que unem os pontos, adimensionalizados entre 0 e 1, e dividido no número de trechos necessários para solução de um sistema determinado. Assim, quanto maior for a quantidade de pontos de controle, melhor a definição da curva. A situação 2 requer uma relação exata entre o número de pontos dados e a quantidade de pontos de controle, o que nem sempre ocorre. Já a situação 3 requer a inserção de pontos sobre a curva, cujas posições deveriam ser definidas por alguma regra computacional. Pela situação 1, não existe este compromisso, embora não seja uma interpolação propriamente dita, visto que a curva não passa exatamente pelos pontos dados, o resultado é muito bom para esta situação e será apresentado mais adiante neste capítulo.

A segunda solução para o método de interpolação por *B-Splines* cúbicas seria conduzir um processo de otimização cuja função objetivo poderia ser dada pelo

careenamento da curva e cujas restrições sejam que a curva passe sobre os pontos dados. Esta solução será abordada na validação da função *fmincon* do **MATLAB**®, no Capítulo 5.

O método de aproximação é indicado para interpolação de pontos por De Conti (2004) e Nowacki; Bloor e Oleksiewickz (1995). Sua desvantagem está no tempo de processamento necessário para interpolação, dada a necessidade de um processo de otimização. Como vantagem do método, não é preciso preocupar-se com a quantidade de pontos de controle e cotas para cada caso.

2.2.5 Interpolação das curvas de um casco conhecido (Versluis, 1977) através de funções *B-Splines* cúbicas

Nesta seção será discutida a etapa inicial do processo de otimização de formas de cascos de deslocamento: a modelagem das curvas de um navio semelhante. Para o método computacional implementado, deve ser fornecido um arquivo texto que contenha as cotas de uma embarcação previamente conhecida. Neste mesmo arquivo, existem outros parâmetros que devem ser definidos, como o grau da *B-Spline* (que neste trabalho será utilizado somente igual a 3), a quantidade de calados equi-espaçados para cálculo das propriedades hidrostáticas (método de cálculo a ser descrito no Capítulo 3), número de pontos de controle e quantidade de balizas a ser interpolada entre cada baliza inicial.

A modelagem do casco é feita sempre com funções *B-Splines* cúbicas, através do método de interpolação. A vantagem deste em relação à aproximação consiste na rapidez de processamento, já que não envolve processo de otimização, nos bons resultados obtidos para as propriedades da embarcação (vide Capítulo 3) e no fato das formas serem modificadas pelo processo de otimização da resistência, conforme será descrito no Capítulo 6.

Realiza-se uma primeira interpolação para todas as linhas d'água de acordo com a quantidade de pontos de controle definidos pelo usuário, que não necessitam ser igual à quantidade de balizas para cada uma delas. O processo computacional implementado permite tornar o número de incógnitas igual ao número de equações, como descrito na sessão anterior. Isto permite que os cálculos sejam efetuados de forma instantânea sem perda significativa do formato e características do casco, do

qual se espera ter uma forma ótima ao final. Esta interpolação vai permitir o equacionamento de cada linha d'água e a possível inserção de novas balizas intermediárias, cujas quantidades serão também definidas pelo usuário.

Como parâmetro t utiliza-se a posição longitudinal adimensionalizada pelo comprimento na linha d'água correspondente, variando entre 0 e 1. A justificativa consiste no fato de que nem toda linha d'água tem mesmo comprimento. Geralmente, as mais próximas ao convés têm maiores comprimentos. Padronizando o intervalo de t entre 0 e 1, permite-se que o parâmetro usado para cálculo das funções-bases seja o mesmo qualquer que seja a linha d'água, facilitando a implementação computacional. Isto significa dizer que o mesmo parâmetro t para distintas linhas d'água não representará mesma posição longitudinal da baliza.

É interessante comentar também que como $N_j^k(t)$ varia de 0 a 1, os valores de $\vec{d}_j$ em cada uma de suas três direções X , Y , Z são praticamente iguais às cotas (x, y, z) dos pontos. A Figura 2.11 exemplifica a análise e a parametrização.

Figura 2.11: Parametrização das linhas d'água do casco (vista de topo).

Assim, cada linha d'água terá uma função $\vec{r}(t)$ definida por (2.24). Como já comentado, cada linha d'água pode ter um comprimento diferente. Isto significa dizer que a baliza 1 pode ter valores de x_1 que não são necessariamente iguais ao de outra linha d'água. Da mesma forma que N e x_N também podem não ser os mesmos. Ainda que a linha d'água tenha menos balizas a interpolar (comprimento

menor), os valores possíveis da posição t estarão entre 0 e 1. A Figura 2.12 representa este entendimento.

Figura 2.12: Parametrização das linhas d'água do casco (vista lateral).

Dadas as funções $\vec{r}(t)$ para cada linha d'água e sabendo-se a quantidade de balizas a ser inseridas entre as fornecidas inicialmente, pode-se facilmente adicionar balizas intermediárias que servirão para melhorar a discretização do casco.

As cotas iniciais definidas pelo usuário podem permitir uma melhor ou pior discretização do casco no processo de interpolação. Retomando o casco da Figura 2.12, note que entre as duas balizas da popa e as duas balizas da proa não existem informações a respeito da curva da quilha. Desta forma, a função *B-Spline* para interpolação da linha d'água de comprimento L_1 considera os pontos de A_1 a B_1 . Já para a linha d'água de comprimento L_2 , a sua função permite interpolar entre os pontos A_2 a B_2 . Logo, não existe informação a respeito do contorno do casco entre A_1 e A_2 e entre B_1 e B_2 . Assim, as balizas interpoladas apresentarão o aspecto da Figura 2.13 e a região cuja forma do casco é desconhecida está hachurada em verde.

Figura 2.13: Interpolação das balizas.

Para estimar as cotas as quais não se conhece nada a respeito, não se estaria falando de um processo de interpolação, mas sim de extrapolação, o que não pode ser obtido através das curvas *B-Splines*. Além do mais, uma possível extrapolação da linha da quilha ocasiona a geração de novas linhas d'água (pontos de encontro entre as extrapolações da baliza interpolada e da linha da quilha), tornando o problema bem mais complexo, uma vez que cada ponto de encontro será uma nova linha d'água. Isso geraria muitas vezes linhas d'água muito próximas umas das outras e sem acréscimo de informação relevante. O ideal é que o casco inicial seja fornecido com o máximo de informação possível. Vale lembrar ainda que este problema da modelagem ocorre basicamente na proa e na popa, já que no corpo paralelo médio as balizas vão até a linha d'água mais baixa.

Não é somente parte das balizas interpoladas na popa e na proa que são desconhecidas no casco. Existe também a região anterior a primeira baliza da popa e posterior a última da proa que não se tem informação, dado que as cotas de um casco não são dadas desde suas extremidades. Estas regiões estão hachuradas em azul na Figura 2.13.

A otimização da resistência ao avanço que será abordada no Capítulo 6 tomará como variáveis para mudança na geometria do casco apenas duas dimensões principais: comprimento e boca. Como será visto no Capítulo 3, apesar das regiões hachuradas serem desconhecidas, as propriedades hidrostáticas terão resultados muito próximos aos da embarcação simulada e não afetarão a análise do problema.

Por último, após o equacionamento das linhas d'água e criação das novas balizas, estas serão também equacionadas de forma a ser possível interpolar linhas d'água intermediárias. O parâmetro usado neste caso é a posição vertical adimensionalizada pela diferença de cotas entre a linha d'água mais acima e mais abaixo da baliza. Desta maneira, tem-se o casco completamente modelado e pronto para construção em 3D.

Como aplicação do método proposto até aqui para interpolação de curvas por *B-Splines*, observe a embarcação apresentada na Figura 2.14, cujas cotas foram

retiradas de Versluis (1977). Lembre-se que este é o casco tomado como exemplo para aplicação do processo de otimização ao longo deste estudo.

Repare que existe uma parte da popa anterior a primeira baliza definida para o casco e, uma região entre a primeira e a segunda balizas, para as quais não se apresenta uma discretização intermediária fornecendo suas cotas. No corpo de proa, existe uma parte do navio acima da linha d'água que também não é passada como informação. Esta figura vai bem de encontro ao que foi discutido sobre a Figura 2.13.

Figura 2.14: Casco de deslocamento usado na interpolação por *B-Splines*.

A Figura 2.15 mostra a interpolação em duas dimensões usando 15 pontos de controle e de 21 a 25 nós, dependendo da linha d'água, para as cotas da embarcação tomada como exemplo na Figura 2.14. Note que tanto na proa quanto na popa existe uma limitação da linha d'água que é resultado da falta informação nestas regiões.

Figura 2.15: Casco de deslocamento interpolado por *B-Splines* (plano de linhas d'água).

O plano de balizas deste mesmo casco está apresentado na Figura 2.16. Em linhas cheias estão as balizas iniciais interpoladas e em linhas tracejadas estão as balizas intermediárias geradas. Para cada intervalo, o usuário escolhe a quantidade de balizas que deseja inserir através do arquivo inicial. Isso permite que não seja necessária a inclusão de novas balizas no corpo paralelo médio e uma melhor discretização do corpo de proa e popa.

Como já comentado previamente, não é realizada extrapolação das linhas para os pontos cujas cotas não foram fornecidas. Isto fica claro para o corpo de proa (à direita) entre as linhas d'água 0.26 e 10.50.

Figura 2.16: Casco de deslocamento interpolado por *B-Splines* (plano de balizas) com 15 pontos de controle.

Veja agora na Figura 2.17 o resultado para o mesmo plano de balizas se forem usados 100 pontos de controle para cada linha d'água. É perceptível uma melhoria nas curvas das balizas, principalmente para as linhas d'água mais baixas. Foram utilizados os mesmos números de pontos no traçado de ambas as figuras. A grande desvantagem está na geração de mais pontos de controle a serem trabalhados no processo de otimização e, conseqüentemente, no tempo de processamento do método.

Figura 2.17: Casco de deslocamento interpolado por *B-Splines* (plano de balizas) com 100 pontos de controle.

2.3 Funções *B-Splines* Cúbicas de Superfície

Introduzida a modelagem de um casco por *B-Splines* em 2D, propõe-se agora aplicar os mesmos conceitos para a superfície da embarcação. Uma *B-Spline* de superfície é definida por (De Conti, 2004):

$$\vec{r}(u, v) = \sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} \vec{d}_{ij} \cdot N_i^{k_a}(u) \cdot N_j^{k_b}(v) \quad (2.30)$$

onde u e v são os parâmetros que definem a superfície, L_a é a quantidade de trechos que compõe o parâmetro u , L_b é a quantidade de trechos que compõe o parâmetro v , k_a e k_b são os graus das funções-bases das *B-Splines*. Repare que os pontos de controle $\vec{d}_{ij}$ nas três direções estão em forma matricial. $N_i^{k_a}(u)$ e $N_j^{k_b}(v)$ podem ser obtidos pelas equações (2.19) a (2.22), dependendo do grau de cada uma delas.

A primeira e a segunda derivadas para a Equação (2.30) são dadas por:

$$\frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} = \sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} \vec{d}_{ij} \cdot \frac{\partial N_i^{k_a}(u)}{\partial u} \cdot N_j^{k_b}(v) \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} = \sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} \vec{d}_{ij} \cdot N_i^{k_a}(u) \cdot \frac{\partial N_j^{k_b}(v)}{\partial v} \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}(u, v)}{\partial u^2} = \sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} \vec{d}_{ij} \cdot \frac{\partial^2 N_i^{k_a}(u)}{\partial u^2} \cdot N_j^{k_b}(v) \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}(u, v)}{\partial v^2} = \sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} \vec{d}_{ij} \cdot N_i^{k_a}(u) \cdot \frac{\partial^2 N_j^{k_b}(v)}{\partial v^2} \quad (2.34)$$

onde continuam valendo as equações (2.27) e (2.28).

2.3.1 Interpolação da superfície de um casco conhecido (Versluis, 1977) através de funções *B-Splines* cúbicas

Com as equações das curvas das balizas e linhas d'água definidas pela Equação (2.24), pode-se interpolar qualquer ponto dentro do domínio dos parâmetros u e v , definidos para as balizas e linhas d'água como sendo a posição longitudinal e vertical adimensionalizadas, respectivamente. Assim, geram-se $L_a + k_a$ balizas e $L_b + k_b$ linhas d'água. Para obter a função $\vec{r}(u, v)$ mostrada na Equação (2.30), basta descobrir o valor dos pontos de controle $\vec{d}_{ij}$. É um total de $(L_a + k_a)(L_b + k_b)$ incógnitas e logo é necessária a mesma quantidade de equações. Como o número de nós é igual a $L_a + 1$ e $L_b + 1$ para os parâmetros u e v , respectivamente, são necessários $k_a - 1$ e $k_b - 1$ pontos adicionais em cada baliza e linha d'água. No trabalho aqui apresentado, considerar-se-á *B-Splines* cúbicas somente, onde $k_a = k_b = 3$. Daí a necessidade de dois pontos adicionais em cada direção.

Vale aqui a ressalva que, como $0 \leq u, v \leq 1$, na verdade, não se trata da construção de balizas propriamente ditas. Trata-se da criação de curvas sobre a superfície cujo parâmetro u é o mesmo. Como as linhas d'água podem ter comprimentos distintos, não necessariamente as balizas terão mesma coordenada em X . A Figura 2.18 representa as balizas e linhas d'água criadas para o caso de uma *B-Spline* de grau 3 (adição de duas balizas e duas linhas d'água).

Figura 2.18: Adição de balizas e linhas d'água sobre a superfície do casco.

No procedimento computacional proposto, estes pontos são criados entre a primeira e segunda e entre a penúltima e última balizas/linhas d'água. Esta inserção atende a necessidade dos $k_a - 1$ e $k_b - 1$ pontos adicionais para se resolver o sistema de equações. Assim, tem-se o sistema composto por:

$$\left[N_i^{k_a}(u_m) \cdot N_j^{k_b}(v_n) \right]_{(L_a+k_a) \times (L_b+k_b)} * \{ d_{ij}^s \}_{(L_a+k_a) \times (L_b+k_b)} = \{ p_{mn}^s \}_{(L_a+k_a) \times (L_b+k_b)} \quad (2.35)$$

onde s pode ser igual a X , Y ou Z com i e $m = 0, 1, \dots, L_a + k_a - 1$ e j e $n = 0, 1, \dots, L_b + k_b - 1$. p_{mn}^s é a coordenada s de um ponto dado localizado na baliza m e linha d'água n .

Para este trabalho, além de se adotar $k_a = k_b = 3$, está-se considerando também que $L_a = L_b = L$. Assim, a Equação (2.35) reduz-se a:

$$\left[N_i^3(u_m) \cdot N_j^3(v_n) \right]_{(L+3)^2 \times (L+3)^2} * \{ d_{ij}^s \}_{(L+3)^2} = \{ p_{mn}^s \}_{(L+3)^2} \quad (2.36)$$

Este sistema de equações merece uma atenção especial quanto a sua implementação numérica. As variáveis são d_{ij}^s . A solução deste sistema pode ser obtida de maneira rápida por:

$$\{ d_{ij}^s \}_{(L+3)^2} = \left[N_i^3(u_m) \cdot N_j^3(v_n) \right]_{(L+3)^2 \times (L+3)^2}^{-1} * \{ p_{mn}^s \}_{(L+3)^2} \quad (2.37)$$

Lembrando que $0 \leq N_i^{k_a}(u), N_j^{k_b}(v) \leq 1$, que esta matriz contém muitos termos nulos e que é praticamente diagonal, quanto maior a quantidade de pontos de controle, mais próximo de zero é o seu determinante, tornando-a computacionalmente não-inversível. No exemplo da Figura 2.19, foi possível utilizar no máximo 26 pontos de controle. Mais que isso já não se consegue inverter a matriz e resolver o sistema computacionalmente. Para resolver este problema poderia se conduzir um problema de otimização cujas restrições estão associadas à passagem da curva pelos pontos e adotando-se como função objetivo um critério de

carenagem, por exemplo, como será apresentado mais adiante neste capítulo e exemplificado no Capítulo 5.

Como resultados obtidos para a interpolação da superfície por *B-Splines* cúbicas, pode-se observar a Figura 2.19. Para todos eles foram definidos 20 pontos de controle em cada baliza e linha d'água a partir da interpolação destas curvas. Com estes novos pontos de controle calculados, podem-se traçar novas balizas e linhas d'água. Utilizar menos pontos distorce o casco em seu corpo paralelo médio. Por outro lado, a inserção de mais pontos torna o processo mais lento e, como já dito, fica inviável inverter computacionalmente a matriz da Equação (2.37).

Figura 2.19: Interpolação de casco de deslocamento para (plano de balizas): 15 balizas e linhas d'água (à esquerda e acima), 30 balizas e linhas d'água (à direita e acima), 60 balizas e linhas d'água (à esquerda e abaixo), 150 balizas e linhas d'água (à direita e abaixo).

Quanto mais balizas e linhas d'água são inseridas, melhor é a visualização do casco, principalmente na parte mais próxima ao fundo do navio. Esta melhoria está relacionada somente a quantidade de pontos adicionais que são interpolados, dado que a função interpoladora permanece a mesma. No entanto, nota-se que na região

onde as cotas não foram fornecidas inicialmente elas continuam sem um valor interpolado. Estas regiões da popa e da proa apresentam duas dificuldades particulares para a interpolação: a primeira é a falta de informação; a segunda refere-se ao processo de interpolação por *B-Splines* em regiões que apresentam um “degrau” (passagem de uma baliza para outra, com diferença de linhas d’água). Esta última pode ser verificada na Figura 2.20.

A linha preta da Figura 2.20 representa a interpolação feita por uma *B-Spline* de superfície variando o parâmetro v (referente à posição vertical) de 0 a 1 e mantendo o parâmetro u (referente à posição longitudinal) constante e igual a 0.

Como consequência, existe uma pequena distorção do casco na transição de uma linha d’água para outra. Esta singularidade não é significativa no cálculo das propriedades hidrostáticas do navio interpolado em relação ao original e nem tão pouco nas curvas das linhas d’água (Figura 2.21) e forma em 3D (Figura 2.22).

Figura 2.20: Interpolação da popa para um casco de deslocamento quando há a mudança de uma baliza para outra com linha d’água mais baixa.

Mais uma vez, a melhor maneira de evitar este problema é fornecendo um casco inicial com boa discretização no corpo de proa e de popa.

Figura 2.21: Interpolação de casco de deslocamento para 300 balizas e linhas d'água (plano de linhas d'água).

Para o casco gerado em três dimensões, note que existe uma parte do mesmo que fica aberta na proa e na popa. Estas regiões são as que antecedem a primeira baliza da popa e que estão à frente da última baliza da proa, ambas com cotas desconhecidas.

Figura 2.22: Interpolação de casco de deslocamento para 300 balizas e linhas d'água (casco em três dimensões).

3 Cálculo das Propriedades Hidrostáticas

As propriedades hidrostáticas de uma embarcação são de extrema importância dentro do projeto de um navio. A partir delas pode-se, por exemplo, analisar sua estabilidade estática e o comportamento de algumas de suas características em função da sua condição de carregamento como, por exemplo, volume deslocado e posição do centro de carena.

O procedimento para o levantamento das curvas hidrostáticas que será descrito aqui foi retirado de Alvarez e Martins (2005).

Basicamente, estando o casco interpolado, pode-se gerar uma malha de painéis a partir da qual, utilizando-se das propriedades do cálculo vetorial, obtêm-se suas propriedades hidrostáticas.

Assim sendo, utilizando apenas métodos de interpolação agregados ao cálculo vetorial com painéis, é possível obter, em função do calado da embarcação:

- Volume total do casco;
- LCF – Posição longitudinal do CF (centro de flutuação);
- TCF – Posição transversal do CF (nulo quando a embarcação é simétrica em relação ao seu eixo longitudinal);
- LCB – Posição longitudinal do CB (centro de carena);
- TCB – Posição transversal do CB (nulo quando a embarcação é simétrica em relação ao seu eixo longitudinal);
- KB – Altura do CB ;
- Momentos de inércia longitudinal e transversal do plano de flutuação;
- Área do plano de flutuação;
- Área molhada;
- BM (raio metacêntrico) longitudinal e transversal.
- KM (altura metacêntrica) longitudinal e transversal, a ser utilizada como medida da estabilidade.

A proposta deste capítulo é apresentar a teoria envolvida no cálculo das propriedades hidrostáticas de navios, desde o processo de geração da malha de painéis sobre o casco até a aplicação do cálculo vetorial. A validação do procedimento apresentado será feita através da aplicação do programa ao navio apresentado na Figura 2.14. O **NAVSTAB**, nome dado ao programa criado por Alvarez e Martins (2005), pode ser aplicado a geometrias submersas quaisquer, desde que corretamente adaptado. No trabalho completo publicado pelos autores, o mesmo procedimento é aplicado também a uma plataforma, apresentando resultados muito bons.

3.1 Geração de Painéis Sobre uma Superfície de um Casco

Os painéis gerados sobre a superfície de um casco ficam justamente entre as linhas d'água e as balizas interpoladas através do método proposto no Capítulo 2. Desta maneira, facilmente constata-se que quanto mais linhas d'água e mais balizas, isto é, menor espaçamento entre elas, menor será o tamanho dos painéis e, conseqüentemente, melhor será a discretização da embarcação.

Figura 3.1: Painel criado com a linha d'água e a baliza interpoladas.

No exemplo da Figura 3.1 percebe-se que o painel gerado é formado pelos quatro pontos P_1 , P_2 , P_3 e P_4 e que também estes pertencem a outros painéis ao mesmo tempo. O formato que este painel assume depende da disposição destes pontos. Em geral, eles não definem um plano (exceto no corpo paralelo médio e fundo chato) devido às irregularidades dos cascos. Por esta razão, cada painel é dividido em dois triângulos, de modo a garantir que se trabalhe com painéis planos. A partir daí, calculam-se as propriedades hidrostáticas através de vetores.

Tomando como referência o painel mostrado na Figura 3.2, juntamente com o sistema de coordenadas apresentado nesta mesma figura, nota-se que a única forma do vetor normal ter sentido para fora do navio é impondo a ordem dos pontos deste painel conforme mostrado na Figura 3.3.

O motivo para que o sentido do vetor seja para fora da embarcação será mostrado na apresentação do cálculo vetorial utilizado.

Figura 3.2: Painel utilizado para o cálculo vetorial.

Figura 3.3: Ordenação dos pontos para que o vetor tenha sentido para fora da embarcação.

3.2 Propriedades Hidrostáticas de um Navio a Partir do Cálculo Vetorial

De acordo com a teoria de Arquimedes, é possível calcular as forças atuantes em um corpo submerso a partir da descrição de sua geometria.

Os cálculos das propriedades hidrostáticas em unidades flutuantes são feitos com base neste conceito. No entanto, há um sério empecilho: os cálculos baseados em uma geometria tridimensional podem se tornar tão complexos quanto mais complexa for a geometria. A seguir será exemplificado como determinar as características hidrostáticas de uma unidade flutuante a partir de sua geometria submersa, de modo a entender como o cálculo vetorial pode fornecer tais propriedades.

Imagine inicialmente um cubo de arestas unitárias e situado em relação ao sistema de coordenadas XYZ , como mostrado na Figura 3.4.

Imagine agora que em cada face deste cubo há um vetor perpendicular a mesma, cujo módulo é igual à área da face e com sentido para fora do cubo. Assim, fica fácil perceber que a soma dos módulos de cada um dos seis vetores das faces é igual à área total do cubo e que a soma vetorial é igual a zero. Cada face será tratada daqui em diante como painel.

Figura 3.4: Cubo utilizado para exemplificação do procedimento para determinação das características hidrostáticas a partir da geometria de um corpo.

Agora, imagine que sejam conhecidas as posições dos centros de cada uma dessas faces e que cada um dos vetores de módulo igual à área esteja posicionado exatamente sobre este ponto, conforme mostra a Figura 3.5.

Figura 3.5: Cubo utilizado para exemplificação do procedimento para determinação das características hidrostáticas a partir da geometria de um corpo (cubo com vetores-áreas sobre painéis).

Com base na álgebra linear, pode-se mostrar que sendo C_i a coordenada do centro de cada uma das faces em relação à origem O e A_i cada um dos vetores cujo módulo é a área da face do cubo (com $i = 1, \dots, 6$), o volume do paralelepípedo pode ser expresso por:

$$V = \frac{\left(\sum_{i=1}^6 A_i \cdot (C_i - O) \right)_X + \left(\sum_{i=1}^6 A_i \cdot (C_i - O) \right)_Y + \left(\sum_{i=1}^6 A_i \cdot (C_i - O) \right)_Z}{3} \quad (3.1)$$

Na verdade, o volume pode ser obtido unicamente por cada uma das três parcelas desta expressão. Objetivando-se reduzir as imprecisões numéricas, calcula-se o volume como sendo a média das três. Extrapolando-se o resultado para o caso de uma forma geométrica genérica (n faces ou n painéis), vê-se que o volume de um sólido facetado é:

$$V = \frac{\left(\sum_{i=1}^n A_i \cdot (C_i - O) \right)_X + \left(\sum_{i=1}^n A_i \cdot (C_i - O) \right)_Y + \left(\sum_{i=1}^n A_i \cdot (C_i - O) \right)_Z}{3} \quad (3.2)$$

Com o mesmo princípio apresentado nesta formulação para o cálculo do volume, podem-se encontrar as demais propriedades hidrostáticas de um corpo qualquer, conforme será mostrado adiante.

A necessidade de se utilizar o sentido do vetor normal para fora da embarcação consiste na utilização do sinal do vetor-área na formulação das propriedades hidrostáticas.

Ao gerar os painéis da embarcação, a origem do sistema de coordenadas é posicionada na linha d'água e a meia-nau. Para explicar o motivo do posicionamento do sistema de coordenadas, considere o exemplo do cubo apresentado anteriormente, mas agora com o sistema de referência modificado, segundo mostra a Figura 3.6.

Como a linha d'água é definida, passa-se a considerar para o cálculo somente a parte submersa (coordenada Z negativa). Desta maneira, os vetores que apontam para fora do corpo, e que têm seu módulo igual à área do painel (o vetor $\vec{v}$ da Figura 3.6 representa um destes vetores), passam a considerar também somente a parte submersa do corpo (painel $ABCD$), ficando posicionados no centro do painel (no exemplo, à mesma distância da base e da linha d'água) e com área igual a do painel submerso (painel $ABCD$).

Figura 3.6: Cubo com sistema de coordenadas posicionado na linha d'água.

Utilizando-se a mesma Equação (3.1) somente para o vetor $\vec{v}$ da Figura 3.6, nota-se que o volume referente à face que ele representa corresponde à metade do volume submerso. A outra metade do volume corresponde ao vetor normal ao painel oposto ao $ABCD$. Desta forma, fazendo o cálculo com os vetores normais a todas as faces, percebe-se que o volume do corpo foi calculado três vezes. Isto justifica a divisão por três na Equação (3.1).

Não há a necessidade de criação de painéis na linha d'água com vetor normal apontando no sentido positivo do eixo Z . O motivo para isso pode ser encontrado na própria Figura 3.6. O vetor que está no painel localizado na base do corpo já calcula todo o volume do mesmo até a linha d'água.

Este exemplo de cálculo do volume com o cubo pode ser extrapolado para uma embarcação qualquer. O princípio é o mesmo: adota-se o sistema de coordenadas na linha d'água e a meia-nau, constroem-se os painéis de acordo com o número de linhas d'água e balizas fornecidas ou interpoladas, encontram-se os vetores normais a eles e aplica-se a Equação (3.2).

Considere o painel da Figura 3.1. Antes de ser iniciado o cálculo das propriedades da embarcação, são encontradas algumas propriedades referentes ao

mesmo. Imagine as coordenadas para os quatro pontos do painel da Figura 3.1 (P_1 , P_2 , P_3 e P_4 , respectivamente), na mesma ordem dos pontos do painel da Figura 3.3:

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2), P_3 = (x_3, y_3, z_3) \text{ e } P_4 = (x_4, y_4, z_4) \quad (3.3)$$

$$\vec{v}_1 = P_2 - P_1, \vec{v}_2 = P_4 - P_1, \vec{v}_3 = P_4 - P_3 \text{ e } \vec{v}_4 = P_2 - P_3 \quad (3.4)$$

Com estes pontos, pode-se calcular a projeção da área nas três direções XYZ e a área do painel, pelas expressões:

$$\vec{A}(A^x, A^y, A^z) = \frac{(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) + (\vec{v}_3 \times \vec{v}_4)}{2} \quad (3.5)$$

$$|\vec{A}(A^x, A^y, A^z)| = \sqrt{(A^x)^2 + (A^y)^2 + (A^z)^2} \quad (3.6)$$

Para o cálculo da Equação (3.5) consideram-se dois painéis triangulares, garantindo-se que ambos sejam planos.

Também é possível, através do cálculo vetorial, encontrar a distância ($C_i - O$) entre o centro do painel e a origem do sistema de coordenadas, definindo, assim, as propriedades de cada painel que serão utilizadas.

De posse da Equação (3.6), pode-se encontrar a área da superfície molhada, bastando para isso somar o módulo das áreas de todos os painéis, ou ainda:

$$S_w = \sum_{i=0}^n |\vec{A}(A^x, A^y, A^z)| \quad (3.7)$$

Somando-se todas as projeções das áreas dos painéis no plano XY, pode-se obter a área do plano da linha d'água, ou:

$$A_{WL} = \sum_{i=0}^n -\vec{A}_i^z \quad (3.8)$$

onde $\vec{A}_i^z$ é a coordenada z do vetor $\vec{A}_i$.

O sinal negativo que aparece na expressão serve para apresentar a área com valor positivo, uma vez que os vetores normais aos painéis submersos têm, em geral, sinal negativo em Z . Isto torna possível utilizar o cálculo vetorial para navios que apresentem bulbos ou outros tipos de saliências.

Para o cálculo do LCF , é necessário somente calcular o ponto no plano de flutuação onde a área a ré deste é igual à área avante. Para isso, basta utilizar a expressão:

$$LCF = \frac{\sum_{i=0}^n -A_i^z \cdot C_i^X}{\sum_{i=0}^n -A_i^z} \quad (3.9)$$

onde C_i^X é a coordenada x do ponto C_i .

Analogamente, o TCF pode ser obtido por:

$$TCF = \frac{\sum_{i=0}^n -A_i^z \cdot C_i^Y}{\sum_{i=0}^n -A_i^z} \quad (3.10)$$

onde C_i^Y é a coordenada y do ponto C_i .

Repare que para embarcações simétricas em relação ao eixo longitudinal (eixo X) o valor do TCF deve ser nulo. De posse destas duas propriedades, pode-se agora calcular os momentos de inércia longitudinal e transversal da área do plano de flutuação. A dedução do momento de inércia próprio de cada painel (I_L^i e I_T^i) pode ser encontrada em Alvarez e Martins (2005). Assim, as expressões ficam:

$$I_L = \sum_{i=1}^n \left(-\vec{A}_i^z \cdot \left(\vec{C}_i^X - TCF \right)^2 \right) + I_L^i \quad (3.11)$$

$$I_T = \sum_{i=1}^n \left(-\vec{A}_i^z \cdot \left(\vec{C}_i^Y - LCF \right)^2 \right) + I_T^i \quad (3.12)$$

Outra propriedade bastante importante é a posição do centro de carena. Como o centro de carena está localizado no centro geométrico da parte submersa da unidade flutuante, suas coordenadas podem ser obtidas por (em relação a cada eixo):

$$LCB = C_B^X = \frac{\sum_{i=1}^n \left[\left(\vec{A}_i^X * \vec{C}_i^X \right) * \frac{\vec{C}_i^X}{2} \right]}{V} \quad (3.13)$$

$$TCB = C_B^Y = \frac{\sum_{i=1}^n \left[(\vec{A}_i^Y * \vec{C}_i^Y) * \frac{\vec{C}_i^Y}{2} \right]}{V} \quad (3.14)$$

$$KB = C_B^Z = \frac{\sum_{i=1}^n \left[(\vec{A}_i^Z * \vec{C}_i^Z) * \frac{\vec{C}_i^Z}{2} \right]}{V} \quad (3.15)$$

onde V é o volume do corpo submerso, calculado pela Equação (3.2), e $\vec{C}_i^Z$ é a coordenada z do vetor $\vec{C}_i$.

Por último, podem-se obter, a partir das propriedades já calculadas, o BM longitudinal e transversal, respectivamente, pelas expressões:

$$BM_L = \frac{I_L}{V} \quad (3.16)$$

$$BM_T = \frac{I_T}{V} \quad (3.17)$$

Com todas as expressões, e para uma série de calados, pode-se construir as curvas hidrostáticas de uma embarcação, como realizados em Maturana e Martins (2006).

3.3 Resultados das Propriedades Hidrostáticas para um Navio Conhecido (Versluis, 1977)

Considere a mesma embarcação da Figura 2.14, tomada como referência neste trabalho. Gerando-se painéis para o casco interpolado (Figura 2.19 com 150 balizas e linhas d'água) podem-se comparar os resultados obtidos com o procedimento descrito nos itens anteriores com os apresentados por Versluis (1977). A Tabela 3.1 mostra a comparação.

Verifica-se na comparação que os resultados obtidos a partir do **NAVSTAB** são muito pouco afetados ainda que utilizando o método de interpolação descrito e também desconhecendo algumas informações de cotas sobre a superfície do casco. As maiores variações são da ordem de 2%. Em Alvarez e Martins (2005) são feitos outros testes para geometrias distintas, como chatas, outros petroleiros e até mesmo plataformas. Independentemente da forma, os resultados são muito próximos dos

valores reais, mantendo a mesma ordem de desvio apresentada para o exemplo mostrado neste trabalho.

Tabela 3.1: Propriedades hidrostáticas do casco de referência deste trabalho (Figura 2.14) calculadas a partir do cálculo vetorial, comparadas com a referência de Versluis (1977).

	LCB (m) ¹⁴			KB (m)			LCF (m) ¹⁴		
Calado	Referência	Calculado	Desvio	Referência	Calculado	Desvio	Referência	Calculado	Desvio
1.05 m	5.13	5.08	0.03%	0.54	0.54	0.00%	4.908	4.790	0.07%
2.10 m	4.94	4.83	0.06%	1.09	1.09	0.00%	4.643	4.450	0.11%
3.15 m	4.78	4.63	0.08%	1.64	1.64	0.00%	4.313	4.090	0.12%
4.20 m	4.60	4.43	0.09%	2.18	2.18	0.00%	3.920	3.670	0.14%
5.25 m	4.41	4.22	0.11%	2.73	2.73	0.00%	3.458	3.210	0.14%
6.30 m	4.19	4.00	0.11%	3.28	3.27	0.30%	2.881	2.790	0.05%
7.35 m	3.93	3.75	0.10%	3.83	3.82	0.26%	2.166	1.910	0.14%
8.40 m	3.63	3.44	0.11%	4.38	4.37	0.23%	1.276	0.990	0.16%
9.45 m	3.29	3.07	0.12%	4.93	4.92	0.20%	0.355	-0.020	0.21%
10.50 m	2.92	2.71	0.12%	5.49	5.48	0.18%	-0.359	-0.270	0.05%
12.60 m	2.24	2.05	0.11%	6.62	6.61	0.15%	-1.170	-1.200	0.02%
14.70 m	1.67	1.51	0.09%	7.75	7.73	0.26%	-1.323	-1.330	0.01%
16.80 m	1.28	1.14	0.08%	8.88	8.86	0.23%	-0.928	-0.940	0.01%
	BM _L (m)			BM _T (m)			Volume (m ³)		
Calado	Referência	Calculado	Desvio	Referência	Calculado	Desvio	Referência	Calculado	Desvio
1.05 m	1448.53	1467.42	1.30%	52.37	52.29	0.15%	3270.7	3233.29	1.14%
2.10 m	779.84	786.26	0.82%	27.46	27.57	0.40%	6912.4	6842.76	1.01%
3.15 m	544.88	545.82	0.17%	18.63	18.70	0.38%	10711.4	10611.8	0.93%
4.20 m	423.55	422.84	0.17%	14.14	14.20	0.42%	14616.1	14482.4	0.91%
5.25 m	349.71	347.94	0.51%	11.42	11.48	0.53%	18603.4	18433.9	0.91%
6.30 m	301.13	297.03	1.36%	9.60	9.62	0.21%	22664.7	22452.3	0.94%
7.35 m	267.76	267.04	0.27%	8.30	8.31	0.12%	26798.3	26539.8	0.96%
8.40 m	244.56	243.44	0.46%	7.32	7.36	0.55%	31008.7	30704.0	0.98%
9.45 m	227.14	226.61	0.23%	6.56	6.62	0.91%	35300.9	34956.6	0.98%
10.50 m	211.84	215.09	1.53%	5.96	6.01	0.84%	39670.7	39294.1	0.95%
12.60 m	187.67	191.87	2.24%	5.06	5.11	0.99%	48621.4	48209.1	0.85%
14.70 m	169.26	172.88	2.14%	4.42	4.46	0.90%	57826.7	57386.3	0.76%
16.80 m	154.34	157.69	2.17%	3.93	3.98	1.27%	67256.9	66793.1	0.69%
	I _L (m ⁴)			I _T (m ⁴)			Área do plano de flutuação (m ²)		
Calado	Referência	Calculado	Desvio	Referência	Calculado	Desvio	Referência	Calculado	Desvio
1.05 m	4737623	4744582	0.15%	171284	16903	1.29%	3352.5	3323.2	0.89%
2.10 m	5390587	5380185	0.19%	189843	18863	0.64%	3555.6	3530.3	0.72%
3.15 m	5836355	5792188	0.76%	199585	19844	0.57%	3673.1	3642.2	0.84%
4.20 m	6190628	6123800	1.08%	206687	20569	0.48%	3760.4	3727.2	0.87%
5.25 m	6505929	6413889	1.41%	212498	21155	0.45%	3833.7	3797.5	0.95%
6.30 m	6825017	6668912	2.29%	217519	21598	0.71%	3902.1	3854.9	1.21%

¹⁴ Os desvios de *LCB* e *LCF* foram calculados com base no comprimento total da embarcação.

	$I_L \text{ (m}^4\text{)}$			$I_T \text{ (m}^4\text{)}$			Área do plano de flutuação (m ²)		
Calado	Referência	Calculado	Desvio	Referência	Calculado	Desvio	Referência	Calculado	Desvio
7.35 m	7175495	7087299	1.23%	222298	22043	0.84%	3972.2	3929.4	1.07%
8.40 m	7583530	7474687	1.44%	226937	22590	0.46%	4048.0	4006.2	1.03%
9.45 m	8018312	7921580	1.21%	231731	23141	0.14%	4126.0	4088.1	0.92%
10.50 m	8403823	8451738	0.57%	236587	23630	0.12%	4196.4	4172.3	0.56%
12.60 m	9124958	9249865	1.37%	246187	24638	0.08%	4325.0	4310.3	0.34%
14.70 m	9787807	9920848	1.36%	255523	25594	0.16%	4439.6	4427.2	0.29%
16.80 m	1038026	1053231	1.46%	264354	26574	0.52%	4539.2	4532.7	0.14%
	Área molhada (m ²)								
Calado	Referência		Calculado		Desvio				
1.05 m	3471.8		3463.7		0.23%				
2.10 m	3903.5		3892.5		0.28%				
3.15 m	4295.9		4281.3		0.34%				
4.20 m	4675.5		4659.9		0.33%				
5.25 m	5050.8		5035.3		0.31%				
6.30 m	5431.3		5408.7		0.42%				
7.35 m	5819.7		5806.4		0.23%				
8.40 m	6214.8		6202.3		0.20%				
9.45 m	6613.3		6609.3		0.06%				
10.50 m	7007.0		7033.0		0.37%				
12.60 m	7792.6		7857.0		0.83%				
14.70 m	8571.6		8675.4		1.21%				
16.80 m	9346.7		9498.3		1.62%				

Verifica-se na comparação que os resultados obtidos a partir do **NAVSTAB** são muito pouco afetados, ainda que utilizando o método de interpolação descrito e também desconhecendo algumas informações de cotas sobre a superfície do casco. As maiores variações são da ordem de 2%. Em Alvarez e Martins (2005) são feitos outros testes para geometrias distintas, como chatas, outros petroleiros e até mesmo plataformas. Independentemente da forma, os resultados são muito próximos dos valores reais, mantendo a mesma ordem de desvio apresentada para o exemplo mostrado neste trabalho.

Como estas propriedades estão diretamente ligadas à geometria, elas garantem que o processo de modelagem estabelecido tem boa aplicabilidade e não comprometem a forma do casco.

A forma gráfica é a maneira mais comum de se apresentar as propriedades hidrostáticas. O Gráfico 3.1 apresenta estes valores.

Gráfico 3.1: Propriedades hidrostáticas do casco de referência deste trabalho (Figura 2.14) interpolado por curvas *B-Splines* cúbicas de superfície.

4 Estimativa da Resistência ao Avanço

Uma das propriedades muito importante de uma embarcação é a sua resistência ao avanço. Isso porque ela está diretamente ligada à potência que deverá ser fornecida pelo motor ao navio para que este navegue com a velocidade de cruzeiro prevista em seu projeto. Como consequência, a resistência imposta pela forma do casco é um fator que está diretamente relacionado ao custo da embarcação. Existem diferentes formas do casco que podem atender as restrições impostas por legislação e pelo armador, porém, a que apresentar menor resistência ao avanço terá grande vantagem na seleção.

Existem vários métodos para cálculo da resistência ao avanço, desde predições analíticas como visto em De Conti (2004), Holtrop (1977, 1984), Michell (1898), até programas comerciais específicos como o **AUTOPOWER**^{®15}, **WOLFSON UNIT**^{®16} e o **MAXSURF**^{®17}, os quais obviamente também fazem uso de métodos analíticos. Outra maneira de se obter uma estimativa da resistência ao avanço é através de séries sistemáticas. Tais séries são construídas a partir de ensaios feitos com modelos em escala reduzida para específicas classes de embarcação. Dependendo de sua forma, deve-se procurar por séries que atendam a sua respectiva geometria. Para veleiros, por exemplo, existem séries específicas como apresentado em Gerritsma; Keuning e Onnink (1981). Já para embarcações de deslocamento, séries como a 60 (Todd, 1953) ou de Taylor (Morton, 1954) podem ser consideradas para uma estimativa preliminar.

Neste trabalho, o foco está em navios de deslocamento. Logo, as análises e os métodos aqui adotados devem ser compatíveis a este tipo de forma. Além disso, vale ressaltar que se está partindo de cascos cujas cotas são previamente conhecidas. Isto faz com que os métodos estatísticos não sejam aprofundados nesta dissertação, uma vez que estes trabalham basicamente com parâmetros gerais do

¹⁵ O **AUTOPOWER**® é um programa desenvolvido por *Autoship Systems Corporation*. Mais informações em www.autoship.com.

¹⁶ O **WOLFSON UNIT**® é um programa desenvolvido pela *University of South Hampton*, Londres. Mais informações em www.wumtia.soton.ac.uk/brochures/RandPBrochure.pdf.

¹⁷ O **MAXSURF**® é um programa desenvolvido pela *Formation Design Systems*. Mais informações em www.formsys.com.

navio como o coeficiente de bloco (C_b), coeficiente prismático (C_p), B/L , entre outros, como sendo as incógnitas das equações de regressão.

Assim, o esforço empregado neste trabalho para discretizar a geometria do casco através de curvas *B-Splines* requer um método condizente ou, em outras palavras, que garanta uma análise da geometria com base nas cotas da embarcação e não em seus coeficientes de forma unicamente.

Por ser um método que incorpora em sua formulação a geometria do casco através de suas cotas e também por ser extremamente difundido e aplicado (por exemplo no **MAXSURF**®), utilizar-se-á neste trabalho para estimativa da resistência ao avanço o método desenvolvido por Michell (1898). Tal método foi posteriormente retomado por Havelock (1923, 1925a, 1925b, 1943-1944, 1951), Wigley (1926, 1927, 1930, 1934, 1942), Weinblum (1934), Lunde (1949) e Shearer (1951) após muitos anos esquecido.

Neste capítulo, serão revisados alguns conceitos básicos relacionados à resistência ao avanço de um navio e hipóteses que são assumidas para o seu cálculo dentro da implementação feita. Como parte deste conceito, a parcela da resistência correspondente à geração de ondas receberá destaque, dado que sua implementação computacional requer alguns cuidados adicionais, especialmente por levar em conta a teoria do “navio fino” de Michell.

Além da validação do resultado com algumas embarcações como chatas, petroleiros e navios da série de Taylor, será efetuado um estudo de sensibilidade quanto aos resultados obtidos para a resistência de acordo com a variação de dois fatores: discretização do casco e discretização do ângulo de propagação da onda gerada θ , cuja definição será apresentada mais adiante. Este estudo é muito importante ser executado previamente ao processo de otimização, pois os parâmetros que serão variados têm influência direta no resultado da resistência ao avanço e influi no tempo de processamento computacional do método de otimização.

O cálculo da resistência é de suma importância para o processo de otimização a ser apresentado no Capítulo 6.

4.1 Cálculo da Resistência Total (R_t)

Basicamente, os métodos analíticos (Cf. Rawson e Tupper, 1984) consideram que a resistência total R_t de um navio é composta por duas parcelas: residual (R_r) e atrito (R_f). Uma primeira aproximação para a parcela residual pode ser obtida considerando-se somente a resistência devido à geração de ondas (R_w). A adoção desta hipótese gera algumas distorções nos resultados, o que poderá ser verificado mais adiante neste capítulo, quando serão realizados alguns testes, dado que se está desprezando a interferência do efeito da viscosidade do fluido em R_w . No entanto, faz-se necessária esta simplificação de modo a facilitar o cálculo da resistência total, conforme será estudado neste capítulo.

Logo, pode-se modelar simplificadamente a resistência total de um casco por:

$$R_t = R_w + R_f \quad (4.1)$$

Para embasar esta consideração, leva-se em conta a hipótese adotada por Froude, explanada em Lewis (1988) e Gammon (1990). Tal hipótese considera válida a divisão da resistência em duas componentes: uma relativa à parcela de atrito (R_f), gerada pela viscosidade do fluido; e outra relativa à energia transferida ao sistema de ondas gerado na superfície da água (R_w). Em seu experimento, Froude considera estes dois termos de forma independente, sendo que a parcela R_f pode ser obtida através de experimentos com placas planas de mesmo comprimento e superfície molhada que o modelo.

Froude formulou empiricamente a resistência destas placas planas em função de sua velocidade v_0 e de sua superfície molhada S . Lewis (1988) conduz uma análise dimensional que resulta em uma expressão em função destas duas variáveis e também de um coeficiente C_f , dada por:

$$R_f = \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot v_0^2 \cdot C_f \quad (4.2)$$

onde ρ é a densidade da água. Para estimativa do coeficiente de atrito C_f de uma placa plana em função do número de Reynolds Re do escoamento do fluido, foi proposto pela ITTC em 1957 uma regressão dada por:

$$C_f = \frac{0,075}{[\log(Re) - 2]^2} \quad (4.3)$$

$$Re = \frac{v_0 L_{WL}}{\nu} \quad (4.4)$$

onde L_{WL} é o comprimento da embarcação na linha d'água de projeto e ν a viscosidade cinemática da água.

Já a resistência devido à geração de ondas, como já justificado anteriormente, será calculada a partir do método desenvolvido por Michell (1898).

Sabe-se, no entanto, que a resistência total de um navio não é composta unicamente por estas duas parcelas. Lewis (1988) comenta que existem ainda termos relacionados à resistência ao ar e apêndices. Holtrop (1977), em sua formulação, adiciona também termos específicos relacionados à existência de bulbo de proa e popa, além de um fator adicional quando da existência de popa transom. Estas parcelas, no entanto, não serão alvo de estudo deste trabalho.

Apesar do efeito da popa transom na resistência total não estar incluída no escopo deste estudo, durante a explanação do método de Michell (1898), far-se-á uma análise para cascos que possuam este tipo de popa e como estes podem ser abordados.

4.2 Método de Michell ou do “Navio-Fino”

No desenvolvimento de seu método, Michell (1898) considerou algumas hipóteses básicas, a saber:

- A altura da onda é pequena quando comparada ao seu comprimento. Desta forma, o movimento das partículas da água é tão pequeno em relação à velocidade de avanço do navio que as derivadas de segunda ordem da velocidade podem ser desprezadas;
- Os efeitos de trim e banda são pequenos o suficiente para não afetar o movimento das ondas substancialmente;

- Os ângulos entre a superfície do casco e o plano de simetria longitudinal do navio são pequenos em todos os pontos desta superfície (consideração de cascos finos, ou ainda, cascos cuja relação comprimento-boca é grande);
- A embarcação está em velocidade constante;
- O fluido é não-viscoso e irrotacional, o que permite especificar um potencial de velocidades ϕ ;
- As condições de superfície livre devem satisfazer as condições de águas calmas (em todos os pontos da superfície do casco, a velocidade normal relativa a ele deve ser nula e a pressão na superfície da água deve ser igual à atmosférica);
- As condições de contorno a serem satisfeitas para a superfície do casco são assumidas como estando sobre o plano transversal a meia-nau (seção média) e apenas a componente da velocidade perpendicular a este plano é considerada (associada à condição do item anterior).

Esta teoria tem sido bastante estudada no que se refere a sua aplicabilidade. Encontram-se na literatura muitos experimentos atestando sua acuracidade, como apresentado por Havelock (1923, 1925a, 1925b, 1943-1944, 1951) em muitos de seus trabalhos.

Em Michelsen (1960), são apresentadas duas questões importantes quanto ao método: será ele válido e preciso a fim de ser aplicado na prática? Em termos de processamento e cálculo computacional, seria o método viável?

No que se refere à primeira questão, Michelsen comenta que em termos quantitativos a teoria não apresenta resultados muito precisos, ressaltando que grande parte da diferença entre os resultados obtidos pela teoria e os verificados na prática está associada a não consideração dos efeitos viscosos. O autor ainda justifica que em um fluido viscoso a amplitude das ondas diminui conforme esta se propaga e que devido à presença da camada limite, as ondas geradas têm formas distintas das ondas que seriam criadas somente pela forma do navio. Além disso,

em sua popa, ondas livres se propagam com velocidade de avanço menor que a da esteira. Sendo assim, os comprimentos de onda são reduzidos em alguma escala em relação aos valores considerados pela teoria.

Em relação à segunda pergunta, Michelsen comenta que o trabalho que desenvolveu visa justamente reduzir o tempo de cálculo das integrais envolvidas, visto que à época de sua pesquisa não dispunha da tecnologia atual. Desta forma, apenas cascos com geometria simples podiam ser avaliados.

Para consideração do cálculo da resistência por Michell (1898), considere o casco e o sistema de coordenadas apresentados na Figura 4.1, onde θ é o ângulo de propagação da onda gerada e v_0 é a velocidade da embarcação.

Figura 4.1: Casco e sistema de coordenadas definido para integral de Michell.

Em sua forma mais genérica, a expressão para cálculo da resistência devido a ondas por Michell pode ser expressa da seguinte forma (Nowacki; Bloor; Oleksiewicz, 1995):

$$R_w = \frac{4 \cdot \rho \cdot g^2}{\pi \cdot v_0^2} \int_0^{\pi/2} (H_s^2 + H_c^2) \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \quad (4.5)$$

em que:

$$H_s = \iint_{\Omega} \frac{\partial \zeta(x, z)}{\partial x} \cdot e^{\left(\frac{g \cdot z}{v_0^2 \cdot \cos^2 \theta} \right)} \cdot \sin \left(\frac{g \cdot x}{v_0^2 \cdot \cos \theta} \right) d\Omega \quad (4.6)$$

$$H_c = \iint_{\Omega} \frac{\partial \zeta(x, z)}{\partial x} \cdot e^{\left(\frac{g \cdot z}{v_0^2 \cdot \cos^2 \theta} \right)} \cdot \cos \left(\frac{g \cdot x}{v_0^2 \cdot \cos \theta} \right) d\Omega \quad (4.7)$$

onde $\frac{\partial \zeta(x, z)}{\partial x}$ é a derivada no ponto $(x, |\zeta(x, z)|, z)$ em relação ao eixo longitudinal

X , θ é o ângulo que as ondas generalizadas formam com o eixo longitudinal da embarcação, g é a aceleração da gravidade e Ω é uma superfície plana definida em $\mathbb{R}^2$ que contém o plano de simetria XOZ onde a função ζ está definida.

Para dedução desta expressão, pode-se consultar o Apêndice C. É interessante neste momento fazer uma análise mais detalhada desta equação. Michelsen (1960) comenta em seu trabalho que, quando $H_c = 0$, a embarcação é simétrica em relação ao eixo Y . Assim, não haveria diferença em calcular sua resistência quando ela se movimenta no sentido positivo ou negativo do eixo X . Isto ocorre porque o referencial para este eixo está situado a meia-nau. Como $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$, $H_c = 0$.

Note ainda que para um casco de deslocamento, o termo $\frac{\partial \zeta(x, z)}{\partial x}$ é nulo em seu corpo paralelo médio. Logo, segundo a expressão de Michell (Equação (4.5)), o corpo paralelo médio não contribui para a resistência devido à geração de ondas. De fato, a parcela da resistência ao avanço relativa a esta porção do casco está associada a efeitos viscosos e refere-se à parcela do atrito entre o fluido e o casco. Em Lewis (1988) é feita uma análise justamente dos pontos da embarcação onde ocorre a formação de ondas e, portanto, associados à parcela da resistência ao avanço que é devido à geração de ondas. São eles: proa, popa, curvatura da proa e curvatura da popa. O corpo paralelo médio não é responsável pela formação de

ondas. No entanto, quanto maior seu comprimento, menor o impacto das ondas geradas pela proa na popa do navio (Lewis, 1988).

Verifica-se ainda que, durante a implementação numérica, a integral da Equação (4.5) não está definida para $\pi/2$, embora varie de zero até este valor. Na seção 4.3 deste capítulo será visto como adotar a divisão de θ de tal maneira a reduzir este efeito.

Neste presente trabalho, consideram-se apenas embarcações que não possuam popa transom. Sabe-se ainda que esta forma insere novos fatores nas formulações que incrementam a estimativa da resistência total, como pode ser consultado na expressão de Holtrop (1977). No caso do método de Michell (1898) isto também ocorre. Em Gammon (1990), o autor faz uma análise de como se pode adaptar a formulação de Michell para estas geometrias. É sabido que a parte submersa do navio deve ser fechada para atender ao escoamento potencial. No entanto, verifica-se que a derivada na popa transom torna-se infinita, impossibilitando o cálculo completo da resistência.

Gammon (1990) propõe que se faça a integral mostrada na Equação (4.6) e (4.7) em duas parcelas distintas. Uma sobre a área da popa transom (S_t) e outra sobre a área do casco (S_c). Como o escoamento ao redor do casco deve ser mantido constante, pois a superfície é fechada, Gammon (1990) afirma que:

$$\iint_{\Omega} \sigma(x, y, z) d\Omega = 0 \quad (4.8)$$

onde $\sigma(x, y, z) = \frac{-v_0}{2\pi} \left[\frac{\partial \zeta(x, z)}{\partial x} \right]$ é a magnitude da fonte¹⁸ no ponto (x, y, z) . Esta integral representa que a soma da magnitude de todas as fontes e sorvedouros é nula, pois não há perda ou ganho de escoamento.

Assim, para que a Equação (4.5) seja verdadeira:

$$\iint_{\Omega_t} \sigma_t(x_0, y, z) d\Omega_t = \frac{v_0}{2\pi} \iint_{\Omega_c} \left[\frac{\partial \zeta(x, z)}{\partial x} \right] d\Omega_c \quad (4.9)$$

¹⁸ Uma fonte pode ser considerada como um ponto em um fluido onde este é constantemente inserido e um sorvedouro é justamente o contrário, ou seja, onde o fluido é constantemente absorvido.

Neste momento, assume-se que a densidade média da magnitude da fonte ($\sigma_t(x_0, y, z)$) na popa transom ao longo da boca em cada linha d'água seja mantida constante, garantindo a veracidade da Equação (4.5).

Outra possível solução seria rotacionar o casco em relação ao eixo coordenado, garantindo que a derivada não seja infinita na popa transom.

4.3 Implementação Computacional do Método de Michell

A implementação numérica do método de Michell (1898) é possível hoje graças ao avanço da tecnologia que permite que os cálculos sejam mais rapidamente efetuados. Em trabalhos publicados na metade do século passado, tinha-se uma análise mais qualitativa e as formas dos cascos eram simplificadas. Novamente em Michelsen (1960), é apresentado o desenvolvimento da tripla integral de Michell para um navio descrito por um polinômio. Isto facilitou a obtenção de resultados e permitiu uma análise mais quantitativa à época.

Atualmente, dispondo de métodos e ferramentas de cálculo mais modernos, pode-se analisar melhor os resultados da Equação (4.5). Enfatiza-se que neste momento serão abordados aspectos referentes à implementação do método de Michell. Sua avaliação será apresentada no próximo subitem, seguida da apresentação das curvas de resistência ao avanço e coeficientes de resistência, ambas para o casco tomado como exemplo neste trabalho e obtido a partir de Versluis (1977).

Uma proposta para resolver estas integrais foi apresentada por Tuck (1997), consistindo de três etapas:

- Calcular para todas as balizas x e valores de θ (direção de propagação da onda), de 0 a $\pi/2$, a integral:

$$F(x, \theta) = \int \frac{\partial \zeta(x, z)}{\partial x} e^{(\kappa \cdot z \cdot \sec^2 \theta)} dz, \text{ onde } \kappa = \frac{g}{v_0^2}, \text{ com a integral em } Z$$

variando da linha d'água mais baixa até a linha d'água de projeto;

- Em seguida, calcula-se $P(\theta) = \int F(x, \theta) \cos(\kappa \cdot x \cdot \sec \theta) dx$ e $Q(\theta) = \int F(x, \theta) \sin(\kappa \cdot x \cdot \sec \theta) dx$;

- Por último, calcula-se a resistência a ondas dada por:

$$R_w = \frac{4 \cdot \rho \cdot g^4}{\pi \cdot v_0^6} \int_0^{\pi/2} (P^2 + Q^2) \sec^5 \theta \cdot d\theta.$$

No entanto, nesta primeira tentativa, continua-se com a necessidade de avaliar as três integrais (considerando que as integrais do passo número 2 sejam calculadas dentro de um mesmo processo, dado a sua semelhança). Outra alternativa proposta em Nowacki; Bloor e Oleksiewickz (1995) é aproximar a primeira integral em θ por um somatório. As outras duas integrais podem também ser substituídas por somatórios (aplicação de quadraturas), mas seu tempo de processamento e de implementação aumentarão significativamente e seu desenvolvimento pode ser encontrado em Nowacki; Bloor e Oleksiewickz (1995).

Estes autores propõem que a integral em θ seja calculada por:

$$R_w = \frac{2 \cdot \rho \cdot g^2}{n \cdot v_0^2} \sum_{l=1}^n (H_s^2 + H_c^2) \cdot \sec^3 \theta_l \quad (4.10)$$

onde $n-1$ é igual ao número de trechos que será dividido o intervalo de 0 a $\pi/2$ e $\theta_l = \left(\frac{2l-1}{4n} \right) \pi$ e $l = 1, 2, \dots, n$. Para o cálculo de H_s e H_c , pode-se utilizar o método de integração de Simpson, facilmente encontrado na literatura. Tuck; Scullen e Lazauskas (2002) comentam, por outro lado, que a utilização do método de quadratura por Filon (1929) é mais preciso que este quando $|\theta| \rightarrow \pi/2$.

O procedimento utilizado para cálculo da resistência ao avanço contempla o proposto por Nowacki; Bloor e Oleksiewickz (1995) quanto ao cálculo da integral em relação a θ . Para as integrais internas, utilizou-se o método de Simpson.

4.3.1 Validação da Implementação do Método de Michell

Segundo Lewis (1988), o coeficiente C_w de resistência devido à geração de ondas pode ser dado por:

$$C_w = \frac{R_w}{\frac{1}{2} \rho \cdot S_w \cdot v_0^2} \quad (4.11)$$

Para validação da implementação do cálculo da resistência devido à geração de ondas (R_w) por Michell e de seu coeficiente C_w foram feitas simulações com quatro cascos. Para todos eles, os resultados obtidos pela equação de Michell foram comparados com os resultados obtidos a partir da regressão de Holtrop (1984)¹⁹ e também com os obtidos experimentalmente pela série de Taylor (Morton, 1954). Retomando o que foi comentando no início deste trabalho, os cascos em estudo são de deslocamento e possuem um corpo paralelo médio. Conseqüentemente, têm um alto valor para o coeficiente de seção mestra (C_M), definido pela relação entre a área submersa da seção a meia-nau e o produto de sua boca e calado. A série de Taylor aplica-se aos cascos analisados, uma vez que suas formas são próximas as estudadas por Morton (1954). Os valores experimentais encontrados nesta bibliografia não contemplam exatamente as mesmas relações de boca-calado e outros índices adotados pela série que as simulações realizadas. Nestes casos, aproximou-se pelas relações mais próximas de forma a minimizar estas diferenças.

O primeiro teste foi feito com uma embarcação bastante simples do tipo chata, cuja forma está apresentada na Figura 4.2. Suas características geométricas encontram-se resumidas na Tabela 4.1. Para todos os testes que serão apresentados nesta seção, discretizou-se o casco em 100 linhas d'água e balizas e 100 intervalos para o ângulo θ . Neste momento a preocupação não está no tempo computacional para o cálculo da resistência. Mais adiante será feita uma análise de sensibilidade com a variação da quantidade intervalos para o θ e da quantidade de balizas e linhas d'água, com o objetivo de obter resultados acurados e no menor tempo possível, dada a necessidade de otimização e múltiplas avaliações do valor da resistência ao avanço.

Figura 4.2: Vista superior do casco da primeira chata utilizado para validação do cálculo de resistência devido à geração de ondas por Michell.

¹⁹ Para o método de Holtrop, foi utilizado um programa desenvolvido por Parsons, M. G., 1996, e disponível em http://www-personal.engin.umich.edu/~parsons/470web/software_manuals.htm. Não foi desenvolvida a formulação deste método em um programa, pois como já comentado, este método não é usado como objetivo final do trabalho, mas como uma referência apenas.

Repare que a chata é simétrica em relação ao centro do navio e que também possui um corpo paralelo médio relativamente pequeno quando comparado ao seu comprimento total, resultando em pequenos valores para os coeficientes de bloco, prismático e de linha d'água (C_b , C_p e C_{wp}) respectivamente. Estes coeficientes são definidos por:

$$C_b = \frac{V_{submerso}}{L_{WL} \cdot B_{WL} \cdot H} \quad (4.12)$$

$$C_p = \frac{V_{submerso}}{A_\phi \cdot L_{WL}} \quad (4.13)$$

$$C_{wp} = \frac{V_{submerso}}{A_{WL} \cdot H} \quad (4.14)$$

onde $V_{submerso}$ é o volume deslocado, L_{WL} e B_{WL} são comprimento e boca do navio na linha d'água, respectivamente, H é o calado, A_ϕ é a área da seção média e A_{WL} é a área do plano de linha d'água. A relação L_T/B_T da embarcação é igual a 14.8.

Tabela 4.1: Dimensões principais da primeira chata.

Comprimento (L_T)	148.00 m	Calado (H)	4.00 m
Comprimento na linha d'água (L_{WL})	148.00 m	S_w	2206 m ²
Boca (B_T)	10.00 m	$V_{submerso}$	3120 m ³
Boca na linha d'água (B_{WL})	10.00 m	C_p	0.56
Comprimento do corpo paralelo médio	18.00 m	C_b	0.56
Quantidade de intervalos em θ	100	C_{wp}	0.56
Quantidade de balizas e linhas d'água	105	C_M	1.00
Faixa de variação da velocidade	5 a 30 m/s		

O Gráfico 4.1 mostra os resultados do coeficiente C_w para a resistência devido à geração de ondas, obtidos para esta chata pelos métodos de Holtrop, Michell e a série de Taylor.

Pode-se notar que o resultado encontrado pelo método de Michell, quando comparado à série sistemática de Taylor, apresenta valores muito próximos a este último. Já por Holtrop, encontra-se alguma diferença, ainda que tenha uma mesma tendência. Deve-se lembrar, no entanto, que este último não somente leva em conta a parte referente a ondas, mas também uma parcela gerada devido à viscosidade da

água. Em outras palavras, leva em conta o coeficiente da resistência residual C_r e não C_w . Isto explica um pouco desta divergência encontrada. Outro agravante está em aplicar-se o método de Holtrop a uma embarcação do tipo chata.

Gráfico 4.1: Curva do coeficiente C_w para a primeira chata, através dos métodos de Holtrop, Michell e série de Taylor, em relação ao número de Froude.

Buscando-se entender um pouco melhor a influência do corpo paralelo médio no cálculo da resistência a ondas, resolveu-se manter as mesmas dimensões da primeira chata, mas agora com comprimento do corpo paralelo médio de 98 m. A Figura 4.3 mostra a vista superior da embarcação.

Figura 4.3: Vista superior do casco da segunda chata utilizado para validação do cálculo de resistência devido à geração de ondas por Michell.

A Tabela 4.2 apresenta resumidamente as dimensões desta embarcação.

Tabela 4.2: Dimensões principais da segunda chata.

Comprimento (L_T)	148.00 m	Calado (H)	4.00 m
Comprimento na linha d'água (L_{WL})	148.00 m	S_W	2445 m ²
Boca (B_T)	10.00 m	$V_{submerso}$	4920 m ³
Boca na linha d'água (B_{WL})	10.00 m	C_p	0.83
Comprimento do corpo paralelo médio	98.00 m	C_b	0.83
Quantidade de intervalos em θ	100	C_{wp}	0.83
Quantidade de balizas e linhas d'água	105	C_M	1.00
Faixa de variação da velocidade	5 a 40 m/s		

Os resultados para esta segunda chata estão apresentados no Gráfico 4.2.

Gráfico 4.2: Curva do coeficiente C_w para a segunda chata, através dos métodos de Holtrop, Michell e série de Taylor, em relação ao número de Froude.

Para esta nova embarcação analisada, percebe-se que para um baixo número de Froude existe uma boa correlação para os três métodos. No entanto, o método de Michell apresenta alguma distorção no primeiro pico. Lewis (1988) comenta que é bastante complicado a acurácia de métodos numéricos para

estimativa da resistência em baixos valores de Froude, principalmente pela não consideração do efeito viscoso do fluido. Lewis (1988) afirma também em seu trabalho que tanto para os valores do pico quanto de vale após o aumento inicial da resistência (no gráfico, para faixa de Froude entre 0.25 e 0.40), a forma da curva geralmente é exagerada e dificilmente reflete valores reais.

Neste mesmo caso simulado, percebe-se que para um número de Froude maior que 0.4, os valores do coeficiente C_w calculados pelo método de Holtrop são maiores que os calculados por Michell. Novamente aqui é importante frisar a consideração de que no primeiro método estima-se C_r e não C_w .

Partindo destes exemplos mais simples, foram aplicadas as mesmas análises para outros cascos de deslocamento. O primeiro deles foi o casco tomado como padrão da série de Taylor, cuja origem remete às formas do navio de cruzeiro inglês *Leviathan*. Sua geometria está apresentada na Figura 4.4.

Figura 4.4: Vista superior do casco padrão da série de Taylor.

Sua forma apresenta maior semelhança com a primeira chata apresentada para comparação (Figura 4.2). Ela possui um corpo paralelo médio pequeno quando comparado ao seu comprimento total e relação $L_T/B_T = 11.39$. Esta geometria é bastante favorável para a aplicação do método de Michell.

A Tabela 4.3 apresenta as características desta geometria e o Gráfico 4.3 o resultado obtido para a curva de C_w em função do número de Froude. Pode-se notar neste gráfico que a forma da curva do C_w é bastante semelhante a do Gráfico 4.1. De fato, ambas as embarcações apresentam características bastante semelhantes, como baixos C_b , C_p e C_{wp} e alto C_M . Além disso, a relação comprimento-boca é próxima ao da mesma chata e o comprimento do corpo paralelo médio também é cerca de 10% o comprimento do navio.

Tabela 4.3: Dimensões principais do casco padrão da série de Taylor.

Comprimento (L_T)	20.00 m	Calado (H)	0.61 m
Comprimento na linha d'água (L_{WL})	19.88 m	S_W	37.14 m ²
Boca (B_T)	1.76 m	$V_{submerso}$	10.82 m ³
Boca na linha d'água (B_{WL})	1.74 m	C_p	0.56
Comprimento do corpo paralelo médio	2.00 m	C_b	0.51
Quantidade de intervalos em θ	40	C_{wp}	0.66
Quantidade de balizas e linhas d'água	150	C_M	0.90
Faixa de variação da velocidade	2 a 11 m/s		

Verifica-se ainda a proximidade entre os resultados experimentais (Taylor) e a predição pelo método de Michell. A estimativa por Holtrop apresenta uma variação dos resultados obtidos quando comparados com os demais métodos, porém apresentando a mesma tendência.

Gráfico 4.3: Curva do coeficiente C_w para o casco padrão da série de Taylor, através dos métodos de Holtrop, Michell e série de Taylor, em relação ao número de Froude.

Como quarto exemplo de casco, toma-se um navio com corpo paralelo médio proporcionalmente parecido ao da Figura 4.3. Na verdade, ele é derivado da forma apresentada na Figura 2.14, possuindo unicamente, como diferença, o dobro do comprimento. Conseqüentemente, haverá uma mudança na área da superfície molhada e também do volume, mas o objetivo final desta forma é que se possa duplicar a relação comprimento-boca e verificar os resultados para o coeficiente C_w em função do número de Froude. A curva de C_w do navio da Figura 2.14 será mostrada na próxima seção.

A Figura 4.5 mostra esta nova embarcação e a Tabela 4.4, resume suas principais dimensões.

Figura 4.5: Vista superior do casco da quinta embarcação avaliada.

Tabela 4.4: Dimensões principais do quinto casco de deslocamento.

Comprimento (L_T)	360.00 m	Calado (H)	10.50 m
Comprimento na linha d'água (L_{WL})	350.03 m	S_W	14010 m ²
Boca (B_T)	28.00 m	$V_{submerso}$	78063 m ³
Boca na linha d'água (B_{WL})	28.00 m	C_p	0.76
Comprimento do corpo paralelo médio	~180.00 m	C_b	0.76
Quantidade de intervalos em θ	100	C_{wp}	0.85
Quantidade de balizas e linhas d'água	300	C_M	0.99
Faixa de variação da velocidade	5 a 40 m/s		

Como pode ser visto no Gráfico 4.4, os resultados encontrados são bem próximos entre os três métodos para um Froude até aproximadamente 0.35. Existe um pico que ocorre por volta de 0.30, mas quantitativamente é bem próximo ao encontrado experimentalmente através da extrapolação por Taylor. Repare ainda que surgem variações bruscas para um baixo valor de Froude, assim como visto na Figura 4.2, tanto para o método proposto por Michell (1898) como também para Holtrop (1984), mas neste último as amplitudes de variação são menores.

Gráfico 4.4: Curva do coeficiente C_w para o quinto casco de deslocamento avaliado, através dos métodos de Holtrop, Michell e série de Taylor, em relação ao número de Froude.

Como conclusões gerais destes gráficos, pode-se afirmar que o método de Michell apresenta resultados muito bons em termos qualitativos, conforme já havia sido concluído em outras bibliografias (Michelsen (1960), por exemplo) e comentado no início deste capítulo. As principais distorções que surgem, em geral, são geradas principalmente por:

- Não considerar a viscosidade do fluido, principalmente em baixos números de Froude, onde este efeito é mais acentuado;
- Baixa relação comprimento-boca, já que as fontes e sorvedouros são considerados no plano central da geometria do casco e não em sua superfície;
- Não consideração da variação da parte submersa na popa (em caso de popa transom) para valores de Froude mais altos, bem como a existência de trim.

Wigley *apud* Lewis (1988) realizou uma investigação para entender melhor a imprecisão dos efeitos de escala de C_w devido a não inclusão da viscosidade. Isto leva a algumas imprecisões numéricas e maior oscilação das curvas deste coeficiente quando se compara a resultados experimentais. Wigley atribui tais diferenças a três razões principais:

- Erros devido a simplificações introduzidas para tornar possível a análise matemática;
- Erros gerados pela desconsideração dos efeitos viscosos em R_w ;
- Erros devido ao efeito do movimento de ondas em R_f .

Wigley comenta ainda que o primeiro erro é reduzido com o aumento da velocidade do navio, já que se torna desnecessária a hipótese de que a velocidade gerada pela formação de ondas seja pequena em relação a da embarcação. O segundo erro depende do número de Reynolds e, conseqüentemente, do tamanho do modelo, sendo reduzido com o aumento de seu comprimento. Já a última consideração afeta as faixas de Froude mais altas, uma vez que não há a consideração do trim e nem afundamento da popa transom, os quais ocorrem mais rapidamente para altas velocidades.

Em 1980, Inui *apud* Lewis (1988) realizou um estudo sobre a posição das fontes e sorvedouros em relação aos eixos de simetria de uma embarcação e concluiu que para baixos valores de Froude, a disposição destas singularidades sobre a seção média do navio apresentava bons resultados. Para uma faixa de Froude maior, a disposição das fontes e sorvedouros fica melhor sobre o eixo de simetria longitudinal da embarcação.

Estas análises só ressaltam que a estimativa da resistência ao avanço de uma embarcação é de natureza extremamente complexa devido aos vários fatores que envolvem seus cálculos.

4.4 Cálculo da Resistência de um Casco Conhecido (Versluis, 1977)

Esta geometria tem sua forma próxima à segunda chata, representada na Figura 4.3. A Figura 4.6 apresenta as curvas das linhas d'água da embarcação. As

cotas deste navio foram retiradas de Versluis (1977) e trata-se de um navio petroleiro real.

Figura 4.6: Vista superior do casco da quarta embarcação avaliada.

Repare que o comprimento do corpo paralelo médio é considerável quando comparado com seu comprimento total. A grande diferença para a segunda chata está na relação L_T/B_T , que é praticamente a metade. Isto, seguramente, irá influenciar os resultados do gráfico do coeficiente C_w , como pode ser visto no Gráfico 4.5. Suas dimensões principais estão resumidas na Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Dimensões principais do quarto casco de deslocamento.

Comprimento (L_T)	180.00 m	Calado (H)	10.50 m
Comprimento na linha d'água (L_{WL})	175.01 m	S_W	7090 m ²
Boca (B_T)	28.00 m	$V_{submerso}$	39032 m ³
Boca na linha d'água (B_{WL})	28.00 m	C_p	0.76
Comprimento do corpo paralelo médio	~90.00 m	C_b	0.76
Quantidade de intervalos em θ	100	C_{wp}	0.85
Quantidade de balizas e linhas d'água	300	C_M	0.99
Faixa de variação da velocidade	5 a 30 m/s		

Nota-se para esta mesma forma que existe um pico para C_w em uma faixa de Froude entre 0.30 e 0.35. Devido à baixa relação L_T/B_T , a aplicação do método de Michell é menos favorável. Contudo, isto não invalida sua análise qualitativa. A forma da curva apresentada no Gráfico 4.5 segue o mesmo comentário feito para o Gráfico 4.2.

Gráfico 4.5: Curva do coeficiente C_w para o quarto casco de deslocamento avaliado, através dos métodos de Holtrop, Michell e série de Taylor, em relação ao número de Froude.

Conforme apresentado na Equação (4.1), é possível traçar a curva total de resistência ao avanço para um casco, assim como do coeficiente de resistência total C_t , que também pode ser representado em um primeiro momento como sendo a soma das parcelas de C_w e C_f .

O Gráfico 4.6 mostra exatamente estas curvas para o navio em questão.

Gráfico 4.6: Curva do coeficiente C_w , C_f e C_t em função do número de Froude (à esquerda) e das parcelas de resistência R_w , R_f e R_t , também em função do número de Froude (à direita).

Nota-se aqui que para um baixo número de Froude, prevalece a parcela da resistência devido ao atrito. De fato, como sua velocidade é muito baixa, a contribuição da parcela devido à geração de ondas fica reduzida, visto que a energia de movimento do casco transmitida à superfície da água é menor nestas condições.

No entanto, conforme a velocidade aumenta, a energia devido à geração de ondas prevalece e torna-se significativa na análise da resistência total. Pode-se perceber que o coeficiente de resistência devido ao atrito é praticamente constante para distintos números de Froude, uma vez que depende somente das características da superfície do casco, embora estimada pela ITTC-1957 como função da velocidade.

Seria admissível, portanto, que se utilizasse como referência para melhoria ou otimização das formas de um casco em relação à resistência ao avanço somente o coeficiente de ondas (C_w).

4.5 Análise de Sensibilidade

A análise de sensibilidade objetiva mostrar o impacto obtido nos resultados de uma determinada expressão, variando-se minimamente algum(s) de seu(s) parâmetro(s). O propósito deste item é identificar como pode ser reduzido o tempo de processamento para cálculo da resistência ao avanço minimizando possíveis imprecisões no resultado final. Para tanto, neste caso específico, apenas os termos que são integrados podem afetar mais ou menos o resultado final esperado, como será apresentado em seguida.

Fazendo-se uso da embarcação tomada como referência neste trabalho (Versulis, 1977), foram realizados alguns testes quanto aos resultados da resistência ao avanço obtidos a partir da discretização do parâmetro θ e da quantidade de balizas e linhas d'água. Esta análise deve ser sempre conduzida previamente ao método de otimização, garantindo uma boa relação acurácia-tempo de processamento.

Vale ainda a ressalva de que no procedimento adotado, por simplificação, foi imposto que a quantidade de balizas será sempre igual à quantidade de linhas d'água. Além disso, o espaçamento será considerado constante entre cada baliza e cada linha d'água.

4.5.1 Sensibilidade quanto à variação do parâmetro θ

O primeiro item a ser avaliado é a sensibilidade da Equação (4.5) e (4.10) em relação ao intervalo de variação do ângulo θ . Verifica-se que quanto maior espaçamento entre cada medição (menor n), mais afastado o ângulo θ está de 0 e de $\pi/2$, pois θ_l é dado por $\theta_l = \frac{(2l-1)\pi}{4n}$, onde $l=1,2,\dots,n$. Para $n \rightarrow \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Para verificar a variação do coeficiente C_w da embarcação mostrada na Figura 2.14, em função de n , foi mantida uma discretização constante de balizas e linhas d'água igual a 100 e variada somente a quantidade de intervalos θ_l .

O Gráfico 4.7 mostra o resultado obtido para a curva C_w em função do número de Froude para diversos valores de n .

Gráfico 4.7: Resultado do coeficiente C_w em função do número de intervalos de θ .

Verifica-se que para um número de Froude mais baixo, as variações são bastante pequenas com a alteração do intervalo de θ . Nota-se claramente que para

um baixo valor de n , há maior oscilação da curva de C_w para Froudes mais elevados.

O Gráfico 4.8 mostra com mais detalhes que até número de Froude igual a 0.3, a estimativa para o coeficiente C_w não é muito sensível ao valor do parâmetro n . A partir deste ponto, a sensibilidade aumenta resultando em estimativas discrepantes.

Gráfico 4.8: Variação da curva do coeficiente C_w para número de Froude menor que 0.3 (à esquerda) e maior que 0.3 (à direita), para diversos intervalos de θ .

Em termos de precisão, conforme aumenta a quantidade de intervalos, melhor fica a precisão. Para n até 10, existe muita oscilação do coeficiente C_w . Para valores superiores ou iguais a 15, a variação já é bem menor. Pode-se verificar isso quando se compara com os resultados obtidos para n igual a 400 intervalos. Neste último caso a precisão é bem maior, no entanto, o preço que se paga por isso é o tempo de processamento necessário, que em certos casos pode levar algumas horas para o cálculo da curva de resistência.

O Gráfico 4.9 mostra a curva de C_w para intervalos menores que 10 e maiores que 15, comparando com uma solução mais precisa, correspondente a n igual a 400.

Gráfico 4.9: Variação da curva do coeficiente C_w para intervalo de θ inferior a 10 (à esquerda) e superior ou igual a 15 (à direita).

Nota-se que para valores de n acima de 15 divisões, os resultados de C_w começam a ser satisfatórios.

4.5.2 Sensibilidade quanto à variação da quantidade de linhas d'água e balizas

Outro estudo de sensibilidade que pode ser realizado refere-se à variação da quantidade de linhas d'água e de balizas. Apenas reforçando que a quantidade de ambas é sempre igual e que o espaçamento é constante entre elas, por simplificação.

Conforme sugerido na análise de sensibilidade do item anterior, mais de quinze divisões para os intervalos de θ já começam a fornecer resultados mais próximos aos obtidos pelo método de Michell com uma boa precisão ($n = 400$). Portanto, para o estudo deste item, arbitrou-se uma quantidade de intervalos de θ igual a 30. A variável que define a quantidade de balizas e linhas d'água está representada pela letra p ²⁰. Neste item ainda, está sendo considerada a mesma embarcação da análise anterior.

O Gráfico 4.10 mostra a curva para o coeficiente C_w em função do número de Froude, para diferentes discretizações do casco.

²⁰ O número de balizas e linhas d'água é dado por $2p + 1$.

Nota-se, ao contrário do estudo da sensibilidade para os intervalos de θ , que uma pior discretização do casco (p é pequeno), afeta principalmente a região para um baixo número de Froude. Já para números de Froude maiores, a estimativa para o coeficiente C_w é menos afetada pela discretização mais pobre do casco. Em θ , para um valor de n pequeno, percebia-se uma forte oscilação na região de médios e altos valores de Froude. Aqui, não se verifica este fenômeno. O que se percebe são formações de picos na curva.

Gráfico 4.10: Resultado do coeficiente C_w em função do número de balizas e linhas d'água.

O Gráfico 4.11 mostra exatamente o que está sendo comentado aqui, com a visualização da variação da curva de C_w para número de Froude menor e maior que 0.4.

Gráfico 4.11: Variação da curva do coeficiente C_w para número de Froude menor que 0.4 (à esquerda) e maior que 0.4 (à direita), para diferentes valores de p .

Quanto à quantidade mínima de linhas d'água e balizas, verifica-se através do Gráfico 4.12 que a para um valor de p superior a 45, os resultados começam a ficar mais próximos entre si. Já valores inferiores a este, são gerados picos para baixos valores de Froude. Com o intuito de confirmar a aplicação do método, foi traçada a curva de C_w com p igual a 400. Novamente o preço pago é o tempo de processamento.

Gráfico 4.12: Variação da curva do coeficiente C_w para intervalos de balizas e linhas d'água inferiores a 30 (à esquerda), superiores ou iguais a 45 (à direita).

Com base nestes dois estudos de sensibilidade, verifica-se claramente que para uma pequena discretização de intervalos de θ , estar-se-á afetando o valor de C_w para números de Froude mais altos. Já para uma pior discretização do casco

(menor valor de p), acarretará um resultado menos preciso para números de Froude mais baixos.

4.5.3 Variação da quantidade de intervalos de θ e quantidade de balizas e linhas d'água

Analizada a variação de cada um destes parâmetros individualmente, outra possível análise interessante que pode ser realizada é a variação da resistência devido à geração de ondas, para uma mesma velocidade, em função da variação dos dois parâmetros simultaneamente.

Concluiu-se da análise anterior que para um baixo número de Froude, a discretização do casco é mais importante. Logo, quanto menor for a quantidade de balizas e linhas d'água para uma baixa velocidade, maiores serão as imprecisões. Na Figura 4.7 estão colocados os valores de R_w para várias combinações de valores de p e n e um número de Froude igual a 0.14, correspondendo a uma velocidade de 6 m/s para o navio da Figura 2.14 (Versluis, 1977). Pode-se constatar a partir dela o que foi previamente concluído para um número de Froude mais baixo. É possível verificar também que existe um sentido de convergência para os valores de R_w , que caminha no sentido de aumentar os valores de p e n .

Nesta figura ainda, à direita, existem gráficos que mostram a variação da resistência devido à geração de ondas quando se mantém n fixo e varia-se o valor de p somente. Nota-se claramente que não importa o valor de n , sempre que se caminha na direção de um p maior, existe uma convergência dos valores. Entenda-se por convergência o término das oscilações do valor da resistência nos gráficos horizontais.

Nos gráficos abaixo da figura, vê-se o comportamento dos valores da resistência quando se aumenta ou diminui n , agora mantendo p fixo. Observa-se justamente o contrário. Para um mesmo valor de p , se for aumentado n , o valor da resistência começa a sofrer profunda oscilação. A partir desta análise é que foi definida a estabilidade ou instabilidade dos valores. A maior variação do valor da resistência ocorre para p pequeno e n grande. Já no caso contrário (p grande e n pequeno), obtêm-se valores constantes a partir de certo p , para mesmo n , ainda

que este seja pequeno. Logo, o ideal seria poder caminhar no sentido de aumentar um e outro parâmetro ao mesmo tempo, pois além da convergência em n , mais próximo o valor da resistência estará dos valores obtidos de outras séries e expressões analíticas.

Para se ter uma idéia, para este número de Froude de 0.14, a resistência devido à geração de ondas calculada por Holtrop (1984) é 93000N. Pela série de Taylor o valor também é bem próximo a este (~92500N), contra 93900N que se calcula pelo método de Michell com $n = 200$ e $p = 300$.

Já para números de Froude maiores, a variação de R_w sofre menor alteração com a diminuição da discretização do casco e também com a variação da quantidade de intervalos de θ . Na Figura 4.8 tem-se a análise desta componente da resistência para um Froude de 0.24 (velocidade igual a 10 m/s para o navio da Figura 2.14) considerando as mesmas discretizações de θ e do casco. Nesta figura, verifica-se que para um valor menor de p , já se tem uma maior estabilidade (menor oscilação) no valor de R_w , para diversos valores de n . O sentido de convergência continua sendo na direção de um maior valor de n e p .

De fato, quando se compara a convergência da resistência a ondas para Froude igual a 0.14 e 0.24, nota-se que no primeiro caso (Figura 4.7), para uma mesma quantidade de intervalos de θ , é necessária uma maior quantidade de linhas d'água e balizas para estabilidade dos valores da resistência que no segundo caso (Figura 4.8).

Entretanto, verifica-se nos dois casos apresentados que para uma mesma quantidade de intervalos em θ , quanto maior for a discretização do casco, o valor da resistência estabiliza, ainda que o resultado seja impreciso. Para o caso de uma mesma discretização do casco, se for aumentada a quantidade de intervalos de θ , ocorre uma divergência no resultado de R_w .

Logo, conclui-se que a discretização de ambos os parâmetros é importante na análise e que de nada adianta refinar o cálculo na integral externa em θ , se as internas (superfície), não tiverem uma precisão mínima.

Figura 4.7: Variação da resistência devido à geração de ondas para o navio da Figura 2.14 para um Froude de 0.14.

Figura 4.8: Variação da resistência devido à geração de ondas para o navio da Figura 2.14 para um Froude de 0.24.

5 Método de Otimização

O método de otimização é fundamental em um trabalho que se propõe buscar um ponto ótimo para um dado problema. Primeiramente porque ele depende da modelagem do problema abordado, além de permitir ainda alterar e variar os parâmetros a serem otimizados ao mesmo tempo em que contempla as restrições impostas. Segundo, porque é um processo extremamente custoso em grande parte das situações, já que deve buscar dentre as infinitas soluções aquela que melhor atende às exigências consideradas.

Logo, o método de otimização deve estar diretamente relacionado ao tipo de problema que se procura resolver (linear, não-linear, com restrições, sem restrições, etc.).

Neste caso em estudo, os parâmetros que serão variados estão relacionados a duas das dimensões principais do navio: comprimento e boca. A maneira como ocorrerá esta variação será mais bem detalhada no Capítulo 6, onde o problema a ser tratado será melhor analisado e explicado.

Também este problema deverá conter restrições, de modo a garantir que a forma final do navio seja preservada. Aqui, entenda-se forma como sendo o tipo de casco, ou seja, espera-se que o resultado seja também um casco de deslocamento e não de planeio, por exemplo. Contudo, estas restrições não são muitas vezes simples equações lineares. Trata-se de inequações não-lineares, já que se está falando do cálculo de volume e estabilidade de um navio. Como já comentado, para se ter uma idéia da complexidade do problema, as restrições são avaliadas em programas desenvolvidos a parte, como é o caso do **NAVSTAB**. Daí, entende-se a dificuldade de representação de restrições em simples equações lineares.

Como já visto também, embora sua utilização seja fundamental em todo processo de otimização, a concepção do método não está sendo desenvolvida neste trabalho. Buscou-se um método que estivesse disponível em programas comerciais de modo a aplicá-lo ao problema abordado. Neste trabalho, fez-se uso da função *fmincon* do programa **MATLAB**®.

Este capítulo propõe-se a apresentar fundamentos básicos de otimização e como estes estão incorporados dentro da função *fmincon* do **MATLAB**®. Será feita também uma breve explanação do método apresentado, fazendo-se uso de exemplos simples já trabalhados no Capítulo 2, mas agora sob o ponto de vista da aproximação e não da interpolação.

5.1 Conceitos Básicos de Otimização

Silva (1999) define os quatro principais conceitos de otimização:

- Variáveis de projeto: parâmetros do problema que podem ser alterados para otimizá-lo, podendo ser contínuas (qualquer valor) ou discretas (valores inteiros). Variáveis discretas necessitam muitas vezes de programas específicos e são bastante complexos. Neste trabalho em específico estão envolvidas unicamente variáveis contínuas;
- Função objetivo: quantifica o que se pretende otimizar e é função das variáveis de projeto, podendo ser simples (uma única função) ou multiobjetivo (mais de uma função);
- Restrições: são limitações impostas ao problema que se quer otimizar, classificadas em laterais (do tipo “caixa” com limites superior e inferior para uma ou mais variáveis), de igualdade (imposição de exatidão para uma ou mais funções das variáveis de projeto) e desigualdade (limitação de variação para uma ou mais funções das variáveis de projeto). Silva comenta que se deve utilizar o mínimo possível de restrições, uma vez que encarecem consideravelmente o custo computacional do processo;
- Domínio: região de localização da solução. Pode ser viável (todas as restrições satisfeitas) ou inviável (uma ou mais restrições não são satisfeitas).

A função *fmincon* do **MATLAB**® leva em conta a solução de problemas de otimização que podem ser resumidos de maneira genérica por:

$$\begin{aligned} \min_{x_i} \sum_{i=1}^n F(x_i) \quad & \text{sujeito a:} \\ c(x) &\leq 0 \\ ceq(x) &= 0 \\ A \cdot x &\leq b \\ Aeq \cdot x &= beq \\ lb &\leq x \leq ub \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde $F(x_i)$ é a função objetivo para as variáveis de projeto x_i , sujeito às restrições não-lineares de desigualdade $c(x) \leq 0$ e igualdade $ceq(x) = 0$, às restrições lineares de desigualdade $A \cdot x \leq b$ e igualdade $Aeq \cdot x = beq$ e à restrição lateral $lb \leq x \leq ub$.

5.2 Método da Função “fmincon”

A referência para esta função foi retirada do *Help* do programa **MATLAB**®.

Existem dois métodos de otimização para este processo:

- Método de Larga Escala: envolvendo problemas que contam com o fornecimento do gradiente da função objetivo pelo usuário e a utilização de um, mas não dos dois, tipos de restrição: lateral e de igualdade linear, com a matriz Aeq tipicamente esparsa e com número de colunas maior que o de linhas;
- Método de Média Escala: sem fornecimento prévio do gradiente da função objetivo.

O método de Larga Escala utiliza basicamente o método de Newton aproximando a solução, em cada iteração, por um sistema linear através do método dos gradientes condicionados pré-conjugados (PCG), cujo detalhamento pode ser encontrado em Coleman e Li (1994), Sorensen (1994) e Steihaug (1983).

Já o método de Média Escala utiliza a programação quadrática seqüencial (PQS). Neste método, existe a solução, a cada iteração, de um subproblema de programação quadrática (PQ), com atualização da matriz Hessiana (Equação (5.5)) da Lagrangeana (Equação (5.3)) usando a fórmula de Broyden (1970), Fletcher (1970), Goldfarb (1970) e Shanno (1970) (BFGS).

No problema aqui apresentado (otimização da forma de cascos de deslocamento com relação à resistência ao avanço), deduzir analiticamente o gradiente desta função (Equação (4.5)) já é bastante custoso. Mais que isso, a definição do problema não depende apenas de um destes tipos de restrições (laterais ou igualdade), dado que o cálculo do volume e estabilidade é obtido a partir de programas externos (**NAVSTAB**) e são, portanto, não-lineares. Assim, o método a ser utilizado é o de Média Escala, detalhado no próximo item.

5.3 Método de Média Escala (Medium-Scale Method)

Dado um problema geral de otimização da forma:

$$\begin{aligned} \min_x F(x) \quad & \text{sujeito a:} \\ G_i(x) = 0, \quad & i = 1, \dots, m_e \\ G_i(x) \leq 0, \quad & i = m_e + 1, \dots, m \end{aligned} \quad (5.2)$$

e assumindo que as restrições de caixa podem ser representadas por inequações, define-se a Lagrangeana do problema como sendo (Silva, 1999):

$$L(x, \lambda) = F(x) - \sum_{i=1}^{m_e} \lambda_i (G_i) - \sum_{i=m_e+1}^m \lambda_i (G_i - t_i^2) \quad (5.3)$$

onde as restrições $G_i(x) \leq 0$ devem ser convertidas à forma $G_i(x) \geq 0$, t_i são variáveis extras, tal que $G_i(x) - t_i^2(x) = 0$, e λ_i são os multiplicadores de Lagrange.

Partindo desta equação, a função *fmincon* utiliza o método da Programação Quadrática Seqüencial (PQS) que resolve o seguinte tipo de problema (Silva, 1999):

$$\begin{aligned} \min_s \quad & \frac{1}{2} s^T H s + b s \quad \text{sujeito a:} \\ A_i s = c_i, \quad & i = 1, 2, \dots, m_e \\ A_i s \leq c_i, \quad & i = m_e + 1, \dots, m \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde H é a matriz Hessiana, $b = \nabla F(x)^T$, A_i é a i -ésima linha da matriz $A_{m \times n}$ dada por $A_i = \nabla G_i(x)^T$ e $c_i = G_i(x)$.

A matriz Hessiana H é definida como:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_2^2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Sendo $Q = s^T H s$, H será considerada positiva-definida quando $Q > 0$, $\forall s$ (todos seus autovalores são estritamente positivos) e negativa-definida quando $Q < 0$, $\forall s$ (todos seus autovalores são estritamente negativos). Caso não atenda nenhuma das duas condições, (seus autovalores são positivos ou negativos), então H é chamada de indefinida. Powell (1978) recomenda que a matriz Hessiana seja considerada sempre positiva-definida durante o processo.

A solução deste problema (Equação (5.4)) resulta em um valor de s que é chamado de direção da solução, uma vez que cada iteração do método PQS fornece um novo valor do vetor x , dado por:

$$x_{j+1} = x_j + \alpha_j s_j \quad (5.6)$$

onde j é a j -ésima iteração do método PQS e α é o passo dado na nova direção a cada iteração, definido adiante na Equação (5.9).

A atualização da matriz Hessiana a cada iteração é obtida através do método de Quase-Newton, cujos melhores resultados são obtidos a partir de BFGS (Silva, 1999):

$$H_{j+1} = H_j + \frac{q_j q_j^T}{q_j^T s_j} - \frac{H_j^T H_j}{s_j^T H_j s_j} \quad (5.7)$$

onde:

$$s_j = x_{j+1} - x_j$$

$$q_j = \nabla F(x_{j+1}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla G_i(x_{j+1}) - \left(\nabla F(x_j) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla G_i(x_j) \right) \quad (5.8)$$

Apenas como nota $H_0 = I$ (matriz identidade). O passo α pode ser dado por:

$$\alpha = \min_i \left\{ \frac{-(A_i x_j - b_i)}{A_i s_j} \right\} \text{ com } i = 1, 2, \dots, m. \quad (5.9)$$

A solução do problema apresentado na Equação (5.4) é obtida, a cada iteração, através do método de Programação Quadrática (PQ). No caso da função *fmincon*, ela utiliza o método de Penalização Exterior para transformar o problema da Equação (5.4) em um problema sem restrições. Por este método, o problema fica resumido a:

$$\min_x \phi(x, r) = F(x) + r \sum_{i=1}^{m_e} G_i^2(x) + r \sum_{i=m_e+1}^m \langle -G_i(x) \rangle^2 \quad (5.10)$$

tal que $r = r_1, r_2, \dots, r_i \rightarrow \infty$

onde $\langle G_i(x) \rangle = \max\{G_i(x), 0\}$, com o valor de r (fator de penalização) aumentando a cada iteração.

O **MATLAB**® segue a sugestão de Powel (1978) e define:

$$r_i = (r_{j+1})_i = \max_i \left\{ \lambda_i, \frac{1}{2} \left((r_j)_i + \lambda_i \right) \right\} \text{ com } i = 1, 2, \dots, m \quad (5.11)$$

para cada iteração.

Quando $s=0$, calculam-se os λ_i . Para verificar se a solução encontrada é um mínimo, aplicam-se as equações de Kharash Kuhn-Tucker (KKT), as quais são condições necessárias para garantir a solução de problemas de otimização com

restrições. Se a função $F(x)$ e as restrições são convexas²¹, então as condições de KKT além de necessárias são também suficientes para garantir que o ponto ótimo é mínimo global do problema.

As condições de KKT afirmam que, considerando a Equação (5.3), se x^* é mínimo local, então:

$$\begin{aligned} 1. \quad & x^* \text{ é viável, ou seja, } G_i(x^*) \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, m_e \\ 2. \quad & \nabla F(x^*) - \sum_{i=1}^{m_e} \lambda_i^* \nabla G_i(x^*) = 0 \text{ (condição de estacionaridade)} \\ 3. \quad & \lambda_i^* \geq 0 \text{ (multiplicadores positivos no ponto ótimo)} \\ 4. \quad & \lambda_i^* G_i(x^*) = 0 \Rightarrow \therefore \text{ se } \lambda_i^* = 0 \Rightarrow G_i \neq 0 \text{ não está ativa (condição de} \\ & \text{complementaridade)} \end{aligned} \tag{5.12}$$

Caso $\lambda_i^* < 0$, remove-se a restrição com λ_i mais negativo²² e reinicia-se o processo montando uma nova Equação (5.3).

5.4 Aplicação da Função “fmincon”

Para efeito de teste e aplicação da função *fmincon*, considere a curva proposta na Tabela 2.2 (pág. 31).

Considere agora que se queira reduzir a medida de carenagem quando o número de equações (pontos) do sistema mostrado na Equação (2.29) é menor que o número de incógnitas (sistema subdeterminado). Considere ainda que o número de pontos é igual a 10 (pontos dados na Tabela 2.2). Quer-se na verdade minimizar as energias de elasticidade (E_1), flexão (E_2) e torção (E_3), dadas pela expressão da Equação (B.1) e com restrição de que a curva passe pelos pontos fornecidos, dada pela Equação (B.2).

Logo, o problema a ser resolvido fica:

²¹ Uma função é definida matematicamente como convexa se dados dois pontos x_1 e x_2 , então: $f[\alpha x_2 + (1-\alpha)x_1] \leq \alpha f(x_2) + (1-\alpha)f(x_1)$, com $0 < \alpha < 1$.

²² Se algum $\lambda_i < 0$ é uma indicação de que embora não se possa mais ter progresso com o conjunto de restrições ativas correntes, pode-se seguir, removendo-se esta restrição. Em geral, remove-se a de λ_i mais negativa.

$$\min_{\vec{d}_s} \sum_{r=1}^3 \alpha_r \cdot E_r = \sum_{r=1}^3 \alpha_r \int_{t_B}^{t_E} \left\{ \sum_{s=1}^2 \left(\frac{\partial^r \left(\sum_{j=0}^{L+2} \vec{d}_s N_j^3(t) \right)}{\partial t^r} \right)^2 \right\} dt \quad \text{sujeito a:} \quad (5.13)$$

$$A = \sum_{i=0}^n \left\{ w_i \left(\sum_{j=0}^{L+2} \vec{d}_s N_j^3(t_i) - P_i \right) \right\}^2 - \varepsilon \leq 0$$

onde neste problema, adotar-se-ão $\alpha_r=1$, $r=1,2,3$, o parâmetro t é dado pelo comprimento da linha adimensionalizado, variando entre 0 e 1, L é a quantidade de trechos em que a curva é dividida e $w_i=1.0$.

Intuitivamente, quanto menor for o valor de ε , mais próxima aos pontos a curva aproximada deve passar.

Considere agora seis problemas de otimização distintos apresentados pela Equação (5.13), com $\varepsilon=10^{-5}$ e número de pontos de controle igual a 12, 22 e 52 (sistema subdeterminado) e $\varepsilon=1.0$, $\varepsilon=2.5$ e $\varepsilon=5.0$, com 10 pontos de controle (sistema determinado, mas sem a necessidade que a curva aproximada passe exatamente pelos pontos dados) em cada um destes três últimos casos. Montando o problema no **MATLAB**® e aplicando a função *fmincon*, têm-se os resultados gráficos dos três primeiros problemas ($\varepsilon=10^{-5}$) apresentados no Gráfico 5.1.

Para o caso com 12 pontos de controle foram necessárias 54 iterações e o valor final da função objetivo foi 0.4838. Para o segundo caso, com 22 pontos de controle, a função *fmincon* realizou 54 iterações com valor final da função objetivo de 0.4488. Por último, com 52 pontos de controle, foram feitas 247 iterações e o valor final da função objetivo de 0.4447. O valor da função objetivo inicial para a curva interpolada é de 1.1961, com 10 pontos de controle, ou seja, sistema determinado (situação 3 da Figura 2.10). Este sistema deve ser tomado como referência pois é o único que requer a passagem da curva interpolada somente sobre os pontos dados originalmente. Logo, pode-se comparar o resultado da interpolação dos pontos originais com a curva aproximada passando por eles.

Gráfico 5.1: Aproximação por uma *B-Spline* cúbica com $\varepsilon = 10^{-5}$ com 12 pontos de controle (à esquerda e acima), 22 pontos de controle (à esquerda e acima) e 52 pontos de controle (abaixo).

Percebe-se que quanto maior a quantidade de pontos de controle, maior o número de iterações, maior o tempo de processamento, mas menor é a energia da curva.

Para os três outros problemas propostos ($\varepsilon=1.0$, $\varepsilon=2.5$ e $\varepsilon=5.0$, com 10 pontos de controle), os resultados estão apresentados no Gráfico 5.2. As curvas aproximadas estão comparadas com a curva inicial dos pontos da Tabela 2.2, traçada a partir da união dos mesmos por simples segmentos de reta.

Gráfico 5.2: Aproximação por uma *B-Spline* cúbica com 10 pontos de controle da curva dos pontos da Tabela 2.2 com $\varepsilon = 1.0$ (à esquerda e acima), $\varepsilon = 2.5$ (à direita e acima) e $\varepsilon = 5.0$ (abaixo).

Para o caso de $\varepsilon=1.0$, foram necessárias 47 iterações e o valor final da função objetivo é igual a 0.3257. Já para $\varepsilon=2.5$, foram realizadas 53 iterações e o valor da função objetivo ao final do processo é de 0.2560. Por último, para $\varepsilon=5.0$, foram executadas 54 iterações e o valor final da função objetivo é igual a 0.2062. A restrição de desigualdade não-linear está ativa nas seis simulações efetuadas.

Repare que as curvas aproximadas não passam pelos pontos inicial e final. De fato isto ocorre porque não existe restrição de passar por estes pontos. Quanto maior é o valor de ε , menor é o valor da energia, mas maior é a distância aos pontos.

Como já era esperado, quanto menor o valor de ε , mais perto a curva aproximada fica da curva original. Assim como a restrição considerada, outras

restrições mais também poderiam ser colocadas, como curvatura e tangentes, por exemplo.

O emprego da função *fmincon* no processo de otimização mostrou-se eficiente no que se refere a um problema de otimização de linhas. No entanto, a grande desvantagem está no tempo necessário para processamento.

É esperado que no caso de otimização de uma superfície, não só função objetivo como restrições sejam mais complexas como também o tempo de cálculo consumido pela função seja maior. Idealmente seria mais interessante implementar um método de otimização em linguagem C++ aplicado ao problema tratado, permitindo uma convergência mais rápida da solução.

6 O Problema de Otimização da Resistência ao Avanço

Após a modelagem de um navio através de funções *B-Splines* cúbicas de superfície cujas cotas são fornecidas inicialmente, pode-se definir todo o casco através de equações. A partir destas é possível gerar painéis e, com a ajuda do cálculo vetorial, calcular suas propriedades hidrostáticas.

A definição do casco também permite o cálculo da resistência ao avanço através de métodos analíticos, os quais levam em conta a forma da embarcação. Dentro deste contexto, e como já descrito, o objetivo final deste trabalho é utilizar toda teoria até aqui apresentada e aplicar ao caso da otimização da forma de um casco de deslocamento, de modo a garantir uma resistência ao avanço menor que a do casco original para uma dada velocidade de avanço.

Para a problemática a ser tratada aqui será feito uso da função *fmincon* do **MATLAB**®, apresentada no Capítulo 5.

Considere o navio apresentado na Figura 2.14 (pág. 38) e que foi modelado por uma função *B-Spline* cúbica de superfície, de acordo com a Equação (2.30).

Será assumido um valor relativamente alto para o número de Froude evitando-se a faixa onde a formulação de Michell apresenta oscilações para a estimativa da resistência devido à geração de ondas, possibilitando uma menor discretização da geometria do casco e, conseqüentemente, um menor custo computacional, conforme mencionado no Capítulo 4. Minimizando-se a resistência para este valor relativamente alto do número de Froude, espera-se que, caso a resistência não apresente seu valor mínimo para baixas velocidades, apresente-se próxima deste valor. Também conforme apresentado no Capítulo 4, será considerado que a resistência ao avanço pode ser estimada, para o número de Froude utilizado, essencialmente pela resistência devido à geração de ondas R_w . Esta componente da resistência será calculada através do método de Michell apresentado na Equação (4.5).

Além da definição da função objetivo determinada por esta equação, são necessárias restrições que garantam não somente que o casco terá ao final uma

forma “aceitável” dentro do conceito de um casco de deslocamento, mas também que ajudem a reduzir o universo de busca da solução ótima.

Dentre muitos parâmetros que definem a embarcação quanto a sua geometria, foram separados neste trabalho alguns deles a serem usados de modo a assegurar que a forma final seja coerente com a inicial imaginada (navio semelhante). Entre os parâmetros escolhidos neste estudo estão:

- Comprimento: limite de variação máxima a partir do comprimento original da embarcação;
- Relação comprimento/boca: limite de variação máxima a partir da relação original dado que este fator é importante na consideração da formulação de Michell;
- Volume: limite da variação máxima a partir do volume total original da embarcação, garantindo que tanto alteração na boca quanto no comprimento não afetem o volume total, de maneira a não descaracterizar a forma original do casco e levando em consideração não somente as obras-vivas²³;
- Estabilidade (KM_T): limite de variação máxima do parâmetro que está diretamente relacionado à estabilidade do navio a partir de sua estabilidade inicial.

Além destas restrições relacionadas aos parâmetros do navio, deve-se buscar por um processo cujo resultado final seja um casco com forma semelhante ao original ou, em outras palavras, tenha aparência de casco de deslocamento e com a permanência de um corpo paralelo médio.

Uma das maneiras de se garantir isso é estabelecendo que os pontos onde as derivadas primeiras das coordenadas y são nulas em relação ao eixo longitudinal da embarcação (X) (corpo paralelo médio) permaneçam nulas. A pergunta que pode originar neste momento seria quanto à permissão para mudança da forma do casco nesta região, uma vez que a manutenção destas derivadas

---

²³ Obras-vivas refere-se a parte do casco abaixo da linha d'água de projeto.

constantes e iguais a zero não permitiria aumento ou diminuição do corpo paralelo médio. A essa pergunta, a estratégia adotada neste trabalho e especificamente nesta restrição será feita de tal forma que esta variação possa acontecer, conforme será descrito mais adiante.

Além das derivadas constantes em relação ao eixo longitudinal no corpo paralelo médio, é preciso certificar-se também que o costado do navio seja preservado. Para isso, pode-se adotar que as derivadas das coordenadas y , agora em relação ao eixo vertical Z , permaneçam constantes e iguais a zero. Esta restrição deve ser imposta de maneira que não haja distorção na malha e que não ocorra ondulação ao longo do casco.

Outra limitação bastante importante e que à primeira vista pode parecer inútil é uma restrição do tipo caixa para as variáveis de projeto $\vec{d}_{ij}^{x,y}$ (pontos de controle da função *B-Spline* de superfície). A imposição desta restrição garante uma busca da solução dentro de um domínio controlado. Assim, a cada iteração, pode-se permitir que a variável de projeto tenha nova variação percentual a partir da iteração anterior, novamente limitada às mesmas restrições. Salienta-se aqui novamente que não se está permitindo variação do calado. Somente da boca e comprimento do navio.

Desta maneira, o problema de otimização proposto seria resumido por:

$$\min_{\vec{d}_{ij}^{x,y}} \frac{4 \cdot \rho \cdot g^2}{\pi \cdot v_0^2} \int_0^{\pi/2} \left(H_s^2(\vec{d}_{ij}^{x,y}) + H_c^2(\vec{d}_{ij}^{x,y}) \right) \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \quad \text{sujeito a:}$$

$$\begin{aligned} d_{ij_{\min}}^x &\leq d_{ij}^x \leq d_{ij_{\max}}^x \\ d_{ij_{\min}}^y &\leq d_{ij}^y \leq d_{ij_{\max}}^y \\ L_{\min} &\leq L_T \leq L_{\max} \\ \left(\frac{L_T}{B_T} \right)_{\min} &\leq \frac{L_T}{B_T} \leq \left(\frac{L_T}{B_T} \right)_{\max} \\ Volume_{\min} &\leq Volume_T \leq Volume_{\max} \\ KM_{\min} &\leq KM_T \leq KM_{\max} \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y(u, v)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} (*)$$

(*) somente nos pontos em que inicialmente tenham estes valores nulos.

onde $H_s(\vec{d}_{ij}^{x,y})$ e $H_c(\vec{d}_{ij}^{x,y})$ são dadas pelas Equações (4.6) e (4.7), respectivamente, sendo que o parâmetro $\vec{d}_{ij}^{x,y}$ refere-se aos pontos de controle nas direções X e Y , dado que a cota na direção Z (calado) não sofre variação. As restrições de desigualdade para comprimento (L_T), comprimento/boca $\left(\frac{L_T}{B_T}\right)$, volume ($Volume_T$) e estabilidade (KM_T) são delimitadas por um valor de máximo e mínimo.

Já as duas derivadas $\frac{\partial y(u, v)}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial y(u, v)}{\partial z} = 0$ são dadas por expressões parecidas às Equações (2.31) e (2.32), mas agora aplicadas em relação às coordenadas x e z , o que resulta em:

$$\frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial x} = \frac{\sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} \vec{d}_{ij} \cdot \frac{\partial N_i^{k_a}\left(u = \frac{x}{L_{lag}}\right)}{\partial x} \cdot N_j^{k_b}(v)}{L_{lag}} \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial z} = \frac{\sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} \vec{d}_{ij} \cdot N_i^{k_a}(u) \cdot \frac{\partial N_j^{k_b}\left(v = \frac{z}{D_{bal}}\right)}{\partial z}}{D_{bal}} \quad (6.3)$$

onde o parâmetro $u = \frac{x}{L_{lag}}$ (coordenada x do ponto em relação ao comprimento L_{lag} da linha d'água) e $v = \frac{z}{D_{bal}}$ (coordenada z do ponto em relação ao pontal D_{bal} da baliza).

Como apresentado no Capítulo 2, para este tipo de casco, a adoção de 20 pontos de controle apresentou bons resultados no processo de interpolação. Considerando que para funções cúbicas existem dois pontos auxiliares, tem-se 22 pontos na direção do parâmetro u e outros 22 na direção de v . Como eles se

multiplicam entre si, temos um total para a superfície de 484 variáveis para cada direção X , Y e Z . Considerando apenas as duas que estão sendo variadas (na direção do comprimento (X) e da boca (Y)), tem-se um total de 968 variáveis.

Logo, um problema com um número de variáveis de projeto nesta proporção acarreta a necessidade de utilização de tempo muito grande para processamento até o alcance de uma solução ótima.

Pensando-se nesta questão e com uma prévia tentativa de otimização, a partir do problema montado em (6.1), foram realizadas algumas alterações. Primeiramente uma mudança nas variáveis de projeto a fim de reduzir sua quantidade de maneira significativa. Em um segundo momento, atrelado a esta alteração, houve também uma correspondente modificação das restrições com o objetivo de garantir as formas da embarcação.

Considere um fator de escala $\alpha_{ij}^{x,y}$ associado a todos os pontos de controle $\vec{d}_{ij}^{x,y}$ de uma função *B-Spline* cúbica de superfície, com $i, j = 0, 1, \dots, L+2$, onde L é o número de trechos em cada baliza e em cada linha d'água e $\alpha_{i0}^{x,y} = \alpha_{i1}^{x,y} = \dots = \alpha_{iL+2}^{x,y}$. Assim, a Equação (2.30) pode ser reescrita como:

$$\vec{r}(u, v) = \sum_{i=0}^{L+2} \sum_{j=0}^{L+2} \alpha_{ij}^{x,y} \cdot \vec{d}_{ij}^{x,y} \cdot N_i^3(u) \cdot N_j^3(v) \quad (6.4)$$

Se este fator $\alpha_{ij}^{x,y}$ for adotado como variável de projeto, o problema reduz-se agora a 44 variáveis somente, contra 968 da situação anterior. Isto significa uma redução de 95% da quantidade de variáveis propostas inicialmente. Obviamente que junto a esta enorme vantagem em termos computacionais, a montagem do problema também traz uma desvantagem. Agora, todos os pontos de uma baliza associada a um mesmo valor do parâmetro u terão mesma variação na direção do eixo X , e uma outra para todos os pontos na direção do eixo Y , segundo o valor do fator de escala $\alpha_{ij}^{x,y}$ a ela associado. Atente que, quando se fala a respeito de baliza aqui, se está falando da definição de baliza mostrada na Figura 2.18.

Poder-se-ia adotar que, em lugar de $\alpha_{i0}^{x,y} = \alpha_{i1}^{x,y} = \dots = \alpha_{iL+2}^{x,y}$, $\alpha_{ij}^{x,y}$ fosse dado por $\alpha_{0j}^{x,y} = \alpha_{1j}^{x,y} = \dots = \alpha_{L+2j}^{x,y}$. A desvantagem é que as variações seriam em uma linha d'água, o que não permitiria uma mudança nas características da proa e popa do navio.

Com relação ao corpo paralelo médio, dependendo da variação do fator de escala $\alpha_{ij}^{x,y}$ para cada baliza na direção do eixo X , ele pode aumentar ou diminuir. Logo, apesar da redução do número de variáveis de projeto o universo de soluções ainda é bem grande e permite que o método gere infinitas possibilidades de forma.

Alteradas as variáveis de projeto, devem-se agora associar a elas restrições que substituam aquelas propostas no problema anterior. Assim, uma primeira alteração é a substituição da variação percentual máxima dos pontos de controle $\vec{d}_{ij}^{x,y}$ para as novas variáveis de projeto $\alpha_{ij}^{x,y}$. Inicialmente $\alpha_{ij}^{x,y} = 1.0$ para todo $i, j = 0, 1, \dots, L+2$.

As restrições de comprimento, comprimento/boca, volume e de estabilidade continuam existindo. Quanto às derivadas constantes do corpo paralelo médio, $\frac{\partial y(u,v)}{\partial z} = 0$ não é mais útil, visto que as coordenadas y de uma baliza têm mesma variação, pois estão associadas a um mesmo $\alpha_{ij}^{x,y}$. Já a outra restrição, $\frac{\partial y(u,v)}{\partial x} = 0$, apenas se deve assegurar que para os pontos pertencentes ao corpo paralelo médio o valor de $\alpha_{ij}^{x,y}$ na direção do eixo Y seja o mesmo. Logo, trata-se de uma restrição de igualdade.

Resumindo, o problema a ser tratado agora fica:

$$\min_{\alpha_{ij}^{x,y}} \frac{4 \cdot \rho \cdot g^2}{\pi \cdot v_0^2} \int_0^{\pi/2} \left(H_s^2(\alpha_{ij}^{x,y}) + H_c^2(\alpha_{ij}^{x,y}) \right) \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \quad \text{sujeito a:} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{\min}^x &\leq \alpha^x \leq \alpha_{\max}^x \\ \alpha_{\min}^y &\leq \alpha^y \leq \alpha_{\max}^y \\ L_{\min} &\leq L_T \leq L_{\max} \\ \left(\frac{L_T}{B_T} \right)_{\min} &\leq \frac{L_T}{B_T} \leq \left(\frac{L_T}{B_T} \right)_{\max} \\ Volume_{\min} &\leq Volume_T \leq Volume_{\max} \\ KM_{\min} &\leq KM_T \leq KM_{\max} \\ \alpha_{kj}^y - \alpha_{k+1j}^y &= 0(*)\end{aligned}$$

(*) aplica-se para todo k e $k+1$ que se referem a pontos do corpo paralelo médio.

onde $\alpha_{\min}^x$ e $\alpha_{\max}^x$ são os valores mínimo e máximo para os parâmetros α^x , respectivamente, e $\alpha_{\min}^y$ e $\alpha_{\max}^y$ são os valores mínimo e máximo para os parâmetros α^y . Neste caso, considera-se que a variação máxima permitida na direção X é a mesma para todos os valores de α^x e o mesmo ocorrendo na direção Y , para todos os valores de α^y .

Para aplicação prática do problema de otimização proposto, considere novamente a embarcação da Figura 2.14. Adote a seguinte situação:

$$\begin{aligned}\min_{\alpha_{ij}^{x,y}} \quad & \frac{4 \cdot \rho \cdot g^2}{\pi \cdot v_0^2} \int_0^{\pi/2} \left(H_s^2(\alpha_{ij}^{x,y}) + H_c^2(\alpha_{ij}^{x,y}) \right) \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \quad \text{sujeito a:} \\ & 0.9 \leq \alpha^x \leq 1.1 \\ & 0.9 \leq \alpha^y \leq 1.1 \\ & 170 \leq L_T \leq 190 \\ & 5.5 \leq \frac{L_T}{B_T} \leq 7.0 \\ & 63453 \leq Volume_T \leq 70133 \\ & 10.92 \leq KM_T \leq 12.06 \\ & \alpha_{kj}^y - \alpha_{k+1j}^y = 0(*)\end{aligned} \tag{6.6}$$

(*) aplica-se para todo k e $k+1$ que se referem a pontos do corpo paralelo médio.

Como proposto, foi assumido inicialmente que $\alpha^{x,y} = 1.0$.

Após 16 iterações do processo, ocorreu a convergência²⁴ da forma apresentada na Figura 2.14 para a apresentada na Figura 6.1.

Figura 6.1: Vista superior do casco da embarcação otimizada com variação máxima do volume em 5%.

Nota-se que houve um afinamento na proa e um arredondamento na popa. No entanto, ao final do processo, não houve variação significativa no comprimento do navio. Aumentou de 180.00 m para 182.46 m. Já a boca foi diminuída de 28.00 m para 26.92 m. Assim, a relação L_T/B_T aumentou de 6.69 para 6.78. O grande limitante do problema foi o volume, cuja restrição era de uma variação máxima de 5%, (mesma variação permitida ao KM_T). Houve a redução deste valor até o mínimo permitido pela restrição imposta, tornando-a ativa. O critério de estabilidade também colocado como restrição foi modificado dentro do intervalo permitido de variação sendo reduzido de 11.69 m a 11.17 m. A superfície molhada por sua vez também sofreu uma pequena redução, da ordem de 2,5% saindo de 7087.1 m² para 6991.2 m².

É importante notar que a geometria da embarcação permaneceu a mesma com as restrições que foram impostas para o problema sem, no entanto, deixar de alterar a forma do navio. Utilizou-se uma velocidade de 20 m/s dado que corresponde a um valor de Froude (~ 0.47) em que não é necessária uma discretização do casco “exagerada”, pois não influi muito na curva de C_w , conforme visto na análise de viabilidade. Esta decisão foi tomada para que pudessem ser utilizadas menos balizas e linhas d’água e o processo de otimização envolvesse menos pontos, tornando-o mais rápido. Ainda nesta situação, foram usados 30 intervalos para o ângulo θ .

²⁴ A função *fmincon* não terminou o processo de acordo com suas tolerâncias internas definidas, no entanto, os valores da resistência a ondas já estavam praticamente constantes para este número de iteração. Existe uma oscilação de uma iteração para outra apenas na restrição de volume (restrição ativa), ora dentro do domínio e ora fora, o que faz com que o método continue procurando uma solução ótima para o valor mais próximo de volume mínimo permitido. Assim, conclui-se que a redução da resistência, para este exemplo, está associada em parte à diminuição do volume.

A curva de resistência que se obtém para este caso está mostrada no Gráfico 6.1, onde os valores com * se referem ao casco otimizado.

Gráfico 6.1: Curva do coeficiente C_w , C_f e C_t em função do número de Froude (à esquerda) e das parcelas de resistência R_w , R_f e R_t , também em função do número de Froude (à direita), para variação em 5% do volume do navio.

Os valores de C_f e R_f são praticamente os mesmos, já a redução de C_w e R_w é bem mais considerável. A redução da resistência ao avanço não está somente associada à redução do volume do navio. Diminuindo o volume total inicial da geometria mostrada na Figura 2.14 em 5%, a redução da resistência ao avanço obtida pelo método de otimização é cerca de 15% menor. Isto comprova que a simples redução do volume do navio não reduz a resistência da embarcação da mesma forma que o método de otimização, dado que, neste processo, há a variação da geometria do navio, principalmente proa e popa, como pôde ser observado na Figura 6.1 e será visto também na Figura 6.2.

Considere agora o mesmo problema anterior, mas com as seguintes restrições:

$$\min_{\alpha_{ij}^{x,y}} \frac{4 \cdot \rho \cdot g^2}{\pi \cdot v_0^2} \int_0^{\pi/2} \left(H_s^2(\alpha_{ij}^{x,y}) + H_c^2(\alpha_{ij}^{x,y}) \right) \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \quad \text{sujeito a:} \quad (6.7)$$

$$0.9 \leq \alpha^x \leq 1.1$$

$$0.9 \leq \alpha^y \leq 1.1$$

$$170 \leq L_T \leq 190$$

$$5.5 \leq \frac{L_T}{B_T} \leq 7.0$$

$$60113 \leq Volume_T \leq 73471$$

$$10.34 \leq KM_T \leq 12.64$$

$$\alpha_{kj}^y - \alpha_{k+1j}^y = 0(*)$$

(*) aplica-se para todo k e $k+1$ que se referem a pontos do corpo paralelo médio.

A única mudança aqui é o aumento da variação do volume e do critério de estabilidade KM_T , ambos podendo variar em até 10%. Para esta variação, efetuou-se o processo em duas etapas, sendo que em cada uma delas a variação máxima de $\alpha^{x,y}$ é de 5%. Isto porque ao aplicar-se o método com uma grande variação de volume e do fator de escala, o problema leva mais tempo para convergir a um valor ótimo.

Nesta nova situação gera-se um casco final semelhante ao do caso anterior, mas com redução do volume total até o máximo permitido (10%), atingindo 60113 m³. O comprimento aumentou para 186.20 m e a boca reduziu para 26.60 m, o que eleva um pouco mais a relação L_T/B_T , tornando-a igual a 7.0, que é a própria restrição imposta ao problema. Seguindo a mesma tendência do problema anterior, a superfície molhada teve redução de 2.9%, chegando a 6881.9 m². O valor de KM_T passou a 11.01 m.

A Figura 6.2 mostra o plano de linhas d'água para a nova embarcação.

Figura 6.2: Vista superior do casco da embarcação otimizada com variação máxima do volume em 10%.

O Gráfico 6.2 mostra o resultado das curvas de resistência e dos coeficientes para a embarcação final.

Gráfico 6.2: Curva do coeficiente C_w , C_f e C_t em função do número de Froude (à esquerda) e das parcelas de resistência R_w , R_f e R_t , também em função do número de Froude (à direita), para variação em 10% do volume do navio.

Para os dois resultados obtidos, percebe-se o afinamento da proa e o arredondamento da popa. Da análise das duas situações, nota-se a convergência da solução na direção da redução do volume e superfície molhada e aumento da relação L_T/B_T . No segundo caso, atentando-se para os valores da resistência e dos coeficientes no Gráfico 6.2, nota-se não somente a redução destes em relação ao casco original como também em relação ao primeiro caso de otimização, corroborando a conclusão de que a redução da resistência ao avanço converge para a redução do volume total do navio.

Outra simulação que pode ser feita para fins de teste consiste em preservar o volume da embarcação, ou seja, tornar o volume uma constante e não variável. A busca da solução ótima é feita da mesma forma, mas desta vez, por causa desta restrição, o universo de solução fica bem mais limitado. A Figura 6.3 mostra a forma final do casco, cuja resistência final teve decréscimo de apenas 1% em relação ao valor inicial.

Figura 6.3: Vista superior do casco da embarcação otimizada sem variação do volume.

O que se pode perceber mais uma vez é um pequeno afinamento na proa e uma alteração na parte da proa, para as balizas mais abaixo, conforme as soluções anteriores. As curvas da resistência e dos coeficientes em relação ao número de Froude estão apresentadas no Gráfico 6.3.

Gráfico 6.3: Curva do coeficiente C_w , C_f e C_t em função do número de Froude (à esquerda) e das parcelas de resistência R_w , R_f e R_t , também em função do número de Froude (à direita), para volume do navio sem variação.

A variação gráfica é bem pequena, apesar de existente, e da ordem de apenas 1% no valor da resistência final. Tal valor mostra que o processo tende a resultados mais interessantes quando é permitida uma variação do volume. No entanto, cabe aqui ressaltar novamente que a simples redução do volume não reduz a resistência da mesma forma que o método de otimização proposto. Isto porque a simples redução de volume não ocasiona mudança da geometria do casco.

Outro teste realizado foi considerar o mesmo problema mostrado na Equação (6.6), mas para uma velocidade diferente. Em lugar de 20 m/s, considerou-se uma velocidade igual a 16 m/s. Valores mais baixos a este fazem parte da região onde os resultados de resistência são imprecisos. Como resultado, vê-se que a forma encontrada é semelhante à do segundo problema, como pode ser visto na Figura 6.4.

Figura 6.4: Vista superior do casco da embarcação otimizada com variação máxima do volume em 5% e velocidade de 16 m/s.

Nesta figura, visualiza-se na região da proa um leve degrau nas linhas d'água mais baixas. Isto ocorre porque não há a imposição de derivadas nesta região. A inserção de uma restrição como esta asseguraria a não existência destas pequenas saliências. Outra possibilidade seria conduzir um problema de otimização que também levasse em conta a energia da superfície, mostrada no Apêndice B.

Novamente nota-se um aumento no comprimento do casco para 185.15 m e redução da boca para 26.94 m. O limitante do problema continua sendo o volume, cuja restrição tornou-se ativa. O Gráfico 6.4 mostra a variação para os valores das curvas de resistência e dos coeficientes após o processo de otimização.

Gráfico 6.4: Curva do coeficiente C_w , C_f e C_t em função do número de Froude (à esquerda) e das parcelas de resistência R_w , R_f e R_t , também em função do número de Froude (à direita), para volume do navio com variação de 5% e velocidade de 16m/s.

Como os valores das dimensões finais não são os mesmos do primeiro problema, os valores dos gráficos não são exatamente iguais aos do Gráfico 6.1. Neste caso, houve uma maior redução no valor da resistência final.

Os resultados aqui apresentados não podem, contudo, serem considerados ótimos para o navio em análise devido a uma limitação de processamento computacional. Esta forma ótima levaria algum tempo (da ordem de dias) a ser atingida. Um processamento em paralelo seguramente aceleraria e melhoraria os resultados. No entanto, o que está observado é conclusivo quanto ao formato e convergência da solução. Nos casos apresentados, a oscilação final dos valores da resistência ao avanço é muito pequena, se comparamos com os testes feitos na

análise de sensibilidade (Capítulo 4). Isto comprova que a discretização do navio e dos intervalos de θ não comprometem o resultado, apesar de terem sido diminuídos ao máximo para uma solução mais rápida ($\theta = 30$ e $p = 100$). Os resultados gráficos mostram que as formas obtidas têm melhor desempenho hidrodinâmico dado a menor resistência ao avanço total.

Apesar das duas primeiras situações terem sido tomadas a uma velocidade igual de 20 m/s, a maior redução tanto da resistência devido a ondas quanto do coeficiente C_w ocorre para um Froude de 0.3, sendo mais acentuada a redução na segunda situação. Na simulação para velocidade de 16 m/s também existe uma forte redução nesta faixa de Froude. Lembre-se que esta ainda é uma região onde ocorre oscilação dos valores da resistência e, conforme apresentado na análise da aplicação da fórmula de Michell (Capítulo 4), Lewis (1988) afirma que dificilmente esta região reflete valores reais.

7 Recomendações para Trabalhos Futuros

Para trabalhos futuros, podem ser citadas algumas novas implementações relacionadas ao procedimento adotado, mas também aperfeiçoamentos computacionais de forma a melhorar a performance do processo. Algumas sugestões podem ser feitas:

- Desenvolvimento de todo método proposto em uma linguagem computacional fora do ambiente do **MATLAB**®: isto garantiria um processamento mais rápido dos cálculos viabilizando a obtenção dos mesmos resultados em um espaço de tempo menor. Por outro lado, seria necessária a inserção e desenvolvimento de conceitos básicos dentro do processo que o **MATLAB**® é capaz de suprir, através de bibliotecas compostas de funções validadas comercialmente e com métodos bastante eficientes de cálculo. Como os códigos das funções são abertos, isto pode facilitar esta migração, mas requer ainda um bom tempo de programação e desenvolvimento;
- Utilização do método de aproximação por funções *B-Splines* em lugar da interpolação: os métodos de aproximação são computacionalmente mais custosos, dado a necessidade de aplicação de métodos de otimização. Por outro lado, corrigem distorções na forma do casco, suavizando as curvas e carenamento a geometria. Isto se a função objetivo adotada estiver relacionada com as medidas de carenamento das curvas (energias das linhas ou superfície). A aplicação do método de aproximação requer também a incorporação de restrições ao modelo de maneira a garantir uma solução viável. As restrições aqui apresentadas, acrescidas de outras mais, podem ser adicionadas, como é o caso de restrições de curvatura, áreas seccionais, coeficientes geométricos, tangentes, entre outras;
- Geração de um procedimento de extrapolação para cotas não fornecidas ao problema: a falta de informação sobre a geometria da embarcação em alguns pontos pode não ser responsável por distorções significativas no resultado. No entanto, o conhecimento completo da forma do casco melhora a visualização da geometria inicial. Sugere-se que seja estudado um possível processo de extrapolação, principalmente na proa e popa do navio, a fim de que toda a superfície

do navio seja considerada na análise, reduzindo ao máximo variações nos resultados finais;

- Aumento do escopo quanto à forma da embarcação: neste trabalho não estão consideradas particularidades do casco que podem ser melhor trabalhados e dariam um grande potencial à ferramenta. Comenta-se aqui a inclusão de cascos que apresentem popas transom e bulbos de proa e popa. A popa transom requer uma análise específica quando da aplicação do cálculo da resistência por Michell, visto que afeta a forma estudada. A consideração de bulbo de proa e popa garante uma maior aplicação prática do problema, dado que cascos de deslocamento, em geral, apresentam estas saliências. Além disso, sua existência reduz ainda mais o valor da resistência ao avanço e que vai ao encontro do objetivo final deste trabalho. Seria interessante também que outras geometrias pudessem ser incorporadas ao processo, como cascos de semi-deslocamento, por exemplo. Já cascos de planeio fazem parte de outro grupo de cascos e o cálculo da resistência ao avanço deve ser modificado, uma vez que existe a ação de forças hidrodinâmicas envolvidas e as hipóteses de Michell não se aplicam;

- Adição de efeitos de trim, banda e arfagem: pode-se adicionar ao cálculo da resistência o efeito destes movimentos do navio em relação aos seus eixos coordenados. Tais movimentos geram alteração nas propriedades hidrostáticas e no cálculo da resistência, principalmente quando da presença de popa do tipo transom. Estes efeitos são desprezados no método de cálculo adotado neste trabalho;

- Implementação de métodos de integração mais eficientes para a integral tripla de Michell: como comentado no capítulo referente ao cálculo da resistência ao avanço, foi implementada uma aproximação de cálculo proposta por Nowacki; Bloor e Oleksiewickz (1995) para a integral em relação ao ângulo θ . Isto aumenta a rapidez de cálculo. O mesmo autor sugere que se conduza outra forma de cálculo da integral para a superfície do casco, em relação aos eixos X e Z . Método de integração como a quadratura ajudam a contornar alguns problemas numéricos apresentados neste capítulo;

- Consideração dos pesos das funções *B-Splines* racionais: como mencionado, as funções *B-Splines* racionais apresentam pesos associados a cada

ponto de controle sobre a curva. A variação destes pesos pode resultar em outro tipo de solução ótima para o problema de otimização da forma, dependendo quais pontos da geometria são priorizados (dado maior peso). A utilização destes pesos pode fornecer outros resultados interessantes que não necessariamente são considerados dentro do método apresentado. É preciso levar em conta que por ser mais complicada a função *B-Spline* racional, suas derivadas e demais funções resultantes desta são também ainda mais complexas, gerando maior consumo para processamento computacional.

8 Conclusões

Existem alguns trabalhos (Gammon, 1990 e Harries; Nowacki, 1999, por exemplo) que enveredam por esta mesma linha de análise e redução da resistência ao avanço. No entanto, em sua grande maioria, são feitas análises para cascos com formas um pouco mais simples. Geralmente com geometrias de casco mais facilmente trabalhadas, como é o caso do casco de Wigley.

A proposta deste trabalho visou principalmente estudar, modelar, descrever e otimizar embarcações com a existência de um corpo paralelo médio. Sua natureza ocasiona complicações no procedimento de análise, visto que a forma do casco não pode ser descaracterizada. Para que isso não ocorra, abre-se mão de algumas “liberdades” quanto à variação das variáveis de projeto, introduzindo-se restrições que não permitam uma deformação ou ondulação na malha do casco.

Quanto à modelagem inicial através de curvas *B-Splines* cúbicas de superfície, notou-se a importância em se ter uma informação das cotas do navio em sua popa e proa bastante detalhada. A falta de uma informação precisa pode gerar um resultado menos acurado ao final do processo. No entanto, ainda com esta deficiência, percebe-se que o resultado tanto da modelagem quanto das propriedades hidrostáticas é exato. Isso dá uma maior segurança para afirmar que funções *B-Splines* cúbicas podem modelar um casco com boa precisão.

É certo também que um processo de aproximação por este tipo de função fornece resultados melhores em termos visuais quando comparado com o método de interpolação. A sua grande desvantagem está na necessidade de resolver um processo de otimização ainda na etapa de equacionamento e representação do casco. Como já comentado, sempre que um processo deste é executado, o tempo de processamento requerido é bem maior, e muitas vezes sem a contrapartida da melhoria dos resultados obtidos. No caso proposto neste trabalho, como a idéia da modelagem é poder gerar pontos iniciais para um processo de otimização posterior, o processo de interpolação mostra-se bastante eficaz e sua relação tempo de implementação-tempo de processamento é bem mais vantajosa.

O método de cálculo das propriedades hidrostáticas (geração de painéis e cálculo vetorial) também corresponde com bons resultados de precisão para as

diversas propriedades calculadas pelo **NAVSTAB**. Embora não sendo o foco deste trabalho, a garantia de que os valores encontrados estão próximos aos reais permite dizer que não só a modelagem feita é válida como também o processo aplicado pelo **NAVSTAB**.

Estas duas conclusões para os dois primeiros capítulos permitiram a continuação do trabalho e o cálculo da resistência ao avanço. Isto porque, tanto a modelagem afeta o cálculo da resistência devido à geração de ondas, dada pelo método de Michell, como também as propriedades como área da superfície molhada e volume fornecidas pelo **NAVSTAB** são usadas diretamente no cálculo da resistência.

Em particular, para o método de Michell usado neste trabalho, recomenda-se que algumas análises prévias sejam feitas. Primeiro quanto à aderência das hipóteses adotadas pelo método quanto à relação comprimento-boca, além das demais levantadas no capítulo referente. Segundo quanto à análise de sensibilidade para a variação dos parâmetros que compõem a fórmula de Michell, como o intervalo de variação do ângulo θ , quantidade de balizas e linhas d'água e, principalmente, a velocidade de projeto que se vai ser adotada para a otimização. Viu-se ao longo deste trabalho que para um baixo número de Froude os resultados da resistência tendem a ser menos precisos que para valores maiores, uma vez que o efeito da resistência devido à geração de ondas é maior no segundo caso.

Logo, é muito importante garantir, antes de se aplicar o processo de otimização, que o cálculo da resistência a partir do método de Michell apresente bons resultados e que são aplicáveis ao problema formulado.

Já o método de otimização utilizando a função *fmincon* do **MATLAB**® garante uma convergência para o problema apresentado. Sua grande desvantagem está associada à necessidade de estimativa da derivada de cada variável de projeto tanto para a função objetivo como para as restrições não lineares. Assim, quanto maior a quantidade de variáveis de projeto, maior o tempo de processamento. A redução sensível do número destas variáveis através da utilização de fatores de escala mostrou-se bastante eficiente em termos de tempo de processamento, levando a bons resultados. Há de se ressaltar que se devem trabalhar as variáveis de projeto dentro de um universo controlado de possíveis soluções, garantido através das restrições impostas.

As restrições são também eficientes para evitar distorções e descaracterizações na malha e forma dos cascos. Pode ser que existam outras maneiras de se abordar o problema. Estas, no entanto, mostraram que é possível trabalhar com cascos de deslocamento e obter variação da sua geometria sem prejudicar sua forma.

Seguramente seria muito mais rápido em termos de processamento se a função de otimização fosse desenvolvida em um programa em linguagem C++, por exemplo. O **MATLAB**® deixa um pouco a desejar quanto ao seu tempo de execução. No entanto, por ser um programa comercial vastamente utilizado no meio acadêmico, a utilização de alguns de seus recursos torna-se bastante vantajosa.

Por último, a aplicação de toda a teoria consolidada neste trabalho permite a melhoria da geometria de um casco de deslocamento padrão, apresentado na Figura 2.14. Ainda que com a possibilidade de se conduzir mais iterações para o processo de otimização, o ganho que se obtém para a resistência ao avanço já justifica o tempo despendido pelo método como um todo. Uma redução da ordem de 20% da resistência final do navio é bastante expressiva, principalmente se comparamos com a redução do volume sem alteração de sua forma (decréscimo de 5% da resistência apenas).

De maneira mais detalhada, o procedimento de otimização apresentado de forma sintética na introdução deste trabalho na Figura 1.3, pode ser aqui melhor elaborado, conforme mostrado na Figura 8.1.

Figura 8.1: Visão final do procedimento estudado nesta dissertação.

Como já explicado, inicia-se o procedimento para otimização a partir dos requisitos estabelecidos pelo armador. Estes requisitos são importantes para buscar navios semelhantes com cotas já conhecidas, os quais podem ser modelados por funções *B-Splines* de linha. Quando usadas para a modelagem de linhas d'água, estas funções permitem a inserção de novas balizas interpoladas, que por sua vez também podem ser equacionadas para criação de novas linhas d'água.

Uma vez com o modelo em “arame” da embarcação, modela-se o casco com equações *B-Splines* de superfícies. A modelagem do casco permite o cálculo inicial tanto das propriedades hidrostáticas quanto da resistência ao avanço. Junto às restrições, tem-se o problema de otimização montado. Ainda assim, como já enfatizado neste trabalho, é importante a condução de uma análise de sensibilidade dos parâmetros antes da execução do processo, dado que a relação de tempo de processamento/acurácia da solução deve ser avaliada. Assim, após a definição da discretização das variáveis, otimiza-se a geometria e obtém-se sua forma final. Por último, desenham-se os gráficos de resistência ao avanço e das propriedades hidrostáticas.

Assim, de acordo com os objetivos inicialmente propostos para este trabalho, logrou-se êxito em seus resultados. Trabalhos futuros podem seguir o processo proposto nesta dissertação e criar novas possibilidades de avaliação da função objetivo, melhorando o desempenho de processamento computacional e ampliando o escopo do procedimento.

9 Referências²⁵

- ALVAREZ, R. L. P.; MARTINS, M. R. **Determination of Floating Units Hydrostatic Properties.** Equador: XIX Congresso Pan-americano de Engenharia Naval, Transporte Marítimo e Engenharia Portuária, 2005.
- BROYDEN, C. G. **The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms.** Journal of the Institute of Mathematics and its Applications, 1970. 6v, páginas 76-90.
- COLEMAN, T. F.; LI, Y. On the Convergence of Reflective Newton Methods for Large-Scale Nonlinear Minimization Subject to Bounds. Mathematical Programming, 1994. 67v, número 2, páginas 189-224.
- DEBNATH, L. **Nonlinear Water Waves.** Academic Press, 1994.
- DE CONTI, M. B. **Algumas Considerações sobre Representação e Estima de Atributos de Embarcações.** 2004. Tese (Livre Docência) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.
- EVANS, J. H. **Basic Design Concepts.** Naval Engineers Journal, Novembro 1959.
- FARIN, G. Curves and Surface for Computer Aided Geometric Design. Academic Press, 1997.
- FILON, L. N. G. **On a quadrature formula for Trigonometric Integrals.** Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1929. 49v, páginas 38-47.
- FLETCHER, R. **A New Approach to Variable Metric Algorithms.** Computer Journal, 1970. 13v, páginas 317-322.
- GAMMON, M. A. **Modifying Thin Ship Wave Resistance Computation for Transom Stern Vessels.** 1990. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Dalhousie, Halifax, Canadá, 1990.
- GERRITSMA, J.; KEUNING, J.A.; ONNINK, R. **The Delft Systematic Series II experiments.** International Ship Building Progress, 1981. 28v, número 328.

---

²⁵ Utilizado sistema autor-data.

- GOLDFARB, D. **A Family of Variable Metric Updates Derived by Variational Means**. Mathematics of Computing, 1970. 24v, páginas 23-26.
- HARRIES, S.; NOWACKI, H. **Form Parameter Approach to the Design of Fair Hull Shapes**. Cambridge: 10th International Conference on Computer Application in Shipbuilding, 1999.
- HAVELOCK, T. H. **Studies in Wave Resistance: Influence of the form of Water-Plane Section of the Ship**. Londres: Proceedings of the Royal Society of London, 1923, A, 103v, páginas 571-585.
- _____. **Studies in Wave Resistance: The effect of parallel Middle Body**. Londres: Proceedings of the Royal Society of London, 1925, A, 108v, páginas 77-92.
- _____. **Wave Resistance: The effect of Varying Draught**. Londres: Proceedings of the Royal Society of London, 1925. A, 108v, páginas 582-591.
- _____. **The Approximate Calculation of Wave Resistance at High Speed**. Transactions of the North-East Coast Institute of Engineers and Shipbuilders, 1943-1944. 60v, páginas 47-58.
- _____. **Wave Resistance and its Application to Ship Problems**. Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1951. 59v, páginas 13-24.
- HOLTROP, J. **A Statistical Analysis of Performance Test Results**. International Shipbuilding Progress, 1977. 24v.
- _____. **A Statistical Re-analysis of Resistance and Propulsion Data**. International Shipbuilding Progress, 1984. 31v.
- LEWIS, E. V. **Principles of Naval Architecture**. The Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1988. 2^a edição, 2v, páginas 1-125.
- LUNDE, J. K. **Wave Resistance Calculations at High Speeds**. Transactions of the Institution of Naval Architects, 1949. 91v, páginas 182-190.

- MATURANA, M.; MARTINS, M. R. **Determinação das propriedades hidrostáticas de unidades flutuantes.** São Paulo: Relatório de iniciação científica – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.
- MICHELL, J. H. **The Wave Resistance of a Ship.** Philosophical Magazine, 1898. 45v.
- MICHELSSEN, F. C. **Wave Resistance Solution of Michell's Integral for Polynomial Ship Forms.** 1960. Tese (Doutorado) – Universidade de Michigan, Michigan, 1960.
- MORTON, G. A Reanalysis of the Original Test Data for the Taylor Standard Series. Navy Department, 1954.
- NEWMAN, J. N. **Marine Hydrodynamics.** MIT Press, 1977.
- NOWACKI, H.; BLOOR, M. I. G.; OLEKSIEWICZ, B. **Computational Geometry for Ships.** World Scientific, 1995. 238p.
- POWELL, M. J. D. A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations. Numerical Analysis, 1978. Editora G.A.Watson, 630v.
- PRENTER, P. M. **Splines and Variational Methods.** Editora J. Wiley and Sons, 1985.
- RAWSON, K. J.; TUPPER, E. C. **Basic Ship Theory.** Nova Iorque: Volume 1 e 2, Ship Dynamics and Design, 1984. 3ª edição, The Pitman Press Limited.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais.** Editora Makron Books, 1996. 2ª. Edição.
- SILVA, E. C. N. **PMR-5215 – Otimização Aplicada ao Projeto de Sistemas Mecânicos.** São Paulo: Apostila de curso – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.
- SCHEARER, J. R. **A Preliminary Investigation of the Discrepancies Between the Calculated and Measured Wavemaking of Hull Forms.** Transactions of the North-East Coast Institute of Engineers and Shipbuilders, 1951. 67v, páginas 41-68.

- SHANNO, D. F. **Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization.** Mathematics of Computing, 1970. 24v, páginas 647-656.
- SORENSEN, D. C. **Minimization of a Large Scale Quadratic Function Subject to an Ellipsoidal Constraint.** Relatório Técnico TR94-27 - Departamento de Matemática Computacional e Aplicada, Universidade Rice, Houston, Estados Unidos, 1994.
- STEIHAUG, T. **The Conjugate Gradient Method and Trust Regions in Large Scale Optimization.** SIAM Journal on Numerical Analysis, 1983. 20v, páginas 626-637.
- TAYLOR, D. W. Calculations of Ships' Forms and Light Thrown by Model Experiments upon Resistance, Propulsion and Rolling of Ships. Estados Unidos: International Congress of Engineering, 1915.
- TODD, F. H. Some Further Experiments on Single-Screw Merchant Ship Forms - Series 60. Trans. SNAME, 1953. 61v.
- TUCK, E. O. **Wave Resistance of Thin Ships and Catamarans.** Austrália: Universidade de Adelaide, 1997.
- TUCK, E. O.; SCULLEN, D. C.; LAZAUSKAS, L. **Wave Patterns and Minimum Wave Resistance for High-Speed Vessels.** Japão: 24th Symposium on Naval Hydrodynamics, 2002.
- VERSLUIS, A. **Computer Aided Design of Shipform by Affine Transformation.** International Shipbuilding Progress, 1977. 24v, número 274.
- WIGLEY, W. C. S. **Ship Wave Resistance: A Comparison of Mathematical Theory with Experimental Results.** Transactions of the Institution of Naval Architects, 1926. 68v, páginas 124-137.
- _____. **Ship Wave Resistance: A Comparison of Mathematical Theory with Experimental Results.** Transactions of the Institution of Naval Architects, 1927. 69v, Parte II, páginas 191-196.
- _____. Ship Wave Resistance. Some Further Comparisons of Mathematical Theory with Experimental Results. Transactions of the Institution of Naval Architects, 1930. 72v, páginas 216-224.

- _____. A Comparison of Experimental and Calculated Wave-Profiles and Wave Resistance for a Form Having Parabolic Waterlines. Proceedings of the Royal Society of London, 1934. 144v, páginas 144-149.
- _____. Calculated and Measured Wave Resistance for a Series of Forms Defined Algebraically, the Prismatic Coefficient and Angle of Entrance Being Varied Independently. Transactions of the Institution of Naval Architects, 1942. 84v, páginas 52-71.
- WEINBLUM, G. P. **Untersuchungen über den Wellenwiderstand Volliger Schiffsförmern.** Jahrbuch Schiffbau Gesellschaft, 1934. 35v, páginas 164-192.

Apêndice A: Funções B-Splines Racionais

As funções *B-Splines* de linha racionais são definidas por De Conti (2004) e Nowacki; Bloor e Oleksiewickz (1995) como:

$$\vec{r}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{L+k-1} w_j \cdot \vec{d}_j \cdot N_j^k(t)}{\sum_{j=0}^{L+k-1} w_j \cdot N_j^k(t)} \quad (\text{A.1})$$

onde w_j são os chamados pesos associados a cada ponto de controle distinto sobre a curva.

Em verdade, as funções *B-Splines* implementadas computacionalmente apresentam a forma da Equação (A.1), mas com pesos w_j constantes e iguais a 1. Se o peso w_j for nulo significa que a curva deverá desconsiderar o ponto no método de interpolação. A utilização de pesos diferentes é mais aplicada ao processo de aproximação, visto que quanto maior o peso para um determinado ponto, mais próximo dele a curva deve passar. No caso da interpolação, como se trata da solução de um sistema de equações, a curva obrigatoriamente passa por ele.

Lembrando que pelo teorema de Cauchy: $\sum_{j=0}^n N_j^k(t) = 1$, se $w_j = 1$, para $0 \leq j \leq n$, então a Equação (A.1) reduz-se à própria Equação (2.24).

A primeira e segunda derivadas da Equação (A.1) são dadas por:

$$\frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial t} = \frac{\left[\sum_{j=0}^{L+k-1} w_j \cdot \vec{d}_j \cdot \frac{\partial N_j^k(t)}{\partial t} \right] - \vec{r}(t) \cdot \left[\sum_{j=0}^{L+k-1} w_j \cdot \frac{\partial N_j^k(t)}{\partial t} \right]}{\left[\sum_{j=0}^{L+k-1} w_j \cdot N_j^k(t) \right]} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}(t)}{\partial t^2} = \frac{\left[\sum_{j=0}^{L+k-1} w_j \cdot \vec{d}_j \cdot \frac{\partial^2 N_j^k(t)}{\partial t^2} \right] - \vec{r}(t) \cdot \left[\sum_{j=0}^{L+k-1} w_j \cdot \frac{\partial^2 N_j^k(t)}{\partial t^2} \right] - 2 \cdot \frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial t} \cdot \left[\sum_{j=0}^{L+k-1} w_j \cdot \frac{\partial N_j^k(t)}{\partial t} \right]}{\left[\sum_{j=0}^{L+k-1} w_j \cdot N_j^k(t) \right]} \quad (\text{A.3})$$

Já as funções *B-Splines* de superfície racionais são definidas por:

$$\vec{r}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} w_{ij} \cdot \vec{d}_{ij} \cdot N_i^{k_a}(u) \cdot N_j^{k_b}(v)}{\sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} w_{ij} \cdot N_i^{k_a}(u) \cdot N_j^{k_b}(v)} \quad (\text{A.4})$$

onde w_{ij} são os pesos associados a cada ponto de controle distinto sobre a superfície.

Sabendo-se que $\sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} N_i^{k_a}(u) \cdot N_j^{k_b}(v) = 1$ e adotando-se $w_{ij} = 1$ para $0 \leq i \leq L_a + k_a - 1$ e $0 \leq j \leq L_b + k_b - 1$, a Equação (A.4) reduz-se à Equação (2.30).

A primeira e segunda derivadas em relação a u e v ficam:

$$\frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} = \frac{\left[\sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} w_{ij} \cdot \vec{d}_{ij} \cdot \frac{\partial N_i^{k_a}(u)}{\partial u} \cdot N_j^{k_b}(v) \right] - \vec{r}(u, v) \cdot \left[\sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} w_{ij} \cdot \frac{\partial N_i^{k_a}(u)}{\partial u} \cdot N_j^{k_b}(v) \right]}{\left[\sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} w_{ij} \cdot N_i^{k_a}(u) \cdot N_j^{k_b}(v) \right]} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}(u, v)}{\partial u^2} = \frac{\left[\sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} w_{ij} \cdot \vec{d}_{ij} \cdot \frac{\partial^2 N_i^{k_a}(u)}{\partial u^2} \cdot N_j^{k_b}(v) \right] - \vec{r}(u, v) \cdot \left[\sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} w_{ij} \cdot \frac{\partial^2 N_i^{k_a}(u)}{\partial u^2} \cdot N_j^{k_b}(v) \right] - 2 \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} \cdot \left[\sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} w_{ij} \cdot \frac{\partial N_i^{k_a}(u)}{\partial u} \cdot N_j^{k_b}(v) \right]}{\left[\sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} w_{ij} \cdot N_i^{k_a}(u) \cdot N_j^{k_b}(v) \right]} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} = \frac{\left[\sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} w_{ij} \cdot \vec{d}_{ij} \cdot N_i^{k_a}(u) \cdot \frac{\partial N_j^{k_b}(v)}{\partial v} \right] - \vec{r}(u, v) \cdot \left[\sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} w_{ij} \cdot N_i^{k_a}(u) \cdot \frac{\partial N_j^{k_b}(v)}{\partial v} \right]}{\left[\sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} w_{ij} \cdot N_i^{k_a}(u) \cdot N_j^{k_b}(v) \right]} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}(u, v)}{\partial v^2} = \frac{\left[\sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} w_{ij} \cdot \vec{d}_{ij} \cdot N_i^{k_a}(u) \cdot \frac{\partial^2 N_j^{k_b}(v)}{\partial v^2} \right] - \vec{r}(u, v) \cdot \left[\sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} w_{ij} \cdot N_i^{k_a}(u) \cdot \frac{\partial^2 N_j^{k_b}(v)}{\partial v^2} \right] - 2 \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} \cdot \left[\sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} w_{ij} \cdot N_i^{k_a}(u) \cdot \frac{\partial N_j^{k_b}(v)}{\partial v} \right]}{\left[\sum_{i=0}^{L_a+k_a-1} \sum_{j=0}^{L_b+k_b-1} w_{ij} \cdot N_i^{k_a}(u) \cdot N_j^{k_b}(v) \right]} \quad (\text{A.8})$$

Para as funções *B-Splines* cúbicas racionais, basta que nas Equações (A.1), (A.2) e (A.3) coloque-se $k = 3$ e nas Equações (A.4), (A.5), (A.6), (A.7) e (A.8) coloque-se $k_a = k_b = 3$.

Apêndice B: Cálculo da Energia das Linhas e Superfície

Ao invés de se trabalhar com interpolação, pode-se utilizar o método da aproximação por *B-Splines*. Desta forma, a superfície não passaria exatamente sobre os pontos do casco semelhante como no caso da interpolação, mas próxima a eles, segundo restrições impostas.

Uma das maneiras é proposta por Nowacki; Bloor e Oleksiewickz (1995), De Conti (2004) e Harries e Nowacki (1999), em que a função objetivo é dada pelas medidas de carenagem E_1 (medida de elasticidade), E_2 (medida de flexão) e E_3 (medida de torção). Desta forma, a função objetivo para o caso de curvas seria dada pelo mínimo de:

$$\sum_{r=1}^3 \alpha_r \cdot E_r = \sum_{r=1}^3 \alpha_r \int_{t_B}^{t_E} \left\{ \sum_{s=1}^3 \left(\frac{\partial^r \vec{r}_s(t)}{\partial t^r} \right)^2 \right\} dt \quad (\text{B.1})$$

onde $s = 1, 2, 3$ são as componentes de $\vec{r}(t)$ na curva, t_B e t_E são os valores paramétricos no início e no fim da curva t e α_r são os pesos para cada componente da energia.

Como restrições para casos no plano, De Conti (2004) e Harries e Nowacki (1999) sugerem que se utilize: passar por alguns pontos, definir algumas tangentes, curvas normais, curvaturas e áreas seccionais.

Em Nowacki; Bloor e Oleksiewickz (1995), encontra-se a seguinte expressão para restrições nos pontos:

$$A = \sum_{i=0}^n \left\{ w_i \left(\vec{r}(t_i) - P_i \right) \right\}^2 - \varepsilon \leq 0 \quad (\text{B.2})$$

onde w_i são os pesos para cada ponto, $n+1$ é o número total de pontos e ε é a tolerância de desvio em relação aos pontos iniciais do casco P_i . Esta seria a opção mais próxima ao método de interpolação proposto no Capítulo 2, visto que o critério adotado está relacionado à proximidade dos pontos.

O processo de aproximação por si só leva bastante tempo para obter um valor ótimo, tendo em vista a quantidade de cálculos feitos, principalmente derivadas, e pelo número de pontos envolvidos. Por outro lado, o processo de interpolação permite, como já demonstrado, uma boa precisão na definição do casco em um tempo de processamento muito rápido. Isto justifica a opção por interpolação e não por aproximação.

Nowacki; Bloor e Oleksiewickz (1995) também fazem uma análise para os casos de *B-Splines* de superfície, cuja função objetivo seria o mínimo da medida de flexão E_2 :

$$E_2 = \iint_{\Omega} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) d\Omega \quad (B.3)$$

onde κ_1 e κ_2 são chamadas de curvaturas normais principais e são raízes da equação:

$$\begin{vmatrix} E\kappa - e & F\kappa - f \\ F\kappa - f & G\kappa - g \end{vmatrix} = 0 \quad (B.4)$$

em que E , F , G , e , f e g , são chamados de coeficientes fundamentais da primeira e segunda formas fundamentais de uma superfície e são dados por:

$$E = \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u}, \quad F = \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v}, \quad G = \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} \quad (B.5)$$

$$e = \frac{\partial^2 \vec{r}(u, v)}{\partial u^2} \cdot \vec{n}, \quad f = \frac{\partial^2 \vec{r}(u, v)}{\partial u \partial v} \cdot \vec{n}, \quad g = \frac{\partial^2 \vec{r}(u, v)}{\partial v^2} \cdot \vec{n}, \quad \text{com } \vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} \right|} \quad (B.6)$$

cujas deduções estão apresentadas nos Apêndices D e E. O vetor $\vec{n}$ é chamado de versor normal a um ponto da superfície, definido pelos parâmetros u e v .

As mesmas restrições aplicadas para uma linha podem ser aplicadas a uma superfície. No entanto, em vez de áreas, podem-se utilizar volumes. Para as restrições para os pontos, pode-se adaptar a Equação (B.2) por:

$$A = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n \left\{ w_{ij} \left(\vec{r}(u_i, v_j) - P_{ij} \right) \right\}^2 - \varepsilon \leq 0 \quad (B.7)$$

onde w_{ij} são os pesos para cada ponto, $n+1$ e $m+1$ são os números totais de pontos nas direções u e v e ε é a tolerância de desvio em relação aos pontos iniciais do casco P_{ij} .

Apêndice C: Dedução da Equação de Michell

A dedução apresentada aqui para a equação de Michell (1898) é um resumo do apresentado em Newman (1977) e algumas passagens matematicamente mais complicadas e extensas estão omitidas, mas recomenda-se a quem queira maiores detalhes sobre simplificações e hipóteses, recorrer à bibliografia citada ou então a Debnath (1994), cujo capítulo 5 traz a mesma teoria aplicada a diversas situações.

A partir do potencial de ondas para profundidade infinita, pode-se obter a seguinte expressão para a elevação da superfície da água de um mar formado por diversas frequências e correspondentes amplitudes:

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^N \text{Re} \left[A_n e^{-ik_n x + i\omega_n t} \right] \quad (\text{C.1})$$

Se o número total de frequências discretas tender ao infinito enquanto a diferença entre elas tender a zero, a soma discreta pode ser reescrita como:

$$\eta(x, t) = \text{Re} \int_0^{\infty} A(\omega) e^{-ik(\omega)x + i\omega t} d\omega \quad (\text{C.2})$$

Estas distribuições unidirecionais podem ser estendidas para duas ou três dimensões introduzindo ondas generalizadas no espaço que forma um ângulo θ com o eixo longitudinal da embarcação (Figura C.1):

$$\eta(x, y, t) = \text{Re} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} A(\omega, \theta) e^{-ik(\omega)(x \cos \theta + y \sin \theta) + i\omega t} d\theta d\omega \quad (\text{C.3})$$

Aplicando-se esse resultado para um sistema de referência que se move na direção positiva do eixo X com velocidade V substitui-se na expressão anterior “ x ” por “ $x + Vt$ ”:

$$\eta(x, y, t) = \text{Re} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} A(\omega, \theta) e^{-ik(\omega)(x \cos \theta + y \sin \theta) + i(\omega - \kappa V \cos \theta)t} d\theta d\omega \quad (\text{C.4})$$

O número de onda (κ) deve respeitar sempre a relação de dispersão para profundidade infinita.

Figura C.1: Navio “fino” de Michell.

Se o movimento é estacionário no sistema de referência que se move com o navio, a Equação (C.4) deve ser independente do tempo, estabelecendo uma relação fixa entre o número de onda e a velocidade de fase:

$$\omega - \kappa V \cos \theta = 0 \Rightarrow V_f = \frac{\omega}{\kappa} = V \cos \theta \quad (C.5)$$

Para profundidade infinita tem-se então:

$$\kappa(\theta) = \frac{g}{V^2 \cos^2 \theta} \quad (C.6)$$

Percebe-se que um sistema composto por ondas progressivas planas, movendo-se com um ângulo θ em relação ao eixo X parecerá parado a um observador se movendo na direção X com uma velocidade $V_f \sec \theta$. A Equação (C.5) requer que $\cos \theta > 0$ e permite a redução de uma variável do problema, portanto pode-se reescrever (C.4) da forma:

$$\eta(x, y, t) = \text{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} A(\omega, \theta) e^{-ik(\omega)(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\theta \quad (C.7)$$

Para a resolução do problema da resistência de ondas deseja-se obter uma solução assintótica para a equação (C.7) que seja uma boa aproximação para uma distância “grande”, se comparada ao comprimento de onda, a partir da origem. O problema padrão a ser resolvido é:

$$I = \int F(\theta) e^{iRG(\theta)} d\theta \quad (C.8)$$

onde F e G são funções regulares arbitrárias de θ e R é um parâmetro “grande”, como por exemplo o raio polar. F pode ser uma função Complexa, mas G deve ser Real. Newman (1977) desenvolve essas funções com diversas aproximações em torno de um ponto de referência θ_0 qualquer e valores $R \rightarrow 0$ e chega aos seguintes resultados:

$$RG(\theta) = \frac{g}{V^2} (x \sec \theta + y \sec^2 \theta \tan \theta) \quad (C.9)$$

$$I \simeq F(\theta) \left(\frac{2\pi}{|R\ddot{G}|} \right)^{1/2} e^{i(RG \pm \pi/4)} \quad (C.10)$$

Por analogia entre (C.8) e (C.7), chega-se a uma nova expressão para a elevação do nível do mar:

$$\eta = \text{Re} \left[A(\theta) \left(\frac{2\pi}{|R\ddot{G}|} \right)^{1/2} e^{i(RG(\theta) \pm \pi/4)} \right] \quad (C.11)$$

O sinal mais ou menos da fase de equação corresponde aos sistemas de onda transversais e divergentes, respectivamente. A amplitude das ondas é proporcional ao inverso da raiz do raio polar. Essa taxa de atenuação é explicada pelo fato da energia em um problema tridimensional espalhar-se radialmente em todas as direções no plano horizontal.

A resistência de ondas pode ser calculada para o problema tridimensional a partir da energia irradiada pelo navio e que permanece na sua esteira, como no caso simples bidimensional. Um volume de controle é criado, limitado por um plano vertical em uma posição $x = \text{constante}$ que se move com a embarcação (como na Figura C.1) e que está contida em sua esteira. Nesse volume a energia do fluido é constante e o fluxo através das superfícies de controle representa o trabalho impresso pelo navio no fluido para manter a velocidade. Essa é a resistência de ondas.

Nesse referencial fixo ao navio a componente de cada onda unidirecional move-se com ângulo θ em relação ao eixo X com velocidade de grupo V_g . A taxa de transferência de energia através da superfície, que se move com velocidade V , é dada por $V_g \cos \theta - V$, que, multiplicando-se pela densidade de energia e integrando-se ao longo da largura do volume de controle, resulta no fluxo total de energia movendo-se na direção positiva de X :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \rho g \int_{-\infty}^{\infty} A^2 (V_g \cos \theta - V) dy \quad (C.12)$$

A integral que representa o fluxo de energia pode ser estendida para o caso em que a amplitude de onda A e a direção θ dependem da posição (x, y) . Admitindo que estas variáveis mudam pouco em distâncias comparáveis ao comprimento de onda, o que é razoável para as componentes transversais e divergente do trem de ondas para uma distância na esteira maior que o comprimento de onda, pode-se utilizar a aproximação (C.11) para determinar as amplitudes de onda:

$$A = |A(\theta)| \left(\frac{2\pi}{|R\ddot{G}|} \right)^{1/2} \quad (C.13)$$

A velocidade de grupo corresponde à metade da velocidade de fase:

$$V_g = \frac{1}{2} V_f = \frac{1}{2} V \cos \theta \quad (C.14)$$

Combinando (C.13), (C.14) e (C.12), e igualando a variação da energia ao trabalho realizado pela embarcação (que tem sinal negativo), obtém-se:

$$\frac{dE}{dt} = -R_w V \quad (C.15)$$

$$R_w = \pi \rho g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A(\theta)|}{|R\ddot{G}(\theta)|} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right) dy \quad (C.16)$$

onde os ângulos θ relacionam-se com a posição lateral y através de:

$$\frac{y}{x} = -\frac{\cos \theta \sin \theta}{1 + \sin^2 \theta} \quad (C.17)$$

A integração em relação a y de $-\infty$ a $+\infty$ pode ser substituída por outra em relação a θ :

$$x \frac{d}{d\theta} (\sec^2 \theta \sin \theta) + y \frac{d}{d\theta} [\sec^3 \theta (1 + \sin^2 \theta)] = -\frac{dy}{d\theta} [\sec^3 \theta (1 + \sin^2 \theta)] \quad (C.18)$$

Além disso, a equação (C.9) deve ser calculada num ponto (x, y) de coordenadas fixas e isto resulta em:

$$R\ddot{G}(\theta) = \frac{g}{V^2} \left[x \frac{d}{d\theta} [\sec^2 \theta \sin \theta] + z \frac{d}{d\theta} [\sec^3 \theta (1 + \sin^2 \theta)] \right] \Big|_{(x,y)} \quad (C.19)$$

As equações (C.18) e (C.19) podem ser combinadas para obter-se a derivada de y com relação a θ :

$$\left| \frac{dz}{d\theta} \right| = \frac{|R\ddot{G}|}{\left(\frac{g}{V^2} \right) \sec^3 \theta (1 + \sin^2 \theta)} = \frac{V^2 \cos^3 \theta |R\ddot{G}|}{g (2 - \cos^2 \theta)} \quad (C.20)$$

Efetuada-se a mudança de variável:

$$R_w = \frac{1}{2} \pi \rho V^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |A(\theta)|^2 \cos^3 \theta d\theta \quad (C.21)$$

Nesta etapa do problema a hipótese de navios “finos”, ou seja, a boca da embarcação é pequena se comparada com as suas outras dimensões. A solução para as amplitudes das ondas geradas é expressa em termos de uma distribuição de fontes no plano que passa pela linha de centro do navio e cujas intensidades são dadas pela inclinação do casco no sentido longitudinal.

O potencial da fonte que satisfaz a condição de superfície livre e que possui uma solução assintótica para distâncias grandes na esteira do navio é uma função complicada e não será deduzida aqui. Maiores discussões podem ser vistas em Newman (1977).

Integrando a expressão para o potencial sobre o plano $y=0$ do navio a amplitude de onda é dada por:

$$A(\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{g}{V^2} \sec^3 \theta \iint \frac{\partial \zeta(x, z)}{\partial x} e^{\left[\left(\frac{g}{V^2}\right) \sec^2 \theta (z - ix \cos \theta)\right]} dx dz \quad (C.22)$$

onde $\zeta(x, z) = \pm y$ é a meia-boca da embarcação.

Se a função da amplitude (C.22) for substituída em (C.21), obtém-se uma forma particular da **Equação de Michell** (1898):

$$R_w = \frac{4\rho g^2}{\pi V^2} \int_0^{\pi/2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-T}^0 \left[\sec^3(\theta) \frac{\partial \zeta(x, z)}{\partial x} e^{\left[\left(\frac{g}{V^2}\right) \sec^2 \theta (z - ix \cos \theta)\right]} \right] dz dx d\theta \quad (C.23)$$

Abrindo o termo da exponencial, chega-se a expressão:

$$R_w = \frac{4 \cdot \rho \cdot g^2}{\pi \cdot v_0^2} \int_0^{\pi/2} (H_s^2 + H_c^2) \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \quad (C.24)$$

com:

$$H_s = \iint_{\Omega} \frac{\partial \zeta(x, z)}{\partial x} \cdot e^{\left(\frac{g \cdot z}{v^2 \cdot \cos^2 \theta}\right)} \cdot \text{sen}\left(\frac{g \cdot x}{v^2 \cdot \cos \theta}\right) d\Omega \quad (C.25)$$

$$H_c = \iint_{\Omega} \frac{\partial \zeta(x, z)}{\partial x} \cdot e^{\left(\frac{g \cdot z}{v^2 \cdot \cos^2 \theta}\right)} \cdot \cos\left(\frac{g \cdot x}{v^2 \cdot \cos \theta}\right) d\Omega \quad (C.26)$$

Apêndice D: A Primeira Forma Fundamental de uma Superfície

A dedução aqui apresentada foi retirada de Nowacki; Bloor e Oleksiwickz (1995). Considere uma curva regular $\vec{r}(u, v)$ na superfície dada por $\vec{r}(u(t), v(t)) = \vec{r}(t)$. Assim, sua derivada em relação a t em um ponto P é obtida por:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} \quad (D.1)$$

Simplificando, a Equação (D.1) independente do parâmetro t , tem-se que:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot dv \quad (D.2)$$

A função do comprimento do arco da curva é dada por:

$$S(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\vec{r}}{dw} \right| dw = \int_{t_0}^t \left[\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{du}{dw} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dw} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{du}{dw} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dw} \right) \right]^{1/2} dw \quad (D.3)$$

ou:

$$S(t) = \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \left(\frac{du}{dw} \right)^2 + 2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \left(\frac{du}{dw} \right) \left(\frac{dv}{dw} \right) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \left(\frac{dv}{dw} \right)^2 \right)^{1/2} dw \quad (D.4)$$

e:

$$ds^2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du^2 + 2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dudv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv^2 \quad (D.5)$$

que é conhecida como a primeira forma fundamental e também escrita como:

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (D.6)$$

Apêndice E: A Segunda Forma Fundamental de uma Superfície

A dedução aqui apresentada foi retirada de Nowacki; Bloor e Oleksiewicz (1995). Considere uma superfície e um ponto pertencente a ela $r(u_0, v_0)$. Expandindo-se esta função por Taylor, tem-se que:

$$r(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) = r(u_0, v_0) + \frac{\partial r}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial r}{\partial v} \Delta v + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^2} \Delta u^2 + 2 \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} \Delta v^2 \right) \dots \quad (\text{E.1})$$

Considere agora a função escalar:

$$\rho(u, v) = [r(u, v) - r(u_0, v_0)] \cdot n(u_0, v_0) \quad (\text{E.2})$$

onde $u = u_0 + \Delta u$, $v = v_0 + \Delta v$ e $n(u_0, v_0)$ é o versor normal à superfície no ponto (u_0, v_0) .

A função $\rho(u, v)$ pode ser interpretada como a distância perpendicular do plano tangente ao ponto $r(u_0, v_0)$ ao ponto $r(u, v)$. Fazendo o produto escalar da Equação (E.1) com a normal $n(u_0, v_0)$, obtém-se:

$$\rho(u, v) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2} \cdot \vec{n} \right) \Delta u^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v} \cdot \vec{n} \right) \Delta u \Delta v + \left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2} \cdot \vec{n} \right) \Delta v^2 \right) + \dots \quad (\text{E.3})$$

Esta equação entre parênteses é conhecida como a segunda forma fundamental de uma superfície e também é escrita como:

$$II = \frac{1}{2} (e \Delta u^2 + 2f \Delta u \Delta v + g \Delta v^2) \quad (\text{E.4})$$