UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
NAVAL E OCEÂNICA

Método Probabilístico para o Estudo de Sistemas Dinâmicos Não-lineares

Autor: **Claudio Gomes Fernandes**
Orientador: **Prof. Dr. Jessé d'Assunção Rebello de Souza Junior**

Outubro-2009

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA NAVAL E OCEÂNICA

Método Probabilístico para o Estudo de Sistemas Dinâmicos Não-lineares: Uma Aplicação em Dinâmica Veicular

Autor: **Claudio Gomes Fernandes**
Orientador: **Prof. Dr. Jessé d'Assunção Rebello de Souza Junior**

Área de concentração: Engenharia Naval e Oceânica

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Naval e Oceânica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Doutor em Engenharia.

São Paulo, 2009
S.P. - Brasil

Agradecimentos

À minha esposa, pela paciência, à minha família, pelo suporte desde minha infância, e a Deus, acima de tudo.

"Nunca o homem inventará nada mais simples nem mais belo do que uma manifestação da natureza. Dada a causa, a natureza produz o efeito no modo mais breve em que pode ser produzido."

Leonardo da Vinci

Resumo

Fernandes, Claudio Gomes, *Método Probabilístico para o Estudo de Sistemas Dinâmicos Não-lineares.* São Paulo, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2009, 123 p. Tese (Doutorado).

O método aqui desenvolvido, bem como as aplicações feitas ao estudo de sistemas clássicos da dinâmica não-linear, tiveram por objetivo construir uma ferramenta adequada à descrição das características globais de fenômenos complexos da dinâmica não-linear. Uma característica típica da descrição probabilística do comportamento dinâmico de um sistema é sua expressão em termos da evolução temporal da função densidade de probabilidade dos estados, que é governada por uma equação diferencial linear, em contraste com a descrição temporal convencional, utilizada em dinâmica não-linear. Enquanto esta última, comumente dita determinística, exibe fenômenos tais como instabilidades, bifurcações, sensibilidade a condições iniciais etc, a descrição probabilística se manifesta, quando o sistema dinâmico detém propriedades de ergodicidade, em uma evolução não-reversível da função densidade de probabilidade em direção a um estado final invariante, mais especificamente tendendo ao equilíbrio global de um sistema linear. Este trabalho visa a aplicação da teoria probabilística da evolução de densidades de probabilidade em um problema de capotamento de veículos. Para isso, a teoria é descrita por meio de seus fundamentos e aplicada primeiramente em modelos clássicos da dinâmica não-linear, que, por serem bem estudados, podem comprovar a validade, bem como a extensão dessa forma de análise.

Abstract

The method developed in this work, as well as its application in classical non-linear dynamics systems, had the main purpose of building a suitable tool in describing global complex phenomena of non-linear dynamics. A typical feature of the probabilistic approach of dynamics systems behavior is the ability to express it as a temporal probability density function evolution in terms of a linear evolution equation, which is ruled by a linear differential equation, as opposed to the regular temporal description used in non-linear dynamics. While the aforementioned description, also called deterministic, may face a variety of phenomena such as instabilities, bifurcation, high sensibility to initial conditions etc, in the probabilistic approach, as long as the dynamic system enjoys some ergodic properties, the probability density function will be driven irreversibly to a final invariant state, towards a global equilibrium of a linear system. This work consists in the application of probabilistic theory of density evolution in the problem of vehicle rollover subject to a certain maneuver. In order to accomplish that, all theory described is firstly applied to classical problems of non-linear dynamics, since they have many established results, and as such, can validate and extend this sort of analysis for any dynamic system.

Índice

Resumo **v**

Abstract **vi**

1 Introdução **1**

2 Revisão Bibliográfica **5**

3 Fundamentos da Teoria de Probabilidades **14**

3.1 Introdução 14

3.2 Operadores de Frobenius Perron 20

3.3 Operadores infinitesimais 23

3.4 Operadores infinitesimais de sistemas de equações diferenciais ordinárias 25

4 Aplicações em Modelos Matemáticos **30**

4.1 Oscilador de Duffing 30

4.2 Resultados para o oscilador de Duffing 35

4.3 Equação de Escape 44

4.4 Resultados para a equação de Escape 45

4.5 Oscilador de Van der Pol 51

4.6 Resultados para o oscilador de Van der Pol 54

5 Aplicação em dinâmica veicular **59**

5.1 Modelos de dinâmica veícular 60

5.1.1 Obtenção do modelo arquetípico de veículo 64
5.2 Validação do modelo arquetípico 75
5.3 Obtenção da distribuição de ocorrências do modelo arquetípico 84
5.4 Resultados 91
5.4.1 Estudo paramétrico 91
5.4.2 Densidades para tipos de veículos 110

6 Conclusões **114**

Bibliografia **117**

A Características de classes de veículos **121**

Lista de Figuras

1.1 Medições de força lateral em um pneu típico 2
1.2 Medições de deslocamento de suspensão durante manobra evasiva . . 3

2.1 Curva empírica sobre percentual de capotamento com relação ao SSF [Forkenbrock et al., 2002] 13

3.1 Trajetórias para condição inicial $x_0 = \pi/10$ 15
3.2 Trajetórias para duas condições iniciais distintas 16
3.3 Histograma das trajetórias para duas condições iniciais distintas . . . 17
3.4 Contra-imagem do intervalo [0,x] = linhas mais escuras na abcissa . . 18

4.1 Distribuição de Ocorrências $\alpha = 0.2$ 32
4.2 Distribuição de Ocorrências para valores diferentes de x_2 próximos de zero 33
4.3 Poço Potencial para $\alpha = 0.2$ 36
4.4 Poço Potencial para $\alpha = 0.5$ 37
4.5 Poço Potencial para $\alpha = 1.2$ 37
4.6 Distribuição de Ocorrência para $\alpha = 0.2$ 38
4.7 Distribuição de Ocorrência para $\alpha = 0.5$ 39
4.8 Distribuição de Ocorrência para $\alpha = 1.2$ 39
4.9 Distribuição de Ocorrência para $\alpha = 0.2$ e $\phi = 180deg$ 40
4.10 Diagrama de Ocorrências para $\alpha = 0.2$ 41
4.11 Diagrama de Ocorrências para $\alpha = 0.5$ 42

4.12 Diagrama de Ocorrências para $\alpha = 1.2$ 42
4.13 Distribuição de Ocorrências para valores diferentes de x_2 próximos de zero para equação de Escape 44
4.14 Poço Potencial para Equação de Escape 46
4.15 Evolução de Distribuição de Ocorrências com A 47
4.16 Diagrama de Fase para a equação de Escape 48
4.17 Distribuição de Ocorrência 49
4.18 Diagrama de Fase para a equação de Escape 49
4.19 Evolução do Gráfico de Ocorrências com A 50
4.20 Distribuição de Ocorrências para valores diferentes de x_2 próximos de zero para equação de Van der Pol 52
4.21 Diagrama de fase para o oscilador de Van der Pol 55
4.22 Diagrama de fase para o oscilador de Van der Pol 56
4.23 Distribuição de ocorrências para o oscilador de Van der Pol 56
4.24 Diagrama de ocorrências para o oscilador de Van der Pol 57
4.25 Diagrama de fase para condição inicial $x_0 = 35$ 58

5.1 Modelo simplificado de rolagem veicular 61
5.2 Modelo simplificado de yaw. Fonte [Rill, 2003] 62
5.3 Modelo em ADAMS de dinâmica veicular 63
5.4 Modelagem em multicorpos 64
5.5 Distribuição de forças na suspensão 65
5.6 Curva típica de rigidez em roll na suspensão 66
5.7 Curva de rigidez em roll na suspensão devido à mola auxiliar 67
5.8 Gráfico de validação experimental de modelo de CAE 69
5.9 Gráfico de validação experimental de modelo de CAE 70
5.10 Gráficos de validação experimental de modelo de CAE 70
5.11 Gráfico de validação experimental - Velocidade e Aceleração 71
5.12 Gráfico de validação experimental - Velocidade e Aceleração 71
5.13 Exemplo da manobra conhecida como "J-turn" 75

5.14 Modelo arquetípico (azul) versus medições - Elevação Z 77
5.15 Modelo arquetípico (azul) versus medições - Roll 77
5.16 Modelo arquetípico (azul) versus medição - Elevação Z 78
5.17 Modelo arquetípico (azul) versus medição - Roll 78
5.18 Modelo numérico de multicorpos (vermelho) versus medição (verde) . 80
5.19 Modelo numérico de multicorpos (vermelho) versus medição (verde) . 80
5.20 Modelo arquetípico (azul) versus modelo ADAMS - 180 deg de volante 81
5.21 Modelo arquetípico (azul) versus modelo ADAMS - 180 deg de volante 81
5.22 Modelo arquetípico (azul) versus modelo ADAMS - 270 deg de volante 82
5.23 Modelo arquetípico (azul) versus modelo ADAMS - 270 deg de volante 82
5.24 Modelo arquetípico (azul) versus modelo ADAMS - 360 deg de volante 83
5.25 Modelo arquetípico (azul) versus modelo ADAMS - 360 deg de volante 83
5.26 Distribuição de ocorrências para o modelo de veículo 92
5.27 Distribuição de ocorrências para o modelo de veículo 92
5.28 Distribuição de ocorrências para dois valores de rigidez de jounce bumper e para z=0.00m e z=0.02m 93
5.29 Simulação para dois valores de rigidez de jounce bumper 94
5.30 Simulação para dois valores de rigidez de jounce bumper 94
5.31 Distribuição de ocorrências para diferentes valores de centro de roll da suspensão 96
5.32 Distribuição de ocorrências para diferentes valores de taxa de variação de centro de roll da suspensão 97
5.33 Distribuição de ocorrências para diferentes valores de aderência do pneu 98
5.34 Simulação numérica do roll do veículo para diferentes valores de aderência do pneu 99
5.35 Simulação numérica de elevação do veículo para diferentes valores de aderência do pneu 99
5.36 Distribuição de ocorrências para diferentes tempos de resposta do pneu 100

5.37 Simulação numérica do roll do veículo para diferentes tempos de resposta do pneu 100
5.38 Simulação numérica de elevação do veículo para diferentes tempos de resposta do pneu 101
5.39 Distribuição de ocorrências para diferentes rigidezes torcionais 102
5.40 Simulação numérica do roll do veículo para diferentes rigidezes de rolagem 103
5.41 Simulação numérica de elevação do veículo para diferentes rigidezes de rolagem 103
5.42 Distribuição de ocorrências para diferentes rigidezes verticais 104
5.43 Distribuição de ocorrências para diferentes coeficientes de amortecimento torcional 105
5.44 Distribuição de ocorrências para diferentes coeficientes de amortecimento verticais 106
5.45 Simulação numérica de roll do veículo para diferentes coeficientes de amortecimento verticais 106
5.46 Simulação numérica de elevação do veículo para diferentes coeficientes de amortecimento verticais 107
5.47 Distribuição de ocorrências para diferentes inércias de roll 107
5.48 Distribuição de ocorrências para diferentes massas suspensa 108
5.49 Distribuição de ocorrências para diferentes centros de gravidade . . . 110
5.50 Distribuição de ocorrências para uma utilitário esportivo e uma pickup 112
5.51 Distribuição de ocorrências para um sedan médio e um veículo esportivo 113

Lista de Tabelas

5.1 Análise paramétrica para o estudo de capotamento veicular - tabela de influência relativas 111

Capítulo 1

Introdução

Problemas de dinâmica não-linear são objetos de estudo há uma bom tempo. Toda a teoria desenvolvida já está bem estabelecida no meio acadêmico. No entanto, no meio industrial, principalmente no ramo automobilístico, fenômenos da dinâmica não-linear são relativamente difíceis de serem encontrados e, por isso, todas as técnicas envolvidas na correta descrição e estudo de seus fenômenos não são difundidos nesse meio.

Por outro lado, a aplicação de teorias de estatística no meio industrial é muito bem difundida, principalmente devido aos principais objetivos da indústria relativos a controle de produção, de processo, de pesquisas de mercado etc. Por isso, termos tais como distribuição, densidade de probabilidade, curvas estatísticas são bem conhecidos no meio industrial.

O principal foco deste trabalho é o uso de ferramentas de estatística na descrição de fenômenos da dinâmica não-linear, aplicadas em dinâmica veicular. Para isso, conceitos de mecânica estatística são introduzidos, bem como os fundamentos dos operadores utilizados na descrição de sistemas dinâmicos, através de equação de evolução de densidade de probabilidade. O idéia geral é abdicar da descrição temporal usual e assim passar para uma descrição em termos de gráfico de ocorrência, ou como dito, descrição em termos de densidade de probabilidade do sistema frequentar cada região do espaço de fase.

Com o objetivo de validar a metodologia, assim como verificar sua abrangência,

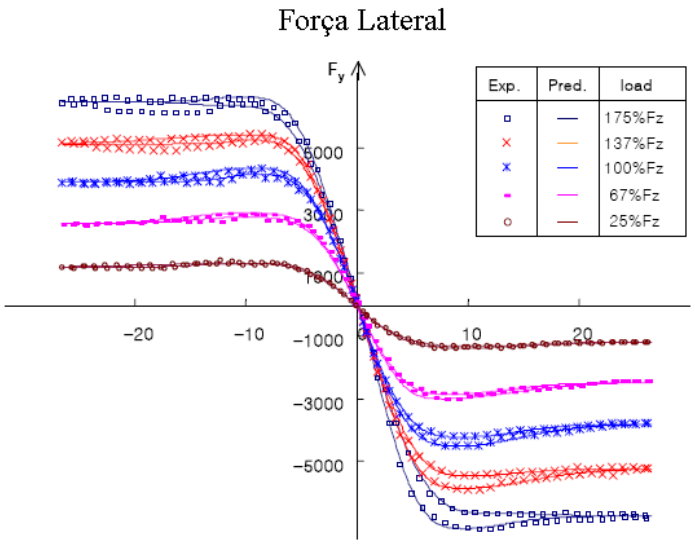

Figura 1.1: Medições de força lateral em um pneu típico

ela é, primeiro, aplicada em modelos clássicos da dinâmica não-linear. Três osciladores clássicos da dinâmica não-linear (oscilador de Duffing, van-der-Pol e equação de escape) são utilizados.

Em seguida, um modelo arquetípico de dinâmica veicular é desenvolvido. O principal objetivo do estudo da dinâmica veicular neste trabalho é o estudo do capotamento de veículos sujeitos a uma manobra evasiva. Para maioria das aplicações dentro da indústria, modelos lineares são, em geral, suficientes. No entanto, basta o modelo contemplar características de saturação de força lateral do pneu (ver Figura 1.1), que o modelo linear de dinâmica lateral começa a sofrer limitações de utilização.

Em particular no caso de capotamento, é comum encontrar fenômenos tipicamente não-lineares, como mostrados na Figura 1.2. Nessa figura, estão medições em diferentes passagens do veículo fazendo uma manobra evasiva, e por isso, perto do seu limite de capotamento. Pode-se notar que, entre os segundos 3.0 e 6.0 das medições, o veículo apresenta oscilações bem características de um sistema não-linear. Esse fenômeno é conhecido na indústria automobilística como "hop", e está intimamente ligado ao capotamento do veículo.

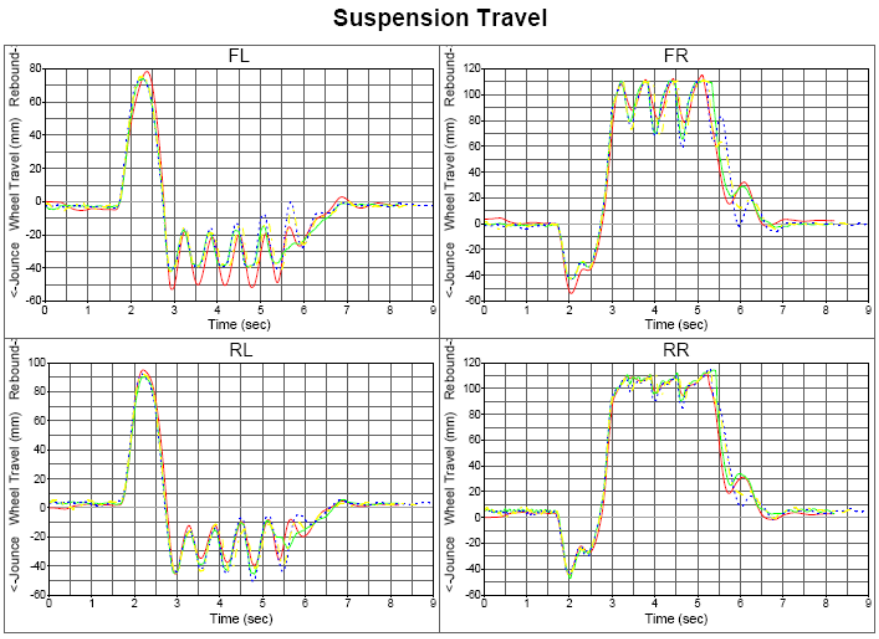

Figura 1.2: Medições de deslocamento de suspensão durante manobra evasiva

Particularizando os estudos nesse fenômeno, decidiu-se introduzir, no modelo arquetípico, os graus de liberdade de roll do veículo, aceleração lateral e movimentação vertical da massa suspensa, este último intimamente ligado ao fenômeno de "hop". O grau de liberdade de yaw, a princípio também importante no estudo da dinâmica lateral de veículos, não foi incluído no modelo. Primeiramente, devido à independência observada experimentalmente do fenômeno de "hop" com o movimento de yaw, e segundo porque, por motivos de simplificação, tal grau de liberdade foi eliminado e, ainda assim, a comparação deste modelo com dados experimentais medidos foi considerada satisfatória.

Uma vez de posse de um modelo arquetípico, uma validação experimental deste é feita a fim de correlacionar seu resultados com dados de medição e, com isso, garantir sua representatividade. Uma correlação entre o modelo arquetípico e uma modelo computacional de multicorpos validado também é feita, visto que podem-se extrapolar limites físicos de manobras experimentais (devido principalmente à segurança) e comparar comportamento do modelo arquetípico com um modelo mais complexo em

faixas extremas da dinâmica veicular.

O modelo arquetípico é, então, explorado com base no tratamento estatístico desenvolvido. Uma análise paramétrica é feita com base em uma configuração de um típico veículo classe B e, parâmetro por parâmetro, as densidades de probabilidades são mostradas de forma quantitativa, através de duas métricas estabelecidas como forma de comparação: a primeira chamada percentual de estabilidade, que é a probabilidade de encontrar o sistema dentro de limites de ângulo de roll pré-estabelecidos, e a segunda chamada de sensibilidade à elevação, cujo valor é a razão de acréscimo de probabilidade de encontrar o sistema para dois níveis diferentes de elevação do centro de gravidade.

Por fim, diferentes classes de veículos foram comparadas com base em suas curvas de densidade de probabilidade e nas métricas citadas acima. Podem-se observar as diferenças entre classes veiculares, assim como a coerência dos resultados obtidos com a experiência prática em dinâmica veicular. Com os resultados, pode-se observar a grande capacidade de análise da abordagem estatística, principalmente em fases iniciais de projeto, onde diversos sistemas estão ainda sob-definição.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

O estudo de problemas de dinâmica não-linear através da abordagem estatística tem sido amplamente utilizado nas últimas décadas. Diversos autores têm aplicado o conceito de evolução de densidades de probabilidade para problemas relacionados à dinâmica caótica determinística. Uma grande vantagem de tal abordagem é a representação da evolução das densidades através de uma equação de evolução linear; ao contrário da abordagem determinística, onde todas as características não-lineares se mostram presentes na evolução temporal da solução, tais como, sensibilidade às condições iniciais, múltiplos atratores, bifurcações, etc. Uma das famosas aplicações dessa teoria está na termodinâmica, em que, através da mecânica estatística, é possível fazer predições macroscópicas através de propriedades microscópicas.

Também conhecida como termodinâmica estatística, nasceu em 1870 com o trabalho de Ludwig Boltzmann, cujos trabalhos, em sua maioria, foram coletados e publicados posteriormente, em "Lectures on Gas Theory". O termo termodinâmica estatística foi proposto ao uso pelo termodinamicista e físico americano J. Willard Gibbs, em 1902 [Gibbs, 1902]. De acordo com Gibbs, o termo "estatística", no contexto da mecânica, foi usado primeiramente pelo físico escocês James Clerk Maxwell, em 1871. Boltzmann é considerado o pai da termodinâmica estatística, com seu trabalho de 1875, mostrando a relação entre entropia S e a multiplicidade Ω, que é o número de microestados produzindo o mesmo macroestado para um dado sistema. Tal relação é a famosa definição formal de entropia para um sistema em equilíbrio:

$$S = k_B . \ln(\Omega)$$

Sendo k_B a constante de Boltzmann.

Tais autores já lidavam, no contexto da termodinâmica estatística, mesmo que intrinsicamente ao trabalho, com a ideia de extrair densidades de probabilidades em sistemas determinísticos. Já entre os dinamicistas, o fato de um sistema dinâmico unidimensional cuja dinâmica seja completamente determinística poder gerar densidade de probabilidades do seu estado é um conceito pouco intuitivo. Tal fato foi ilustrado de maneira pioneira por [Borel, 1909], [Rényi, 1957] e por [Ulam and von Neumann, 1947].

Entre os trabalhos mais recentes com aplicação em sistemas dinâmicos determinísticos, um dos mais citados é, sem dúvida, [Lasota and Mackey, 1985]. Em sua obra, referente a propriedades probabilísticas em sistemas determinísticos, o autor aborda como o estudo de probabilidades surge de sistemas determinísticos simples, de sistemas discretos a contínuos. Lasota dedica um capítulo inteiro de seu livro ao estudo de sistemas caóticos, através do conceito de operados de Markov (mais precisamente através de operadores de Frobenius-Perron e Koopman). Aborda, também, o caso de sistemas determinísticos perturbados, através de excitações estocásticas, recaindo, então, na equação de Fokker-Planck.

Outro autor de grande importância recente em trabalhos em dinâmica de sistemas é Ilya Prigogine. Em seu livro [Prigogine, 1980], por exemplo, e mais sucintamente em seus trabalhos de [Prigogine, 1999],[Prigogine, 1993] e [Prigogine, 1977], Prigogine abrange, de maneira bem generalista, o estudo de dinâmica de sistemas em geral, através da abordagem estatística. Através de extensões dos tradicionais espaços de Hilbert e caracterização de classe de sistemas não-integráveis de Poincaré, Prigogine estabelece novas leis em dinâmica, através da descrição por densidades de probabilidades, além de propor o conceito de quebra de simetria temporal, estabelecendo um paralelo com a termodinâmica. O autor relaciona a termodinâmica com a mecânica clássica na medida em que estabelece um paralelo com o conceito de entropia para

sistemas em equilíbrio e sistemas irreversíveis em mecânica (menção à irreversibildiade da evolução da densidade de probabilidade). Para sistemas longe do equilíbrio, e principalmente em sistemas caóticos, podem-se encontrar situações de aparente "organização" do sistema ([Prigogine, 1977]), parecido com o equilíbrio do ponto de vista da geração de entropia. É o caso da "instabilidade de Bérnard", na mecânica dos fluídos, e também do conhecido mapa de Baker. Como solução para o operador de Liouville (caso particular do operador infinitesimal do operador de Frobenius-Perron) o autor utiliza-se do cálculo de autovalores e autofunções do operador, o que gera a necessidade de extensão no espaço de Hilbert, no qual tais autofunções são projetadas. Obviamente o autor não se limita apenas à obtenção da solução, mas sim de sua representação por meio da decomposição espectral e, a partir dessa, tira suas conclusões e tece comparações com a dinâmica clássica.

Invariavelmente, o estudo de sistemas dinâmicos através de probabilidade recai no problema de solução de equações diferenciais parciais. Tais equações descrevem a evolução temporal da densidade de probabilidade. Um dos problemas que surge através dessa forma de descrição de sistemas dinâmicos é a dificuldade na solução numéria dessas equações, em parte devido ao caráter assintótico das soluções para alguns sistemas clássicos. Assim, o integrador numérico, em muitos casos, simplesmente não possui estabilidade e diverge durante a solução. Nesse contexto, vários trabalhos nesse campo resolvem o problema através de expansões com funções clássicas, que detêm certas propriedades que facilitam a forma da solução. [Vos, 2006] utilizou-se dos chamados polinômios caóticos como expansões númericas para a solução de operadores de evolução de densidades de probabilidade.

[Vos, 2006] propõe o uso de um polinômio caótico dependente do tempo, de maneira a melhorar a convergência para tempos longos, o que se destaca por ser um problema típico dos polinômios caóticos convencionais. A forma original desses últimos caracteriza-se por uma expansão espectral baseada em polinômios Hermitianos, em termos de variáveis randômicas Gaussianas, com coeficientes determinísticos. Assim, um processo estocástico pode ser representado pela forma:

$$u(x,t,\xi(w)) = \Sigma_{i=0}^{\infty} u_i(x,t).H_i(\xi(w))$$

onde H_i são os polinômios Hermitianos e ξ é um vetor de variáveis aleatórias Gaussianas.

A combinação do vetor randômico e os polinômios é selecionada baseando-se na distribuição da entrada aleatória. Em outras palavras, se a variável aleatória é Gaussiana, o polinômio é o Hermitiano. Já se a variável aleatória obedece a uma distribuição uniforme, o polinômio usado é o de Legendre. Para uma distribuição beta, usam-se os polinômios de Jacobi e para uma distribuição gamma, são utilizados os polinômios de Laguerre.

[Zhang et al., 2007] também se utilizaram de aproximações, através de polinômios, para solução do mesmo problema. No caso, as equações que o autor se propôs a resolver também se caracterizam por equações estocásticas, porém, nesse caso, alguns parâmetros de um sistema determinístico são considerados aleatórios, ainda que o sistema possua uma excitação externa aleatória. O sistema em estudo corresponde a um sistema não-linear com característica de um oscilador de Van-der-Pol. O autor se utiliza de polinômios de Chebyshev como base ortogonal para a solução das densidades de probabilidades. Um ponto interessante de se notar nesse trabalho é a comparação que o autor faz com o método numérico de Monte-Carlo.

[Daems, 1996] e [Kaufmann et al., 1996], assim como Prigogine, utilizam-se de decomposição espectral para a solução numérica da evolução das densidades de probabilidades. No entanto, o autor se utiliza do formalismo de equações mestre para o cálculo do espectro do operador. Com a particularidade de aplicação da teoria em mapas de Markov lineares, o autor mostra que, dada uma densidade polinomial inicial, esta mantém-se polinominal de mesma ordem, ou ordem inferior sob a ação do operador de Frobenius-Perron. Dessa forma, conclui-se que expansões para o espectro podem ser extendidas, e certas propriedades podem ser obtidas através dessa verificação, tal qual, a equivalência da ação do operador de Frobenius-Perron a uma matriz de dimensão finita sobre um vetor de coeficientes de diferentes monômios.

[Nicolis and Gaspard, 1994] fazem o uso de aproximações em termos de densidades de probabilidades em sistemas determinísticos caóticos e com presença de bifurcações. A principal intenção dos autores é identificar uma espécie de assinatura, ou melhor, característica principal das bifurcações e do caos, em termos das propriedades espectrais dos operadores de Frobenius-Perron e Fokker-Planck. Em particular, o autor utiliza-se do conceito de equações-mestre como forma de expansão numérica para o cálculo de uma classe de autovalores e autofunções do operador de Frobenius-Perron. Como resultado, apresenta formas da densidade de probabilidade estacionária para diferentes parâmetros de uma sistema com bifurcação de Hopf. Uma grande contribuição deste trabalho são as comparações realizadas entre os espectros dos operadores de Frobenius-Perron e de Fokker-Planck.

[Ostruszka and Zycskowski, 2001] estudaram alguns aspectos do espectro do operador de Frobenius-Perron para sistemas com perturbação estocástica. Na verdade os autores comentam as propriedades espectrais do operador e cita [Antoniou et al., 2000] quanto à dependência do espectro, ou seja, da solução para evolução das densidades, para com o espaço de funções escolhido sobre o qual o operador trabalha. O que o autor sugere, portanto, é a adição de uma pequena perturbação estocástica (presente em qualquer fenômeno físico) e a escolha de um espaço de funções apropriado para aquela perturbação, definindo assim uma decomposição espectral para o operador de Frobenius-Perron com algum significado "físico". O que o autor consegue mostrar no trabalho é que os autovalores localizados fora do espectro essencial do operador são robustos, não somente contra perturbações locais escolhidas, como também para outros tipos de perturbações, generalizando, dessa forma, sua forma de solução. Além disso, os autovalores estáveis contêm um significado físico de determinar a taxa de decaimento exponencial da correlação no sistema. Dessa forma, pode-se identificar a parte de maior importância no espectro do operador sem ambiguidades matemáticas provenientes da seleção do espaço de funções do espectro.

[Ding, 1998] utilizou-se do princípio da máxima entropia para solução numérica da densidade estacionária do operador de Frobenius-Perron. Tal teoria se baseia no

conceito matemático de entropia de Boltzmann citado acima e, com o uso de certas propriedades do operador de Frobenius-Perron, o problema de achar sua densidade estacionária resume-se no problema de maximização de uma função (densidade estacionária) truncada. É com base nessa forma de solução, que muitos paralelos podem ser traçados entre a teoria de evolução de probabildades para sistemas dinâmicos e a termodinâmica. Ding compara os resultados numéricos obtidos e aplicados em mapas discretos unidimensionais, com solução analítica conhecida, e mais duas aproximações numéricas para o problema: método da projeção de Galerkin e aproximações finitas de Markov. [Ding et al., 2002] descreveram toda teoria por trás do método de aproximações finitas de Markov, e descreveram os problemas de convergência numérica do método em comparação com o método de Ulam.

Outros autores também se utilizaram do princípio da máxima entropia para a solução de equação de evolução para densidades em problemas de dinâmica determinísticos. São os casos de [del Río-Correa and García-Colín, 1998], assim como de [Plastino and Plastino, 1998].

[Ding and Zhou, 1999] propuseram, baseados no método de elementos finitos, uma sistemática númerica unificada para a resolução do problema de densidade estacionária para o operador de Frobenius-Perron. Através de teoria de aproximação espectral, os autores provam a convergência numérica do método, assim como a estimatica de erro de truncamento. Este trabalho representa uma importante ferramenta no tratamento numérico do problema de densidades.

Todos os trabalhos citados até aqui, apresentaram propostas de soluções para problemas de dinâmica não-linear clássicos. E em sua maioria, aplicados a mapas discretos unidimensionais. São poucos os trabalhos encontrados que se destinam a resolver problemas práticos em engenharia. Entre eles, pode-se citar o trabalho de [Roberts, 1982] e [Roberts and Vasta, 2000], na área naval. O autor descreve o movimento de roll de uma embarcação pela equação:

$$I.\ddot{\phi} + \beta.C(\dot{\phi}) + K(\phi) = M(t)$$

para $M(t)$ sendo o momento de excitação externa em roll da embarcação, o qual é de natureza estocástica.

Com base nesse sistema, as equações são reescritas em função de sua energia e potencial. Usando a descrição em termos de médias das variáveis envolvidas, assim como simplificações como, excitação pequena o suficiente para ser considerada estacionária em um dado intervalo de tempo T, o autor escreve as variáveis como um processo de Markov. Assim, a equação de evolução de densidades de probabilidade de energia pode ser expressa através do operador de Fokker-Planck.

Assim como em trabalhos citados, o autor busca por solução para equação de Fokker-Planck deduzida a densidade estacionária do sistema, ou seja, a solução para $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, o qual, o faz analiticamente. Um ponto interessante de se notar é a mudança de variável de que o autor se utiliza para a solução da equação. Primeiramente, como já mencionado, ele reescreve todo o sistema em função de sua energia e fase, sendo ambas em função de ϕ e $\dot{\phi}$. Dessa forma, ele consegue desacoplar os graus de liberdade, e escrever a equação de Fokker-Planck apenas em função da energia, facilitando uma solução analítica.

Outro trabalho semelhante pode ser visto em [Hoon and Key-Pyo, 2006]. Os autores, de forma análoga, descrevem o movimento de roll de uma embarcação, e descrevem a evolução da densidade de probabilidade por meio do operador de Fokker-Planck. E por solução, os autores sugerem uma aproximação através de uma expansão por meio de polinômios hermitianos.

Com base na manipulação algébrica realizada por [Roberts, 1982], que se deseja para este trabalho, obter também uma solução fechada analítica para o problema de densidades de probabilidades aplicadas à dinâmica não-linear, mesmo que por aproximação.

Com relação a trabalhos na área de dinâmica veicular, muitos artigos têm sido desenvolvidos ao longo dos anos com respeito a modelos matemáticos relativos à dinâmica lateral de veículos. [Hac, 2005] e [Demerly and Youcef-Toumi, 2000], em especial, desenvolveram modelos não-lineares da dinâmica lateral com o propósito

de estudar o comportamento do veículo relativo ao capotamento. [Hac, 2005] cita, inclusive o fenômeno conhecido por "hop", que representa oscilações verticais da massa suspensa do veículo, quando de uma manobra severa, e estabelece relação quanto à ocorrência deste fenômeno com ao capotamento.

[Venn and Lowenberg, 2004] através de uma modelo não-linear de sete graus de liberdade, estudaram seu comportamento de estabilidade do ponto de vista de bifurcações. O fenômeno em estudo neste trabalho é a estabilidade de yaw do veículo, e como resultado de análise parmétrica, o autor conclui que a posição longitudinal do centro de gravidade é um dos fatores principais na estabilidade do veículo. Já [Yoon et al., 2007] propõem um modelo, linear, para o desenvolvimento de um índice de estabilidade ao capotamento. No entanto, em seu modelo, no grau de liberdade de roll, os autores se utilizam de duas formas de modelagem, uma para quando não há rodas levantadas, e outra para quando o veículo apresenta duas rodas sem contato com o chão.

Testes relativos a objetivar manobras de capotamento também têm sido objeto de estudo. O trabalho desenvolvido pela NHTSA (National Highway Traffic Safety Administration), publicado, entre outros relatórios, por [Forkenbrock et al., 2002], descreve, detalhadamente, as manobras desenvolvidas para objetivar o teste de capotamento, assim como relações estatísticas dos testes dinâmicos, do fator de estabilidade estática (SSF) com a probabilidade de ocorrência de capotamento. O gráfico da Figura 2.1 mostra o resumo do estudo e dos testes feitos, pelos quais, dado o SSF do veículo (que depende apenas de características estáticas, como largura e altura do centro de gravidade) e a aprovação ou não do veículo na manobra dinâmica, pode-se obter a probabilidade do veículo capotar durante uma manobra evasiva.

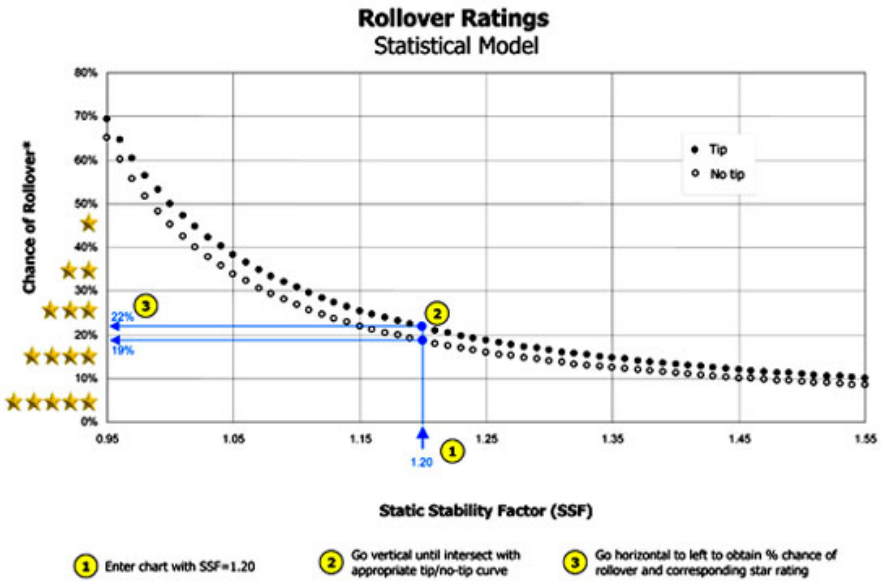

Figura 2.1: Curva empírica sobre percentual de capotamento com relação ao SSF [Forkenbrock et al., 2002]

Capítulo 3

Fundamentos da Teoria de Probabilidades

3.1 Introdução

O estudo de um sistema dinâmico através de densidade de probabilidades tem por vantagem uma facilidade no mapeamento de seu comportamento. Análise em termos de densidade permite uma visualização ampla dos fenômenos inerentes ao sistema, ao passo que séries temporais limitam em demasia a identificação de tais fenômenos.

Uma forma de se introduzir tal forma de análise é através de um exemplo. Considere o seguinte mapa quadrático [Lasota and Mackey, 1985] :

$$S(x) = 4.x.(1 - x) \tag{3.1.1}$$

Define-se que a evolução dinâmica, no caso de uma mapa discreto de período T é dada por:

$$x_0 \quad x_1 = S(x_0) \quad x_2 = S(x_1)...$$

$$x_i = S^i(x_0)$$

As trajetórias do mapa acima dependem das condições iniciais. Por exemplo, para $x_0 = \pi/10$, as trajetórias podem ser vistas na Figura 3.1.

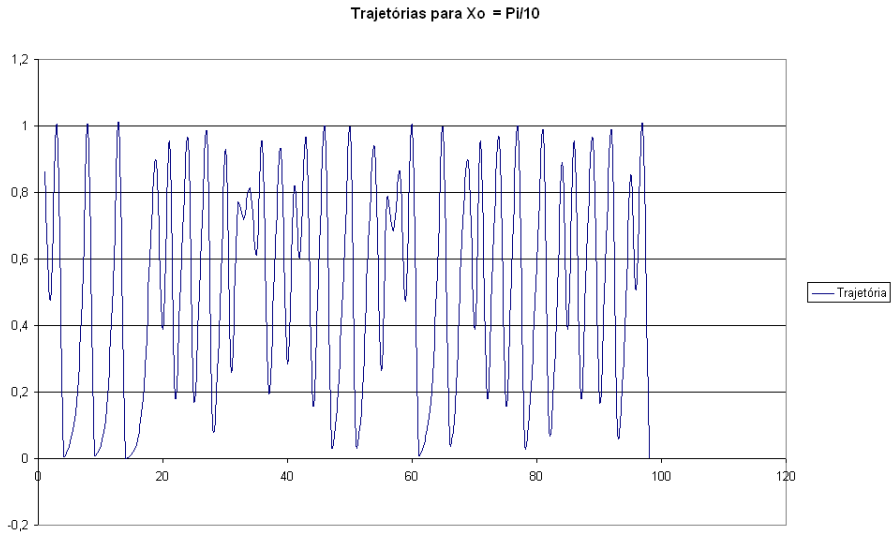

Figura 3.1: Trajetórias para condição inicial $x_0 = \pi/10$

Para uma pequena alteração de $x_0 = \pi/10 + 0.001$,as trajetórias alteram-se substancialmente, como se pode ver na Figura 3.2.

Tal mapa apresenta um comportamento caótico, ou melhor, uma grande sensibilidade às condições iniciais. As trajetórias para as duas condições iniciais apresentadas são completamente distintas, como se pode ver nas Figuras 3.1 e 3.2. Também pouco se pode concluir da dinâmica do sistema a partir de tais trajetórias. No entanto, particionando o espaço de estado em n regiões e contabilizando o número de aparições da trajetória em uma determinada partição, pode-se construir um "gráfico de ocorrências", apresentado na Figura 3.3.

Tais gráficos não se mostram sensíveis às condições iniciais do sistema, mesmo que esse possua características caóticas.

Essa "ideia" de densidades está intimamente ligada ao operador de Frobenius Perron, que será utilizado como operador de evolução de densidades de probabilidade.

Essa evolução pode ser melhor entendida pela descrição matemática dos diagramas de ocorrências, descritos anteriormente. Novamente, assumindo uma transformação $S : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ e para várias condições iniciais:

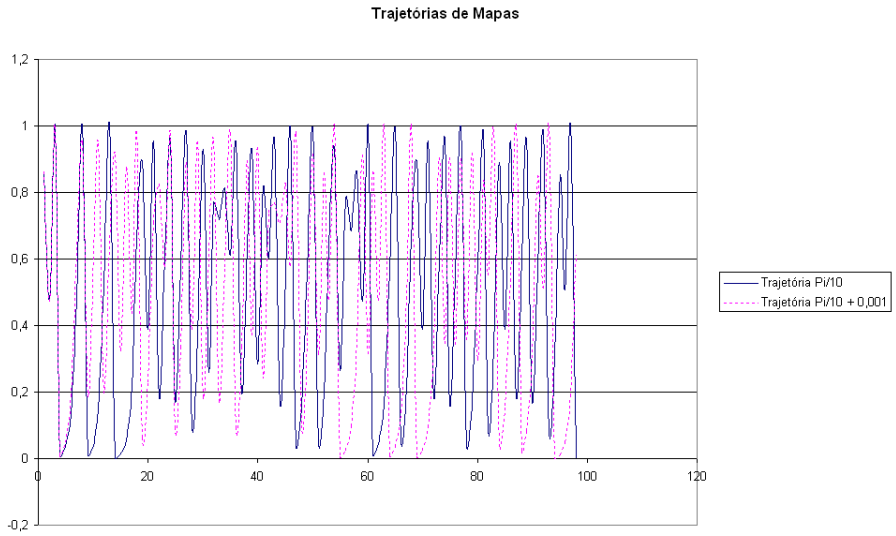

Figura 3.2: Trajetórias para duas condições iniciais distintas

$$x_1^1 = S(x_1^0) \quad x_2^1 = S(x_2^0) \quad x_n^1 = S(x_n^0)$$

Definindo densidade de estados iniciais e finais, segundo [Lasota and Mackey, 1985], introduz-se o conceito de função característica em um dado intervalo Δ:

$$\begin{aligned} 1_\Delta(x) &= 1 \quad se \quad x \in \Delta \\ &= 0 \quad se \quad x \notin \Delta \end{aligned}$$

Dessa forma, define-se $f_0(x)$ como função densidade para os estados iniciais $x_1^0, ..., x_n^0$ se para cada intervalo $\Delta_0 \subset [0,1]$ tem-se:

$$\int_{\Delta_0} f_0(u)du \simeq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} 1_\Delta(x_j^0) \tag{3.1.2}$$

Igualmente para os estados $x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1$ tem-se:

$$\int_{\Delta} f_1(u)du \simeq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} 1_\Delta(x_j^1) \tag{3.1.3}$$

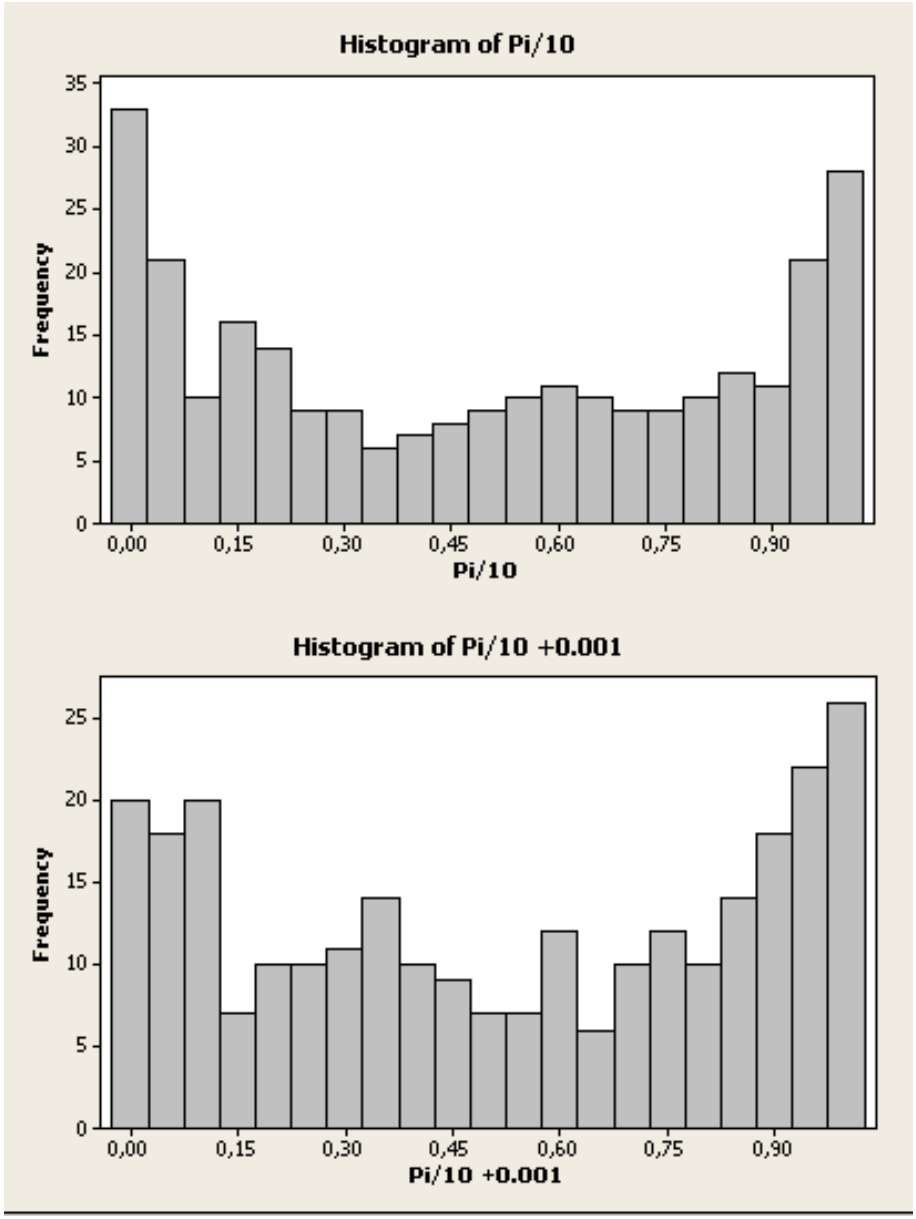

Figura 3.3: Histograma das trajetórias para duas condições iniciais distintas

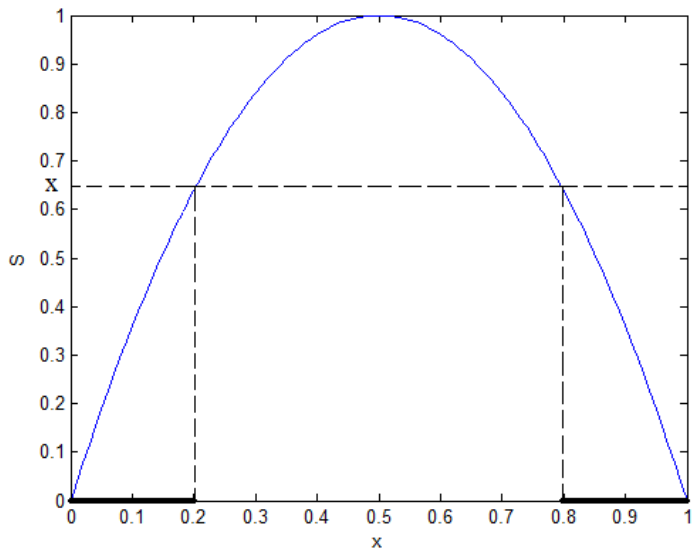

Figura 3.4: Contra-imagem do intervalo [0,x] = linhas mais escuras na abcissa

O que se pretende obter é a relação entre f_0 e f_1, ou melhor, a evolução de f_0 para f_1.

Introduzindo o conceito de contra-imagem em um intervalo $\Delta \subset [0,1]$ (Figura 3.4) como sendo o conjunto de todos os pontos que estarão em Δ após a aplicação de S ,ou seja :

$$S^{-1}(\Delta) = x : S(x) \in \Delta$$

Como $x_j^1 \in \Delta$ se e somente se $x_j^0 \in S^{-1}(\Delta)$, tem-se, então, a seguinte relação:

$$1_\Delta(S(x)) = 1_{S^{-1}(\Delta)}(x)$$

E então:

$$\int_\Delta f_1(u)du \simeq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} 1_{S^{-1}(\Delta)}(x_j^0) \tag{3.1.4}$$

Tomando $\Delta_0 = S^{-1}(\Delta)$ uma vez que até esse ponto, Δ_0 e Δ são arbitrários, o lado direito das equações (3.1.2) e (3.1.4) são iguais, logo:

$$\int_{\Delta} f_1(u)du = \int_{S^{-1}(\Delta)} f_0(u)du$$

Esta é a relação entre f_1 e f_2 que indica como evolui f. Tomando um intervalo $\Delta = [a, x]$ tem-se:

$$\int_a^x f_1(u)du = \int_{S^{-1}([a,x])} f_0(u)du$$

Derivando em relação a x tem-se:

$$f_1(u) = \frac{d}{dx} \int_{S^{-1}([a,x])} f_0(u)du$$

Escrevendo a equação acima em forma de operador, ou seja:

$$Pf(u) = \frac{d}{dx} \int_{S^{-1}([a,x])} f_0(u)du \tag{3.1.5}$$

A equação (3.1.5) define o operador de Frobenius Perron. Para uma definição mais precisa do operador e melhor compreensão do "fluxo de densidades", certos conceitos devem ser mencionados, principalmente no que se refere a conceitos de operadores.

3.2 Operadores de Frobenius Perron

O operador de Frobenius Perron é pode ser considerado como uma classe especial de operadores de Markov. Dessa forma, para uma classificação mais precisa, as seguintes definições são necessárias [Lasota and Mackey, 1985].

Definição 3.2.1. Seja $(x, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Uma transformação $S : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ é mensurável se:

$$S^{-1}(A) \in \mathcal{A}$$

para todo $A \in \mathcal{A}$

Definição 3.2.2. Uma transformação mensurável $S : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ em um espaço métrico $(x, \mathcal{A}, \mu)$ é dita não-singular se $\mu(S^{-1}(A)) = 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$, tal que $\mu(A) = 0$.

Assumindo que uma transformação não-singular $S : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ em um espaço de medida é dada, define-se um operador $P : L^1 \to L^1$ em duas etapas.

1. Seja $f \in L^1$ e $f \geq 0$, a integral

$$\int_{S^{-1}(A)} f(x)\mu(dx)$$

define uma medida finita, segundo propriedades das integrais de Lebesgue, e portanto $S^{-1}(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i S^{-1}(A_i)$

Corolário 3.2.1. *Se $(x, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida e ν é uma medida finita em $\mathcal{A}$ tal que $\nu(A) = 0$ sempre que $\mu(A) = 0$, então existe um único elemento de $f \in L^1$ tal que:*

$$\nu(A) \;=\; \int_A f(x)\mu(dx)$$

para $A \in \mathcal{A}$.

Segundo o corolário 3.2.1 há somente um único elemento em L^1, que se pode denotar por Pf, tal que

$$\int_A Pf(x)\mu(dx) \;=\; \int_{S^{-1}(A)} f(x)\mu(dx)$$

para $A \in \mathcal{A}$.

2. Agora seja $f \in L^1$ arbitrário, e não necessariamente não negativo. Escrevendo $f = f^+ - f^-$ e definindo

$$Pf = Pf^+ - Pf^-$$

Dessa definição tem-se:

$$\int_A Pf(x)\mu(dx) \;=\; \int_{S^{-1}(A)} f^+(x)\mu(dx) \;-\; \int_{S^{-1}(A)} f^-(x)\mu(dx)$$

Ou

$$\int_A Pf(x)\mu(dx) \;=\; \int_{S^{-1}(A)} f(x)\mu(dx) \quad para\; A \in \mathcal{A} \tag{3.2.1}$$

A equação (3.2.1) define P de maneira única. Com base nesses conceitos, define-se:

Definição 3.2.3. Seja $(x, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Se $S : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ é uma transformação não-singular, o único operador $P : L^1 \to L^1$ definido pela equação (3.2.1) é chamado operador de Frobenius Perron correspondente a S.

Embora a definição 3.2.3 seja formal do ponto de vista matemático, deve-se lembrar que tal operador descreve a evolução de f pela trasnformação S.

Seguem algumas propriedades de P:

1. $P(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) \;=\; \lambda_1 P f_1 + \lambda_2 P f_2$ para todo $f_1,\, f_2 \;\in\; L^1$, $\lambda_1,\, \lambda_2 \;\in\; \mathbb{R}$, então P é um operador linear;

2. $Pf \geq 0$, se $f \geq 0$;

3. $\int_X Pf(x)\mu(dx) \;=\; \int_X f(x)\mu(dx)$;

4. Se $S_n = S \circ \ldots^n \circ S$ e P_n o operador de Frobenius Perron correspondente a S_n, então $P_n = P^n$, onde P é o operador de Frobenius Perron correspondente a S.

Diferenciando a equação (3.2.1) obtém-se:

$$Pf(x) \;=\; \frac{d}{dx}\int_{S^{-1}(A)} f(x)\mu(dx) \tag{3.2.2}$$

Que se torna uma forma explícita para o operador de Frobenius Perron, no caso especial da transformação S ser diferenciável e inversível.

3.3 Operadores infinitesimais

Uma família de operadores lineares limitados é chamada de semigrupo se para todo $s \geq 0$, $t \geq 0$

$$T_{s+t} = T_s T_t$$

Um semigrupo T_t é chamado semigrupo estável, como já visto, se para todo $t \geq 0$, tem-se:

1. $\|T_t\| \leq 1$, ou seja, se para todo $t \geq 0$, $f \in L$, tem-se

$$\|T_t f\| \leq \|f\|$$

2. $T_0 f = f$;

3. $T_{t+t'} = T_t(T_{t'} f)$ e se $\lim_{t \to t_0} \|T_t f - T_{t_o} f\|_L = 0$, para $f \in L$, $t_0 \geq 0$, então o semigrupo é chamado contínuo.

O operador infinitesinal de um semigrupo T_t é definido pela fórmula:

$$Af = \lim_{t \to 0} \frac{T_t f - f}{t}$$

Ou melhor, seja $L = L^p$, $1 \leq p \leq \infty$ e $T_t \mid_{t \geq 0}$, um semigrupo estável. Seja $D(A)$ o conjunto de todo $f \in L$ tal que o limite acima exista. Assim o operador definido $A : D(A) \to L$ é chamado de operador infinitesimal.

Sabe-se por definição que o subespaço $D(A)$ é linear, ou melhor:

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \ \in D(A)$$

para $\forall f_1, f_2 \in D(A)$ e para $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

E que o operador A é também linear pela definição da operação de limite. Ou seja:

$$A(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 A(f_1) + \lambda_2 A(f_2)$$

Teorema 3.3.1. *Seja $T_t \mid_{t\geq 0}$ um semigrupo estável e contínuo atuando em L_1 e $A : D(A) \to L$ seu correspondente operador infinitesimal. Além disso, seja $u(t) = T_t f$ para $f \in D(A)$ fixo. Então $u(t)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *$u(t) \in D(A)$ para $t \geq 0$;*

2. *$u'(t)$ existe para $t \geq 0$; e*

3. *$u(t)$ satisfaz a equação definida*

$$u'(t) = A.u(t)$$

para $t \geq 0$ com $u(0) = f$.

Ou seja, $u(t) = T_t f$ é uma solução da equação acima.

Prova: Para $t = 0$, as propriedades (1) $\to$ (3) são satisfeitas pelas definições das propriedades.

Seja $t_0 > 0$ fixo. Pela definição de $u(t)$, tem-se:

$$\frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} = \frac{T_t f - T_{t_0} f}{t - t_0}$$

Como T_t é linear

$$T_t = T_{t-t_0}.T_{t_0} \quad para\, t > t_0$$

tal igualdade pode ser escrita como:

$$\frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} = T_{t_0}(\frac{T_{t-t_0} f - f}{t - t_0}) \quad para\, t > t_0 \tag{3.3.1}$$

Já que $f \in D(A)$, o limite de $\frac{T_{t-t_0} f - f}{t - t_0}$ existe para $t \to t_0$ e resulta em Af.

Então (3.3.1) também existe e é igual a $T_{t_0} Af$. De forma análoga, se $t < t_0$, tem-se $T_{t_0} = T_t.T_{t_0-t}$, e, por consequência:

$$\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} = T_{t_0}(\frac{T_{t_0-t}f-f}{t_0-t}) \quad para\, t < t_0 \tag{3.3.2}$$

e

$$\begin{aligned}\left\|\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} - T_{t_0}Af\right\|_L &\leq \left\|T_{t_0}(\frac{T_{t_0-t}f-f}{t_0-t} - Af)\right\|_L \\ + \|T_tAf - T_{t_0}Af\|_L &\leq \left\|\frac{T_{t_0-t}f-f}{t_0-t} - Af\right\|_L \\ &+ \|T_tAf - T_{t_0}Af\|_L\end{aligned}$$

Novamente, desde T_tAf converge para $T_{t_0}Af$ para $t \to t_0$, o limite existe para $t \to t_0$ e é igual a $T_{t_0}Af$. Então a existência de $u'(t_0)$ está provada.

Reescrevendo (3.3.1) na forma:

$$\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} = \frac{T_{t-t_0}(T_{t_0}f)-(T_{t_0}f)}{t-t_0} \quad para\, t > t_0$$

Uma vez que o limite do quociente do lado esquerdo existe para $t \to t_0$, o limite do lado direito também existe para $t - t_0$ e assim:

$$u'(t_0) = AT_{t_0}f$$

o que prova que $T_{t_0}f \in D(A)$ e que $u'(t_0) = Au(t_0)$

3.4 Operadores infinitesimais de sistemas de equações diferenciais ordinárias

O teorema 3.3.1 possui uma característica importante no estudo de evolução de densidades de probabilidades. Segundo ele, basta conhecer o operador infinitesimal de um semigrupo para determinar a evolução de ρ sob aplicação desse semigrupo. Isso se caracteriza como uma técnica bastante eficaz, visto que, na grande maioria, em

sistemas contínuos, é mais difícil descrever um operador de forma analítica que o seu respectivo operador infinitesimal.

Considere um sistema de dimensão d de equações diferenciais ordinárias:

$$\dot{x} = F(x, t) \tag{3.4.1}$$

Seja $P_t \mid_{t\geq 0}$ e $U_t \mid_{t\geq 0}$ os semigrupos gerados a partir de (3.4.1) (semigrupos de Frobenius e Koopman, respectivamente).

O semigrupo de transformações correspondentes à equação (3.4.1) é definido por:

$$S_t(x_0) = x(t) \tag{3.4.2}$$

onde $x(t)$ é a solução para (3.4.1) correspondente à condição inicial $x(0) = x_0$.

Assumindo F_i com derivadas contínuas e que para todo $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $x(t)$ existe para todo $t \in \mathbb{R}$, garante que $S_t(x_0) = x(t)$ define um semigrupo de transformações.

Por definição do operador de Koopman:

$$U_t f(x_0) = f[S_t(x_0)]$$

Portanto:

$$\frac{U_t f(x_0) - f(x_0)}{t} = \frac{S_t(x_0) - f(x_0)}{t} = \frac{f(x(t)) - f(x_0)}{t}$$

Assim, se f é continuamente diferenciável com "suporte compacto" (função com valor zero fora de uma intervalo limitado), então pelo teorema do valor médio:

$$\frac{U_t f(x_0) - f(x_0)}{t} = \sum_{i=1}^{d} f_{x_i}(x(\theta_t))x_i'(\theta_t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{d} f_{x_i}(x(\theta_t))F_i(x(\theta_t))$$

Com $0 < \theta < 1$. Com a equação (3.4.2)

$$\frac{U_t f(x_0) - f(x_0)}{t} = \sum_{i=1}^{d} f_{x_i}(S_{\theta_t}(x_0))F_i(S_{\theta_t}(x_0)) \tag{3.4.3}$$

Uma vez que as derivadas f_{x_i} tem suporte compacto:

$$\lim_{t \to 0} f_{x_i}(S_{\theta_t}(x_0))F_i(S_{\theta_t}(x_0)) = f_{x_i}(x_0)F_i(x_0)$$

uniformemente para todo x_0. Então (3.4.3) tem um limite em L^∞, e o operador infinitesimal de Koopman A_k é dado por:

$$A_k f(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i} F_i(x) \tag{3.4.4}$$

Para definição do operador infinitesimal do operador de Frobenius-Perron, pode-se tomar como ponto de partida sua relação com o operador de Koopman, ou seja, o fato de tais operadores serem adjuntos.

$$\langle P_t f, g \rangle = \langle f, U_t g \rangle \quad para\ f \in L^1, g \in L^\infty$$

subtraindo $\langle f, g \rangle$ de ambos os lados:

$$\langle P_t f - f, g \rangle = \langle f, U_t g - g \rangle \quad dividindo\, por\, t$$

$$\langle \frac{P_t f - f}{t}, g \rangle = \langle f, \frac{U_t g - g}{t} \rangle \tag{3.4.5}$$

Seja $f \in \mathcal{D}(A_{FP})$ e $g \in \mathcal{D}(A_K)$, onde A_{FP} e A_K são os operadores infinitesimais para os semigrupos de Frobenius-Perron e Koopman respectivamente. Tomando o limite de (3.4.5) para $t \to 0$:

$$\langle A_{FP} f, g \rangle = \langle f, A_K g \rangle \tag{3.4.6}$$

Segundo definição de A_K, o lado direito da equação (3.4.6) fica:

$$\langle f, \sum_{i=1}^{d} F_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \rangle$$

Sendo g continuamente diferenciável com suporte compacto. Explicitando o produto escalar, e com $X = \mathbb{R}^d$ e $d\mu = dx_1...dx_d = dx$ tem-se:

$$\langle f, \sum_{i=1}^{d} F_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f \sum_{i=1}^{d} F_i \frac{\partial g}{\partial x_i} dx = \sum_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} \{ \frac{\partial (f F_i g)}{\partial x_i} - g \frac{\partial f F_i}{\partial x_i} \} dx$$

Para $f \in \mathcal{D}(A_{FP})$, a qual é também continuamente diferenciável. Desde que g tenha suporte compacto:

$$\sum_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial (f F_i g)}{\partial x_i} dx = 0$$

E portanto

$$\langle f, \sum_{i=1}^{d} F_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \rangle = - \sum_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} g \frac{\partial f F_i}{\partial x_i} dx =$$

$$= \langle - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f F_i}{\partial x_i}, g \rangle$$

Assim

$$\langle A_{FP} f, g \rangle = \langle - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f F_i}{\partial x_i}, g \rangle$$

Essa formula é válida para todo f continuamente diferenciável sendo $f \in \mathcal{D}(A_{FP})$ e para todo g continuamente diferenciável com suporte compacto e com $g \in \mathcal{D}(A_K)$. Com isso:

$$A_{FP} f = - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial (f F_i)}{\partial x_i} \tag{3.4.7}$$

E pelo teorema 3.3.1 pode-se concluir que a evolução de uma densidade, sobre a qual opera o operador de Frobenius Perron satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = A_{FP}(f)$$

com $f(t,x) = P_t f(x)$.

Capítulo 4

Aplicações em Modelos Matemáticos

Neste capítulo, três exemplos de equações diferenciais não lineares serão tratados através da teoria desenvolvida no capítulo anterior. Será utilizado o operador de Frobenius-Perron no estudo probabilístico das respostas dos sistemas. Comparações com simulações numéricas através do método de Monte Carlo serão realizadas no sentido de validar a solução através de operadores. Algumas hipóteses serão utilizadas baseadas nos diagramas numéricos de ocorrência, no sentido de simplificar uma solução analítica para tais diagramas.

4.1 Oscilador de Duffing

O chamado oscilador de Duffing é da forma [Guckenheimer and Holmes, 1983].

$$\ddot{x} + \beta.\dot{x} - x + \alpha.x^3 = A.\sin(w.t + \phi) \tag{4.1.1}$$

O que se deseja obter é a equação que rege a evolução da função densidade de probabilidade de encontrar o sistema em determinada posição do espaço de estado, em determinado tempo.

Reescrevendo tal sistema na forma :

$$\dot{x} = F(x,t)$$

Obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\beta.x_2 + x_1 - \alpha.x_1^3 + A.\sin(w.t + \phi)$$

É sobre esse sistema que se deseja analisar, de maneira probabilística, seu comportamento dinâmico. Utilizando-se do operador de Frobenius Perron definido na seção (3.1) obtém-se a equação diferencial parcial (4.1.2).

$$\dot{\rho} = A_{FP}(F(x).\rho)$$

$$\dot{\rho} = \sum \frac{-\partial(\rho.F_i(x))}{\partial(x_k)}$$

$$\dot{\rho} = -\frac{\partial\rho}{\partial x_1}.x_2 + \beta.\rho - \frac{\partial\rho}{\partial x_2}.[-\beta.x_2 + x_1 - \alpha.x_1^3 + A.sin(w.t + \phi)] \tag{4.1.2}$$

A equação (4.1.2) representa a evolução da função densidade de probabilidade em relação às variáveis de estado x_1 e x_2.

Nesse trabalho o principal objetivo é se utilizar da relação dada pela equação 4.1.2, de maneira a aproximar, através de uma expressão analítica, o diagrama de ocorrências para um sistema dinâmico, neste caso, o oscilador de Duffing. O diagrama de ocorrências numérico pode ser construído através de simulação de Monte Carlo, como dito anteriormente, para um conjunto limitado de condições iniciais, com distribuição uniforme de probabilidade. Um diagrama de ocorrências em três dimensões pode ser visto na Figura 4.1 para $\alpha = 0.2$, $w = 1$ e $A = 0.3$.

Pode-se notar que, de maneira geral, os histogramas tem maior valor numérico perto de $x_2 = 0$. Isso pode ser explicado na ideia intuitiva da própria construção de tal diagrama, ou seja, que nas regiões do espaço de fase por onde o sistema "trafega"

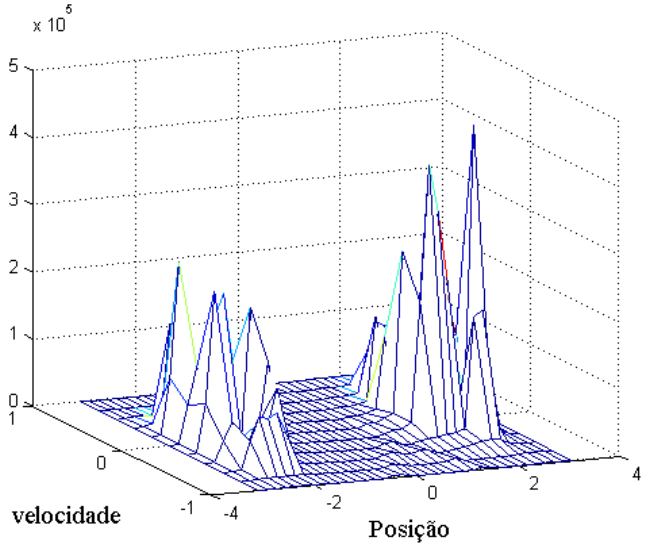

Figura 4.1: Distribuição de Ocorrências $\alpha = 0.2$

com velocidades menores, a probabilidade de encontrar tal sistema tende a ser maior do que em outra região por onde o sistema passa com velocidades maiores. Por essa razão pode-se tentar eliminar a dependência de x_2 da função ρ, daqui em diante, não denominada densidade de probabilidade, mas sim distribuição de ocorrências. No caso particular da construção de um diagrama de ocorrências apenas dependente da variável x_1, a soma de fatias da solução em três dimensões para valores finitos de x_2, leva a uma distribuição de ocorrências simplificada, ainda assim, com a dimensão velocidade (x_2), imbutida na solução, de acordo com a observação acima.

Dessa forma pode-se não somente restringir a busca por uma solução apenas dependente da variável posição, como também limitar a solução a um domínio do espaço de estado, a saber, para x_2 próximo de zero. Na Figura 4.2 estão mostrada várias "fatias" de ρ para valores de velocidade próximos a zero.

Nota-se, inclusive, que as distribuições não variam consideravelmente e que possuem também a forma geral da distribuição completa dada pela Figura 4.1. Com isso, pode-se simplificar a busca por uma possível solução analítica não somente em fatias de x_2, como também, para um determinado valor de x_2 próximo a origem.

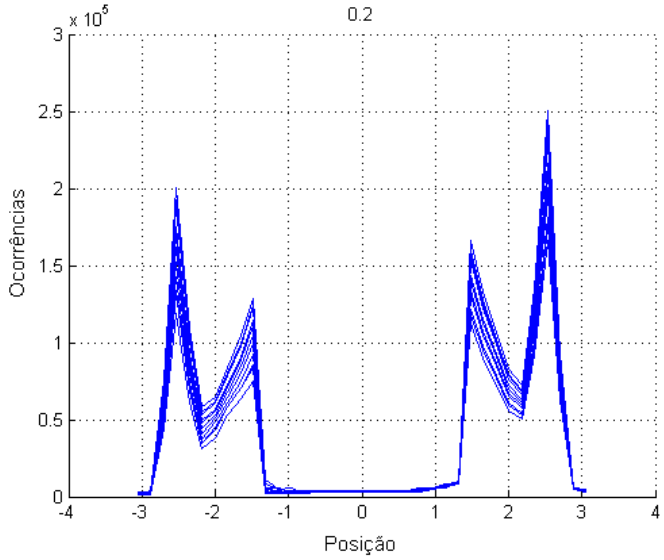

Figura 4.2: Distribuição de Ocorrências para valores diferentes de x_2 próximos de zero

Com essas observações, propõe-se por uma possível solução dessa equação a seguinte função:

$$\rho(x_1, x_2, t) = f(x_1, x_2).f_3(t) \tag{4.1.3}$$

Com a separação de variáveis de x_1, x_2 em relação a t, ρ possuirá a forma de uma distribuição denpendente apenas de x_1 e x_2, multiplicada por uma parte periódica em t. Segundo [Lasota and Mackey, 1985], todo operador de Markov, gozando de certas propriedades, propriedades essas que o operador de Frobenius-Perron detém, operando em um sistema que para um dado conjunto fechado apresenta propriedades de ergodicidade, possuirá ou uma densidade estacionária, ou uma periodicidade assintótica no conjunto onde o operador trabalha. Dessa forma, acredita-se que a solução da forma proposta tende a aproximar o que seria a forma de um densidade estacionária.

Como mencionado, deseja-se achar uma solução para apenas uma "fatia" de ρ calculada em $x_2 = \xi_2$. Com essa hipótese, pretende-se reescrever a equação (4.1.3)

por $\rho(x_1, x_2, t)|_{\xi_2} = f(x_1, x_2).f_3(t)|_{\xi_2}$, sendo ξ_2 um número real, próximo de zero. Assim, a solução encontrada é válida para uma faixa de x_2 dada por ξ_2. Fazendo a composição das soluções para diferentes valores de ξ_2, pode-se achar uma solução aproximada de ρ, independente da variável velocidade. Assim, substituindo a solução proposta em (4.1.2) tem-se:

$$f(x_1, x_2)|_{\xi_2}.\frac{df_3}{dt}(t) = -\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}.x_2|_{\xi_2}.f_3(t)+$$
$$+\beta.f(x_1, x_2)|_{\xi_2}.f_3(t)$$
$$-\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}.f_3(t).[-\beta.x_2 + x_1 - \alpha.x_1^3 + A.sin(w.t + \phi)]|_{\xi_2}$$

Expandindo $sin(w.t + \phi)$ por $sin(w.t).cos(\phi) + cos(w.t).sin(\phi)$ e tomando $f_3 = e^{M.(\sin(w.t).\tan(\phi)-\cos(w.t))}$, com M sendo uma constante arbitrária, tem-se:

$$f(x_1, x_2)|_{\xi_2}.e^{M.(\sin(w.t).\tan(\phi)-\cos(w.t))}.w.M.(\cos(w.t).\tan(\phi)+\sin(w.t)) = -\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}.x_2|_{\xi_2}.$$
$$.e^{M.(\sin(w.t).\tan(\phi)-\cos(w.t))}+\beta.f(x_1, x_2)|_{\xi_2}.e^{M.(\sin(w.t).\tan(\phi)-\cos(w.t))}-e^{M.(\sin(w.t).\tan(\phi)-\cos(w.t))}.$$
$$.\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2).[-\beta.x_2 + x_1 - \alpha.x_1^3 + A.(sin(w.t).cos(\phi) + cos(w.t).sin(\phi))]|_{\xi_2}$$

Para que se dê a igualdade, os termos em t devem se anular. Com isso se obtém:

$$f(x_1, x_2)|_{\xi_2} = -\frac{A.\cos(\phi)}{w.M}.\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)|_{\xi_2} \tag{4.1.4}$$

Assim como o restante dos termos.

$$-\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}.x_2|_{\xi_2} + \beta.f(x_1, x_2)|_{\xi_2}$$
$$-\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}.[-\beta.x_2 + x_1 - \alpha.x_1^3]|_{\xi_2} = 0$$

Utilizando-se do resultado da equação (4.1.4) na equação acima, tem-se:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}|_{\xi_2} = \frac{w.M.f(x_1, x_2)}{A.\cos(\phi)}.[-\beta + \frac{\frac{A.cos(\phi)}{w.M}.\beta + x_1 - \alpha.x_1^3}{x_2}]\,|_{\xi_2} \tag{4.1.5}$$

Sabe-se que a solução em ρ deve obedecer algumas condições de contorno, tais quais:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$$

Ou seja, a função ρ deve ser normalizada em escala, e também, em se tratando desse sistema dinâmico, para valores grandes de x_1, a probabilidade de encontrar o sistema é muito baixa. Dessa forma:

$$\lim_{x \to \infty} \rho = 0$$

Denotando por N, outra constante arbitrária, assim como a constante M, para satisfazer as condições de contorno acima citadas, tem-se:

$$f(x_1, x_2)|_{\xi_2} = N.e^{[(\frac{\beta}{\xi_2} - \beta.\frac{w.M}{A.\cos(\phi)}).x_1 + \frac{w.M}{A.\cos(\phi).\xi_2}.(\frac{x_1^2}{2} - \frac{\alpha.x_1^4}{4})]}$$

Dessa forma, a funcão ρ, calculada em ξ_2 fica:

$$\rho(x_1, t)|_{\xi_2} = N.e^{(-\frac{\beta}{\xi_2} + \beta.\frac{w.M}{A.\cos(\phi)}).x_1 + \frac{w.M}{A.\cos(\phi).\xi_2}.(-\frac{x_1^2}{2} + \frac{\alpha.x_1^4}{4}) + M.(\sin(w.t).\tan(\phi) - \cos(w.t))} \quad (4.1.6)$$

A equação (4.1.6) representa uma solução possível da distribuição de ocorrências para o oscilador de Duffing para um dado valor de x_2 igual a ξ_2. Como solução para a ρ, deseja-se aproximá-la pela função obtida para um valor real de x_2 próximo a zero.

4.2 Resultados para o oscilador de Duffing

Uma forma conveniente de acessar as validade da teoria apresentada para o caso da equação mencionada é através do estudo mais aprofundado sobre a resposta esperada do sistema. Tomando conhecimento mais preciso das respostas e através de comparações com soluções numéricas, pode-se avaliar a validade da teoria, assim como suas limitações.

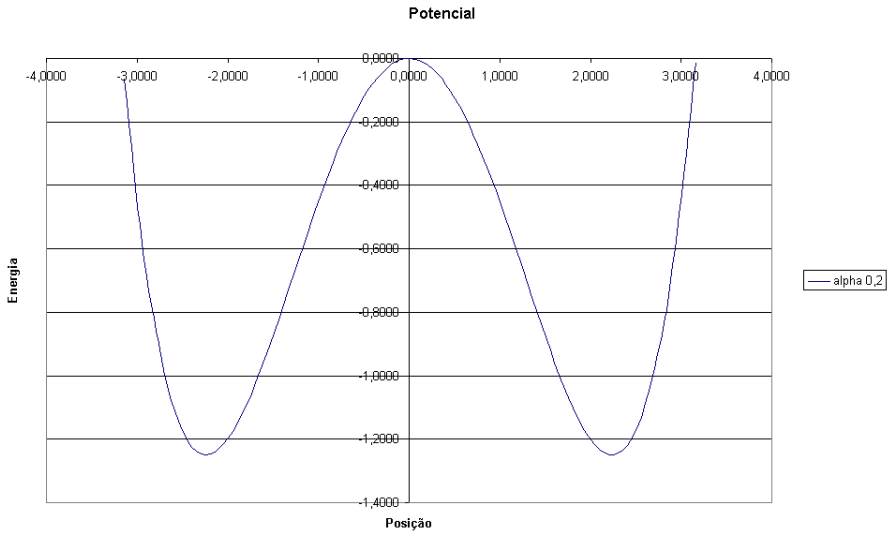

Figura 4.3: Poço Potencial para $\alpha = 0.2$

Inicialmente, uma avaliação da variação poço potencial do sistema, mediante a variação de um determinado parâmetro de interesse, é de grande valia no entendimento do sistema. Para a equação de Duffing, uma primeira análise foi escolhida variando-se o parâmetro α.

Na Figuras de 4.3 a 4.5 pode-se observar a variação dos poços potenciais do sistema para diferentes valores de α. Para $\alpha = 0.2$, Figura 4.3, o poço apresenta dois vales bem pronunciados ao redor de +/- 2.0 radianos. Conclui-se que, ao redor desses pontos, o sistema apresenta dois pontos de equilibrio estáveis sobre os quais deve oscilar.

Na Figura 4.4, para $\alpha = 0.5$, os dois vales presentes no caso anterior ainda se destacam, porém com menor intensidade. Espera-se que o sistema ainda possua órbitas ao redor desses pontos, porém, que elas não estejam mais tão concentradas em torno desses pontos, mas sim, uniformemente distribuídas entre esses focos e a origem.

Já para $\alpha = 1.2$, Figura 4.5, os dois pontos se confundem com a origem, formando apenas uma grande bacia de atração. É de se esperar que o sistema oscile em torno

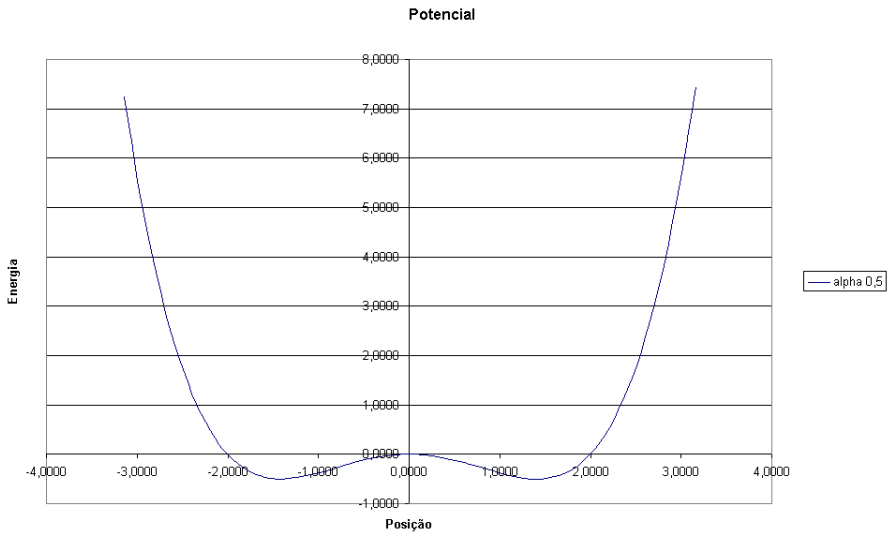

Figura 4.4: Poço Potencial para $\alpha = 0.5$

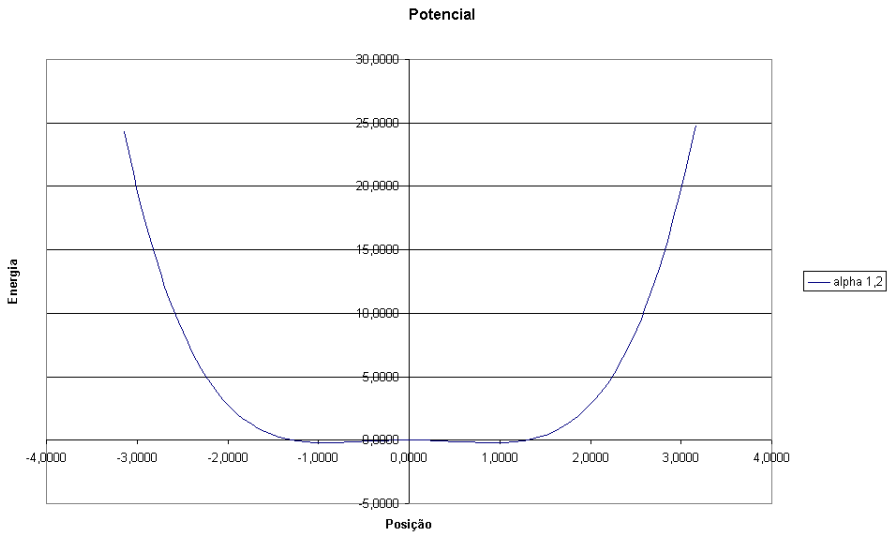

Figura 4.5: Poço Potencial para $\alpha = 1.2$

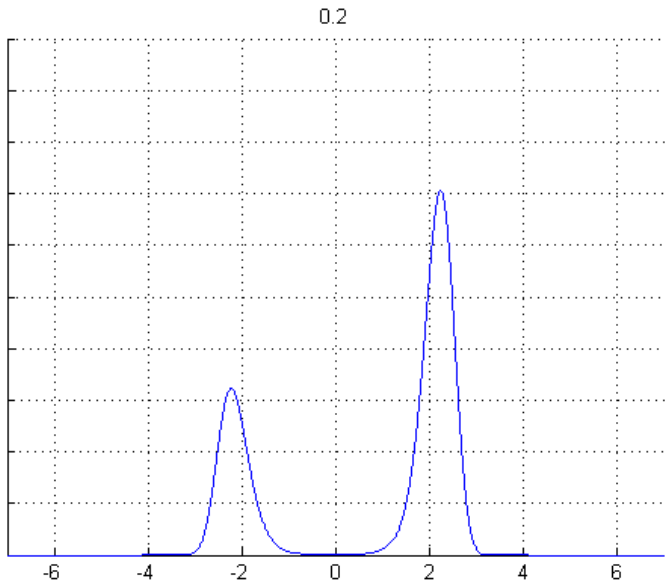

Figura 4.6: Distribuição de Ocorrência para $\alpha = 0.2$

dessa região.

Utilizando-se da equação (4.1.6), as distribuições de ocorrências estacionárias do sistema foram dispostas em gráficos, para cada valor de α citado acima. Todas foram obtidas para um valor real positivo de $\xi 2$ próximo de zero. As distribuições podem ser vistas nas Figuras de 4.6 à 4.8. Para os gráficos foi utilizado também $w = 1$ e $A = 0.3$.

Podem-se observar na Figura 4.6 duas regiões distintas de maior probabilidade de encontrar o sistema: ao redor de +/- 2.0 radianos. As duas regiões mencionadas, referem-se ao vales observados no poço potencial do sistema. Tal concentração representa um resultado bem lógico, visto que tais pontos são pontos de equilíbrio estável do sistema. No entanto, uma assimetria foi observada. Tal assimetria pode ter como possível causa, a excitação do sistema, que, para os instantes iniciais, sempre excita o sistema para o setor positivo do espaço de estado (devido à fase nula utilizada).

Uma forma de verificar tal afirmação quanto a influência da excitação sobre a densidade de probabilidade é alterar algum dos seus parâmetros e verificar o impacto

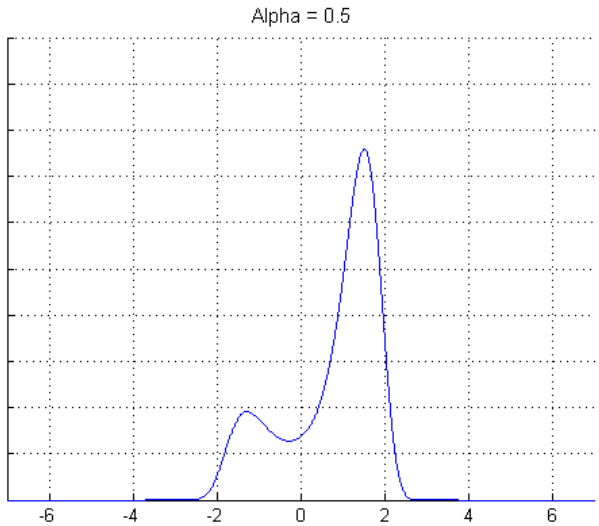

Figura 4.7: Distribuição de Ocorrência para $\alpha = 0.5$

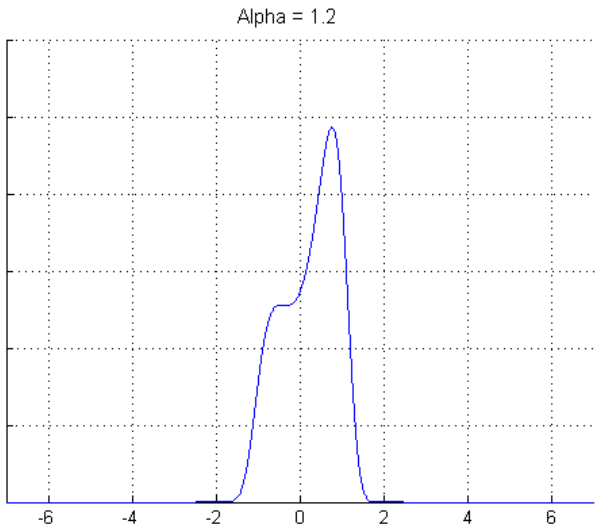

Figura 4.8: Distribuição de Ocorrência para $\alpha = 1.2$

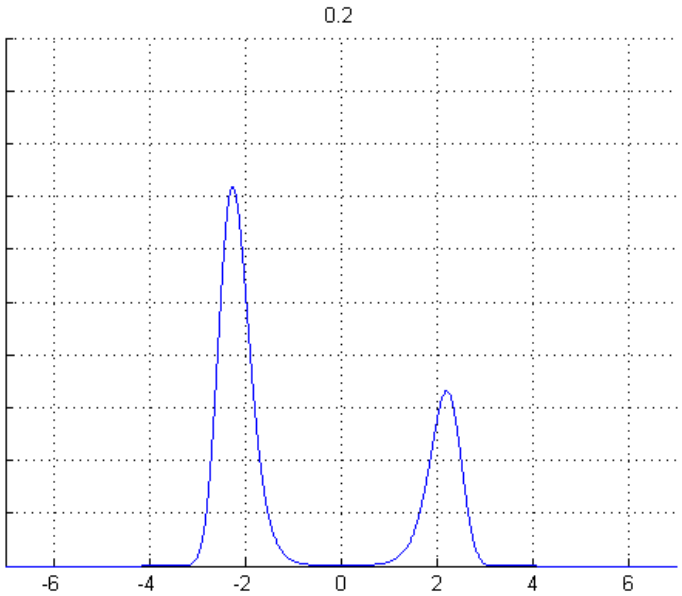

Figura 4.9: Distribuição de Ocorrência para $\alpha = 0.2$ e $\phi = 180deg$

sobre a densidade. O parâmetro mais lógico é a fase da excitação. Na Figura 4.9 está mostrada a densidade de probabilidade para $\alpha = 0.2$ e $\phi = 180deg$. Nota-se que a assimetria verificada anteriormente se inverteu, como previsto, refletindo a influência da excitação sobre a resposta do sistema.

Na Figura 4.7, para $\alpha = 0.5$, observa-se que as regiões equivalentes ao vales do poço potencial já não possuem probabilidade tão altas de encontrar o sistema, assim como houve um translado do picos em direção à origem. No entanto, tais regiões ainda se destacam, principalmente do lado positivo da abcissa do gráfico. Já na Figura 4.8, observa-se uma maior uniformidade da densidade de probabilidade ao redor de toda região compreendida entre -1 e +1, exatamente a região observada no poço potencial para o mesmo valor de α.

Como forma de verificar tais resultados obtidos, simulações numéricas foram feitas com o intuito de verificar tais distribuições. Assim para um conjunto finito de condições iniciais, distribuídas uniformemente em termos de probabilidade, foram realizadas simulações do sistema através do método de Monte Carlo e o espaço de

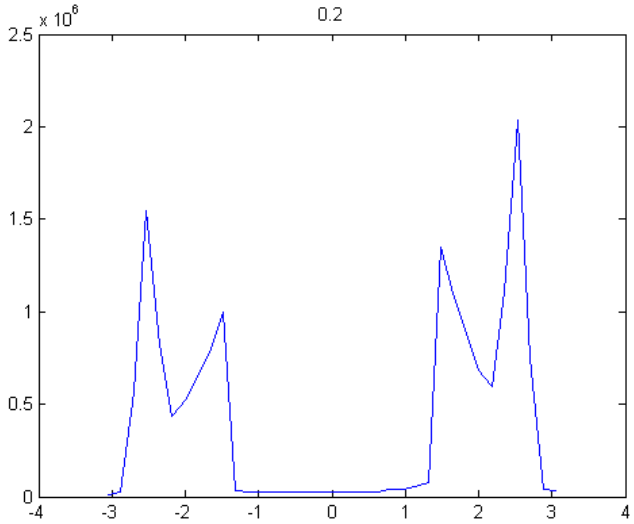

Figura 4.10: Diagrama de Ocorrências para $\alpha = 0.2$

estado foi dividido em regiões discretas. Dessa forma, foi contruído um histograma de ocorrências do sistema na região do espaço de estado, apenas em função da posição, ou seja, as fatias para cada valor de x_2 foram somadas, de maneira a obter uma única distribuição final . Tais gráficos podem ser vistos nas Figuras de 4.10 a 4.12. Um detalhe a ser observado é que, até o momento, não foi provado nada em relação à ergodicidade do oscilador de Duffing, e portanto, não se sabe se existe uma densidade estacionária. Tal densidade, porém, pode ser verificada numericamente de forma iterativa. Com isso, se obtém um tempo final de simulação t_f, para o qual, para qualquer $t > t_f$, o histograma obtido permanece praticamente inalterado.

Os diagramas foram feitos nas mesmas condições dos gráficos anteriores. Pode-se observar grande semelhança entre eles. Para $alpha = 0.2$ por exemplo, observa-se a assimetria de ocorrências entre os dois atratores (lado positivo e lado negativo do espaço de estado), verificada no gráfico 4.6. Obviamente, o método numérico possui limitações devido ao número finito de condições iniciais que podem ser testadas.

Já nas Figuras 4.11 e 4.12 observa-se a gradativa uniformização das ocorrências em torno da origem. Tal comportamento também foi verificado nos poços potenciais

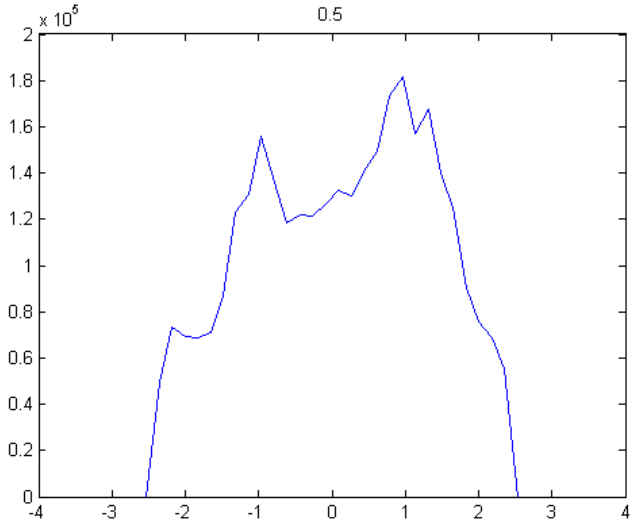

Figura 4.11: Diagrama de Ocorrências para $\alpha = 0.5$

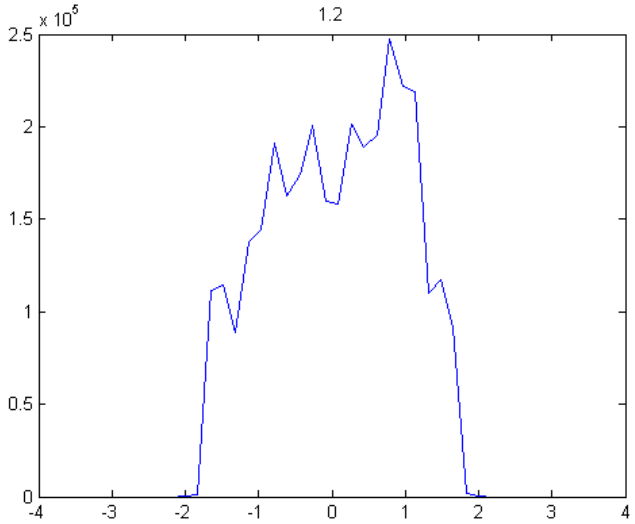

Figura 4.12: Diagrama de Ocorrências para $\alpha = 1.2$

do sistema.

Conforme solução proposta, a função de densidade de probabilidades (4.1.6) não depende da variável $\dot{x}$. Esse resultado foi obtido através do método de resolução da equação diferencial resultante do operador de Frobenius Perron, como forma de simplificar a equação diferencial parcial e, assim, achar uma solução fechada para o sistema. No entanto, analisando os resultados obtidos até aqui, percebe-se que apesar dessa dependência não estar explícita na equação (4.1.6), ela se mostra presente nas densidades obtidas, conforme pensado anteriormente. Quando o sistema passa por uma região do espaço de estado com baixa velocidade, é grande a probabilidade de encontrar o sistema nessa região. Ou melhor, é maior a probabilidade de encontrar o sistema nessa região do que em uma no qual ele passa com grande velocidade.

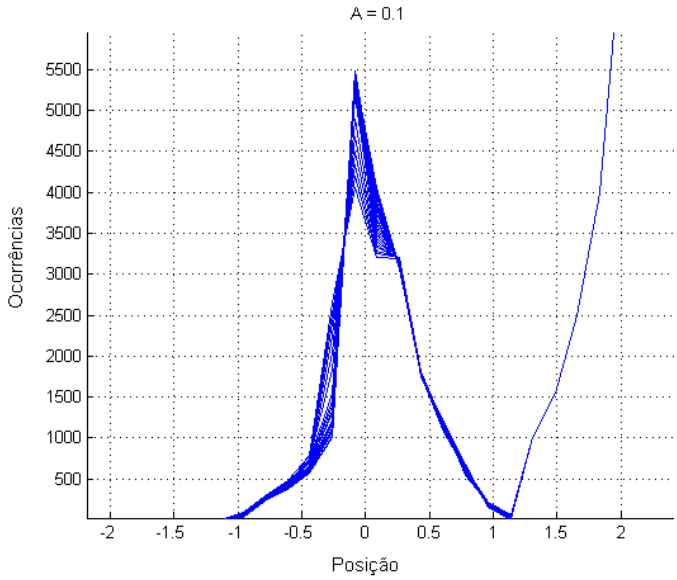

Figura 4.13: Distribuição de Ocorrências para valores diferentes de x_2 próximos de zero para equação de Escape

4.3 Equação de Escape

A chamada Equação de Escape é da forma.

$$\ddot{x} + \beta.\dot{x} + x - \alpha.x^2 = A.\sin(w.t + \phi) \tag{4.3.1}$$

Tal equação é utilizada na representação do movimento do jogo de uma navio mediante ação de ondas regulares ([Thompson et al., 1990] e [Thompson et al., 1992]).

Como feito anteriormente para o oscilador de Duffing, foram gerados diagrama de ocorrências numéricos para diferentes valores de x_2 próximos a zero. Tais diagramas podem ser vistos na Figura 4.13. Novamente, pode-se notar a pequena variação dos diversos histogramas para valores de velocidade ao redor de zero. Portanto, de maneira análoga ao caso anterior, como forma de solução fechada para a densidade de probabilidade dada pelo operador de Forbenius-Perron, optou-se por aproximá-la por uma distribuição de ocorrências calculada para uma fatia de x_2, próxima de zero.

Uma particularidade desse novo sistema, é a presença de um atrator instável, que

leva ao sistema à região de $+\infty$. Pelo diagrama de ocorrências numérico, percebe-se que isso leva a um aumento do número de ocorrências para a região do espaço de estado perto do escape, devido ao aumento do número de condições iniciais que levam ao escape, e consequentemente, levam o sistema a trafegar por essa região. Dessa forma, uma condição de contorno para uma possível solução de ρ, é de seu valor aumentar indefinidamente para tal região, ou mesmo para a posição tendendo a $+\infty$. Isso, porém, gera um problema de normalização da função ρ, já que essa não é mais limitada.

No entanto, tendo em vista a forma da solução aproximada proposta, a normalização significa muito mais uma escala de apresentação dos resultados, do que, propriamente, uma condição para a encontrar a solução. Dessa forma, propõe-se um limite de validade para a solução, a mencionar, o ponto de escape das trajetórias (região ao redor de $x_1 = 1$, para o valor de $\alpha = 1$), e pretende-se fazer a normalização até essa região definida.

De forma análoga ao oscilador de Duffing, obtém-se, através do operador de Frobenius Perron, a distribuição de ocorrência para cada valor de $x_2 = \xi_2$, para equação de Escape na forma:

$$\rho(x_1, t)|_{\xi_2} = N.e^{M.(-\frac{\beta}{\xi_2}+\beta.\frac{w}{A.\cos(\phi)}).x_1+\frac{w}{A.\cos(\phi).\xi_2}.(\frac{x_1^2}{2}-\frac{\alpha.x_1^3}{3})-\sin(w.t).\tan(\phi)+\cos(w.t)} \tag{4.3.2}$$

4.4 Resultados para a equação de Escape

Antes de obter as densidades de probabilidades para o sistema em estudo, é importante interpretá-lo do ponto de vista de seus pontos de equilíbrio. Para isso, é importante saber como varia a energia potencial do sistema para esse tipo de força de restauração para o sistema não forçado.

Na Figura 4.14, pode-se ver a variação do poço potencial do sistema para $\alpha = 1.0$.

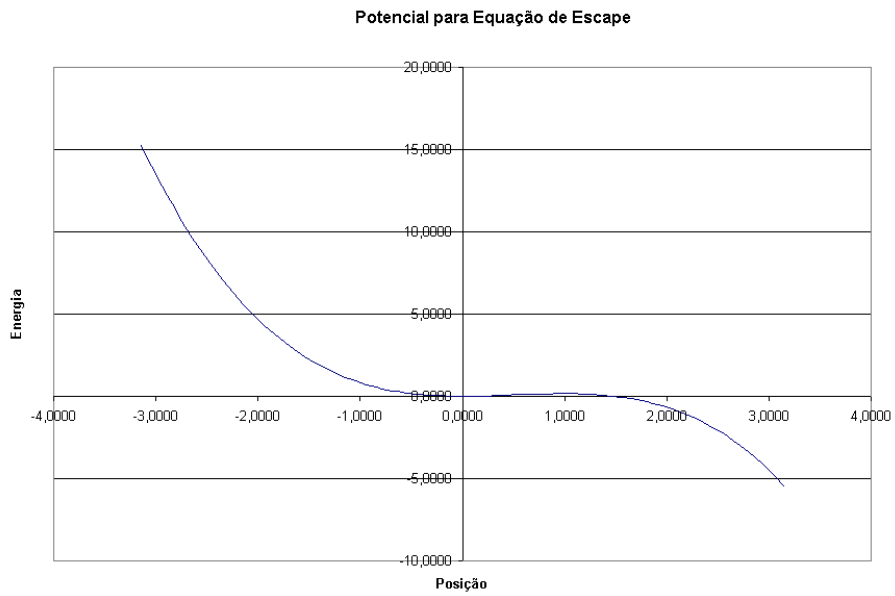

Figura 4.14: Poço Potencial para Equação de Escape

Percebe-se que o sistema possui um atrator na origem, onde o poço apresenta um ponto de mínimo local. Para valores negativos, o sistema é atraído para esse atrator. No entanto, para valores positivos, o sistema possui um escape, originando instabilidade. Para valores próximos a +1, o sistema tem um ponto de máximo local, dividindo a região dominada pelo atrator e a região de escape do poço potencial. Tal sistema se mostra bem interessante no aspecto da forçante, pois, dependendo de sua intensidade, mesmo o sistema tendo como condição inicial interior à região do atrator, pode ainda assim ser atraído para o escape.

Por isso, um interessante parâmetro a ser tomado para o estudo da evolução de densidades é a intensidade da força de excitação, dito parâmetro A.

Na Figura 4.15, pode-se observar a variação da distribuição de ocorrências para quatro diferentes valores de A. Foram utilizados valores de $\beta = 0.5$, $w = 0.3$ e, assim como no poço potencial, $\alpha = 1.0$. Pode-se observar que para pequenos valores de A, o sistema praticamente permanece na região em torno da origem. À medida que A cresce, a densidade na origem diminui, ao passo que se alarga sua região de domínio. Em outras palavras, a distribuição torna-se menor para valores menores que +1.5,

aproximadamente, e para valores positivos e grandes de x, a probabilidade tende a crescer indefinidamente.

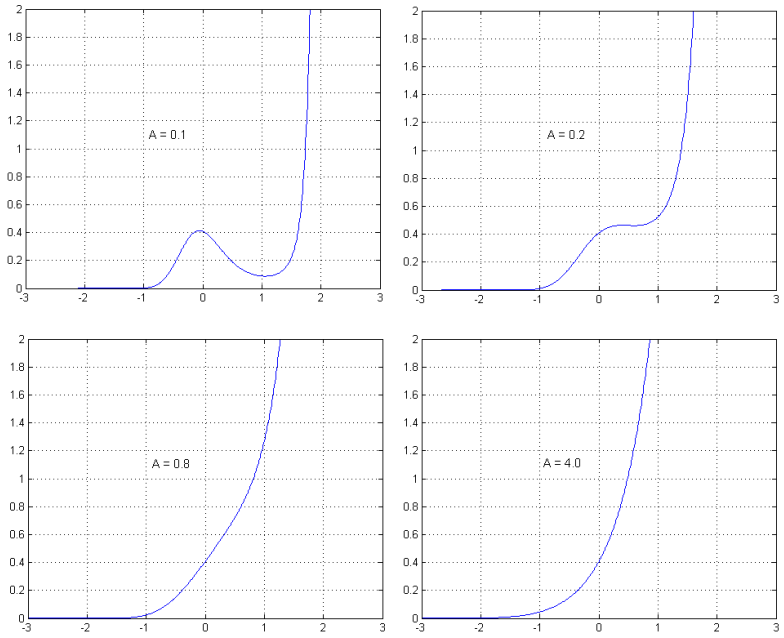

Figura 4.15: Evolução de Distribuição de Ocorrências com A

Tem-se para esta última região mencionada o escape do sistema. Dessa forma, a probabilidade de encontrar o sistema trafegando por essa região, proporcionalmente ao resto do espaço de estado, aumenta a cada valor maior de A, indicando que a probabilidade do sistema escapar é cada vez maior com o aumento da amplitude da forçante.

A princípio, observando o poço potencial do sistema, tende-se a concluir que o limite entre a bacia de atração do atrator estável do sistema e o escape é aproximadamente $+1$. Valor esse onde o poço potencial de um ponto de derivada zero. Porém, como visto na densidade de probabilidade, onde esta cresce indefinidamente é aproximadamente $+1.5$. Tal valor representa um ponto além da estabilidade em termos do poço potencial, porém ainda representa um ponto de atração para o atrator estável, no qual a força de restauração ainda consegue mantê-lo, ou atraí-lo. Tal

ponto também pode ser visto em um diagrama de fase para um dada condição inicial, na qual o sistema está em seu limiar de escape (4.16).

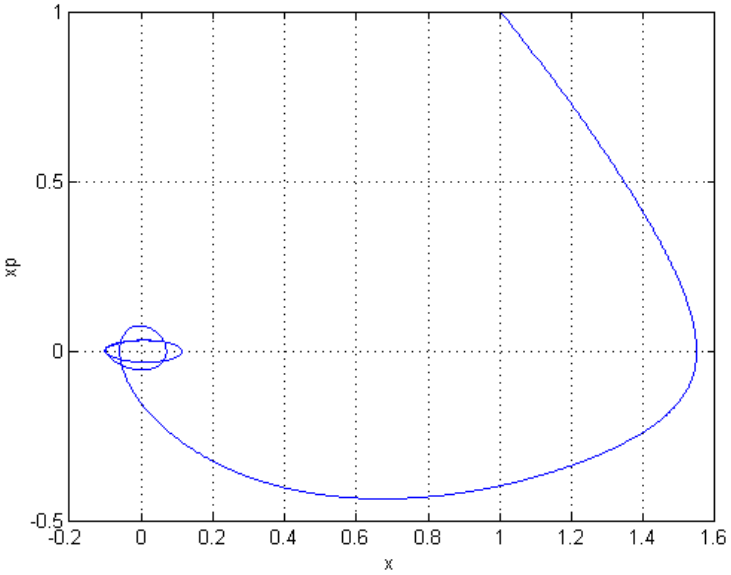

Figura 4.16: Diagrama de Fase para a equação de Escape

Outro ponto interessante é para valores baixos de A, para o qual a densidade de probabilidade apresenta um pico aproximadamente ao redor da origem. Tal pico está mostrado na Figura 4.17. Tal valor pode ser explicado novamente através de um diagrama de fase para o sistema (Figura 4.18). Nessa região o sistema orbita indefinidamente, e exatamente para esses valores de x, aproximadamente ± 0.2, são pontos de velocidade baixa, ou mesmo nula. Ou seja, exatamente nesses pontos o sistema trafega bem lentamente e, portanto, é maior a probabilidade de encontrá-lo.

Para confirmar tais conclusões, fez-se da mesma forma com o oscilador de Duffing. Foram realizadas simulações através do método de Monte Carlo, variando as condições iniciais e histogramas de ocorrências foram feitos para diferentes valores de A. O resultado pode ser visto na Figura 4.19.

Pode-se identificar o mesmo comportamento global visto nas figuras anteriores pelo operador de Frobenius Perron. À medida que se incrementa A, a densidade se

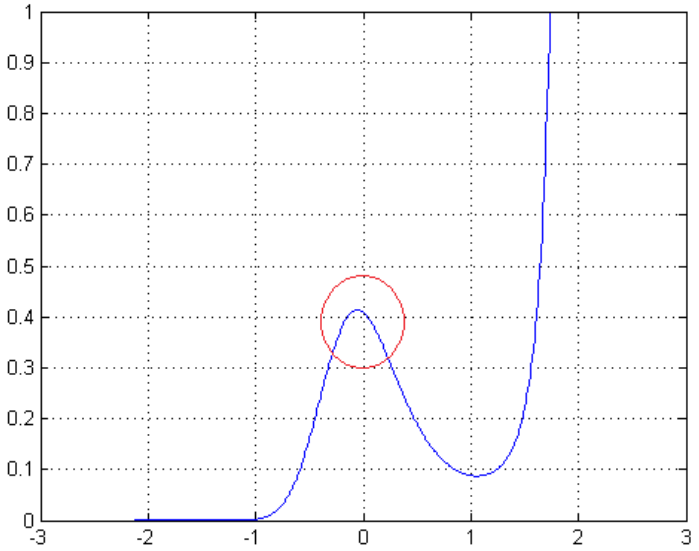

Figura 4.17: Distribuição de Ocorrência

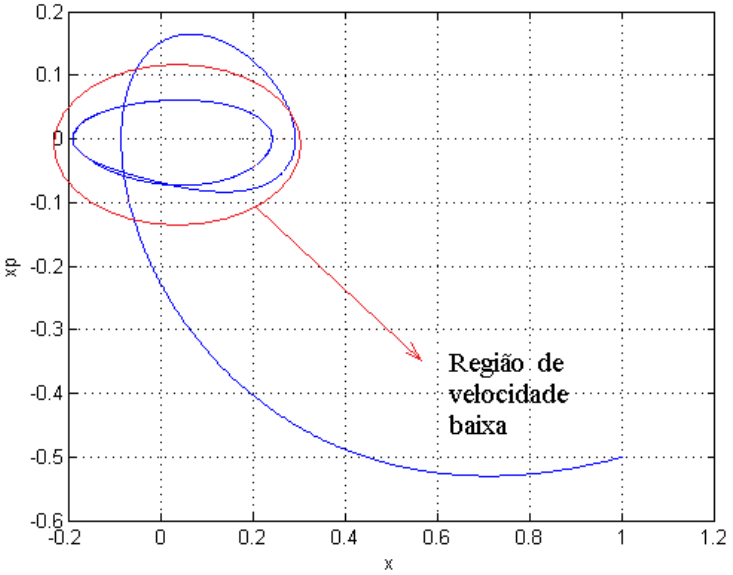

Figura 4.18: Diagrama de Fase para a equação de Escape

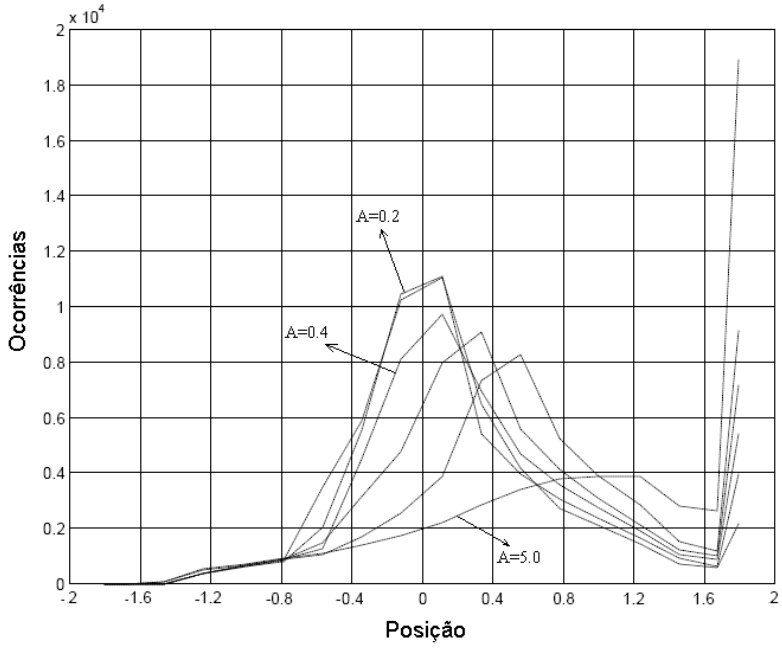

Figura 4.19: Evolução do Gráfico de Ocorrências com A

achata, diminuindo o valor de pico, assim como ocorre o aumento de ocorrências do escape, o que se pode observar com o aumento da ocorrência na região direita do gráfico 4.19.

4.5 Oscilador de Van der Pol

O oscilador de Van der Pol é uma equação bem conhecida em dinâmica não linear, entre outras razões, por apresentar, em regime permanente, orbitas estáveis isoladas chamadas de ciclos limite. Tal comportamento pode ser encontrado em vários sistemas físicos e tem como origem a presença de uma não linearidade no termo dissipativo do oscilador. Uma das representações de tal oscilador é da forma:

$$\ddot{x} + \beta.\dot{x}.(\alpha.|x| - 1) + K.x = 0 \tag{4.5.1}$$

Como foi feito para os sistemas anteriores, obtém-se, através do operador de Frobenius Perron, a seguinte equação de evolução para a densidades de probabilidades do sistema:

$$\dot{\rho} = -\frac{\partial \rho}{\partial x_1}.x_2 - \frac{\partial \rho}{\partial x_2}.[-\beta.x_2.(\alpha.|x_1| - 1) - K.x_1] + \beta.\rho.(\alpha.|x_1| - 1) \tag{4.5.2}$$

Deseja-se determinar a solução de ρ estacionária, ou seja, quando $\dot{\rho} = 0$. Assim como para os casos anteriores, assume-se por solução:

$$\rho = f(x_1, x_2) \tag{4.5.3}$$

Como para os osciladores anteriores, vamos assumir ξ_2 como um valor real representando uma fatia da solução para $x_2 = \xi_2$. Deseja-se achar, portanto, uma solução $f(x_1, x_2)$, calculada em ξ_2. De forma análoga aos sistemas anteriores, um conjunto de diagramas de ocorrências numérico foi feito para diferentes valores de x_2, próximos à origem (Figura 4.20).

Nesse oscilador é ainda mais claro a pequena variação dos diagramas de ocorrências para diversas fatias de velocidade. E de forma análoga à esquação de escape, deve-se limitar a região de normalização da função, visto que essa também não é limitada. Para esse oscilador, a região de normalização escolhida é ± 2.

Substituindo (4.5.3) em (4.5.2) tem-se:

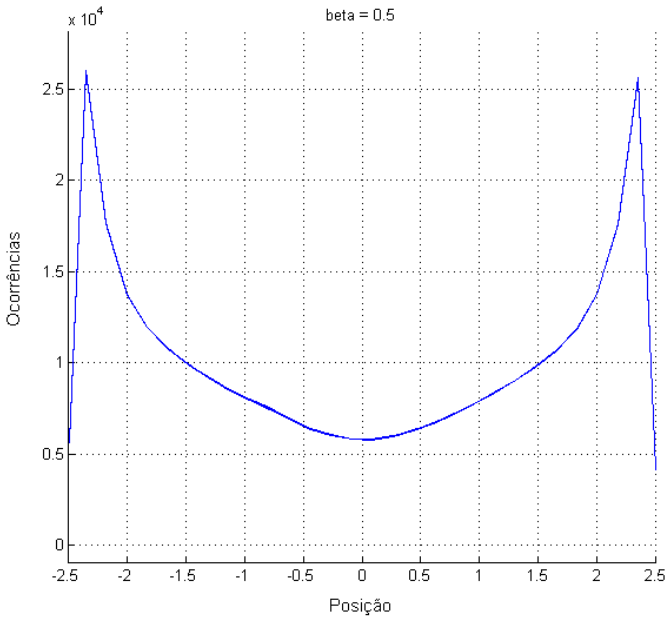

Figura 4.20: Distribuição de Ocorrências para valores diferentes de x_2 próximos de zero para equação de Van der Pol

$$-\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}.x_2|_{\xi_2} + \beta.(\alpha.|x_1|-1).f(x_1,x_2)|_{\xi_2}$$
$$-\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}.[-\beta.x_2.(\alpha.|x_1|-1) - K.x_1]|_{\xi_2} = 0$$

Com a função f definida como:

$$f(x_1,x_2)|_{\xi_2} = e^{\varphi(x_1,x_2)}|_{\xi_2}$$

Tem-se:

$$-\frac{\partial \varphi(x_1,x_2)}{\partial x_1}.x_2.f(x_1,x_2)|_{\xi_2} + \beta.(\alpha.|x_1|-1).f(x_1,x_2)|_{\xi_2}$$
$$-\frac{\partial \varphi(x_1,x_2)}{\partial x_2}.[-\beta.x_2.(\alpha.|x_1|-1) - K.x_1].f(x_1,x_2)|_{\xi_2} = 0$$

Como nos casos anteriores, busca-se uma solução para ρ que respeite certas condições de contorno. Tirando a condição de normalização da integral da função

ρ para uma região definida, para este sistema em particular, condições ao redor da origem, bem como em outras regiões não são triviais. Apenas um condição que se pode buscar é a simetria da densidade em relação à origem. Como o sistema em suas séries temporais comporta-se de maneira simétrica em relação a $x = 0$, espera-se o mesmo comportamento de sua densidade de probabilidade. Uma outra condição é, como visto nos diagramas de ocorrência numéricos na Figura 4.20, a tendência de valores muito altos de ocorrências para $x_1 \to \pm\infty$.

Dessa forma, assumindo que para uma fatia da solução completa, com $x_2 = cte$, a seguinte relação é válida, $\frac{\partial\varphi(x_1,x_2)}{\partial x_2} = N$, com $N \in \mathbb{R}^-$, já que, é de se esperar a diminuição das ocorrências com o aumento da velocidade. Portanto obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial\varphi(x_1,x_2)}{\partial x_1}|_{\xi_2} = \frac{\{\beta.(\alpha.|x_1|-1)\}}{x_2}|_{\xi_2} - N.\frac{\{-\beta.x_2.(\alpha.|x_1|-1) - K.x_1\}}{x_2}|_{\xi_2}$$

Reagrupando os termos, tem-se :

$$\frac{\partial\varphi(x_1,x_2)}{\partial x_1}|_{\xi_2} = \{\frac{\beta.(\alpha.|x_1|-1)}{x_2} + N.\beta.(\alpha.|x_1|-1) + K.N.\frac{x_1}{x_2}\}|_{\xi_2}$$

$$\frac{\partial\varphi(x_1,x_2)}{\partial x_1}|_{\xi_2} = \{\frac{(N.x_2+1)}{x_2}.[\beta.(\alpha.|x_1|-1)] + K.N.\frac{x_1}{x_2}\}|_{\xi_2}$$

E assim, a solução fica:

$$\varphi(x_1,x_2)|_{\xi_2} = \{\frac{(N.x_2+1)}{x_2}.[\beta.(\alpha.sign(x_1).\frac{x_1^2}{2} - x_1)] + K.N.\frac{x_1^2}{2.x_2}\}|_{\xi_2} \tag{4.5.4}$$

Logo, a solução da densidade de probabilidade, para um valor de x_2 pode ser calculada por:

$$\rho(x_1,x_2)|_{\xi_2} = M.e^{\{\frac{(N.\xi_2-1)}{\xi_2}.[\beta.(\alpha.sign(x_1).\frac{x_1^2}{2}-x_1)]+K.N.\frac{x_1^2}{2.\xi_2}\}} \tag{4.5.5}$$

Escolhendo a relação entre os valores de M e N de maneira a obedecer as condições de contorno mencionadas anteriormente, pode-se obter a densidade para diferentes

valores de ξ_2. E como mencionado, aproximar a solução completa por uma solução para uma dada fatia de x_2 próximo a zero.

4.6 Resultados para o oscilador de Van der Pol

O oscilador de Van der Pol representa um importante sistema oscilatório dentro da dinâmica não-linear. O sistema descrito por (4.5.1) possui as características de um oscilador de Van der Pol através de seu termo dissipativo. Por essa razão, um importante parâmetro para se estudar nesse sistema é o valor de β.

Para qualquer valor de β, sabe-se que o ciclo limite estará presente no equilíbrio do sistema. A intensidade com que o sistema é "atraído" para o ciclo limite é o que varia para diferentes valores de β.

Valores baixos de amortecimento fazem com que o sistema possua muitas oscilações em torno da origem. Tal comportamento pode ser visto na Figura 4.21, para um valor de $\beta = 0.5$. Os demais valores foram mantidos com valores unitários.

Já para valores altos de β, o sistema adquire sua estabilidade orbital sem a presença de oscilações citadas anteriormente. Para valores de $\beta = 4.0$, o diagrama de fase pode ser visto na Figura 4.22.

Para ambos os casos, o sistema, para qualquer condição inicial, tende, em regime permanente, a permanecer na órbita apresentada nas Figuras 4.21 e 4.22, ou melhor, no ciclo limite.

Para os mesmos valores de K, α e tomando β como parâmetro de variação, as densidades de probabilidade em regime para o sistema foram obtidas e podem ser vistas na Figura 4.23.

Pode-se observar que, para valores de beta maiores, o sistema deixa de exibir um patamar equiprovável em torno de zero e começa a apresentar picos ao redor de ± 1. Esses picos correspondem à região denominada por "A" na Figura 4.22. Em comparação com a Figura 4.21, pode-se destacar uma maior uniformidade nas órbitas para esta última. Essa uniformidade também foi destacada em sua densidade

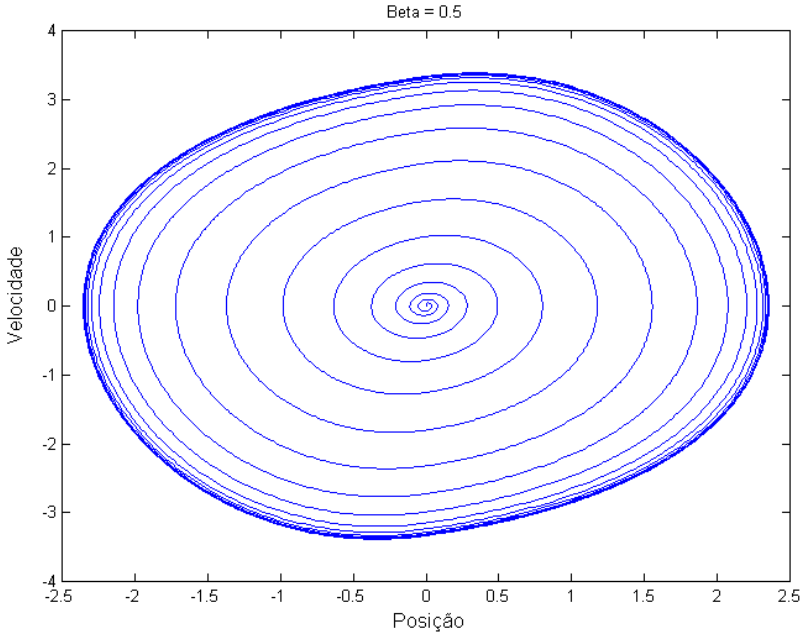

Figura 4.21: Diagrama de fase para o oscilador de Van der Pol

de probabilidade, diferentemente para o caso de $\beta = 4.0$.

Já nas regiões do espaço de estado maiores que +/- 2.0, as densidades possuem um aumento exponencial em seus valores, não "retornando" posteriormente. Tal comportamento exponencial é devido à órbita do ciclo limite possuir velocidades próximas de zero justamente nessas regiões do espaço de estado. O que se observa, através de simulações, é que para valores grandes de posição, bem afastados da origem, o amortecimento torna-se grande em relação à constante de mola do sistema. Assim, o sistema em condição inicial de posição, afastado da origem, retorna com velocidade muito lenta, devido ao amortecimento ser proporcional à posição. Assim, o sistema "gasta" muito tempo em espaços de estado longe da origem, até ser atraído para o ciclo limite (Figura 4.25). Dessa forma, o sistema pode permanecer por um longo tempo nessa região dada uma condição inicial que propicie tal situação.

Como forma de comparação com o resultado analítico obtido, na figura 4.24, está mostrado o diagrama de ocorrências, ou seja, a densidade de probabilidade obtida

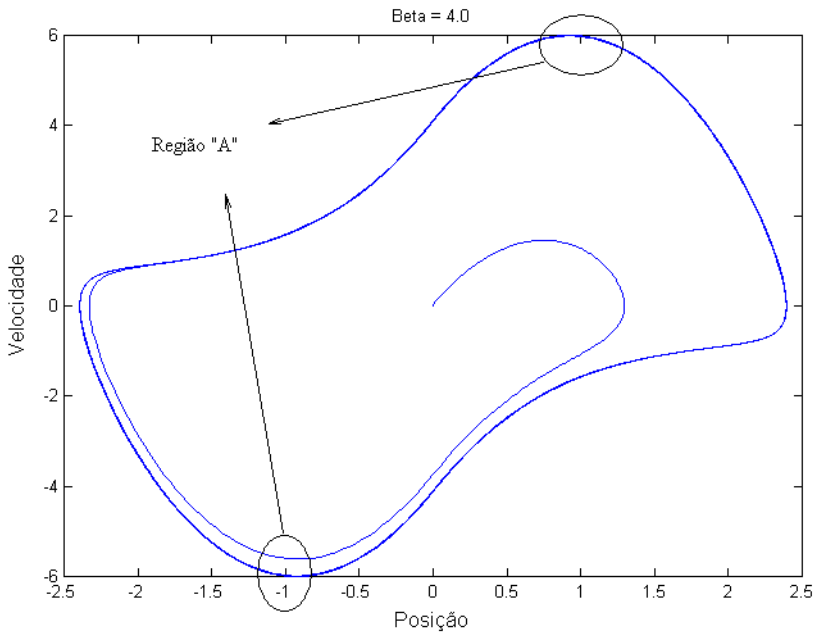

Figura 4.22: Diagrama de fase para o oscilador de Van der Pol

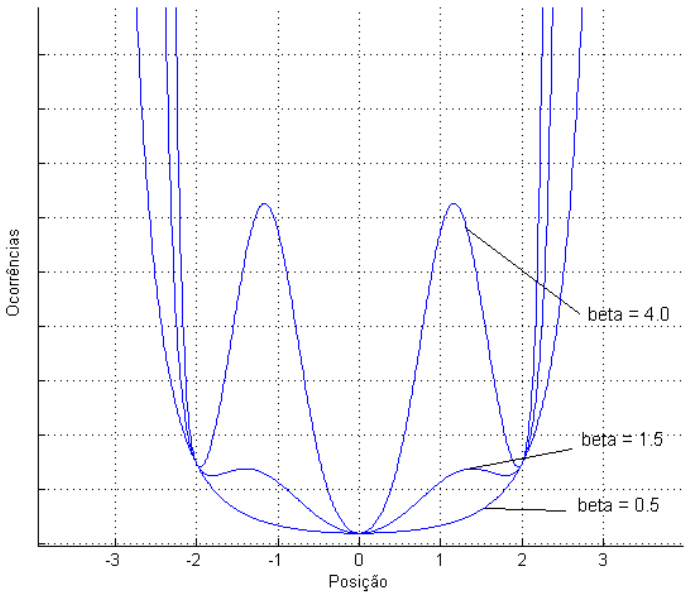

Figura 4.23: Distribuição de ocorrências para o oscilador de Van der Pol

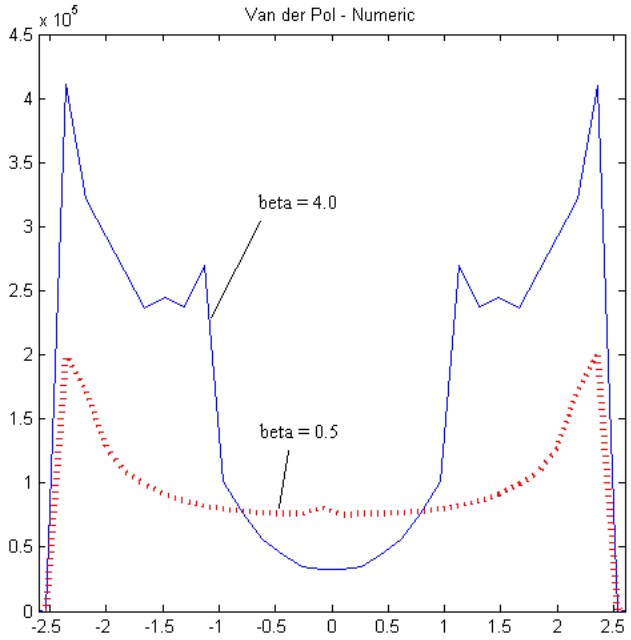

Figura 4.24: Diagrama de ocorrências para o oscilador de Van der Pol

numericamente para o oscilador de Van der Pol.

No entanto, vale ressaltar que o sistema não possui características de ergodicidade para essas regiões, afastadas do ciclo limite. Portanto, o sistema pode não possuir uma densidade estacionária. Com isso, se pode concluir que a densidade de probabilidade obtida por solução somente é valida para a região dentro do ciclo limite e seus arredores.

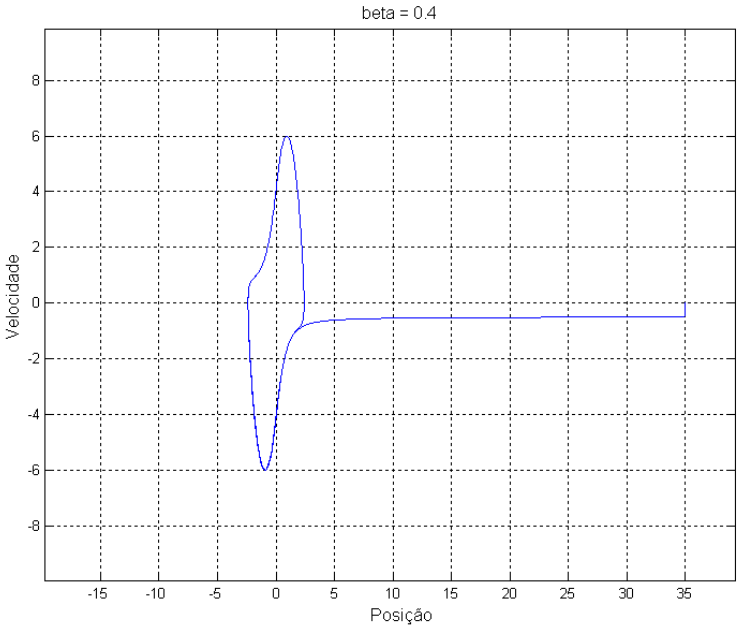

Figura 4.25: Diagrama de fase para condição inicial $x_0 = 35$

Capítulo 5

Aplicação em dinâmica veicular

Toda teoria desenvolvida assim como sua aplicabilidade em problemas clássicos da dinâmica não-linear teve por objetivo construir subsídios para a resolução de problemas dinâmicos em dinâmica veicular. O problema que se deseja investigar consiste na resposta de uma veículo em termos de estabilidade do movimento de rolagem da carroceria, mediante uma excitação abrupta do angulo de esterçamento. Tal estudo reflete uma recente preocupação da indústria automobilística no que se refere à estabilidade contra capotamento de veículos com centro de gravidade elevado. Nos últimos anos, como esforço para projetar veículos mais seguros e reduzir assim o número de acidentes resultantes de capotamentos, a indústria tem perseguido mudanças de projetos e conceitos em suspensão que levam a melhorias em termos de resistência ao capotamento. Tais esforços não podem ser atingidos sem o uso de procedimentos adequados. Atualmente, a necessidade de se avaliar e quantificar a resistência ao capotamento de veículos e passar tal informação ao consumidor, tem levado a introdução, nos Estados Unidos, pelo órgão governamental competente, de um teste dinâmico físico realizado em veículos. Nesse teste, o veículo é conduzido em uma pista lisa, seca, e então é esterçado bruscamente para uma lado, e depois para outro, com grandes amplitudes de ângulo de volante, simulando o que seria uma manobra evasiva de um motorista tentando fugir de um obstáculo em uma rodovia. É constatada uma falha se o veículo apresenta duas rodas simultâneas levantadas mais de duas polegadas.

Com isso exposto, pretende-se contruir um modelo arquetípico de um veículo, realizando uma manobra evasiva e deseja-se aplicar a teoria de mecânica estatística em tal modelo, visando obter respostas em termos de probabilidade de um veículo apresentar instabilidade ao capotamento mediante parâmetros de projeto e, assim, estudar o modelo de forma a obter robustez no que se refere à resistência ao capotamento.

5.1 Modelos de dinâmica veícular

Um esquema inicial do modelo que se deseja obter pode ser visto na Figura 5.1. O modelo deve conter a massa suspensa (corpo do veículo), sobre o qual atua a aceleração lateral, assim como a massa não-suspensa, composta pela suspensão, pneus etc. É sobre a massa não-suspensa que atua as forças de pneu.

O modelo simplificado deve basear-se exatamente nessa vista frontal do veículo demonstrada na Figura 5.1. Os graus de liberdade relevantes ao estudo de capotamento serão abordados detalhadamente, assim como as razões para sua utilização. Outro grau de liberdade também importanto da descrição na dinâmica lateral, não contemplada na Figura 5.1 é o movimento de guinado do veículo, também conhecido por yaw. Este consiste em uma vista de planta do veículo, e é representado pelo movimento de giro do veículo em torno de seu centro de gravidade. Na Figura 5.2 este movimento está representado por $\dot{\psi}$.

A princípio a idéia inicial é incluir o movimento de yaw no modelo simplificado que se deseja contruir. No entanto, será mostrado, que este movimento, para o estudo de capotamento, não adiciona informação relevante para o estudo do sistema. O movimento de giro do veículo, quando observado pr uma vista frontal do veículo, apenas induz acelerações inerciais e acoplamento com o movimento de rolagem. E como será visto, em condições críticas, essas grandezas são pequenas perto das excitações primárias do movimento lateral e de rolagem.

Um ponto a ser mencionado é a fonte primária de excitação dos modelos de dinâmica veicular: o pneu. Ele é o principal responsável pela geração do movimento,

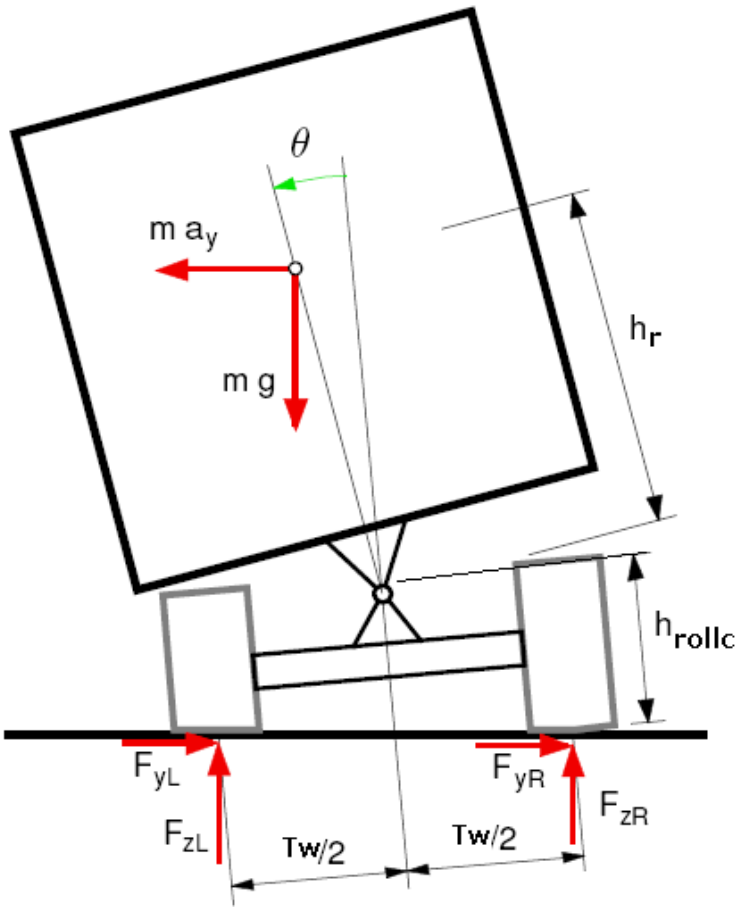

Figura 5.1: Modelo simplificado de rolagem veicular

e sua modelagem é fonte de estudos a anos. Em muitos modelos, a força de excitação externa proveniente do pneu é proporcional ao ângulo de exterçamento das rodas, e ao escorregamento lateral destes. Dessa forma, esse escorregamento é considerado como mais um grau de liberdade, e o angulo de esterçamento como uma entrada dependente apenas do tempo. Nesse trabalho, o pneu será representado como uma entrada dependente do tempo, obviamento, com as forças proporcionais à manobra que se deseja representar, e as próprias características do pneu.

Outro modelo utilzado no trabalho é um modelo completo de multicorpos com mais de 200 graus de liberdade, desenvolvido no software comercial chamado ADAMS.

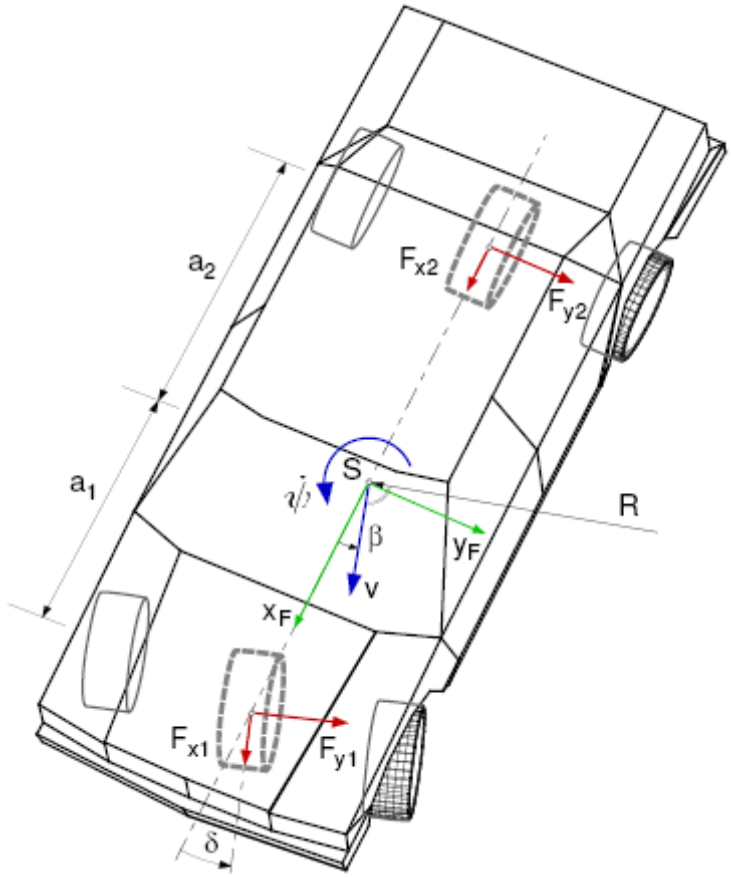

Figura 5.2: Modelo simplificado de yaw. Fonte [Rill, 2003]

Esse modelo pode ser visto na Figura 5.3. O método de análise de sistemas multicorpos utiliza um conjunto definido de elementos como corpos rígidos, juntas, molas, amortecedores, forças e movimentos pré-determinados para a descrição do sistema. A Figura 5.4 mostra um modelo de dados para a representação de um sistema multicorpos.

O modelo multicorpos é caracterizado como tendo um conjunto de corpos interagindo através de juntas, forças ou movimentos pré-estabelecidos. Cada corpo possui um sistema de coordenadas local, chamados de sistema de referência do corpo, em relação ao qual estão definidas as propriedades de inércia. Os marcadores são sistemas

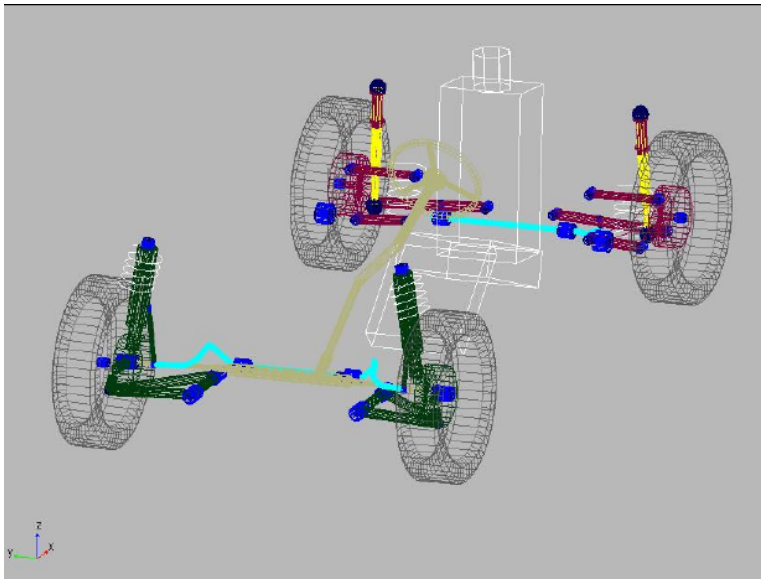

Figura 5.3: Modelo em ADAMS de dinâmica veicular

de coordenadas definidos em relação ao sistema de referência do corpo. Os marcadores são utilizados para a definição da localização e orientação dos elementos que servem de interação entre os corpos. É através desses marcadores que os elementos de força, como por exemplo a mola, e os elementos de junta, como por exemplo a junta de revolução, são conectados.

No caso do software ADAMS, mencionado, o programa gera as equações de movimento para a análise dinâmica do sistema. Essas equações, a princípio, podem ser geradas baseadas em um dos dois formalismos: numérico ou simbólico. No formalismo numérico, as equações são geradas em cada intervalo de integração. Já no formalismo simbólico, as equações do sistema multicorpo são geradas apenas uma única vez. No caso desse programa mencionado, ele é baseado no formalismo numérico e utiliza o método de Newton-Euler Lagrange para a construção dos sistemas de equações. O número de coordenadas generalizadas para cada corpo são seis. Três coordenadas são da translação do centro de massa do corpo em relação ao sistema de coordenada inercial

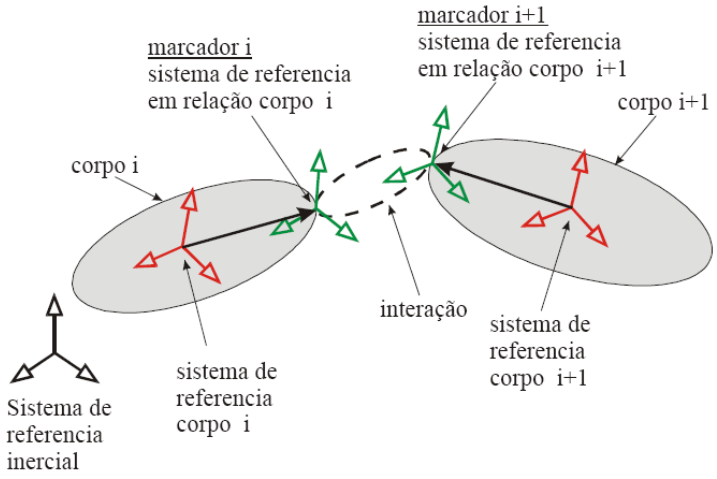

Figura 5.4: Modelagem em multicorpos

5.1.1 Obtenção do modelo arquetípico de veículo

Para o caso de um veículo trafegando em uma curva, as forças laterais entre o veículo e os pneus são transmitidas através dos links rígidos da suspensão. Geralmente tais links não são paralelos ao solo. Dessa forma, possuem resíduos de força no sentido vertical, que não se anulam e resultam em uma resultante de força vertical líquida que tende a levantar o veículo. Quando o veículo se ergue, seu centro de gravidade também é erguido, tornando o veículo mais propenso ao capotamento.

É sabido, através de literatura em dinâmica veicular, que as forças transmitidas entre as rodas e a massa suspensa veículo são dinamicamente equivalentes a uma força única, cuja reação é aplicada ao longo de uma linha que liga o centro do pneu com o solo ao centro de rotação da suspensão (Figura 5.5). Ver [Gillespie, 1992] e [Reimpell and Stoll, 1996].

Dessa forma, o movimento centro de gravidade da massa suspensa do veículo pode ser descrito pela seguinte equação:

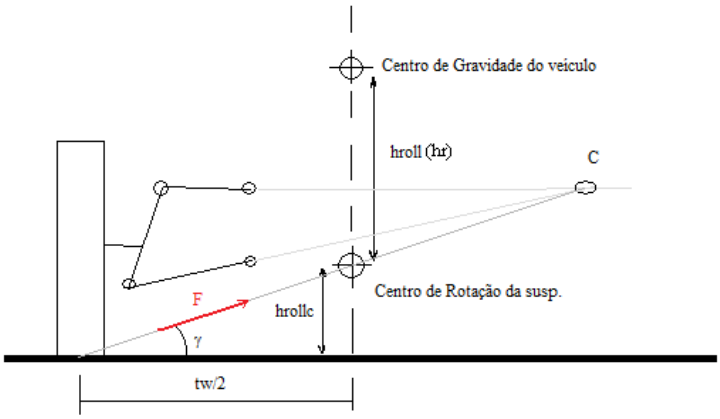

Figura 5.5: Distribuição de forças na suspensão

$$m_s.\ddot{Z} + C_Z.\dot{Z} + K_z.Z = -(F_{ylf} - F_{yrf}).\cos(\delta).\tan(\gamma) - (F_{ylr} - F_{yrr}).\tan(\gamma) + K_{z\theta}.|\theta^5| - m_s.g.(1 - \cos(\theta)) \tag{5.1.1}$$

Com C_Z e K_z sendo os termos de dissipação e restauração, respectivamente, do movimento vertical (proporcionais aos amortecedores e molas da suspensão do veículo), os termos de forças, como já mencionados, são os esforços laterais nos pneus devido à curva. O ângulo δ é o angulo de esterçamento das rodas dianteiras. Uma hipótese imbutida nessa equação é a de esterçamento nulo das rodas traseiras.

O termo $K_{z\theta}.|\theta^5|$ representa o acoplamento entre os movimentos de rolamento e deslocamento vertical do C.G. da massa suspensa devido às não-linearidades de rigidez da suspensão do veículo. Isso ocorre, primáriamente, devido a elementos poliméricos instalados na suspensão de veículo de maneira a conter os deslocamentos da suspensão quando o veículo é carregado. Esses elementos são conhecidos como "spring aids" (molas auxiliares) ou como "jounce bumpers" (limitador de curso de compressão). Esses elementos entram em ação apenas quando a suspensão é defletida de um certo deslocamento, quando esse elemento entra em contato e passa a garantir

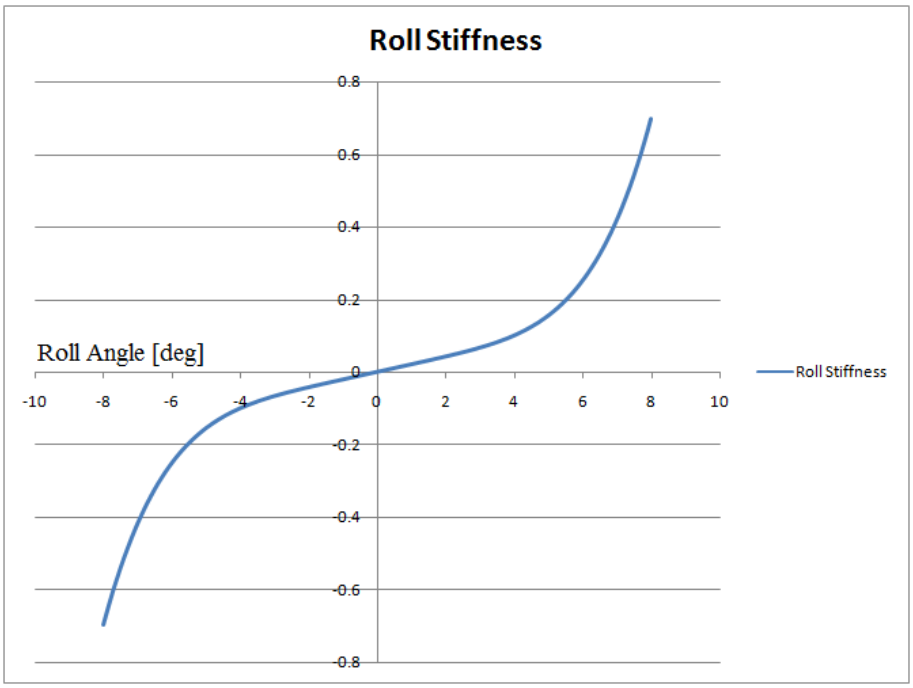

Figura 5.6: Curva típica de rigidez em roll na suspensão

resistência adicional ao movimento vertical da suspensão. Quando o veículo rola, o mesmo acontece, sendo que apenas o lado do veículo que está sob compressão sofrerá o contato com a mola auxiliar, fazendo com que o centro de rolamento da suspensão desloque lateralmente para o lado da suspensão com maior rigidez, causando um efeito conhecido como "jacking", que é o deslocamento vertical originado pelo movimento de roll do veículo. Quanto à função módulo presente na expressão, é em função que sempre as forças de "jacking" são no sentido de erguer o C.G. do veículo, não importanto se o ângulo de roll é positivo ou negativo. Na Figura 5.6, pode-se ver uma típica curva de rigidez torcional da suspensão de um veículo com as molas auxiliares mencionadas acima.

Nota-se que até aproximadamente 4 graus de ângulo de roll, a rigidez torcional é linear, tendo como elementos físicos responsáveis por ela as molas da suspensão e barras estabilizadoras, que têm de fato comportamentos lineares. A partir de 4 graus, há o contato físico com as molas auxiliares, e a rigidez cresce não linearmente,

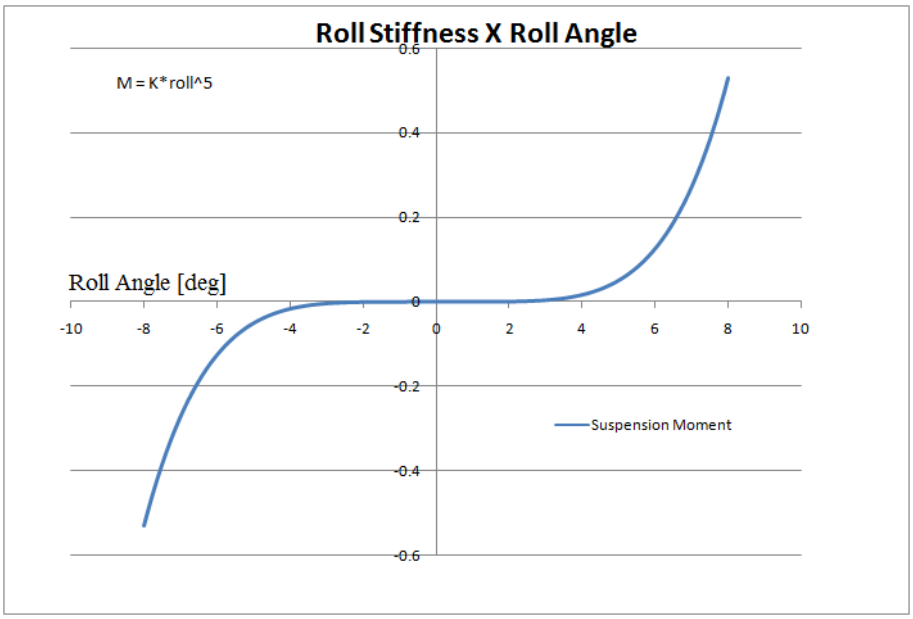

Figura 5.7: Curva de rigidez em roll na suspensão devido à mola auxiliar

representando a compressão desse elemento elástico até um valor de angulo que não é mais possível comprimir, respondendo como um contato sólido.

Para fins de modelagem, pretende-se introduzir esse fenômeno através de um coeficiente linear de rigidez, somada a um não linear. O elemento não linear mencionado é exatamente o termo $K_{z\theta}.\theta^5$, cuja expoente de valor 5 foi obtido de maneira a ter um comportamento mais próximo do veículo a ser simulado. Na Figura 5.7, pode-se ver a influência apenas da mola auxiliar na rigidez total da suspensão. Como o eixo de coordenadas para o modelo reduzido adotado é o mesmo adotado pela SAE, cujo eixo vertical está orientado no sentido de cima para baixo, um deslocamento negativo em Z do veículo representa-o sendo erguido em relação ao solo. Por isso esse coeficiente $K_{z\theta}$ deve ser negativo.

O modelo que se deseja obter deve contemplar as principais variáveis que dizem respeito à sua tendência de capotamento, que são: o movimento de roll (rotação ao redor do seu eixo longitudinal), movimento de heave (movimento de translação no

sentido vertical) e aceleração lateral do veículo. Um outro movimento de grande importância é o movimento de yaw (movimento de giro do veículo ao redor de seu eixo vertical) que, apesar de não se caracterizar por um movimento diretamente relacionado ao capotamento do veículo, diz respeito, no entanto, à intensidade da curva a que o veículo é submetido. Por isso, à primeira instância, deve-se levar em consideração, pelo menos aqueles termos que aparecem nas equações dos movimentos supra citados.

Uma das características do movimento de yaw é de ser movimento de mais baixa frequência, pelo menos quando comparado com os outros graus de liberdade citados. Por outro lado, o movimento de roll, assim como o movimento lateral do veículo, descrito por sua aceleração lateral, quando o veículo é sujeito à uma manobra evasiva, apresenta oscilações de frequência maior que o yaw, dando ideia de uma possível independência desses graus de liberdade.

Olhando para as Figuras de 5.8 à 5.10, observam-se gráficos de validação experimental de um veículo realizando uma manobra evasiva (diferentes passagens no mesmo gráfico) em comparação com modelo numérico de simulação com 213 graus de liberdade (linha vermelha contínua). Pode-se observar que a aceleração lateral, bem como o movimento de roll do veículo a partir de 3 segundos de manobra, oscilam em torno de um valor de regime com uma frequência de aproximadamente 2Hz (período aproximadamente de 0.5 seg). Já no gráfico do movimento de yaw, a oscilação ocorre de maneira não linear e com uma frequência aparentemente bem mais baixa. Um ponto interessante de se destacar é que 2 Hz é aproximadamente a frequência de oscilação de heave da massa suspensa do veículo, daí a importância de se modelar tal grau de liberdade.

Com essas observações, pode-se indagar sobre a real importância do grau de liberdade de yaw, visto que, segundo os gráficos de correlação, não apresentou grande influência sobre os gráficos de roll e aceleração lateral. Em termos práticos, tem-se que todo veículo que apresenta instabilidade em termos de capotamento, o modo de falha

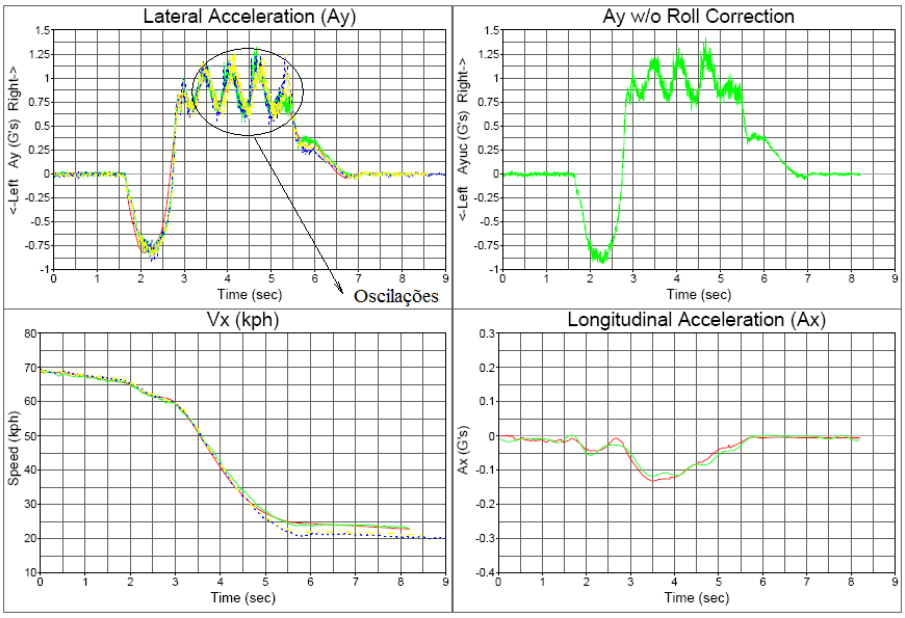

Figura 5.8: Gráfico de validação experimental de modelo de CAE

predominante apresenta oscilações persistentes na frequência de heave da massa suspensa, dita oscilações de "hop" ([Hac, 2005] e [Demerly and Youcef-Toumi, 2000]). Dessa forma, o grau de liberdade de heave do veículo aparenta ser de grande importância para o fenômeno que se pretende estudar e, por isso, deve ser levado em consideração.

Outro ponto a se destacar quanto à importância do grau de liberdade de yaw está no seu acoplamento com a equação de movimentação lateral. Está última se apresenta acoplada ao movimento de yaw através da velocidade longitudinal do veículo, através do termo $V_x.\Omega$, com Ω sendo a velocidade de yaw. No entanto, pelas figuras 5.11 e 5.12, nota-se que quando o veículo entra no modo denominado "hop", perto da instabilidade de rolamento, a velocidade longitudinal do veículo é aproximadamente um terço da velocidade inicial da manobra, e portanto, o termo acima citado torna-se pequeno, assim como a influência da velocidade de yaw sobre a equação da aceleração lateral.

O modelo inicial que se deseja propor deve conter, ao menos, os graus de liberdade

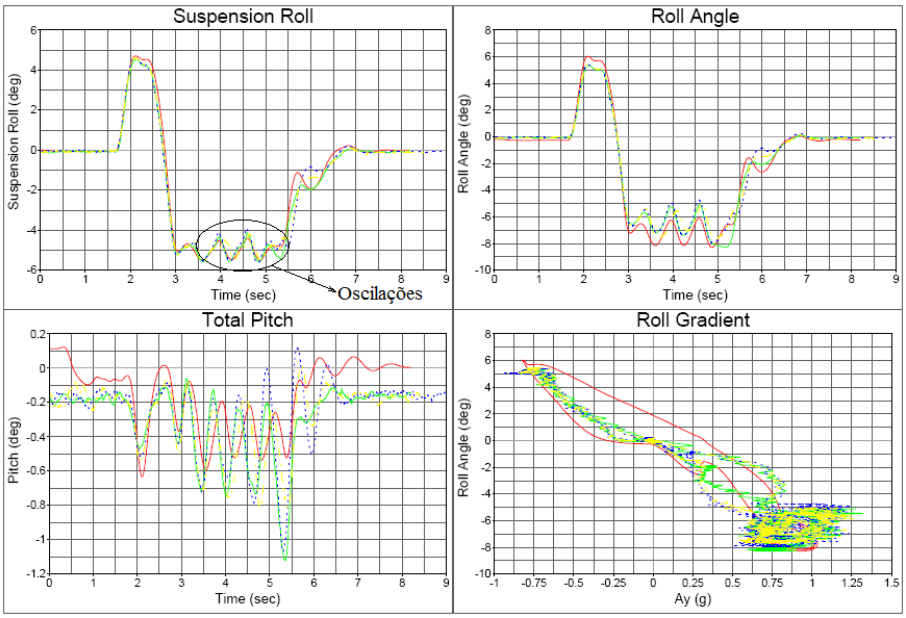

Figura 5.9: Gráfico de validação experimental de modelo de CAE

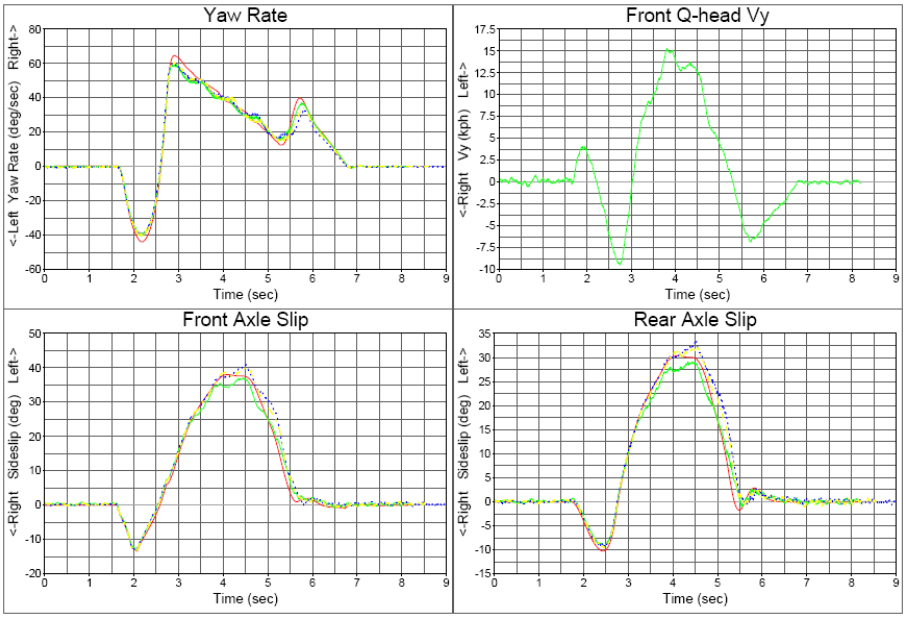

Figura 5.10: Gráficos de validação experimental de modelo de CAE

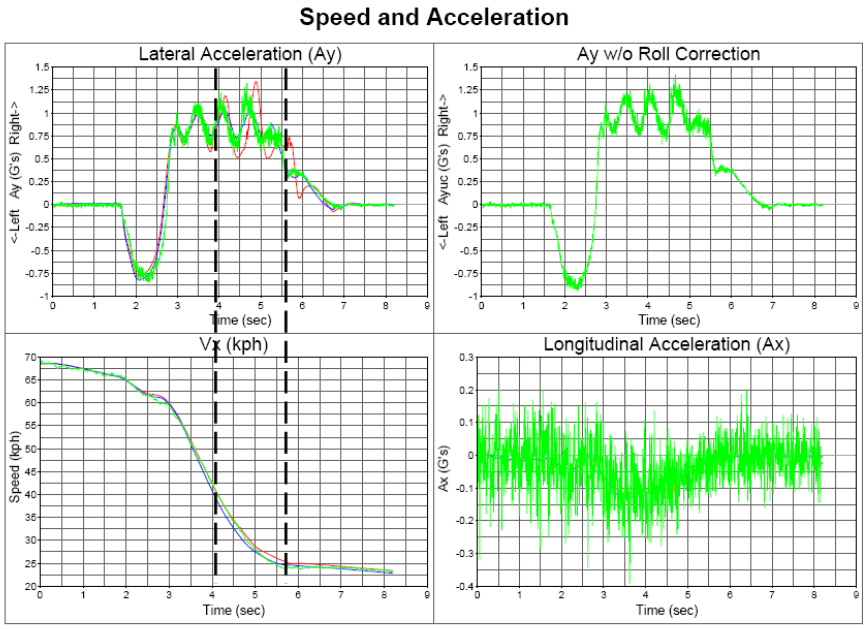

Figura 5.11: Gráfico de validação experimental - Velocidade e Aceleração

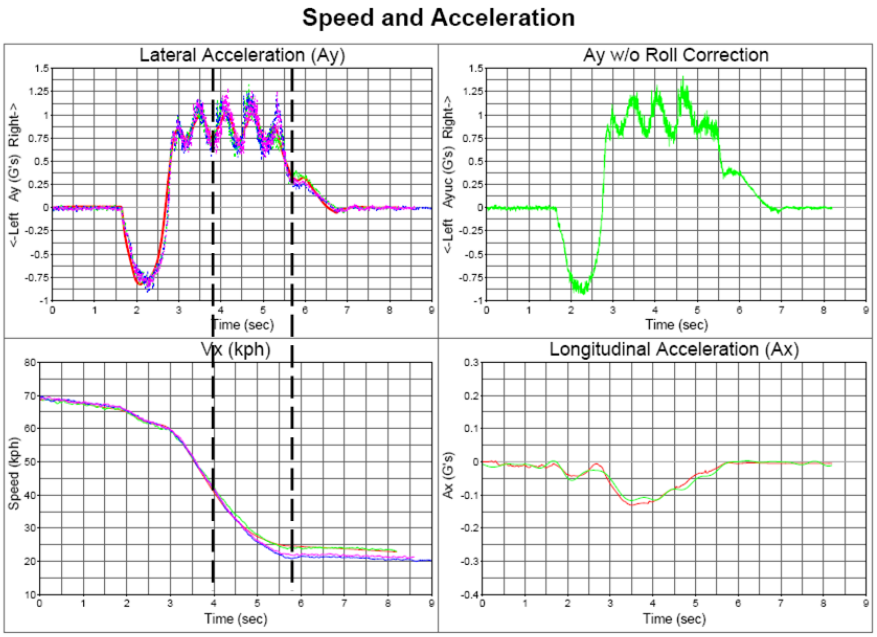

Figura 5.12: Gráfico de validação experimental - Velocidade e Aceleração

de roll, movimento lateral e vertical. Quanto ao movimento de rotação de yaw, ele não será considerado em primeira abordagem, no modelo simplificado. Através de uma validação experimental, os resultados desse modelo serão avaliados e, se considerados insatisfatórios, o grau de liberdade de yaw será adicionado.

As equações do movimento vertical do veículo (heave) e do movimento lateral (aceleração lateral) são bem conhecidos da literatura, e relativamente fáceis de serem deduzidas a partir das equações de Newton para um referência inercial. As equações dos movimentos de rotação serão escritas com referência ao chassis do veículo, visto que os movimentos de roll do veículo são dados ao redor do eixo de rolagem das suspensões. A equação de heave será em relação à massa suspensa, visto que este é o corpo que oscila em relação à suspensão, e a equação para o movimento lateral será descrita para o conjunto massa suspensa e não suspensa (massa m) com a influência do movimento relativo entre essas partes. As equações ficam relativamente simples, com apenas um termo proporcional ao movimento de yaw e velocidade longitudinal para a equação do movimento lateral. Já a equação de heave também é obtida através da segunda lei de Newton, com as forças descritas anteriormente nas suspensões excitando o movimento vertical da massa suspensa.

Segundo a lei de momento para corpos rígidos em rotação, a derivada do momento angular (descrito na literatura como $\dot{L}$) com respeito a um ponto de referência O fixado em um referencial inercial é igual à resultante de torque com respeito ao mesmo ponto no referencial.

$$\dot{L}^o = M_o$$

Por definição, a derivada primeira do momento angular em relação a O pode ser descrita por:

$$\dot{L}^o = \int z \times \ddot{z} dm$$

E a variável z mencionada na equação acima, para um corpo rígido é da forma:

$$z = z_p + r$$

E dessa forma:

$$\ddot{z} = \ddot{z_p} + \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r)$$

Onde $\ddot{z_p}$ é aceleração absoluta do corpo rígido no ponto P fixo ao corpo. Quando esse ponto coincide com o centro de massa do corpo (ponto C), a equação resultante fica simplificada. No entanto, de maneira geral, a equação de variação do momento angular fica em sua forma geral:

$$m.r_c \times \ddot{z_p} + J^p.\dot{\omega} + \omega \times J^p.\omega = M_p^{ext} \tag{5.1.2}$$

Com r_c sendo a distância do centro de massa do corpo ao dito ponto P.

O vetor de rotação do veículo é caracterizado por:

$$w = [\dot{\theta} \quad \dot{\varphi} \quad \dot{\psi}]^T$$

Com θ o ângulo de roll, φ o ângulo de pitch e ψ o ângulo de yaw do veículo.

A matriz de inércia da massa suspensa do veículo pode ser definda por:

$$J = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

A equação 5.1.2 é válida para o corpo sendo referenciado a um referencial inercial. Uma forma de escrever entidades com a inércia, velocidade, etc de um referencial não inercial para um inercial é através de uma matriz de mudança de base, denominada aqui por A. Uma mudança de um referência não inercial e_2 para um referêncial inercial e_1 pode ser dado por:

$$e_1 = A^{12}.e_2$$

Para o caso particular do movimento de roll do veículo, o referencial inercial da equação está fixado no chassis do veículo, e o referencial não inercial na massa suspensa. A matriz A de mudança de base fica na forma:

$$A^{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

No caso de mudança de base para inércia, a mudança se dá por:

$$J_1 = A^{12}.J_2.A^{21}$$

Utilizando-se das relações acima juntamente com a equação 5.1.2, podem-se escrever as equações dos movimentos de rotação da massa suspensa do veículo em relação à sua suspensão. No caso da equação de roll, esta toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} I_{xx}.\ddot{\theta} + [I_{xy}.\sin(\theta) + I_{xz}.\cos(\theta)].\ddot{\psi} - [I_{xy}.\cos(\theta) - I_{xz}.\sin(\theta)].\dot{\psi}.\dot{\theta} \\ -[I_{yy}.\sin(\theta).\cos(\theta) + I_{yz}.\cos(\theta)^2 - I_{yz}.\sin(\theta)^2 - I_{zz}.\sin(\theta).\cos(\theta)].\dot{\psi}^2 \\ +C_\theta.\dot{\theta} + K_\theta.\theta + m_s.(h_r - z).(a_y - g.\sin\theta) = M_{ext} \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Eliminado os termos de yaw e pitch da equação 5.1.3, utilizando-se da equação 5.1.1 e escrevendo a equação do movimento lateral do veículo, o modelo arquetípico de capotamento de uma veículo em uma curva pode ser escrito por:

$$\begin{aligned} m.a_y + m_s.(h_r - Z).\ddot{\theta} = F_{yf}.\cos(\delta) + F_{yr} \\ I_{xx}.\ddot{\theta} + C_\theta.\dot{\theta} + K_\theta.\theta - K_{z\theta}.\frac{t_w}{2}.\theta^5 = -m_s.(h_r - z).(a_y - g.\sin\theta) \\ m_s.\ddot{Z} + C_Z.\dot{Z} + K_z.Z = -(F_{ylf} - F_{yrf}).\cos(\delta).\tan(\gamma) - (F_{ylr} - F_{yrr}).\tan(\gamma) \\ +K_{z\theta}.|\theta^5| - m_s.g.(1 - \cos(\theta)) \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

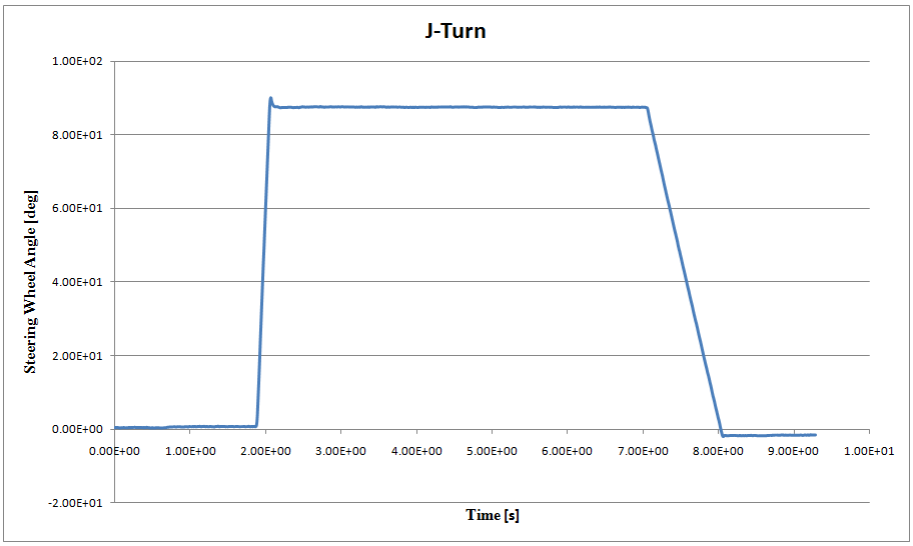

Figura 5.13: Exemplo da manobra conhecida como "J-turn"

5.2 Validação do modelo arquetípico

Para seguir com os estudos estatíticos do modelo arquetípico da dinâmica lateral de um veículo, é necessário primeiramente validar tal modelo. Deseja-se validar o modelo arquetípico inicialmente com dados experimentais de um veículo instrumentado, e posteriormente, validar o tal modelo com um modelo complexo validado, já que com este último, mais condições podem ser simuladas (não somente aquelas medidas em um protótipo) e explorar melhor o domínio de validade do modelo arquetípico.

Uma manobra típica que se deseja validar experimentalmente é uma manobra conhecida como "J-Turn". Tal manobra consiste em trafegar com o protótipo a uma determinada velocidade, em linha reta e, de repente, aplicar um determinado ângulo de volante a um velocidade de esterço maior que 500 deg/s, simulando uma manobra evasiva. Assim, se analisa o comportamento do protótipo durante essa curva, observando dados como ângulo de roll, escorregamento, tendência de giro, etc. Na Figura 5.13 pode-se observar o valor medido do ângulo de volante durante essa manobra.

Uma limitação para manobras como essa é o ângulo de esterço máximo. Normalmente, em medições, atinge-se o máximo de 150 deg de volante para essa manobra, tendo em vista o grau de risco que ela apresenta. Por isso que se deseja comparar o modelo arquetípico com um modelo de multicorpos com mais graus de liberdade, previamente validado experimentalmente também, pois pode-se estender, através de simulação, o domínio de comparação com o modelo arquetípico.

É através de manobras como essa que se deseja validar o modelo. Nas Figuras 5.14 e 5.15 podem-se comparar os resultados do modelo arquetípico de um veículo com medições experimentais feitas em um protótipo. Foram realizadas três passagens diferentes para uma mesma manobra (mesmo ângulo de volante final) de maneira a visualizar também a variabilidade experimental presente nas medições. Apenas para comparação, o sinal da saída do modelo relativo à elevação foi trocado de sinal, já que, na medição, é normalmente adotado o eixo vertical com valores positivos para cima, diferentemente dos eixos da SAE, que foram adotados no modelo arquetípico, cujo eixo vertical possui valores positivos para baixo.

Pode-se observar uma boa correlação entre as medições e os dados simulados. Principalmente para os sinais de elevação, percebe-se uma maior variabilidade dos dados de medição, visto que nenhuma pista é perfeitamente plana como em modelos de computação. O que é interessante salientar são as oscilações de roll e elevação do veículo durante a manobra. Essas oscilações já foram mostradas anteriormente na dedução do modelo arquetípico e se mostraram presentes nessa comparação com dados experimentais.

Nas Figuras 5.16 e 5.17, há mais duas comparações com dados experimentais, obtidos com o maior ângulo de volante permitido nos testes. Novamente se percebe uma boa correlação com dados experimentais e, novamente, a presença das oscilações de roll durante a manobra.

Outra forma de validação do modelo arquetípico é através de comparações com modelos numéricos de multicorpos com inúmeros graus de liberdade que já tenham sido previamente validados em medições experimentais. Uma vantagem é que como

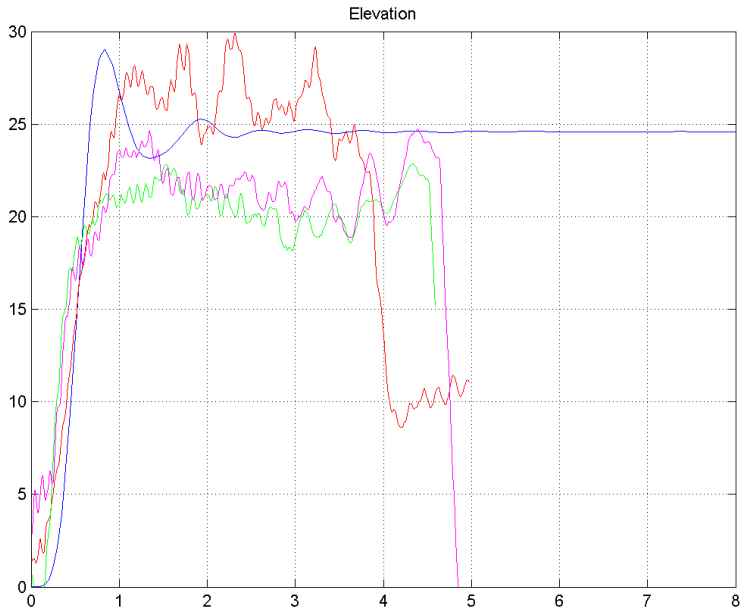

Figura 5.14: Modelo arquetípico (azul) versus medições - Elevação Z

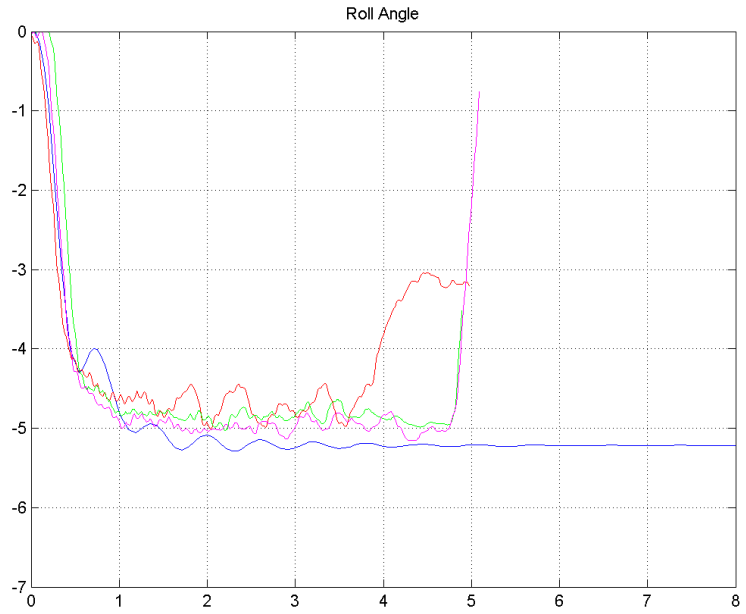

Figura 5.15: Modelo arquetípico (azul) versus medições - Roll

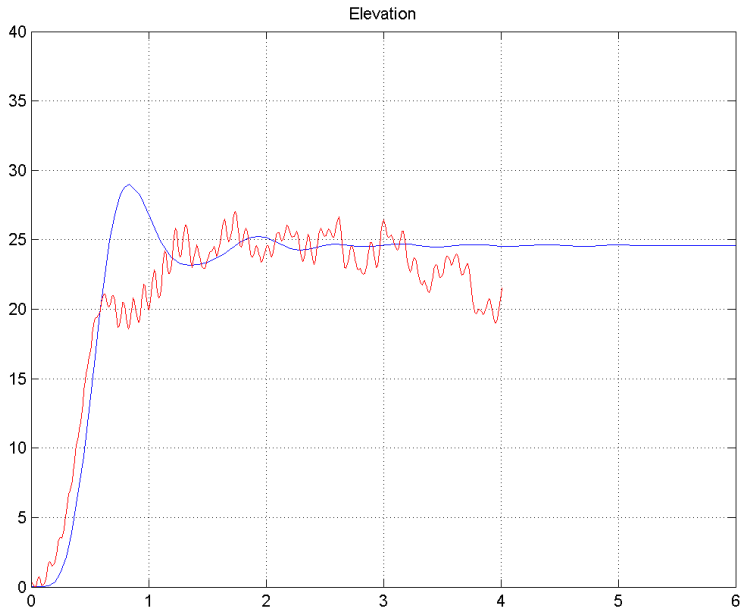

Figura 5.16: Modelo arquetípico (azul) versus medição - Elevação Z

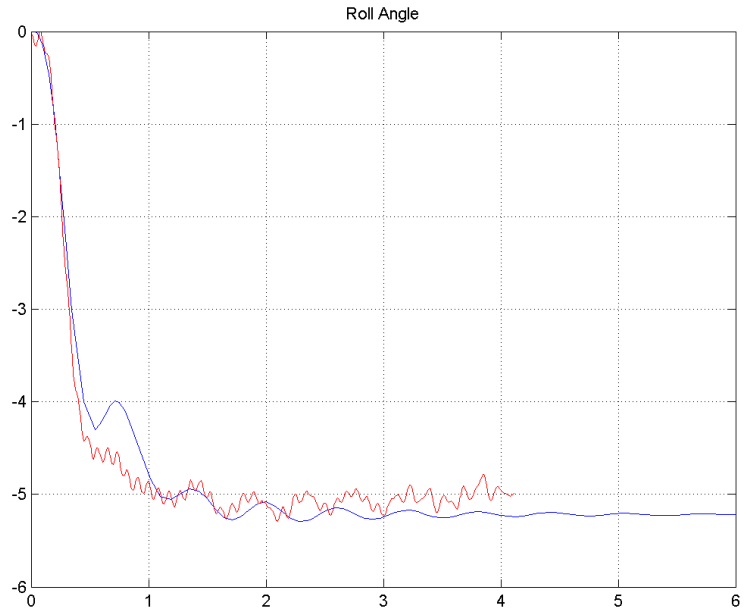

Figura 5.17: Modelo arquetípico (azul) versus medição - Roll

ambos os resultados que se deseja comparar são obtidos através de modelos, um domínio maior de manobras pode ser obtido e uma correlação mais abragente pode ser feita, uma vez que não existe limitação para uma simulação, diferentemente de um ensaio em um protótipo.

Dessa forma, foram alterados os parâmetros do modelo arquetípico a fim de que esse represente outro modelo de veículo cujo modelo numérico foi validado experimentalmente. Nas Figuras 5.18 e 5.19 pode-se observar a validação experimental do modelo de multicorpos, através de ensaios em protótipo, também realizando uma manobra evasiva. Na Figura 5.18, destacam-se as comparações dos movimentos de roll (da suspensão e do veículo como um todo) e pitch. Já na Figura 5.19 destacam-se os movimentos verticais individuais das rodas em relação à carroceria do veículo.

Nas Figuras de 5.20 à 5.25 podem-se observar as comparações entre o modelo de multicorpos previamente validado experimentalmente, com o modelo arquetípico desenvolvido. Por se tratar de modelos computacionais, as análises foram até um ângulo de volante de 360 graus, abrangendo todo o regime não linear do pneu. Conclui-se que o modelo arquetípico, mesmo não possuindo o grau de liberdade de yaw, comporta-se de maneira bem correlata com o modelo completo.

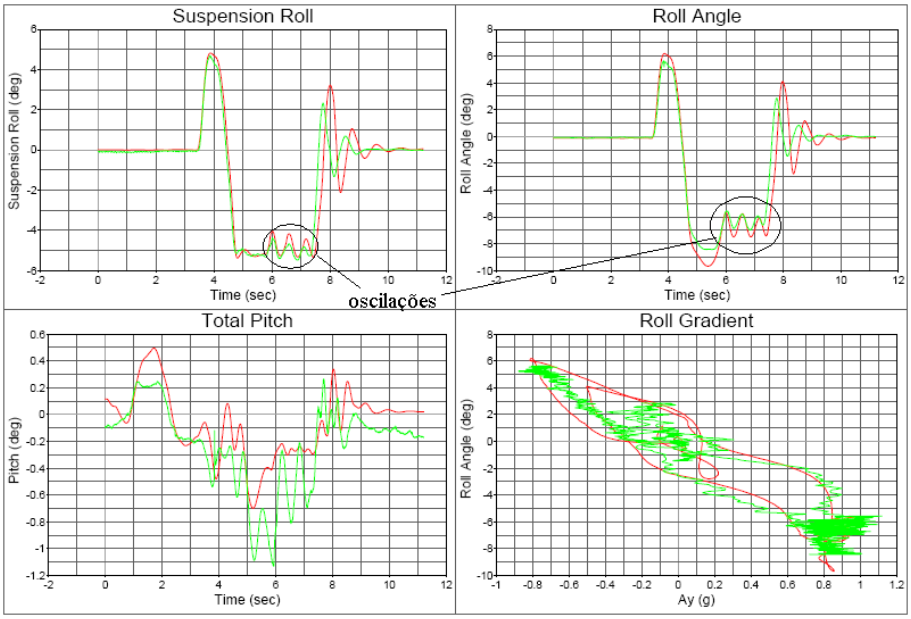

Figura 5.18: Modelo numérico de multicorpos (vermelho) versus medição (verde)

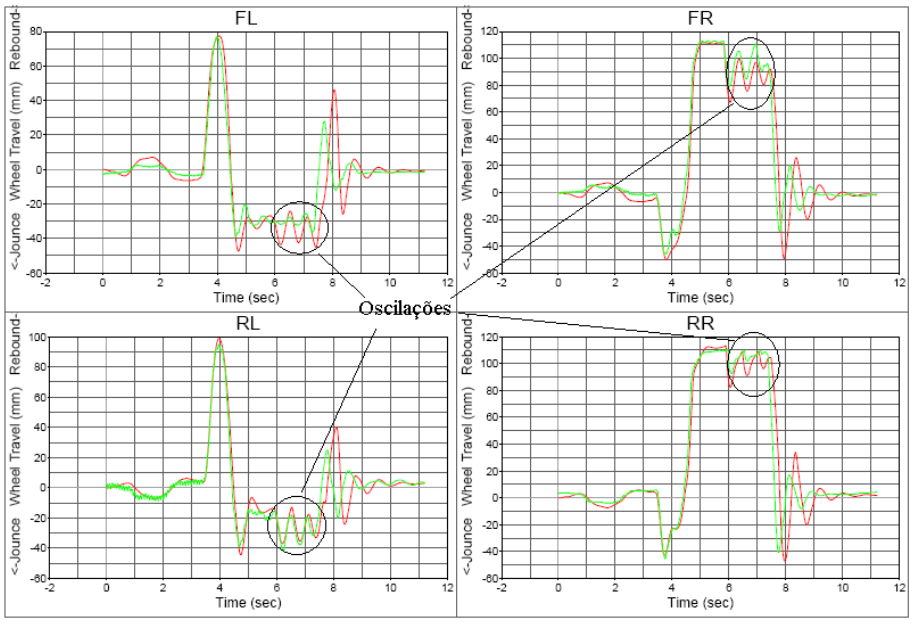

Figura 5.19: Modelo numérico de multicorpos (vermelho) versus medição (verde)

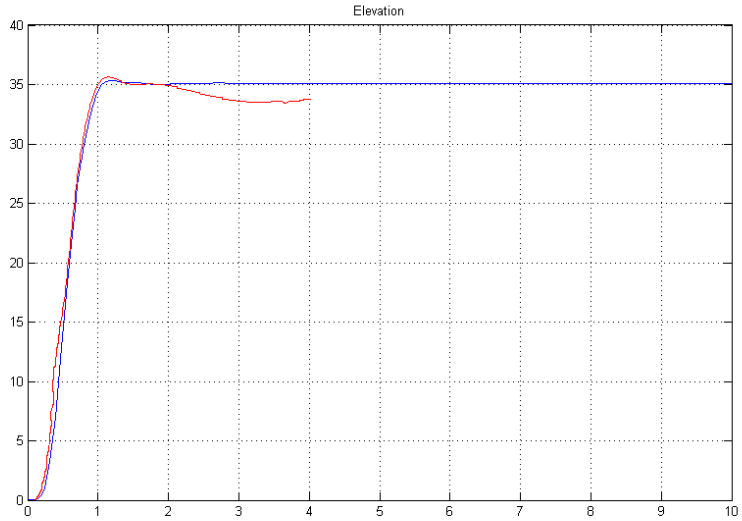

Figura 5.20: Modelo arquetípico (azul) versus modelo ADAMS - 180 deg de volante

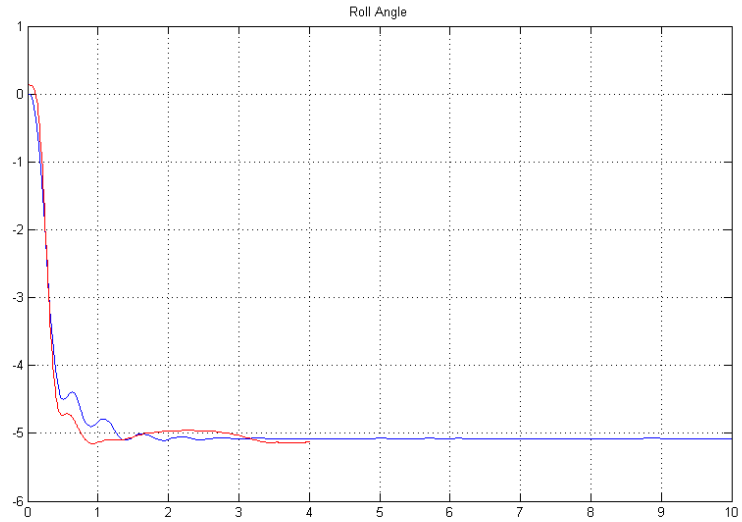

Figura 5.21: Modelo arquetípico (azul) versus modelo ADAMS - 180 deg de volante

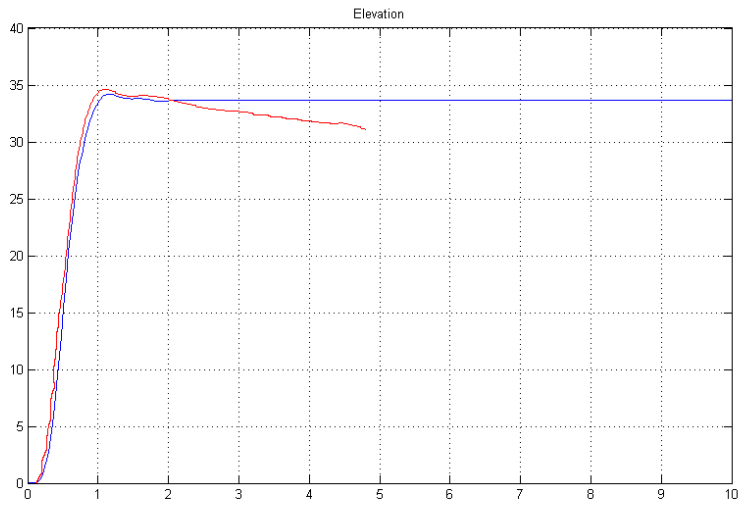

Figura 5.22: Modelo arquetípico (azul) versus modelo ADAMS - 270 deg de volante

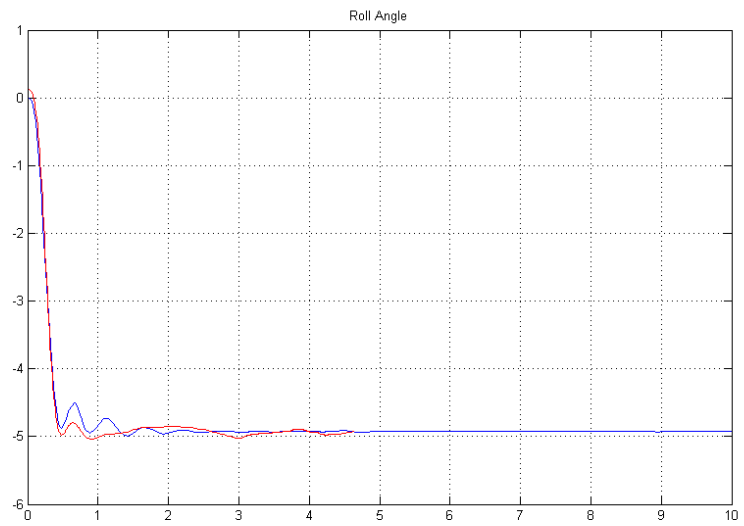

Figura 5.23: Modelo arquetípico (azul) versus modelo ADAMS - 270 deg de volante

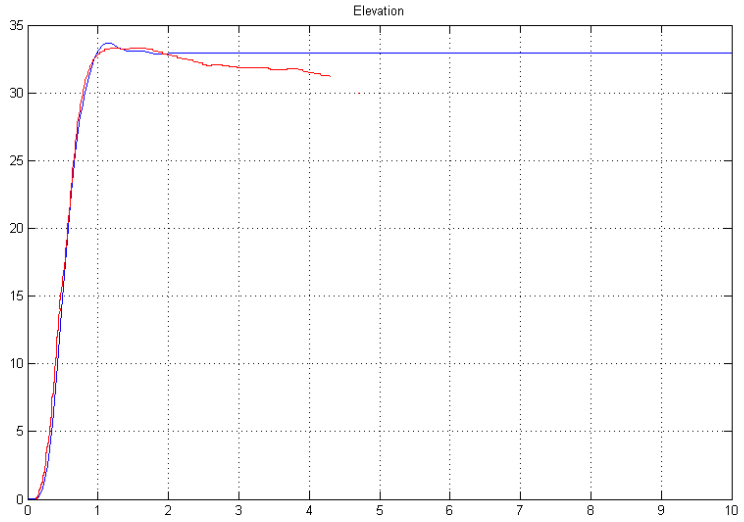

Figura 5.24: Modelo arquetípico (azul) versus modelo ADAMS - 360 deg de volante

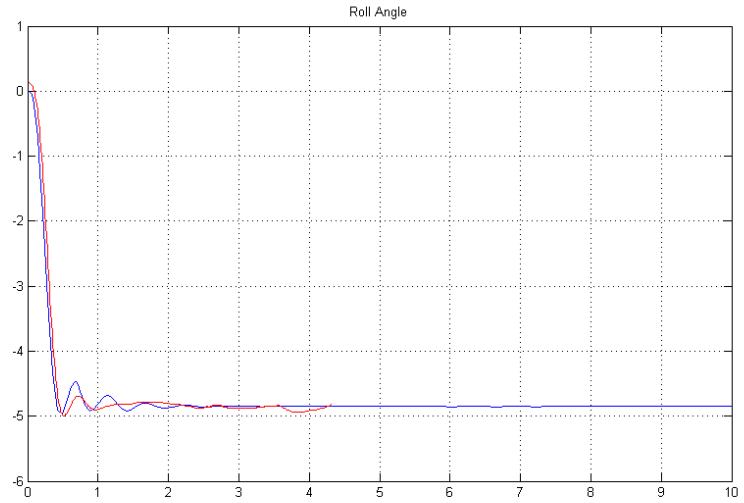

Figura 5.25: Modelo arquetípico (azul) versus modelo ADAMS - 360 deg de volante

5.3 Obtenção da distribuição de ocorrências do modelo arquetípico

Como mencionado anteriormente, o modelo arquetípico da dinâmica lateral de um veículo é descrito pelo seguinte sistemas de equações:

$$\begin{aligned} m.a_y + m_s.(h_r - Z).\ddot{\theta} &= F_{yf}.\cos(\delta) + F_{yr} \\ I_{xx}.\ddot{\theta} + C_\theta.\dot{\theta} + K_\theta.\theta - K_{z\theta}.\frac{t_w}{2}.\theta^5 &= -m_s.(h_r - z).(a_y - g.\sin\theta) \\ m_s.\ddot{Z} + C_Z.\dot{Z} + K_z.Z &= -(F_{ylf} - F_{yrf}).\cos(\delta).\tan(\gamma) \\ &-(F_{ylr} - F_{yrr}).\tan(\gamma) + K_{z\theta}.|\theta^5| \\ &-m_s.g.(1 - \cos(\theta)) \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

Assumindo:

$$A = -(F_{ylf} - F_{yrf})$$

$$B = -(F_{ylr} - F_{yrr})$$

$$C = F_{yf}.\cos(\delta) + F_{yr}$$

E reescrevendo o sistema em variáveis de estado, obtém-se:

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$m.\dot{x_2} = -m_s.(h_r - x_5).\dot{x_4} + C$$

$$\dot{x_3} = x_4$$

$$I_{xx}.\dot{x_4} = -C_\theta.x_4 - K_\theta.x_3 + K_{z\theta}.\frac{t_w}{2}.x_3^5 - m_s.(h_r - x_5).(\dot{x_2} - g.\sin(x_3))$$

$$\dot{x_5} = x_6$$

$$m_s.\dot{x_6} = -C_Z.x_6 - K_Z.x_5 + A.\cos(\delta).\tan(\gamma) + B.\tan(\gamma) + K_{z\theta}.|x_3^5| - m_s.g.(1 - \cos(x_3))$$

Reescrevendo a equação de x_4 utilizando-se a equação de x_2:

$$[I_{xx} - m_s^2.\frac{(h_r - x_5)^2}{m}].\dot{x_4} = -C_\theta.x_4 - K_\theta.x_3 + K_{z\theta}.\frac{t_w}{2}.x_3^5 +$$
$$m_s.(h_r - x_5).[g.\sin(x_3) - \frac{C}{m}]$$

O termo $m_s^2.\frac{(h_r - x_5)^2}{m}$ é aproximadamente três vezes menor que o termo I_{xx} para a maioria do veículos de passeio, podendo assim, como uma hipótese simplificadora, ser desprezado para análise. Dessa forma, podem-se reescrever as equações do sistema da seguinte forma:

$$x_1 = \theta$$

$$x_3 = Z$$

$$\tan(\gamma) = \frac{h_{rollc} + x_3}{t_w/2}$$

Considerando α e β como a taxa de variação do centro de rolagem da suspensão dianteira e traseira com a variável Z respectivamente, e assumindo h_{rollc} como a média dos centros de rotação da suspensão dianteira e traseira.

$$
\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_2 \\
I_{xx}.\dot{x_2} = -C_\theta.x_2 - K_\theta.x_1 + K_{z\theta}.\frac{t_w}{2}.x_1^5 + m_s.(h_r - x_3).(g.\sin(x_1) - \frac{C}{m}) \\
\dot{x_3} &= x_4 \\
m_s.\dot{x_4} = -C_Z.x_4 - K_Z.x_3 + (A.\cos(\delta).\alpha + B.\beta).\frac{h_{rollc} + x_3}{t_w/2} \\
+K_{z\theta}.|x_1^5| - m_s.g.(1 - \cos(x_1))
\end{aligned}
\tag{5.3.2}
$$

Uma vez o sistema escrito na forma de variáveis de estado, pode-se aplicar diretamente o operador de Frobenius-Perron sobre este. Tomando ρ como a distribuição de ocorrências do sistema, e esta tendo como forma de solução:

$$
\rho = f(x_1, x_2).g(x_3, x_4).j(x_1, x_3).h(t) \tag{5.3.3}
$$

De maneira análoga, como foi feito para os osciladores não-lineares, as soluções propostas serão obtidas para valores reais de x_2 e x_4. Uma vez essa função obtida, pretende-se descrevê-la para diferentes valores de x_2 e x_4 próximas à zero, de maneira a aproximar a resposta obtida da solução exata e, assim, obter funções apenas das variáveis de posição. Nos seguintes desenvolvimentos, os valores reais de x_2 e x_4 serão denotados por ξ_2 e ξ_4. A seguinte equação pode ser obtida mediante a aplicação do operador de Frobenius-Perron:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2).g(x_3,x_4).j(x_1,x_3)\mid_{\xi_2,\xi_4}.\dot{h(t)} = -h(t).[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2).j(x_1,x_3)+ \\
\frac{\partial j}{\partial x_1}(x_1,x_3).f(x_1,x_2)].x_2\mid_{\xi_2}.g(x_3,x_4)\mid_{\xi_4}+h(t).\frac{C_\theta}{I_{xx}}.f(x_1,x_2).g(x_3,x_4). \\
.j(x_1,x_3)\mid_{\xi_2,\xi_4}-h(t).\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2).\frac{g(x_3,x_4).j(x_1,x_3)}{I_{xx}}.[-C_\theta.x_2-K_\theta.x_1+K_{z\theta}.\frac{t_w}{2}.x_1^5 \\
+m_s.(h_r-x_3).(g.\sin x_1-\frac{C}{m})]\mid_{\xi_2,\xi_4} \\
-h(t).[\frac{\partial g}{\partial x_3}(x_3,x_4).j(x_1,x_3)+\frac{\partial j}{\partial x_3}(x_1,x_3).g(x_3,x_4)].x_4.f(x_1,x_2)\mid_{\xi_2,\xi_4}+ \\
h(t).\frac{C_Z}{m_s}.f(x_1,x_2).g(x_3,x_4).j(x_1,x_3)\mid_{\xi_2,\xi_4} \\
-\frac{\partial g}{\partial x_4}.\frac{f.j}{m_s}.h(t).[-C_Z.x_4-K_Z.x_3+(A.\alpha.\cos\delta+B.\beta).\frac{h_{rollc}+x_3}{t_w/2}+K_{z\theta}.|x_1^5| \\
-m_s.g.(1-\cos x_1)\mid_{\xi_2,\xi_4}]
\end{aligned}
\tag{5.3.4}
$$

Tomando $C=\mathcal{C}.\tanh(a.t)$, $A.\alpha.\cos\delta=\mathcal{A}.\tanh(a.t)$ e $B.\beta=\mathcal{B}.\tanh(a.t)$, substituindo na equação acima, e tomando apenas os termos semelhantes dependentes da variável tempo, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2).g(x_3,x_4)\mid_{\xi_2,\xi_4}.\dot{h(t)} = \frac{m_s}{I_{xx}}.(h_r-x_3).\frac{\partial f}{\partial x_2}.g.\frac{\mathcal{C}}{m}\tanh(a.t)\mid_{\xi_2,\xi_4} \\
-\frac{h_{rollc}+x_3}{t_w/2}.\frac{\partial g}{\partial x_4}.\frac{f}{m_s}.h.[\mathcal{A}.\tanh(a.t)+\mathcal{B}.\tanh(a.t)]\mid_{\xi_2,\xi_4}
\end{aligned}
$$

Pode-se propor como solução:

$$
h(t)=e^{\ln(\cosh a.t)+\frac{\ln(\cosh a.t)}{\mathcal{B}}+\frac{\ln(\cosh a.t)}{\mathcal{A}}} \tag{5.3.5}
$$

Substituindo a equação (5.3.5) na equação resultante com os termos apenas dependentes do tempo, obtém-se:

$$
f(x_1,x_2).g(x_3,x_4).[a.\tanh(a.t)+a.\frac{\tanh(a.t)}{\mathcal{B}}+a.\frac{\tanh(a.t)}{\mathcal{A}}]\mid_{\xi_2,\xi_4}=
$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}.g.\frac{m_s}{I_{xx}}.(h_r - x_3).\frac{\mathcal{C}}{m}.\tanh(a.t) \mid_{\xi_2,\xi_4} +$$
$$\frac{\partial g}{\partial x_4}.\frac{f}{m_s}.\frac{h_{rollc} + x_3}{t_w/2}.[\mathcal{A}.\tanh(a.t) + \mathcal{B}.\tanh(a.t)] \mid_{\xi_2,\xi_4}$$

Dessa forma, agrupando os termos semelhantes em t obtêm-se duas igualdades que devem ser válidas para que a equação acima seja verdadeira:

$$f(x_1, x_2) \mid_{\xi_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}.\frac{m_s}{I_{xx}}.(h_r - x_3).\frac{\mathcal{C}}{a.m} \mid_{\xi_2}$$
$$g(x_3, x_4) \mid_{\xi_4} = -\frac{\partial g}{\partial x_4}.(\frac{h_{rollc} + x_3}{t_w/2}).\frac{\mathcal{A}.\mathcal{B}}{a.m_s} \mid_{\xi_4}$$

De maneira a simplificar uma possível solução para o sistema, deseja-se estudar o problema para pequenas variações de elevação do veículo (x_3). Assim, os termos $h_r - x_3$ e $h_{rollc} + x_3$ serão substituídos por h_r e h_{rollc} respectivamente. Portanto, as igualdades acima ficam da forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \mid_{\xi_2} = f(x_1, x_2).\frac{I_{xx}.a.m}{h_r.C.ms} \mid_{\xi_2}$$
$$\frac{\partial g}{\partial x_4} \mid_{\xi_4} = -g(x_3, x_4).\frac{(t_w/2).a.m_s}{h_{rollc}.\mathcal{A}.\mathcal{B}} \mid_{\xi_4}$$

Utilizando-se as equações acima e tomando a equação (5.3.4), com apenas os termos não dependentes do tempo, uma vez que com as igualdades acima, tais termos se anulam, e com $\chi = \frac{a.m}{h_r.C.ms}$ e $\tau = -\frac{(t_w/2).a}{h_{rollc}.\mathcal{A}.\mathcal{B}}$, o sistema fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&[\frac{\partial f}{\partial x_1}.g(x_3, x_4).j(x_1, x_3) + \frac{\partial j}{\partial x_1}.g(x_3, x_4).f(x_1, x_2)].x_2 \mid_{\xi_2,\xi_4} + \\
&+[\frac{\partial g}{\partial x_3}.f(x_1, x_2).j(x_1, x_3) + \frac{\partial j}{\partial x_3}.f(x_1, x_2).g(x_3, x_4)].x_4 \mid_{\xi_2,\xi_4} = \\
f.g.j.[\frac{C_\theta}{I_{xx}} + \frac{C_Z}{m_s} &- C_\theta.x_2.\chi - K_\theta.x_1.\chi + K_{Z\theta}.\frac{t_w}{2}.x_1^5.\chi + m_s.\chi.(g.(h_r - x_3).\sin x_1) \\
&-C_Z.x_4.\tau - K_Z.x_3.\tau + K_{z\theta}.|x_1^5|.\tau - m_s.g.\tau.(1 - \cos x_1)] \mid_{\xi_2,\xi_4}
\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Como solução, propõe-se $f(x_1, x_2)$, $g(x_3, x_4)$ e $j(x_1, x_3)$ da seguinte forma.

$$f(x_1, x_2) = e^{\Psi(x_1,x_2)+I_{xx}.\chi.x_2} \tag{5.3.7}$$

$$g(x_3, x_4) = e^{\Omega(x_3,x_4)+m_s.\tau.x_4} \tag{5.3.8}$$

$$j(x_1, x_3) = e^{\varphi(x_1,x_3)} \tag{5.3.9}$$

Substituindo na equação 5.3.6 e agrupando os termos dependentes de apenas de x_1 e x_2 em uma equação e de x_3 e x_4 em outra, tem-se:

$$[\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1, x_3)]. \mid_{\xi_2} = [\frac{C_\theta}{I_{xx}.x_2} - C_\theta.\chi - \frac{K_\theta.x_1.\chi}{x_2} + K_{z\theta}.\chi.\frac{t_w}{2}.\frac{x_1^5}{x_2} +$$
$$+\frac{m_s.g.\chi.h_r.\sin x_1}{x_2} + K_{z\theta}.\frac{|x_1^5|}{x_2}.\tau - m_s.g.\chi.\frac{x_3.\sin x_1}{x_2}] \mid_{\xi_2}$$

$$[\frac{\partial\Omega}{\partial x_3}(x_3, x_4) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}(x_1, x_3)]. \mid_{\xi_4} = [\frac{C_Z}{m_s.x_4} - C_Z.\tau - K_Z.\tau.\frac{x_3}{x_4} - \frac{m_s.g.\tau}{x_4} +$$
$$+m_s.g.\tau.\frac{\cos x_1}{x_4}] \mid_{\xi_4}$$

Percebe-se que, em ambas as equações acima, existe um termo dependente de x_1 e x_3, exatamente referente à função $j(x_1, x_3)$ proposta como parte da solução. Uma possível solução para as duas equações acima é da forma:

Ψ:

$$\begin{aligned}\Psi(x_1, x_2) \mid_{\xi_2} = [&\frac{C_\theta.x_1}{I_{xx}.x_2} - C_\theta.\chi.x_1 - \frac{K_\theta.\chi.x_1^2}{2.x_2} + K_{z\theta}.\chi.\frac{t_w}{2.x_2}.\frac{x_1^6}{6} \\ &-\frac{m_s.g.\chi.h_r.\cos x_1}{x_2} + K_{z\theta}.\tau.\frac{sign(x_1)}{x_2}.\frac{x_1^6}{6}] \mid_{\xi_2}\end{aligned} \tag{5.3.10}$$

Com

$$\xi_2 = \chi.\xi \qquad para\, \xi \in \mathbb{R}$$

Ω:

$$\Omega(x_3, x_4) \mid_{\xi_4} = [\frac{C_Z.x_3}{m_s.x_4} - C_Z.\tau.x_3 - K_Z.\tau.\frac{x_3^2}{2.x_4} - \frac{m_s.g.\tau.x_3}{x_4}] \mid_{\xi_4} \tag{5.3.11}$$

Para

$$\xi_4 = \tau.\xi \qquad para\, \xi \in \mathbb{R}$$

E

$$\varphi(x_1, x_3) = [\frac{m_s.g.x_3.\cos x_1}{\xi}] \tag{5.3.12}$$

Assim, a função distribuição de ocorrências ρ, pode ser reescrita a partir da equação 5.3.3, utilizando-se das equações 5.3.7,5.3.8,5.3.9,5.3.10,5.3.11,5.3.12 na forma:

$$\rho(x_1, x_2, x_3, x_4, t) \mid_{\xi_2,\xi_4} = e^{\Psi(x_1,x_2)+\Omega(x_3,x_4)+\varphi(x_1,x_3)+I_{xx}.\chi.x_2+m_s.\tau.x_4}.h(t) \mid_{\xi_2,\xi_4} \tag{5.3.13}$$

Para ξ_2 e ζ_4 dados pelas igualdades acima, e $h(t)$ pela equação 5.3.5. Assim como feito anteriormente para os osciladores não-lineares, a solução aproximada proposta é obtida através dessas funções calculadas para valores de ξ próximos de zero, região onde a distribuição tende a possuir maior valor numérico, e dessa forma, eliminam-se as variáveis x_2 e x_4 de forma explícita da função obtida.

5.4 Resultados

Uma vez de posse da equação 5.3.13, é possivel visualizar como é o comportamento da densidade de probabilidade (pdf) da resposta do veículo. Com os valores dos parâmetros do modelo arquetípico obtidos na seção 5.2, foi gerada a densidade para o modelo, o que pode ser visto na Figura 5.26.

De maneira geral, o comportamento da pdf possui características esperadas, em se tratando de modelo de veículo. Primeiramente, o fato de possuir toda densidade de ocorrências ao redor da origem. Para o modelo em estudo, de fato, a movimentação de rolagem do veículo ocorre sempre ao redor da origem. Geralmente, isso é um comportamento típico de um sistema linear. Obviamente, a maneira como a pdf se apresenta, mesmo na origem, difere de um sistema linear puro (um sistema linear apresentaria aproximadamente um delta de Dirac da origem). Outro fato característico é o aumento da densidade de probabilidade com a elevação do veículo. Isso é bem claro, ao passo que, quanto maior a elevação e, portanto, mais alto o centro de gravidade do veículo, maior a propensão à rolagem, principalmente para ângulos grandes. É o que se pode notar, mais claramente na Figura 5.27, na qual quanto maior a elevação, mais aberta é a pdf do sistema.

Vale a pena ressaltar que as variações de elevação apresentadas nos gráficos serão mantidas a valores relativamente baixos, devido às hipóteses simplificadoras utilizadas na construção das pdf's.

Outro ponto a se destacar é quanto à normalização do sistema. Como essa pdf é função de duas variáveis, sua normalização (integral da pdf deve ser igual a um) é feita com o volume. Ou seja, a integral da pdf pela elevação e pelo movimento de roll deve possuir unitário.

5.4.1 Estudo paramétrico

Para melhor explorar as pdf's para o modelo de veículo, é necessário um planejamento da análises, de maneira a verificar a influência de cada parâmetro do modelo

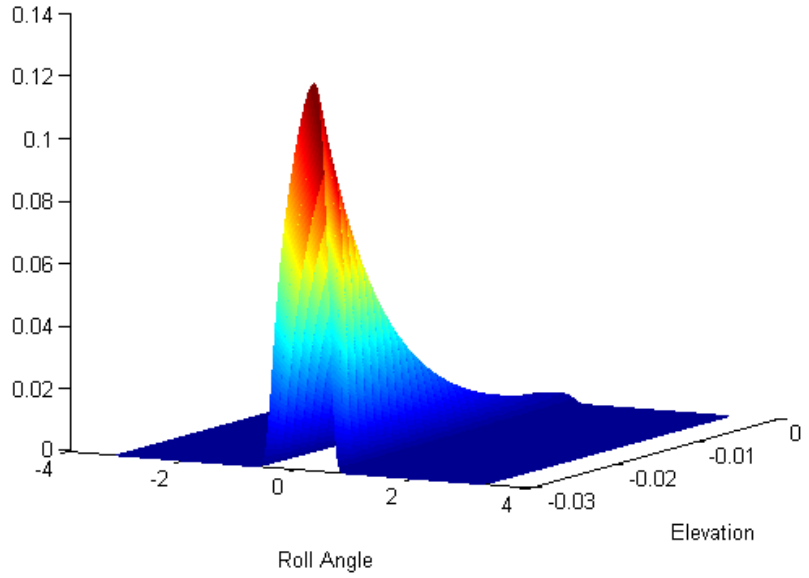

Figura 5.26: Distribuição de ocorrências para o modelo de veículo

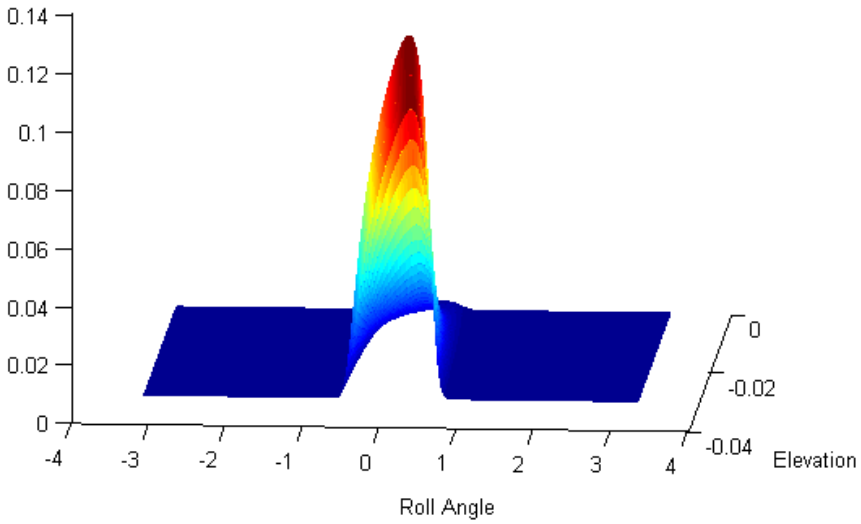

Figura 5.27: Distribuição de ocorrências para o modelo de veículo

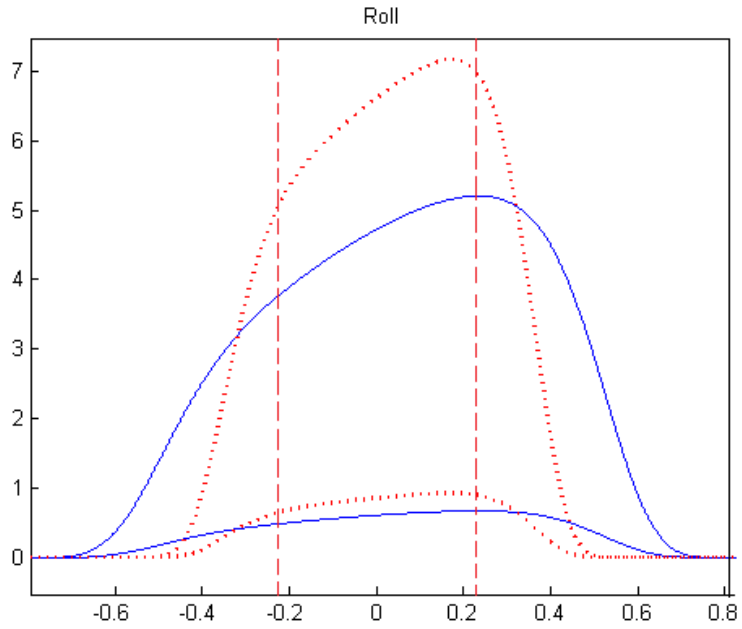

Figura 5.28: Distribuição de ocorrências para dois valores de rigidez de jounce bumper e para z=0.00m e z=0.02m

em sua respectiva densidade de probabilidade. Dessa forma, pode-se ter uma visão abrangente do sistema e a influência de cada parâmetro sobre a resposta deste. Assim, propõe-se para cada parâmetro do sistema, realizar um estudo de sensibilidade, sempre comparando a pdf para dois valores diferentes do parâmetro em estudo.

Como primeiro parâmetro a ser observado, tomamos o elemento "jounce bumper" mencionado na seção 5.1. Tal elemento, como foi mencionado, acrescenta uma não linearidade importante ao modelo, assim como um acomplamento entre os graus de liberdade de rolagem e elevação do veículo. Na Figura 5.28, pode-se observar a pdf para dois valores de rigidez desse elemento. A curva tracejada, representa o "jounce bumper" com maior rigidez. Nas figuras seguintes (Figuras 5.29 e 5.30), observam-se simulações numéricas para os dois casos, dadas algumas condições iniciais.

Pode-se notar nas simulações numéricas o resultado imediato do aumento de rigidez desse elemento: dimunuição da rolagem do veículo. Observa-se também um

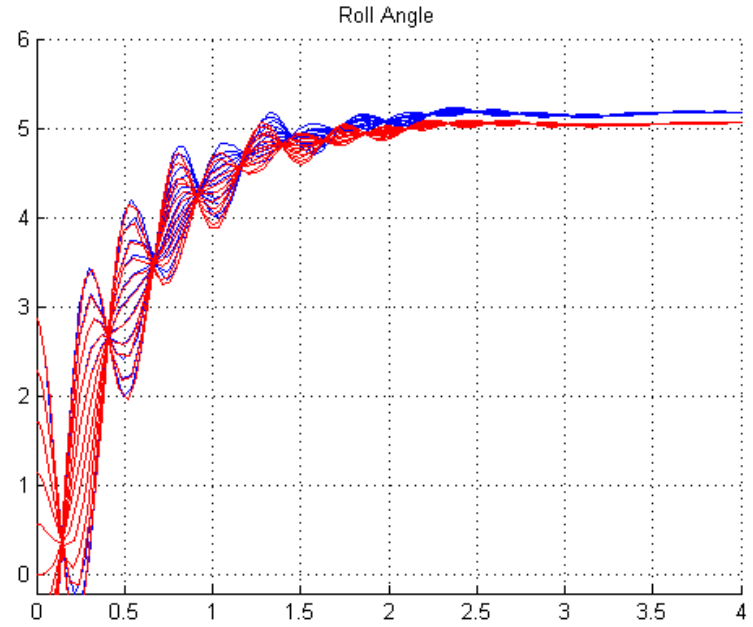

Figura 5.29: Simulação para dois valores de rigidez de jounce bumper

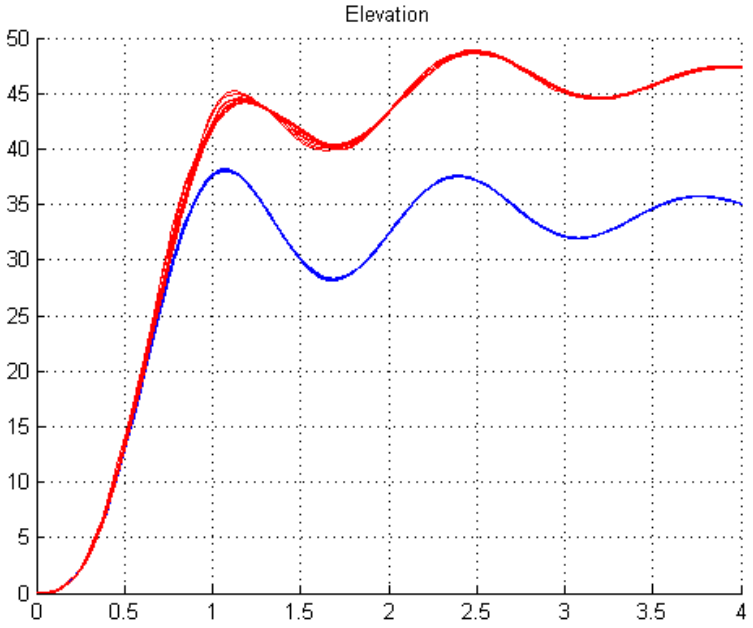

Figura 5.30: Simulação para dois valores de rigidez de jounce bumper

aumento significativo da elevação do veículo, o que, de certa forma, era esperado, visto que tal elemento, como mencionado anteriormente, aumenta o efeito de "jacking" na suspensão.

Observando o gráfico da Figura 5.28 nota-se a pdf do sistema com maior rigidez no "jounce bumper" (em vermelho tracejado) com maior valor na densidade de probabilidade, para dois valores de elevação (corte no gráfico em três dimensões para dois valores de elevação, $z = 0.02m$ e $z = 0.00m$). Nota-se também a densidade mais concentrada na origem, o que se traduz em uma menor oscilação de roll. Dessa forma, a probabilidade (integral da densidade) do veículo apresentar roll maior de 15 deg (linhas verticais na pdf) é maior para o caso com o "jounce bumper" menos rígido (62% e cerca de 80% para o veículo com esse elemento mais rígido). Esse ângulo de 15 graus é um ângulo típico em um veículo que, caso esta ultrapasse desse valor, sua estabilidade por vir a ser muito prejudicada. Ou seja, é um valor limite de estabilidade de um veículo.

No entanto, o valor da proporção de aumento da densidade de $z = 0.00$ para $z = 0.02$ é maior para a curva tracejada do que para a curva contínua (11.2 para a tracejada e 7.7 para a curva contínua). Isso, de certa forma, pode ser entendido como uma medida de quanto o sistema é mais provável de elevar seu centro de gravidade para uma dada manobra.

Como foi notado, mais que a comparação gráfica, é necessário definir métricas para a comparação de casos diferentes em termos de probabilidades. Por esse exemplo, vamos definir duas métricas para comparação: probabilidade do veículo permanecer com seu valor de roll abaixo $\pm 15deg$, dividida pela probabilidade total (chamado aqui de percentual de estabilidade), e relação entre probabilidade total para valor de $z = 0.02m$ dividida pela probabilidade para $z = 0.00$ (sensibilidade à elevação).

Outro importante parâmetro a ser analisado é a altura de roll da suspensão, assim como a variação dessa altura com a elevação do veículo. Essa última é uma característica inerente a cada tipo de suspensão veícular.

Na Figura 5.31, está mostrada a pdf para dois valores de centro de rolagem da

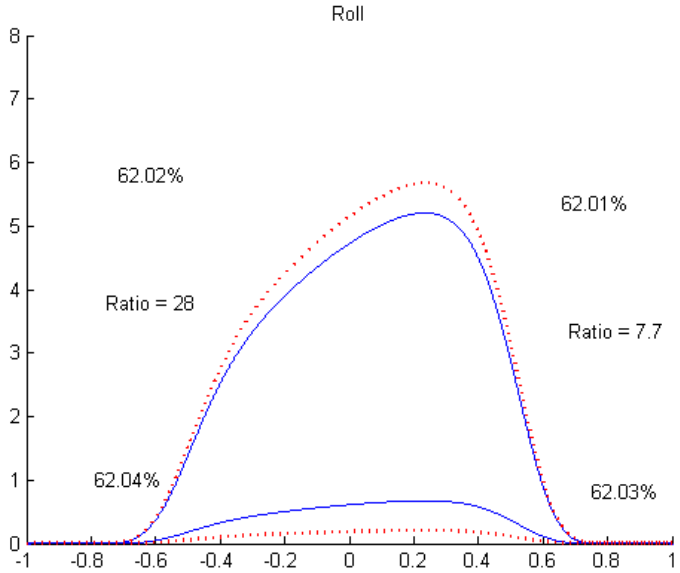

Figura 5.31: Distribuição de ocorrências para diferentes valores de centro de roll da suspensão

suspensão diferentes, novamente para dois valores de elevação ($z = 0.02m$ e $z = 0.00m$). A curva vermelha tracejada representa um veículo com centro de rolagem maior.

Junto ao gráfico, estão mostradas as métricas mencionadas anteriormente. À direita, os valores percentuais de área dentro da faixa $\pm 15deg$ para as duas elevações, assim como a taxa de aumento de probabilidade da elevação menor para a maior para o gráfico azul contínuo. E à esquerda, esses mesmos valores para o gráfico vermelho tracejado.

Pode-se notar, na Figura 5.31, que o percentual de estabilidade para as duas elevações permanecem praticamente inalterados, mesmo comparando-se entre as curvas. No entanto, a taxa de crescimento da densidade para elevação maior no gráfico tracejado é bem maior. Isso significa que esse sistema tem maior probabilidade de ser encontrado em elevações maiores. Tal resultado se mostra bem plausível, visto que é mais comum a ocorrência de "jacking" em veículos com centro de rolagem maior.

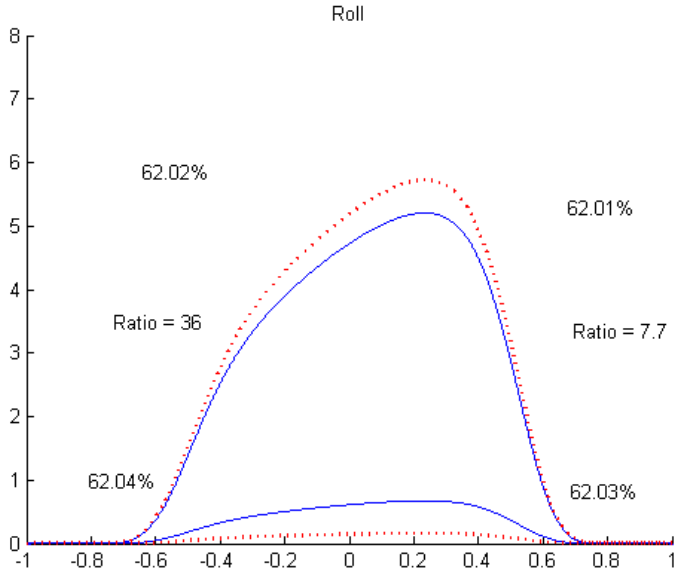

Figura 5.32: Distribuição de ocorrências para diferentes valores de taxa de variação de centro de roll da suspensão

Isso é um efeito ruim em termos de estabilidade, visto que para maiores valores de elevação, menor será o valor do ângulo de roll crítico dinâmico e, portanto, menor sua estabilidade.

Efeito semelhante ocorre para variação da taxa de variação do centro de rolagem da suspensão (Figura 5.32). Novamente apenas a razão de crescimento da probabilidade mudou, passando de 7.7 para 36. Ou seja, também é maior a chance de encontrar um veículo com maior taxa de variação de centro de rolagem em uma elevação maior, o que pode reduzir sua estabilidade.

Um dos principais fatores que influenciam na estabilidade de um veículo é o pneu. O quanto de aderência que um determinado pneu é capaz de gerar, pode influenciar por completo a estabilidade do veículo. Nesse contexto, se incluiu tal fator no estudo da densidades.

Foram testadas neste trabalho duas condições de pneus diferentes. Primeiro, representado nas Figuras de 5.33 à 5.35, pneus com diferentes fatores de aderência. E

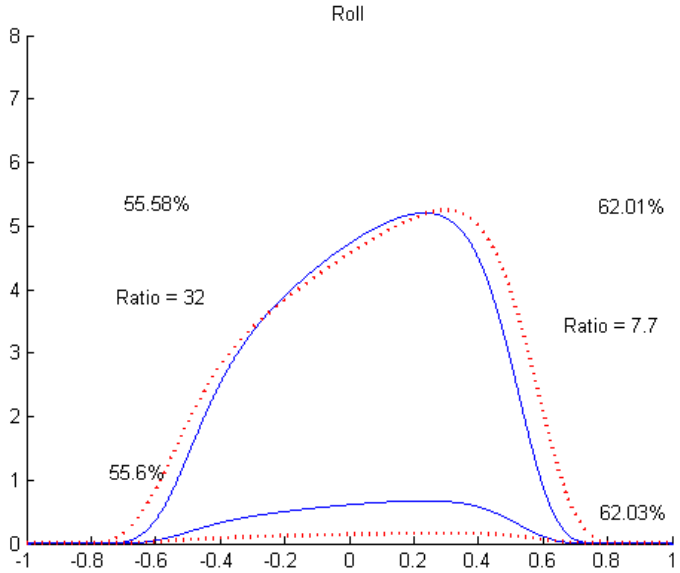

Figura 5.33: Distribuição de ocorrências para diferentes valores de aderência do pneu

porteriormente, pneus com diferentes tempos de resposta, representados nas figuras de 5.36 à 5.38. Tais fatores podem ser modificados através da função definida como força de excitação externa proveniente do pneu: $\mathcal{C}.\tanh(a.t)$. Assim, variando o coeficiente $\mathcal{C}$ da função, altera-se a aderência do pneu, e o coeficiente a, o tempo de resposta deste.

Na Figura 5.33, está apresentada a pdf para o caso do veículo com pneus com maior aderência. Observando as curvas, nota-se um maior alargamento da curva tracejada vermelha (pneu com maior aderência) em comparação com a azul contínua, o que leva à fração de probabilidade dentro de $\pm 15deg$ cair de 62% para 55%. Assim como, a razão de crescimento de probabilidade com elevação foi de 7.7 para 32. Tais afirmações, podem ser verificadas numericamente através das Figuras 5.34 e 5.35, com simulações para esses mesmos casos. Nota-se tanto o movimento de roll como o de elevação maiores no caso do pneu com maior aderência, o que confirma as análises da densidade.

Analogamente para o pneu com tempo de resposta mais rápido (Figuras de 5.36 a

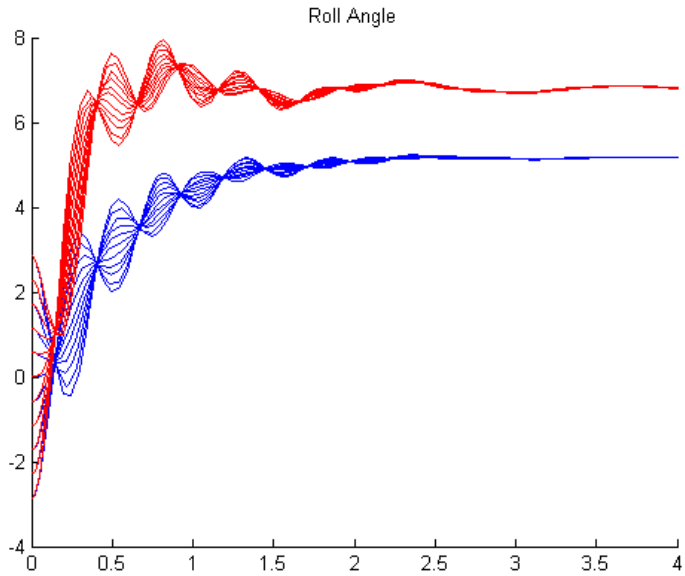

Figura 5.34: Simulação numérica do roll do veículo para diferentes valores de aderência do pneu

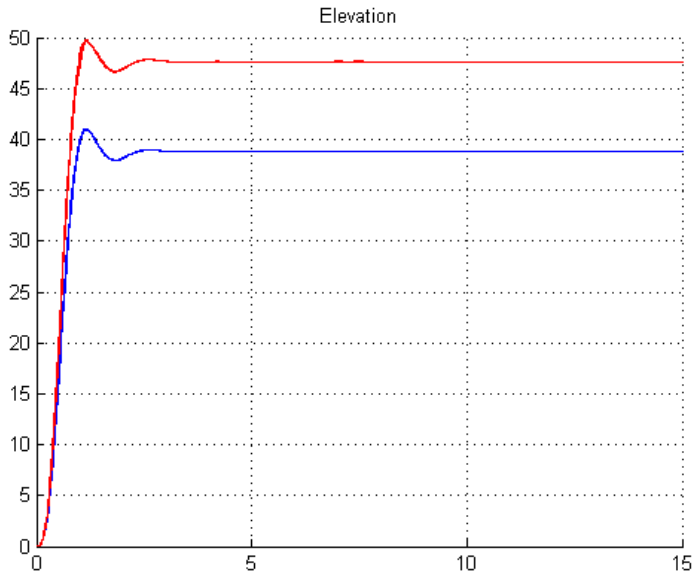

Figura 5.35: Simulação numérica de elevação do veículo para diferentes valores de aderência do pneu

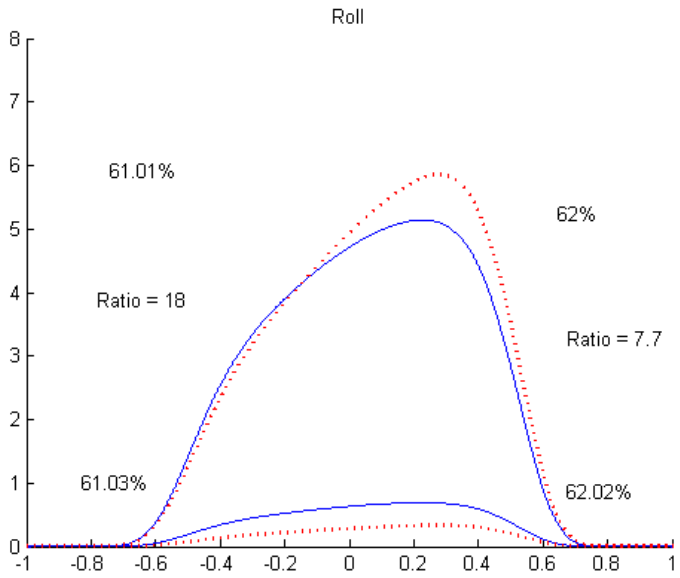

Figura 5.36: Distribuição de ocorrências para diferentes tempos de resposta do pneu

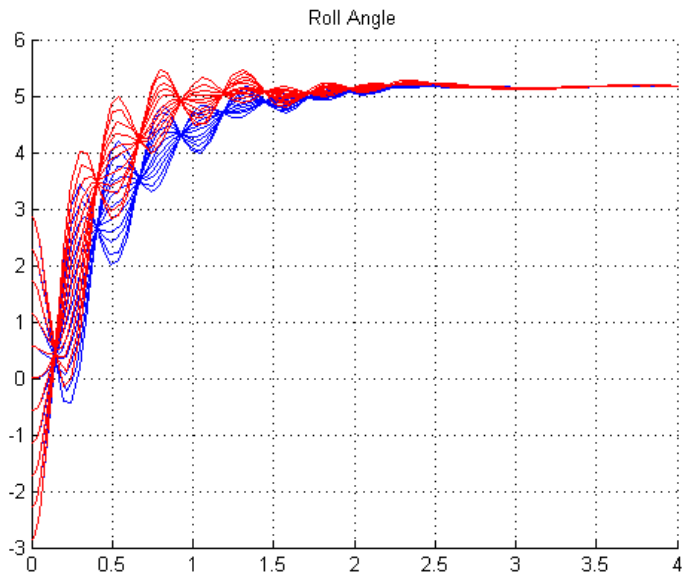

Figura 5.37: Simulação numérica do roll do veículo para diferentes tempos de resposta do pneu

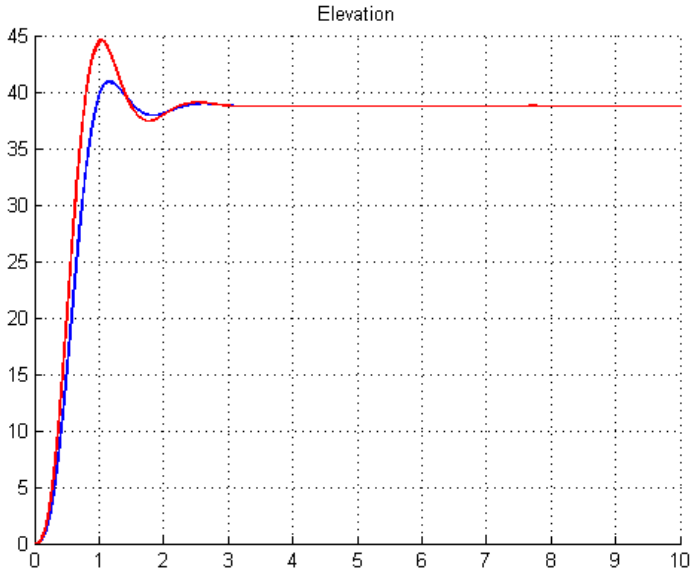

Figura 5.38: Simulação numérica de elevação do veículo para diferentes tempos de resposta do pneu

5.38), houve um pequeno alargamento da curva de densidade (refletido no percentual de estabilidade), assim como um aumento da razão de crescimento da probabilidade.

Observando as séries temporais de rolagem e elevação do veículo, notam-se apenas os valores transientes que se tornaram maiores. De certa forma, tal comportamento também indica uma redução de estabilidade, visto que, para uma certa manobra, a rolagem do veículo pode apresentar valores críticos em comparação a um pneu mais lento. Nesse caso, pode-se concluir que a abordagem estatística apresentada também é robusta o suficiente em captar fenômenos de natureza transiente.

Outros fatores importantes para verificação de estabilidade de roll são parâmetros de suspensão ditos ajustáveis, tais como: rigidez de molas, curvas de amortecedores e rigidez de roll da suspensão. Tais parâmetros não são inerentes da contrução do veículo, e podem ser alterados com maior facilidade. Tal característica os torna importantes fatores na busca de estabilidade de um veículo.

Como primeiro desses fatores ajustáveis, pode-se destacar a rigidez de rolagem

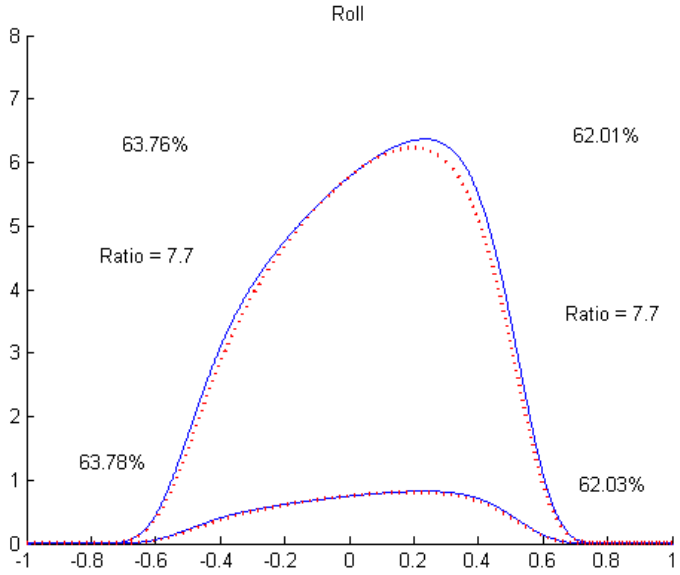

Figura 5.39: Distribuição de ocorrências para diferentes rigidezes torcionais

do veículo. Através dela, pode-se restringir o movimento de roll do veículo e alterar sua dinâmica. Nas Figuras de 5.39 a 5.41, podem-se notar as alterações no sistema devido à alteração de rigidez torcional.

Pela Figura 5.39, nota-se uma discreta mudança na pdf do sistema com a rigidez torcional aumentada (curva vermelha tracejada), com o percentual de estabilidade levemente alterado e a sensibilidade à elevação inalterada. Em outras palavras, apesar da diminuição do roll, pouco se alteraram as condições de estabilidade geral do sistema.

Nas Figuras 5.40 e 5.41, estão as simulações numéricas para o mesmo caso, dada a variação de algumas condições iniciais.

Outro parâmetro ajustável no veículo é a rigidez do movimento de elevação, ou seja, a rigidez vertical das molas do veículo. Na Figura 5.42, está apresentada em vermelho tracejado a densidade de probabilidade para um aumento de rigidez vertical do veículo. Nota-se que não houve alteração na curva da pdf. A alteração apenas da rigidez vertical só seria possível em um veículo com uma alteração conjunta em termos

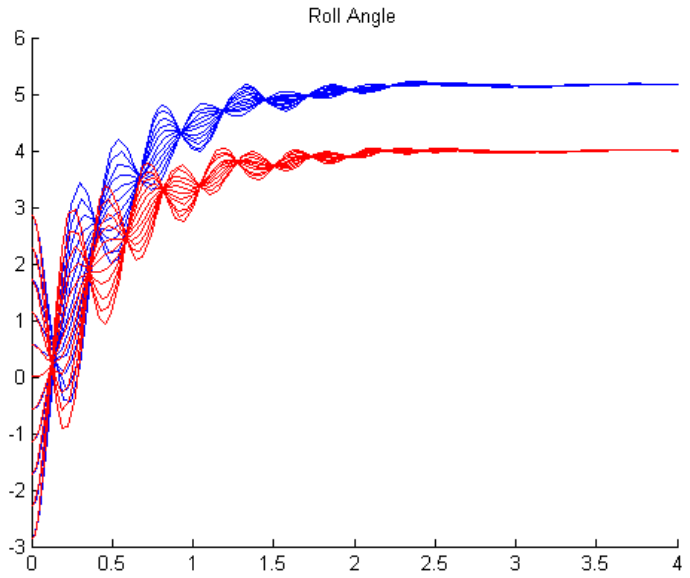

Figura 5.40: Simulação numérica do roll do veículo para diferentes rigidezes de rolagem

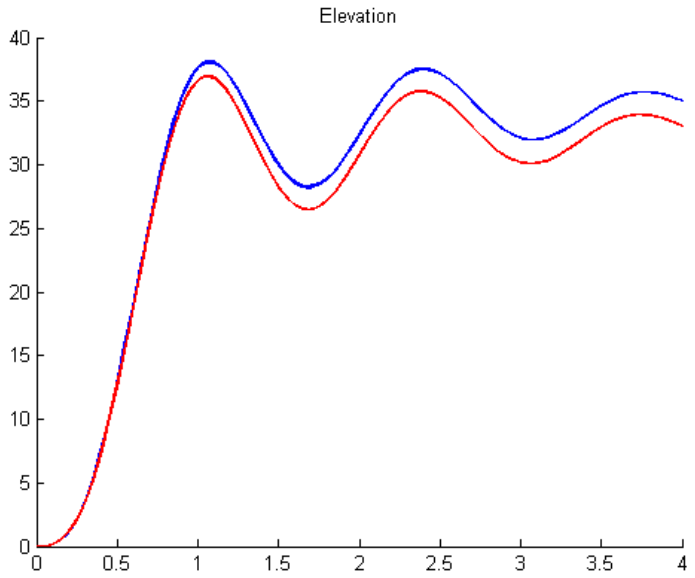

Figura 5.41: Simulação numérica de elevação do veículo para diferentes rigidezes de rolagem

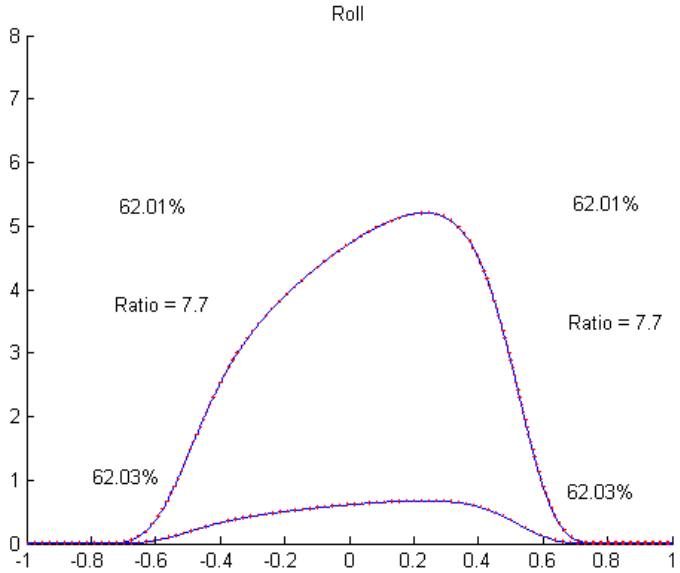

Figura 5.42: Distribuição de ocorrências para diferentes rigidezes verticais

de diminuição da rigidez torcional proporcionalmente ao aumento da vertical, visto que as molas de suspensão também contribuem, de maneira dicreta, para a rigidez torcional da suspensão.

O mesmo acontece quando se altera o coeficiente de amortecimento torcional do veículo (Figura 5.43). Há apenas uma pequena variação no percentual de estabilidade da curva. A curva vermelha tracejada representa o veículo com maior fator de amortecimento torcional.

Outro parâmetro a ser investigado é amortecimento do movimento vertical do veículo. Tal parâmetro representa os amortecedores da suspensão do veículo. Vale a pena ressaltar que quando se propõe uma alteração do amortecimento vertical, sem uma alteração do respectiva no amortecimento torcional, que também provém dos amortecedores, remete-se a alterações nas curvas de extensão e compressão em direções opostas, para que o amortecimento torcional permaneça inalterado, e apenas o amortecimento vertical (proveniente principalmente do fator de amortecimento de compressão) seja modificado.

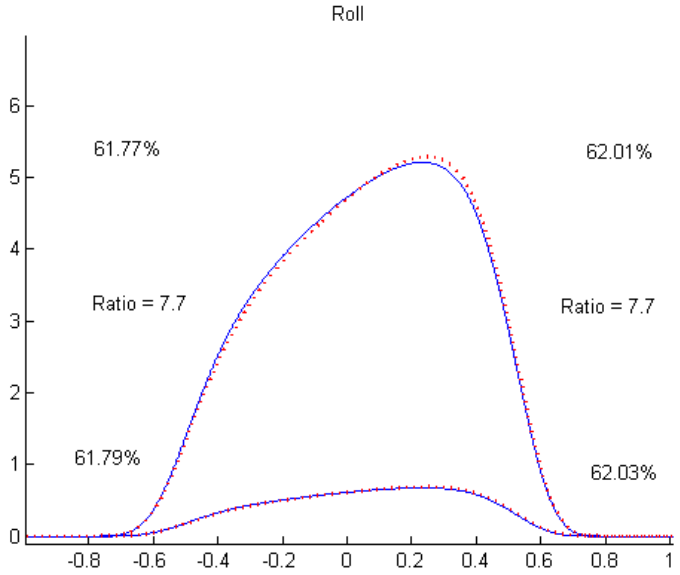

Figura 5.43: Distribuição de ocorrências para diferentes coeficientes de amortecimento torcional

Na Figura 5.44, pode-se ver a curva de densidades para a alteração do amortecimento vertical. A curva vermelha tracejada representa um veículo com maior coeficiente de amortecimento vertical. Nota-se uma mudança basicamente na sensibilidade à elevação, que foi de 7.7 para 5.1. O percentual de estabilidade não foi alterado. Olhando as simulações numéricas, nas Figuras 5.44 e 5.45, observa-se, como visto na pdf, que apenas o grau de liberdade do movimento vertical foi alterado, unicamente nas oscilações transientes do sistema. E o movimento de roll não foi alterado nem mesmo na porção transiente. O maior valor da sensibilidade à elevação deve-se às maiores oscilações verticais do sistema, justamente devido ao pouco amortecimento do sistema.

Outros fatores importantes são os parâmetros de massa e inércia do veículo. Tais fatores não são facilmente ajustáveis como os anteriores, mas são fatores construtivos e por isso, têm sua importância. Nas Figuras 5.47 e 5.48, estão apresentadas as densidades para o parâmetro inércia de roll e massa suspensa respectivamente.

Pode-se notar que não há alteração significativa para a alteração de inércia de roll

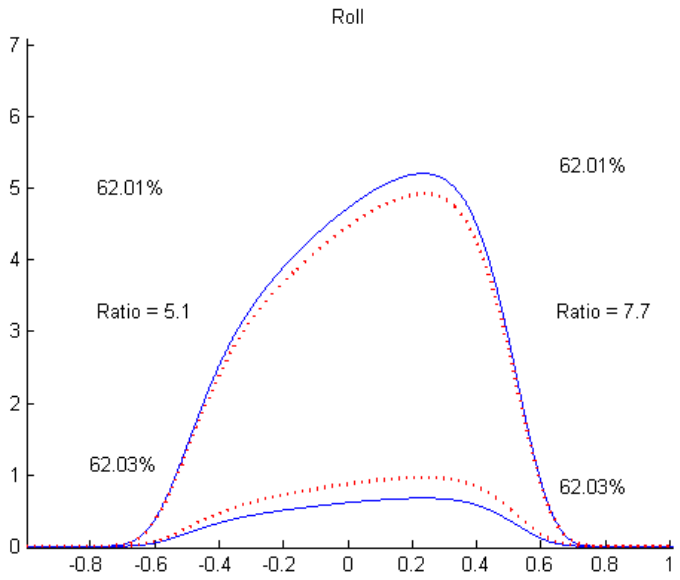

Figura 5.44: Distribuição de ocorrências para diferentes coeficientes de amortecimento verticais

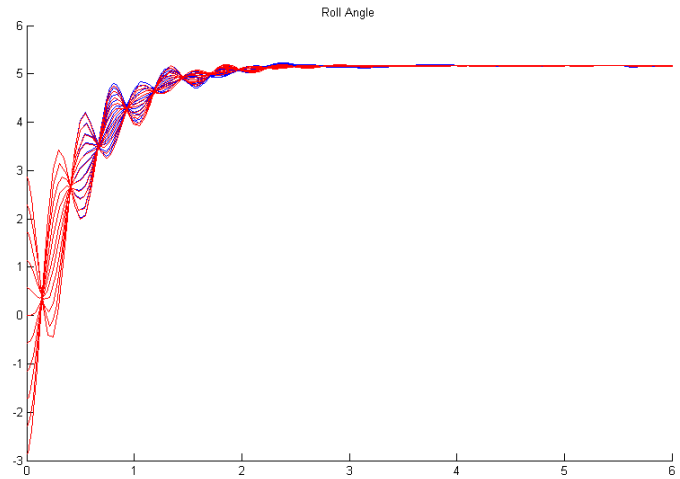

Figura 5.45: Simulação numérica de roll do veículo para diferentes coeficientes de amortecimento verticais

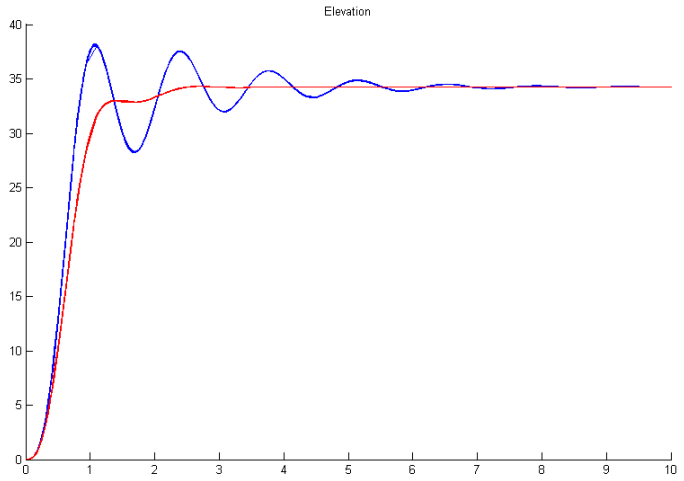

Figura 5.46: Simulação numérica de elevação do veículo para diferentes coeficientes de amortecimento verticais

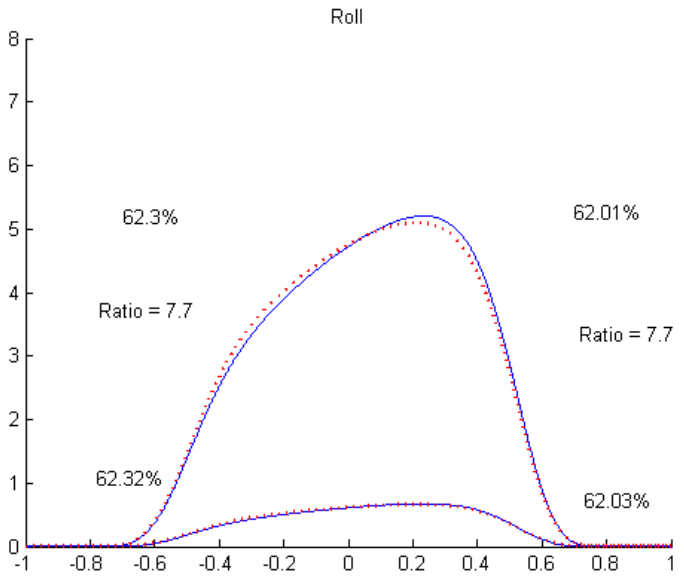

Figura 5.47: Distribuição de ocorrências para diferentes inércias de roll

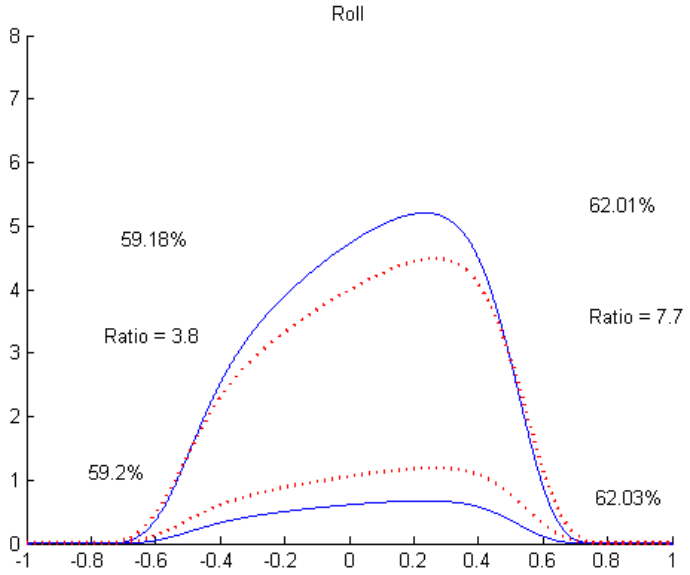

Figura 5.48: Distribuição de ocorrências para diferentes massas suspensa

do veículo. A curva em vermelho tracejado é para o veículo com a inércia aumentada em 20%. Já para o aumento da massa suspensa (Figura 5.48), também em 20% para a curva em vermelho tracejado, vê-se uma alteração significativa na densidade. A densidade com maior massa suspensa possui menor sensibilidade à elevação (de 7.7 para 3.8), no entanto, sua densidade se abriu no eixo de roll, fazendo seu percentual de estabilidade cair de 62% para 59%.

A alteração da sensibilidade à elevação pode ser explicada em parte pela maior massa e pelas forças de "jacking" que, agora, têm maior resistência dinâmica para exercer seu efeitos de elevação de CG. Isso ocorre, porém, apenas a partir de uma dada elevação. Pois a curva azul contínua, representando um veículo com menor massa suspensa, possui sua curva com menor probabilidade em uma elevação menor. Em suma, o veículo com maior massa é mais provável se ser encontrado em elevações medianas. Ao passo que, devido a uma determinada manobra, se ambos os veículos não apresentarem uma elevação grande, o veículo mais pesado é mais provável de possuir maior "jacking", principalmente devido ao maior roll e seu acoplamento com

o grau de liberdade vertical. Esse comportamento não linear seria muito difícil de ser capturado apenas através de simulação numérica e sugere que o melhor compromisso para um veículo deve ser um valor de massa suspensa determinado, considerado ideal, para uma dada manobra.

Um último parâmetro, porém de extrema importância, principalmente na atual classificação de veículos quanto à probabilidade de capotamento é o centro de gravidade. Na Figura 5.49, pode-se observar a influência do aumento do centro de gravidade (curva vermelho tracejado) sobre a função densidade de probabilidade. Ocorreu uma esperada diminuição no percentual de estabilidade. Já a sensibilidade à elevação permaneceu inalterada, o que era, de certa forma esperado.

Uma ressalva a ser feita nesse ponto é que, devido ao modelo simplificado não conter uma dependência do pneu com relação à força normal nas rodas, certos parâmetros, tais quais, rigidez torcional, rigidez vertical e altura de centro de rolagem da suspensão não apresentam influência sobre o efeito de "jacking" da suspensão. O que, na realidade, não se concretiza, devido a esses parâmetros alterarem o balanço de força normal durante a manobra. No entanto, pode-se introduzir esse efeito, contabilizando uma porporcional alteração de coeficiente de atrito do pneu e assim, modificando no modelo arquetípico os parâmetros de pneu.

Como forma de sumarizar os resultados de todos os parâmetros vistos acima, foi construída uma tabela com os percentuais de alteração do índice de estabilidade (Roll) e da sensibilidade à elevação (Jacking) em relação à uma configuração padrão, alterando-se cada parâmetro em cerca de 30%. Com isso, pode-se visualizar a importância relativa de cada parâmetro.

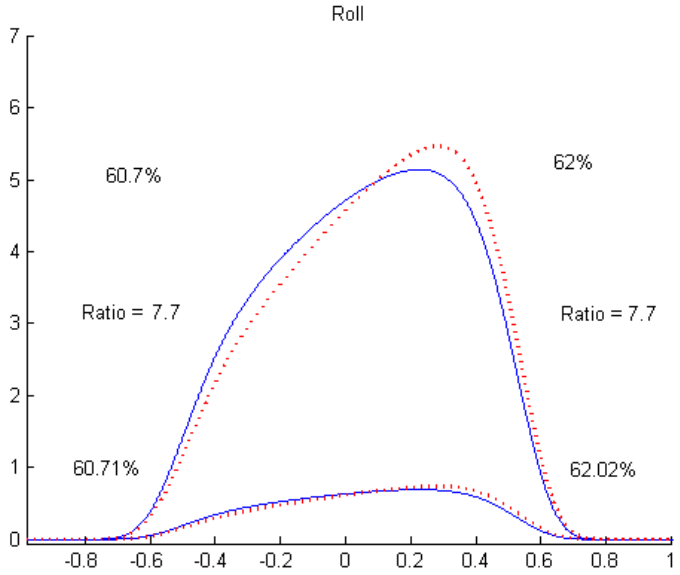

Figura 5.49: Distribuição de ocorrências para diferentes centros de gravidade

5.4.2 Densidades para tipos de veículos

Pelos diferentes parâmetros abordados na subseção anterior e os respectivos resultados mostrados, nota-se que, do ponto de vista de engenharia, nenhum veículo está absolutamente "imune" ao capotamento (o que no modelo simplificado significa roll menor que $15graus$). Essa proposição já não é de todo estranha em termos de engenharia, e principalmente do ponto de vista matemático. Como a densidade de probabilidade é calculada para todas as variações de condições iniciais, sempre haverá uma condição inicial severa o suficiente para o capotamento e, em termos de engenharia, sempre haverá uma manobra severa o suficiente que levará a tais condições e, portanto, ao capotamento.

No entanto, devido a tantas variáveis e possíveis combinações não lineares delas perante à probabilidade final, é de interesse de engenharia destacar algumas classes de veículos, com caracterísicas típicas, e compará-las, de maneira a visualizar o tamanho da variação das probabilidades de cada classe.

Para tanto, foram tomadas quatro classes de veículos diferentes: um utilitário

Parâmetro do veículo	Roll (%)	Jacking (%)
Rigidez de mola auxiliar	3.60	8.15
Altura de roll da suspensão	0.12	82.60
Variação da Altura de roll da suspensão	0.15	92.30
Aderência de pneu	6.70	302.00
Tempo de resposta do pneu	0.64	37.00
Rigidez torcional da suspensão	2.40	0.10
Rigidez vertical da suspensão	0.00	0.20
Amortecimento torcional da suspensão	1.95	0.15
Amortecimento vertical da suspensão	0.00	84.70
Inércia de roll do veículo	0.60	0.00
Massa suspensa	1.35	37.05
Centro de gravidade	4.35	0.00

Tabela 5.1: Análise paramétrica para o estudo de capotamento veicular - tabela de influência relativas

esportivo, uma caminhoneta do tipo pickup, de médio porte, um veículo sedan médio e um carro esportivo. Possivelmente pela sua utilização, esses veículos apresentam características bem distintas. O carro esportivo, por exemplo, apresenta um centro de gravidade baixo, uma bitola um pouco maior, massas e inércias em geral baixas, parâmetros de suspensão mais rígidos e um grande controle de roll. Diferentemente, o utilitário esportivo, tem maior massa e inércia, centro de gravidade mais elevado, em termos de suspensão, um menor controle de roll, privilegiando o conforto, com cursos de suspensão maiores, etc. Já a pickup possui características mais semelhantes ao utilitário esportivo, porém, com parâmetros de suspensão bem diferentes ,tais como centro de roll, batentes de suspensão (jounce bumpers) menores e pneus geralmente com maior aderência, principalmente devido ao maior perfil e à maior ocorrência de dobramento de banda.

Por fim, o sedan médio tem características intermediárias entre a SUV e o veículo esportivo, com suspensão também privilegiando o conforto, porém com características de inércia e massa menores que o utilitário esportivo e geralmemente suspensão mais baixa e de menor curso. No apêndice, estão listados todos os parâmetros utilizados

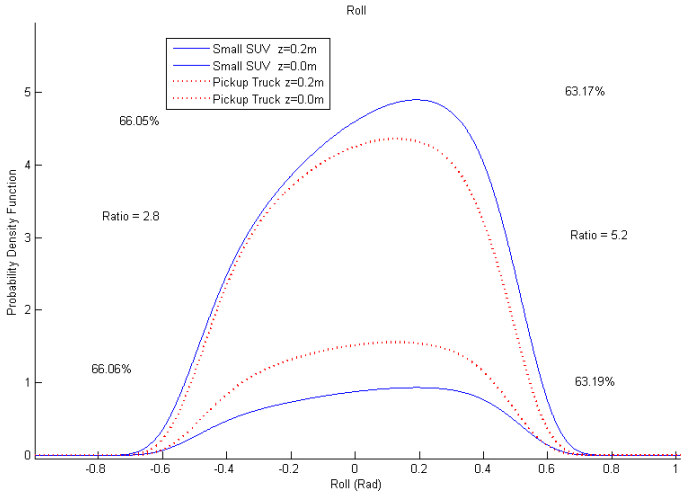

Figura 5.50: Distribuição de ocorrências para uma utilitário esportivo e uma pickup

para os quatro veículos descritos.

Pode-se notar, na Figura 5.50, a densidade de probabilidade para o utilitário esportivo e a pickup média para duas elevações diferentes ($z = 0.02m$ e $z = 0.0m$). Nota-se um aumento do percentual de estabilidade e uma drástica redução da sensibilidade à elevação para a pickup, em relação ao utilitário. Principalmente pelo tipo de suspensão, a pickup tende a apresentar um movimento de roll mais uniforme (curva de densidade mais centrada e simétrica) e com menos "jacking". Para elevações menores, sua densidade é maior que a do utilitário, em razão das massas e inércias envolvidas. No entanto para maiores elevações, o utilitário passa a ter maior densidade, em parte pelo maior potencial de "jacking" da suspensão.

Já na Figura 5.51, estão apresentadas as densidades para um sedan médio e para um carro esportivo. Nota-se um grande contraste da curva do carro esportivo em relação ao sedan e aos demais veículo mencionados anteriormente. Apesar da sensibilidade à elevação estar aproximadamente no mesmo valor para ambos, o percentual de estabilidade é muito maior para o carro esportivo. Obviamente pelo maior controle de roll, menor centro de gravidade e tipo de suspensão, este apresentou cerca de 90% de percentual de estabilidade, com uma densidade bem mais delgada, e centrada na

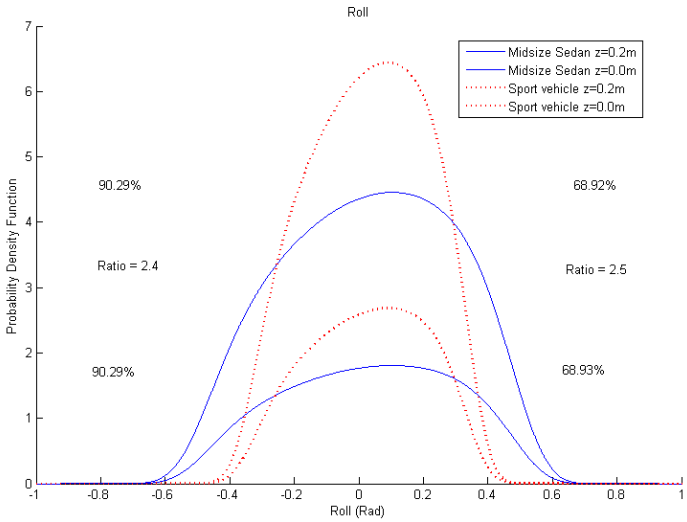

Figura 5.51: Distribuição de ocorrências para um sedan médio e um veículo esportivo

origem. Uma curiosidade é em relação à sensibilidade à elevação. Em parte, o carro esportivo, pela menor massa e inércia (geralmente), assim como uma maior rigidez geral em termos de suspensão (rigidez torcional e vertical), pode possuir até maior sensibilidade à elevação, porém, sempre com um baixo nível de roll. Pela figura, a densidade do veículo esportivo é maior que a do sedan para ângulos de roll baixo, porém, essa densidade cai drasticamente para valores mais altos de roll.

Vale a pena ressaltar a relativa facilidade em determinar as características gerais de uma veículo por meio dessa metodologia. Obviamente, a abordagem estatística do problema da dinâmica veicular, em alguns aspectos, parece muito generalista, perdendo alguns detalhes mais específicos de uma simulação numérica convencional, mas, com apenas uma análise, pode-se "enxergar" o comportamento global de um veículo, em termos dos graus de liberdade em estudo.

Capítulo 6

Conclusões

Este trabalho apresenta uma forma estatística de descrição de fenômenos da dinâmica não-linear aplicada em dinâmica veicular. Como descrito na revisão bibliográfica, vários autores têm desenvolvido, ao longo dos anos, essa forma de solução de problemas relacionados à dinâmica clássica. No entanto, em sua maioria a aplicação foi em mapas discretos unidimensionais. Apenas alguns trabalhos listados objetivaram uma aplicação em engenharia, no caso, em engenharia naval.

Um importante fator buscado nesse trabalho foi uma solução analítica aproximada para o problema de evolução de densidades de probabilidades. Tal solução foi conseguida a um custo de não se considerar a evolução das densidades para a obtenção de uma solução estacionária, bem como a necessidade de descrição da densidade em função da variável velocidade do sistema dinâmico em estudo. Em suma, tais simplificações possibilitaram uma solução fechada aproximada para os sistemas dinâmicos propostos. Dessa maneira, a solução proposta aproxima o que corresponderia a uma distribuição de ocorrências do sistema, para um valor da variável de velocidade próxima de zero.

Para validar o procedimento adotado no trabalho, foram encontradas soluções para densidades em três problemas clássicos de dinâmica não-linear: osciladores de Duffing, Van der Pol e equação de escape. Como resposta obtiveram-se as densidades de probabilidades estacionárias para os três sistemas que foram, então, comparados às simulações de Monte Carlo. Apesar dos três sistemas apresentarem caracteríticas de

sistemas não-lineares e, no caso do oscilador de Duffing, até uma grande sensibilidade à condição inicial quanto à sua trajetória em relação ao seu atrator, a densidade de probabilidade apresenta relativa "simplicidade" em sua forma. Tal característica, de certa forma, não é uma resultado imprevisto, visto que, partindo da abordagem estatística, era esperado tal comportamento. Essa forma de representação da solução do sistema dinâmico representa uma poderosa ferramente de análise. Por meio dela, todo o comportamento caótico do sistema mantém-se transparente à análise. Com isso, todos os problemas de análise típicos de uma comportamento caótico (como por exemplo a dificuldade de previsão de trajetória, instabilidades numéricas, etc) não são sentidos na abordagem estatística.

Os resultados obtidos para os modelos clássicos motivaram a aplicação da teoria para a problema de capotamento em dinâmica veicular. Dessa forma, um modelo arquetípico teve que ser obtido, com os graus de liberdade considerados importantes do ponto de vista de análise de engenharia, e validado com curvas experimentais e de modelos de simulação de multicorpos mais complexos. Por fim, uma solução analítica também foi obtida para a densidade do problema de capotamento em dinâmica veicular. Como forma de explorar tal solução, uma análise de sensibilidade foi feita com vários parâmetros do veículo e seu respectivo comportamento na densidade de probabilidade foi registrado. Como forma de comparação entre os resultados, e até como forma de quantificação quanto à propensão ao capotamento, duas métricas foram criadas. Por fim, quatro casos típicos de classes de veículos diferentes foram comparados em suas probabilidades, e os resultados, além de esperados, mostraram importantes aspectos das diferentes classes veiculares. Tal modelo analítico representa uma importante ferramenta de projeto do ponto de vista de engenharia, principalmente em termos de pré-projeto. O fato da densidade de probabilidade levar em conta todas as condições iniciais, somado ao fato das manobras que avaliam a propensão ao capotamento em veículos serem, do ponto de vista matemático, semelhantes a uma função degrau ou a uma composição de funções degrau, torna a análise completa em termos das possibilidades de manobras contempladas pela densidade de probabilidade.

O tema abordado neste trabalho é, de maneira geral, muito pouco explorado no contexto de engenharia, de maneira geral. Pela revisão bibliográfica, pode-se notar que a abordagem estatística é mais difundida no âmbito da matemática, termodinâmica e mecânica estatística. Dessa forma, muito ainda se pode explorar, tanto dos modelos de dinâmica não-linear estudados neste trabalho, mas principalmente para o modelo de dinâmica veícular. Um ítem não abordado neste trabalho, é, por exemplo, a comparação com a termodinâmica em termos de entropia, dada a definição matemática de entropia do ponto de vista de teoria probabilística [Papoulis, 1984]:

$$S = -\rho . \ln(\rho)$$

Assim como o conceito de quebra de simetria temporal introduzida no trabalho de [Prigogine, 1980], dado o espectro do operador de evolução de densidades de uma determinado sistema. Obviamente, para isso, dever-se-ia resolver o problema de evolução de densidade não apenas através de sua densidade estacionária, mas descrevendo toda sua evolução através de análise espectral.

Bibliografia

[Antoniou et al., 2000] Antoniou, I., Prigogine, I., Sadovnichii, V., and Shkarin, S. (2000). Time operator for diffusion. *Chaos, Soliton and Fractals*, 11:465–477.

[Borel, 1909] Borel, E. (1909). Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rendiconti Circ. Mat.*, 27:247–271.

[Daems, 1996] Daems, D. (1996). Non-diagonalizability of the frobenius-perron operator and transition between decay modes of the time autocorrelation function. *Chaos, Solitons & Fractals*, 7:1753–1760.

[del Río-Correa and García-Colín, 1998] del Río-Correa, J. and García-Colín, L. (1998). The maximum entropy principle and the stochastic aspects of deterministic chaos. *Physica A*, 258:77–88.

[Demerly and Youcef-Toumi, 2000] Demerly, J. D. and Youcef-Toumi, K. (2000). Non-linear analysis of vehicle dynamics: A reduced order model for vehicle handling analysis. *SAE Automotive Dynamics and Stability Conference*.

[Ding, 1998] Ding, J. (1998). A maximum entropy method for solving frobenius-perron operator equations. *Applied Mathematics and Computation*, 93:155–168.

[Ding et al., 2002] Ding, J., Li, T. Y., and Zhou, A. (2002). Finite approximations of markov operators. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 147:137–152.

[Ding and Zhou, 1999] Ding, J. and Zhou, A. (1999). A finite element method for the frobenius-perron operator equation. *Applied Mathematics and Computation*, 102:155–164.

[Forkenbrock et al., 2002] Forkenbrock, G. J., Garrott, W. R., Heitz, M., and O'Harra, B. C. (2002). A comprehensive experimental evaluation of test maneuvers that may induce on-road, untripped, light vehicle rollover. phase iv of nhtsa's light vehicle research program. *NHTSA DOT HS 809 513*.

[Gibbs, 1902] Gibbs, J. W. (1902). *Elementary principles in statistical dynamics*. Woodbridge,1981, New York.

[Gillespie, 1992] Gillespie, T. D. (1992). *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. SAE Inc., Warrendale.

[Guckenheimer and Holmes, 1983] Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York.

[Hac, 2005] Hac, A. (2005). Influence of chassis characteristics on sustained roll, heave and yaw oscillations in dynamic rollover testing. *SAE World Congress*.

[Hoon and Key-Pyo, 2006] Hoon, K. S. and Key-Pyo, R. (2006). Calculation of a capsizing rate of a ship in stochastic beam seas. *Ocean Engineering*, 33:425–438.

[Kaufmann et al., 1996] Kaufmann, Z., Lustfeld, H., and Bene, J. (1996). Eigenvalue spectrum of the frobenius-perron operator near intermittency. *Physical Review E*, 53(2):1416–1421.

[Lasota and Mackey, 1985] Lasota, H. and Mackey, P. (1985). *Probabilistic Properties of Deterministic Systems*. Cambridge University Press, New York.

[Nicolis and Gaspard, 1994] Nicolis, G. and Gaspard, P. (1994). Toward a probabilistic approach to complex systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 4:41–57.

[Ostruszka and Zycskowski, 2001] Ostruszka, A. and Zycskowski, K. (2001). Spectrum of the frobenius-perron operator for systems with stochastic perturbation. *Nonlinear*, 1.

[Papoulis, 1984] Papoulis, A. (1984). *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, Singapore.

[Plastino and Plastino, 1998] Plastino, A. and Plastino, A. (1998). Universality of jaynes' approach to the evolution of time-dependent probability distributions. *Physica A*, 258:429–445.

[Prigogine, 1977] Prigogine, I. (1977). *Time, Structures and Fluctuations*. Nobel Lectures, Belgium.

[Prigogine, 1980] Prigogine, I. (1980). *From Being to Becoming*. Freeman, New York.

[Prigogine, 1993] Prigogine, I. (1993). From classical chaos to quantum chaos. *Vistas in Astronomy*, 37:7–25.

[Prigogine, 1999] Prigogine, I. (1999). Laws of nature, probability and time symmetry breaking. *Physica A*, 263:528–539.

[Reimpell and Stoll, 1996] Reimpell, J. and Stoll, H. (1996). *The Automotive Chassis Engineering Principles*. SAE Inc., Warrendale.

[Rill, 2003] Rill, G. (2003). *Vehicle Dynamics - Lectures Notes*. Fachhochschule Regensburg.

[Rényi, 1957] Rényi, A. (1957). Representation for real numbers and their ergodic properties. *Acta Math. Acad. Sci.*, 8:477–493.

[Roberts, 1982] Roberts, J. (1982). A stochastic theory for nonlinear ship rolling in irregular seas. *Journal of Ship Research*, 26(4):229–245.

[Roberts and Vasta, 2000] Roberts, J. and Vasta, M. (2000). Markov modelling and stochastic identification for nonlinear ship rolling in random waves. *The Royal Society*, 358:1917–1941.

[Thompson et al., 1990] Thompson, J., Rainey, R., and Soliman, M. (1990). Ship stability-criteria based on chaotic transients from incursive fractals. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A 332:149–167.

[Thompson et al., 1992] Thompson, J., Rainey, R., and Soliman, M. (1992). Mechanics of ship capsize under direct and parametric wave excitation. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A 338:471–490.

[Ulam and von Neumann, 1947] Ulam, S. and von Neumann, J. (1947). On combination of stochastic and deterministic process. *Bull. Am. Math. Soc.*, 53:1120.

[Venn and Lowenberg, 2004] Venn, D. and Lowenberg, M. (2004). Non-linear vehicle dynamics using bifurcation methods. *SAE Technical Paper Series.*

[Vos, 2006] Vos, P. (2006). Time-dependent polynomial chaos. Master's thesis, Delft University of Technology.

[Yoon et al., 2007] Yoon, J., Kim, D., and Yi, K. (2007). Design of a rollover index-based vehicle stability control scheme. *Vehicle System Dynamics*, 45:459–475.

[Zhang et al., 2007] Zhang, Y., Xu, W., and Fang, T. (2007). Stochastic hopf bifurcation and chaos of stochastic bonhoeffer-van der pol system via chebyshev polynomial approximation. *Applied Mathematics and Computation*, 190:1225–1236.

Apêndice A

Características de classes de veículos

As características principais para os gráficos de densidades de probabilidades contruídas nesse trabalho podem ser observadas abaixo.

Dados para o utilitário esportivo:

- Coeficiente de pneu = 0.98
- Tempo de resposta de pneu = 0.90
- Inércia de roll $423.0kg.m^2$
- Coeficiente de amortecimento em roll = $1590\frac{N.m}{rad/s}$
- Rigidez torcional da suspensão = $1150\frac{N.m}{deg}$
- Massa suspensa = $1150kg$
- Altura do centro de gravidade até o eixo de roll da suspensão = $0.56m$

- Média de altura de rollagem da suspensão dianteira e traseira = $0.16m$
- Massa total do veículo = $1450kg$
- Coeficiente de amortecimento vertical = $3500\frac{N.s}{m}$
- Rigidez vertical da suspensão = $50000\frac{N}{m}$
- Taxa de variação do centro de roll da suspensão dianteira = 2.2
- Taxa de variação do centro de roll da suspensão traseira = 0.8
- Coeficiente relativo à rigidez torcional do batente elástico = 6.0×10^6
- Bitola = $1.44m$

Dados para a pickup :

- Coeficiente de pneu = 0.94
- Tempo de resposta de pneu = 0.85
- Inércia de roll $543.0kg.m^2$
- Coeficiente de amortecimento em roll = $1290\frac{N.m}{rad/s}$
- Rigidez torcional da suspensão = $1350\frac{N.m}{deg}$
- Massa suspensa = $1250kg$
- Altura do centro de gravidade até o eixo de roll da suspensão = $0.60m$
- Média de altura de rollagem da suspensão dianteira e traseira = $0.15m$
- Massa total do veículo = $1600kg$

- Coeficiente de amortecimento vertical = $3500\frac{N.s}{m}$
- Rigidez vertical da suspensão = $60000\frac{N}{m}$
- Taxa de variação do centro de roll da suspensão dianteira = 2.2
- Taxa de variação do centro de roll da suspensão traseira = 1.8
- Coeficiente relativo à rigidez torcional do batente elástico = 8.0×10^6
- Bitola = $1.54m$

Dados para o sedan médio :

- Coeficiente de pneu = 0.95
- Tempo de resposta de pneu = 0.87
- Inércia de roll $433.0kg.m^2$
- Coeficiente de amortecimento em roll = $1190\frac{N.m}{rad/s}$
- Rigidez torcional da suspensão = $1450\frac{N.m}{deg}$
- Massa suspensa = $1050kg$
- Altura do centro de gravidade até o eixo de roll da suspensão = $0.50m$
- Média de altura de rollagem da suspensão dianteira e traseira = $0.13m$
- Massa total do veículo = $1350kg$
- Coeficiente de amortecimento vertical = $3000\frac{N.s}{m}$
- Rigidez vertical da suspensão = $50000\frac{N}{m}$

- Taxa de variação do centro de roll da suspensão dianteira = 1.8
- Taxa de variação do centro de roll da suspensão traseira = 1.8
- Coeficiente relativo à rigidez torcional do batente elástico = 8.0×10^6
- Bitola = $1.58m$

Dados para o veículo esportivo :

- Coeficiente de pneu = 1.1
- Tempo de resposta de pneu = 0.97
- Inércia de roll $303.0kg.m^2$
- Coeficiente de amortecimento em roll = $1490\frac{N.m}{rad/s}$
- Rigidez torcional da suspensão = $2250\frac{N.m}{deg}$
- Massa suspensa = $750kg$
- Altura do centro de gravidade até o eixo de roll da suspensão = $0.40m$
- Média de altura de rollagem da suspensão dianteira e traseira = $0.10m$
- Massa total do veículo = $1050kg$
- Coeficiente de amortecimento vertical = $5500\frac{N.s}{m}$
- Rigidez vertical da suspensão = $60000\frac{N}{m}$
- Taxa de variação do centro de roll da suspensão dianteira = 1.0
- Taxa de variação do centro de roll da suspensão traseira = 1.0

- Coeficiente relativo à rigidez torcional do batente elástico = 5.0×10^6
- Bitola = $1.64m$