JOÃO ROBERTO DIEGO PETRECHE
Engenheiro Naval , Escola Politécnica da USP, 1988.
Mestre em Engenharia Naval , Escola Politécnica da USP, 1991.

ANÁLISE BIESPECTRAL APLICADA AO CÁLCULO
DA RESPOSTA EXTREMA DE LINHAS FLEXÍVEIS

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção
do Título de Doutor em Engenharia

Orientador : Prof. Dr. Carlos Alberto Nunes Dias
Prof. Assistente Doutor do Departamento
de Engenharia Naval da USP.

SÃO PAULO
1996

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA**

**TERMO DE JULGAMENTO
DE
DEFESA DE TESE DE DOUTORAMENTO**

Aos 17 dias do mês de julho de 1996, às 14:00 horas, no Departamento de Engenharia Naval da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, presente a Comissão Julgadora, integrada pelos Senhores Professores Drs. *Carlos Brito Augusto, orientador do candidato, Oscar Brito Augusto, Alexandre Kawano, José Elias Laier e Celso Kazuyuki Morooka iniciou-se a Defesa de Tese de Doutorado do Senhor **JOÃO ROBERTO DIEGO PETRECHE**. N.º Func. 647845

Título da Tese "ANÁLISE BIESPECTRAL APLICADA AO CÁLCULO DA RESPOSTA EXTREMA DE LINHAS FLEXÍVEIS".

Concluída a arguição, procedeu-se ao julgamento na forma regulamentar, tendo a Comissão Julgadora atribuído ao candidato as seguintes notas:

Prof. Dr. Carlos Alberto Nunes Dias.....	(100).....	(dez)
Prof. Dr. Oscar Brito Augusto.....	(100).....	(dez)
Prof. Dr. Alexandre Kawano.....	(100).....	(dez)
Prof. Dr. José Elias Laier.....	(100).....	(dez)
Prof. Dr. Celso Kazuyuki Morooka.....	(100).....	(dez)

Para constar, é lavrado o presente termo, que vai assinado pela Comissão Julgadora e pelo Secretário da Seção de Pós-Graduação.

São Paulo, 17 de julho de 1996.

Presidente _____

Secretário Renata Katayama Renata Katayama

Observações: *O nome correto do Orientador é Prof. Dr. Carlos Alberto Nunes Dias. N.º Func. Or.: 543195

Homologado pela C.P.G. em reunião realizada à 12 / 06 / 1996.

100p.

BC

Para minha esposa,
Rosana

AGRADECIMENTOS

Aos professores do Departamento de Engenharia Naval da USP, e em especial ao professor Dr. Carlos Alberto Nunes Dias.

Aos pesquisadores do Centro de Estruturas Navais e Oceânicas da USP e aos Engenheiros do Centro de Pesquisas da Petrobrás.

Às seguintes entidades: FAPESP, CNpQ e CAPES.

RESUMO

As linhas flexíveis utilizadas em sistemas flutuantes para produção de petróleo são solicitadas por esforços ambientais de natureza aleatória durante toda sua vida útil. Sua resposta dinâmica de longo prazo às solicitações do ambiente, embora não estacionária pode ser vista como sendo uma sucessão de processos aleatórios estacionários, associados a probabilidades de ocorrência de condições ambientais de curto prazo.

Através de simulações da resposta não linear às solicitações de curto prazo, uma descrição probabilística de segunda ordem da resposta das linhas flexíveis pode ser obtida por análise biespectral. A resposta estacionária não gaussiana fica então sendo caracterizada no domínio da frequência pela identificação de suas energias linear e não linear. A energia linear define um processo gaussiano, e a energia não linear corresponde à parcela não gaussiana da resposta.

Uma regressão quadrática da resposta no domínio da frequência permite obter sua função característica, que é a transformada de Fourier da função de densidade de probabilidade. Desta forma, a resposta estacionária é representada pela soma de parcelas lineares e quadráticas de variáveis aleatórias gaussianas independentes, e a obtenção da função característica faz-se através da solução de um problema de autovalores e autovetores de uma matriz real e simétrica. Este método, que é semelhante ao usado para análise estatística de ondas em águas rasas, pode ser aplicado sem a necessidade do conhecimento prévio das funções de transferência, bastando apenas os históricos temporais das simulações.

A determinação da resposta extrema de longo prazo das linhas flexíveis é feita usando-se as densidades de probabilidade de curto prazo obtidas através da análise biespectral; e a probabilidade de falha pode então ser calculada, consideradas as incertezas nos limites de tensão suportados por tais estruturas.

ÍNDICE

Dedicatória	1
Agradecimentos	2
Resumo	3
Índice	4
Simbologia	7
Lista de Figuras	15
Lista de Tabelas	17
Capítulo 1 Introdução	18
1.1 Justificativa e Escopo do Trabalho	18
1.2 Organização do Texto	21
Capítulo 2 Resposta Extrema e Probabilidade de Falha de Linhas Flexíveis	22
2.1 Análise Estrutural Probabilística	24
2.2 Estado Limite e Probabilidade de Falha	25
2.3 Funções de Densidade de Probabilidade da Resposta da Estrutura e de sua Resistência	27
Capítulo 3 Solicitações Ambientais Aleatórias	30
3.1 Os Movimentos da Embarcação	30
3.2 Forças de Excitação de Segunda Ordem	32
Capítulo 4 A Energia da Resposta	33
4.1 Os Históricos Temporais e os Picos da Resposta	35

Capítulo 5	Análise Estatística da Resposta	37
5.1	Transformadas de Fourier das Séries Temporais	37
5.2	Espectros de Energia de Primeira e Segunda Ordem (Biespectro)	39
5.3	Regressão Quadrática da Resposta no Domínio da Frequência	40
5.4	Descrição da Resposta no Domínio do Tempo	41
5.5	Utilização dos Espectros de Energia no Cálculo dos Coeficientes da Regressão Quadrática	42
5.6	A Resposta como Função de Variáveis Aleatórias Gaussianas Independentes	45
5.7	A Função Característica da Resposta como Solução de um Problema de Autovalores e Autovetores	48
5.8	Séries para Função de Densidade de Probabilidade da Resposta	53
5.9	Função de Densidade de Probabilidade dos Picos das Resposta	55
Capítulo 6	Extremo de Longo Prazo	59
6.1	Distribuição de Probabilidade de Picos de Longo Prazo	59
6.2	Densidade de Probabilidade do Extremo (Estatística de Ordem)	62
6.3	Distribuição Assintótica do Extremo	64
Capítulo 7	Exemplo de Aplicação	65
Capítulo 8	Conclusões de Recomendações	77
Anexo A	Resposta Dinâmica das Linhas Flexíveis	79
A.1	Esforços Internos	79
A.2	Equação Diferencial do Equilíbrio Dinâmico	82
A.3	Equações Constitutivas	83
A.4	Configuração de Referência	84
A.5	Forças Externas	85
A.6	Equação Integral do Equilíbrio	86

Anexo B	Espectros de Energia e Acoplamento Não Linear das Componentes Espectrais da Resposta	88
B.1	O Biespectro	90
B.2	O Acoplamento de Três Ondas	91
B.3	O Cálculo do Biespectro Discreto	92
Anexo C	Formulação do Problema de Otimização (Método dos Mínimos Quadrados)	94
	Referências Bibliográficas	97

SIMBOLOGIA

R	: resistência da estrutura
S	: efeito da solicitação (resposta da estrutura)
t	: tempo
$\max_T S$	: valor máximo do efeito da solicitação S no intervalo de tempo $(0, T)$
T	: tempo de vida útil
P_{falha}	: probabilidade de falha
P_{suc}	: probabilidade de sucesso, ou confiabilidade
p_S	: função de densidade de probabilidade de S
p_R	: função de densidade de probabilidade de R
$p_{S,R}$	: função de densidade de probabilidade conjunta de S e R
P_R	: função de distribuição acumulada de probabilidade de R
R_0	: valor determinístico de resistência da estrutura
T	: período de curto prazo
x_n	: perfil das ondas no instante t_n
y_n	: tensão máxima da linha no instante t_n
n	: número de incrementos de tempo até o instante t_n

h	: incremento de tempo
N	: número total de incrementos de tempo
X_m, Y_m	: transformadas de Fourier de x_n e y_n
ω_m	: frequência circular
M	: número de frequências
P_x, P_y	: espectros de energia de primeira ordem de x e y
B_x, B_y	: espectros de energia de segunda ordem (biespectro) de x e y
Y_L, Y_{NL}	: componentes linear e não linear de Y_m
A_L	: coeficientes da regressão quadrática de Y_m
y_{L_n}, y_{NL_n}	: parcelas linear e não linear da resposta y_n
$E[\]$	: valor esperado, ou média
P_L	: parcela linear do espectro de energia de primeira ordem
C_m, ε_m	: módulo e fase de Y_{L_m}
s_m	: raiz quadrada da metade da parcela linear do espectro de energia de primeira ordem
a_m, b_m	: variáveis aleatórias gaussianas independentes com média zero e variância unitária
$\bar{y}$	: valor médio de $y(t)$
q, r, f, g	: coeficientes reais de $y(t)$
$\underline{U}$	: vetor de variáveis aleatórias gaussianas unitárias

$\underline{S}$	: vetor com os coeficientes lineares de $y(t)$
$\underline{H}$	: matriz com os coeficientes quadráticos de $y(t)$
$\underline{r}, \underline{q}, \underline{f}, \underline{g}$	: matrizes auxiliares
$\underline{\Lambda}$	: matriz diagonal dos autovalores
$\underline{W}$	: matriz dos autovetores ortonormais
$\underline{\Omega}$	: vetor com coeficientes de $y(t)$
$\underline{Z}$	: vetor de variáveis aleatórias gaussianas
u, v	: variáveis aleatórias gaussianas
$p_{u,v}$	: função de densidade de probabilidade conjunta de u e v
p_u	: função de densidade de probabilidade de u
p_v	: função de densidade de probabilidade de v
$\beta, \lambda, \zeta, \alpha, \gamma$	: variáveis auxiliares reais
$M(\theta)$	: função característica
$\underline{\mu}$	: vetor de médias
$\underline{\sigma}^2$	: matriz de covariâncias
ξ, ρ, τ	: variáveis auxiliares reais
$p(y)$	: função de densidade de probabilidade da resposta de curto prazo
$\delta(\)$	: função delta de Dirac
m_r	: momento de ordem r da função característica

k_r	: coeficiente da expansão em série do logaritmo da função de densidade de probabilidade da resposta de curto prazo
$p(y, \dot{y}, \ddot{y})$	: distribuição conjunta de probabilidade de y e de suas duas primeira derivadas temporais
$p(y, \dot{y})$	: distribuição conjunta de probabilidade de y e de sua primeira derivada temporal
$p_j^M(y)$	: função de densidade de probabilidade (dos picos acima da média) da resposta de curto prazo na condição ambiental j
$\ln M_{y\dot{y}}$	: Série de Maclaurin do logaritmo da função característica conjunta de y e $\dot{y}$
κ_n	: Cumulante conjunto de ordem n de y e $\dot{y}$
$p_L(y)$	: função de densidade de probabilidade dos picos da resposta de longo prazo
PB_j	: probabilidade de ocorrência da condição ambiental j
ν_j	: frequência média dos picos da resposta na condição ambiental j
n_s	: número de condições ambientais
f_{1j}	: frequência relativa de ocorrência das ondas da condição ambiental j
f_{2j}	: frequência relativa de ocorrência dos ventos da condição ambiental j
f_{3j}	: frequência relativa de ocorrência das correntes da condição ambiental j

f_{4j}	: frequência relativa de ocorrência da direção da condição ambiental j
S	: valor do maior pico em N observações
y_L	: picos da resposta de longo prazo (não estacionária)
$P_S(s)$	: função de distribuição acumulada de probabilidade do valor extremo S
$p_S(s)$	: função de densidade de probabilidade do valor extremo S
v_L	: frequência média de picos de longo prazo
α_N, u_N	: parâmetros da função de densidade de probabilidade assintótica do valor extremo
H_s	: altura significativa das ondas
T_z	: período médio das ondas
$S(\omega)$	: espectro de energia das ondas
ω	: frequência da onda
C_1, C_2	: parâmetros do espectro de Pierson-Moskowitz
μ, σ^2	: parâmetros da função de densidade de probabilidade da resistência
μ_r	: tensão média de ruptura da linha flexível
C_r	: coeficiente de variação da resistência
T	: força tangente
Q	: força cortante

M	: momento de força
ζ	: comprimento deformado da linha flexível
P	: ponto material da linha flexível
r	: vetor posição do ponto P
t	: versor tangente
n	: versor normal
b	: versor binormal
κ	: curvatura da linha
τ	: torção da curva
Q_n, Q_b	: componentes normal e binormal da força cortante
M_t, M_b	: momentos torçor e fletor
f	: forças externas por unidade de comprimento deformado
m	: massa por unidade de comprimento deformado
a	: aceleração
EA	: rigidez axial da linha flexível
EI	: rigidez à flexão da linha flexível
GJ	: rigidez à torção da linha flexível
ε	: alongamento linear
θ	: ângulo de torção
c	: coeficiente de amortecimento

ζ_0	: comprimento indeformado da linha
$\mathbf{u}$	: deslocamentos da linha flexível
$\mathbf{r}_0$	: configuração de referência
λ	: estiramento
$\mathbf{f}_0$	: forças externas por unidade de comprimento indeformado
m_0	: massa por unidade de comprimento indeformado
$\mathbf{f}_0^{(1)}$	: forças hidrostática e gravitacional
$\mathbf{f}_0^{(2)}$	: força hidrodinâmica de arrasto
$\mathbf{f}_0^{(3)}$	: força hidrodinâmica de inércia
$\mathbf{f}_0^{(4)}$	: força de contato com o fundo
A_0, A_i, A_s	: áreas da seção interna, externa e transversal
p_0, p_i	: pressões do fluido interno e externo
$\gamma_0, \gamma_i, \gamma_s$	: pesos específicos do fluido interno, externo e da linha
$\mathbf{k}$	: versor vertical orientado para cima
$\delta \mathbf{u}$	: deslocamento virtual
L_0	: comprimento indeformado total da linha flexível
$k_2(\tau)$	: cumulante de ordem 2
$k_3(\tau_1, \tau_2)$	: cumulante de ordem 3
$F_2(\omega_i)$	: espectro cumulante de ordem 2

- $F_3(\omega_{l1}, \omega_{l2})$: espectro cumulante de ordem 3
- $\Delta(z)$: função delta
- $A_{k,l}$: coeficiente do acoplamento
- ω_{corte} : frequência de corte
- $\tilde{B}_{k,l}$: estimativa para o biespectro (discreto)
- $B_{k,l}$: biespectro (discreto)
- $\tilde{P}_m$: estimativa para o espectro (discreto) de primeira ordem
- P_m : espectro de energia (discreto) de primeira ordem
- $\mathfrak{S}(\underline{x})$: função soma dos quadrados das diferenças
- $\underline{x}$: argumento vetorial
- $\underline{x}^{(0)}$: valor inicial do vetor $\underline{x}$
- $P_j^M(y)$: função de distribuição de probabilidade de picos (acima da média) da resposta
- $E[M(y)]$: valor esperado do número de picos acima de y
- $E[N_+(y)]$: valor esperado do número de cruzamentos positivos do valor y

LISTA DE FIGURAS

- Figura 2.1 Sistema de Produção Flutuante de Petróleo Utilizando Duto Flexível.
- Figura 2.2 Realizações (Amostras) das Quantidades Aleatórias S e R.
- Figura 2.3 Função de Densidade de Probabilidade da Variável Aleatória X.
- Figura 2.4 Cálculo da Probabilidade de Falha P_{falha} a partir de $p_{S,R}(s,r)$.
- Figura 4.1 Faixas de Frequência da Energia da Resposta
- Figura 4.2 Histórico Temporal da Resposta
- Figura 7.1 Espectro de Energia de Primeira Ordem da Resposta
- Figura 7.2 Espectro de Energia de Segunda Ordem da Resposta
- Figura 7.3 Função Característica da Resposta
- Figura 7.4 Função de Densidade de Probabilidade da Resposta
- Figura 7.5 Função de Densidade de Probabilidade dos Máximos da Resposta de Curto Prazo
- Figura 7.6 Função de Densidade de Probabilidade dos Máximos da Resposta de Curto e Longo Prazo.
- Figura 7.7 Função de Densidade de Probabilidade dos Máximos da Resposta de Longo Prazo e Histograma.
- Figura 7.8 Função de Densidade de Probabilidade Assintótica do Extremo da Resposta em 100 anos.
- Figura 7.9 Função de Densidade de Probabilidade da Resistência

Figura 7.10 Função de Densidade de Probabilidade Conjunta de S e R

Figura A.1 Esforços Agindo sobre a Linha Flexível

LISTA DE TABELAS

Tabela 7.1 Características da Linha Flexível

Tabela 7.2 Frequência Relativa dos Estados de Mar da Bacia de Campos

Tabela 7.3 Pesos da Ponderação para Obtenção da Função de Densidade de Probabilidade de Longo Prazo.

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

1.1 Justificativa e Escopo do Trabalho

Na plataforma continental da costa brasileira, existem reservas petrolíferas localizadas em águas profundas, tornando interessante o emprego de sistemas flutuantes para produção do petróleo.

As linhas flexíveis, ou risers, são estruturas tubulares alongadas, utilizadas para conectar as embarcações aos poços localizados no fundo do oceano, transportando os efluentes da produção de petróleo (gás, óleo e água). Assim, as embarcações ficam ancoradas numa região próxima ao poço por vários anos, durante os quais sofrem solicitações ambientais decorrentes de ondas, ventos e correntes marítimas.

No período de longo prazo que corresponde à vida útil do sistema de produção, esses esforços ambientais caracterizam-se por serem processos aleatórios não estacionários. Assim sendo, a resposta de uma estrutura flutuante também é não estacionária ^[1].

Ao estudar o comportamento das ondas, os oceanógrafos observaram que seria possível descrever este processo não estacionário de longo prazo como sendo um conjunto de processos estacionários de curto prazo, cada qual com uma probabilidade de ocorrência, característicos de cada região do mar. Diz-se que as condições ambientais em curto prazo definem um dado Estado de Mar, para o qual a direção e intensidade das ondas são processos aleatórios estacionários; o mesmo acontecendo com os ventos e as correntes marítimas.

Isto facilitou em muito a criação de modelos matemáticos para previsão do comportamento das estruturas oceânicas, pois permitiu que a resposta de longo prazo fosse obtida a partir de combinação das respostas de curto prazo ^[2], para as quais as solicitações ambientais impostas são estacionárias.

Para prever qual será a resposta extrema no período de vida útil da linha flexível, são feitas simulações, em computador, do seu comportamento isolado para cada estado de mar, obtendo-se assim as estatísticas de curto prazo da resposta. Estas estatísticas de curto prazo são então combinadas, levando em consideração sua probabilidade de ocorrência, para obter a distribuição de probabilidade da resposta extrema de longo prazo.

Havendo incertezas no limite de resistência do riser para um dado modo de falha, pode-se também associar este limite a uma dada distribuição de probabilidade de sorte que, a confiabilidade ^[3] da estrutura é então definida pela probabilidade da resposta extrema não atingir um estado limite durante sua vida útil.

Como podemos observar, o cálculo das estatísticas de *curto prazo* desempenha um papel fundamental no processo da determinação da confiabilidade das estruturas oceânicas. Sendo assim, buscamos estudar quais os métodos que são atualmente empregados para descrever estatisticamente a resposta das linhas flexíveis ^{[4], [5]} às diferentes condições ambientais, oferecendo alguma contribuição nesta área de aplicação da engenharia oceânica, como mais adiante fica salientado.

O período de tempo em que as ondas podem ser tomadas como um fenômeno estacionário é que define o tempo de duração do Estado de Mar. Para águas profundas, as ondas podem ser consideradas como gaussianas, e um espectro de energia descreve suas características de intensidade de energia e direção de atuação. O nível da intensidade é definido por altura significativa e período médio das ondas.

Embora as ondas sejam consideradas gaussianas, a resposta das linhas flexíveis é não gaussiana, pois existem não linearidades envolvidas no cálculo do seu comportamento dinâmico. A fim de considerar essas não linearidades, a integração das equações diferenciais de equilíbrio é feita no domínio do tempo, para o período de curto prazo que caracteriza a duração do Estado de Mar.

O histórico temporal de resposta assim obtido pode ser então utilizado para definir diretamente os parâmetros de alguma função de densidade de probabilidade, que é em geral escolhida entre um conjunto de funções pré-existentes^[6] (Lognormal, Weibull, Gama, etc). A aderência da função aos dados obtidos da simulação deve ser aceitável, o que costuma ser verificado mediante testes de aderência. Este método tradicional, de ajuste de uma curva arbitrária aos dados da simulação, apresenta duas dificuldades: a escolha de uma função e a escassez de dados nas regiões de baixa probabilidade (calda da curva).

Desta forma, o que propomos é um método alternativo para descrever a resposta de curto prazo, baseado na obtenção de sua função característica, que é a transformada de Fourier da função de densidade de probabilidade^[7],^[11].

Isto é feito a partir de uma análise biespectral^[8] do histórico temporal, e de uma aproximação quadrática da resposta, nos moldes do que já se faz para ondas em águas rasas^[9],^[10]. Assim, evita-se ter que escolher uma função arbitrária para a densidade de probabilidade e viabiliza-se a caracterização da resposta em termos das energias de primeira e segunda ordem contidas no processo.

A diferença fundamental, do que já havia sido feito anteriormente para descrever as ondas em águas rasas (que também são um fenómeno não gaussiano), é o fato do biespectro obtido para os risers ser complexo (não real). Assim, o método proposto corresponde a uma aplicação generalizada do anterior, que correspondia a um biespectro real.

1.2 Organização do Texto

No capítulo 2, apresentamos uma descrição geral do cálculo da probabilidade de falha, envolvendo a obtenção do extremo da resposta de longo prazo das linhas flexíveis.

No capítulo 3 discutimos as solicitações ambientais aleatórias de curto prazo a que os dutos flexíveis estão sujeitos, para posteriormente no capítulo 4 caracterizarmos sua resposta não linear estacionária em termos da energia desse processo aleatório.

O capítulo 5 descreve a análise estatística da resposta estacionária, e como obter a distribuição de probabilidade dos máximos da resposta de curto prazo, enquanto no capítulo 6 investigamos a distribuição dos máximos e do valor extremo da resposta de longo prazo.

O capítulo 7 destina-se a demonstrar a metodologia proposta a partir de um exemplo de aplicação; e em seguida, no capítulo 8 apresentamos as conclusões sobre o trabalho, e fazemos as recomendações cabíveis.

No anexo A apresentamos a formulação das equações de equilíbrio dinâmico das linhas flexíveis, que são utilizada nas simulações da resposta de curto prazo.

O anexo B descreve como obter os espectros de energia de primeira e segunda ordem (biespectro) a partir das simulações.

No anexo C, apresentamos a formulação do problema de otimização que resulta da utilização do biespectro na descrição estatística (capítulo 5) do comportamento das linhas flexíveis.

CAPÍTULO 2 RESPOSTA EXTREMA E PROBABILIDADE DE FALHA DE LINHAS FLEXÍVEIS

Os dutos flexíveis são estruturas formadas por camadas de termoplástico e aço, que permitem o transporte de óleo e gás a altas pressões ^[12], apresentando pequena rigidez à flexão, comparado, por exemplo, com os dutos de aço.

Figura 2.1 Sistema de Produção Flutuante de Petróleo Utilizando Dutos Flexível.

Sendo assim, os movimentos da embarcação e os efeitos das ações ambientais de vento, onda e corrente são suportados de forma complacente pelas linhas flexíveis.

Para o propósito desta tese, e a título de simplificação sem excessiva perda de generalidade, dentre as possíveis falhas das linhas flexíveis vamos considerar a ocorrência de uma tração muito elevada no topo da linha. De modo mais geral, contudo, dever-se-ia considerar ainda: a pressão interna, a compressão axial (quando esta não puder ser evitada), a pressão (hidrostática) externa, a flexão (raio de curvatura) e a torção ^[13]. Assim como o efeito do fluxo interno, principalmente nas regiões de maior curvatura ^[14].

2.1 Análise Estrutural Probabilística

Os esforços a que uma estrutura será submetida ao longo do tempo nunca são conhecidos exatamente a priori, e no caso dos movimentos da embarcação ao qual um riser flexível se conecta, estes resultam principalmente da ação das ondas, que são eminentemente aleatórias (tanto em direção quanto em intensidade). A altura das ondas é uma variável aleatória que é função do tempo, sendo portanto um *processo aleatório*.

De modo análogo, as propriedades físicas das estruturas estão sujeitas a incertezas que, embora menores que as dos carregamentos, podem ser caracterizadas de maneira aleatória.

As quantidades aleatórias, tanto do carregamento quanto das propriedades físicas da estrutura, caracterizam-se pelo fato de que apenas uma dada realização (ou amostra) não as define, pois esta realização é apenas uma dentre as muitas possíveis de ocorrer.

Por outro lado, quando a variabilidade das realizações possíveis de uma grandeza é pequena, numa abordagem de engenharia pode-se atribuir a ela um caráter determinístico.

2.2 Estado Limite e Probabilidade de Falha^[15]

Como, após se calcular a resposta da estrutura, deve-se avaliar a adequação do seu comportamento, diz-se que a estrutura atingiu um "estado limite" quando sua resposta (tensão, deslocamento, etc.) excede um valor que é o limite entre as condições de falha e sucesso (não falha)^[16].

Em geral, para cada estado limite, é possível formular uma "desigualdade crítica":

$$R \geq S \quad (2.1)$$

R - resistência da estrutura

S - efeito da solicitação (resposta da estrutura)

Em geral, no contexto desta tese, $S = S(t)$ é um processo aleatório e R é uma variável aleatória que não depende do tempo (figura 2.2).

Figura 2.2 Realizações (Amostras) das Quantidades Aleatórias S e R.

Na análise das linhas flexíveis, vamos considerar a desigualdade crítica na pior condição possível para o efeito da solicitação $\max_T S$ no intervalo de tempo $(0,T)$, onde T é o tempo de vida útil. Assim, define-se a probabilidade de falha P_{falha} (em relação ao estado limite considerado) , como sendo a probabilidade da desigualdade crítica ser violada pelo menos uma vez no intervalo $(0,T)$:

$$\begin{aligned} P_{falha} &= \text{Prob} [S > R \text{ pelo menos uma vez em } (0,T)] = \\ &= \text{Prob} [\max_T S > R] \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde $\max_T S$ é uma variável aleatória definindo a resposta extrema do processo aleatório $S(t)$ no intervalo $(0,T)$.

A probabilidade de sucesso, ou "confiabilidade", é igual a :

$$P_{suc} = 1 - P_{falha}$$

A formula (2.2) pode ser extendida, por exemplo, para o caso mais geral em que $R = R(t)$, ou seja, a resistência estrutural varia no tempo, podendo esta variação ser independente ou dependente do histórico do carregamento $S(t)$, fenômenos conhecidos por "envelhecimento" no primeiro caso e "fadiga" no segundo.

2.3 Funções de Densidade de Probabilidade da Resposta da Estrutura e de sua Resistência

Definem-se as "funções de densidade de probabilidade" de S e R , $p_S(s)$ e $p_R(r)$, respectivamente por :

$$p_S(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \{ \text{Prob} [s \leq S < s + \Delta s] / \Delta s \} \quad (2.3)$$

$$p_R(r) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \{ \text{Prob} [r \leq R < r + \Delta r] / \Delta r \}$$

conforme mostrado na figura 2.3, para uma variável aleatória X genérica.

Figura 2.3 Função de Densidade de Probabilidade da Variável Aleatória X .

Se S e R são probabilisticamente independentes, a "função de densidade de probabilidade conjunta" de S e R , $p_{S,R}(s,r)$ é dada por:

$$\begin{aligned} p_{S,R}(s,r) &= \lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta r \rightarrow 0}} \{ \text{Prob} [(s \leq S < s + \Delta s) \cap (r \leq R < r + \Delta r)] / \Delta s \Delta r \} = \\ &= p_S(s) \cdot p_R(r) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Assim, a probabilidade de falha é dada pela integral; representada na figura 2.4 pelo volume hachurado:

$$P_{falha} = \iint_{S>R} p_{S,R}(s,r) ds dr = \int_0^{\infty} \int_0^s p_S(s) \cdot p_R(r) dr ds \quad (2.5)$$

Figura 2.4 Cálculo da Probabilidade de Falha P_{falha} a partir de $p_{S,R}(s,r)$.

Observamos, portanto, que, para obter a probabilidade de falha P_{falha} de uma estrutura, é necessário conhecer as funções de densidade de probabilidade do efeito da solicitação $p_S(s)$, e também da resistência da estrutura $p_R(r)$.

No capítulo seguinte, discutimos as solicitações ambientais aleatórias às quais as linhas flexíveis estão sujeitas. O método proposto nesta tese, que utiliza a análise biespectral da resposta das linhas flexíveis aos esforços ambientais, busca obter a função de densidade de probabilidade da resposta extrema, $p_S(s)$, a fim de calcular sua probabilidade de falha.

CAPÍTULO 3 SOLICITAÇÕES AMBIENTAIS ALEATÓRIAS

As linhas flexíveis estão sujeitas às solicitações impostas pelos movimentos da embarcação, assim como pela ação direta das ondas e correntes marítimas ^[17].

O efeito das ondas e correntes diretamente sobre as linhas flexíveis são os esforços decorrentes do escoamento gerado no meio fluido envolvente. Para cada condição ambiental estacionária, as correntes são modeladas, em geral, por um perfil de velocidades com uma dada direção, enquanto o escoamento devido às ondas deve considerar a superposição de ondas regulares que compõem o seu espectro de energia.

3.1 Os Movimentos da Embarcação

O efeito das correntes marítimas e das solicitações de vento sobre a embarcação são geralmente considerados constantes durante o tempo de duração de um dado estado de mar (curto prazo), muito embora os efeitos de vento aleatório também mereçam ser investigados quanto à sua importância no comportamento dinâmico das embarcações.

Os movimentos da embarcação em resposta às solicitações ambientais, são calculados a partir de funções de transferências de deslocamento de primeira e segunda ordem ^{[11], [35]}, sendo possível, para águas profundas, considerar as ondas como gaussianas.

As ondas irregulares aleatórias e estacionárias, quantificadas por seu espectro de energia, correspondem à superposição de ondas regulares incidindo na embarcação ancorada, provocando esforços com componentes na mesma frequência das ondas (primeira ordem), e também esforços de *baixa frequência* (segunda ordem). Devido à pequena rigidez do sistema ancorado no plano horizontal, é importante verificar se não ocorrem ressonâncias da excitação de segunda ordem

das ondas com as baixas frequências naturais do sistema de ancoragem ^[39].

Os grandes deslocamentos que podem resultar destas ressonâncias induzem grandes tensões nas linhas flexíveis, devendo-se portanto investigar não só os movimentos de primeira ordem da embarcação, como também os de segunda ordem.

3.2 Forças de Excitação de Segunda Ordem

As forças de excitação de segunda ordem das ondas dividem-se em: deriva média e deriva variável.

A força de deriva média sobre a embarcação é calculada a partir do espectro de energia das ondas, e sendo proporcional ao quadrado da amplitude de suas elevações, caracteriza um efeito não linear na excitação.

A força de deriva variável é representada por um espectro de baixa frequência, onde as frequências correspondem a diferenças entre as frequências de cada par de ondas que compõem a onda irregular.

Tais forças, de deriva média e variável, juntamente com as forças médias de vento e corrente, são calculadas para cada condição ambiental, resultando em movimentos da embarcação que, por sua vez, induzem esforços sobre as linhas flexíveis.

CAPÍTULO 4 A ENERGIA DA RESPOSTA

Os deslocamentos totais da embarcação, que correspondem à soma dos movimentos de primeira e segunda ordem [34], [35], vão apresentar energia em uma faixa de frequências que podem ser identificadas diretamente do cruzamento do espectro de energia das ondas com as funções de transferência de deslocamento. Assim, se as ondas têm energia significativa apenas em uma dada faixa de frequências, sabemos que as frequências do espectro de energia dos deslocamentos da embarcação devem ser menores ou iguais à máxima frequência do espectro das ondas.

Por outro lado, a resposta das linhas flexíveis apresenta energia tanto nas frequências das ondas e nas baixas frequências, como também em altas frequências, correspondentes à soma de pares de frequências do espectro das próprias ondas. Isto resulta do modelo de regressão quadrática que descrever o comportamento das linhas flexíveis (anexo B), e que considera a existência de energia na soma e na diferença das frequências da excitação. Sendo assim, a maior frequência da resposta não deverá ser superior ao dobro da máxima frequência das ondas, conforme ilustrado na figura 4.1.

Figura 4.1 Faixas de Frequência da Energia da Resposta

4.1 Os Históricos Temporais e os Picos da Resposta

Ao se fazer simulações em computador do comportamento das linhas flexíveis, obtemos históricos no domínio do tempo (figura 4.2), que apresentam valores da resposta $y(t)$ em intervalos discretos de tempo, que são múltiplos do incremento de tempo h utilizado na integração das equações diferenciais de equilíbrio dinâmico das linhas (anexo A).

Figura 4.2 Histórico Temporal da Resposta

Numa abordagem clássica, para caracterizar o comportamento aleatório dos picos da resposta, utilizamos apenas os valores dos máximos do histórico temporal, a fim de calcular estimativas para os parâmetros de alguma curva (Rayleigh, Weibull, Gama, etc) escolhida para representar a sua função de densidade de probabilidade.

Como nos históricos existe escassez de picos grandes, a função de densidade de probabilidade se ajusta bem aos valores dos picos que aparecem no histograma, ou seja, para picos menores. Isto não é conveniente, pois estamos interessados em descrever estaticamente o valor extremo dos picos da resposta.

Assim, em abordagem mais recente ^[4], tem-se utilizado técnicas de ajuste à calda da curva ("tail-fitting techniques"), nas quais se divide o histórico temporal em alguns trechos, e identifica-se os extremos de cada trecho, ajustando uma curva (Gumbel tipo I) à distribuição do extremo da *resposta estacionária*. Posteriormente, defini-se os parâmetros da curva de picos, a partir da curva do extremo estacionário.

Nesta nova abordagem, utilizam-se ainda menos valores do histórico temporal da resposta: apenas os extremos de alguns trechos. Como são necessários muitos picos para obter significância estatística para as estimativas dos parâmetros da função de densidade de probabilidade, os tempos de simulação devem ser consideravelmente grandes. Para tempos de simulação muito grandes, devido aos erros acumulados na integração numérica, pode haver instabilidade da solução, ou até mesmo valores imprecisos da resposta.

Por outro lado, observando os históricos temporais da resposta como um todo (e não apenas em alguns instantes de tempo), muitas vezes, podemos notar de imediato o seu caráter não gaussiano. Podemos identificar, por exemplo, uma falta de simetria em relação ao valor médio da resposta. Para o caso de ondas em águas rasas, notamos a existência de picos mais agudos e vales mais arredondados^[10]. Desta forma, se partirmos de uma abordagem que considera a energia do processo aleatório, através de uma análise biespectral, podemos caracterizar o comportamento estatístico dos picos, mesmo que não existam picos de grande valor nos históricos temporais, pois a sua potencialidade de ocorrência fica definida pelas energias de primeira e segunda ordem contidas na resposta (anexo B).

A energia de segunda ordem (biespectro) está associada totalmente à parcela não gaussiana da resposta, enquanto a energia de primeira ordem advém de ambas as parcelas da resposta: a gaussiana e a não gaussiana. Assim, a análise biespectral permite que se determine a função de densidade de probabilidade da resposta das linhas flexíveis, usando todos os dados disponíveis nos históricos temporais. Com algumas hipóteses adicionais, pode-se então, definir a função de densidade de probabilidade dos picos da resposta como será visto no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 5 ANÁLISE ESTATÍSTICA DA RESPOSTA

Os históricos temporais obtidos pela utilização das equações diferenciais de equilíbrio das linhas flexíveis (anexo A), para cada estado de mar, correspondem a possíveis realizações do processo aleatório estacionário da resposta dinâmica do riser, onde as solicitações ambientais são também realizações geradas para o período de tempo de duração de uma dada condição ambiental.

5.1 Transformadas de Fourier das Séries Temporais

Para um período T de curto prazo, sejam as séries temporais x_n e y_n , correspondentes, respectivamente, ao perfil das ondas e às tensões máximas da linha flexível, definidas em forma discreta por:

$$x_n = x(t_n) \quad , \quad y_n = y(t_n)$$

$$t_n = n h \quad , \quad h = T / N \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots, N$$

As transformadas de Fourier X_m e Y_m são dadas por [27] :

$$X_m = 1/N \sum_{n=1}^N x_n e^{-i \omega_m t_n} \quad , \quad Y_m = 1/N \sum_{n=1}^N y_n e^{-i \omega_m t_n}$$

$$\omega_m = m \omega_1 = m 2\pi / T \quad , \quad |m| = 0, 1, \dots, 2M$$

Sendo ω_M a maior frequência das ondas, então a maior frequência da resposta das linhas flexíveis, num modelo de regressão quadrática, fica sendo ω_{2M} .

Assim, as correspondentes transformadas inversas de Fourier podem ser escritas:

$$x_n = \sum_{m=-M}^M X_m e^{i \omega_m t_n} \quad (5.1a) \quad , \quad y_n = \sum_{m=-2M}^{2M} Y_m e^{i \omega_m t_n} \quad (5.1b)$$

Ao escolher o valor do incremento de tempo h , deve-se notar que a máxima frequência (frequência de corte) que é representada pela série temporal é dada por:

$$\omega_{\text{corte}} = 2\pi / T_{\text{min}} = 2\pi / (2h) = \pi / h$$

Esta frequência deve ser maior ou igual a máxima frequência contida na resposta. Assim, fazendo ω_{2M} igual a frequência de corte ω_{corte} , temos que:

$$\omega_{2M} = \omega_{\text{corte}} \Rightarrow (2M) 2\pi / T = \pi / h \Rightarrow (2M) 2\pi / (N h) = \pi / h$$

$$\Rightarrow 2M = N / 2$$

Devemos notar ainda que :

$$X_m = 0 \quad \text{para} \quad |m| > M$$

5.2 Espectros de Energia de Primeira e Segunda Ordem (Biespectro)

Os espectros discretos de energia de primeira e segunda ordem, P e B , respectivamente, podem ser calculados por (anexo B):

$$\begin{aligned} P_{X_m} &= E[X_m X_m^*] = E[|X_m|^2] \quad , \quad B_{X_{k,l}} = E[X_k X_l X_{k+l}^*] \\ P_{Y_m} &= E[Y_m Y_m^*] = E[|Y_m|^2] \quad , \quad B_{Y_{k,l}} = E[Y_k Y_l Y_{k+l}^*] \\ 1 \leq |k|, |l|, |k+l| &\leq 2M \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde, os limites dos índices, indicando as frequências, resultam da frequência de corte $\omega_{\text{corte}} = \omega_{2M}$.

Genericamente para X_m e Y_m , as propriedades de simetria dos espectros de energia são:

$$\begin{aligned} P_m &= P_{-m} \\ B_{k,l} &= B_{l,k} = B_{-l,-k}^* = B_{-k,-l}^* = B_{-l,k+l}^* \\ B_{k,-l} &= B_{-l,k} = B_{l,-k}^* = B_{-k,l}^* = B_{l,k-l}^* \end{aligned} \quad (5.3)$$

Para obter estas simetrias, devemos usar $X_{-m} = X_m^*$ e $Y_{-m} = Y_m^*$ nas expressões (5.2).

Como as ondas correspondem a um processo gaussiano, então $B_X \equiv 0$, uma vez que todos os espectros de energia de ordem igual ou superior a segunda se anulam quando a série temporal corresponde a um processo gaussiano^[28].

A resposta da linha flexível às excitações ambientais é não linear e, portanto, não gaussiana, resultando num biespectro não identicamente nulo. Desta forma, utilizaremos B_Y para medir o quanto a resposta se afasta de um processo linear e gaussiano.

5.3 Regressão Quadrática da Resposta no Domínio da Frequência

Seja Y_m definida a partir de suas componentes linear (gaussiana) Y_{L_m} e não linear (não gaussiana) Y_{NL_m} , assim:

$$Y_m = Y_{L_m} + Y_{NL_m} \quad (5.4)$$

O termo linear Y_{L_m} é diferente de zero apenas para as frequências iguais as das ondas, logo :

$$Y_{L_m} = 0 \quad \text{para } |m| > M$$

A parcela não linear corresponde às interações que ocorrem na soma e na diferença das frequências das ondas, que são as mesmas frequências contidas na resposta linear, e pode ser expressa pela seguinte regressão quadrática (anexo B) :

$$Y_{NL_m} = \sum_{k+l=m} A_{L_{k,l}} Y_{L_k} Y_{L_l} \quad (5.5)$$
$$1 \leq |k|, |l| \leq M$$

5.4 Descrição da Resposta no Domínio do Tempo

Substituindo (5.4) e (5.5) em (5.1b) obtemos:

$$y_n = \sum_{m=-2M}^{2M} Y_{L_m} e^{i\omega_m t_n} + \sum_{m=-2M}^{2M} \sum_{k+l=m} A_{L_{k,l}} Y_{L_k} Y_{L_l} e^{i\omega_m t_n} \quad (5.6)$$

Na expressão (5.6) podemos identificar, para a resposta no domínio do tempo, um termo que corresponde à parcela linear, e outro à não linear:

$$y_n = y_{L_n} + y_{NL_n} \quad (5.7)$$

onde,

$$y_{L_n} = \sum_{m=-2M}^{2M} Y_{L_m} e^{i\omega_m t_n} \quad (5.8)$$

$$y_{NL_n} = \sum_{m=-2M}^{2M} \sum_{k+l=m} A_{L_{k,l}} Y_{L_k} Y_{L_l} e^{i\omega_m t_n} \quad (5.9)$$

5.5 Utilização dos Espectros de Energia no Cálculo dos Coeficientes da Regressão Quadrática

Ainda não conhecemos nem a resposta linear Y_{L_m} e nem os coeficientes $AL_{k,l}$ da resposta não linear. Assim, usando os espectros de energia ^[10], substituímos as expressões (5.4) e (5.5) nas expressões (5.2), donde resulta que:

$$\begin{aligned}
 P_{Y_m} &= E [Y_m Y_m^*] \\
 &= E [Y_{L_m} Y_{L_m}^*] + E [Y_{NL_m} Y_{NL_m}^*] \quad (5.10) \\
 &= E [|Y_{L_m}|^2] + \sum_{k+l=m} 2 |AL_{k,l}|^2 E [|Y_{L_k} Y_{L_l}|^2] \\
 &= P_{Y_{L_m}} + P_{Y_{NL_m}} \\
 &= (\text{Energia Linear}) + (\text{Energia Não Linear})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{Y_{k,l}}^* &= E [Y_k^* Y_l^* Y_{k+l}] \\
 &= E [Y_{L_{k+l}} Y_{L_k}^* Y_{NL_l}^*] + \\
 &\quad E [Y_{L_{k+l}} Y_{NL_k}^* Y_{L_l}^*] + \quad (5.11) \\
 &\quad E [Y_{NL_{k+l}} Y_{L_k}^* Y_{L_l}^*] + E [Y_{NL_{k+l}} Y_{NL_k}^* Y_{NL_l}^*] \\
 &= 2 AL_{k,l} (E [|Y_{L_k} Y_{L_{k+l}}|^2] + E [|Y_{L_l} Y_{L_{k+l}}|^2] + E [|Y_{L_k} Y_{L_l}|^2]) + \\
 &\quad E [Y_{NL_k}^* Y_{NL_l}^* Y_{NL_{k+l}}]
 \end{aligned}$$

Para obter as expressões (5.10) e (5.11) usamos que os coeficientes $AL_{k,l}$ possuem as mesmas propriedades de simetria do biespectro ^[8], dadas em (5.3).

Após alguma álgebra, obtém-se o conjugado da média do produto das parcelas não lineares na expressão (5.11), como sendo:

$$D_{k,l} = E [Y_{NL_k} Y_{NL_l} Y_{NL_{k+l}}^*]$$

$$= \sum_{\substack{i+j=k+l \\ 1 \leq |i|, |j|, |k+l| \leq M}} 4 A_{l,i,j}^* (A_{l,i,k+l} A_{j,i-k} + A_{l,i,-k} A_{j,i+k}) E [| Y_L Y_L Y_L |^2]$$

Na análise estatística das linhas flexíveis, ao contrário do que já havia sido feito anteriormente na aplicação da análise biespectral para descrever as ondas em águas rasas ^[10], o termo $D_{k,l}$ não pode ser considerado nulo. Tomando-se a resposta, já subtraída do seu valor médio, isto equivale a dizer que :

$$E [\{ y(t) \}^3] = E [\{ y_L(t) + y_{NL}(t) \}^3]$$

$$= E [\{ y_L(t) \}^3] + 2 E [y_L(t) \{ y_{NL}(t) \}^2]$$

onde, a segunda parcela não pode ser desprezada face a primeira.

Essa segunda parcela é dada por :

$$2 E [y_L(t) \{ y_{NL}(t) \}^2] = \sum_{1 \leq |k|, |l|, |k+l| \leq 2M} D_{k,l}$$

sendo a soma total igual a:

$$E [\{ y(t) \}^3] = \sum_{1 \leq |k|, |l|, |k+l| \leq 2M} B_{k,l}$$

Nas expressões (5.10) e (5.11), devemos notarmos ainda que:

$$E[|Y_{L_i} Y_{L_j} Y_{L_{k-i}}|^2] = \begin{cases} E[|Y_{L_j}|^2] E[|Y_{L_i} Y_{L_{k-i}}|^2]; & |k-i| = |i| \\ E[|Y_{L_i}|^2] E[|Y_{L_j} Y_{L_{k-i}}|^2]; & |k-i| = |j| \\ E[|Y_{L_{k-i}}|^2] E[|Y_{L_i} Y_{L_j}|^2] & \text{; nos outros casos} \end{cases}$$

$$E[|Y_{L_k} Y_{L_i}|^2] = \begin{cases} E[|Y_{L_k}|^2] E[|Y_{L_i}|^2] & ; k \neq i \\ 2 E[|Y_{L_k}|^2] E[|Y_{L_i}|^2] & ; k = i \end{cases}$$

$$E[|Y_{L_m}|^2] = \begin{cases} P_{L_m} & ; 1 \leq |m| \leq M \\ 0 & ; |m| > M \end{cases}$$

As expressões (5.10) e (5.11) correspondem a um conjunto de equações algébricas não lineares onde as incógnitas são as parcelas lineares do espectro de energia de primeira ordem P_{L_m} e os coeficientes da parcela não linear da resposta $A_{L_{k,i}}$. Podemos nos valer, por exemplo, do *método dos mínimos quadrados* (anexo C) para encontrar as incógnitas, resolvendo o sistema de equações usando técnicas numéricas de otimização ^[29].

Os valores dos espectros são estimados ^[8] (anexo B) a partir dos históricos temporais obtidos das simulações. Para verificação destas estimativas, podemos usar as seguintes equações :

$$\bar{y} = E[y(t)]$$

$$\sum_{1 \leq |m| \leq 2M} P_m = E[\{y(t) - \bar{y}\}^2]$$

$$\sum_{1 \leq |k|, |i|, |k+i| \leq 2M} B_{k,i} = E[\{y(t) - \bar{y}\}^3]$$

Em lugar de P_{y_m} e $B_{y_{k,i}}$ escrevemos P_m e $B_{k,i}$, suprimindo o índice y , para simplificar a notação.

5.6 A Resposta como Função de Variáveis Aleatórias Gaussianas Independentes

Tendo obtido o espectro de energia de primeira ordem P_{L_m} , e os coeficientes da parcela não linear da resposta $A_{L_{k,l}}$, voltamos as expressões (5.7) a (5.9), que podem ser reescritas como :

$$y_n = y_{L_n} + y_{NL_n} \quad (5.7)$$

onde,

$$y_{L_n} = \sum_{m=-2M}^{2M} c_m e^{i(\omega_m t_n + \epsilon_m)} \quad (5.12)$$

com

$$c_m = |Y_{L_m}|, \quad \epsilon_m = \arg(Y_{L_m})$$

e ainda

$$y_{NL_n} = \sum_{m=-2M}^{2M} \sum_{k+l=m} A_{L_{k,l}} c_k c_l e^{i[(\omega_k + \omega_l)t_n + (\epsilon_k + \epsilon_l)]} \quad (5.13)$$

Usando as expressões (5.12) e (5.13) em (5.7), obtemos :

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{m=-2M}^{2M} c_m e^{i(\omega_m t + \epsilon_m)} + \sum_{m=-2M}^{2M} \sum_{k+l=m} A_{L_{k,l}} c_k c_l e^{i[(\omega_k + \omega_l)t + (\epsilon_k + \epsilon_l)]} \\ &= \sum_{m=-M}^M c_m e^{i(\omega_m t + \epsilon_m)} + \sum_{\substack{k=-M \\ k \neq 0}}^M \sum_{\substack{l=-M \\ l \neq 0}}^M A_{L_{k,l}} c_k c_l e^{i[(\omega_k + \omega_l)t + (\epsilon_k + \epsilon_l)]} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Alternativamente, fixando um instante de tempo t genérico, podemos ainda escrever que [9]:

$$Y_{L_m} e^{i\omega_m t} = c_m e^{i(\omega_m t + \varepsilon_m)} = s_m (a_m + i b_m) \quad (5.15)$$

onde,

$$2 s_m^2 = P_{L_m}$$

sendo a_m e b_m variáveis aleatórias gaussianas independentes, com média zero e variância unitária. Isto, levado a (5.14), fornece:

$$y(t) = \sum_{m=-M}^M s_m (a_m + i b_m) + \sum_{\substack{k=-M \\ k \neq 0}}^M \sum_{\substack{l=-M \\ l \neq 0}}^M A_{k,l} s_k s_l (a_k + i b_k) (a_l + i b_l) \quad (5.16)$$

Após investigar a equação (5.14), podemos identificar os termos que compõem o valor esperado da resposta, e também os termos da soma e da diferença de frequências, de sorte que, considerada a fórmula de Euler, e verificando que a parcela imaginária em (5.14) se anula, obtemos:

$$\begin{aligned} y(t) = & \bar{y} + \sum_{m=1}^M 2 c_m \cos(\omega_m t + \varepsilon_m) \\ & + \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M 2 q_{k,l} c_k c_l \cos[(\omega_k + \omega_l)t + (\varepsilon_k + \varepsilon_l)] \\ & + \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M 2 r_{k,l} c_k c_l \cos[(\omega_k - \omega_l)t + (\varepsilon_k - \varepsilon_l)] \\ & + \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M 2 f_{k,l} c_k c_l \sin[(\omega_k + \omega_l)t + (\varepsilon_k + \varepsilon_l)] \\ & + \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M 2 g_{k,l} c_k c_l \sin[(\omega_k - \omega_l)t + (\varepsilon_k - \varepsilon_l)] \quad (5.17) \end{aligned}$$

onde, $\bar{y}$ é o valor médio:

$$\bar{y} = c_0 + \sum_{k=1}^M 2 A_{k,-k} c_k^2$$

e os coeficientes q, r, f, g são:

$$q_{k,l} = \text{Re} [A_{k,l}]$$

$$r_{k,l} = \text{Re} [A_{k,-l}] \quad , \quad r_{k,k} = 0$$

$$f_{k,l} = -\text{Im} [A_{k,l}]$$

$$g_{k,l} = -\text{Im} [A_{k,-l}] \quad , \quad k, l = 1, 2, \dots, M$$

A expressão (5.17) é equivalente à usada para descrever o comportamento de ondas não lineares em águas rasas ^[10], na qual os coeficientes $f_{k,l}$ e $g_{k,l}$ são nulos, ou seja, $A_{k,l}$ e o biespectro B_Y são reais.

Devemos notar que devido às propriedades de simetria de $A_{k,l}$, os coeficientes q, r, f, g satisfazem as seguintes identidades:

$$q_{k,l} = q_{l,k} \quad (\text{simetria})$$

$$r_{k,l} = r_{l,k} \quad (\text{simetria})$$

$$f_{k,l} = f_{l,k} \quad (\text{simetria})$$

$$g_{k,l} = -g_{l,k} \quad (\text{anti-simetria})$$

5.7 A Função Característica da Resposta como Solução de um Problema de Autovalores e Autovetores

Agora vamos estudar a natureza estatística de $y(t)$, começando por reescrever a equação (5.16) como se segue:

$$y(t) = \bar{y} + \underline{s}^T \underline{U} + \underline{U}^T \underline{H} \underline{U} \quad (5.18)$$

onde,

$$\underline{U} = \{ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_M \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_M \}^T_{2M \times 1}$$

$$\underline{s} = \{ 2s_1 \ 2s_2 \ \dots \ 2s_M \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \}^T_{2M \times 1}$$

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \underline{r} + \underline{q} & \underline{f} - \underline{g} \\ \underline{f} + \underline{g} & \underline{r} - \underline{q} \end{bmatrix}_{2M \times 2M}$$

com

$$\underline{r} = [2 s_k \ s_l \ r_{k,l}]_{M \times M}, \quad 1 \leq k, l \leq M$$

$$\underline{q} = [2 s_k \ s_l \ q_{k,l}]_{M \times M}$$

$$\underline{f} = [2 s_k \ s_l \ f_{k,l}]_{M \times M}$$

$$\underline{g} = [2 s_k \ s_l \ g_{k,l}]_{M \times M}$$

A expressão (5.18), assim obtida, é uma generalização da expressão usada na análise estatística de ondas não gaussianas^{[9], [10]}, caso em que $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são matrizes nulas.

Devemos notar ainda que a matriz $\underline{H}$ é simétrica, e portanto podemos usar seus autovalores e autovetores para diagonalizá-la.

Seja $\underline{\Lambda}$ uma matriz diagonal contendo os autovalores de $\underline{H}$, e $\underline{W}$ uma matriz cujas colunas são os autovetores ortonormalizados:

$$\underline{W}^T \underline{W} = \underline{W} \underline{W}^T = \underline{I}$$

Assim, podemos escrever que:

$$\underline{H} = \underline{W} \underline{\Lambda} \underline{W}^T \quad (5.19)$$

Usando (5.19) em (5.18), temos:

$$\begin{aligned} y(t) &= \bar{y} + \underline{S}^T \underline{I} \underline{U} + \underline{U}^T \underline{H} \underline{U} \\ &= \bar{y} + \underline{S}^T \underline{W} \underline{W}^T \underline{U} + \underline{U}^T \underline{W} \underline{\Lambda} \underline{W}^T \underline{U} \\ &= \bar{y} + \underline{\Omega}^T \underline{Z} + \underline{Z}^T \underline{\Lambda} \underline{Z} \end{aligned} \quad (5.20)$$

sendo,

$$\begin{aligned} \underline{\Omega} &= \underline{W}^T \underline{S} = \{ \Omega_j \}_{2M \times 1} \\ \underline{Z} &= \underline{W}^T \underline{U} = \{ Z_j \}_{2M \times 1} \end{aligned} \quad (5.21)$$

As variáveis Z_j são uma combinação linear de variáveis aleatórias gaussianas, e portanto também são variáveis aleatórias gaussianas.

Como a matriz $\underline{\Lambda}$ é diagonal, podemos reescrever a expressão (5.20) da seguinte forma:

$$y(t) = \bar{y} + \sum_{\substack{j=-M \\ j \neq 0}}^M (\Omega_j Z_j + \Lambda_j Z_j^2) = \bar{y} + \sum_{|j|=1}^M \zeta_j \quad (5.22)$$

onde,

$$\begin{aligned}\zeta_j &= \Omega_j Z_j + \Lambda_j Z_j^2 \\ &= \beta_j u_j + \lambda_j u_j^2 + \alpha_j v_j - \lambda_j v_j^2 - 2\gamma_j u_j v_j\end{aligned}\quad (5.23)$$

com

$$u_j = \operatorname{Re}\{Z_j\} \quad , \quad v_j = \operatorname{Im}\{Z_j\}$$

$$\beta_j = \operatorname{Re}\{\Omega_j\} \quad , \quad \alpha_j = \operatorname{Im}\{\Omega_j\}$$

$$\lambda_j = \operatorname{Re}\{\Lambda_j\} \quad , \quad \gamma_j = \operatorname{Im}\{\Lambda_j\}$$

A função característica ^[18] da variável aleatória ζ_j é dada por:

$$M_j(\theta) = E[e^{i\theta\zeta_j}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta\zeta_j} p_{\zeta_j}(\zeta_j) d\zeta_j$$

A variável ζ_j é função das variáveis aleatórias u_j e v_j que são as partes real e imaginária de Z_j , portanto:

$$M_j(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta\zeta_j(u_j, v_j)} p_{u_j, v_j}(u_j, v_j) du_j dv_j \quad (5.24)$$

As variáveis aleatórias Z_j são gaussianas, unitárias e independentes, pois :

$$\underline{\mu}_Z = E[\underline{Z}] = E[\underline{W}^T \underline{U}] = \underline{W}^T E[\underline{U}] = \underline{W}^T \underline{\mu}_U = \underline{0}$$

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}_Z^2 &= E[\underline{Z} \underline{Z}^T] = E[\underline{W}^T \underline{U} \underline{U}^T \underline{W}] = \underline{W}^T E[\underline{U} \underline{U}^T] \underline{W} = \\ &= \underline{W}^T \underline{\sigma}_U^2 \underline{W} = \underline{W}^T \underline{W} \underline{\sigma}_U^2 = \underline{\sigma}_U^2 = \underline{I}\end{aligned}$$

onde, $\underline{\mu}$ é o vetor das médias e $\underline{\sigma}^2$ é a matriz das covariâncias dos vetores de variáveis aleatórias $\underline{Z}$ e $\underline{U}$.

Assim, para u_j e v_j gaussianas, unitárias e independentes, teríamos que:

$$p_{u_j, v_j}(u_j, v_j) = p_{u_j}(u_j) p_{v_j}(v_j) = 1 / 2\pi e^{-(u_j^2 + v_j^2)/2} \quad (5.25)$$

Substituindo (5.25) e (5.23) em (5.24), e integrando, obtemos:

$$M_j(\theta) = (1 + \xi_j^2 \theta^2)^{-1/2} e^{-\theta^2 (\rho_j + i \tau_j \theta) / (1 + \xi_j^2 \theta^2)} \quad (5.26)$$

onde,

$$\xi_j = 2(\lambda_j^2 + \gamma_j^2)^{1/2}$$

$$\rho_j = (\alpha_j^2 + \beta_j^2) / 2$$

$$\tau_j = (\beta_j^2 - \alpha_j^2) \lambda_j + 2 \alpha_j \beta_j \gamma_j$$

Mas como a matriz $\underline{H}$ é simétrica e real, possuindo autovalores e autovetores reais, então Z_j é real, ou seja, temos que $\mu_{v_j} = \sigma^2_{v_j} = 0$. Assim, a expressão (5.25) deve ser substituída por:

$$p_{u_j, v_j}(u_j, v_j) = p_{u_j}(u_j) p_{v_j}(v_j) = 1 / (2\pi)^{1/2} e^{-u_j^2/2} \delta(v_j) \quad (5.27)$$

onde, $\delta(v_j)$ é a função delta de Dirac [7].

Substituindo agora (5.27) e (5.23) em (5.24), e usando que $v_j = \alpha_j = \gamma_j = 0$, integramos novamente para obter:

$$M_j(\theta) = (1 - 2i \lambda_j \theta)^{-1/2} e^{-\theta^2 \beta_j^2 / 2 (1 - 2i \lambda_j \theta)} \quad (5.28)$$

Como as variáveis ζ_j são independentes, a partir das expressões (5.22) e (5.28), obtemos a função característica da resposta $y(t)$ como sendo:

$$M(\theta) = e^{i \bar{y} \theta} \prod_{|j|=1}^M M_j(\theta) \quad (5.29)$$

Finalmente, a função de densidade de probabilidade de $y(t)$ é dada por:

$$p(y) = 1 / 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} M(\theta) e^{-i\theta y} d\theta \quad (5.30)$$

Notamos que as expressões (5.28), (5.29) e (5.30) são formalmente idênticas as já usadas para ondas em águas rasas [9],[10]. No entanto, os autovalores e autovetores utilizados nestas expressões são diferentes, e correspondem ao caso mais geral em que o biespectro é complexo.

5.8 Séries para Função de Densidade de Probabilidade da Resposta

A integral (5.30) para $p(y)$ não pode ser feita analiticamente, no entanto existem algoritmos numérico de FFT ("Fast Fourier Transform") que podem ser usados ^[30]. Uma alternativa é escrever $p(y)$ através de séries ^[11], como por exemplo:

$$p(y) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{m_r}{r!} y^r$$

onde,

$$m_r = 1 / 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} (i\theta)^r M(\theta) d\theta \quad (5.31)$$

Esta série, assim como muitas outras, quando truncada pode apresentar valores negativos para alguns valores de y . Outra forma, é utilizar séries para o logaritmo de $p(y)$:

$$\text{Ln}[p(y)] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{k_r}{r!} y^r \quad (5.32)$$

ou seja,

$$p(y) = \text{Exp} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{k_r}{r!} y^r \right] \quad (5.33)$$

As relações entre os k_r e os m_r têm a mesma *estrutura matemática* que as relações entre os momentos e os cumulantes estatísticos:

$$k_r = i^{-r} \frac{d^r}{d\theta^r} \left\{ \text{Ln} \left[1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^s m_s}{s!} \right] \right\}_{\theta=0} \quad (5.34)$$

Assim, podemos obter os k_r a partir dos m_r , por exemplo :

$$k_0 = \text{Ln} (m_0)$$

$$k_1 = m_1 / m_0$$

$$k_2 = m_2 / m_0 - (m_1 / m_0)^2$$

$$k_3 = m_3 / m_0 - 3 (m_1 / m_0) (m_2 / m_0) + 2 (m_1 / m_0)^3$$

$$k_4 = m_4 / m_0 - 3 (m_2 / m_0)^2 - 4 (m_3 / m_0) (m_1 / m_0) \\ + 12 (m_2 / m_0) (m_1 / m_0)^2 - 6 (m_1 / m_0)^4$$

Para um *processo gaussiano*, somente os coeficientes k_0 , k_1 e k_2 são diferentes de zero.

Resta colocar a ressalva de que o cálculo dos momentos da função característica (5.31), envolve integrações numéricas que resultam menos eficientes do que a aplicação direta de algoritmos numérico de FFT à expressão (5.30).

5.9 Função de Densidade de Probabilidade dos Picos das Resposta

Até aqui, investigamos um método para obter a função de densidade de probabilidade de curto prazo da resposta $p_j(y)$ para cada condição ambiental j ($j = 1, \dots, n^o$ de condições ambientais) usando a análise biespectral. Para calcular a densidade de probabilidade dos *máximos* da resposta $p_j^M(y)$, no entanto, precisamos da distribuição conjunta de probabilidade de y e de suas duas primeira derivadas temporais, $p_j(y, \dot{y}, \ddot{y})$.

A função de distribuição de probabilidade de picos (acima da média) da resposta $P_j^M(y)$ pode ser expressa por ^[7] :

$$P_j^M(y) = 1 - \frac{E[M(y)]}{E[M(\bar{y})]}$$

onde,

$$\begin{aligned} E[M(y)] &= \text{valor esperado do número de picos acima de } y \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \ddot{y} p_j(y, 0, \ddot{y}) d\ddot{y} dy \end{aligned}$$

Derivando $P_j^M(y)$ obtemos a função de densidade de probabilidade dos picos:

$$p_j^M(y) = \frac{\partial}{\partial y} P_j^M(y) = \frac{- \int_{-\infty}^0 \ddot{y} p_j(y, 0, \ddot{y}) d\ddot{y}}{E[M(\bar{y})]}$$

Ao invés de buscamos obter $p_j(y, \dot{y}, \ddot{y})$, podemos fazer uma aproximação, usando apenas $p_j(y, \dot{y})$:

$$p_j^M(y) \cong \frac{-\frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} \dot{y} p_j(y, \dot{y}) d\dot{y}}{\int_0^{\infty} \dot{y} p_j(\bar{y}, \dot{y}) d\dot{y}} \quad (5.35)$$

A expressão (5.35) é obtida aproximando $E[M(y)]$ por:

$$E[M(y)] \cong E[N_+(y)] = \int_0^{\infty} \dot{y} p_j(y, \dot{y}) d\dot{y}$$

onde,

$E[N_+(y)]$ = valor esperado do número de cruzamentos positivos do valor y

A expressão (5.35) pode ser usada para aproximar picos grandes, mesmo que o processo aleatório não seja de banda estreita, pois acima de um valor suficientemente grande de y , devem existir poucos vales. O uso desta aproximação vai a favor da segurança, visto que $E[M(\bar{y})] > E[N_+(\bar{y})]$, e a probabilidade de ocorrência dos picos maiores é superestimada pelo uso de (5.35).

Sabemos ainda que em um processo estacionário y e $\dot{y}$ são não correlacionados, isto é:

$$E[y \dot{y}] = 0 \quad (5.36)$$

Mas não podemos afirmar *a priori* que estas variáveis sejam independentes.

Expandindo em série de Maclaurin o logaritmo da função característica conjunta de y e $\dot{y}$, teremos :

$$\begin{aligned} \text{Ln } M_{Y\dot{Y}}(\theta_Y, \theta_{\dot{Y}}) \cong & (i \theta_Y) \kappa_1(y) + (i \theta_{\dot{Y}}) \kappa_1(\dot{y}) + \\ & \frac{1}{2!} (i \theta_Y)^2 \kappa_2(y^2) + \frac{1}{2!} (i \theta_Y)(i \theta_{\dot{Y}}) \kappa_2(y \dot{y}) + \frac{1}{2!} (i \theta_{\dot{Y}})^2 \kappa_2(\dot{y}^2) \\ & + \dots \end{aligned} \quad (5.37)$$

onde, os *cumulantes conjuntos* são dados por:

$$\begin{aligned} \kappa_1(y) &= E[y] = \mu_Y, & \kappa_1(\dot{y}) &= E[\dot{y}] = \mu_{\dot{Y}} = 0 \\ \kappa_2(y^2) &= E[(y - \mu_Y)^2] = \sigma_Y^2, & \kappa_2(\dot{y}^2) &= E[(\dot{y} - \mu_{\dot{Y}})^2] = \sigma_{\dot{Y}}^2 \\ \kappa_2(y \dot{y}) &= E[(y - \mu_Y)(\dot{y} - \mu_{\dot{Y}})] = E[y \dot{y}] = 0 \end{aligned}$$

Assim, desprezando os termos de ordem superior :

$$\text{Ln } M_{Y\dot{Y}}(\theta_Y, \theta_{\dot{Y}}) \cong \text{Ln } M_Y(\theta_Y) + \text{Ln } M_{\dot{Y}}(\theta_{\dot{Y}})$$

ou seja,

$$M_{Y\dot{Y}}(\theta_Y, \theta_{\dot{Y}}) \cong M_Y(\theta_Y) M_{\dot{Y}}(\theta_{\dot{Y}}) \quad (5.38)$$

A função de densidade de probabilidade conjunta de y e $\dot{y}$ é dada por :

$$p_J(y, \dot{y}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M_{Y\dot{Y}}(\theta_Y, \theta_{\dot{Y}}) e^{-i(\theta_Y y + \theta_{\dot{Y}} \dot{y})} d\theta_Y d\theta_{\dot{Y}} \quad (5.39)$$

Usando (5.38) em (5.39), e integrando, obtemos que :

$$p_J(y, \dot{y}) \cong p_J(y) p_J(\dot{y}) \quad (5.40)$$

Vamos usar (5.40) em (5.35), o que equivale a admitir que y e $\dot{y}$ são independentes. Isto é sempre verdadeiro apenas para *processos gaussianos*, onde os cumulantes conjuntos de ordem superior a dois, da expressão (5.37), são nulos; valendo apenas como uma aproximação nos demais casos:

$$p_j^M(y) \cong \frac{-\frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} \dot{y} p_j(y, \dot{y}) d\dot{y}}{\int_0^{\infty} \dot{y} p_j(\bar{y}, \dot{y}) d\dot{y}} \cong \frac{-\frac{\partial}{\partial y} p_j(y)}{p_j(\bar{y})} \quad (5.41)$$

; $\bar{y} \leq y < \infty$

Em (5.41) fica estabelecido, portanto, o cálculo isolado de picos de curto prazo para cada uma das condições ambientais (ou estados de mar) que comporão a solicitação ponderada de longo prazo.

CAPÍTULO 6 EXTREMO DE LONGO PRAZO

As funções de densidade de probabilidade de picos $p_j^M(y)$, obtidas no capítulo precedente, são válidas somente para o curto período de tempo de no máximo algumas horas, que corresponde à duração de uma condição ambiental [1]. A fim de poder avaliar a confiabilidade das linhas flexíveis são necessárias estatísticas de longo prazo da ordem de 20 a 100 anos.

6.1 Distribuição de Probabilidade de Picos de Longo Prazo

Para obter a função de densidade de probabilidade dos picos da resposta de longo prazo $p_L(y)$, devemos considerar todas as condições ambientais que podem ocorrer durante a vida útil das linhas flexíveis [31],[32], e a probabilidade de ocorrência de cada uma delas. Assim, fazendo a soma ponderada das funções de densidade de probabilidade de picos de curto prazo ("Lifetime Weighted Sea Method") [2], teremos:

$$p_L(y) = \frac{\sum_{j=1}^{n_s} PB_j \cdot v_j \cdot p_j^M(y)}{\sum_{j=1}^{n_s} PB_j \cdot v_j} \quad (6.1)$$

onde,

PB_j = probabilidade de ocorrência da condição ambiental j

v_j = frequência média dos picos da resposta na condição ambiental j

n_s = número de condições ambientais

$p_j^M(y)$ = função de densidade de probabilidade dos picos de curto prazo na condição ambiental j

A probabilidade de ocorrência de cada condição ambiental PB_j é caracterizada pela *frequência relativa* das intensidades dos ventos, ondas e correntes, e do aproamento da embarcação que definem uma dada condição ambiental:

$$PB_j = f_{1j} f_{2j} f_{3j} f_{4j} \quad (6.2)$$

onde

f_{1j} = frequência relativa de ocorrência das ondas da condição ambiental j

f_{2j} = frequência relativa de ocorrência dos ventos da condição ambiental j

f_{3j} = frequência relativa de ocorrência das correntes da condição ambiental j

f_{4j} = frequência relativa de ocorrência do aproamento da embarcação na condição ambiental j

A obtenção da função de densidade de probabilidade de máximos (picos) da resposta de longo prazo $p_L(y)$, pode ser resumida nos seguintes passos:

- (1) Escolher uma condição ambiental caracterizada pelo aproamento e intensidades das ondas, ventos e correntes; associada a uma probabilidade de ocorrência - expressão (6.2)
- (2) Obter as tensões nas linhas flexíveis na configuração de equilíbrio estático, resultante dos esforços médios de vento, corrente e deriva média das ondas.
- (3) Calcular os movimentos da embarcação em torno da posição de equilíbrio estático, e impor estes movimentos como condições de contorno para calcular os esforços dinâmicos nas linhas flexíveis, usando integração direta das equações de equilíbrio no domínio do tempo (anexo A).

(4) Fazer a análise biespectral dos históricos temporais da resposta e obter sua função de densidade de probabilidade $p_j(y)$, e dos picos de curto prazo $p_j^M(y)$ - expressões do capítulo 5.

(5) Repetir os passos anteriores para cada condição ambiental e ponderar as respectivas funções de densidade de probabilidade para obter a distribuição de picos de longo prazo $p_L(y)$ - expressão (6.1).

6.2 Densidade de Probabilidade do Extremo (Estatística de Ordem)

Após termos obtido $p_L(y)$, devemos obter a distribuição de probabilidade do valor extremo da resposta. O valor extremo corresponde ao maior pico observado durante o período de vida útil do riser, e pode ser obtido utilizando-se estatística de ordem ^[6], como veremos em seguida.

Seja S o valor do maior pico observado entre N picos da resposta de longo prazo (não estacionária) y_L . Para uma dada amostra de picos, o valor S é obtido ordenando-se os picos, e tomando-se o maior deles, ou seja o valor extremo:

$$y_L^{(1)} \leq y_L^{(2)} \leq \dots \leq y_L^{(N)} = S$$

A probabilidade de que o maior pico seja menor do que um dado valor s é igual a probabilidade de que todos os picos sejam menores do que este valor, assim podemos escrever:

$$\text{Prob} [S \leq s] = \text{Prob} [(y_L^{(1)} \leq s) \cap (y_L^{(2)} \leq s) \cap \dots (y_L^{(N)} \leq s)]$$

Assumindo que os valores dos picos são independentes, temos:

$$P_s(s) = \text{Prob} [S \leq s] = [P_L(s)]^N = \left[\int_{-\infty}^s p_L(y) dy \right]^N \quad (6.3)$$

Sendo $P_s(s)$ a função de distribuição acumulada de probabilidade do valor extremo S .

A função de densidade de probabilidade do extremo S é obtida como:

$$\begin{aligned}
 p_s(s) &= \frac{d P_s(s)}{d s} = N [P_L(s)]^{N-1} p_L(s) \\
 &= N \left[\int_{-\infty}^s p_L(y) dy \right]^{N-1} p_L(s)
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Devemos notar que $p_s(s)$ depende do número de picos observados N , que pode ser estimado a partir da frequência média de picos de longo prazo ν_L , e do tempo T de vida útil prevista para o riser.

$$N = \nu_L T \tag{6.5}$$

Sendo que ν_L é obtida como uma média ponderada dos ν_j :

$$\nu_L = \sum_{j=1}^{ns} P B_j \nu_j \tag{6.6}$$

A frequência média dos picos ν_j pode ser estimada contando os picos que ocorrem durante o tempo de simulação para cada condição ambiental j.

6.3 Distribuição Assintótica do Extremo

Para N grande, a *distribuição de extremo* (6.4) pode ser aproximada por uma distribuição assintótica do tipo I, também chamada de *distribuição de Gumbel* [4], [6] :

$$P_s(s) = \exp \{ - \exp [- \alpha_N (s - u_N)] \} \quad ; \quad -\infty < s < \infty$$
$$p_s(s) = \frac{d P_s(s)}{d s} = \alpha_N \exp \{ - \alpha_N (s - u_N) - \exp [- \alpha_N (s - u_N)] \}$$
(6.7)

Os parâmetros α_N e u_N podem ser obtidos da *distribuição inicial* de picos de longo prazo:

$$P_L(u_N) = 1 - 1 / N$$
$$\alpha_N = N p_L(u_N)$$
(6.8)

A função de densidade de probabilidade de extremo $p_s(s)$ assim obtida pode então ser usada para avaliar a *probabilidade de falha*, conforme descrito no capítulo 2, e mostrado no exemplo de aplicação do capítulo seguinte.

CAPÍTULO 7 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

O exemplo de aplicação da teoria desenvolvida nos capítulos anteriores consiste da análise de uma linha flexível conectada a uma plataforma semisubmersível localizada em águas profundas na região da Bacia de Campos. A tabela 7.1 mostra as características da linha flexível analisada, sendo a configuração do sistema, semelhante a da figura 2.1 .

Tabela 7.1 Características da Linha Flexível

massa por unidade de comprimento indeformado	100 kg / m
diâmetro interno	200 mm
diâmetro externo	270 mm
tensão de ruptura	3620 kN
rigidez axial	450 MN
rigidez à flexão	20 kN m ²
rigidez à torção	2500 kN m ²
coeficiente de amortecimento	0.22 s / m ²
comprimento da catenária abaixo do flutuador	1414 m
comprimento da catenária acima do flutuador	1414 m
distância horizontal do poço à embarcação	2225 m
lâmina d'água	1707 m
empuxo líquido do flutuador	500 kN
coeficiente de arrasto transversal	0.8
coeficiente de inércia	2.0
densidade da água	1025 kg / m ³

As condições ambientais da região são mostradas na tabela 7.2, onde estão representadas as alturas significativas e períodos médios das ondas, e suas probabilidades de ocorrência. Os ventos e correntes

marítimas foram considerados constantes, e iguais para todas as condições ambientais, assim como o aproamento da embarcação em relação à direção das solicitações ambientais.

Tabela 7.2 Frequência Relativa dos Estados de Mar da Bacia de Campos

MAR j	ALTURA SIGNIFICATIVA H _s (m)	PERÍODO MÉDIO T _z (s)	PROBABILIDADE DE OCORRENCIA PB _j
1	0.75	5.24	0.0229
2	1.25	5.27	0.2561
3	1.75	5.77	0.3852
4	2.25	6.26	0.1962
5	2.75	6.89	0.0880
6	3.25	7.72	0.0328
7	3.75	7.89	0.0100
8	4.25	8.29	0.0068
9	4.75	9.00	0.0020
			Σ = 1.0000

A energia das ondas foi descrita usando o espectro de Pierson-Moskowitz, para mares plenamente desenvolvidos e unidimensionais, nos quais as ondas se propagam em uma única direção :

$$S(\omega) = (C_1 / \omega^5) \text{Exp}(-C_2 / \omega^4) \quad [\text{m}^2 \text{ s}] \quad (7.1)$$

onde

$$C_1 = (0.11 (2\pi)^4) H_s^2 / T_z^4 \quad [\text{m}^2 / \text{s}^4]$$

$$C_2 = (0.44 (2\pi)^4) / T_z^4 \quad [1 / \text{s}^4]$$

sendo H_s - altura significativa [m]
 T_z - período médio [s]

Usando as *funções de transferência* de deslocamento da embarcação, determinamos os *espectros de energia* dos deslocamentos do ponto de contato da linha flexível com a embarcação.

Para gerar as amostras dos *históricos temporais* destes deslocamentos, definimos uma *frequência máxima* das ondas para a qual a quantidade de energia dos espectros de deslocamento ainda era significativa. Esta frequência correspondeu a aproximadamente uma vez e meia a frequência média das ondas.

A faixa de frequências entre zero e a frequência máxima do espectro de ondas foi dividida em $M=10$ partes iguais (capítulo 5), e obteve-se as *amplitudes* de cada componente harmônica da discretização dos espectros de deslocamento nesta mesma faixa de frequências. As *fases* foram geradas aleatoriamente.

A partir dos históricos de deslocamentos impostos à extremidade superior da linha flexível, o cálculo da resposta a estas solicitações, gerou amostras dos históricos da tensão máxima na linha (anexo A).

A partir da análise biespectral dos históricos de tensão, para cada condição ambiental, obteve-se os espectros de primeira e segunda ordem da resposta - ver expressões (5.2). As figuras 7.1 e 7.2 ilustram os espectros de energia de primeira e segunda ordem (biespectro), respectivamente, da resposta das linhas flexíveis.

Ambas as partes, real e imaginária, do biespectro são mostradas na figura 7.2, e observamos que as ordens de grandeza destas duas partes são comparáveis.

Usando as equações (5.10) e (5.11) obtivemos a parcela linear de energia em cada frequência (ver figura 7.1). Verificamos que na mesma faixa de frequências das ondas, a energia é praticamente toda linear, e notamos a existência de energia (não linear) em altas frequências. A solução das equações acima, é feita usando o "método generalizado do gradiente reduzido" ^[36], e fornece os coeficientes das parcelas linear e quadrática da resposta escrita na forma da expressão (5.18).

Figura 7.1 Espectro de Energia de Primeira Ordem da Resposta

Figura 7.2 Espectro de Energia de Segunda Ordem da Resposta

Definimos assim o problema de autovalores e autovetores (5.19), cuja solução permite escrever a resposta como uma soma de variáveis aleatórias gaussianas independentes e seus quadrados (5.22). As técnicas de manipulação de funções de variáveis aleatórias permitem obter a *função característica* da resposta - ver expressões (5.28) e (5.29) - ilustrada na figura 7.3

Figura 7.3 Função Característica da Resposta

A partir das funções características, e usando a expressão (5.30), ou melhor, as técnicas numéricas de FFT que são equivalentes a integração desta expressão, obtivemos as *funções de densidade de probabilidade* para cada condição ambiental (ver figura 7.4), que foram comparadas aos histogramas obtidos dos históricos temporais. A figura 7.4 mostra também a distribuição gaussiana (representada pela linha pontilhada), cujos parâmetros (média e variância) foram estimados diretamente dos históricos da resposta ("método dos momentos" ^[4]).

Figura 7.4 Função de Densidade de Probabilidade da Resposta

As densidades de probabilidade dos *máximos* (picos) da resposta foram calculados usando a expressão (5.41), para cada condição ambiental. A figura 7.5 ilustra uma comparação com o histograma de picos.

Figura 7.5 Função de Densidade de Probabilidade dos Máximos da Resposta de Curto Prazo

Usamos a expressão (6.1), para ponderar as funções de densidade de probabilidade de curto prazo e obter a *distribuição de picos* de longo prazo $p_L(y)$. Na tabela 7.3 mostramos as *freqüências médias* de picos das respostas de curto prazo, e seu produto pelas probabilidades de ocorrência das condições ambientais, para definir os pesos da ponderação, e também a freqüência média de picos de longo prazo - expressão (6.6), que é o denominador de (6.1).

Tabela 7.3 Pesos da Ponderação para Obtenção da Função de Densidade de Probabilidade de Longo Prazo.

MAR j	FREQÜÊNCIA MEDIA DE PICOS v_j	PROBABILIDADE DE OCORRENCIA PB_j	PESOS $v_j PB_j$
1	2.9485	0.0229	0.0675
2	2.7324	0.2561	0.6998
3	2.0797	0.3852	0.8011
4	1.7732	0.1962	0.3479
5	1.7417	0.0880	0.1533
6	1.5350	0.0328	0.0503
7	1.5209	0.0100	0.0152
8	1.4451	0.0068	0.0098
9	1.3333	0.0020	0.0027
			$\Sigma = 2.1476 = v_L$

Na figura 7.6 a seguir estão as densidades de probabilidade de picos de curto e longo prazo, e a figura 7.7 mostra a comparação da densidade de longo prazo dos picos com um histograma de longo prazo. Tal histograma foi obtido "ponderando-se" os histogramas de curto prazo, e corresponde a um tempo de simulação suficientemente grande, onde comparecem as condições ambientais de acordo com suas probabilidades de ocorrência.

Figura 7.6 Função de Densidade de Probabilidade dos Máximos da Resposta de Curto e Longo Prazo.

Figura 7.7 Função de Densidade de Probabilidade dos Máximos da Resposta de Longo Prazo e Histograma.

Verifica-se que existe uma boa aderência. Usando, então, a expressão (6.5) do número de picos observados N , para um tempo T de vida útil prevista de 100 anos para o riser, obtemos :

$$N = \nu_L T = 2.1476 \times (100 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60) = 6.7727 \times 10^3$$

Para este número de picos estimamos os parâmetros da distribuição assintótica de extremos - expressão (6.7) - usando as equações (6.8), resultando:

$$u_N = P_L^{-1}(1 - 1/N) = 1.175 \times 10^6$$

$$\alpha_N = N p_L(u_N) = 5.6509 \times 10^3$$

A figura 7.8 mostra a distribuição assintótica do valor extremo da resposta para um tempo de observação de 100 anos.

Figura 7.8 Função de Densidade de Probabilidade Assintótica do Extremo da Resposta em 100 anos.

Para poder calcular a probabilidade de falha, adotou-se uma distribuição lognormal para a tensão de ruptura da linha flexível, por estar em conformidade com outros estudos já realizados ^[3], [1]:

$$p_r(r) = (2\pi \sigma^2 r^2)^{-1/2} \text{Exp}[-1/2\sigma^2 (\text{Log } r - \mu)^2] ; \quad 0 < r < \infty \quad (7.2)$$

onde

$$\mu = \text{Log } \mu_r - 1/2 \text{Log}(1+C_r^2)$$

$$\sigma^2 = \text{Log}(1+C_r^2)$$

$$\mu_r = \text{tensão média de ruptura} = 3620 \text{ kN}$$

$$C_r = \text{coeficiente de variação} = \sigma_r / \mu_r = 0.15$$

$$\sigma_r = \text{desvio padrão da tensão de ruptura}$$

A figura 7.9 mostra a função de densidade de probabilidade da tensão limite de resistência da linha flexível.

Figura 7.9 Função de Densidade de Probabilidade da Resistência

A função de densidade probabilidade conjunta (2.4), $p_{S,R}(s,r)$ é dada por:

$$p_{S,R}(s,r) = p_S(s) \cdot p_R(r)$$

conforme mostra a figura 7.10.

Figura 7.10 Função de Densidade de Probabilidade Conjunta de S e R

Assim, a *probabilidade de falha* (2.5) é igual a:

$$P_{falha} = \iint_{S>R} p_{S,R}(s,r) ds dr = 5.87 \times 10^{-15}$$

O valor da probabilidade de falha não tem significância estatística, servindo, no entanto, como um critério de comparação entre possíveis *alternativas de projeto* para as linhas flexíveis.

CAPÍTULO 8 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

O método proposto para análise estatística da resposta estacionária das linhas flexíveis é uma forma de se evitar os "erros sistemáticos" ^[4] que são cometidos quando se ajustam curvas arbitrárias aos dados obtidos de simulações. Estes erros, que resultam da escassez de dados nas regiões de baixa probabilidade, são responsáveis por erros ainda maiores quando calculamos a resposta extrema de longo prazo; erros estes que estão muitas vezes contra a segurança.

Por ser não linear, a resposta dos risers às solicitações ambientais é calculada no domínio do tempo. Os computadores mais rápidos e com maior capacidade de memória que são utilizados atualmente, permitem que se desenvolvam modelos matemáticos mais precisos, e por conseguinte, mais complexos. Avaliar os resultados das simulações feitas em computador requer que o engenheiro não se limite a compreensão do modelo em si, mas também seja capaz de descrever de maneira adequada os dados que são fornecidos ao computador, e as respostas que estes fornecem.

Assim, pelo fato das solicitações ambientais serem eminentemente não determinísticas, devemos buscar descrever e avaliar as respostas das linhas flexíveis dentro de um contexto probabilístico. Isto requer que as hipóteses simplificadoras, que são adotadas no cálculo da resposta extrema, sejam revistas buscando estar sempre a favor da segurança.

Não é só o fato de não precisarmos ajustar uma curva qualquer aos dados das simulações que favorece o método da análise biespectral. É importante lembrarmos também que este método não necessita do conhecimento a priori das funções de transferência da resposta ^[10].

Por ser um método genérico, pode ser aplicado a outros tipos de respostas não gaussianas. E entre as recomendações a serem feitas para trabalhos futuros sugerimos que sejam desenvolvidas pesquisas no sentido de aplicação da análise biespectral também aos outros *modos de falha* possíveis para as linhas flexíveis, entre eles: curvatura excessiva, compressão axial, e falha por fadiga.

O fato de não ser possível encontrar a forma analítica para a *função de densidade de probabilidade* da resposta, que ficou sendo descrita por sua *função característica*, não limitou o alcance da aplicação do método proposto. Isto porque a transformada inversa de Fourier permite obter (através de eficientes algoritmos de FFT) os valores numéricos da densidade de probabilidade.

Uma outra recomendação é que se busquem métodos para obter a densidade de probabilidade conjunta da resposta e suas derivadas temporais (5.37), nos moldes do que foi feito por Naess ^[34] para as forças de deriva variável a que as embarcações estão sujeitas.

Resta ainda lembrar que a *probabilidade de falha* das linhas flexíveis tem relação com os *coeficientes de segurança* do projeto. Sendo assim, para desenvolver *critérios de projeto* baseados nos valores da probabilidade de falha, é necessário que sejam feitas *calibrações* que definam quais valores são aceitáveis para a probabilidade de falha destas estruturas.

ANEXO A RESPOSTA DINÂMICA DAS LINHAS FLEXÍVEIS

As solicitações ambientais aleatórias, discutidas no capítulo 3, vão induzir tensões e deslocamentos que devem ser calculados a partir das equações de equilíbrio que descrevem o comportamento dinâmico não linear da linha flexível.

A.1 Esforços Internos

Os esforços internos são caracterizados pelas forças tangente T , cortante Q , e pelo momento M , que podem ser representados como função do comprimento da linha ζ medido a partir da extremidade conectada ao poço ($\zeta = 0$).

A posição de um ponto material P da linha flexível, em uma configuração arbitrária, é função do tempo. Assim, sendo $\mathbf{r}$ o vetor posição do ponto P , em um sistema de referência com origem O no poço, definimos (ver figura A.1) o *triedro de Frenet* ($\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$)^[20] como

$$\text{tangente: } \mathbf{t} = d\mathbf{r}/d\zeta$$

$$\text{normal: } \kappa \mathbf{n} = d\mathbf{t}/d\zeta, \quad d\mathbf{n}/d\zeta = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}$$

$$\text{binormal: } \mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}, \quad d\mathbf{b}/d\zeta = -\tau \mathbf{n}$$

onde, κ é a curvatura e τ é a torção da curva.

Figura A.1 Esforços Agindo sobre a Linha Flexível

Assim, as força internas são dadas por:

$$\mathbf{T} = T \mathbf{t}$$

$$\mathbf{Q} = Q_n \mathbf{n} + Q_b \mathbf{b}$$

$$\mathbf{M} = M_t \mathbf{t} + M_b \mathbf{b}$$

onde

T é a força tangente

Q_n e Q_b são as componentes da força cortante

M_t é o momento torçor e

M_b é o momento fletor

A.2 Equação Diferencial do Equilíbrio Dinâmico

Representando por $\mathbf{f}$ as forças externas por unidade de comprimento, podemos escrever as equações de equilíbrio de um elemento infinitesimal da linha flexível (equações locais de equilíbrio):

$$dT/d\zeta + d\mathbf{Q}/d\zeta + \mathbf{f} = m \mathbf{a}$$

$$dM/d\zeta + \mathbf{t} \wedge \mathbf{Q} = 0$$

onde m é a massa por unidade de comprimento e $\mathbf{a}$ é a aceleração.

A.3 Equações Constitutivas

Como equações constitutivas, que relacionam os esforços internos com as deformações, podemos tomar:

$$T = EA (\varepsilon + c \partial \varepsilon / \partial t)$$

$$M_b = EI (\kappa + c \partial \kappa / \partial t)$$

$$M_t = GJ \, d\theta/d\zeta$$

onde EA , EI e GJ são constantes que representam as rigezas da linha ^{[21],[22]}, ε é o "alongamento linear" e θ é o "ângulo de torção". A constante c é o "coeficiente de amortecimento" do modelo constitutivo visco-elástico.

A.4 Configuração de Referência

É conveniente escrever as equações de equilíbrio utilizando como variáveis independentes o comprimento indeformado da linha ζ_0 e o tempo t , e como variável dependente os deslocamentos $\mathbf{u}$ ^[23], que devem ser medidos a partir de uma configuração de referência $\mathbf{r}_0$. Desta forma, os deslocamentos ficam sendo dados por:

$$\mathbf{u}(\zeta_0, t) = \mathbf{r}(\zeta_0, t) - \mathbf{r}_0(\zeta_0)$$

Assim, definimos o estiramento λ ^[24] como sendo

$$\lambda = \partial \zeta(\zeta_0, t) / \partial \zeta_0$$

$$(\partial \zeta / \partial \zeta_0)^2 = \partial \mathbf{r} / \partial \zeta_0 \cdot \partial \mathbf{r} / \partial \zeta_0$$

$$\partial \mathbf{r} / \partial \zeta_0 = \partial \mathbf{r}_0 / \partial \zeta_0 + \partial \mathbf{u} / \partial \zeta_0$$

Pode-se, então, escrever as equações diferenciais do equilíbrio para cada instante de tempo em função do comprimento indeformado :

$$\partial \mathbf{T} / \partial \zeta_0 + \partial \mathbf{Q} / \partial \zeta_0 + \mathbf{f}_0 = m_0 \mathbf{a}$$

$$\partial \mathbf{M} / \partial \zeta_0 + \lambda \mathbf{t} \wedge \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

onde, $\mathbf{f}_0 = \lambda \mathbf{f}$ representa as forças externas por unidade de comprimento indeformado, e $m_0 = \lambda m$ é a massa por unidade de comprimento indeformado.

A.5 Forças Externas

As forças externas f_0 por unidade de comprimento indeformado agindo ao longo do riser são devidas ao peso próprio, à interação com os meios fluidos interno e externo, e ao contato com o fundo do oceano, que pode ocorrer em algumas configurações da linha.

Assim, podemos dividir f_0 em componentes:

$$f_0 = f_0^{(1)} + f_0^{(2)} + f_0^{(3)} + f_0^{(4)}$$

$f_0^{(1)}$: forças hidrostática e gravitacional

$f_0^{(2)}$: força hidrodinâmica de arrasto

$f_0^{(3)}$: força hidrodinâmica de inércia

$f_0^{(4)}$: força de contato com o fundo

A componente $f_0^{(1)}$ é dada por ^[25] :

$$f_0^{(1)} = \kappa (A_0 p_0 - A_l p_l) \mathbf{n} + (A_0 \gamma_0 - A_l \gamma_l + A_s \gamma_s) \mathbf{k}$$

onde,

A_0 , A_l e A_s são as áreas da seção interna, externa e transversal;

p_0 e p_l são as pressões do fluido interno e externo;

γ_0 , γ_l e γ_s são os pesos específicos do fluido interno, externo e do riser;

$\mathbf{k}$ é um versor vertical orientado para cima.

As componentes hidrodinâmicas $f_0^{(2)}$ e $f_0^{(3)}$ são dada em função da velocidade e aceleração relativas entre o escoamento externo e o riser, sendo calculadas utilizando as equações de Morison ^{[1], [19]}. E a força de contato com o fundo $f_0^{(4)}$, deve incluir suas duas componentes: a normal e o atrito.

A.6 Equação Integral do Equilíbrio

Uma forma equivalente de descrever o movimento da linha é a partir das suas equações integrais, que são obtidas pela aplicação do P.T.V. ("Princípio dos Trabalhos Virtuais"). Seja δu um deslocamento virtual, que é uma função contínua de ζ (ou de ζ_0 e t) satisfazendo as condições de contorno. Assim, multiplicando δu escalarmente pela equação local do equilíbrio das forças, obtemos:

$$\partial T / \partial \zeta_0 \cdot \delta u + \partial Q / \partial \zeta_0 \cdot \delta u + f_0 \cdot \delta u = m_0 a \cdot \delta u$$

e, usamos que

$$\partial T / \partial \zeta_0 \cdot \delta u = \partial (T \cdot \delta u) / \partial \zeta_0 - T \cdot \partial \delta u / \partial \zeta_0$$

$$\partial Q / \partial \zeta_0 \cdot \delta u = \partial (Q \cdot \delta u) / \partial \zeta_0 - Q \cdot \partial \delta u / \partial \zeta_0$$

Podemos assim integrar de 0 até L_0 , que é o comprimento indeformado total da linha flexível, para obter:

$$(T + Q) \cdot \delta u \Big|_0^{L_0} + \int_0^{L_0} f_0 \cdot \delta u \, d\zeta_0 = \int_0^{L_0} m_0 a \cdot \delta u \, d\zeta_0 + \int_0^{L_0} (T + Q) \cdot \partial \delta u / \partial \zeta_0 \, d\zeta_0$$

Observamos que na equação acima comparecem no primeiro membro os termos correspondentes ao trabalho das forças externas, e que no segundo membro as variações das energias cinética e de deformação.

Os deslocamentos da embarcação são representados como condições de contorno. Desta forma, temos que $\delta u(0) = \delta u(L_0) = 0$, pois os deslocamentos de ambas as extremidades são prescritos.

A partir da equação integral do equilíbrio, podemos discretizar o domínio de integração para aplicar o M.E.F.^[26] ("Método dos Elementos Finitos"), usando funções de interpolação que descrevem os deslocamentos, no interior dos elementos em função dos valores nodais.

A solução das equações de equilíbrio assim formuladas pode ser feita por integração direta passo a passo no domínio do tempo^[37].

O cálculo determinístico do comportamento das linhas flexíveis, conforme exposto neste anexo, é subsidiário no contexto da análise probabilística descrita nesta tese, sendo utilizado como um meio para gerar amostras de históricos temporais da resposta, a partir de realizações das solicitações ambientais.

ANEXO B ESPECTROS DE ENERGIA E ACOPLAMENTO NÃO LINEAR DAS COMPONENTES ESPECTRAIS DA RESPOSTA ^[8]

Seja $y(t)$ um processo aleatório, estacionário e com média zero. Os cumulantes de 2.^a e 3.^a ordem de $y(t)$ são:

$$k_2(\tau) = E [y(t) y(t+\tau)] = \text{cumulante de ordem 2}$$

$$k_3(\tau_1, \tau_2) = E [y(t) y(t+\tau_1) y(t+\tau_2)] = \text{cumulante de ordem 3}$$

A representação espectral (Série de Fourier) de $y(t)$ é dada por:

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m e^{-i\omega_m t}$$

onde

$$Y_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{i\omega_m t} dt$$

A representação espectral dos cumulantes pode ser expressa por:

$$k_2(\tau) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_2(\omega_l) e^{-i\omega_l \tau}$$

$$k_3(\tau_1, \tau_2) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} F_3(\omega_{l_1}, \omega_{l_2}) e^{-i(\omega_{l_1} \tau_1 + \omega_{l_2} \tau_2)}$$

onde

$$F_2(\omega_l) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} k_2(\tau) e^{i\omega_l \tau} d\tau$$

$$F_3(\omega_{l_1}, \omega_{l_2}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} k_3(\tau_1, \tau_2) e^{i(\omega_{l_1} \tau_1 + \omega_{l_2} \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2$$

As quantidades $F_2(\omega_1)$ e $F_3(\omega_{11}, \omega_{12})$ são os espectros cumulantes de ordem 2 e 3, respectivamente.

Pode-se mostrar que ^[8] :

$$\begin{aligned} E[Y_1 Y_2] &= F_2(\omega_1) \Delta(\omega_1 + \omega_2) \\ E[Y_1 Y_2 Y_3] &= F_3(\omega_1, \omega_2) \Delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \end{aligned} \quad (B.1)$$

onde

$$\Delta(z) = \begin{cases} 1 & ; \text{ se } z = 0 \\ 0 & ; \text{ senão} \end{cases}$$

A expressão (B.1) é muito importante, pois permite que os espectros cumulantes sejam estimados diretamente em termos das médias das transformadas de Fourier da resposta, em que a soma das frequências se anula. Isto evita que se tenha que realizar as integrais de Fourier.

Numa situação experimental, onde observam-se ondas nas frequências ω_1 , ω_2 e ω_3 satisfazendo $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$, o espectro cumulante de ordem 3 pode ser utilizado para medir a dependência estatística entre as ondas observadas.

O espectro cumulante $F_3(\omega_1, \omega_2)$ será nulo a menos que as seguintes condições sejam satisfeitas simultaneamente:

- (1) A existência de ondas nas frequências ω_1 , ω_2 e ω_3 onde $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$
- (2) Essas ondas devem ser relacionadas estatisticamente umas com as outras.

B.1 O Biespectro

Inicialmente, define-se o espectro de potência $P(\omega_m)$ e o biespectro $B(\omega_k, \omega_l)$ como sendo os espectros cumulantes de segunda e terceira ordem, respectivamente:

$$\begin{aligned} P(\omega_m) &= E[Y_m Y_m^*] \\ B(\omega_k, \omega_l) &= E[Y_k Y_l Y_{k+l}^*] \end{aligned} \quad (B.2)$$

sendo que

$$\begin{aligned} P(\omega_m) &= F_2(\omega_m) \\ e \\ B(\omega_k, \omega_l) &= F_3(\omega_k, \omega_l) \end{aligned}$$

são denominados, nesta tese, de espectros de energia (ou potência) de primeira e segunda ordem, respectivamente.

Na expressão (B.2), Y_m^* , o conjugado de Y_m , é igual a Y_{-m} .

O biespectro, ou espectro de energia de segunda ordem, mede a dependência estatística entre três ondas. Assim, se as ondas presentes nas frequências ω_k , ω_l e $\omega_k + \omega_l$ são independentes, cada onda pode então ser caracterizada por uma fase estatisticamente diferente das outras.

Desta forma, a soma das fases dos três componentes estará distribuída aleatoriamente entre $(-\pi, \pi)$.

Quando uma média estatística, denotada pelo operador do valor esperado $E[\]$ é feita, o biespectro se anula devido ao efeito da composição aleatória das fases. Por outro lado, se as três componentes espectrais estiverem relacionadas umas com as outras, a soma das fases das três ondas não será totalmente aleatória, mesmo que a fase de cada onda componente tenha sido gerada aleatoriamente para cada realização. Em consequência, a média estatística não resultará num valor zero do biespectro.

B.2 O Acoplamento de Três Ondas

Uma não linearidade quadrática entre três ondas componentes da resposta pode ser representada, por exemplo, pela regressão:

$$Y_m = \sum_{k+l=m} A_{k,l} Y_k Y_l \quad (B.3)$$

Fisicamente, as ondas primárias em ω_k e ω_l interagem e geram uma terceira onda na soma (ou diferença) de suas frequências:

$$\omega_m = \omega_k + \omega_l$$

Na expressão (B.3) $A_{k,l}$ é o coeficiente do acoplamento.

Outra forma de regressão que pode ser usada é:

$$Y_m = Y_{L_m} + \sum_{k+l=m} A_{k,l} Y_k Y_l \quad (B.4)$$

onde, a primeira parcela, Y_{L_m} , é uma quantidade independente da segunda parcela.

Ou ainda, se preferirmos, podemos usar ^[10]:

$$Y_m = Y_{L_m} + \sum_{k+l=m} A_{L_{k,l}} Y_{L_k} Y_{L_l} \quad (B.5)$$

Os coeficientes da regressão $A_{k,l}$ (ou $A_{L_{k,l}}$) são importantes, pois quantificam o acoplamento não linear das ondas presentes na resposta.

B.3 O Cálculo do Biespectro Discreto

Escolhendo um intervalo de tempo h para amostragem da resposta, a máxima frequência (ou frequência de corte) que é representada é igual a $\omega_{\text{corte}} = \pi / h$. Além disto, na prática, os dados são coletados durante um período de tempo finito T .

Deve-se inicialmente assumir que o sinal $y(t)$ é de banda limitada e que o intervalo de amostragem h é suficientemente pequeno para que a frequência de corte $\omega_{\text{corte}} = \pi / h$ seja maior que qualquer componente espectral de interesse presente em $y(t)$. Também, o tamanho do registro $T = N h$ deve ser grande o suficiente para se ter uma resolução $\omega_1 = 2\pi / T$ adequada.

Um algoritmo computacional que pode ser usado é, por exemplo:

- (1) Gerar um conjunto com J registros de dados de comprimento N
 $y_n^{(j)}$; $j = 1, \dots, J$ e $n = 1, \dots, N$ onde $y_n = y(nh)$
- (2) Subtrair a média de cada registro
- (3) Calcular as amplitudes de Fourier, usando algoritmos de FFT ("Fast Fourier Transform") :

$$Y_k^{(j)} = 1/N \sum_{n=1}^N y_n^{(j)} e^{-i\omega_k n h}$$
$$k = 1, \dots, N/2 \quad \text{e} \quad j = 1, \dots, J$$

O índice k fica limitado ao valor $N/2$ devido a frequência de corte pois :

$$\omega_k \leq \omega_{\text{corte}} \Rightarrow k \omega_1 \leq \pi / h \Rightarrow k 2\pi / T \leq \pi / h \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k 2\pi / N h \leq \pi / h \Rightarrow k \leq N/2$$

(4) Calcular uma estimativa $\tilde{B}_{k,l}$ para o biespectro (discreto) por:

$$\tilde{B}_{k,l} = 1/J \sum_{j=1}^J Y_k^{(j)} Y_l^{(j)} Y_{k+l}^{(j)*} \cong B_{k,l}$$

(5) Da mesma forma, pode-se calcular uma estimativa $\tilde{P}_m$ para o espectro (discreto) de energia de primeira ordem por:

$$\tilde{P}_m = 1/J \sum_{j=1}^J Y_m^{(j)} Y_m^{(j)*} \cong P_m$$

Estas estimativas para os espectros (discretos) de energia são utilizadas para calcular os coeficientes da regressão quadrática da resposta.

ANEXO C FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO (MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS)

A aplicação do método dos mínimos quadrados consiste em encontrar os valores dos coeficientes $A_{L_{k,l}}$ da resposta não linear e das parcelas lineares P_{L_m} do espectro de potência de primeira ordem que minimizam a soma dos quadrados das diferenças entre os espectros calculados pelas equações (5.10) e (5.11) e os valores estimados (anexo B) a partir dos históricos da resposta.

Os coeficientes $A_{L_{k,l}}$ da resposta não linear possuem as mesmas propriedades de simetria do biespectro. Assim, para defini-los, basta conhecer os valores de suas partes real $q_{k,l}$ e imaginária $f_{k,l}$ apenas para alguns valores dos índices k e l .

Desta forma, podemos definir o problema de otimização por :

$$\begin{aligned} \text{minimizar } \mathfrak{J}(\underline{x}) = & \sum_{\substack{m \\ 1 \leq m \leq 2M}} (P_m(\underline{x}) - \tilde{P}_m)^2 \\ & + \sum_k \sum_l (\text{Re}\{B_{k,l}(\underline{x})\} - \text{Re}\{\tilde{B}_{k,l}\})^2 + (\text{Im}\{B_{k,l}(\underline{x})\} - \text{Im}\{\tilde{B}_{k,l}\})^2 \\ & \quad 1 \leq k, l, k+l \leq 2M \end{aligned}$$

$$\underline{x} = \{ [P_{L_m} ; (m = 1, \dots, M)], [q_{k,l} , f_{k,l} ; (k = 1, \dots, M), (l = 1, \dots, k)] \}$$

sujeito à

$$0 \leq P_{L_m} \leq \tilde{P}_m$$

$$0 \leq q_{k,l} , f_{k,l}$$

onde

$\tilde{P}_m$ e $\tilde{B}_{k,l}$ são os valores estimados dos espectros de energia (anexo B).

As funções $P_m(\underline{x})$ e $B_{k,l}(\underline{x})$ são dadas por :

$$P_m(\underline{x}) = P_{L_m} + \sum_{\substack{k+l=m \\ 1 \leq |k|, |l| \leq M}} 2 |A_{k,l}|^2 E[|Y_{L_k} Y_{L_l}|^2] \quad (5.10)$$

$$B_{k,l}(\underline{x}) = 2 A_{k,l}^* (E[|Y_{L_k} Y_{L_{k+l}}|^2] + E[|Y_{L_l} Y_{L_{k+l}}|^2] + E[|Y_{L_k} Y_{L_l}|^2]) + D_{k,l}(\underline{x}) \quad (5.11)$$

sendo

$$D_{k,l}(\underline{x}) = \sum_{i+j=k+l} 4 A_{i,j}^* (A_{i,k-i} A_{j,i-k} + A_{i,i-k} A_{j,k-i}) E[|Y_{L_i} Y_{L_j} Y_{L_{k-i}}|^2] \\ 1 \leq |i|, |j|, |k-i| \leq M$$

$$E[|Y_{L_i} Y_{L_j} Y_{L_{k-i}}|^2] = \begin{cases} E[|Y_{L_j}|^2] E[|Y_{L_i} Y_{L_{k-i}}|^2]; & |k-i| = |i| \\ E[|Y_{L_i}|^2] E[|Y_{L_j} Y_{L_{k-i}}|^2]; & |k-i| = |j| \\ E[|Y_{L_{k-i}}|^2] E[|Y_{L_i} Y_{L_j}|^2] & \text{; nos outros casos} \end{cases}$$

$$E[|Y_{L_k} Y_{L_l}|^2] = \begin{cases} E[|Y_{L_k}|^2] E[|Y_{L_l}|^2] & ; k \neq l \\ 2 E[|Y_{L_k}|^2] E[|Y_{L_l}|^2] & ; k = l \end{cases}$$

$$E[|Y_{L_m}|^2] = \begin{cases} P_{L_m} & ; 1 \leq |m| \leq M \\ 0 & ; |m| > M \end{cases}$$

$$A_{k,l} = \begin{bmatrix} q_{|k|,|l|} - i f_{|k|,|l|} & ; k > 0, l > 0 \\ q_{|k|,|l|} + i f_{|k|,|l|} & ; k < 0, l < 0 \\ r_{|k|,|l|} - i g_{|k|,|l|} & ; k > 0, l < 0 \\ r_{|l|,|k|} - i g_{|l|,|k|} & ; k < 0, l > 0 \\ 0 & ; (|k| \text{ ou } |l| > M) \end{bmatrix} ; (1 \leq |k|, |l| \leq M)$$

Devido as simetrias dos coeficientes $AL_{k,l}$, temos que:

$$\begin{cases} q_{k,l} = q_{l,k} \\ f_{k,l} = f_{l,k} \\ r_{k,l} = r_{l,k} \\ g_{k,l} = -g_{l,k} \end{cases} ; (k, l = 1, \dots, M)$$

$$\begin{cases} r_{k+1,l} = q_{k,l} \\ g_{k+1,l} = -f_{k,l} \end{cases} ; (k, l, k+1 = 1, \dots, M)$$

$$\begin{cases} r_{k,l} = 0 \\ g_{k,l} = 0 \end{cases} ; (1 \leq k = l \leq M)$$

Para resolver esse problema de otimização, podemos usar, por exemplo, o "método do gradiente reduzido generalizado" ^[36]. Esta técnica de otimização é iterativa, e necessita de um valor inicial para $\underline{x}$ que pode ser escolhido como :

$$\underline{x}^{(0)} = \{ [PL_m^{(0)} = \tilde{P}_m ; (m = 1, \dots, M)], [q_{k,l}^{(0)}, f_{k,l}^{(0)} \mid D_{k,l} = 0 ; (k = 1, \dots, M), (l = 1, \dots, k)] \}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Chakrabarti, S. K. ; "Nonlinear Methods in Offshore Engineering" ; Developments in Marine Technology, 5. Elsevier science Publishers B. V. ; Amsterdam; 1990.
- [2] Hughes, O. F. ; "Ship Structural Design", John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [3] Leira, B. J. ; Olufsen, A. N. ; Jiao, G. ; "Reliability Analysis of Flexible Riser Systems" ; Proceedings of the Second International Offshore and Polar Engineering Conference; San Francisco; 1992.
- [4] Sødahl, N. ; Larsen, C. M. ; "Methods for Estimation of Extreme Response of Flexible Risers" ; Proceedings of the Second International Offshore and Polar Engineering Conference; San Francisco; 1992.
- [5] Trim, A. D. ; "Extreme Response of Flexible Risers" ; Marine Structures, 5 ; Elsevier Science Publishers B. V. ; Amsterdam; 1992.
- [6] Bury, K. V. ; "Statistical Models in Applied Science" ; John Wiley & Sons ; New York; 1975.
- [7] Lin, Y. K. ; "Probabilistic Theory of Structural Dynamics" , Robert E. Krieger Publishing Company; Florida; 1976.
- [8] Kim, Y. K. ; Powers, E. J. ; "Digital Bispectral Analysis and Its Applications to Nonlinear Wave Interactions" ; IEEE Transactions on Plasma Science, vol. PS-7, No. 2, 1979.
- [9] Langley, R. S. ; "A Statistical Analysis of Non-linear Random Waves" ; Ocean Eng. ; 14, Pergamon Journals Ltd. ; 1987.

- [10] Ochi, M. K. ; Ahn, K. ; "Probabilistic Distribution Aplicable to Non-Gaussian Random Processes"; Probabilistic Engineering Mechanics, 9, Elsevier Science Limited ; 1994.
- [11] Paola, M. D. ; Ricciard, G. , Vasta, M. ; "A Method for Probabilistic Analysis of Non-linear Systems", Probabilistic Engineering Mechanics, 9, Elsevier Science Limited; 1995.
- [12] Moore, F. ; "Materials for Flexible Riser Systems: Problems and Solutions" ; Engineering Structures, 11 ; Butterworth & Co (Publishers) Ltd; 1989.
- [13] Mo, O. ; Torset, P. ; "Requirements and Applicable Standards for Desing, Manufacturing and Installation of Flexible Pipes"; Engineering Structures, 11 ; Butterworth & Co (Publishers) Ltd; 1989.
- [14] Seyed, F. B. ; Patel, M. H. ; "Considerations in Desing of Flexible Riser Systems" ; Proceedings of the Second International Offshore and Polar Engineering Conference; San Francisco; 1992.
- [15] Augusti, G. ; Baratta, A. ; Casciati, F. ; "Probabilistic Methods in Structural Engineering" ; Chapman and Hall ; Bristol ; 1984 .
- [16] Madsen, H. O. ; Krenk, S. ; Lind, N. ; "Methods of Structural Safety" ; Prentice-Hall Inc. ; New Jersey ; 1986.
- [17] Zare, K. ; Datta, T.K. ; "Dynamic Response of Lazy-S Risers in Random Sea" ; Offshore Technology Conference, OTC 6440 ; Texas; 1990.
- [18] Laier, J. E. ; " Vibrações Aleatórias"; Apostila da USP; São Carlos; 1989.
- [19] Soutanahmadi, A. ; "Dinamics of Flexible Riser Systems" ; Dr ing Thesis ; City University ; 1988.
- [20] Giacaglia, G. E. O. ; "Mecânica Geral" ; Editora Campos Ltda ; Rio de Janeiro; 1982.

- [21] Witz, J. A. ; Tan, Z. ; "On the Axial -Torsonal Structural Behaviour of Flexible Pipes, Umbilicals and Marine Cables" ; Marine Structures, 5 No. 2 e 3 ; Elsevier Applied Science ; 1992.
- [22] Witz, J. A. ; Tan, Z. ; "On the Flexural Structural Behaviour of Flexible Pipes, Umbilicals and Marine Cables" ; Marine Structures, 5 No. 2 e 3 ; Elsevier Applied Science ; 1992.
- [23] Lindahl, J. ; Sjöberg, A. ; "Dynamics Analysis of Mooring Cables" ; Report Series A : 9 ; Department of Hydraulics, Chalmers University of Technology; 1983.
- [24] Pimenta, P. M. ; "Análise Não Linear de Trelças Espaciais" - Apostila - EPUSP ; São Paulo, 1986.
- [25] Seyed, F. B. ; Patel, M. H. ; "Mathematics of Flexible Risers Including Pressure and Internal Flow Effects"; Marine Structure, 5 No. 2 e 3 ; Elsevier Applied Science ; 1992.
- [26] Bathe, K. J. ; "Finite Element Procedure in Engineering Analysis"; Prentice-Hall Inc; New Jersey; 1982.
- [27] Bendat, J. S. ; Piersol, A. G. ; "Random Data: Analysis and Measurement Procedures" ; Willey - Interscience ; 1971.
- [28] Priestley, M. B. ; "Non-linear and Non-Stationary Time Series Analysis" ; Academic Press ; San Diego ; 1991.
- [29] Fletcher, R. ; "Pratical Methods of Optimization" ; Willey; New York; 1980.
- [30] Newland, D. E. ; "An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis" ; Longman; Harlow; 1984.

- [31] Larsen, C. M. ; Olufsen, A. ; "Extreme Response Estimation of Flexible Risers by Use of Long Term Statistics" ; Proceedings of the Second International Offshore and Polar Engineering Conference; San Francisco; 1992.
- [32] Farnes, K. ; Moan, T. ; "Extreme Response of Flexible Riser System Using a Complete Nonlinear Long-Term Approach" ; Proceedings of the Third International Offshore and Polar Engineering Conference; Singapore; 1993.
- [33] Ochi, M. K. ; "On Prediction of Extreme Values" ; Journal of Ship Research, 17 No 1 ; 1973.
- [34] Naess, A. ; "On the Statistical Analysis of Slow-Drift Forces and Motions of Floating Offshore Structure", OMAE, vol.1, 317-329; 1986.
- [35] Kato, S. ; Kinoshita, T. ; Takase, S. ; "Statistical Theory of Total Second Order Responses of Moored Vessel in Random Seas" ; Applied Ocean Research, vol.12-1, pp 2-13; 1990,
- [36] Fritzsche, Helmut ; "Programação Não Linear"- Análise e Métodos ; Editora Edgar Blücher Ltda, São Paulo, 1978.
- [37] PETROBRÁS; "ANFLEX - Análise Não Linear de Risers e Linhas e Ancoragem" , Manual de Entrada de Dados do Programa, Cepes/ Diprex/ Sedem , 1990.
- [38] Mansour, A. ; " Methods of Computing the Probability of Failure Under Extreme Values of Bending Moment"; J. Ship Res. ; Vol.16, 113-23, 1972.
- [39] Petreche, J. R. D. ; "Análise Probabilística do Comportamento Dinâmico de Linhas de Amarração", Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo; 1990.