UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

HUMBERTO DE CARVALHO NAKANISHI

Modelo computacional para avaliação do desempenho hidrodinâmico de embarcações de planeio em águas calmas

SÃO PAULO

2015

HUMBERTO DE CARVALHO NAKANISHI

Modelo computacional para avaliação do desempenho hidrodinâmico de embarcações de planeio em águas calmas

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção Título de Mestre em Ciências, no programa: Engenharia Naval e Oceânica

Área de Concentração:
Engenharia Naval e Oceânica

Orientador: Prof. Dr. Bernardo Luis Rodrigues Andrade

SÃO PAULO

2015

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catalogação-na-publicação

Nakanishi, Humberto de Carvalho
Modelo computacional para avaliação do desempenho hidrodinâmico de embarcações de planeio em águas calmas / H. C. Nakanishi -- versão corr. -- São Paulo, 2015.
109 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Naval e Oceânica.

1.Embarcação de planeio 2.Hidrodinâmica de embarcações 3.Modelo computacional 4.Teoria de impacto de cunhas I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Naval e Oceânica II.t.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais por todo o esforço para que eu tivesse uma educação de qualidade e pudesse ingressar na universidade. Aos meus irmãos pelos momentos de alegria e companheirismo que somente a relação entre irmãos pode proporcionar.

Aos amigos e familiares pelo apoio e incentivo nos momentos mais difíceis desse período.

À Intermarine Yachts e, em especial, ao amigo Sérgio Ricardo Rossi, que me permitiram desenvolver esse projeto de pesquisa ao mesmo tempo em que realizava minhas atividades diárias no estaleiro.

Ao professor e amigo Bernardo Luis Rodrigues de Andrade, orientador desta dissertação de mestrado, pela dedicação e apoio durante o processo de desenvolvimento deste trabalho. E também pelo incentivo ao ingresso no campo da pesquisa ainda nos anos da graduação e por ter me acompanhado nos últimos seis anos nesta caminhada.

À minha companheira e amiga Daniele, pelo amor, apoio e compressão em todo o tempo em que dediquei à realização dessa pesquisa. São incontáveis a vezes em que a elaboração dessa dissertação precisou ter prioridade em relação à nossa vida como um casal. Obrigado também pela dedicação na elaboração final do texto, sem você eu não teria conseguido.

RESUMO

NAKANISHI, H. C. **Modelo computacional para avaliação do desempenho hidrodinâmico de embarcações de planeio em águas calmas.** Dissertação de Mestrado – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

Em geral, uma embarcação de planeio é projetada para atingir elevados níveis de velocidade. Esse atributo de desempenho está diretamente relacionado ao porte da embarcação e à potência instalada em sua planta propulsiva. Tradicionalmente, durante o projeto de uma embarcação, as análises de desempenho são realizadas através de resultados de embarcações já existentes, retirados de séries sistemáticas ou de embarcações já desenvolvidas pelo estaleiro e/ou projetista. Além disso, a determinação dos atributos de desempenho pode ser feita através de métodos empíricos e/ou estatísticos, onde a embarcação é representada através de seus parâmetros geométricos principais; ou a partir de testes em modelos em escala reduzida ou protótipos. No caso específico de embarcações de planeio, o custo dos testes em escala reduzida é muito elevado em relação ao custo de projeto. Isso faz com que a maioria dos projetistas não opte por ensaios experimentais das novas embarcações em desenvolvimento. Ao longo dos últimos anos, o método de Savitsky foi largamente utilizado para se realizar estimativas de potência instalada de uma embarcação de planeio. Esse método utiliza um conjunto de equações semi-empíricas para determinar os esforços atuantes na embarcação, a partir dos quais é possível determinar a posição de equilíbrio de operação e a força propulsora necessária para navegar em uma dada velocidade. O método de Savitsky é muito utilizado nas fases iniciais de projeto, onde a geometria do casco ainda não foi totalmente definida, pois utiliza apenas as características geométricas principais da embarcação para realização das estimativas de esforços. À medida que se avança nas etapas de projeto, aumenta o detalhamento necessário das estimativas de desempenho. Para a realização, por exemplo, do projeto estrutural é necessária uma estimativa do campo de pressão atuante no fundo do casco, o qual não pode ser determinado pelo método de Savitsky. O método computacional implementado nesta dissertação, tem o objetivo de determinar as características do escoamento e o campo de pressão atuante no casco de uma embarcação de planeio navegando em águas calmas. O escoamento é determinado através de um problema de valor de contorno, no qual a superfície molhada no casco é considerada um corpo esbelto. Devido ao uso da teoria de corpo esbelto o problema pode ser tratado, separadamente, em cada seção, onde as condições de contorno são forçadamente respeitadas através de uma distribuição de vórtices.

Palavras chave: Embarcação de planeio, hidrodinâmica, projeto preliminar, escoamento potencial, distribuição de vórtices, teoria de corpo esbelto, impacto de formas bidimensionais.

ABSTRACT

NAKANISHI, H. C. **Computer model to evaluate the hydrodynamic performance of planing craft in calm water.** Master's Thesis – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

Generally, a planing craft is designed to achieve high speed levels. This performance attribute is directly related to the boat size and to the propeller plant power. Traditionally, during a boat design, performance analyses are carried out using results taken from systematic series or from others boat previously build by the shipyard and/or designer. Furthermore, performance attributes can be calculated by semi-empirical and/or statistic methods or by tests of reduced scale models. In the specific case of planing boats, the costs of reduced scale tests are too high compared to the design cost itself. Because of this, most designers do not perform experimental tests during the development of new boats. During the last years, the Savitsky method was extensively used to estimate planing craft effective power. The method uses a set of semi-empirical equations to calculate the forces acting on the boat, from which the equilibrium position and the required propeller thrust are determined. During the preliminary phases of planing craft design, the hull geometry hasn't been fully defined. Therefore, the Savitsky method is widely used during this phase, because it uses only the main geometrical characteristics to estimate the forces acting on the hull. Advancing toward the final phases of the design process, more detailed information is required. To execute the structural design, for example, the pressure field acting on the hull must be known, which can't be estimate using the Savitsky method. The main objective of the present study is to implement a computer method that can be used to estimate the fluid flow and pressure field acting on the hull of a boat moving with forward speed constant in calm water. The fluid flow around the hull is treated as a boundary value problem, in which the wetted hull surface is considered a slender body. The slender body theory enables to solve the problem separately, in each transverse section, where boundary conditions are respected by a sheet of vortices.

Keywords: Planing craft, hydrodynamics, potential flow, vortex sheet, hull design, slender body theory, 2D wedge impact.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Evolução da velocidade das embarcações de alta performance entre 1860 e 1905. Adaptada de (BLOUNT, 2014) 20
Figura 1.2 – Plantas do *yacht* S. Y. Arrow (BLOUNT, 2014) 21
Figura 1.3 - Relação resistência - peso para embarcações de planeio e deslocamento. Adaptada de (SAVITSKY, 1985) 21
Figura 1.4 - Plano de alto de uma embarcação de planeio típica. Adaptada de (TAUNTON, HUDSON e SHENOI, 2010) 22
Figura 1.5 - Plano de balisas modelo TMB- 3626. Adaptada de (CLEMMENT, 1963). 23
Figura 2.1 – (a) Hidroavião utilizado pela guarda costeira estadunidense. Retirada de (MORABITO, 2013); (b) embarcação de planeio utilizada pelo grupo fluvial da polícia militar do Estado do Pará (Imprensa Oficial do Estado, 2013) 28
Figura 2.2 - Ensaio de reboque de uma superfície de planeio realizado no Instituto Stevens. Retirada de (MORABITO, 2013) 29
Figura 2.3 - Forças atuantes na embarcação em regime de planeio. Adaptada de (SAVITSKY, 1964) 30
Figura 3.1 - Evolução da superfície molhada para uma embarcação de planeio típica (BLOUNT, 2014). (a) Regime de delocamento, (b) regime de semi-deslocamento, (c) regime de semi-planeio, (d) e (e) regime de planeio 39
Figura 3.2 - Característica do escoamento fluido em uma embarcação em regime de planeio. Adaptada de (BLOUNT, 2014) 41
Figura 3.3 - Zonas do escoamento. Adaptada de (SAVANDER, 1997) 43
Figura 3.4 - Regiões do problema de valor de contorno projetadas no plano $z = 0$. Adaptada de (SAVANDER, 1997) 44
Figura 3.5 – (a) Passagem de uma embarcação de planeio através de um sistema de coordenadas inercial, (b) Experimento de queda vertical de uma cunha (FALTINSEN, 2005) 46
Figura 3.6 - Geometria de uma seção do casco. Adaptada de (SAVANDER, MAKI e LAND, 2010) 46
Figura 3.7 - (a) Fase de impacto. (b) Fase de penetração. Adaptadas de (VORUS,

1996)....48
Figura 3.8 - Modelo físico do escoamento e aproximação matemática. Adaptada de (SAVANDER, SCORPIO e TAYLOR, 2002)....49
Figura 3.9 – Discretização da seção transversal em segmentos lineares. Adaptada de (SAVANDER, SCORPIO e TAYLOR, 2002)....54
Figura 3.10 - Modelo utilizado para o equilíbrio de forças. Adaptado de (SAVANDER, SCORPIO e TAYLOR, 2002)....61
Figura 4.1 - Mapa de velocidades das partículas na superfície livre. Retirada de (SAVANDER, 1997)....67
Figura 4.2 – Procedimento numérico para fase de impacto....75
Figura 4.3 - Procedimento numérico para fase de penetração....76
Figura 5.1 - Modelo utilizado por Wagner. Adaptada de (PAYNE, 1988)....78
Figura 5.2 – "Empilhamento" de fluido para direferentes ângulos de "V"....80
Figura 5.3 - Comparação coeficiente de massa adicional....82
Figura 5.4 – Comparação de $yc\tau$, $yb\tau$ e $vs\tau, \zeta$ para cunha de 20°....84
Figura 5.5 – Comparação coeficiente de pressão e, $\zeta = 0$ para cunha de 20°....85
Figura 5.6 - Comparação $CLd\tau$ para cunha de 20°....85
Figura 5.7 - $yc\tau$, $yb\tau$ e $vs\tau, \zeta$ para cunha de 10°....86
Figura 5.8 - $yc\tau$, $yb\tau$ e $vs\tau, \zeta$ para cunha de 20°....86
Figura 5.9 - $yc\tau$, $yb\tau$ e $vs\tau, \zeta$ para cunha de 25°....86
Figura 5.10 - Variação transversal do coeficiente de pressão para cunha de 10°....88
Figura 5.11 - Variação transversal do coeficiente de pressão para cunha de 20°....88
Figura 5.12 - Variação transversal do coeficiente de pressão para cunha de 25°....88
Figura 5.13 - Modelo 301 (KAPRYAN e BOYD, 1955)....89
Figura 5.14 - Campo de pressão para o modelo 301 na configuração do ensaio 2..90
Figura 5.15 - Campo de pressão para o modelo 301 na configuração do ensaio 9..91
Figura 5.16 - Intensidade dos vórtices e vetor velocidade do escoamento para o modelo 301 na configuração do ensaio 2....91
Figura 5.17 - Intensidade dos vórtices e vetor velocidade do escoamento para o modelo 301 na configuração do ensaio 9....92
Figura 5.18 - Comparação das simulações do modelo 301 para a configuração do ensaio 2....93
Figura 5.19 - Comparação das simulações do modelo 301 para a configuração do

ensaio 9 93
Figura 5.20 – Comparação da força propulsora e da resistência friccional 96
Figura 5.21 – Comparação dos comprimentos molhados da quilha e da quina 96
Figura 5.22 - Comparação do ângulo de *trim* e do calado na popa da embarcação . 96
Figura 5.23 - Modelo Fridsma - ângulo de "V" de 10°. Adaptado de (FRIDSMA, 1969) 98
Figura 5.24 - Comparação do ângulo de trim - embarcação com ângulo de "V" de 10° e LCG 60% 99
Figura 5.25 - Comparação do comprimento molhado médio - embarcação com ângulo de "V" de 10° e LCG 60% 99
Figura 5.26 - Comparação do resistência ao avanço - embarcação com ângulo de "V" de 10° e LCG 60% 99
Figura 5.27 - Comparação do ângulo de trim - embarcação com ângulo de "V" de 10° e LCG 65% 100
Figura 5.28 - Comparação do comprimento molhado médio - embarcação com ângulo de "V" de 10° e LCG 65% 100
Figura 5.29 - Comparação do resistência ao avanço - embarcação com ângulo de "V" de 10° e LCG 65% 100

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Características principais da embarcação ensaiada 38
Tabela 5.1 – Configurações utilizadas nas simulações numéricas 90
Tabela 5.2 - Características da embarcação utilizada nas análises numéricas 95
Tabela A.0.1 - Resultados experimentais do ensaio 2 para o modelo 301 107
Tabela A.0.2 – Resultados experimentais do ensaio 9 para o modelo 301 108

LISTA DE SÍMBOLOS

F_{NL}	número de Froude
U	velocidade de avanço da embarcação
g	aceleração da gravidade
L_{WL}	comprimento da linha d'água
R	resistência ao avanço da embarcação
W	peso da embarcação
T	força propulsora
D_f	resistência friccional
τ	ângulo de *trim* utilizado no método de Savitsky
LCG	posição longitudinal do centro de gravidade, medida a partir do espelho de popa
ϵ	ângulo de inclinação do eixo propulsor
N	resultante do campo de pressão que atua no fundo do casco no método de Savitsky
a	braço da resistência friccional em relação ao centro de gravidade
f	braço da força propulsora em relação ao centro de gravidade
c	braço da resultante do campo de pressão em relação ao centro de gravidade
L_k	comprimento molhado da quilha
L_c	comprimento molhado da quina
b	boca na quina da embarcação

d	calado medido no espelho de popa
C_{L_0}	coeficiente de sustentação da placa plana
λ	relação comprimento molhado médio – boca
C_v	número de Froude em relação à boca da embarcação
C_{L_β}	coeficiente de sustentação da superfície com ângulo de “V”
β	ângulo de “V” característico da embarcação
ρ	densidade do fluido
C_f	coeficiente de atrito
U_M	velocidade média no fundo do casco
S_m	área molhada da embarcação
Re	número de Reynolds
ν	viscosidade cinemática do fluido
C_{pres}	coeficiente relacionado ao centro do campo de pressão atuante no fundo da embarcação
l_p	distância de C_{pres} medida a partir do espelho de popa
R_T	resistência ao avanço total da embarcação
L_P	comprimento da quina
B_{PX}	máxima boca da quina
β_{mid}	ângulo de “V” em $L_p/2$
β_T	ângulo de “V” no espelho de popa
B_{PT}	boca da quina no espelho de popa
A_P	área da quina projetada no plano horizontal
∇	volume imerso do casco na posição estática
CA_P	centroide de A_P

F_{NV}	número de Froude volumétrico
Φ	potencial de velocidades da perturbação
∇^2	operador de Laplace
S_{cuw}	região da “quina seca” ou zona de impacto
S_{cw}	região da “quina molhada” ou zona de penetração
S_{fs}	superfície livre
v_n	velocidade normal relativa entre a superfície do casco e o escoamento
C_p	coeficiente de pressão
y_c	posição transversal onde a pressão torna-se igual à pressão atmosférica
y_b	raiz ou ponto de surgimento do *spray*
t	tempo dimensional
V	velocidade de impacto
$h(x,y)$	coordenada que define a geometria do casco
$\alpha(x,y)$	ângulo de *trim* local
$\beta(x,y)$	ângulo de “V” local
$h_0(x,y)$	distância entre um ponto no casco e a quilha
$z_{WL}(x)$	imersão da seção
$\eta(x,y)$	elevação da superfície livre
$Y_{ch}(x)$	posição transversal da quina da seção
v	velocidade transversal das partículas fluidas
w	velocidade vertical das partículas fluidas
v_s	velocidade tangencial ao corpo
v_n	velocidade normal ao corpo

v_{jet}	velocidade do *spray*
γ	intensidade da distribuição de vórtices
$\bar{v}_{escoamento}$	vetor velocidade do escoamento
$\bar{v}_{corpo}$	vetor velocidade do corpo
$\bar{n}$	normal à superfície do casco
u	velocidade longitudinal das partículas fluidas
$Y_{ch_{max}}$	máximo valor da meia boca da quina da embarcação
$\zeta = \frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_c(\tilde{x})}$	coordenada transversal adimensional
$b(\tilde{x}) = \frac{y_b(\tilde{x})}{y_c(\tilde{x})}$	posição do ponto de formação de *spray* escalonada no espaço de solução da condição cinemática
γ_c	intensidade da distribuição de vórtices entre $[0, y_c]$
κ	termo da solução da intensidade da distribuição de vórtices
γ_s	intensidade da distribuição de vórtices entre $[y_c, y_b]$
t_k	variável de integração utilizada na calculo de κ
P	pressão de uma partícula fluida
P_∞	pressão ao longe
$G = \frac{2gY_{ch_{max}}}{U^2}$	gravidade não dimensional
$\xi = \frac{y}{y_b}$	coordenada transversal adimensional utilizada na resolução da condição de contorno da continuidade da superfície livre
$\gamma^*(\tilde{x}, \xi)$	intensidade de vórtices integrada em x
$w^*(\tilde{x}, \xi)$	velocidade vertical integrada em x
$\tilde{C}_{L_d}(\tilde{x})$	coeficiente de sustentação dinâmica por unidade de comprimento

$\tilde{L}_d$	sustentação dinâmica por unidade de comprimento
$\tilde{C}_{D_d}(\tilde{x})$	coeficiente de arrasto dinâmico por unidade de comprimento
$\tilde{D}_d$	arrasto dinâmico por unidade de comprimento
n_x	componente da normal da superfície do casco na direção x
$C_{L_d}(\tilde{x})$	coeficiente de sustentação dinâmica
L_d	sustentação dinâmica
$C_{D_d}(\tilde{x})$	coeficiente de arrasto dinâmico
D_d	arrasto dinâmico
$\tilde{C}_{L_s}(\tilde{x})$	coeficiente de empuxo (sustentação hidrostática) por unidade de comprimento
$\tilde{L}_s$	empuxo por unidade de comprimento
$\tilde{C}_{D_s}$	coeficiente de arrasto hidrostático por unidade de comprimento
$C_{L_s}(\tilde{x})$	coeficiente de empuxo (sustentação hidrostática)
L_s	empuxo
$C_{D_s}(\tilde{x})$	coeficiente de arrasto hidrostático
D_s	arrasto hidrostático
x_t	posição longitudinal do espelho de popa
D_v	arrasto viscoso ou resistência de atrito friccional
α_s	ângulo do eixo propulsor
x_d	posição longitudinal do ponto de atuação da força de sustentação dinâmica
x_s	posição longitudinal do ponto de atuação da força de sustentação hidrostática

z_d	posição vertical do ponto de atuação da força de arrasto dinâmico
z_v	posição vertical do ponto de atuação da força de arrasto viscoso
z_s	posição vertical do ponto de atuação da força de arrasto hidrostático
x_p	posição longitudinal do propulsor
z_p	posição vertical do propulsor
VCG	posição vertical do centro de gravidade da embarcação
t_d	imersão do espelho de popa
Ω	função definida para resolução numérica da condição de contorno cinemática
$\bar{\kappa}$	termo da solução da intensidade da distribuição de vórtices
β_0	ângulo de “V” no primeiro trecho linear da seção
a_{m+1}	termos da expansão polinomial de Ω
$\overline{t_i}$	ponto médio do trecho linear i
λ_0	termo da solução da intensidade da distribuição de vórtices
T_i	função utilizada para resolução da condição de contorno cinemática
$B(a,b)$	função beta ou integral de Euler de primeiro tipo
$Q(t)$	termo da solução da intensidade da distribuição de vórtices
$F_h(a,b,c;z)$	função hipergeométrica de Gauss
$\tilde{a}(\tilde{x},1)$	aceleração transversal da partícula que é emitida no

	ponto C
I_{16_j}	termo da solução da condição de contorno da continuidade do deslocamento da superfície livre
I_{16a_j}	termo da solução da condição de contorno da continuidade do deslocamento da superfície livre
$\Gamma(\lambda)$	função gama
M	número de seções utilizadas na resolução da fase de impacto
K	número de seções utilizadas na resolução da fase de penetração
$\tilde{x}_{cuw}$	posição longitudinal do fim da fase de impacto
c	coordenada transversal onde a superfície da cunha cruza com a superfície do fluido
WF	fator de “empilhamento”
$\vec{F}$	força resultante do impacto
m	massa própria
m'	massa adicional aparente
$\vec{v}$	vetor velocidade
$C_{m'}$	coeficiente de massa adicional aparente
T	tempo adimensional
C_W	coeficiente de carregamento

SUMÁRIO

RESUMO iv

ABSTRACT v

LISTA DE FIGURAS vi

LISTA DE TABELAS ix

LISTA DE SÍMBOLOS x

1 INTRODUÇÃO 19

1.1 OBJETIVOS 26

1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO 27

2 O MÉTODO SEMI-EMPÍRICO DE SAVITSKY 28

2.1 HISTÓRICO DOS ESTUDOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS SOBRE SUPERFÍCIES DE PLANEIO 28

2.2 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE EQUILÍBRIO 30

2.2.1 PROPRIEDADES HIDRODINÂMICAS DE SUPERFÍCIES DE PLANEIO 32

2.2.2 RESULTADOS NO MÉTODO DE SAVITSKY 35

2.2.3 COMENTÁRIOS FINAIS SOBRE O MÉTODO DE SAVITSKY 36

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DA TEORIA DE IMPACTO 38

3.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO 41

3.2 TEORIA BIDIMENSIONAL DO IMPACTO DE CUNHAS 47

3.2.1 CONDIÇÃO CINEMÁTICA 49

3.2.2 CONDIÇÃO DINÂMICA 55

3.2.3 CONTINUIDADE DO DESLOCAMENTO DA SUPERFÍCIE LIVRE 58

3.2.4 EQUILÍBRIO DAS FORÇAS ATUANTES A EMBARCAÇÃO 60

4 RESOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO 64

4.1 CONDIÇÃO CINEMÁTICA 64

4.2 CONDIÇÃO DINÂMICA 67

4.3 CONTINUIDADE DO DESLOCAMENTO DA SUPERFÍCIE LIVRE 69

4.4 SIMPLIFICAÇÃO PARA O CASO DE UMA EMBARCAÇÃO PRISMÁTICA 70

4.5 PROCEDIMENTO UTILIZADO NA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO 72

5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS E COMPARAÇÃO COM RESULTADOS EXTRAÍDOS DA LITERATURA 77

5.1 IMPACTO DE UMA CUNHA PRISMÁTICA COM VELOCIDADE DE PENETRAÇÃO CONSTANTE 78

5.2 INFLUÊNCIA DO ÂNGULO DE “V” NO CAMPO DE PRESSÃO RESULTANTE DO IMPACTO 83

5.3 COMPARAÇÃO DO COEFICIENTE DE PRESSÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS 89

5.4 COMPARAÇÕES COM O MÉTODO DE SAVITSKY 94

5.5 COMPARAÇÕES DO DESEMPENHO HIDRODINÂMICO DE UMA EMBARCAÇÃO PRISMÁTICA COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS 97

6 CONCLUSÕES 101

BIBLIOGRAFIA 104

ANEXO A 107

1 INTRODUÇÃO

Em relação à forma do casco e ao modo como elas se deslocam sobre a superfície da água, as embarcações podem ser divididas em três tipos: deslocamento, semi-planeio e planeio. Uma embarcação de deslocamento é sustentada predominantemente pelo empuxo gerado pelo volume imerso do casco. Já uma embarcação de planeio é sustentada por forças de origem dinâmica oriundas do seu movimento sobre a água. Por último, uma embarcação de semi-planeio é sustentada pela combinação de forças dinâmicas e hidrostáticas.

Até 1860, a grande maioria das embarcações projetadas e construídas operava em regime de deslocamento. A tecnologia de planeio ainda não havia sido descoberta e acreditava-se que a máxima velocidade que uma embarcação poderia atingir era equivalente ao número de Froude $F_{NL} = 0{,}4$[1]. Nessa época, para elevar a velocidade de projeto da embarcação optava-se por um casco mais longo, e, consequentemente, com maior comprimento de linha d'água.

Com o surgimento dos motores a vapor, a melhoria do desempenho dos propulsores e o surgimento de novos materiais, que permitiram a construção de estruturas mais leves, surgiram embarcações que superavam o limite de velocidade até então vigente. Como pode ser observado na Figura 1.1, entre os anos de 1860 e 1905, há um aumento médio na velocidade máxima das embarcações de sete nós por década.

Entretanto, o aumento de velocidade observado nessas embarcações não é resultado do descobrimento da tecnologia de planeio e sim do aumento da potência dos motores, à maior eficiência dos propulsores e à redução do peso estrutural. A Figura 1.2 mostra as plantas do *yacht Arrow*. Seu casco é longo e estreito, além de possuir linhas côncavas na popa e seções arredondadas, o que configura o casco de uma embarcação de semi-planeio.

O aumento da velocidade possibilitou a descoberta do principal fenômeno físico relacionado às embarcações de planeio. Percebeu-se que, à medida que o valor de

---

[1] Número de Froude, $F_{NL} = \frac{U}{\sqrt{gL_{WL}}}$.

$F_{NL} = 0{,}4$ era ultrapassado, o volume imerso do casco diminuía em relação ao volume imerso na posição estática, ou seja, havia uma elevação do casco em relação à sua posição de repouso. Essa elevação resulta do surgimento de forças hidrodinâmicas devido ao movimento do casco sobre a superfície da água e ao aumento de velocidade.

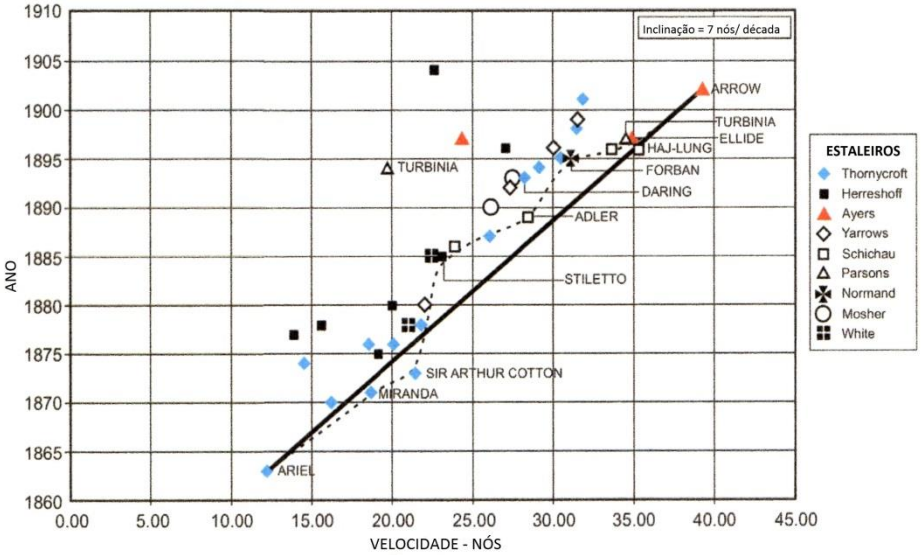

Figura 1.1 – Evolução da velocidade das embarcações de alta performance entre 1860 e 1905. Adaptada de (BLOUNT, 2014)

Para entender os outros aspectos que levaram ao desenvolvimento da forma do casco de planeio, é preciso entender as parcelas que formam a resistência ao avanço de uma embarcação navegando em águas calmas.

Essa resistência ao avanço depende de três fatores: o atrito entre a superfície do casco e a água, as ondas geradas pelo casco em movimento e a separação do escoamento na popa da embarcação. Em Engenharia Naval essas parcelas são conhecidas respectivamente por: resistência friccional, de ondas e de forma.

Quando uma embarcação navega com baixa velocidade, equivalente ao número de Froude $F_{NL} < 0{,}2$, as parcelas de resistência devido à formação de ondas e à separação do escoamento em sua popa são muito baixas. Nessas condições, a resistência ao avanço é predominantemente de atrito (aproximadamente 90%) e a embarcação é sustentada pelo empuxo gerado pelo seu volume submerso.

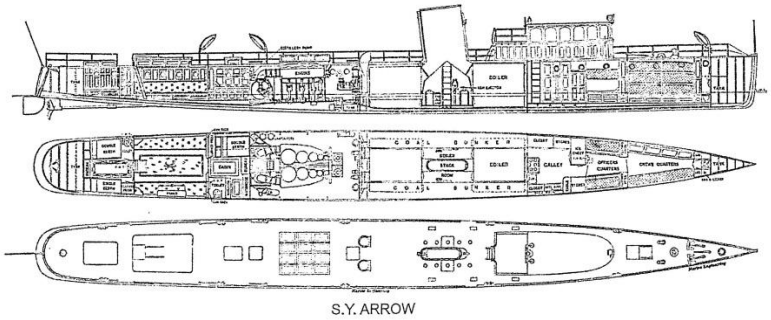

Figura 1.2 – Plantas do *yacht* S. Y. Arrow (BLOUNT, 2014)

À medida que a velocidade aumenta, o comprimento e a amplitude da onda formada pelo casco também aumentam. A energia necessária para criação dessa onda é drenada da planta propulsora da embarcação. Quando a onda gerada tem o mesmo comprimento do casco, a embarcação passa a “subir” na própria onda. A partir desse ponto, pequenos incrementos na velocidade passam a demandar valores de potência extremamente elevados. Esse é o limite de operação para embarcações que navegam em regime de deslocamento, já citado anteriormente.

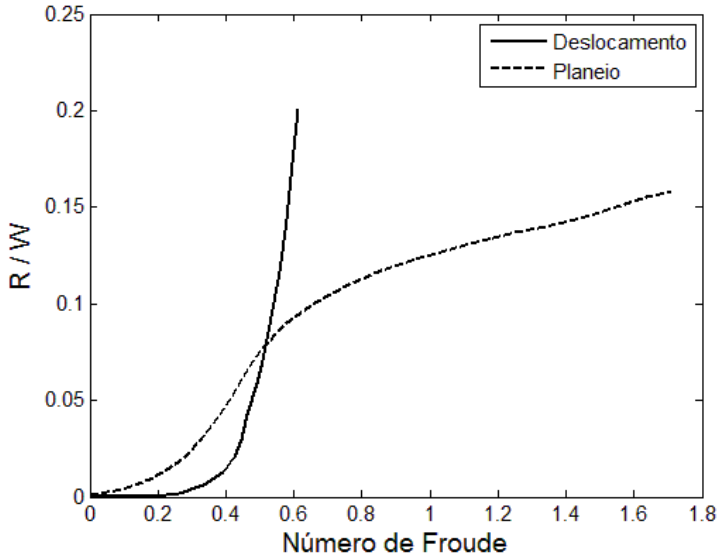

Figura 1.3 - Relação resistência - peso para embarcações de planeio e deslocamento. Adaptada de (SAVITSKY, 1985)

A Figura 1.3 compara a relação resistência – peso para cascos de deslocamento e planeio. Para baixos valores de número de Froude, uma embarcação de deslocamento é mais vantajosa, porém, a partir de $F_{NL} = 0{,}4$, a parcela de resistência de ondas aumenta rapidamente, fazendo com que vencer a resistência total chegue a níveis de potência requerida impraticáveis do ponto de vista técnico e econômico.

A partir de $F_{NL} = 0{,}4$, linhas planas na região da popa (como pode ser observado na Figura 1.4) tornam-se mais eficientes, pois essa forma geométrica diminui a queda de pressão devido à separação do escoamento, o que mantém a parcela de resistência relacionada a esse efeito em seu valor mínimo. Além disso, entre $F_{NL} = 1{,}0$ e $1{,}5$, ocorre redução da parcela de resistência relacionada à formação de ondas. Como a parcela de separação já foi levada a níveis mínimos (não há recirculação de escoamento na região da popa), a resistência ao avanço volta a ser predominantemente relacionada apenas ao atrito com o fluido, o que torna extremamente vantajosa a redução da área molhada do casco.

Sendo assim, o projeto de embarcações de planeio deve ser conduzido de tal forma que, com o aumento da velocidade, forças de sustentação hidrodinâmicas positivas surjam no fundo do casco, fazendo com que a embarcação desenvolva ângulo de *trim* de proa[2]. Na nova configuração, o volume imerso do casco é menor que o volume da condição estática e ocorre o "descolamento" do escoamento na popa e nas quinas[3] (Figura 1.5). Isso faz com que a área do casco em contato com a água diminua significativamente, o que reduz a parcela da resistência friccional.

A avaliação e o balanceamento cuidadoso de diversos atributos de desempenho, os quais são em geral conflitantes, é extremamente importante durante as etapas do projeto de uma embarcação. Nos trabalhos de (CALKINS, 1983), (RADOJCIC, 1990), (SIMÕES e ANDRADE, 2010) e (NAKANISHI, PALHARES, *et al.*, 2012) são propostas diferentes abordagens para o problema de projeto de uma embarcação de planeio.

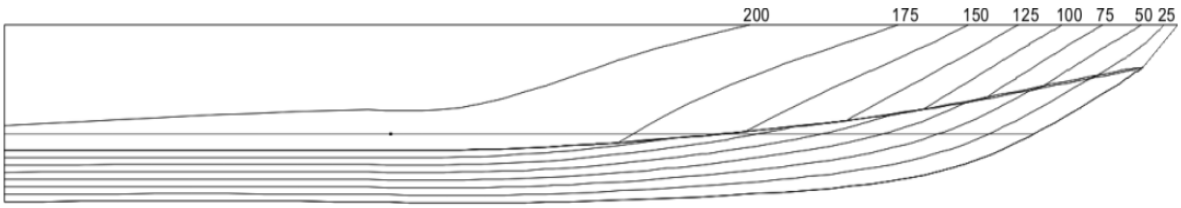

Figura 1.4 - Plano de alto de uma embarcação de planeio típica. Adaptada de (TAUNTON, HUDSON e SHENOI, 2010)

---

[2] O ângulo de *trim* está associado à rotação da embarcação em torno do eixo transversal. Para embarcações de planeio, esse ângulo pode ser interpretado como o ângulo de ataque da teoria de fólios.

[3] As embarcações de planeio modernas possuem uma ou mais quinas transversais ao longo do comprimento do casco. Essas descontinuidades geométricas forçam o "descolamento" do escoamento da superfície do casco.

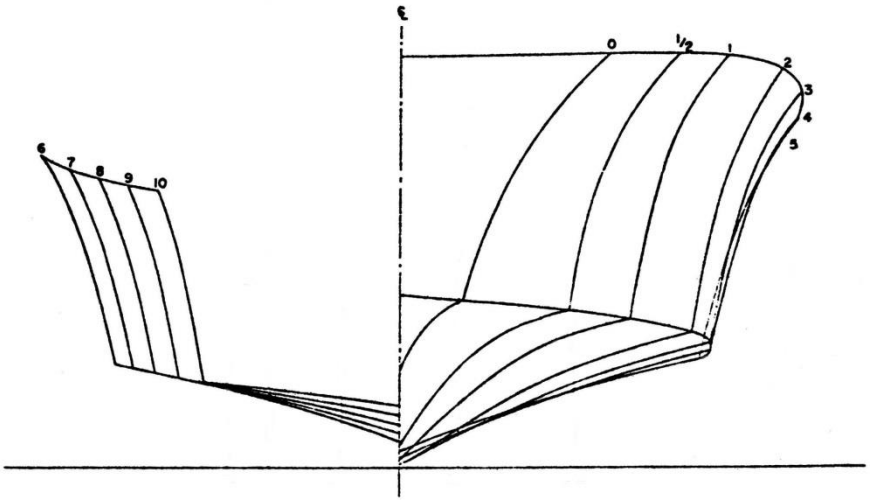

Figura 1.5 - Plano de balisas modelo TMB- 3626. Adaptada de (CLEMMENT, 1963).

Tradicionalmente, durante o projeto de uma embarcação, as análises de desempenho são realizadas a partir de resultados de embarcações já existentes, retirados de séries sistemáticas ou de embarcações já desenvolvidas pelo estaleiro e/ou projetista. Além disso, a determinação dos atributos de desempenho pode ser feita por métodos empíricos e/ou estatísticos simples, onde a embarcação é representada através de seus parâmetros geométricos principais; ou a partir de testes em modelos em escala reduzida ou protótipos.

No caso específico de embarcações de planeio, o custo dos testes em escala reduzida é muito elevado em relação ao custo de projeto. Isso faz com que a maioria dos projetistas não opte por ensaios experimentais das novas embarcações em desenvolvimento. Sendo assim, as análises de desempenho desse tipo de embarcação geralmente ficam restritas aos métodos empíricos e/ou estatísticos ou aos resultados já existentes.

Como dito anteriormente, uma embarcação de planeio é projetada para atingir elevados níveis de velocidade. Por esse motivo, dentre os diversos atributos a serem determinados durante as fases do projeto de uma embarcação de planeio, um dos mais importantes é a velocidade máxima que ela pode atingir para uma dada configuração de sua planta propulsora. Esse atributo está diretamente relacionado ao comportamento hidrodinâmico do casco em águas calmas, ou seja, sem a presença de ondas.

Um dos métodos mais utilizados para realizar estimativas desse atributo é o

apresentado em (SAVITSKY, 1964). Savitsky utilizou uma série de ensaios experimentais para desenvolver equações semi-empíricas para resistência ao avanço, sustentação e comprimentos molhados, além de um critério para *porpoising*[4]. Para o cálculo desses atributos são utilizados apenas os parâmetros geométricos principais da embarcação.

A grande vantagem do método desenvolvido por Savitsky é que as estimativas de desempenho podem ser realizadas através de uma planilha de cálculo simples ou através de diagramas encontrados em seu artigo original. Nesse método, a geometria da embarcação é tratada como uma superfície prismática, isto é, sem variação do ângulo de "V" e da largura da quina ao longo do comprimento do casco.

Entretanto, o método de Savitsky não pode ser utilizado para determinação das velocidades do escoamento e, consequentemente, do campo de pressão atuante no fundo do casco da embarcação.

Com o avanço da capacidade de processamento e armazenamento de dados dos computadores, houve também um grande avanço das técnicas de representação da geometria tridimensional do casco, dos métodos de análises dos atributos de desempenho e das técnicas de construção de embarcações.

Em relação aos métodos computacionais de análise de desempenho, pode-se citar, por exemplo, os métodos de CFD (*Computer Fluids Dynamics*), no qual o escoamento de um fluido ao redor de uma geometria qualquer é tratado como uma grande malha volumétrica e pode ser calculado através de suas condições de contorno. Se por um lado, os métodos de CFD podem resolver diferentes tipos de escoamento ao redor de um corpo arbitrário, por outro, em decorrência da grande complexidade de sua malha, consomem uma grande capacidade computacional, o que não permite a avaliação de um grande número de embarcações em um curto espaço de tempo.

A grande motivação desse trabalho é desenvolver um método computacional que permita estimar o campo de pressão atuante no fundo do casco de uma embarcação de planeio típica. Além disso, o método pode ser utilizado para avaliar a influência

---

[4] *Porpoising* é uma instabilidade dinâmica que aparece em embarcações navegando em regime de planeio. Ela está associada ao surgimento de movimentos periódicos *de pitch* mesmo sem a presença de ondas para excitar os movimentos.

das principais características geométricas do casco no campo de pressão, e, consequente, no desempenho em águas calmas da embarcação.

Como será visto ao longo do texto dessa dissertação, a perturbação causada no escoamento por uma embarcação de planeio navegando com velocidade constante em águas calmas é, predominantemente, bidimensional e contida no plano transversal (perpendicular à velocidade de avanço). Essa característica do escoamento permite tratar o problema hidrodinâmico separadamente em cada seção da embarcação, utilizando um método de faixas.

Além disso, o escoamento em torno do casco da embarcação é similar àquele resultante da queda vertical de uma cunha com velocidade de queda conhecida. Sendo assim, as características do escoamento em cada seção da embarcação são calculadas utilizando-se a teoria de impacto vertical de uma cunha. O escoamento em torno da cunha é tratado como um escoamento potencial.

O procedimento computacional desenvolvido nesta dissertação foi baseado em (SAVANDER, SCORPIO e TAYLOR, 2002), o qual pode ser considerado como uma evolução dos trabalhos de (SAVANDER, 1997), (VORUS, 1996) e (TULIN, 1957).

1.1 OBJETIVOS

O que se propõe nesse trabalho é a utilização de técnicas computacionais para estimar o desempenho em águas calmas de uma embarcação de planeio. Pretende-se ainda comparar os resultados dessa técnica com os obtidos por métodos empíricos e semi-empíricos e também com resultados extraídos da literatura.

O emprego dessa técnica configura-se como uma alternativa aos métodos de CFD tradicionais e aos ensaios em modelos em escala reduzida. Vale ressaltar que o método aqui proposto não substitui ensaios em tanques de provas, uma vez que é muito difícil simular em um computador todos os fenômenos físicos que ocorrem durante a navegação de qualquer tipo de embarcação.

Ao final desse trabalho, espera-se apresentar uma ferramenta alternativa, de baixo custo computacional, para se realizar estimativas de desempenho em águas calmas de uma embarcação de planeio. Devido ao seu baixo custo computacional, pretende-se que a ferramenta possa ser integrada a um procedimento automatizado de projeto.

Sendo assim, a presente dissertação tem como principais objetivos:

- O desenvolvimento de um método computacional para realizar estimativas de desempenho em águas calmas de embarcação de planeio. Além de determinar o valor da resistência ao avanço, comprimentos molhados e ângulo de *trim* da embarcação, o método pode ser utilizado para calcular o campo de pressão atuante no fundo do casco, o qual pode ser utilizado para realização do projeto estrutural da embarcação. Esse método baseia-se no desenvolvimento teórico retirado de (SAVANDER, SCORPIO e TAYLOR, 2002). O algoritmo numérico desenvolvido para resolução das condições de contorno do problema é a principal contribuição científica dessa dissertação;
- A realização de simulações numéricas para comparar os resultados calculados pela técnica desenvolvida com aqueles obtidos por métodos empíricos e, também, com resultados experimentais extraídos da literatura.

1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Com o intuito de situar o leitor no tema estudado nesta dissertação, o **Capítulo 2** abordará, de maneira detalhada, o método semi-empírico de (SAVITSKY, 1964). Serão descritos os principais esforços atuantes em uma embarcação de planeio típica e como eles podem ser calculados através das equações semi-empíricas desenvolvidas por Savitsky, a fim de encontrar a posição de equilíbrio da embarcação.

O **Capítulo 3** inicia-se com uma explicação das principais características do escoamento em torno do casco de uma embarcação de planeio. Em seguida, será apresentada a teoria de impacto vertical de uma cunha, e como ela pode ser utilizada para determinar o desempenho de uma embarcação de planeio utilizando um método de faixas (SAVANDER, SCORPIO e TAYLOR, 2002). Também serão definidas as hipóteses e as condições de contorno do problema de impacto.

Após fundamentar os aspectos teóricos da teoria de impacto, o **Capítulo 4** apresentará a maneira na qual as condições de contorno são tratadas numericamente para implementação do procedimento computacional. Posteriormente, o problema numérico será simplificado considerando-se que a geometria do casco da embarcação é prismática. Ao fim desse capítulo, será descrito o procedimento numérico utilizado para resolver o problema de impacto.

No **Capítulo 5** serão apresentadas as simulações numéricas do programa desenvolvido nesta dissertação de mestrado, com o objetivo avaliar os resultados encontrados e compará-los com aqueles extraídos da literatura.

Finalmente, as conclusões obtidas após a realização do trabalho serão expostas no **Capítulo 6**. Também serão feitas algumas sugestões de trabalhos futuros.

2 O MÉTODO SEMI-EMPÍRICO DE SAVITSKY

2.1 HISTÓRICO DOS ESTUDOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS SOBRE SUPERFÍCIES DE PLANEIO

Nos anos 1930 havia uma grande necessidade de melhoria do desempenho aerodinâmico e hidrodinâmico dos hidroaviões. Na época, não existiam muitas pistas de pouso e o comprimento delas não era longo o suficiente para aviões cada vez maiores, por isso, os hidroaviões eram uma solução atrativa para o problema de pouso e decolagem.

A Figura 2.1(a) mostra um hidroavião típico utilizado pela guarda costeira estadunidense nos anos 1950. A parte frontal do avião assemelha-se muito ao casco de uma embarcação de planeio Figura 2.1(b).

Nesse contexto, o estudo de superfícies de planeio iniciou-se não para o desenvolvimento de embarcações, e sim, para melhoria das características aerodinâmicas e hidrodinâmicas de hidroaviões.

Um dos trabalhos teóricos pioneiros sobre superfícies de planeio foi realizado por Wagner (WAGNER, 1932) na Alemanha. Já nos Estados Unidos, pode-se destacar os estudos experimentais desenvolvidos pelo Comitê Nacional para o Aconselhamento em Aeronáutica (NACA – *National Advisory Commitee on Aeronautics*).

Figura 2.1 – (a) Hidroavião utilizado pela guarda costeira estadunidense. Retirada de (MORABITO, 2013); (b) embarcação de planeio utilizada pelo grupo fluvial da polícia militar do Estado do Pará (Imprensa Oficial do Estado, 2013)

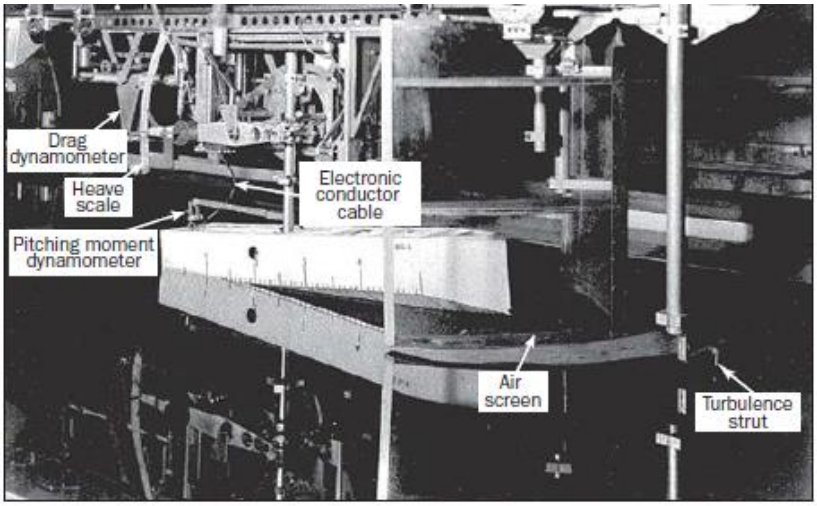

Figura 2.2 - Ensaio de reboque de uma superfície de planeio realizado no Instituto Stevens. Retirada de (MORABITO, 2013)

Durante a Segunda Guerra Mundial, foi construído um tanque de reboque de alta velocidade no Instituto Stevens de Tecnologia (*Stevens Intitute of Technology*) para o teste de hidroaviões. Juntos, o NACA e o Instituto Stevens realizaram uma série de experimentos com superfícies de planeio prismáticas (Figura 2.2). Nesses testes, os parâmetros geométricos eram variados um a um para avaliar sua influência nos atributos de desempenho dos cascos.

O surgimento de novas tecnologias, como porta aviões, eliminaram a necessidade de veículos que podiam decolar da água. Além disso, em 1958, após o lançamento do primeiro satélite artificial ao espaço (*Sputnik*), o NACA foi reorganizado e se tornou a agência estadunidense de pesquisas espaciais (NASA – *National Aeronautics and Space Administration*).

A partir desse momento, os estudos e experimentos realizados para a melhoria das características dos hidroaviões passaram a ser utilizados para o desenvolvimento de embarcações de planeio.

Foram os experimentos desenvolvidos pelo NACA e pelo Instituto Stevens de Tecnologia que Daniel Savitsky (1964) utilizou para desenvolver o método semi-empírico para resistência ao avanço, sustentação, comprimentos molhados, e *porpoising*. Os detalhes desse método serão discutidos na próxima seção.

2.2 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE EQUILÍBRIO

Como dito anteriormente, o método apresentado em (SAVITSKY, 1964) é, ainda hoje, um dos mais utilizados para se realizar estimativas de potência efetiva de embarcações de planeio.

Savitsky utilizou uma série de ensaios experimentais para desenvolver equações semi-empíricas para sustentação, resistência ao avanço, comprimentos molhados, ângulo de *trim* e estabilidade dinâmica (*porpoising)* para superfícies de planeio navegando com velocidade constante.

As forças que atuam na embarcação durante o regime de planeio e os principais parâmetros geométricos estão representadas na Figura 2.3.

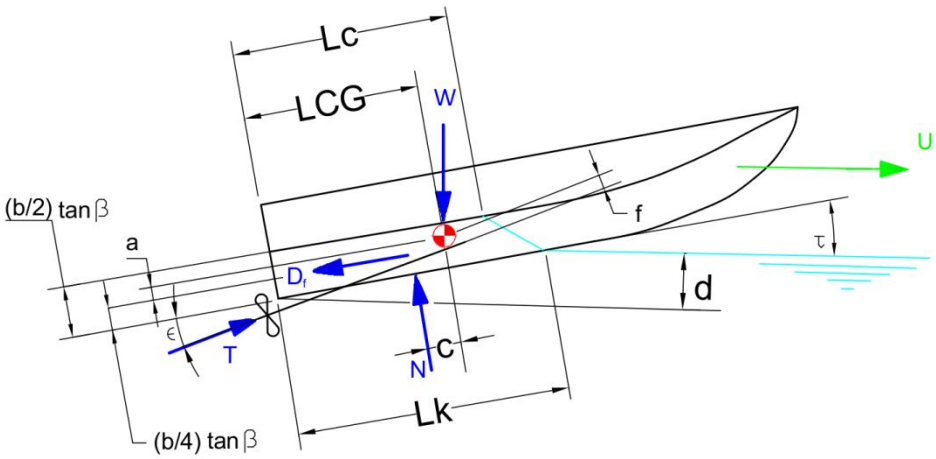

Figura 2.3 - Forças atuantes na embarcação em regime de planeio. Adaptada de (SAVITSKY, 1964)

Onde:

T – força propulsora;

W - peso da embarcação;

D_f –resistência friccional;

τ – ângulo de *trim,* medido entre a quilha e a linha calma da superfície;

LCG – distância longitudinal do centro de gravidade, medida a partir do espelho de popa;

ϵ – ângulo de inclinação do eixo do propulsor, medido em relação à quilha;

N – resultante do campo de pressão que atua no fundo do casco;

a – distância entre D_f e CG (medida perpendicular a D_f);

f - distância entre T e CG (medida perpendicular a T);

c - distância entre N e CG (medida perpendicular a N);

L_k – comprimento molhado da quilha;

L_c – comprimento molhado do quina;

U – velocidade de avanço;

b – boca na quina da embarcação;

d – calado da quilha medido no espelho de popa.

Com o intuito de determinar a atitude da embarcação, é preciso resolver o sistema resultante das forças que atuam no casco. Para o equilíbrio de forças verticais:

$$W = N\ \cos\tau + T\ \sin(\tau + \epsilon) - D_f\ \sin\tau \tag{1}$$

Para o equilíbrio de forças horizontais:

$$T\ \cos(\tau + \epsilon) = D_f\ \cos\tau + N\ \sin\tau \tag{2}$$

E para o equilíbrio dos momentos (em relação ao centro de gravidade):

$$N\,c + D_f\,a = T\,f \tag{3}$$

A posição de equilíbrio da embarcação é determinada através da resolução do sistema formado pelas equações (1), (2) e (3). Substituindo a equação (1) em (2), chega-se uma expressão simplificada para a força propulsora:

$$T\cos\epsilon = W\sin\tau + D_f \tag{4}$$

E substituindo (4) em (1):

$$N = \frac{W[1 - \sin\tau\sin(\tau + \epsilon)\,]}{\cos\tau} \tag{5}$$

Finalmente, substituindo (4) e (5) em (3):

$$W\left\{\frac{[1 - \sin\tau\sin(\tau + \epsilon)\,]}{\cos\tau}c - f\sin\tau\right\} + D_f(a - f) = 0 \tag{6}$$

A equação (6) sintetiza o sistema anterior em uma única equação. Os valores de W, ϵ, a e f dependem apenas da geometria, da configuração dos pesos e da instalação propulsora da embarcação. Sendo assim, para o sistema ser resolvido, é preciso

determinar os valores de τ, D_f e c, os quais são, respectivamente, o ângulo de *trim* de equilíbrio, o valor da componente da resistência de atrito e o braço da força resultante do campo de pressão atuante no fundo casco.

A componente friccional está diretamente relacionada à área molhada do casco da embarcação. Essa área pode ser determinada através das características geométricas da embarcação e do ângulo de *trim*. O mesmo acontece para o valor c. Portanto, o problema de equilíbrio da embarcação se reduz à determinação de apenas uma variável, o ângulo de *trim*.

2.2.1 PROPRIEDADES HIDRODINÂMICAS DE SUPERFÍCIES DE PLANEIO

Como dito anteriormente, Savitsky utilizou uma série de ensaios experimentais realizados pelo NACA e pelo Instituto Stevens para desenvolver equações semi-empíricas para sustentação, comprimentos molhados e a posição do centro de pressão da embarcação.

2.2.1.1 SUSTENTAÇÃO

A sustentação de uma embarcação de planeio é atribuída a dois efeitos físicos diferentes: aos efeitos dinâmicos causados pela passagem do casco pela superfície da água e à força de empuxo devido ao volume deslocado pela embarcação.

Quando a embarcação navega com baixa velocidade, a parcela de empuxo é predominante, à medida que a velocidade aumenta a parcela dinâmica ganha importância. Em altas velocidades, a parcela dinâmica é responsável pela maior parte da sustentação.

A sustentação de uma superfície de planeio é baseada na combinação desses dois efeitos. A equação (7) é uma expressão empírica para o coeficiente de sustentação de uma superfície de planeio plana, isto é, sem ângulo de “V”. É interessante destacar que, à medida que a velocidade da embarcação aumenta, a segunda

parcela da equação, relacionada ao empuxo, diminui.

$$C_{L_0} = \tau^{1,1}\left(0{,}0120\,\lambda^{1/2} + \frac{0{,}0055\,\lambda^{5/2}}{{C_v}^2}\right) \tag{7}$$

Onde:

C_{L_0} – coeficiente de sustentação da placa plana, sem ângulo de "V";

$\lambda = \frac{L_k + L_c}{2b}$ – relação comprimento molhado médio – boca;

$C_v = \frac{U}{\sqrt{g\,b}}$ – número de Froude em relação à boca da embarcação[5];

Com a inclusão do ângulo de "V", a pressão de estagnação no bordo de ataque da superfície[6] é reduzida. A expressão que relaciona os coeficientes de sustentação é dada por:

$$C_{L_\beta} = C_{L_0} - 0{,}0065\beta\,{C_{L_0}}^{0{,}60} \tag{8}$$

Onde:

C_{L_β} – coeficiente de sustentação da superfície com ângulo de "V";

β – ângulo de "V" característico da embarcação.

O coeficiente de sustentação C_{L_β}, por sua vez, é definido por:

$$C_{L_\beta} = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho\,U^2 b^2} \tag{9}$$

2.2.1.2 COMPONENTE DE ATRITO

A componente de atrito da resistência ao avanço é determinada através da

---

[5] Tradicionalmente, em engenharia naval utiliza-se o valor do comprimento de linha d'água da embarcação como medida de seu porte. Porém, para cascos de planeio, o valor do comprimento molhado médio varia com o ângulo de *trim* e com a velocidade. Como a boca molhada do casco permanece aproximadamente constante, esse valor é escolhido como medida de seu porte.

[6] A inclusão do ângulo está relacionada à melhoria do desempenho da embarcação em ondas, sem o qual os esforços na estrutura devido ao impacto do casco na superfície da água seriam muito elevados.

expressão:

$$D_f = \frac{1}{2}\rho\, U_M{}^2 S_m\, C_f \tag{10}$$

Onde:

ρ – densidade do fluido;

C_f – coeficiente de atrito;

U_M – velocidade média no fundo do casco;

S_m – área molhada da embarcação.

O coeficiente de atrito utilizado por Savitsky é o proposto por Schoenherr:

$$log\left(Re\, C_f\right) = \frac{0{,}242}{\sqrt{C_f}} \tag{11}$$

Onde:

Re – número de Reynolds, baseado em U_M e no comprimento molhado médio,

$$Re = \frac{U_M\, \lambda\, b}{\nu} \tag{12}$$

ν – viscosidade cinemática do fluido.

A velocidade média no fundo da embarcação é menor que a velocidade de avanço, já que há um aumento da pressão do fluido devido à passagem do casco. Savitsky e Ross (SAVITSKY e ROSS, 1952) desenvolveram expressões para relação U_M/U aplicáveis para faixa de velocidade de C_v = 1,0 a 13,0. Entretanto, os resultados são apresentados, em (SAVITSKY, 1964), apenas em forma de gráficos. A expressão geral da razão U_M/U pode ser encontrada do trabalho de (HADLER, 1966).

$$\frac{U_M}{U} = \left[1 - \frac{0{,}012\, \lambda^{1/2}\, \tau^{1.1} - 0{,}0065\beta \left(0{,}012\, \lambda^{1/2}\, \tau^{1,1}\right)^{0,60}}{\lambda\, \cos\tau}\right]^{1/2} \tag{13}$$

Finalmente, a superfície molhada do casco pode ser determinada por:

$$S_m = \frac{\lambda\, b^2}{\cos\beta} \tag{14}$$

2.2.1.3 CENTRO DO CAMPO DE PRESSÃO ATUANTE NA EMBARCAÇÃO

Como dito anteriormente, o campo de pressão atuante no fundo do casco da embarcação é resultado de efeitos dinâmicos e estáticos. Baseados nos resultados de uma série de ensaios experimentais Savitsky e Neidinger (1954) desenvolveram uma expressão semi-empírica para o valor do centro de pressão C_{pres}:

$$C_{pres} = \frac{l_p}{\lambda\, b} = 0.75 - \frac{1}{5.21\left(\frac{C_v}{\lambda}\right)^2 + 2.39} \tag{15}$$

Onde:

l_p – distância de C_{pres} medida a partir do espelho de popa.

2.2.2 RESULTADOS NO MÉTODO DE SAVITSKY

A resolução analítica do sistema de equações apresentado na seção anterior não é simples. Savitsky propõe um processo iterativo a fim de encontrar o ângulo de *trim* (τ_e) de equilíbrio. A partir dos parâmetros geométricos e da configuração de carga da embarcação é possível calcular C_{L_β} a partir da equação (9). Em seguida, utilizando uma estimativa inicial do ângulo de *trim*, determinar-se o valor do comprimento molhado (λ) médio através das equações (8) e (7). Com λ determina-se o valor da resistência de atrito e do centro do campo de pressão através das expressões (10) e (15) respectivamente. Os valores de τ, D_f e c são então inseridos em (6) para verificar se o equilíbrio da embarcação foi atingido.

Uma vez determinado o valor do ângulo de trim de equilíbrio τ_e, as demais propriedades da embarcação podem ser determinadas por:

$$R_T = W \tan\tau_e + \frac{D_{f_e}}{\cos\tau_e} \tag{16}$$

$$L_k = \lambda_e b + \frac{b}{2\pi}\frac{\tan\beta}{\tan\tau_e} \tag{17}$$

$$L_c = \lambda_e b - \frac{b}{2\pi}\frac{\tan\beta}{\tan\tau_e} \tag{18}$$

$$d = L_k \sin\tau_e \tag{19}$$

Onde:

R_T – resistência ao avanço total da embarcação;

L_k – comprimento molhado da quilha;

L_c – comprimento molhado da quina;

d – calado da quilha medido no espelho de popa.

2.2.3 COMENTÁRIOS FINAIS SOBRE O MÉTODO DE SAVITSKY

As últimas seções apresentaram de maneira breve e resumida o método desenvolvido por Savitsky para cálculo do desempenho de embarcações prismáticas em regime de planeio. Foram apresentadas expressões para sustentação, resistência ao avanço, comprimentos molhados e um método para determinar o ângulo de *trim* de equilíbrio.

Para uma dada velocidade, essas características podem ser determinadas através das características geométricas e de operação principais da embarcação, são elas: peso, posição do centro de gravidade (longitudinal e vertical), boca da quina, ângulo de “V”, ângulo do eixo propulsor e braço da força propulsora. Além disso, o método pode ser facilmente implementado em uma planilha de cálculo simples.

Entretanto, o método de Savitsky não pode ser utilizado para estimar o campo de pressão atuante no fundo do casco da embarcação. Como já dito anteriormente, a principal motivação dessa dissertação é desenvolver um método computacional que permita capturar o campo de velocidades do escoamento, a partir do qual se possa realizar uma estimativa do campo de pressão.

Esse método computacional é baseado na teoria potencial de impacto vertical de uma cunha. O escoamento bidimensional em torno de algumas seções é determinado através de uma distribuição de vórtices. Em seguida, o resultado é integrado ao longo da embarcação para determinação do campo de pressão atuante

no fundo do casco.

No próximo capítulo, serão apresentados os aspectos teóricos relacionados ao problema potencial do impacto vertical de uma cunha e como o resultado pode ser utilizado para determinar o desempenho de uma embarcação navegando com velocidade constante.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DA TEORIA DE IMPACTO

No capítulo anterior foram abordados os efeitos dos principais parâmetros geométricos que influenciam o desempenho de uma embarcação de planeio em águas calmas. Nesta seção, o problema de valor de contorno será apresentado, porém, antes de avançar, é fundamental entender as características do escoamento fluido em torno do casco de uma embarcação de planeio típica.

O projeto desse tipo de embarcação é conduzido de tal maneira que, com o movimento do casco sobre a água, surja pressão hidrodinâmica suficiente para elevar a embarcação em relação à sua posição estática. Além disso, a forma do casco com quinas e a descontinuidade no espelho de popa fazem com que o escoamento separe nessas regiões. A diminuição do volume imerso e a separação do escoamento causa uma redução significativa da área molhado do casco, reduzindo assim a resistência friccional.

A Figura 3.1 apresenta uma sequência de fotografias do ensaio de reboque de um modelo de uma embarcação típica de planeio. As características principais da embarcação encontram-se na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Características principais da embarcação ensaiada[7]

Peso (W)	45,4	mt
Comprimento da quina (L_P)	22,9	m
Máxima boca da quina (B_{PX})	4,1	m
Ângulo de “V” em $L_p/2$ (β_{mid})	21,7	deg
Ângulo de “V” no espelho de popa (β_T)	20	deg
L_P/B_{PX}	5,6	
B_{PT}/B_{PX}	0,937	
$A_P/\nabla^{2/3}$	6,3	
$L/\nabla^{1/3}$	6,5	
$(CA_P - LCG)/L_P$	14,3%	

A Figura 3.1.a é uma fotografia da embarcação navegando em regime de deslocamento. Nessa velocidade ocorre a recirculação do escoamento na popa e o costado permanece imerso. Na Figura 3.1.b a velocidade corresponde ao regime de

[7] O significado de alguns dos símbolos presentes na tabela foram suprimidos, porém, eles podem ser consultados na lista de símbolos.

semi-deslocamento; começa a acontecer o descolamento do escoamento na popa e inicia-se a formação da camada de *spray*. No regime de semi-planeio (Figura 3.1.c), o escoamento já se descolou totalmente na popa e a camada de *spray* já está desenvolvida, porém o escoamento continua aderindo ao costado. No regime de planeio (Figura 3.1.d e Figura 3.1.e), o escoamento descola, tanto no espelho quanto nas quinas e a área molhada do casco reduz-se significativamente em relação à posição estática (o limite a vante do comprimento molhado da quilha passa da balisa 19 para a balisa 11).

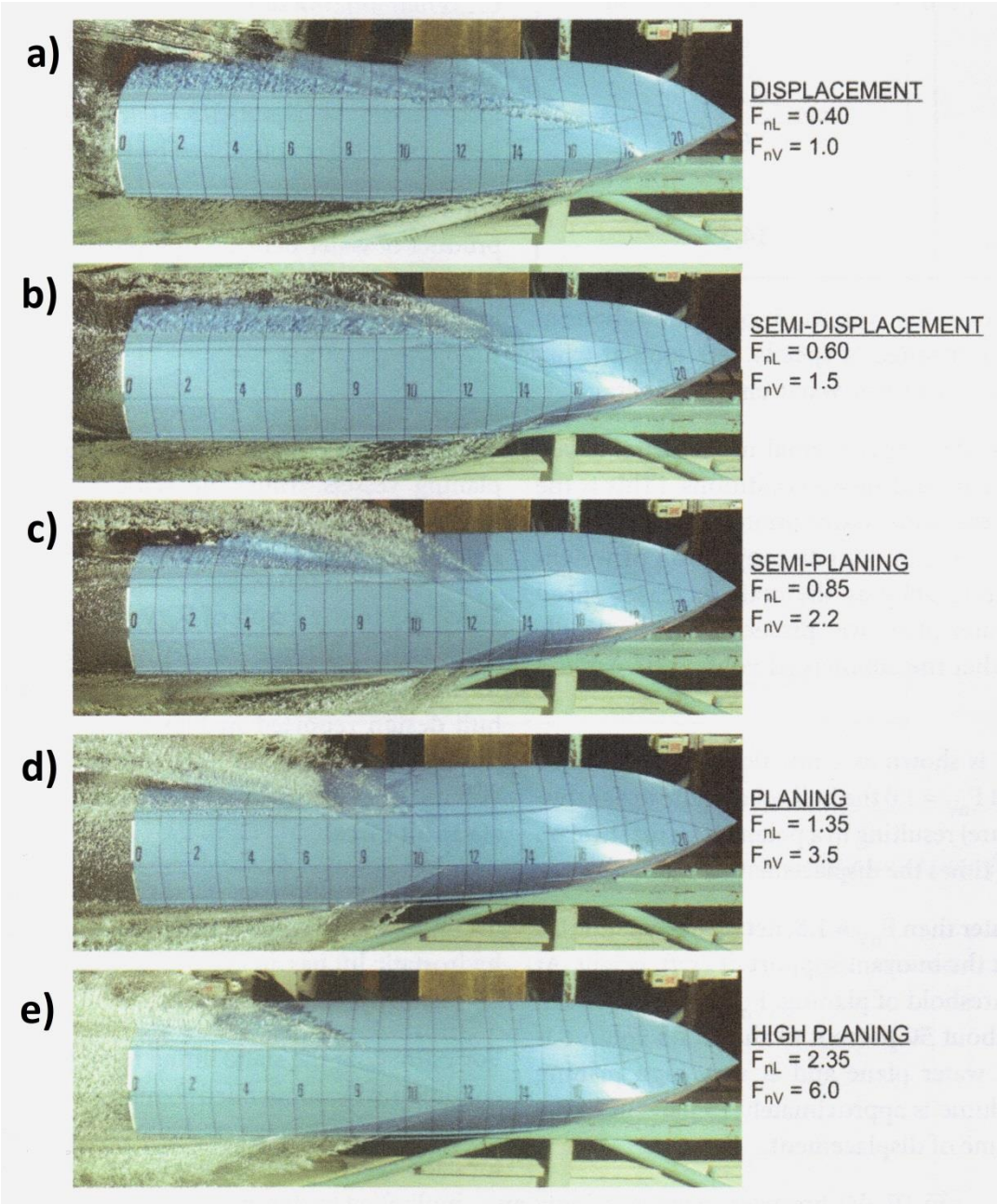

Figura 3.1 - Evolução da superfície molhada para uma embarcação de planeio típica (BLOUNT, 2014). (a) Regime de delocamento, (b) regime de semi-deslocamento, (c) regime de semi-planeio, (d) e (e) regime de planeio

Com maiores incrementos na velocidade a área de sustentação se reduz ainda mais, o comprimento molhada da quilha (L_k) aumenta (devido à redução do ângulo de trim) e o comprimento molhado da quina (L_c) diminui. No limite em que L_c tende a zero, a embarcação torna-se dinamicamente instável.

Como exposto nos parágrafos acima e na Figura 3.1, quando uma embarcação passa do regime de deslocamento para o de planeio sua área molhada se reduz significativamente. Esse efeito é resultado do surgimento de forças dinâmicas no fundo do casco que elevam a embarcação em relação a sua posição estática. Sendo assim, uma embarcação opera em regime de planeio quando a maior parte do seu peso é sustentado por forças dinâmicas.

Não é possível fazer uma definição do início do regime de planeio baseado apenas em velocidade, uma vez que a geometria do casco e o peso da embarcação também influenciam nesse efeito. Nesta dissertação de mestrado, será considerado que a velocidade mínima para que a embarcação atinja o regime de planeio é aquela equivalente ao número de Froude volumétrico $F_{NV} = 3{,}0$. Essa decisão está apoiada no fato de F_{NV} considerar o peso da embarcação e nas comparações com resultados experimentais encontrados em (SAVANDER, MAKI e LAND, 2010).

Na Figura 3.2, é apresentada uma representação do escoamento em torno do casco de uma embarcação em regime de planeio. A curva vermelha representa a linha de estagnação do escoamento, onde ocorre o máximo valor de pressão. A região formada por essa linha, L_c e o espelho de popa é a zona de pressão do escoamento; é nessa área que atuam as forças hidrodinâmicas e hidrostáticas que sustentam a embarcação. A zona de *spray* é definida pela curva azul e pela linha de estagnação. O *spray* é uma camada muito fina de água, onde a pressão é, aproximadamente, igual à pressão atmosférica. O vetor velocidade na região de *spray* pode ser entendido como a reflexão do vetor velocidade do escoamento incidente em relação à linha de estagnação. O ponto onde ocorre essa reflexão é conhecido como raiz do *spray*.

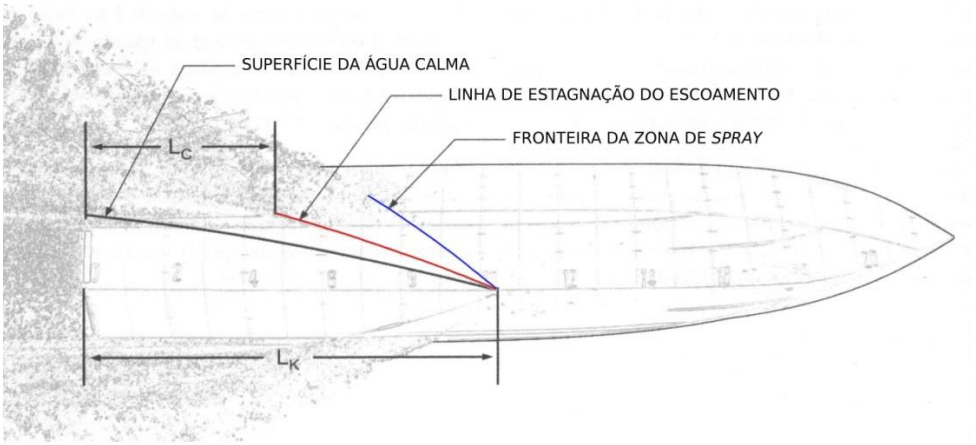

Figura 3.2 - Característica do escoamento fluido em uma embarcação em regime de planeio. Adaptada de (BLOUNT, 2014)

3.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO

Nessa dissertação de mestrado, o fenômeno físico estudado é o de uma embarcação navegando na superfície livre em águas calmas. Considera-se que a embarcação navega com velocidade constante e em regime de planeio, ou seja, o escoamento não adere ao costado nem ao espelho de popa ($F_{NV} \geq 3{,}0$).

Para resolução desse problema hidrodinâmico as seguintes hipóteses são feitas:

1. O fluido é considerado incompressível;
2. O fluido é considerado invíscido;
3. O escoamento é irrotacional, o que, junto das hipóteses 1 e 2, torna o escoamento potencial;
4. O *spray* gerado pelo escoamento sobre o casco não será considerado como parte do problema hidrodinâmico.

A solução do problema proposto é equivalente à solução de um problema de valor de contorno. A equação fundamental que deve ser respeitada por esse escoamento é a equação de Laplace, dada por[8]:

[8] Para o desenvolvimento da equação (20) foi utilizado um sistema de coordenadas fixo à embarcação. A origem desse sistema de coordenadas permanece fixa ao ponto de intersecção da superfície do fluido com a quilha da embarcação. O eixo x aponta para popa do casco, o eixo y aponta para boreste e o eixo z aponta para cima, como pode ser observado na Figura 3.4.

$$\nabla^2 Ux + \nabla^2 \Phi = 0 \tag{20}$$

Onde:

U – velocidade de avanço da embarcação;

Φ – potencial de velocidades da perturbação.

A primeira parcela da equação (20)**Erro! Fonte de referência não encontrada.** epresenta o potencial devido à velocidade de avanço da embarcação, enquanto que a segunda parcela da equação representa a perturbação causada no escoamento devido ao movimento do casco.

A primeira parcela da expressão (20) respeita automaticamente a equação de Laplace. Portanto, o problema passa a ser determinar o potencial da perturbação no escoamento.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{21}$$

A zona de pressão pode ser dividida em outras duas zonas do escoamento. A primeira corresponde à região em que a linha de estagnação ainda não atingiu a quina, essa região é denominada por região da “quina seca” (S_{cuw}). O restante da zona de sustentação é denominado por região da “quina molhada” (S_{cw}). A zona de spray e o restante da superfície livre devem respeitar a mesma condição de contorno e serão denominadas por S_{fs}. As zonas do escoamento estão representadas na Figura 3.3 e na Figura 3.4.

Além da equação de Laplace, o escoamento deverá respeitar também as condições de contorno específicas desse problema e que podem ser representadas pelas seguintes equações:

$$v_n(x, y) = 0, (x, y) \in S_{cuw}, S_{cw} \tag{22}$$

$$Cp(x, y) = 0, (x, y) \in S_{fs} \tag{23}$$

Onde:

v_n – velocidade normal relativa entre a superfície do casco e o escoamento;

C_p – coeficiente de pressão.

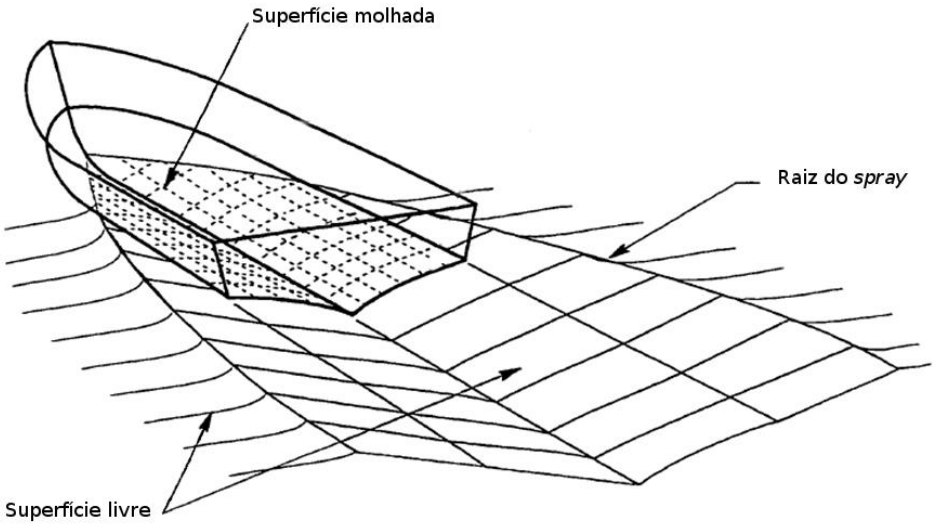

Figura 3.3 - Zonas do escoamento. Adaptada de (SAVANDER, 1997)

A expressão (22) representa a condição cinemática que deve ser respeitada na superfície molhada do casco, para que não haja penetração do escoamento nessa superfície. Já a expressão (23), representa a condição dinâmica que deve ser satisfeita na superfície livre do escoamento, a fim de que a pressão do escoamento na superfície livre seja igual à pressão atmosférica.

Como foi dito anteriormente, a camada de *spray* em contato com o casco pode ser entendida como uma reflexão do vetor de velocidade incidente em relação à linha de estagnação do escoamento. O ponto onde essa reflexão ocorre é conhecido como raiz do *spray*. Para região S_{cuw}, esse ponto fica muito próximo à linha de estagnação. Além disso, entre a raiz do *spray* e a linha de estagnação fica o ponto onde a pressão torna-se igual à pressão atmosférica, esse ponto é denominado y_C e a raiz de *spray* é denominada por y_b.

Para região S_{cw} não há estagnação do escoamento na superfície do casco, o ponto de pressão nula y_c fica preso à quina e a raiz do *spray* y_b avança em direção à superfície livre. Em uma análise mais atenta da Figura 3.1, é possível perceber a linha formada pelos pontos raízes do *spray* avançando na superfície livre a partir da linha de estagnação.

Na Figura 3.4 as regiões S_{cuw}, S_{cw} e S_{fs} foram projetadas no plano $z = 0$. Como pode ser observado, a posição transversal dos pontos de pressão nula e da raiz do spray variam ao longo do comprimento da embarcação. As curvas formadas por esses pontos são representadas por $y_c(x)$ e $y_b(x)$, respectivamente.

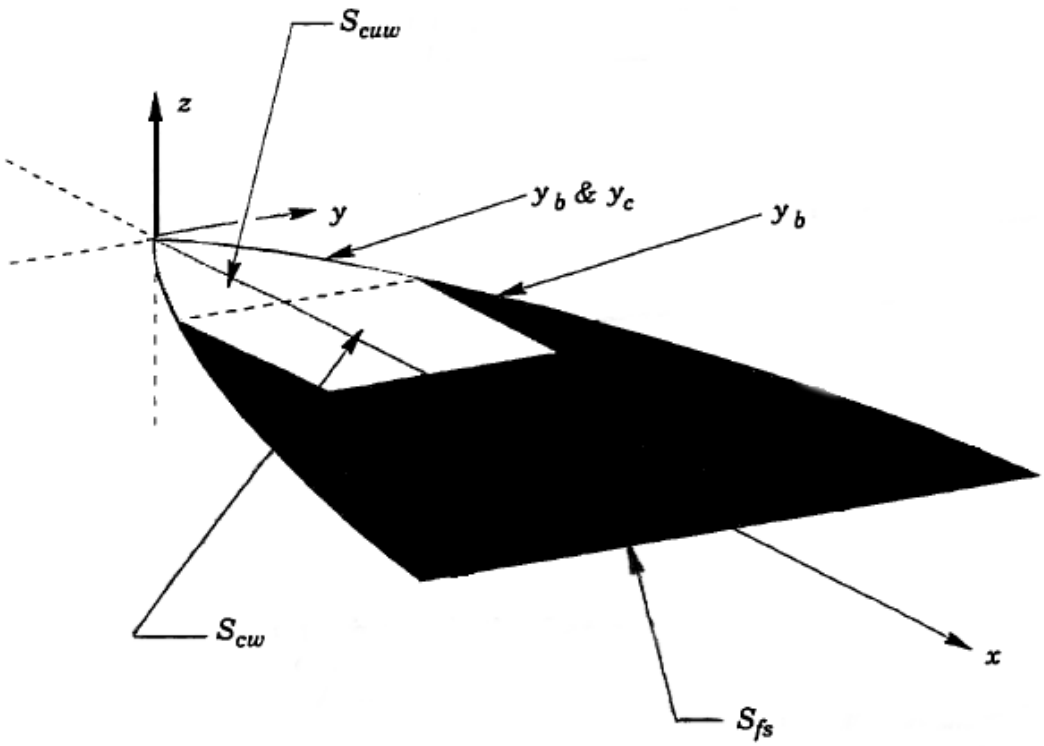

Figura 3.4 - Regiões do problema de valor de contorno projetadas no plano $z = 0$. Adaptada de (SAVANDER, 1997)

Essas funções não são conhecidas previamente e configuram-se como uma das principais incógnitas do problema de valor de contorno. Os métodos de painéis tradicionais têm dificuldade de resolver esse tipo de problema, pois não se sabe ao certo onde os painéis devem ser distribuídos.

Para as formas de embarcação tradicionais, a variação longitudinal $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ da geometria do casco é muito menor que a variação no plano transversal $\left(\frac{\partial}{\partial y}\ e\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$, a fim de evitar a queda de pressão do escoamento (SAVITSKY, 1985). Por esse motivo, a velocidade na direção x da perturbação causada do escoamento é menor que a velocidade nas direções y e z. Consequentemente, a perturbação causada no escoamento pode ser tratada apenas no plano transversal yz. Sendo assim, a primeira parcela da equação (21) pode ser desprezada e o escoamento em torno de uma seção transversal da embarcação pode ser determinado através da resolução das condições de contorno seção por seção.

A Figura 3.5 (a) representa de maneira esquemática a passagem da embarcação por de um sistema de coordenadas inercial. Visto desse sistema de coordenadas, as seções transversais da embarcação aparentam estar “caindo” na superfície da água.

A Figura 3.5 (b) mostra diferentes instantes de um experimento de queda livre de uma cunha. É notável a semelhança do escoamento nos dois casos apresentados.

Portanto, o problema da embarcação navegando em águas calmas com velocidade constante pode ser considerado como o problema da queda vertical de uma cunha com forma variável e velocidade de impacto conhecida. A teoria de impacto será detalhadamente explorada nas próximas seções.

Considere agora um sistema de coordenadas fixo no casco, com origem no ponto de intersecção entre a quilha e a superfície da água. O eixo x aponta na direção do espelho de popa e o eixo z é perpendicular à superfície da água e aponta para cima (Figura 3.4).

A posição x da seção é relacionada ao tempo de impacto t pela seguinte transformação:

$$x = Ut \tag{24}$$

As derivadas da teoria de impacto podem ser transformadas para o problema da embarcação pela expressão:

$$\frac{\partial}{\partial t} = U\frac{\partial}{\partial x} \tag{25}$$

A velocidade de impacto de cada seção depende da velocidade de avanço da embarcação, do ângulo de *trim* e da curvatura da quilha e é definida por:

$$V(x) = -U\frac{\partial h(x,0)}{\partial x} \tag{26}$$

Onde:

$h(x,y)$ – é a coordenada[9] que define a geometria do casco (Figura 3.6).

Baseado no sistema de coordenadas fixo na embarcação, os ângulos locais de *trim* $\alpha(x,y)$ e "V" $\beta(x,y)$ são definidos por:

$$\tan\alpha(x,y) = -\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} \tag{27}$$

[9] $h(x,0)$ define a quilha da embarcação.

$$\tan \beta(x,y) = \frac{\partial h(x,y)}{\partial y} \tag{28}$$

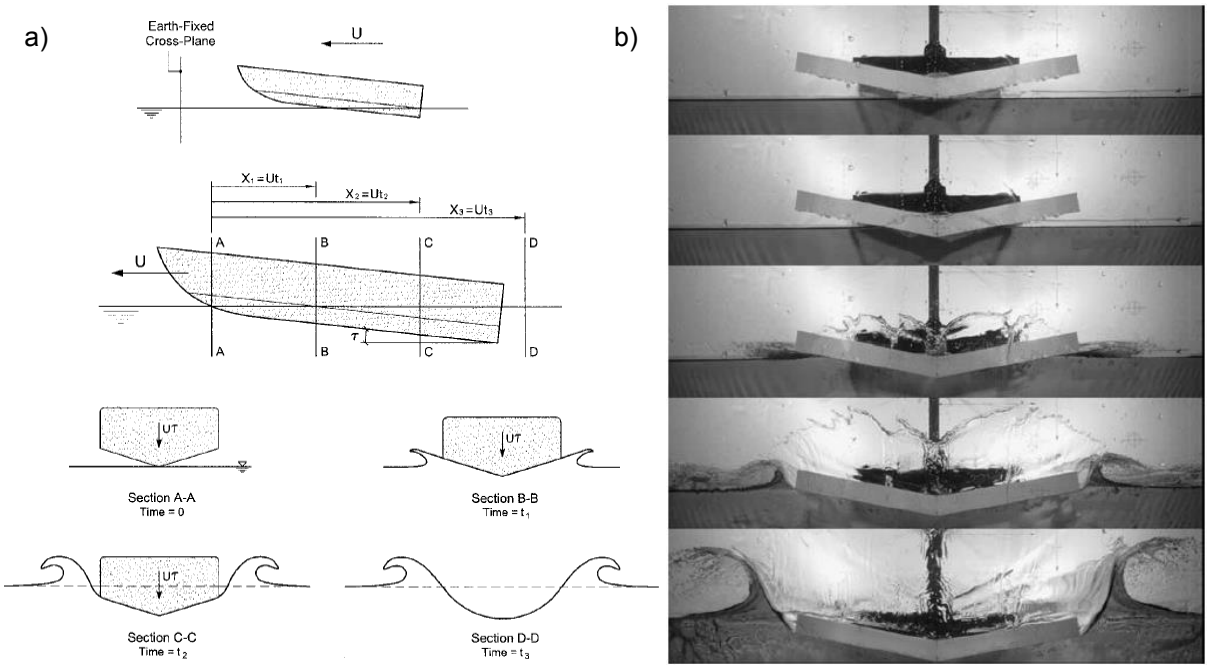

Figura 3.5 – (a) Passagem de uma embarcação de planeio através de um sistema de coordenadas inercial, (b) Experimento de queda vertical de uma cunha (FALTINSEN, 2005)

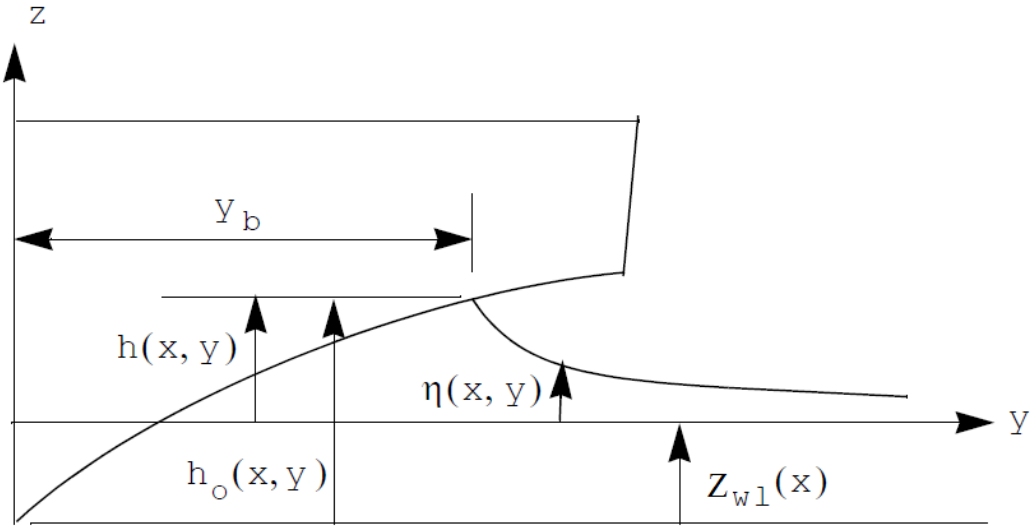

Figura 3.6 - Geometria de uma seção do casco. Adaptada de (SAVANDER, MAKI e LAND, 2010)

3.2 TEORIA BIDIMENSIONAL DO IMPACTO DE CUNHAS

Na seção anterior foi discutido a predominância do escoamento bidimensional no campo perturbado, o que permite tratar o problema de valor de contorno apenas no plano transversal yz. Nesse contexto, as condições de contorno cinemática e dinâmica são resolvidas, seção por seção, através da teoria bidimensional do impacto de cunhas (SAVANDER, SCORPIO e TAYLOR, 2002).

A complexidade do problema de impacto advém das não linearidades hidrodinâmicas do escoamento, principalmente na região de formação do *spray*. O problema se torna cada vez mais não linear à medida que aumenta a planicidade da geometria, isto é, à medida que $\alpha(x,y)$ e $\beta(x,y)$ tendem à zero (VORUS, 1996).

Assim como no problema da embarcação, são definidas duas fases para o escoamento em torno da cunha: impacto, equivalente à fase da "quina seca", representada na Figura 3.7 (a), e penetração, equivalente à fase da "quina molhada", representada na Figura 3.7 (b).

A fase de penetração se inicia quando o escoamento atinge a quina, onde ele é forçado a separar em $Y_{ch}(x)$. A velocidade de "queda" $V(x)$ é conhecida e foi definida em (26)[10]. Sendo assim, para uma dada posição longitudinal, a imersão da seção é determinada por:

$$Z_{WL}(x) = \int_0^x \frac{V(x_0)}{U} dx_0 \tag{29}$$

O sistema de coordenadas utilizado no problema tem origem na superfície calma da água e permanece nessa posição durante toda a "queda" da seção. Além disso, assume-se que a seção é simétrica em relação ao eixo z.

Durante a fase de impacto, o ponto de formação de *spray* B e o ponto de coeficiente de pressão nulo C permanecem na superfície do casco e se deslocam rapidamente em direção à quina. Além disso, durante essa fase do escoamento, a distribuição de pressão tem um pico próximo ao ponto de formação do *spray* (esse ponto é

[10] A teoria de impacto original utiliza o tempo para definir a velocidade de impacto. Nesta dissertação a variável do espaço foi utilizada. A transformação entre as duas variáveis é facilmente realizada pelas expressões (24) e (25).

equivalente à linha de estagnação do escoamento, no caso da embarcação). A partir do ponto C, o coeficiente de pressão permanece nulo.

A fase de penetração se inicia quando o ponto C atinge a quina, isto é, quando $y_c(x) = Y_{ch}(x)$. A partir desse momento, o ponto C continua preso à quina durante toda a fase de penetração, enquanto que o B continua avançando na direção do eixo y. Com uma rápida redução da velocidade de impacto $V(x)$, o ponto C poderia retornar na direção da quilha, porém esse tipo de desaceleração não ocorre em corpos esbeltos e será desconsiderada no desenvolvido teórico do problema.

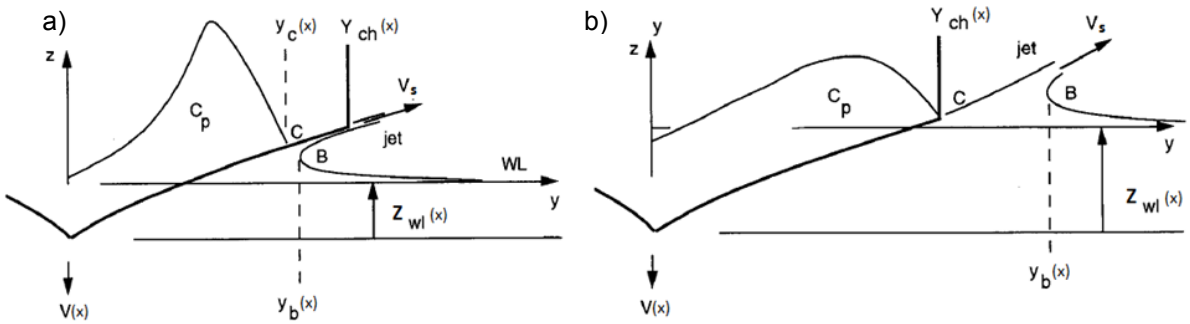

Figura 3.7 - (a) Fase de impacto. (b) Fase de penetração. Adaptadas de (VORUS, 1996)

Como pode ser observado na Figura 3.7, o jato de *spray* é formado por dois ramos divididos pelo ponto B: o inferior e o superior. Em ambos os ramos a pressão é nula. No ramo superior, entretanto, a velocidade da perturbação do escoamento em y é maior que a velocidade de impacto $V(x)$, enquanto que no ramo inferior, o qual é assintoticamente ligado à superfície calma da água, a velocidade da perturbação é uma ordem de grandeza menor. Esta diferença na velocidade da perturbação na região do *spray* será tanto maior quanto menor for o valor de $\beta(x, y_b)$ (VORUS, 1996).

Para resolução do problema de valor de contorno, a superfície livre do escoamento será representada apenas pelo ramo inferior. Sendo assim, entre os pontos C e B a velocidade da perturbação do escoamento na direção y será da ordem de grandeza do ramo superior, porém a partir do ponto B essa velocidade será considerada nula. Esse conceito físico é a base da aproximação matemática utilizada no problema de valor de contorno (VORUS, 1996).

Com a aproximação de velocidade da perturbação do escoamento nula a partir do ponto B, a condição de contorno dinâmica na superfície livre do escoamento nessa

região é automaticamente respeitada. Dessa maneira, a condição dinâmica deve ser respeitada apenas na região entre os pontos de coeficiente de pressão nulo e de formação de *spray*, $y \in [y_c, y_b]$, e não em toda a superfície livre do escoamento.

As condições de contorno restantes podem ser respeitadas através de uma distribuição de vórtices no eixo $z = 0$, entre os pontos de formação de *spray* ($-y_b(x)$ e $y_b(x)$). O modelo físico e a aproximação matemática utilizada estão representados na Figura 3.8.

3.2.1 CONDIÇÃO CINEMÁTICA

A geometria de uma seção transversal do casco da embarcação está definida na Figura 3.6. A posição vertical de qualquer ponto dessa seção pode ser definida por:

$$h(x, y) = h_0(x, y) - Z_{WL}(x) \tag{30}$$

Substituindo as expressões (26) e (27) na equação acima, chegamos a:

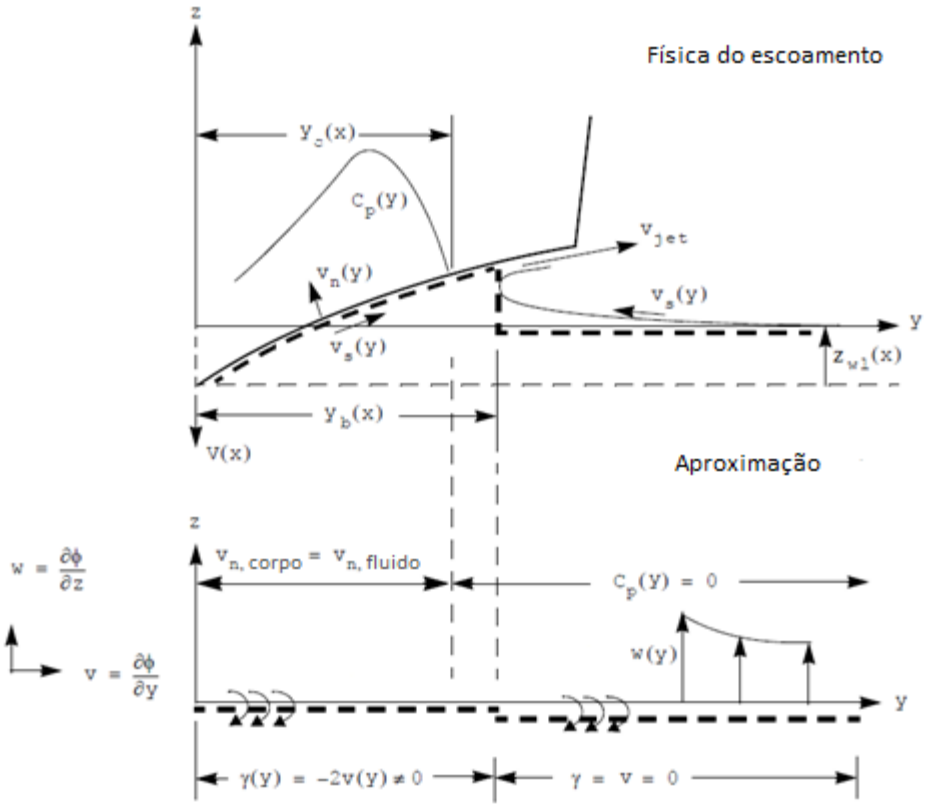

Figura 3.8 - Modelo físico do escoamento e aproximação matemática. Adaptada de (SAVANDER, SCORPIO e TAYLOR, 2002)

$$h(x,y) = h_0(x,y) - U\int_0^x \tan\alpha(x_0,0)dx_0 \tag{31}$$

Para que a condição de contorno cinemática seja respeitada, não deve haver penetração do escoamento na superfície da seção para $|y| \leq y_c(x)$. Para que isso ocorra, a velocidade normal à superfície de um ponto sobre o contorno da seção dever ser igual à velocidade normal do escoamento nesse mesmo ponto:

$$\bar{v}_{escoamento} \cdot \bar{n} = \bar{v}_{corpo} \cdot \bar{n} \tag{32}$$

A relação (32) pode ser obtida através da derivada total da função $A(x,y,z) = z - h(x,y)$, o que resulta na seguinte expressão:

$$\left.\frac{DA(x,y,z)}{Dt}\right|_{z=h} = \tag{33}$$

$$= -\big(U + u(x,y,h)\big)\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} - v(x,y,h)\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}$$

$$+ w(x,y,h) = 0$$

A condição de contorno cinemática é válida para $y \in [-y_c(x), y_c(x)]$ sobre o contorno da seção, isto é, para $z = h(x,y)$. No limite em que $h \ll 1$, a expansão em série de Taylor de (33) em torno de $z = 0$ fica:

$$\left.\frac{DA(x,y,z)}{Dt}\right|_{z=h} = \left.\frac{DA(x,y,z)}{Dt}\right|_{z=0} + h\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left.\frac{DA(x,y,z)}{Dt}\right|_{z=0}\right\} \tag{34}$$

Descartando termo $u(x,y,0)\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$, a expressão para condição cinemática fica:

$$-U\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} - v(x,y,0)\frac{\partial h(x,y)}{\partial y} + w(x,y,0) = 0 \tag{35}$$

A partir desse ponto, todas as velocidades serão admensionalizadas pela velocidade de avanço da embarcação U e os parâmetros espaciais serão divididos pelo máximo valor da meia boca da quina da embarcação $Y_{ch_{max}}$[11]. Além disso, o espaço de

[11] A fim de identificar as grandezas sem dimensão será adicionado a ênfase $\tilde{}$ à grandeza em questão.

solução da condição cinemática será escalonado pela coordenada do ponto de zero pressão $y_c(x)$, segundo a seguinte expressão:

$$\zeta = \frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_c(\tilde{x})} \tag{36}$$

Substituindo as expressões (31) e (28) em (35) e fazendo uso do escalonamento do espaço de solução, a equação da condição cinemática passa a depender das velocidades da perturbação do escoamento.

$$\tilde{w}(\tilde{x},\zeta) - \tilde{v}(\tilde{x},\zeta)\tan\beta(\tilde{x},\zeta) = -\tan\alpha(\tilde{x}) + \frac{\partial\tilde{h}_0(\tilde{x},\zeta)}{\partial\tilde{x}} \tag{37}$$

Como foi dito anteriormente, as condições de contorno serão respeitadas através de uma distribuição de vórtice no eixo y $(z = 0)$ com $y \in [-y_b(x), y_b(x)]$ (Figura 3.8). Sendo assim, as velocidades da perturbação do escoamento são determinadas pela Lei de Biot Savart,

$$\tilde{v}(\tilde{x},\zeta,0^-) = -\frac{1}{2}\gamma(\tilde{x},\zeta) \tag{38}$$

$$\tilde{w}(\tilde{x},\zeta,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta_0=-b(\tilde{x})}^{b(\tilde{x})} \frac{\gamma(\tilde{x};\zeta_0)}{\zeta_0-\zeta}d\zeta_0 \tag{39}$$

$b(\tilde{x}) = y_b(\tilde{x})/y_c(\tilde{x})$ – posição do ponto de formação de *spray* escalonada no espaço de solução da condição cinemática.

Substituindo as expressões para velocidades da perturbação na equação (37), a equação para condição cinemática passa a ser uma equação integral:

$$\frac{1}{2}\gamma(\tilde{x},\zeta)\tan\beta(\tilde{x},\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta_0=-b(\tilde{x})}^{b(\tilde{x})} \frac{\gamma(\tilde{x};\zeta_0)}{\zeta_0-\zeta}d\zeta_0 = -\tan\alpha(\tilde{x}) - F(\tilde{x},\zeta) \tag{40}$$

Essa equação deve ser respeitada para $\zeta \in [0,1]$.

O termo $F(\tilde{x},\zeta)$ foi utilizado em (SAVANDER, 1997) para incluir efeitos tridimensionais na formulação. Sendo assim, a função $F(\tilde{x},\zeta)$ pode ser escrita como:

$$F(\tilde{x},\zeta) = -\frac{\partial h_0(\tilde{x},\zeta)}{\partial x} \tag{41}$$

A intensidade dos vórtices para $\zeta \in [0,1]$ é determinada através da inversão analítica

da equação integral (40)[12]. Não é objetivo deste trabalho demonstrar a resolução da equação integral, a qual pode ser encontrada no apêndice A de (SAVANDER, 1997).

$$\gamma_c(\tilde{x},\zeta) = f(\tilde{x},\zeta)\sin 2\beta(\tilde{x},\zeta) + \frac{2\kappa(\tilde{x},\zeta)\cos\beta(\tilde{x},\zeta)}{\pi\sqrt{1-\zeta^2}} \times \int_{\zeta_0=-1}^{1} \frac{f(\tilde{x},\zeta_0)\cos\beta(\tilde{x},\zeta_0)\sqrt{1-{\zeta_0}^2}}{\kappa(\tilde{x},\zeta_0)(\zeta_0-\zeta)} d\zeta_0 \tag{42}$$

Onde[13]:

$$f(\tilde{x},\zeta) = \sum_{i=1}^{3} f_i \tag{43}$$

$$f_1 = -\tan\alpha(\tilde{x}) \tag{44}$$

$$f_2 = -\frac{1}{2\pi}\left[\int_{\zeta_0=-b(\tilde{x})}^{-1} \frac{\gamma_s(\tilde{x};\zeta_0)}{\zeta_0-\zeta} d\zeta_0 + \int_{\zeta_0=1}^{b(\tilde{x})} \frac{\gamma_s(\tilde{x};\zeta_0)}{\zeta_0-\zeta} d\zeta_0\right] = -\frac{1}{\pi}\int_{\zeta_0=1}^{b(\tilde{x})} \frac{\gamma_s(\tilde{x};\zeta_0)\zeta}{\zeta_0^2-\zeta^2} d\zeta_0 \tag{45}$$

$$f_3 = -F(\tilde{x},\zeta) \tag{46}$$

Substituindo a expressão (43) na equação (42) e fazendo as manipulações algébricas necessárias, obtém-se a expressão da intensidade de distribuição de vórtices:

---

[12] O sub-índice γ_c foi adicionado à função γ, pois a intensidade dos vórtices determinada pela equação é válida apenas em $y \in [0, y_c]$. Para distribuição dos vórtices na superfície livre, $y \in [y_c, y_b]$, será utilizado o sub-índice γ_s.

[13] A relação para f_2 é obtida usando a condição de simetria do escoamento $\gamma(\tilde{x};\ -\zeta) = -\gamma(\tilde{x};\zeta)$.

$$\gamma_c(\tilde{x},\zeta) = -\frac{2\zeta\kappa(\tilde{x},\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\beta(\tilde{x},\zeta) \times \left\{ \tan\alpha(\tilde{x}) + \frac{1}{\pi}\int_{\zeta_0=1}^{b(\tilde{x})} \frac{\gamma_s(\tilde{x};\zeta_0)}{\kappa(\tilde{x},\zeta_0)\sqrt{{\zeta_0}^2-1}}d\zeta_0 + \frac{2}{\pi}\int_{\zeta_0=0}^{1} \frac{F(\tilde{x},\zeta_0)\cos\beta(\tilde{x},\zeta_0)}{\kappa(\tilde{x},\zeta_0)\sqrt{1-{\zeta_0}^2}}d\zeta_0 - \frac{1-\zeta^2}{\pi}\int_{\zeta_0=1}^{b(\tilde{x})} \frac{\gamma_s(\tilde{x};\zeta_0)}{\kappa(\tilde{x},\zeta_0)(\zeta_0^2-\zeta^2)\sqrt{{\zeta_0}^2-1}}d\zeta_0 - \frac{2}{\pi}(1-\zeta^2)\int_{\zeta_0=0}^{1} \frac{F(\tilde{x},\zeta_0)\cos\beta(\tilde{x},\zeta_0)}{\kappa(\tilde{x},\zeta_0)(\zeta_0^2-\zeta^2)\sqrt{1-{\zeta_0}^2}}d\zeta_0 \right\} - F(\tilde{x},\zeta)\sin 2\beta(\tilde{x},\zeta) \tag{47}$$

Existe uma singularidade na equação (47) para $\zeta = 1$, a qual precisa ser retirada para que haja continuidade da velocidade da perturbação v nesse ponto. Essa condição é análoga à clássica condição de Kutta para teoria de aerofólios. Os termos singulares devem ser forçados a se anularem coletivamente (SAVANDER, 1997).

$$\tan\alpha(\tilde{x}) + \frac{1}{\pi}\int_{\zeta_0=1}^{b(\tilde{x})} \frac{\gamma_s(\tilde{x};\zeta_0)}{\kappa(\tilde{x},\zeta_0)\sqrt{{\zeta_0}^2-1}}d\zeta_0 + \frac{2}{\pi}\int_{\zeta_0=0}^{1} \frac{F(\tilde{x},\zeta_0)\cos\beta(\tilde{x},\zeta_0)}{\kappa(\tilde{x},\zeta_0)\sqrt{1-{\zeta_0}^2}}d\zeta_0 = 0 \tag{48}$$

Sendo assim, a intensidade da distribuição de vórtices entre a quilha e o ponto de coeficiente de pressão nulo fica:

$$\gamma_c(\tilde{x},\zeta) = \frac{2}{\pi}\zeta\kappa(\tilde{x},\zeta)\sqrt{1-\zeta^2}\cos\beta(\tilde{x},\zeta) \times \left\{ \int_{\zeta_0=1}^{b(\tilde{x})} \frac{\gamma_s(\tilde{x};\zeta_0)}{\kappa(\tilde{x},\zeta_0)(\zeta_0^2-\zeta^2)\sqrt{{\zeta_0}^2-1}} d\zeta_0 + 2\int_{\zeta_0=0}^{1} \frac{F(\tilde{x},\zeta_0)\cos\beta(\tilde{x},\zeta_0)}{\kappa(\tilde{x},\zeta_0)(\zeta_0^2-\zeta^2)\sqrt{1-{\zeta_0}^2}} d\zeta_0 \right\} - F(\tilde{x},\zeta)\sin 2\beta(\tilde{x},\zeta) \tag{49}$$

A função $\kappa(\tilde{x},\zeta)$ é definida dividindo-se a seção em N segmentos contínuos, conforme a Figura 3.9.

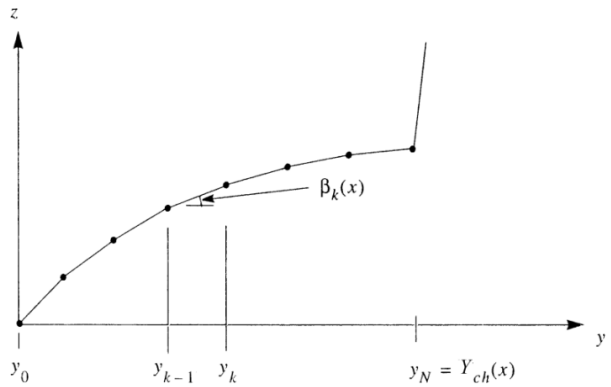

Figura 3.9 – Discretização da seção transversal em segmentos lineares. Adaptada de (SAVANDER, SCORPIO e TAYLOR, 2002)

$$\kappa(\tilde{x},\zeta) = \prod_{k=1}^{N} \left| \frac{\zeta^2 - t_k^2}{\zeta^2 - t_{k-1}^2} \right|^{\frac{\beta_k(\tilde{x})}{\pi}} \tag{50}$$

Através da condição de continuidade da velocidade perturbação (48), é possível determinar a intensidade da distribuição de vórtice na superfície livre do escoamento, γ_s. Assumindo-se que a posição do ponto de formação de *spray* é conhecida, todos os outros parâmetros da equação dependem apenas da geometria do casco, e são conhecidos.

Outra análise interessante é que a intensidade da distribuição de vórtices entre a quilha e o ponto C (γ_c) é determinada a partir da intensidade dos vórtices na superfície livre entre o ponto C e B (γ_s). Todos os demais parâmetros da equação (49) também dependem apenas da geometria da embarcação.

3.2.2 CONDIÇÃO DINÂMICA

Como dito anteriormente, a condição de contorno dinâmica (23) precisa ser respeitada na porção da superfície livre entre $y_c(x)$ e $y_b(x)$. Ela será determinada através da equação de Bernoulli,

$$P - P_\infty = -\frac{1}{2}\rho(2Uu + u^2 + v^2 + w^2) - \rho g z \tag{51}$$

A conversão da equação acima para o problema do escoamento bidimensional na seção é feita através da equação (25). Além disso, como foi visto anteriormente, a velocidade da perturbação u é pequena se comparada às velocidades v e w, portanto o termo u^2 pode ser desprezado.

Sendo assim, fazendo $u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{U}\frac{\partial \phi}{\partial t}$ tem-se que:

$$P - P_\infty = -\frac{1}{2}\rho(v^2 + w^2) - \rho \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{inercial} - \rho g z \tag{52}$$

A derivada na equação (52) é em relação a um sistema de coordenadas inercial. A conversão desse sistema para o não inercial da cunha em queda (com velocidade $V(x)$) é feita por (SAVANDER, SCORPIO e TAYLOR, 2002):

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{inercial} = Vw + \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{corpo} \tag{53}$$

Substituindo (53) em (52) e reescrevendo a equação em termos do coeficiente de pressão, obtém-se:

$$C_P = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{1}{U^2}\left\{-v^2 - w^2 - 2Vw - 2\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{corpo} - 2gz\right\} \tag{54}$$

A relação entre o potencial da perturbação e a velocidade transversal é dada por:

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \leftrightarrow \phi(x, y) = -\int_{y_0 = y}^{y_b(x)} v(x, y_0) dy_0 \tag{55}$$

A derivada temporal da equação (54), com o auxilio da transformação (25) e utilizando a equação (55), fica:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = U\frac{\partial \phi}{\partial x} = -U\frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_{y_0=y}^{y_b(x)} v(x,y_0)dy_0\right\} \tag{56}$$

Substituindo a expressão (56) na equação (54) e fazendo a admensionalização das velocidades e grandezas espaciais, assim como foi feito para condição cinemática, o coeficiente de pressão fica:

$$\begin{aligned} C_P(\tilde{x},\zeta) = &-\tilde{v}(\tilde{x},\zeta)^2 - \tilde{w}(\tilde{x},\zeta)^2 - 2\tilde{V}(\tilde{x})\tilde{w}(\tilde{x},\zeta) \\ &+ 2\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\left\{\tilde{y_c}(\tilde{x})\int_{\zeta_0=\zeta}^{b(\tilde{x})} \tilde{v}(\tilde{x},\zeta_0)d\zeta_0\right\} - G\tilde{h}(\tilde{x},\zeta) \end{aligned} \tag{57}$$

E com a expansão do termo entre chaves:

$$\begin{aligned} C_P(\tilde{x},\zeta) = &-\tilde{v}(\tilde{x},\zeta)^2 - \tilde{w}(\tilde{x},\zeta)^2 - 2\tilde{V}(\tilde{x})\tilde{w}(\tilde{x},\zeta) \\ &+ 2\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\tilde{y_c}(\tilde{x})\int_{\zeta_0=\zeta}^{b(\tilde{x})} \tilde{v}(\tilde{x},\zeta_0)d\zeta_0 \\ &+ 2\tilde{y_c}(\tilde{x})\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}b(\tilde{x})\tilde{v}\big(\tilde{x},b(\tilde{x})\big) - 2\tilde{y_c}(\tilde{x})\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\zeta(\tilde{x})\tilde{v}(\tilde{x},\zeta) \\ &+ 2\tilde{y_c}(\tilde{x})\int_{\zeta_0=\zeta}^{b(\tilde{x})} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\tilde{v}(\tilde{x},\zeta_0)d\zeta_0 - G\tilde{h}(\tilde{x},\zeta) \end{aligned} \tag{58}$$

Para a condição de contorno dinâmica ser respeitada, o coeficiente de pressão deve ser nulo para $\zeta \in [1, b(\tilde{x})]$, ou seja, o valor de C_P é constante na superfície livre do escoamento. Sendo assim,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}C_P(\tilde{x},\zeta) = 0, com\ \zeta \in [1, b(\tilde{x})] \tag{59}$$

Então,

$$\begin{aligned} &\left(\tilde{v}(\tilde{x},\zeta) - \zeta\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\tilde{y_c}(\tilde{x})\right)\frac{\partial}{\partial \zeta}\tilde{v}(\tilde{x},\zeta) + \tilde{y_c}(\tilde{x})\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\tilde{v}(\tilde{x},\zeta) \\ &\qquad = -\left(\tilde{w}(\tilde{x},\zeta) + \tilde{V}(\tilde{x})\right)\frac{\partial}{\partial \zeta}\tilde{w}(\tilde{x},\zeta) - G\frac{\partial}{\partial \zeta}\tilde{h}(\tilde{x},\zeta) \end{aligned} \tag{60}$$

Onde:

$G = \frac{2gY_{ch_{max}}}{U^2}$ – gravidade não dimensional.

A equação (60) é a equação de Burger na forma não homogênea. O lado direito da equação representa a aceleração das partículas que deixam o ponto C e entram na superfície livre do escoamento. Essa aceleração permanece constante para

qualquer partícula que deixa o ponto de coeficiente de pressão nulo (SAVANDER, 1997). A resolução da equação de Burger garante que o coeficiente de pressão é constante na superfície livre do escoamento. O valor do coeficiente é forçado a zero utilizando (60) em (58) com $C_P = 0$, o que resulta em uma relação para velocidade de avanço do ponto de formação do *spray*,

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{y}_b(\tilde{x}) = \frac{2\tilde{V}(\tilde{x})\tilde{w}\big(\tilde{x}, b(\tilde{x})\big) + \tilde{v}\big(\tilde{x}, b(\tilde{x})\big)^2 + \tilde{w}\big(\tilde{x}, b(\tilde{x})\big)^2 + G\tilde{h}\big(\tilde{x}, b(\tilde{x})\big)}{2\tilde{v}\big(\tilde{x}, b(\tilde{x})\big)} \tag{61}$$

A condição de contorno dinâmica é satisfeita através da resolução das equações (60) e (61). A primeira equação faz com que o valor do coeficiente de pressão seja constante na superfície livre do escoamento, enquanto que a segunda equação força o valor do coeficiente a zero. Com essas duas equações, a porção $\zeta \in [1, b(\tilde{x})]$ das integrais da equação (58) pode ser desprezada. Sendo assim, o coeficiente de pressão fica definido por:

$$\begin{aligned} C_P(\tilde{x}, \zeta) = {} & \tilde{v}(\tilde{x}, 1)^2 - \tilde{v}(\tilde{x}, \zeta)^2 + \tilde{w}(\tilde{x}, 1)^2 - \tilde{w}(\tilde{x}, \zeta)^2 + 2\tilde{V}(\tilde{x})\tilde{w}(\tilde{x}, 1) \\ & - 2\tilde{V}(\tilde{x})\tilde{w}(\tilde{x}, \zeta) \\ & + 2\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{y}_c(\tilde{x}) \left\{ \int_{\zeta_0 = \zeta}^{1} \tilde{v}(\tilde{x}, \zeta_0) d\zeta_0 + \zeta \tilde{v}(\tilde{x}, \zeta) - \tilde{v}(\tilde{x}, 1) \right\} \\ & + 2\tilde{y}_c(\tilde{x}) \int_{\zeta_0 = \zeta}^{1} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{v}(\tilde{x}, \zeta_0) d\zeta_0 + G\tilde{h}(\tilde{x}, 1) - G\tilde{h}(\tilde{x}, \zeta) \end{aligned} \tag{62}$$

Com a condição dinâmica é possível calcular a aceleração de todas as partículas que passaram pelo ponto $\tilde{y}_c(\tilde{x})$ nas seções anteriores. Sendo assim, para uma nova seção é possível calcular o valor da distribuição de vórtices na superfície livre apenas utilizando os valores da velocidade das partículas que já passaram pelo ponto de pressão nula, exceto para partícula que acaba de entrar na superfície livre. O valor da intensidade da vorticidade dessa partícula é então calculado utilizando-se a equação (48).

Durante a fase de penetração, a posição com coeficiente de pressão nulo já é conhecida e encontra-se na quina, $Y_{ch}(x)$. Para essa fase do escoamento a formulação teórica já está completa. Entretanto, para a fase de impacto, o valor de

$y_c(x)$ também é uma incógnita do problema, e uma condição de contorno adicional é necessária. Essa condição de contorno é a continuidade da superfície livre no ponto de formação de *spray*. Ela será tratada na próxima seção.

3.2.3 CONTINUIDADE DO DESLOCAMENTO DA SUPERFÍCIE LIVRE

A condição de contorno adicional para fase de impacto é determinada forçando que o deslocamento da superfície livre no ponto de formação do *spray* seja igual ao deslocamento da superfície do casco nesse ponto. Isso está graficamente representado na Figura 3.6 e pode ser expresso por:

$$h\big(x, y_b(x)\big) = \eta\big(x, y_b(x)\big) \tag{63}$$

O deslocamento da superfície livre será determinado de duas maneiras: através da expansão da condição cinemática descrita em (40) para $y \in [0, y_b(x)]$ e através de uma condição cinemática linearizada no espaço $y \in [y_b(x), \infty)$. Nenhuma condição cinemática é formalmente respeitada entre y_c e y_b, porém, a expansão é possível, pois na fase de impacto $y_b - y_c$ tende a zero (SAVANDER, SCORPIO e TAYLOR, 2002). O espaço de solução será novamente escalonado, dessa vez em $y_b(x)$. Sendo assim, a coordenada no novo espaço de solução será definida por:

$$\xi = \frac{y}{y_b} \tag{64}$$

E a condição cinemática expandida fica:

$$\frac{1}{2}\gamma(\tilde{x}, \xi)\tan\beta(\tilde{x}, \xi) + \frac{1}{2\pi}\int_{\xi_0=-1}^{1} \frac{\gamma(\tilde{x}; \xi_0)}{\xi_0 - \xi} d\xi_0 = -\tan\alpha(\tilde{x}) + \frac{\partial}{\partial x}\tilde{h}_0(\tilde{x}, \xi) \tag{65}$$

A integral em $\tilde{x}$ dos termos da equação (65) pode ser expressa como:

$$\gamma^*(\tilde{x}, \xi) - \gamma^*(\tilde{x}_i, \xi) = \int_{\tilde{x}_0=\tilde{x}_i}^{\tilde{x}} \gamma(\tilde{x}_0, \xi)\, d\tilde{x}_0 \tag{66}$$

$$w^*(\tilde{x},\xi) - w^*(\tilde{x}_i,\xi) = \int_{\tilde{x}_0=\tilde{x}_i}^{\tilde{x}} w(\tilde{x}_0,\xi)\, d\tilde{x}_0 \tag{67}$$

$$Z_{WL}(\tilde{x}) - Z_{WL}(\tilde{x}_i) = \int_{\tilde{x}_0=\tilde{x}_i}^{\tilde{x}} \tan\alpha(\tilde{x}_0,\xi)\, d\tilde{x}_0 \tag{68}$$

Tomando $\tilde{x}_i = 0$ os termos com $\tilde{x}_i$ se anulam. Nesse caso, a equação (65) se transforma em uma equação integral semelhante ao caso de (40),

$$\frac{1}{2}\gamma^*(\tilde{x},\xi)\tan\beta(\tilde{x},\xi) + \frac{1}{2\pi}\int_{\xi_0=-1}^{1} \frac{\gamma^*(\tilde{x};\xi_0)}{\xi_0-\xi} d\xi_0 + = -Z_{WL}(\tilde{x}) + \tilde{h}_0(\tilde{x},\xi) \tag{69}$$

A solução de γ^* é obtida, novamente, pela inversão da equação integral,

$$\gamma^*(\tilde{x},\xi) = \tilde{h}_0(\tilde{x},\xi)\sin\beta(\tilde{x},\xi) - \frac{2\xi\cos\beta(\tilde{x},\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\frac{1-\xi^2}{\xi^2}\right)^{\frac{\beta}{\pi}} \times \left\{\tilde{Z}_{WL}(\tilde{x}) - \frac{2}{\pi}\int_{\xi_0=0}^{1} \frac{\tilde{h}_0(\tilde{x},\xi)\cos\beta(\tilde{x},\xi_0)}{\kappa(\tilde{x},\xi_0)\sqrt{1-{\xi_0}^2}} d\xi_0 - \frac{2(1-\xi^2)}{\pi}\int_{\xi_0=0}^{1} \frac{\tilde{h}_0(\tilde{x},\xi)\cos\beta(\tilde{x},\xi_0)}{\kappa(\tilde{x},\xi_0)\sqrt{1-{\xi_0}^2}(\xi^2-\xi_0^2)} d\xi_0\right\} \tag{70}$$

Por outro lado, o deslocamento da superfície da água pode ser determinado através de uma condição cinemática do espaço $y \in [y_b(x), \infty[$. Essa condição é obtida através da derivada total da função definida abaixo.

$$A(x,y,z) = z - \eta(x,y) \tag{71}$$

Sendo assim,

$$\frac{DA}{Dt} = -(U+u)\frac{\partial}{\partial x}\eta(x,y) - v\frac{\partial}{\partial y}\eta(x,y) + w = 0, para\ y \in [y_b(x), \infty[\tag{72}$$

Vale lembrar que a aproximação do modelo físico utilizado considera que a velocidade da perturbação v é nula para $y \geq y_b(x)$. Além disso, a perturbação do escoamento na direção na direção x é pequena se comparada com a perturbação

em z e por isso u pode ser desconsiderada.

Portanto,

$$-U\frac{\partial}{\partial x}\eta(x,y)+w=0 \leftrightarrow \tilde{w}(\tilde{x},\xi)=\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\tilde{\eta}(\tilde{x},\xi) \tag{73}$$

Tomando a integral em $\tilde{x}$ em ambos os lados da equação (73) e utilizando o resultado (67) e (39), tem-se que:

$$\tilde{\eta}(\tilde{x},\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{\xi_0=-1}^{1}\frac{\gamma^*(\tilde{x},\xi_0)}{\xi_0-\xi}d\xi_0 \tag{74}$$

Para que a elevação da superfície livre seja bem definida em $\xi=1$ pela equação (74), é preciso que intensidade integrada da distribuição de vórtices exista e não seja singular em $\xi=1$. A continuidade do deslocamento da superfície livre é garantida fazendo com que os termos singulares em $\xi=1$ da equação (70) sejam nulos coletivamente. Sendo assim,

$$\tilde{Z}_{WL}(\tilde{x})-\frac{2}{\pi}\int_{\xi_0=0}^{1}\frac{\tilde{h}_0(\tilde{x},\xi)\cos\beta(\tilde{x},\xi_0)}{\kappa(\tilde{x},\xi_0)\sqrt{1-{\xi_0}^2}}d\xi_0=0 \tag{75}$$

A equação (75) encerra o desenvolvimento teórico do problema do impacto de cunha. Para fase de impacto, as equações (48), (49), (60), (61) e (75) devem ser utilizadas na resolução do problema de valor de contorno, a fim de determinar os valores de y_c, y_b e γ. Para a fase de penetração, y_c é conhecido e a equação (75) deixa de ser utilizada.

3.2.4 EQUILÍBRIO DAS FORÇAS ATUANTES A EMBARCAÇÃO

Como dito anteriormente, o projeto de embarcações de planeio deve ser conduzido de forma que, com o aumento da velocidade, forças de sustentação hidrodinâmicas surjam no fundo do casco, fazendo com que a embarcação “decole” e desenvolva ângulo de *trim* de proa.

Os principais esforços atuantes em uma embarcação de planeio típica foram apresentados na seção 2.2. Nesta seção, a sustentação da embarcação será divida

em suas parcelas estáticas e dinâmicas, a fim de que esses esforços possam ser calculados separadamente.

Desprezando os termos relacionados à gravidade na equação no coeficiente de pressão (62), os coeficientes de sustentação e arrasto dinâmico por unidade de comprimento, em cada uma das seções, são determinados por:

$$\tilde{C}_{L_d}(\tilde{x}) = \frac{\tilde{L}_d}{\rho U^2 Y_{ch_{max}}} = \tilde{y}_c(\tilde{x}) \int_{\zeta_0=\zeta}^{1} C_P(\tilde{x}, \zeta_0) d\zeta_0 \tag{76}$$

$$\tilde{C}_{D_d}(\tilde{x}) = \frac{\tilde{D}_d}{\rho U^2 Y_{ch_{max}}} = \tilde{y}_c(\tilde{x}) \int_{\zeta_0=\zeta}^{1} \frac{C_P(\tilde{x}, \zeta_0) n_x}{\cos\beta(\tilde{x}, \zeta_0)} d\zeta_0 \tag{77}$$

Onde:

n_x – é a componente da normal da superfície do casco na direção x.

Os termos $\tilde{L}_d$ e $\tilde{D}_d$ representam, respectivamente, as forças de sustentação e arrasto, por unidade de comprimento, nas seções. As forças dinâmicas totais L_d e D_d atuantes na embarcação podem ser determinadas por:

$$C_{L_d}(\tilde{x}) = \frac{L_d}{2\rho U^2 Y_{ch_{max}}^2} = \frac{1}{2} \int_{x_0=0}^{x_t} \tilde{C}_{L_d}(x_0) dx_0 \tag{78}$$

$$C_{D_d}(\tilde{x}) = \frac{D_d}{2\rho U^2 Y_{ch_{max}}^2} = \frac{1}{2} \int_{x_0=0}^{x_t} \tilde{C}_{D_d}(x_0) dx_0 \tag{79}$$

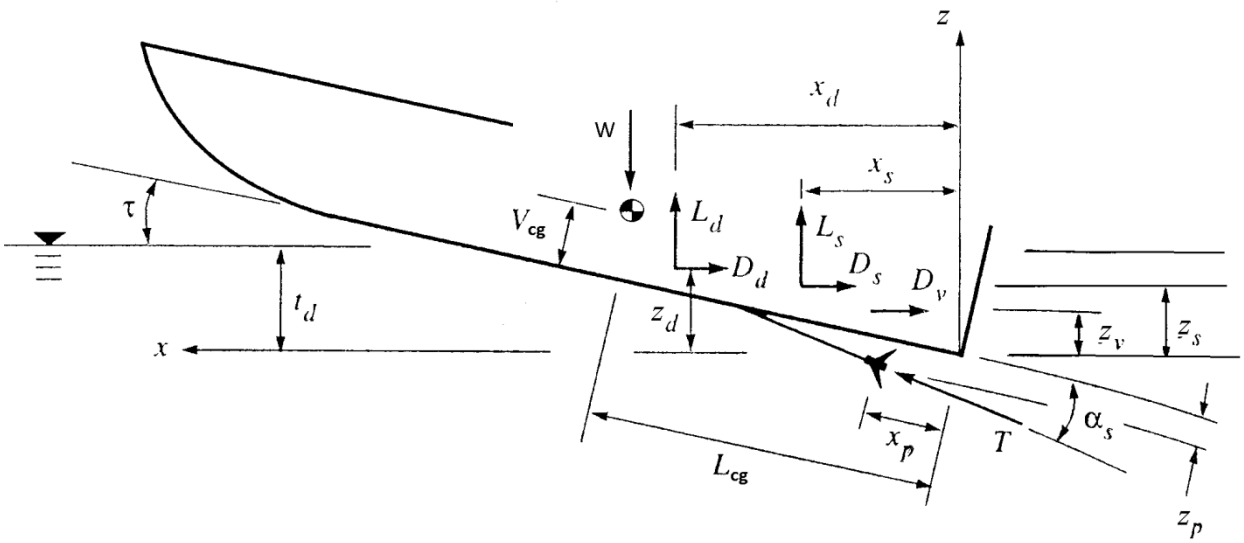

Figura 3.10 - Modelo utilizado para o equilíbrio de forças. Adaptado de (SAVANDER, SCORPIO e TAYLOR, 2002)

Similar às forças dinâmicas, as forças de sustentação e arrasto hidrostáticos podem ser determinadas integrando os termos relacionados à gravidade da equação (62). Sendo assim,

$$\tilde{C}_{L_s}(\tilde{x}) = \frac{\tilde{L}_s}{\rho U^2 Y_{ch_{max}}} = \tilde{y}_c(\tilde{x}) \int_{\zeta_0=\zeta}^{1} G\tilde{h}(\tilde{x},1) - G\tilde{h}(\tilde{x},\zeta_0) d\zeta_0 \tag{80}$$

$$\tilde{C}_{D_s}(\tilde{x}) = \frac{\tilde{D}_s}{\rho U^2 Y_{ch_{max}}} = \tilde{y}_c(\tilde{x}) \int_{\zeta_0=\zeta}^{1} \frac{G\tilde{h}(\tilde{x},1) - G\tilde{h}(\tilde{x},\zeta_0)}{\cos\beta(\tilde{x},\zeta_0)} n_x d\zeta_0 \tag{81}$$

$$C_{L_s}(\tilde{x}) = \frac{L_s}{2\rho U^2 Y_{ch_{max}}^2} = \frac{1}{2} \int_{x_0=0}^{x_t} \tilde{C}_{L_s}(x_0) dx_0 \tag{82}$$

$$C_{D_s}(\tilde{x}) = \frac{D_s}{2\rho U^2 Y_{ch_{max}}^2} = \frac{1}{2} \int_{x_0=0}^{x_t} \tilde{C}_{D_s}(x_0) dx_0 \tag{83}$$

Onde,

x_t – é a posição longitudinal do espelho de popa.

A componente da resistência de atrito D_v é calculada através da área molhada do casco, utilizando o coeficiente de atrito da ITTC:

$$D_v = \rho U^2 Y_{ch_{max}}^2 C_f \int_{x_0=0}^{x_t} \tilde{y}_c(x_0) \int_{\zeta=0}^{1} \frac{1}{\cos\beta(x_0,\zeta)} d\zeta\, dx_0 \tag{84}$$

Para que haja equilíbrio das forças na direção x:

$$D_d + D_s + D_v = T\cos(\tau + \alpha_s) \tag{85}$$

E para o equilíbrio das forças em z,

$$L_d + L_s + T\sin(\tau + \alpha_s) = W \tag{86}$$

Já para o equilíbrio dos momentos no plano vertical:

$$\begin{aligned} L_d x_d + L_s x_s + D_d z_d + D_v z_v + D_s z_s + T(x_p \sin\alpha_s + z_p \cos\alpha_s) \\ = W(LCG\cos\tau - VCG\sin\tau) \end{aligned} \tag{87}$$

O valor do ângulo de *trim* τ é a inclinação entre quilha e nível da superfície calma da água, medido na intersecção entre a quilha e o espelho de popa. O ângulo do eixo propulsor também é medido nesse ponto.

Para obter o equilíbrio das forças, o sistema de equações descrito por (85), (86) e (87) deve ser resolvido para τ, t_d e T em função das características geométricas e

do carregamento da embarcação, $\Delta, V_{cg}, L_{cg}, \alpha_s, x_p$ e y_p.

4 RESOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO

No capítulo 3 foram discutidos os aspectos teóricos do impacto de cunhas e como o resultado pode ser aplicado, através da teoria de corpo esbelto, para determinar o desempenho em águas calmas de embarcações de planeio com velocidade constante.

Nesse capítulo será discutido como as equações do problema de valor de contorno serão tratadas numericamente e como o problema será resolvido de maneira iterativa para determinar a posição de $y_c(x)$ e $y_b(x)$ e o valor da distribuição da intensidade de vórtices $\gamma_c(x,y)$ e $\gamma_s(x,y)$.

4.1 CONDIÇÃO CINEMÁTICA

A condição de contorno cinemática, apresentada na seção 3.2.1, precisa ser satisfeita para que não haja penetração do escoamento na superfície do casco e que a intensidade da distribuição de vórtices no ponto $y_c(x)$ seja contínua. Sendo assim, foram deduzidas as equações (48) e (49), as quais serão repetidas aqui.

$$\tan\alpha(\tilde{x}) + \frac{1}{\pi}\int_{\zeta_0=1}^{b(\tilde{x})} \frac{\gamma_s(\tilde{x};\zeta_0)}{\kappa(\tilde{x},\zeta_0)\sqrt{{\zeta_0}^2-1}}\,d\zeta_0 + \frac{2}{\pi}\int_{\zeta_0=0}^{1} \frac{F(\tilde{x},\zeta_0)\cos\beta(\tilde{x},\zeta_0)}{\kappa(\tilde{x},\zeta_0)\sqrt{1-{\zeta_0}^2}}\,d\zeta_0 = 0 \tag{88}$$

$$\gamma_c(\tilde{x},\zeta) = \frac{2}{\pi}\zeta\kappa(\tilde{x},\zeta)\sqrt{1-\zeta^2}\cos\beta(\tilde{x},\zeta) \times \left\{ \int_{\zeta_0=1}^{b(\tilde{x})} \frac{\gamma_s(\tilde{x};\zeta_0)}{\kappa(\tilde{x},\zeta_0)(\zeta_0^2-\zeta^2)\sqrt{{\zeta_0}^2-1}} d\zeta_0 + 2\int_{\zeta_0=0}^{1} \frac{F(\tilde{x},\zeta_0)\cos\beta(\tilde{x},\zeta_0)}{\kappa(\tilde{x},\zeta_0)(\zeta_0^2-\zeta^2)\sqrt{1-{\zeta_0}^2}} d\zeta_0 \right\} - F(\tilde{x},\zeta)\sin 2\beta(\tilde{x},\zeta) \tag{89}$$

A resolução numérica dessas equações necessita da definição da função $\Omega(\tilde{x},\zeta)$:

$$\Omega(\tilde{x},\zeta) = \frac{F(\tilde{x},\zeta)\cos\beta(\tilde{x},\zeta)}{\bar{\kappa}(\tilde{x},\zeta)} \tag{90}$$

$$\bar{\kappa}(\tilde{x},\zeta) = \left(\frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}\right)^{\frac{\beta_0(\tilde{x})}{\pi}} \kappa(\tilde{x},\zeta) \tag{91}$$

Onde,

$\beta_0(\tilde{x})$ – é o ângulo de “V” na quilha.

A função $\Omega(\tilde{x},\zeta)$ representa a variação tridimensional da geometria do casco. Como essa variação é pequena a função pode ser aproximada por uma série polinomial:

$$\Omega(\tilde{x},\zeta) = \sum_{m=0}^{M} a_{m+1}(\tilde{x})\ \zeta^m \tag{92}$$

Substituindo (92) em (48) e (49), chega-se às expressões numéricas para as condições cinemáticas do problema:

$$\tan\alpha(\tilde{x}) + \frac{1}{2\pi\lambda_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{\gamma_s(\bar{t_i})}{\bar{\kappa}(\bar{t_i})}(T_i - T_{i-1}) + \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{M} a_{m+1}(\tilde{x})B\left(\lambda_0, 1+\frac{m}{2}-\lambda_0\right) = 0 \tag{93}$$

E,

$$\gamma_c(\tilde{x},\zeta) = \frac{\bar{\kappa}(\tilde{x},\zeta)\cos\beta(\tilde{x},\zeta)}{\pi\lambda_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{\gamma_s(\overline{t_i})}{\bar{\kappa}(\overline{t_i})} \times \left[Q(t_i)^{\lambda_0}F_h\big(\lambda_0,\lambda_0,\lambda_0+1;Q(t_i)\big) - Q(t_{i-1})^{\lambda_0}F_h\big(\lambda_0,\lambda_0,\lambda_0+1;Q(t_{i-1})\big)\right] + \frac{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}\cos\beta(\tilde{x},\zeta)\kappa(\tilde{x},\zeta)}{\pi} \times \sum_{m=0}^{M} a_{m+1}(\tilde{x})B\left(\lambda_0-1,1+\frac{m}{2}-\lambda_0\right) \times F_h\left(1-\frac{m}{2},1,2-\lambda_0;1-\zeta^2\right) \tag{94}$$

Onde:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} - \frac{\beta_0(\tilde{x})}{\pi} \tag{95}$$

$$Q(t) = \frac{\zeta^2(t^2-1)}{t^2-\zeta^2} \tag{96}$$

Nas equações acima, o termo $\overline{t_i}$ é a coordenada ζ do ponto médio do i-ésimo trecho linear definido pelos pontos t_i e t_{i-1}, $t \in [1, b(\tilde{x})]$. $F_h(a,b,c;z)$ é a função hipergeométrica de Gauss e $B(x,y)$ é a integral de Euler de primeiro tipo, ambas definidas em (GRADSHTEYN e RYZHIK, 1965).

Como foi discutido na seção 3.2.2, a intensidade da distribuição de vórtices na superfície livre é determinada a partir dos resultados das seções anteriores, exceto para a partícula na posição $\zeta = 1$. A intensidade dessa partícula é determinada pela equação (93).

Conhecidos os valores de $y_c(x)$, $y_b(x)$ e a da intensidade da distribuição de vórtices na superfície livre, os valores de $\gamma_c(\tilde{x},\zeta)$ para $\zeta \in [0,1]$ são determinados através da equação (94).

4.2 CONDIÇÃO DINÂMICA

A condição de contorno dinâmica garante que o coeficiente de pressão seja nulo na superfície livre do escoamento entre os pontos C e B. A equação (60) faz com que o coeficiente seja constante na superfície livre.

$$\left(\tilde{v}(\tilde{x},\zeta) - \zeta\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\tilde{y}_c(\tilde{x})\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}\tilde{v}(\tilde{x},\zeta) + \tilde{y}_c(\tilde{x})\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\tilde{v}(\tilde{x},\zeta) = -\left(\tilde{w}(\tilde{x},\zeta) + \tilde{V}(\tilde{x})\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}\tilde{w}(\tilde{x},\zeta) - G\frac{\partial}{\partial\zeta}\tilde{h}(\tilde{x},\zeta) \tag{97}$$

Como visto na seção 3.2.2, o lado direito da equação (60) representa a aceleração transversal das partículas que deixam o ponto C, $y = y_c(x)$. O valor da aceleração dessas partículas permanece constante a partir do momento que elas avançam na superfície livre do escoamento (SAVANDER, SCORPIO e TAYLOR, 2002).

Sendo assim, é possível mapear a posição dessas partículas. Além disso, a velocidade de avanço das partículas fluidas é menor que a velocidade de avanço do ponto de formação de *spray*, isto é, o ponto B está sempre "atrasado" em relação às partículas que deixaram o ponto C em uma posição x anterior (VORUS, 1996). A elaboração do mapa de velocidades está representada na Figura 4.1.

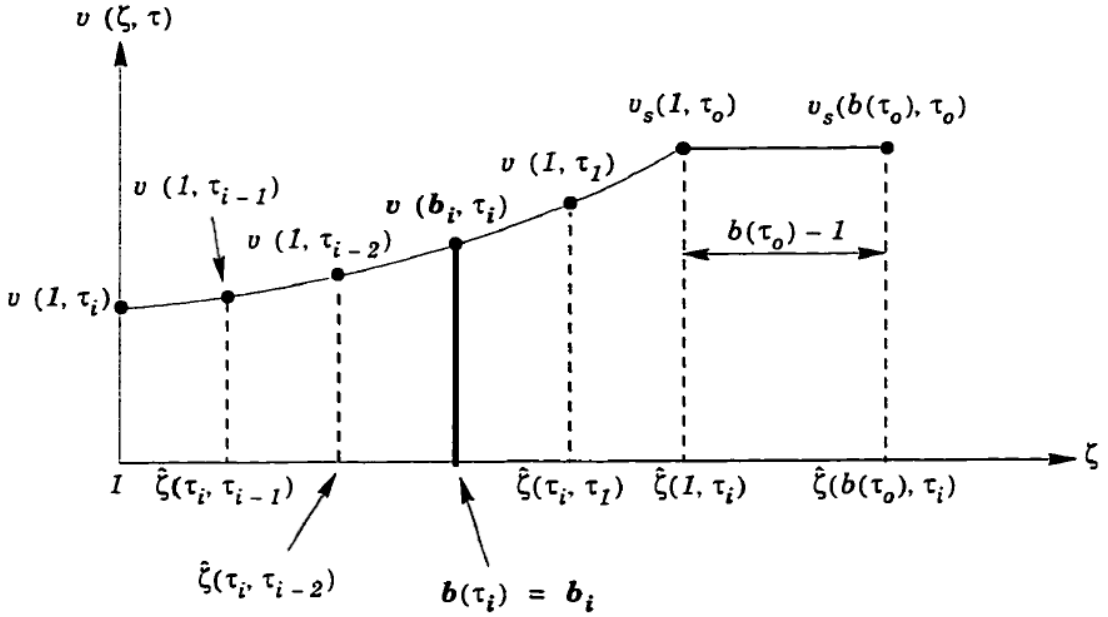

Figura 4.1 - Mapa de velocidades das partículas na superfície livre. Retirada de (SAVANDER, 1997)

A distribuição de vórtices na superfície livre γ_s é determinada a partir da velocidade das partículas que passaram por $y = y_c$ nas seções anteriores. O único valor da intensidade da distribuição de vórtices na superfície livre que não pode ser calculado dessa maneira é o valor no ponto C na seção atual.

Em geral, para cada nova seção um segmento linear é adicionado em $\zeta = 1$. Esse segmento representa a partícula que acaba de ingressar na superfície livre do escoamento. Para essa partícula, a velocidade não pode ser determinada através do mapa de velocidades, mas, através da condição da continuidade da velocidade (93).

O valor da aceleração da partícula em $\zeta = 1$ é dado por:

$$\tilde{a}(\tilde{x},1) = -\frac{1}{\tilde{y}_c(\tilde{x})}\left\{\left(\tilde{w}(\tilde{x},1) + \tilde{V}(\tilde{x})\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}\tilde{w}(\tilde{x},1) + G\frac{\partial}{\partial\zeta}\tilde{h}(\tilde{x},1)\right\} \tag{98}$$

O valor da velocidade vertical dessa partícula é determinado pela expressão (39):

$$\begin{aligned}\tilde{w}(\tilde{x},\zeta,0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta_0=-b(\tilde{x})}^{b(\tilde{x})}\frac{\gamma(\tilde{x};\zeta_0)}{\zeta_0-\zeta}d\zeta_0 \xrightarrow{\gamma(\tilde{x};-\zeta_0)=-\gamma(\tilde{x};\zeta_0)} \tilde{w}(\tilde{x},\zeta,0) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\zeta_0=0}^{b(\tilde{x})}\frac{\gamma(\tilde{x};\zeta_0)\zeta_0}{(\zeta_0-\zeta)^2}d\zeta_0\end{aligned} \tag{99}$$

Se a distribuição de vórtices entre 0 e $b(\tilde{x})$ for dividida em N segmentos lineares com intensidade de vorticidade constante, a velocidade vertical da partícula pertencente ao painel j pode ser determinada por:

$$\tilde{w}\left(\tilde{x},\overline{\zeta}_j,0\right) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\gamma_i * \ln\left|\frac{\zeta_i^2-\zeta^2}{\zeta_{i-1}^2-\zeta^2}\right| + \frac{\gamma_j}{\pi}\ln\left|\frac{\zeta_{j-1}+\zeta}{\zeta_j+\zeta}\right| \tag{100}$$

Onde:

ζ_{i-1} – é o limite inferior do segmento linear i;

ζ_i – é o limite superior do segmento linear i;

$\overline{\zeta}_j$ – é o ponto médio do segmento linear j.

Para calcular o valor da aceleração da partícula, resta apenas calcular o valor da derivada em ζ de sua velocidade vertical. Sendo assim, tomando a derivada em ζ da equação (99) chega-se a:

$$\frac{\partial \widetilde{w}(\tilde{x},\zeta,0)}{\partial \zeta} = \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta_0=-b(\tilde{x})}^{b(\tilde{x})} \frac{\gamma(\tilde{x};\zeta_0)}{(\zeta_0-\zeta)^2}\, d\zeta_0 \xrightarrow{\gamma(\tilde{x};-\zeta_0)=-\gamma(\tilde{x};\zeta_0)} \frac{\partial \widetilde{w}(\tilde{x},\zeta,0)}{\partial \zeta} \tag{101}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\zeta_0=0}^{b(\tilde{x})} \frac{\gamma(\tilde{x};\zeta_0)\zeta_0\zeta}{(\zeta_0^2-\zeta^2)^2}\, d\zeta_0$$

Novamente, utilizando a mesma divisão em segmentos lineares utilizada para calcular a velocidade vertical, chega-se à expressão para derivada em ζ dessa velocidade:

$$\frac{\partial \widetilde{w}(\tilde{x},\overline{\zeta}_j,0)}{\partial \zeta} = \frac{\zeta}{\pi}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N} \gamma_i * \left[\frac{1}{\zeta_{i-1}^2-\zeta^2} - \frac{1}{\zeta_i^2-\zeta^2}\right] + \frac{\gamma_j}{2\pi}\left[\frac{1}{\zeta_j+\zeta} - \frac{1}{\zeta_{j-1}+\zeta}\right] \tag{102}$$

A posição e a velocidade das partículas na superfície livre do escoamento, que passaram por $\tilde{y} = \widetilde{y_c}(\widetilde{x_j})$ em um instante de tempo anterior, são calculadas pelas seguintes expressões:

$$\zeta_i = \frac{\widetilde{y_c}(\widetilde{x_j}) + \tilde{v}(\widetilde{x_j},1)(\widetilde{x_i}-\widetilde{x_j}) + 0{,}5\widetilde{a_j}(\widetilde{x_i}-\widetilde{x_j})^2}{\widetilde{y_c}(\widetilde{x_i})} \tag{103}$$

$$\tilde{v}(\widetilde{x_i},\zeta_i) = \tilde{v}(\widetilde{x_j},1) + \widetilde{a_j}(\widetilde{x_i}-\widetilde{x_j}) \tag{104}$$

$$\tilde{z}(\widetilde{x_i},\zeta_i) = \tilde{z}(\widetilde{x_j},1) + \widetilde{w}(\widetilde{x_j},1)(\widetilde{x_i}-\widetilde{x_j}) - \frac{G(\widetilde{x_i}-\widetilde{x_j})^2}{4} \tag{105}$$

$$\widetilde{w}(\widetilde{x_i},\zeta_i) = \widetilde{w}(\widetilde{x_j},1) - \frac{G(\widetilde{x_i}-\widetilde{x_j})}{2} \tag{106}$$

Uma vez determinada a posição das partículas que compõem a superfície livre é possível determinar as velocidades transversal e vertical do ponto de formação de *spray*. A expressão (61) é então utilizada para calcular o valor da variação longitudinal desse ponto que garante que o coeficiente de pressão na superfície livre seja nulo.

4.3 CONTINUIDADE DO DESLOCAMENTO DA SUPERFÍCIE LIVRE

A condição de contorno adicional para fase de impacto é determinada forçando que o deslocamento da superfície livre no ponto de formação do *spray* seja igual ao

deslocamento da superfície do casco nesse ponto.

Essa condição de contorno deve ser respeitada apenas na fase de impacto do escoamento. Ela é determinada através da expressão:

$$\tilde{Z}_{WL}(\tilde{x}) - \frac{2}{\pi}\int_{\xi_0=0}^{1} \frac{\tilde{h}_0(\tilde{x},\xi)\cos\beta(\tilde{x},\xi_0)}{\kappa(\tilde{x},\xi_0)\sqrt{1-{\xi_0}^2}}d\xi_0 = 0 \tag{107}$$

Dividindo a seção em N segmentos lineares entre a quilha e o ponto de formação de *spray*, a expressão pode ser numericamente representada por:

$$\tilde{Z}_{WL}(\tilde{x}) = \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{N} \frac{\cos\beta(\tilde{x},\bar{\xi}_i)}{\bar{\kappa}(\tilde{x},\bar{\xi}_j)}\left\{\left[\tilde{h}_{0_{j-1}} - \tilde{y}_b(\tilde{x})\xi_{j-1}\tan(\beta_j)\right]\left(I_{16_j} - I_{16_{j-1}}\right) + \tilde{y}_b(\tilde{x})\tan\beta_j\left(I_{16a_j} - I_{16a_{j-1}}\right)\right\} \tag{108}$$

Onde:

$$I_{16_j} = \frac{{\xi_j}^{2(1-\lambda_0)}}{2(1-\lambda_0)}F_h\left(1-\lambda_0, 1-\lambda_0, 2-\lambda_0; \xi_j^2\right) \tag{109}$$

$$I_{16a_j} = \frac{{\xi_j}^{2(3/2-\lambda_0)}}{2(3/2-\lambda_0)}F_h\left(1-\lambda_0, \frac{3}{2}-\lambda_0, \frac{5}{2}-\lambda_0; \xi_j^2\right) \tag{110}$$

Como o valor da imersão da seção $\tilde{Z}_{WL}(\tilde{x})$ é conhecido, a equação (108) pode ser utilizada para determinar a posição do ponto de formação de *spray* $\tilde{y}_b(\tilde{x})$ durante a fase de impacto.

4.4 SIMPLIFICAÇÃO PARA O CASO DE UMA EMBARCAÇÃO PRISMÁTICA

A formulação teórica apresentada no capítulo 3 e o equacionamento numérico apresentado nos tópicos anteriores permitem avaliar a influência da variação tridimensional da geometria do casco no problema de impacto. Para o caso de uma embarcação prismática, o ângulo de “V” permanece constante e não há curvatura na quilha da embarcação, isto é:

$$\frac{\partial h(x,y)}{\partial y} = \tan\beta = cte \tag{111}$$

$$\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = \tan\alpha = cte \tag{112}$$

Sem a variação em x e em y da geometria da embarcação, a função $\Omega(x,y)$, utilizada no desenvolvimento da condição cinemática e definida em (92), torna-se nula. As equações (93) e (94) se reduzem a:

$$\tan\alpha(\tilde{x}) + \frac{1}{2\pi\lambda_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{\gamma_s(\overline{t_\iota})}{\bar{\kappa}(\overline{t_\iota})}(T_i - T_{i-1}) = 0 \tag{113}$$

E,

$$\begin{aligned}\gamma_c(\tilde{x},\zeta) = \frac{\bar{\kappa}(\tilde{x},\zeta)\cos\beta(\tilde{x},\zeta)}{\pi\lambda_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{\gamma_s(\overline{t_\iota})}{\bar{\kappa}(\overline{t_\iota})} \\ \times\left[Q(t_i)^{\lambda_0}F_h\big(\lambda_0,\lambda_0,\lambda_0+1;Q(t_i)\big)\right. \\ \left.-\,Q(t_{i-1})^{\lambda_0}F_h\big(\lambda_0,\lambda_0,\lambda_0+1;Q(t_{i-1})\big)\right]\end{aligned} \tag{114}$$

A condição dinâmica do escoamento é representada pelas expressões (60) e (61). A equação (61) permanece inalterada, entretanto a equação de Burger se reduz à sua forma homogênea:

$$\left(\tilde{v}(\tilde{x},\zeta) - \zeta\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\tilde{y}_c(\tilde{x})\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}\tilde{v}(\tilde{x},\zeta) + \tilde{y}_c(\tilde{x})\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\tilde{v}(\tilde{x},\zeta) = 0 \tag{115}$$

Isso significa que, para o caso de uma embarcação prismática, a aceleração das partículas que deixam o ponto C e entram na superfície livre é nula. Nesta nova condição, o mapa de velocidade é determinado pelas seguintes expressões:

$$\zeta_i = \frac{\tilde{y}_c(\tilde{x}_j) + \tilde{v}(\tilde{x}_j,1)(\tilde{x}_\iota - \tilde{x}_j)}{\tilde{y}_c(\tilde{x}_\iota)} \tag{116}$$

$$\tilde{v}(\tilde{x}_\iota,\zeta_i) = \tilde{v}(\tilde{x}_j,1) \tag{117}$$

$$\tilde{z}(\tilde{x}_\iota,\zeta_i) = \tilde{z}(\tilde{x}_j,1) + \tilde{w}(\tilde{x}_j,1)(\tilde{x}_\iota - \tilde{x}_j) \tag{118}$$

$$\tilde{w}(\tilde{x}_\iota,\zeta_i) = \tilde{w}(\tilde{x}_j,1) \tag{119}$$

A velocidade das partículas que deixam o ponto C permanece constante. Portanto, a intensidade dos vórtices em ζ_i na superfície livre é calculada diretamente pela

velocidade da partícula que passou por $\zeta = 1$ na seção x_j.

Resta apenas modificar a condição da continuidade do deslocamento da superfície livre utilizada na fase de impacto. Substituindo $\tilde{h}_0(\tilde{x},\xi) = \tilde{y}_b \xi \tan\beta$ na equação (107):

$$\tilde{Z}_{WL}(\tilde{x}) = \frac{2\tilde{y}_b(\tilde{x})\sin\beta}{\pi}\int_{\xi_0=0}^{1}\frac{\xi_0^{2(1-\lambda)}}{\left(1-{\xi_0}^2\right)^{1-\lambda}}d\xi_0 = \frac{2\tilde{y}_b(\tilde{x})\sin\beta}{\sqrt{\pi^3}}\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda\right) \tag{120}$$

Onde:

$\Gamma(\lambda)$ – é a função gama definida em (GRADSHTEYN e RYZHIK, 1965).

O método computacional implementado durante a elaboração desta dissertação utiliza a formulação para o caso prismático. Optou-se pela formulação simplificada com o objetivo de avaliar apenas a influência dos principais parâmetros geométricos da embarcação no escoamento fluido em torno do casco.

4.5 PROCEDIMENTO UTILIZADO NA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO

Em geral, para um dado incremento Δx, determina-se o valor das incógnitas do problema $y_c(x)$, $y_b(x)$, $\gamma_c(x,y)$ e $\gamma_s(x,y)$. Entretanto, isso não garante que o ponto de coeficiente de pressão nulo, C, esteja sobre a quina no final da fase de impacto.

Para forçar que o ponto C fique sobre a quina no final da fase de impacto, será realizada uma mudança nas variáveis do problema. Ao invés de determinar o valor de $y_c(x)$ para uma dada posição da seção x, será considerado que o valor de $y_c(x)$ é conhecido e procura-se a posição x na qual o coeficiente de pressão é nulo. Essa abordagem do problema foi proposta em (VORUS, 1996).

Considerando que a fase de impacto termine em M seções, a coordenada do ponto C pode ser determinada pela seguinte expressão:

$$\tilde{y}_c(\tilde{x}_i) = \frac{i}{M}Y_{ch}(\tilde{x}_i), com\ i = 1,2,\ldots M \tag{121}$$

O procedimento numérico para resolução do problema de valor de contorno durante a fase de impacto está representado na Figura 4.2. Para uma seção i, faz-se uma estimativa inicial da posição longitudinal da seção $\tilde{x}_j$. A partir dessa estimativa, determina-se, através da equação (121), a posição transversal do ponto C. Em seguida, a coordenada do ponto de formação de *spray* é determinada pela equação da continuidade da superfície livre do escoamento (120). Através das equações (116) a (119) a equação Burger homogênea é resolvida e utilizando os resultados das seções anteriores, elabora-se o mapa de velocidades na superfície livre. Então, o valor da intensidade da distribuição de vórtices no ponto B, $\gamma_s(\tilde{x}_j, b_j)$, é interpolado do mapa de velocidades. Com o valor de $\gamma_s(\tilde{x}_j, b_j)$, determina-se o valor da variação do ponto de formação de *spray* que respeita a condição dinâmica (61). Em seguida, esse valor é comparado à variação obtida através de $\left(\tilde{y}_{b_i} - \tilde{y}_{b_{i-1}}\right) / (\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1})$. Caso a diferença entre os dois valores não seja suficientemente pequena, a posição longitudinal da seção é atualizada e o procedimento é repetido.

Após a convergência de $\tilde{x}_j$, as posições dos pontos de coeficiente de pressão nulo e de formação do *spray* são conhecidas. Através do mapa de velocidades, é possível determinar a intensidade da distribuição de vórtices na superfície livre ($\zeta \in [1, b_i]$), exceto para a partícula que acaba de entrar na porção livre do escoamento (seção 4.2). O valor da intensidade nesse ponto é determinado através da equação da continuidade da velocidade no ponto C (113)(93). Finalmente, a intensidade da distribuição de vórtices na superfície do corpo é determinada através da condição cinemática (114).

A fase de impacto se encerra quando o ponto de coeficiente de pressão nulo chega à quina. A partir desse instante, o escoamento é forçado a se separar da geometria. O ponto de formação de *spray* continua avançando em direção à superfície livre, porém o ponto C permanece na quina.

Durante a fase de penetração, são realizados pequenos incrementos na posição longitudinal da seção na qual se deseja determinar a distribuição de vórtices. Considerando que a fase de penetração se encerre após a passagem de K seções, a posição longitudinal da seção a ser analisada é definida por:

$$\tilde{x}_i = \frac{i}{K}(\tilde{x}_t - \tilde{x}_{cuw}) + \tilde{x}_{cuw}, com\ i = 1,2, \dots K \tag{122}$$

Onde,

$\tilde{x}_{cuw}$ – posição longitudinal do fim da fase de impacto,

$\tilde{x}_t$ – posição longitudinal do espelho de popa.

A partir de uma estimativa inicial para posição do ponto de formação de *spray*, $\tilde{y}_{b_j}(\tilde{x}_i)$, realiza-se um procedimento iterativo similar ao realizado para fase de impacto, como representado na Figura 4.3.

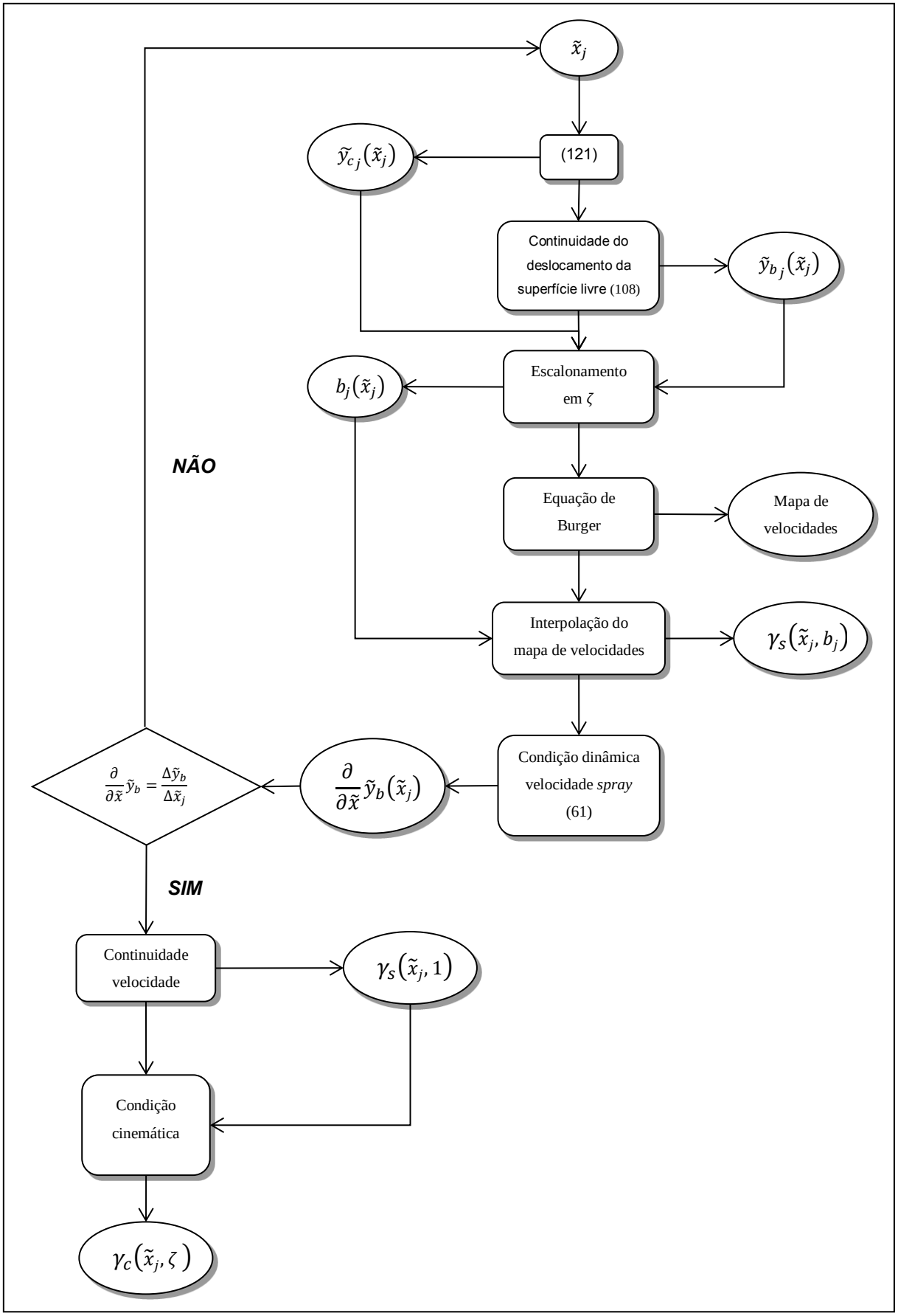

Figura 4.2 – Procedimento numérico para fase de impacto

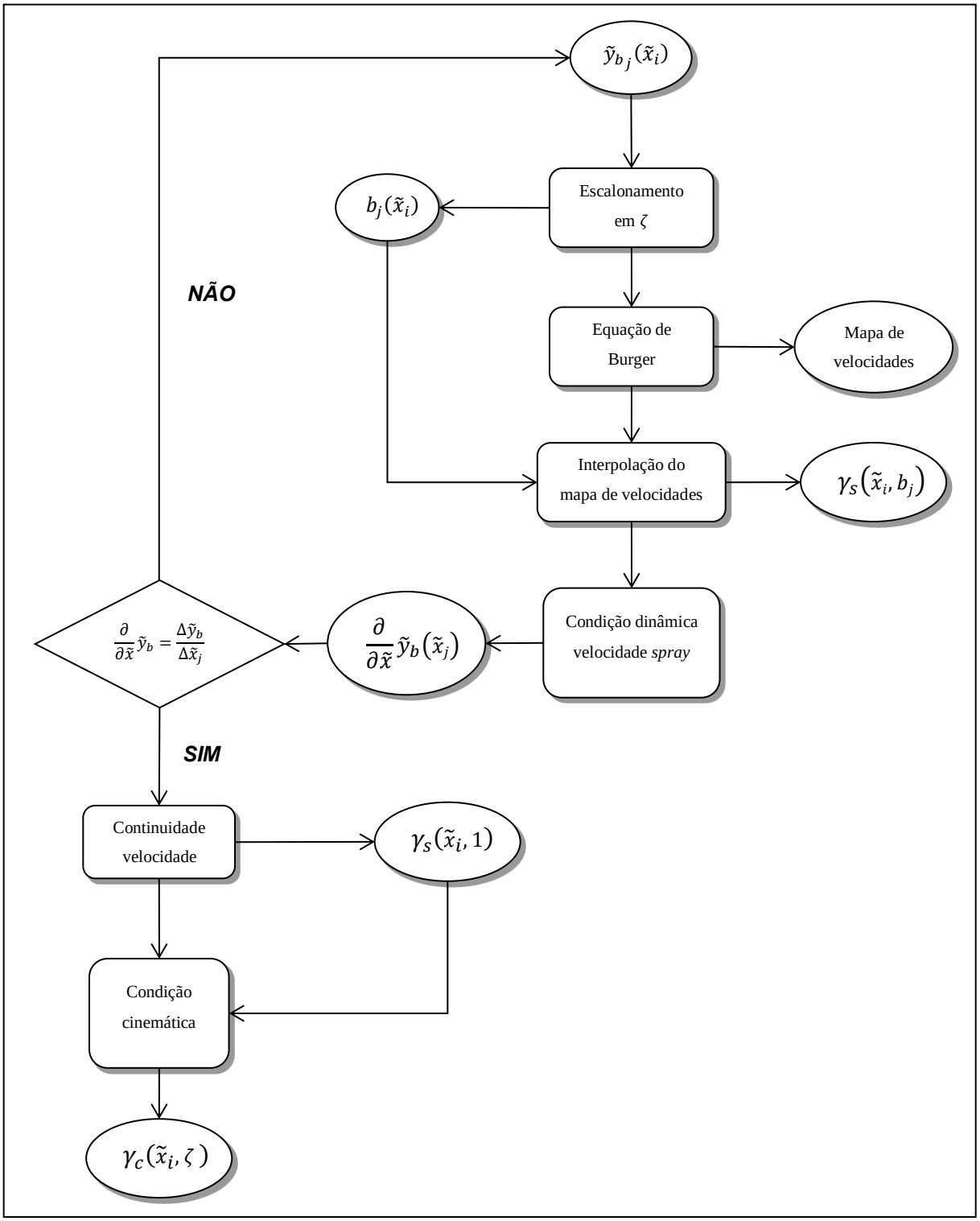

Figura 4.3 - Procedimento numérico para fase de penetração

5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS E COMPARAÇÃO COM RESULTADOS EXTRAÍDOS DA LITERATURA

No capítulo 3, foi definido o problema de valor de contorno de uma embarcação de planeio navegando com velocidade constante. Também foi discutido como a teoria do impacto de cunhas pode ser utilizada, para determinar o desempenho da embarcação em águas calmas.

No capítulo 4, foi descrito como as condições de contorno serão tratadas numericamente. Também foi apresentado um procedimento numérico para resolução do problema de valor de contorno.

Neste capítulo, os resultados obtidos a partir de simulações numéricas do programa desenvolvido serão comparados com aqueles encontrados na literatura. Primeiramente, o coeficiente de massa adicional resultante do impacto de uma cunha prismática com velocidade de queda constante será comparado com os obtidos nos trabalhos de (VON KARMAN, 1929), (WAGNER, 1932) e (VORUS, 1996).

Em seguida, será analisado o caso da queda de uma cunha prismática com ângulos de “V” entre 10° e 25°, a fim de avaliar a influência da variação desse parâmetro geométrico no campo de pressão resultante do impacto. Para o caso da cunha de 20°, os resultados obtidos a partir das simulações numéricas serão comparados aos encontrados em (VORUS, 1996).

Posteriormente, os valores obtidos para o coeficiente de pressão de uma embarcação prismática de 20° serão comparados com os valores experimentais encontrados em (KAPRYAN e BOYD, 1955).

O método semi-empírico desenvolvido por Savitsky, o qual foi apresentado no capítulo 2, é um dos principais métodos utilizados, ainda hoje, para se estimar o desempenho em águas calmas de uma embarcação de planeio. Utilizando o programa desenvolvido nesta dissertação, foram realizadas simulações para embarcações prismáticas navegando com velocidade constante. Os valores dos comprimentos molhados da quilha e da quina, do ângulo de trim de equilíbrio e da força propulsora necessária para empurrar a embarcação serão comparados com

aqueles obtidos pelo método de Savitsky.

Finalmente, os valores de comprimento molhado médio, ângulo de trim e resistência ao avanço de uma embarcação prismática com ângulo de “V” de 10°, obtidos pelo programa desenvolvido nessa dissertação, serão comparados com resultados experimentais encontrados em (FRIDSMA, 1969).

5.1 IMPACTO DE UMA CUNHA PRISMÁTICA COM VELOCIDADE DE PENETRAÇÃO CONSTANTE

Como foi dito na seção 2.1, o estudo de superfícies de planeio iniciou-se com a necessidade de se aprimorar o desempenho de pousos e decolagens de hidroaviões.

Um dos primeiros trabalhos relacionados ao tema é o de (VON KARMAN, 1929). Von Karman modelou o escoamento em torno de uma cunha prismática como o problema de placa com largura expansível perpendicular ao escoamento. A largura da placa ($2y$) foi definida em função da imersão da cunha em relação ao nível da superfície livre do fluído. O modelo de von Karmam não considera o acúmulo de fluido, acima da superfície estática, que ocorre durante o impacto, uma vez que a largura da placa é igual à largura da cunha na posição estática (Figura 5.1). Wagner (1932) estendeu o trabalho de von Karmam a fim de incluir esse efeito.

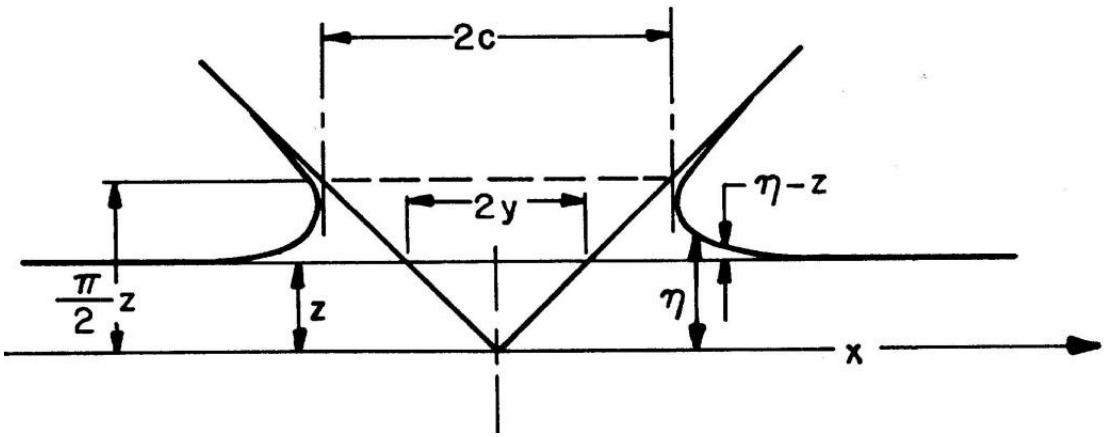

Figura 5.1 - Modelo utilizado por Wagner. Adaptada de (PAYNE, 1988)

Wagner assume que o “empilhamento” de fluido devido ao impacto da placa $(2c)$ é equivalente a $\pi/2$ da largura da posição estática $(2y)$. O fator de Wagner foi utilizado por diversos autores para determinar a superfície molhada em problemas relacionados ao impacto de superfícies com ângulo de “V”.

Utilizando a condição de continuidade da superfície livre (120), é possível estimar a largura do “empilhamento” de fluido durante o impacto de uma cunha prismática com velocidade de penetração constante:

$$\tilde{Z}_{WL}(\tilde{x}) = \frac{2\tilde{y}_b(\tilde{x})\sin\beta(\tilde{x})}{\pi}\int_{\xi_0=0}^{1}\frac{{\xi_0}^{2(1-\lambda)}}{\left(1-{\xi_0}^{2}\right)^{1-\lambda}}d\xi_0 \rightarrow WF$$
$$= \frac{\tilde{y}_b(\tilde{x})}{\tilde{Z}_{WL}(\tilde{x})}\tan\beta(\tilde{x}) = \frac{\pi}{2}\times\frac{\sqrt{\pi}}{\cos\beta(\tilde{x})\,\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)} \tag{123}$$

Onde:

WF – fator de “empilhamento”;

$\lambda = \frac{1}{2} - \frac{\beta(\tilde{x})}{\pi}$;

O fator de “empilhamento” foi calculado para cunhas prismáticas com diferentes ângulos de “V”. Como pode ser observado na Figura 5.2, esse fator é dependente do ângulo de “V” da cunha. O valor proposto por (WAGNER, 1932) só é válido para placa plana, isto é, quando o ângulo de “V” da cunha é nulo. Por outro lado, o “empilhamento” de fluido só deixa de ser relevante, como assumido por (VON KARMAN, 1929), para valores elevados de ângulo de “V”.

Quando um objeto penetra na superfície de um fluido surge uma força resistente a essa penetração. Essa força está associada à desaceleração do corpo e a efeitos hidrodinâmicos do escoamento, os quais aparentam aumentar a massa própria do objeto.

A força resultante do impacto de um corpo sobre a superfície de um fluido pode ser determinada pela Segunda Lei de Newton:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}[(m+m')*\vec{v}] \tag{124}$$

Onde:

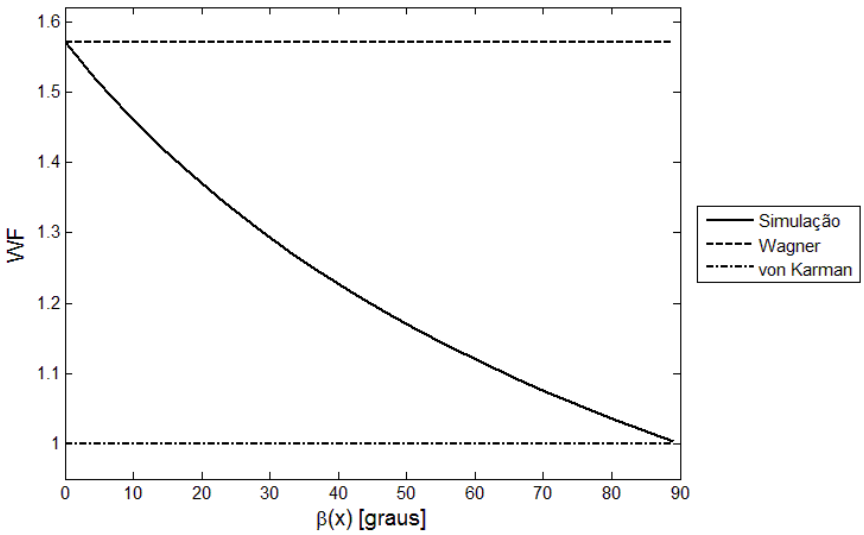

Figura 5.2 – "Empilhamento" de fluido para direferentes ângulos de "V"

m – é a massa própria;

m' - é a massa adicional aparente;

$\vec{v}$ – é o vetor velocidade.

Se a massa do corpo for desconsiderada, a força resultante do impacto é devida apenas à massa adicional aparente do escoamento. A massa adicional por unidade de comprimento m', determinada a partir do modelo de escoamento proposto por von Karman (1929), é calculada por:

$$m'_{von\ Karmam} = \frac{\pi}{2}\rho y^2 = \frac{\pi}{2}\rho\left(\frac{z_{wl}}{tan\beta}\right)^2 \tag{125}$$

Onde:

ρ – densidade do fluido;

z_{wl} – afundamento da cunha em relação à superfície estática;

β – ângulo de “V” da cunha.

Com a inclusão do “empilhamento” de fluido entre a cunha e a superfície livre, Wagner (1932) determinou que a massa adicional resultante do impacto é equivalente à $\pi^2/_4$ do valor determinado por von Karman.

$$m'_{Wagner} = \frac{\pi^2}{4} \times \frac{\pi}{2}\rho\left(\frac{z_{wl}}{tan\beta}\right)^2 \tag{126}$$

Para o caso do impacto com velocidade de penetração constante e considerando

apenas as forças atuantes no eixo z, a equação (124) resulta em:

$$F = V\frac{d}{dt}(m') \tag{127}$$

Para o caso de uma cunha prismática, a força resultante do impacto é linear em relação ao tempo. Essa hipótese será confirmada a partir dos resultados apresentados na seção 5.2, sua demonstração formal pode ser encontrada no capítulo 3 de (PAYNE, 1988). Se o referencial de tempo for o instante em que a cunha toca a superfície do fluido, a integral de ambos os lados da equação (127) resulta em:

$$\frac{FV}{Z_{WL}}\frac{\Delta t^2}{2} = Vm' \xrightarrow{\Delta t = {Z_{WL}}/{V}} m' = \frac{FZ_{WL}}{2V^2} \tag{128}$$

Por outro lado, a força por unidade de comprimento resultante do impacto pode ser calculada a partir da distribuição de pressão na superfície da cunha:

$$F = \rho V^2 \int_{y=0}^{y_c(x)} C_P(x,y)dy \tag{129}$$

Substituindo (129) em (128), chega-se à expressão que relaciona massa adicional aparente ao campo de pressão na cunha:

$$m' = \frac{\rho Z_{WL}}{2}\int_{y=0}^{y_c(x)} C_P(x,y)dy \tag{130}$$

Foram realizadas simulações numéricas para diferentes cunhas, com ângulo de “V” entre cinco e trinta graus, a fim de determinar o valor da massa adicional aparente em cada um dos casos. Os resultados obtidos encontram-se na Figura 5.3, na forma do coeficiente de massa adicional seccional ($C_{m'}$).

$$C_{m'} = \frac{\frac{\rho Z_{WL}}{2}\int_{y=0}^{y_c(x)} C_P(x,y)dy}{\frac{\pi}{2}\rho\left(\frac{z_{wl}}{tan\beta}\right)^2} = \frac{1}{\pi Z_{WL}}\tan\beta^2 \int_{y=0}^{y_c(x)} C_P(x,y)dy \tag{131}$$

$$C_{m'_{von\,Karmam}} = 1 \tag{132}$$

$$C_{m'_{Wagner}} = \frac{\pi^2}{4} \tag{133}$$

Os resultados obtidos a partir das simulações apresentam boa aderência em relação àqueles retirados de (SAVANDER, SCORPIO e TAYLOR, 2002). Essa aderência entre os valores de $C_{m'}$ já era esperada, uma vez que o modelo físico do escoamento desenvolvido por Savander não foi alterado. A comparação foi realizada com o

objetivo de validar os resultados obtidos no programa desenvolvido nesta dissertação.

Como pode ser observado na Figura 5.3, os valores da massa adicional determinados por von Karman e Wagner, são os limites inferior e superior, respectivamente, para os valores de $C_{m'}$.

Para pequenos ângulos de "V", os valores de $C_{m'}$ obtidos em (VORUS, 1996) são semelhantes aos calculados pelas simulações, porém à medida que o ângulo de "V" aumenta a diferenças entre esses valores também aumenta. A diferença entre os valores está relacionada à maneira na qual a perturbação causada no escoamento é definida em relação à distribuição de vórtices. No modelo implementado nesta dissertação, a relação entre a velocidade transversal da perturbação no escoamento e a intensidade dos vórtices é feita a partir da equação (38):

$$\tilde{v}(x, y, 0^-) = -\frac{1}{2}\gamma(x, y) \tag{134}$$

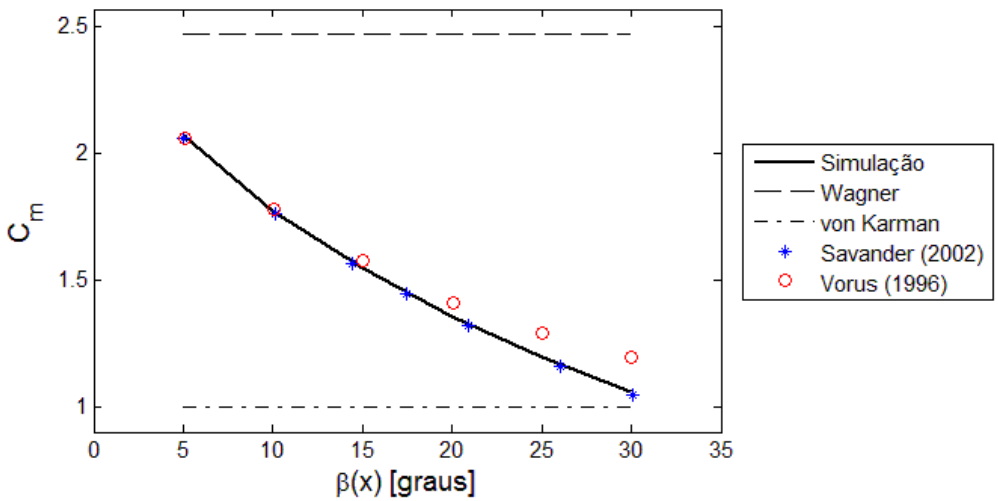

Figura 5.3 - Comparação coeficiente de massa adicional

Vorus (1996) considerada que a velocidade tangencial ($\tilde{v}_s$) à superfície do casco é diretamente proporcional à intensidade do vórtice naquele ponto, isto é:

$$\tilde{v}_s(x, y, 0^-) = -\frac{1}{2}\gamma(x, y) \tag{135}$$

A relação entre a velocidade transversal da perturbação do escoamento e a velocidade tangencial na superfície do casco é feita por:

$$\tilde{v}_s(x, y, 0^-) = \tilde{v}\cos\beta(x, y) + \left(\tilde{V} + \tilde{w}\right)\sin\beta(x, y) \tag{136}$$

Com a diminuição do ângulo de “V” da cunha, a parcela $\left(\tilde{V} + \tilde{w}\right)\sin\beta(x, y)$ da equação (136) também diminui. No limite em que $\beta(x, y)$ tende a zero, a velocidade tangencial tende a se tornar igual à velocidade transversal da perturbação do escoamento e, consequentemente, as forças estimadas por Vorus (1996) e Savander (2002) se sobrepõem.

5.2 INFLUÊNCIA DO ÂNGULO DE “V” NO CAMPO DE PRESSÃO RESULTANTE DO IMPACTO

Nessa seção serão analisados os resultados obtidos a partir das simulações numéricas do problema de impacto de uma cunha prismática com velocidade de queda constante, a fim de avaliar a influência do ângulo de “V” da cunha no campo de pressão e nas características do escoamento.

Foram realizadas simulações numéricas para cunha com 10°, 20° e 25°. Esses ângulos foram escolhidos, pois são os valores típicos encontrados no casco de uma embarcação de planeio. Todas as cunhas analisadas possuem o mesmo valor de boca.

Os resultados das simulações serão apresentados em função do tempo de queda adimensional ao invés da posição $\tilde{x}$ utilizada no desenvolvimento teórico do problema da embarcação. O tempo adimensional é definido por:

$$\mathrm{T} = \frac{tV}{Y_{ch}} \tag{137}$$

Onde:

T – é o tempo dimensional;

V – a velocidade de impacto;

Y_{ch} - meia boca da cunha.

Antes de analisar a influência do ângulo de “V” nas características do escoamento e

no campo de pressão, os resultados das simulações da cunha de 20° serão comparados com aqueles encontrados em (VORUS, 1996).

Na Figura 5.4 encontram-se os valores da posição transversal dos pontos de pressão nula $\tilde{y}_c$ e formação de *spray* $\tilde{y}_b$ e da velocidade tangencial à superfície $\tilde{v}_s$ no ponto $\zeta = 1$. Os resultados apresentam boa aderência em relação aos retirados de Vorus. No caso da velocidade tangencial durante a fase de impacto, os valores calculados pelo programa desenvolvido nessa dissertação são ligeiramente inferiores aos obtidos pelo autor.

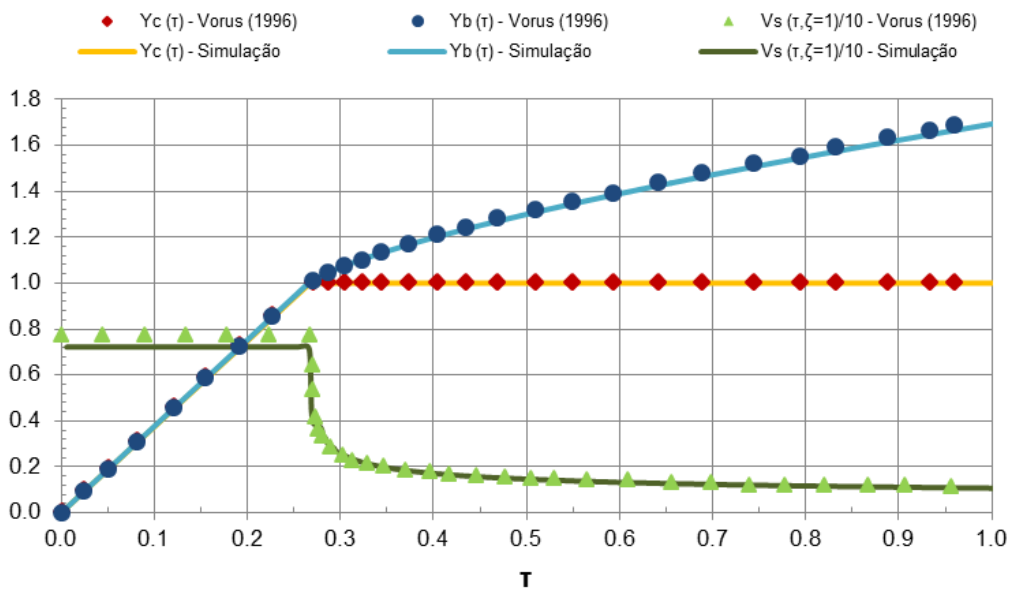

Figura 5.4 – Comparação de $y_c(\tau)$, $y_b(\tau)$ e $v_s(\tau, \zeta)$ para cunha de 20°

A comparação entre os valores estimados para o coeficiente de pressão no ponto $\zeta = 0$ (equivalente à quilha da embarcação) e o coeficiente da força de sustentação dinâmica é apresentada nas figuras Figura 5.5 e Figura 5.6, respectivamente. O coeficiente de sustentação é calculado a partir da equação (76). Novamente, os resultados obtidos apresentam boa aderência aos de Vorus, exceto em uma pequena diferença entre os valores obtidos logo no início da fase de penetração. Também é perceptível uma oscilação na resposta obtida pelo programa nessa região. Essas diferenças são explicadas pela dificuldade de se avaliar numericamente o termo $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{v}(\tilde{x}, \zeta_0)$ da equação (62). Como pode ser verificado na Figura 5.4, a velocidade transversal diminui abruptamente na passagem da fase de impacto para de penetração. Isso faz com que a derivada em x dessa velocidade tenda a infinito nessa transição.

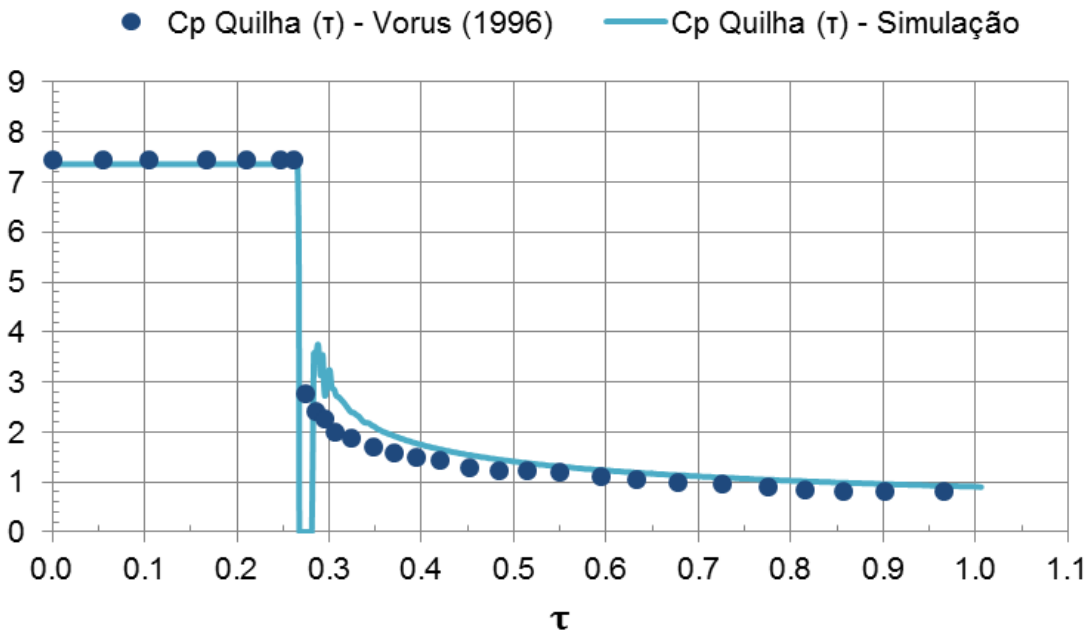

Figura 5.5 – Comparação coeficiente de pressão e, $\zeta = 0$ para cunha de 20°

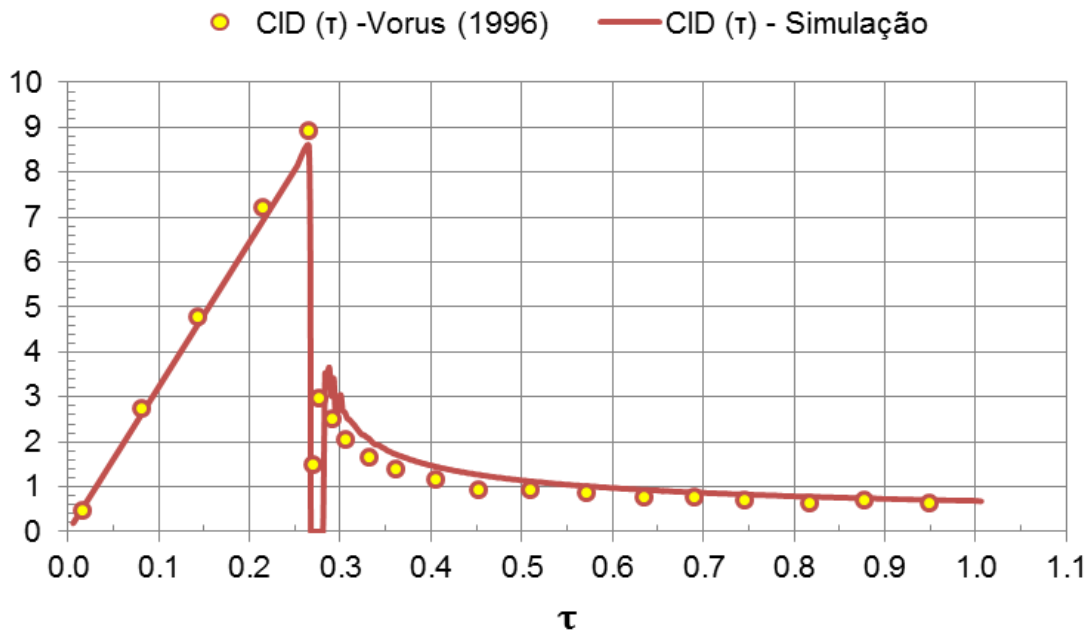

Figura 5.6 - Comparação $C_{L_d}(\tau)$ para cunha de 20°

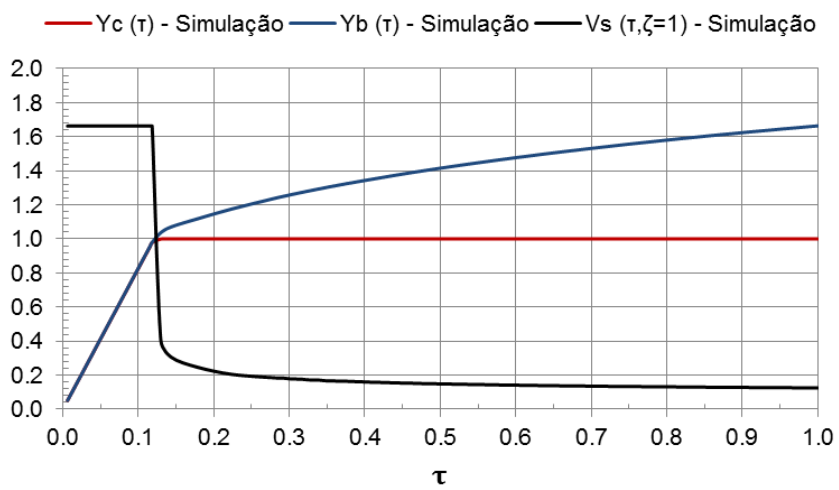

Figura 5.7 - $y_c(\tau)$, $y_b(\tau)$ e $v_s(\tau,\zeta)$ para cunha de 10°

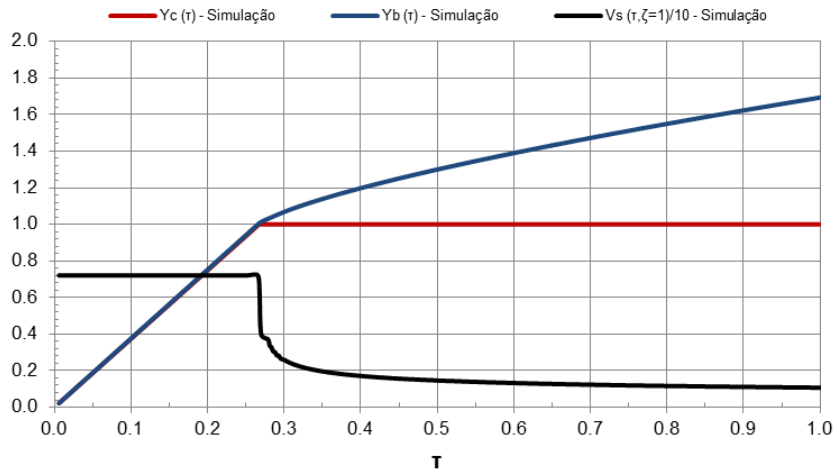

Figura 5.8 - $y_c(\tau)$, $y_b(\tau)$ e $v_s(\tau,\zeta)$ para cunha de 20°

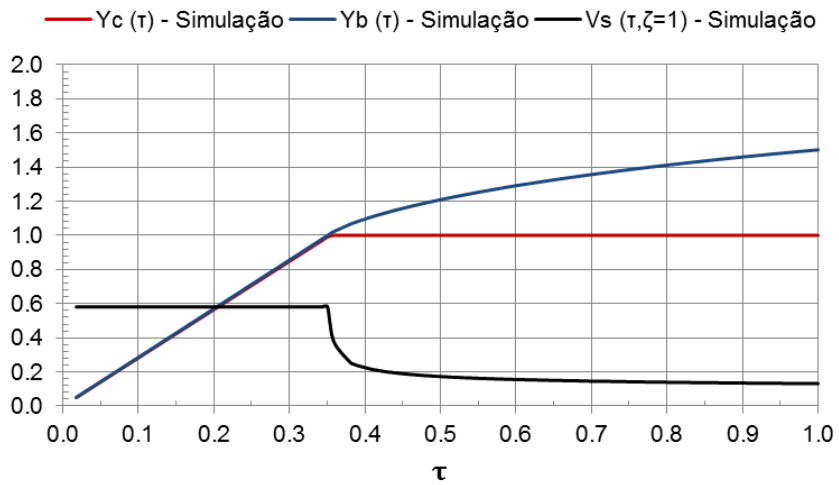

Figura 5.9 - $y_c(\tau)$, $y_b(\tau)$ e $v_s(\tau,\zeta)$ para cunha de 25°

Os valores de $\tilde{y}_c$, $\tilde{y}_b$ e $\tilde{v}_s(\zeta = 1)$ obtidos a partir das simulações numéricas, para as cunhas de 10°, 20° e 25°, estão representados nas figuras Figura 5.7, Figura 5.8 e Figura 5.9, respectivamente.

Para os três casos, é visível o instante de transição entre as fases de impacto e penetração. Além disso, o ponto de pressão nula $\tilde{y}_c$, e o ponto de formação do *spray* $\tilde{y}_b$ permanecem muito próximos durante a fase de impacto. No instante em que essa fase se encerra, o ponto $\tilde{y}_c$ permanece preso à quina da cunha enquanto o ponto $\tilde{y}_b$ avança em direção à superfície livre.

Outro aspecto interessante é que todas as partículas emitidas do ponto C durante a fase de impacto tem o mesmo valor de velocidade tangencial. Isso é resultado da aceleração dessas partículas ser considerada nula na resolução da condição dinâmica do escoamento. Após a fase de impacto, as partículas são emitidas do ponto C com um valor muito menor de velocidade tangencial, isso acontece devido ao afastamento dos pontos $\tilde{y}_c$ e $\tilde{y}_b$.

Para a cunha de 10° a fase de impacto se encerra em $\tau = 0{,}12$, enquanto que para as cunhas de 20° e 25° isso acontece em $\tau = 0{,}26$ e $\tau = 0{,}35$. Isso significa dizer, que o avanço do ponto $\tilde{y}_b$ é mais rápido quanto menor for o ângulo de “V” da cunha. Em consequência disso, o valor da velocidade tangencial das partículas emitidas do ponto de pressão nula é mais elevado quanto menor for o ângulo de “V” da cunha. Na fase de penetração, o valor da velocidade tangencial cai para um valor próximo a 0,13 independente do ângulo de “V” da cunha, na faixa analisada.

O campo de pressão atuante nas cunhas de 10°, 20° e 25° está representado na Figura 5.10, Figura 5.11 e Figura 5.12, respectivamente. A curva vermelha representa o instante final da fase de impacto, a curva amarela o instante inicial da fase de penetração e a curva azul o instante final da fase de penetração. A curva em preto representa a geometria da seção. Em todos os casos, ocorre uma queda rápida do valor de C_p assim que a fase de impacto se encerra, isso é resultado da queda de velocidade tangencial das partículas. Essa queda é tão maior quanto menor for o ângulo de “V” da cunha.

Outro aspecto interessante é o pico de pressão próximo ao ponto C observado para as cunhas de 10° e 20°. O pico de pressão é mais estreito e mais intenso para seção com menor ângulo de “V” e não é perceptível na cunha de 25°.

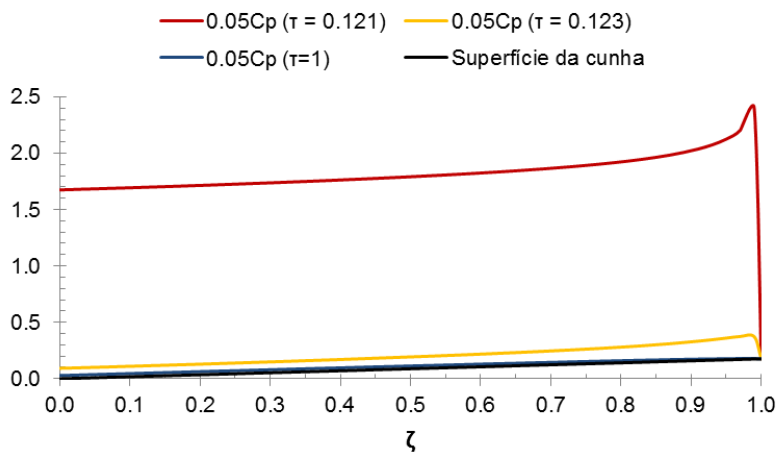

Figura 5.10 - Variação transversal do coeficiente de pressão para cunha de 10°[14]

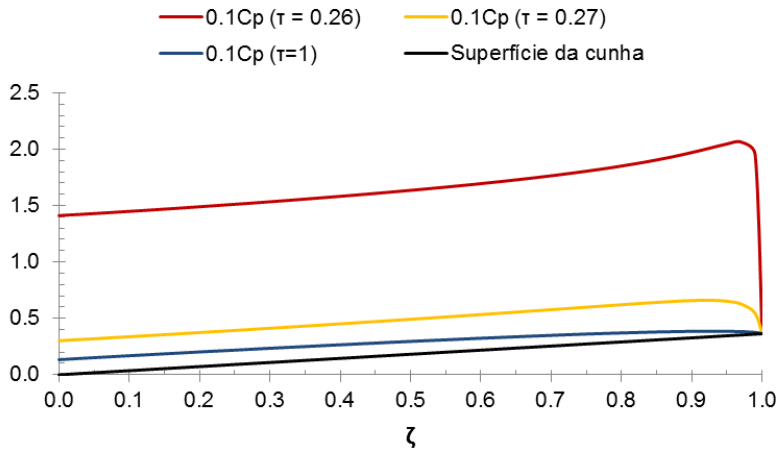

Figura 5.11 - Variação transversal do coeficiente de pressão para cunha de 20°

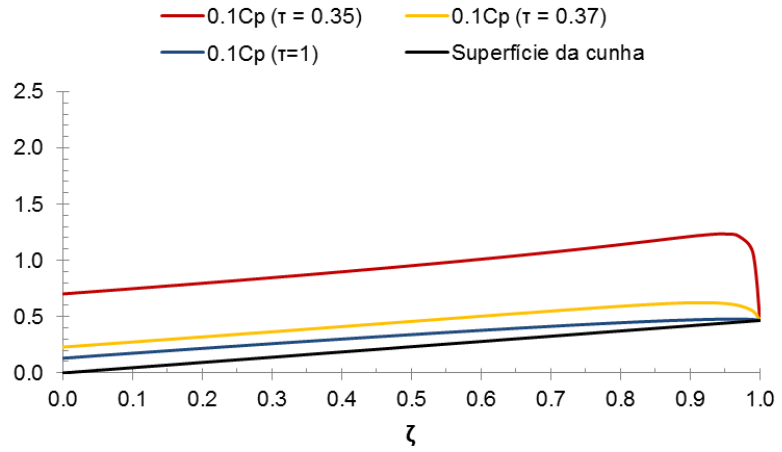

Figura 5.12 - Variação transversal do coeficiente de pressão para cunha de 25°

[14] O coeficiente de pressão para cunha de 10° foi apresentado em uma escala diferente dos demais casos devido ao elevado valor de C_p para esse valor do ângulo de "V".

5.3 COMPARAÇÃO DO COEFICIENTE DE PRESSÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Como já dito anteriormente, nos anos 1950 havia uma grande necessidade de avaliar o desempenho de superfícies de planeio para o desenvolvimento de hidroaviões. O trabalho de (KAPRYAN e BOYD, 1955) deriva da necessidade de se determinar experimentalmente as características de desempenho desse tipo de superfícies.

Kapryan apresenta o valor do coeficiente de pressão em diferentes pontos das superfícies, os quais foram obtidos a partir de uma série de ensaios de reboque para superfícies prismáticas com e sem variação do ângulo de “V” ao longo da seção. Durante os ensaios, o ângulo de trim das superfícies foi mantido fixo, porém o modelo foi mantido livre no eixo vertical.

A fim de verificar os resultados obtidos no programa desenvolvido nesta dissertação, foram realizadas simulações do modelo 301 em duas condições encontradas no experimento. O modelo 301 possuía boca de 4” e ângulo de “V” de 20°. Os manômetros foram distribuídos longitudinalmente em três posições transversais, a fim de avaliar o coeficiente de pressão próximo à quilha, à quina e no interior da superfície. A posição transversal dos pontos onde os manômetros foram conectados podem ser observadas na Figura 5.13.

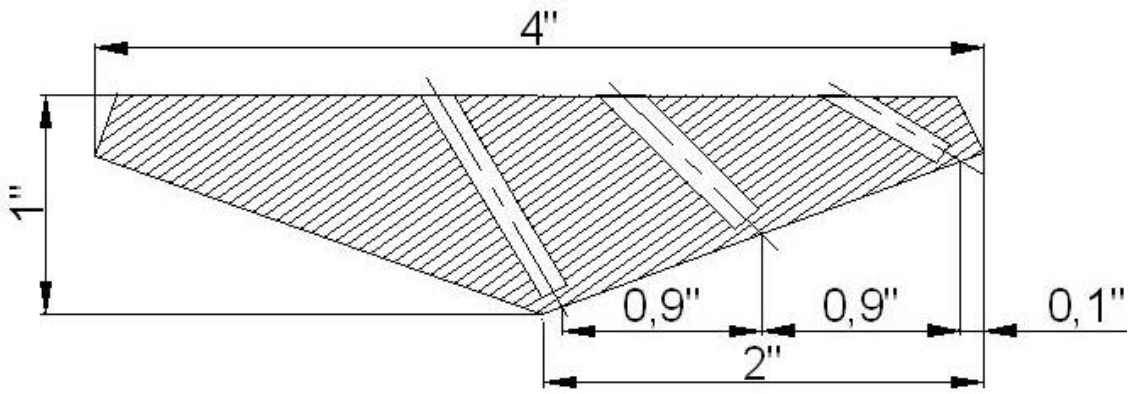

Figura 5.13 - Modelo 301 (KAPRYAN e BOYD, 1955)

Tabela 5.1 – Configurações utilizadas nas simulações numéricas

Ensaio	$C_\Delta = \frac{\Delta}{wb^3}$	$C_v = \frac{v}{\sqrt{gb}}$	$\frac{L_k}{b}$	λ	$trim$
2	4,9	12,17	3	2,25	4°
9	9,58	12,23	3,25	2,94	6°

Foram realizadas simulações numéricas do modelo 301 nas configurações dos ensaios 2 e 9 encontradas na tabela II de (KAPRYAN e BOYD, 1955), os quais foram repetidos na Tabela 5.1. O valor do comprimento molhado da quilha foi determinado a partir da análise dos resultados dos ensaios.

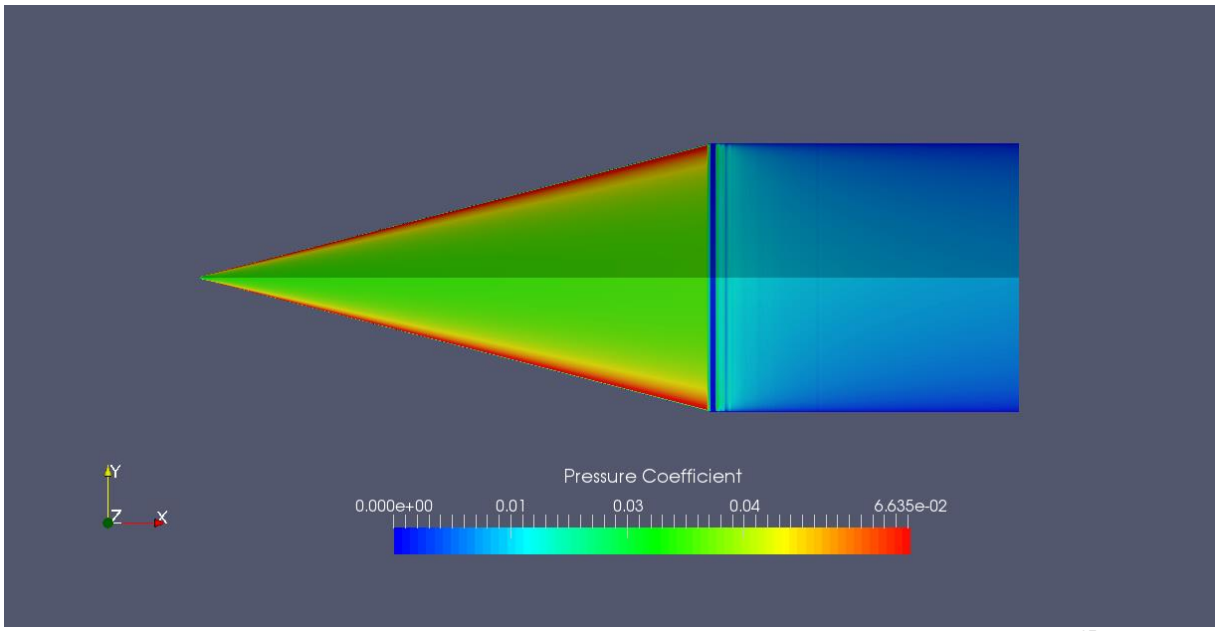

Figura 5.14 - Campo de pressão para o modelo 301 na configuração do ensaio 2[15]

Os campos de pressão obtidos a partir das analises numéricas do modelo 301 estão representados na Figura 5.14 e na Figura 5.15, para os ensaios 2 e 9, respectivamente. O valor de coeficiente de pressão representados nessas figuras é resultante da composição dos efeitos dinâmicos e estáticos atuantes na geometria.

Para ambos os casos é notável a concentração da pressão na fase de impacto próximo a região do ponto de pressão nula e de formação do *spray*. O valor máximo de pressão é maior na simulação do ensaio 9 devido ao maior ângulo de *trim* desenvolvido pelo modelo. Além disso, para esse mesmo caso a fase de impacto é mais curta, também devido ao maior valor do ângulo de *trim*.

[15] As figuras apresentadas nesta seção foram geradas no programa Paraview, o qual é um programa de código aberto, livre para distribuição e adaptação. Disponível em www.paraview.org.

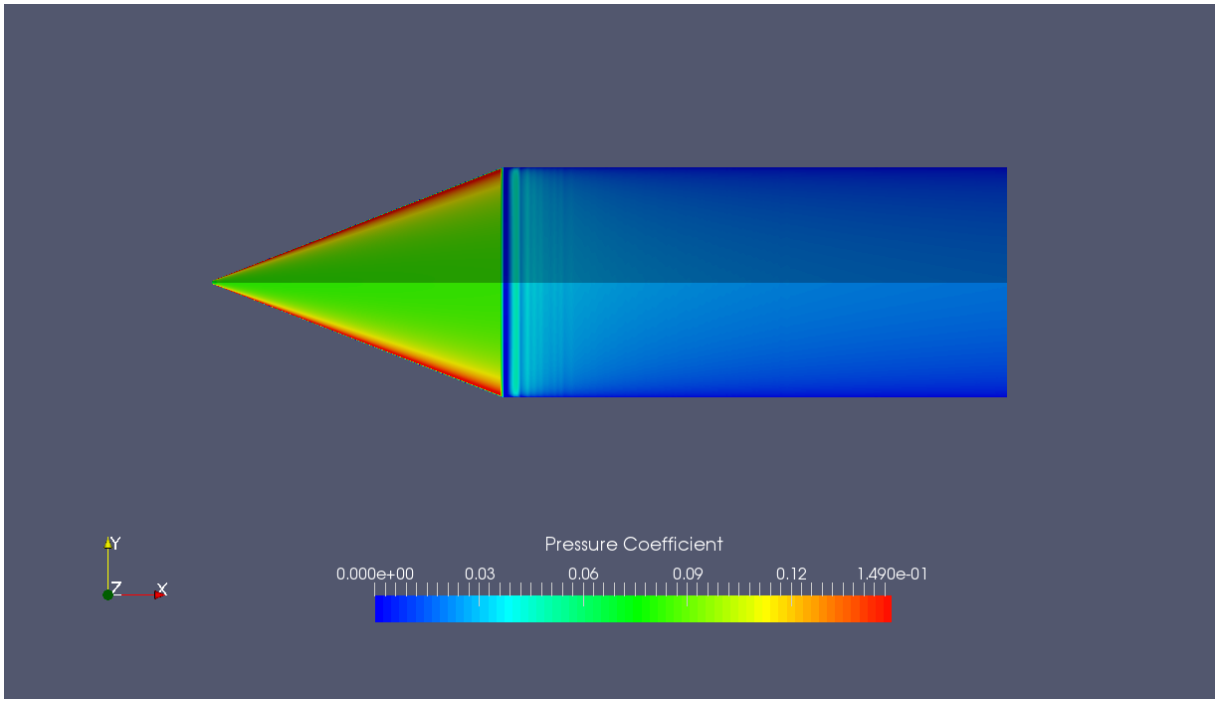

Figura 5.15 - Campo de pressão para o modelo 301 na configuração do ensaio 9

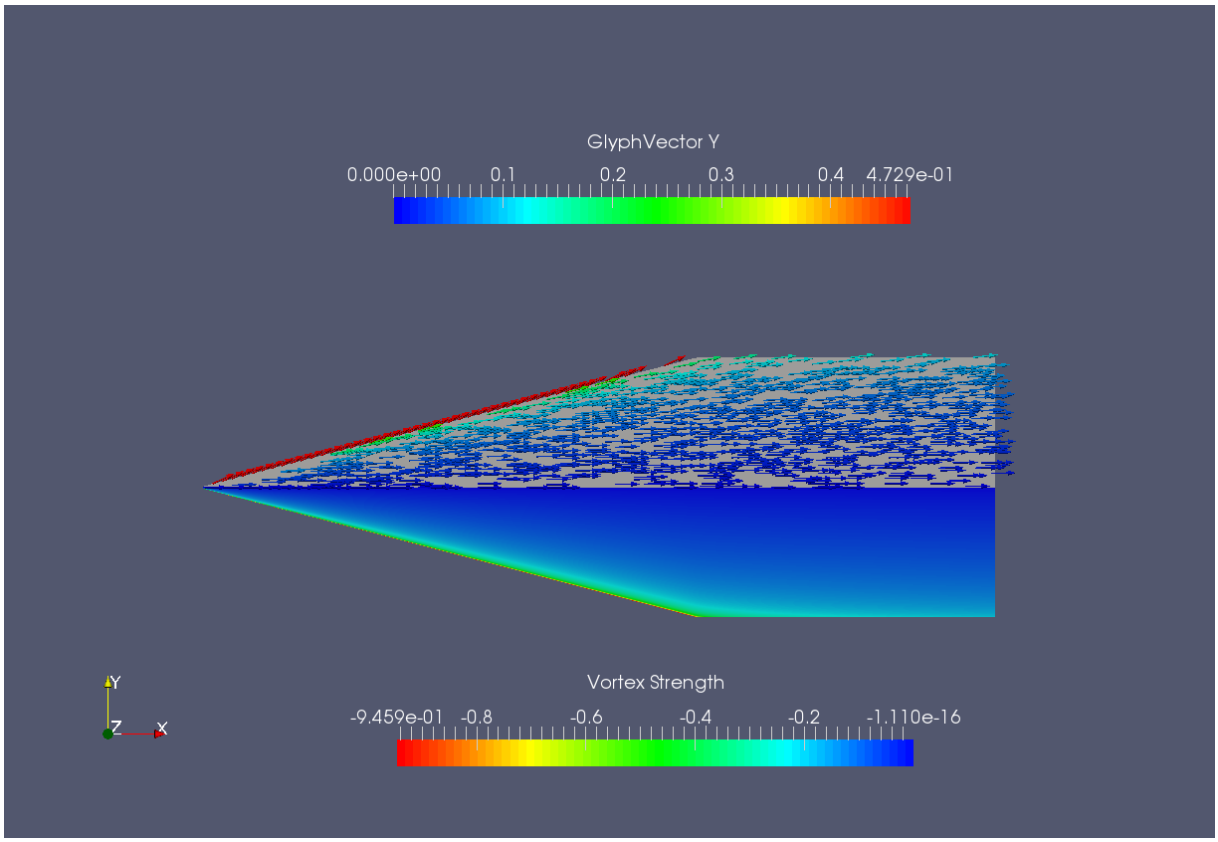

Figura 5.16 - Intensidade dos vórtices e vetor velocidade do escoamento para o modelo 301 na configuração do ensaio 2

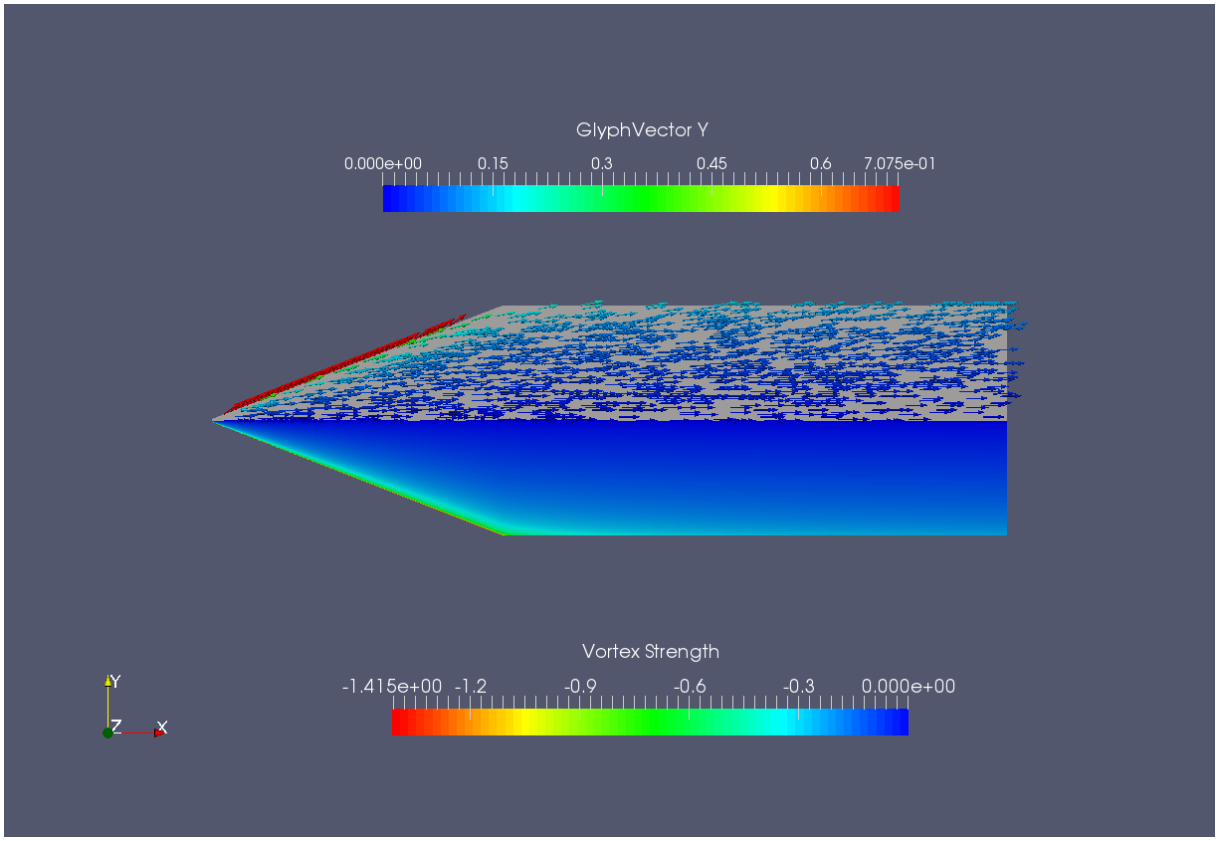

Figura 5.17 - Intensidade dos vórtices e vetor velocidade do escoamento para o modelo 301 na configuração do ensaio 9

Na parte superior da Figura 5.16 e da Figura 5.17 é apresentada uma representação do vetor velocidade das partículas fluidas coladas à superfície do corpo. Enquanto que na parte inferior, encontra-se a intensidade da distribuição dos vórtices na zona de pressão do escoamento. A intensidade dos vórtices tem seu pico na linha formada pelos pontos de pressão nula durante a fase de impacto. Na fase de penetração o valor da intensidade diminui e permanece aproximadamente constante até o fim do modelo.

Próximo à quilha, o vetor velocidade é praticamente paralelo ao vetor da velocidade de avanço do modelo, isto é, a velocidade transversal é próxima de zero. Próximo à linha de estagnação, as partículas se deslocam na mesma direção formada pela linha dos pontos $y_c(x)$. Também é interessante destacar que o vetor velocidade das partículas que são emitidas no ponto C (representadas pelos vetores vermelhos) é inclinado em relação à linha formada pelos pontos $y_c(x)$, essa “reflexão” das partículas do escoamento incidente em relação à linha de estagnação do escoamento, já foi discutida no capítulo 3.

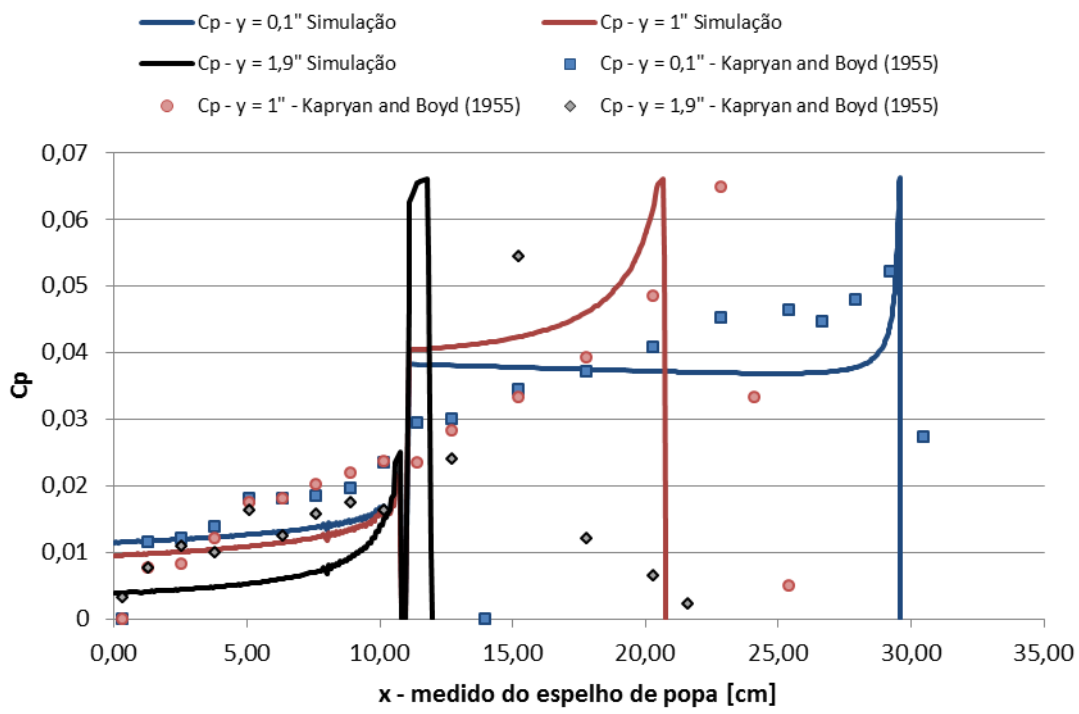

Figura 5.18 - Comparação das simulações do modelo 301 para a configuração do ensaio 2

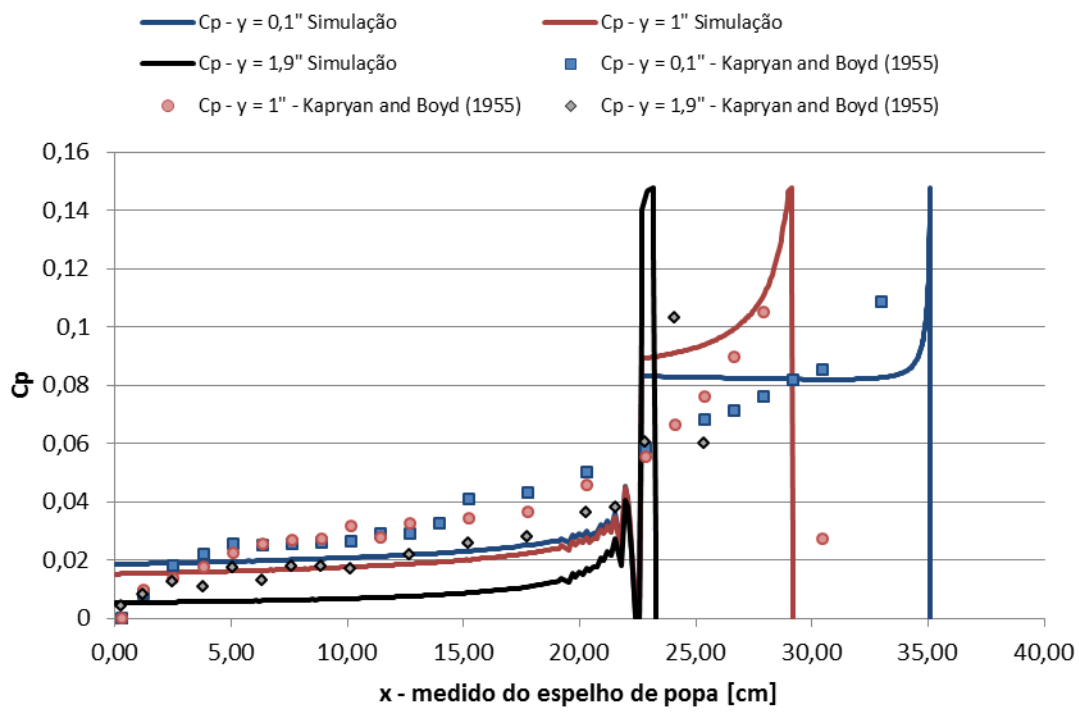

Figura 5.19 - Comparação das simulações do modelo 301 para a configuração do ensaio 9

Na Figura 5.18 e na Figura 5.19, é o coeficiente de pressão, obtido a partir das simulações numéricas, é comparado àqueles extraídos de (KAPRYAN e BOYD, 1955). As curvas de Cp apresentadas nas figuras acima são cortes longitudinais do campo de pressão representado na Figura 5.14 e na Figura 5.15. Esses cortes foram realizados nas posições transversais onde os manômetros foram distribuídos nos ensaios, ou seja, nas posições $y = 0{,}1"$, $y = 1"$ e $y = 1{,}9"$. Os valores do coeficiente de pressão retirados de Kapryan e Boyd encontram-se no anexo A.

Em ambos os casos o valor máximo de pressão é capturado no corte realizado em $y = 1$, nos demais cortes o valor de pressão obtido das simulações é maior que o medido nos ensaios experimentais. Isso é explicado pelo fato da aceleração das partículas emitidas para a superfície ser considerada nula na condição dinâmica do escoamento.

Para as seções $y = 1"$ e $y = 1{,}9"$. A posição longitudinal do pico de pressão está afastada de cerca de 5 centímetros em relação ao valores medidos experimentalmente. Isso indica que a fase de impacto no escoamento é mais curta que a determinada a partir das simulações numéricas. A descontinuidade na distribuição de pressão na passagem da fase de impacto para fase de penetração não é observada na distribuição de pressão medida nos ensaios.

5.4 COMPARAÇÕES COM O MÉTODO DE SAVITSKY

O método de Savitsky (1964) é, ainda hoje, um dos mais utilizados para se realizar estimativas de potência efetiva de embarcações de planeio navegando em águas calmas. A geometria da embarcação é representada por suas características geométricas principais, como, boca na quina, ângulo de “V”, posição do centro de gravidade e peso. A seguir serão realizadas algumas comparações entre o método de Savitsky e o programa desenvolvido nesta dissertação. As características da embarcação utilizada nas analises encontram-se na Tabela 5.2

Tabela 5.2 - Características da embarcação utilizada nas análises numéricas

Δ	(tons)	27,22
b	(m)	4,27
LCG	(m)	8,84
VCG	(m)	0,61
β	(graus)	10
f	(m)	0,15
ϵ	(graus)	4

A posição de equilíbrio da embarcação é encontrada a partir da resolução do sistema formado pelas equações (85), (86) e (87). Para uma dada posição vertical e ângulo de *trim*, o campo de pressão é calculado, e determinam-se as forças que atuam na embarcação, como descrito na seção 3.2.4. Em seguida, utilizando a equação de equilíbrio das forças no eixo x (85) calcula-se uma estimativa inicial para a força propulsora T. O valor de T é utilizado nas equações (86) e (87) para avaliar se a posição de equilíbrio foi encontrada. Caso isso não ocorra, a posição da embarcação é atualizada e o procedimento é refeito.

Para resolução desse sistema, o método computacional desenvolvido nesta dissertação foi acoplado ao programa CAESES®[16], a fim de utilizar um dos algoritmos de otimização do programa para encontrar a posição de equilíbrio. Foram adotados os seguintes critérios de parada no algoritmo:

$$EQ_{86} < \frac{W}{100} \tag{138}$$

$$EQ_{87} < \frac{W * LCG}{100} \tag{139}$$

Na Figura 5.20 são encontradas as comparações entre força propulsora e resistência friccional obtidas a partir do programa desenvolvido e do método de Savitsky. A comparação entre os comprimentos molhados da quilha e da quina encontra-se na Figura 5.21. O ângulo de trim e o calado imerso da popa da embarcação são encontrados na Figura 5.22.

Em geral, os resultados obtidos apresentaram ótima aderência em relação ao calculados pelo método de Savitsky.

[16] CAESES®, Friendship-Systems.

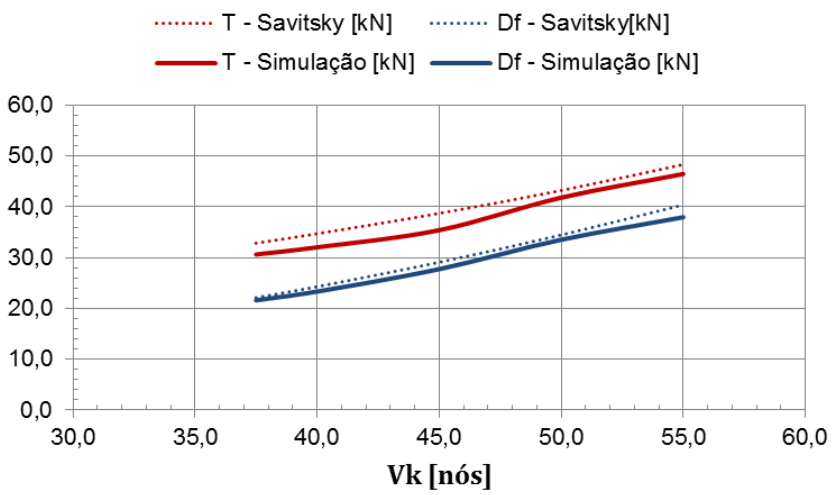

Figura 5.20 – Comparação da força propulsora e da resistência friccional

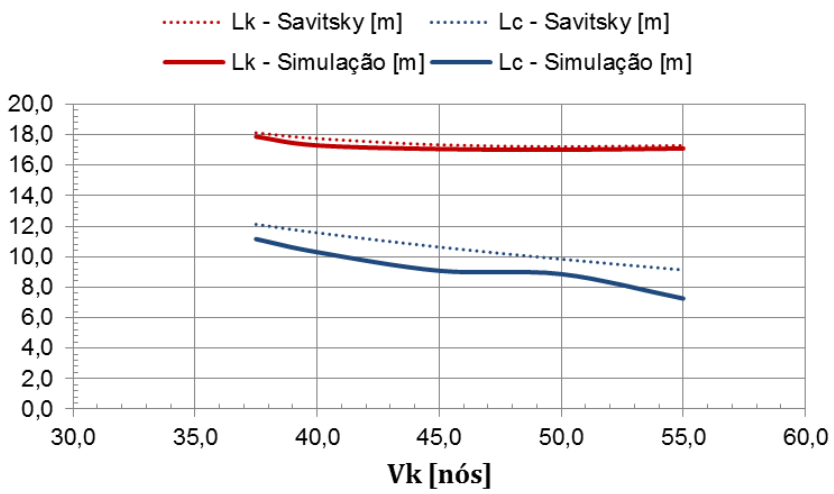

Figura 5.21 – Comparação dos comprimentos molhados da quilha e da quina

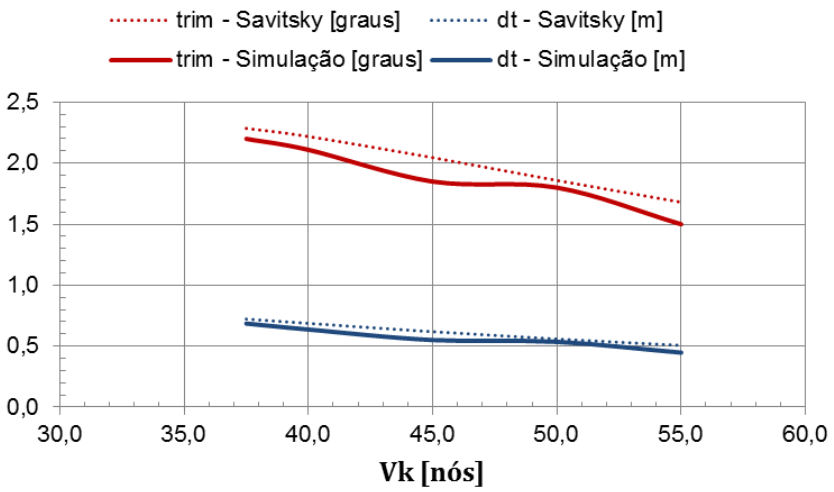

Figura 5.22 - Comparação do ângulo de *trim* e do calado na popa da embarcação

5.5 COMPARAÇÕES DO DESEMPENHO HIDRODINÂMICO DE UMA EMBARCAÇÃO PRISMÁTICA COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS

O projeto de qualquer tipo de embarcação envolve o balanceamento de diferentes atributos de desempenho, os quais, em geral, são conflitantes. Nos anos 1960 as embarcações de planeio exibiam ótimo desempenho em águas calmas, porém quando utilizadas em mar aberto, com a presença de ondas, elas não exibiam e mesmo desempenho.

Com o intuito de avaliar como as características geométricas de uma embarcação de planeio influenciam o comportamento no mar desse tipo embarcação foram realizados uma série de ensaios de tanque de prova no Laboratório Davidson, pertencente ao Instituto Stevens de Tecnologia. Esses estudos tornaram-se públicos em (FRIDSMA, 1969) e (FRIDSMA, 1971). O primeiro trabalho avalia o desempenho em ondas regulares e o segundo em ondas irregulares.

Não é objetivo dessa dissertação de mestrado avaliar o comportamento no mar de uma embarcação de planeio, entretanto em (FRIDSMA, 1969), também são apresentados os resultados dos ensaios em águas calmas dos modelos utilizados no estudo. Esses resultados serão comparados aos obtidos utilizando o programa desenvolvido nessa dissertação.

Fridsma utilizou modelos prismáticos com ângulos de “V” de 10°, 20° e 30°. O modelo escolhido para ser utilizado nas análises numéricas é o de 10º, o qual está representado na Figura 5.23.

Foram utilizadas duas configurações de carregamento diferentes para realização das análises numéricas, com o mesmo valor do coeficiente de carregamento $C_W = 0{,}304$, porém diferentes posições do centro de gravidade[17].

[17] No trabalho de Fridsma a posição do centro de gravidade é medida a partir da proa da embarcação e não em relação ao espelho de popa. Além disso, o valor de LCG e apresentado como uma porcentagem do comprimento do modelo. Optou-se por manter a referência de Frisdma na apresentação dos resultados nessa subseção, sendo assim, $LCG = 60\%$ significa que a posição do centro de gravidade do modelo está a 60% de seu comprimento medido a partir da proa.

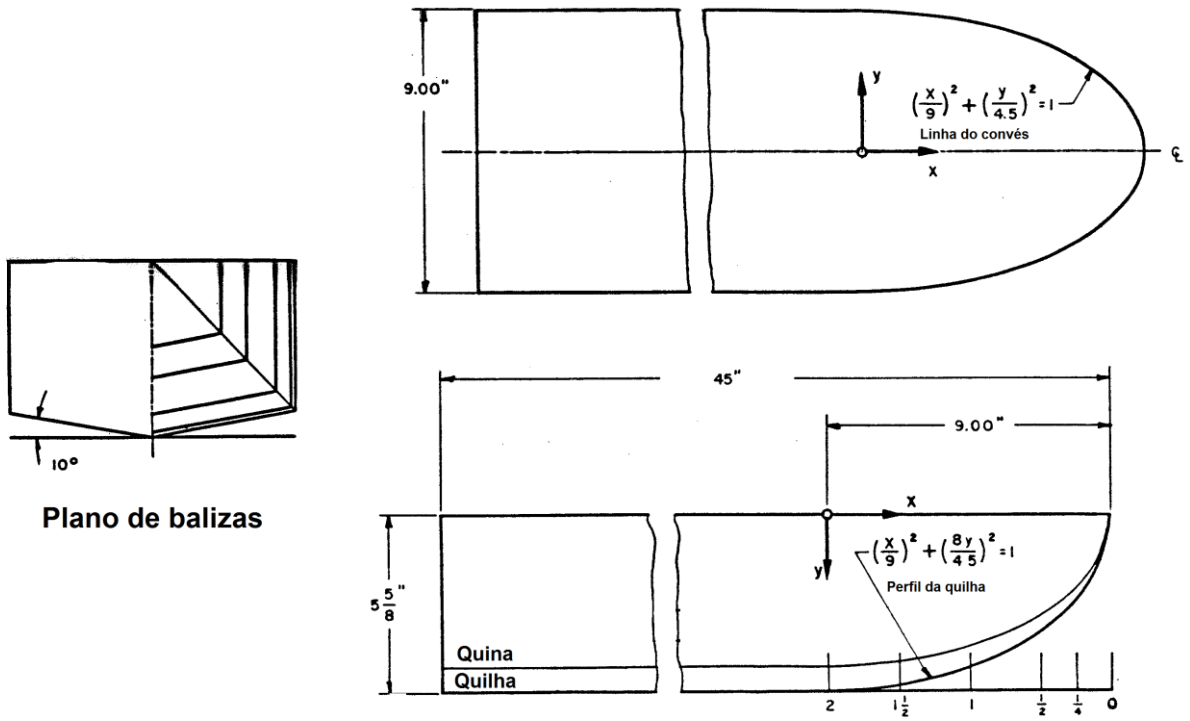

Figura 5.23 - Modelo Fridsma - ângulo de "V" de 10°. Adaptado de (FRIDSMA, 1969)

O coeficiente de carregamento é determinado por:

$$C_W = \frac{W}{\rho b^3} \tag{140}$$

Onde:

W – massa da embarcação;

ρ – densidade da água;

b – boca na quina da embarcação.

Nas figuras 5.24, 5.25 e 5.26 são apresentados os resultados obtidos do ângulo de *trim*, da relação entre o comprimento molhado médio – boca e da relação entre a força propulsora - peso, respectivamente, para o modelo com LCG=60%. Nas figuras 5.27 a 5.29 são apresentados os resultados para o modelo com $LCG = 65\%$.

Os resultados obtidos mostram ótima aderência aos resultados experimentais extraídos de (FRIDSMA, 1969).

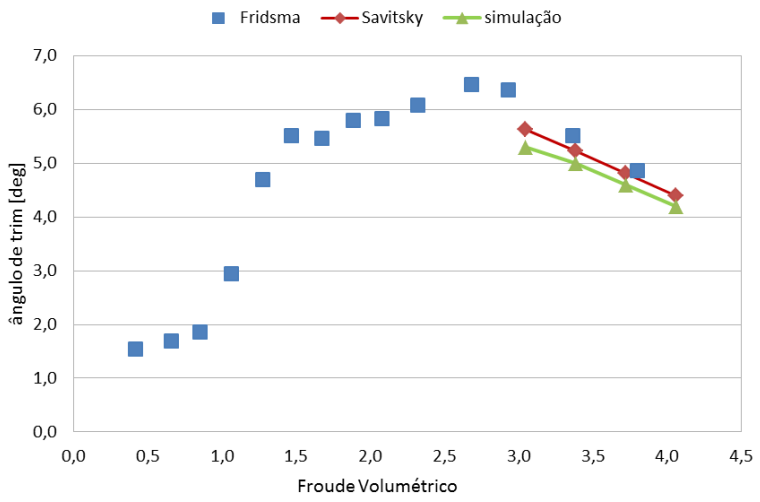

Figura 5.24 - Comparação do ângulo de trim - embarcação com ângulo de "V" de 10° e LCG 60%

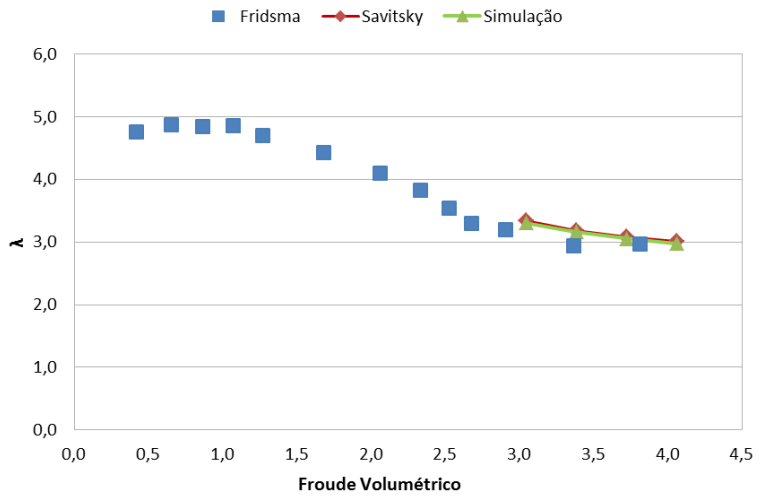

Figura 5.25 - Comparação do comprimento molhado médio - embarcação com ângulo de "V" de 10° e LCG 60%

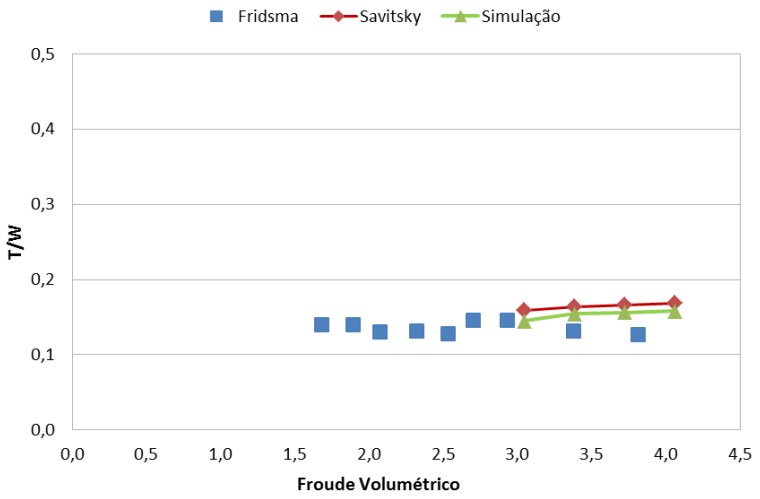

Figura 5.26 - Comparação do resistência ao avanço - embarcação com ângulo de "V" de 10° e LCG 60%

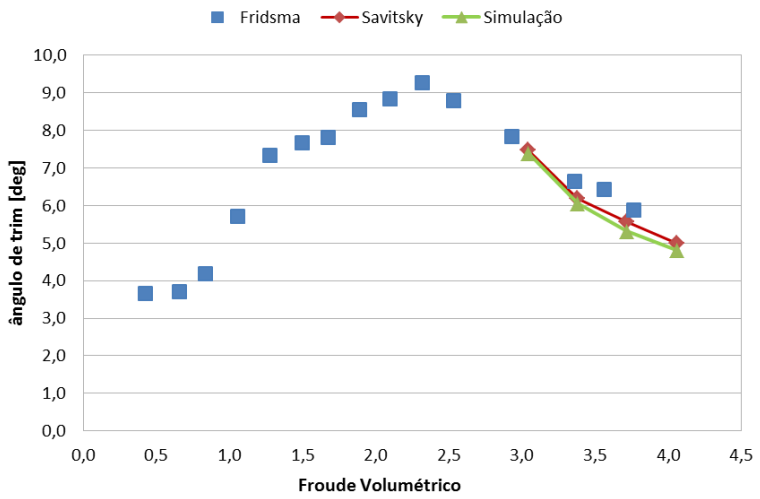

Figura 5.27 - Comparação do ângulo de trim - embarcação com ângulo de "V" de 10° e LCG 65%

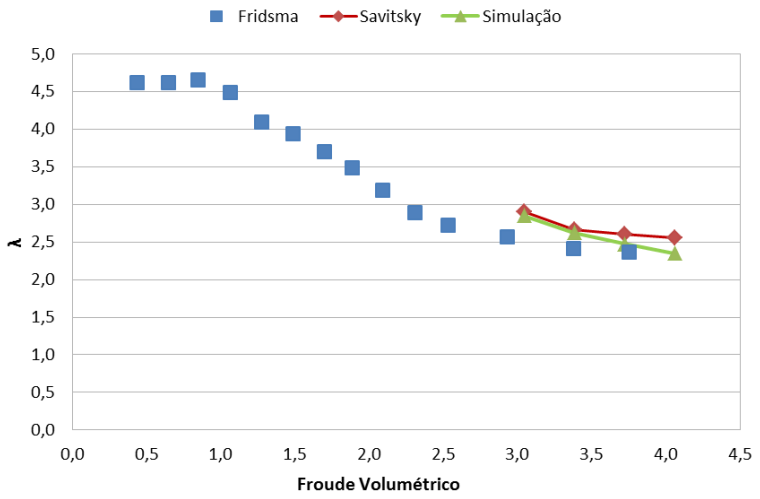

Figura 5.28 - Comparação do comprimento molhado médio - embarcação com ângulo de "V" de 10° e LCG 65%

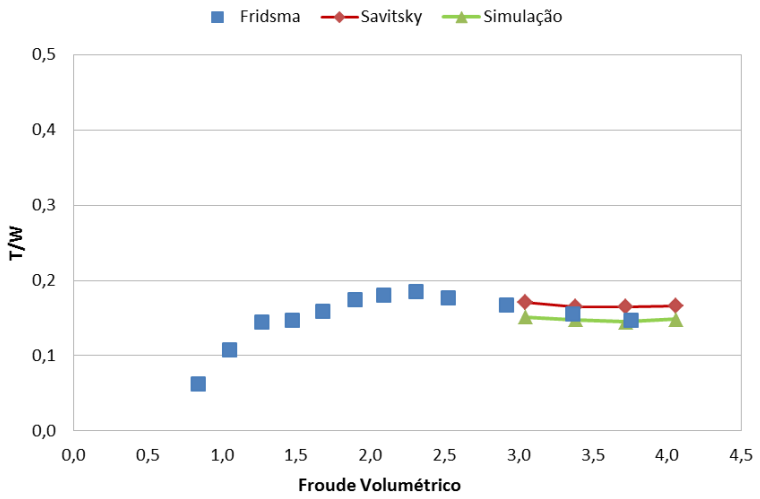

Figura 5.29 - Comparação do resistência ao avanço - embarcação com ângulo de "V" de 10° e LCG 65%

6 CONCLUSÕES

Nesta dissertação de mestrado foi desenvolvido um procedimento computacional para avaliar o desempenho hidrodinâmico de embarcações de planeio navegando com velocidade constante em águas calmas. A partir desse procedimento é possível determinar o campo de velocidades e, consequentemente, o campo de pressão atuante no fundo do casco, o qual pode ser utilizado para a realização do projeto estrutural da embarcação.

Os resultados obtidos a partir das simulações numéricas mostraram boa aderência com outros resultados teóricos e com resultados experimentais extraídos da literatura.

A análise da massa adicional aparente resultante do impacto da cunha mostra que os trabalhos clássicos de (VON KARMAN, 1929) e (WAGNER, 1932) configuram os limites inferior e superior, respectivamente, para o valor do coeficiente de massa adicional. A teoria de impacto utilizada nessa dissertação recupera esses limites.

A comparação dos resultados das análises numéricas com os resultados extraídos de (KAPRYAN e BOYD, 1955) indicam que a distribuição local de pressão precisa ser reavaliada, porém as comparações com o método de Savitsky (1964) e com os resultados experimentais extraídos de (FRIDSMA, 1969) indicam que a integral dessa destruição de pressão e a posição do seu centro estão corretas.

A particularização do problema hidrodinâmico para o caso de uma embarcação de planeio permite avaliar as características próprias do escoamento fluido em torno do casco desse tipo de embarcação. Isso permite ao projetista avaliar o impacto da variação das características geométricas do casco no desempenho em águas calmas da embarcação mais detalhadamente e, consequentemente, de maneira mais confiável.

O problema físico da embarcação foi transformado no problema da queda vertical de uma cunha. O escoamento foi divido em duas fases distintas, a fase de impacto e fase de penetração. Na transição entre essas duas fases, a descontinuidade da geometria faz com que o ponto de pressão y_c permaneça preso à quina, enquanto que o ponto de formação de *spray* avança na superfície livre do escoamento. Isso

causa uma queda brusca da velocidade transversal das partículas nesta região. Como foi visto na seção 5.2, a diminuição repentina da velocidade faz com que sua derivada em x tenda a infinito, causando uma singularidade na distribuição de pressão, durante a transição entre esses dois regimes.

Além disso, a comparação com resultados experimentais extraídos de (KAPRYAN e BOYD, 1955) indicam que essa singularidade não ocorre na transição entre as duas fases do escoamento. Entretanto, a posição escolhida para os manômetros nos ensaios analisados por Kapryan e Boyd não permitiria capturar a mudança de velocidade na transição das fases de impacto e penetração, uma vez que essa mudança ocorre de maneira brusca e em um intervalo de espaço muito pequeno.

Esse problema pode ser abordado de duas maneiras complementares. Primeiramente, a inclusão da aceleração das partículas na condição dinâmica do problema de valor de contorno, como descrita na seção 3.2.2, causaria uma desaceleração nas partículas emitidas na superfície livre e, consequentemente, o valor da velocidade transversal das partículas na região de transição seria reduzido. Nesse caso, a descontinuidade da derivada em x das velocidades seria ao menos reduzida.

A outra abordagem para investigação desse problema é a realização de ensaios experimentais para determinação do campo de pressão e das velocidades das partículas na transição entre a fase de impacto e penetração. O programa desenvolvido nesta dissertação poderia ser utilizado para configurar a posição dos manômetros nos experimentos.

A principal motivação desse trabalho era de desenvolver um procedimento computacional que permitisse avaliar a influência das principais caraterísticas geométricas no desempenho em águas calmas da embarcação; e que também permite realizar uma estimativa do campo de pressão atuante no fundo do casco.

Optou-se pela formulação simplificada com o objetivo de avaliar apenas a influência dos principais parâmetros geométricos da embarcação no escoamento fluido em torno do casco. Entretanto, o método pode ser expandido para o caso do casco tridimensional utilizando a formulação do problema apresentada nas seções 4.1 a 4.3.

Finalmente, o escoamento na região de *spray* é formado por uma camada muito fina

de fluido, a qual tem pressão muito próxima à pressão atmosférica e, por esse motivo, não contribui para sustentação da embarcação. Entretanto, em (SAVITSKY, DELORME e DATLA, 2007), demonstra-se que a camada de *spray* aumenta o arrasto da embarcação. Essa parcela da resistência friccional não foi considerada no problema de valor de contorno analisado nesta dissertação. Sendo assim, aconselha-se que essa parcela da resistência seja incluída ao problema de equilíbrio da embarcação.

BIBLIOGRAFIA

BLOUNT, D. L. **Performance by Design - Hydrodynamics for High-Speed Vessels**. 1ª. ed. Virginia Beach: [s.n.], 2014.

CALKINS, D. E. An Interactive Computer-Aided Design Synthesis Program for Recreational Powerboats. **Transactions SNAME**, 91, n. pp. 49-67, 1983.

CLEMMENT, E. P. How to Use the SNAME Small Craft Data Sheets for Desing and for Resistance Prediction, New York, May 1963.

FALTINSEN, O. M. Cap 9. Planing Vessels. In: FALTINSEN, O. M. **Hydrodynamics of high-speed marine vehicles**. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

FRIDSMA, G. **A Systematic Study of the Rough-Water Performance of Planing Boats, Regular Waves, Part I**. Davidson Laboratory - Stevens Institute od Technology. New Jersey. 1969.

FRIDSMA, G. **A Systematic Study of the Rough-Water Performance of Planing Boats, Irregular Waves, Part II**. Davidson Laboratory - Stevens Institute od Technology. New Jersey. 1971.

GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of Integrals, Series and Products**. New York: Academic Press, 1965.

HADLER, J. B. The Prediction of Power Performance on PLaning Craft. **Trans. SNAME**, 74, 1966.

IMPRENSA Oficial do Estado, 2013. Disponivel em: <http://www.ioepa.com.br/portal/noticias.aspx?id=775>. Acesso em: 07 Fevereiro 2014.

KAPRYAN, W. J.; BOYD, G. M. **Hydrodynamic pressure distributions obtained during a planing investigation of five telated prismatic surfaces**. NACA - Langley Aeronautical Laboratory. Langley Field, Va. 1955.

MORABITO, M. G. Applying Savitsky. **Professional BoatBuilder**, v. 145, p. 30-44, October-November 2013.

NAKANISHI, H. D. C. et al. Procedimento de otimização aplicado ao projeto de

embarcações de planeio. **24° Congresso Nacional de Transporte Aquaviário, Construção Naval e Offshore**, Rio de Janeiro, 15 a 19 Outubro 2012.

PAYNE, P. R. **Design of High-Speed Boats - Planing**. Annapolis: Fishergate, 1988.

RADOJCIC, D. An Engineering Approach to Predicting the Hydrodynamic Performance of Planing Craft Using Computer Techniques. **RINA**, 1990.

SAVANDER, B. Planing hull steady hydrodynamics. **Ph.D. thesys, Department of Naval Architecture and Marine Engineering**, The University of Michigan, 1997.

SAVANDER, B. R.; MAKI, K. J.; LAND, J. The Effects of Dearise and Deadrise Variation on Steady Planing Hull Performance. **CHESAPEAKE POWERBOAT SYMPOSIUM**, 2010.

SAVANDER, B. R.; SCORPIO, S. M.; TAYLOR, R. K. Steady Hydrodynamic Analysis of Planing Surfaces. **Journal of Ship Research**, 46, n. pp. 248-279, 2002.

SAVITSKY, D. Hydrodynamic Design of Planing Hulls. **Marine Technology**, 1964.

SAVITSKY, D. Planing Craft. **Naval Engineers Journal**, 1985.

SAVITSKY, D.; DELORME, M. F.; DATLA, R. Inclusion of Whisker Spray Drag in Performance Prediction Method for High-Speed Planing Hulls. **Marine Technology**, 44, 2007.

SAVITSKY, D.; NEIDINGER, J. W. **Wetted Area and Center of Pressure of Planing Surfaces at Very Low Speed Coefficients**. Stevens Institute of Technology, Davidson Laboratory Report No. 493. [S.l.]. 1954.

SAVITSKY, D.; ROSS, E. **Turbulence Stimulation in the Boundary Layer Os Planing Surfaces**. Stevens Institute of Technology. 1952.

SIMÕES, F.; ANDRADE, B. L. R. Modelo de Síntese e Otimização para o Projeto Preliminar de Embarcações de Planeio. **in: SOBENA 2010 - 23o Congresso Nacional de Transporte Aquaviário, Construção Naval e Offshore**, Rio de janeiro, 2010.

TAUNTON, D. J.; HUDSON, D. A.; SHENOI, R. A. Characteristics of a series of high speed hard chine planing hulls - part 1: performance in calm water. **International Journal of Small Craft Technology**, v. 152, p. 55-75, 2010.

TULIN, M. P. The theory of slender planing surfaces at high speeds. **Schiffstechnik**,

v. 4, p. 125-133, 1957.

VON KARMAN, T. The impact of seaplane floats during landing. **Technical Note 321, NACA, Washington, D.C.**, 1929.

VORUS, W. S. A Flat Cylinder Theory for Vessel Impact and Steady Planing Resistance. **Journal of Ship Research**, Vol. 40, n. pp. 89-106, 1996.

WAGNER, H. Uber stross-und gleitvorgange an der oberflache von flussigkeiten. **ZAMM**, 1932. 193-215.

ANEXO A

Tabela A.0.1 - Resultados experimentais do ensaio 2 para o modelo 301

Cp - y = 1,9" - Kapryan and Boyd (1955)				Cp - y = 1" - Kapryan and Boyd (1955)				Cp - y = 0,1" - Kapryan and Boyd (1955)			
Ponto	**x [inches]**	**x [cm]**	**Cp**	**Ponto**	**x [inches]**	**x [cm]**	**Cp**	**Ponto**	**x [inches]**	**x [cm]**	**Cp**
1	0,1232	0,3129	0,0033	30	0,1232	0,3129	0	60	0,1232	0,3129	-
2	0,5000	1,2700	0,0076	31	0,5000	1,2700	0,0076	61	0,5000	1,2700	0,0114
3	1,0000	2,5400	0,0109	32	1,0000	2,5400	0,0082	62	1,0000	2,5400	0,012
4	1,5000	3,8100	0,01	33	1,5000	3,8100	0,012	63	1,5000	3,8100	0,0138
5	2,0000	5,0800	0,0163	34	2,0000	5,0800	0,0174	64	2,0000	5,0800	0,018
6	2,5000	6,3500	0,0125	35	2,5000	6,3500	0,018	65	2,5000	6,3500	0,018
7	3,0000	7,6200	0,0158	36	3,0000	7,6200	0,0201	66	3,0000	7,6200	0,0185
8	3,5000	8,8900	0,0174	37	3,5000	8,8900	0,0218	67	3,5000	8,8900	0,0196
9	4,0000	10,1600	0,0163	38	4,0000	10,1600	0,0236	68	4,0000	10,1600	0,0234
10	5,0000	12,7000	0,0239	39	4,5000	11,4300	0,0234	69	4,5000	11,4300	0,0294
11	6,0000	15,2400	0,0544	40	5,0000	12,7000	0,0283	70	5,0000	12,7000	0,0299
12	7,0000	17,7800	0,012	41	6,0000	15,2400	0,0332	71	5,5000	13,9700	-
13	8,0000	20,3200	0,0065	42	7,0000	17,7800	0,0392	72	6,0000	15,2400	0,0343
14	8,5000	21,5900	0,0022	43	8,0000	20,3200	0,0484	73	7,0000	17,7800	0,037
15	9,0000	22,8600		44	9,0000	22,8600	0,0648	74	8,0000	20,3200	0,0408
16	9,5000	24,1300		45	9,5000	24,1300	0,0332	75	9,0000	22,8600	0,0452
17	10,0000	25,4000		46	10,0000	25,4000	0,0049	76	10,0000	25,4000	0,0463
18	11,0000	27,9400		47	1,5000	3,8100		77	10,5000	26,6700	0,0446
19	12,0000	30,4800		48	11,0000	27,9400		78	11,0000	27,9400	0,0479
20	13,0000	33,0200		49	12,0000	30,4800		79	11,5000	29,2100	0,052
21	14,0000	35,5600		50	13,0000	33,0200		80	12,0000	30,4800	0,0272

Tabela A.0.2 – Resultados experimentais do ensaio 9 para o modelo 301

Cp - y = 1,9" - Kapryan and Boyd (1955)				Cp - y = 1" - Kapryan and Boyd (1955)				Cp - y = 0,1" - Kapryan and Boyd (1955)			
Ponto	**x [inches]**	**x [cm]**	**Cp**	**Ponto**	**x [inches]**	**x [cm]**	**Cp**	**Ponto**	**x [inches]**	**x [cm]**	**Cp**
1	0,1232	0,3129	0,0043	30	0,1232	0,3129	0	60	0,1232	0,3129	0
2	0,5000	1,2700	0,0081	31	0,5000	1,2700	0,0097	61	0,5000	1,2700	0,0081
3	1,0000	2,5400	0,0125	32	1,0000	2,5400	0,0135	62	1,0000	2,5400	0,0179
4	1,5000	3,8100	0,0108	33	1,5000	3,8100	0,0173	63	1,5000	3,8100	0,0217
5	2,0000	5,0800	0,0173	34	2,0000	5,0800	0,0222	64	2,0000	5,0800	0,0255
6	2,5000	6,3500	0,013	35	2,5000	6,3500	0,0255	65	2,5000	6,3500	0,0249
7	3,0000	7,6200	0,0179	36	3,0000	7,6200	0,0265	66	3,0000	7,6200	0,0255
8	3,5000	8,8900	0,0179	37	3,5000	8,8900	0,0271	67	3,5000	8,8900	0,026
9	4,0000	10,1600	0,0168	38	4,0000	10,1600	0,0314	68	4,0000	10,1600	0,0263
10	5,0000	12,7000	0,0217	39	4,5000	11,4300	0,0276	69	4,5000	11,4300	0,0287
11	6,0000	15,2400	0,026	40	5,0000	12,7000	0,0325	70	5,0000	12,7000	0,0287
12	7,0000	17,7800	0,0282	41	6,0000	15,2400	0,0341	71	5,5000	13,9700	0,0325
13	8,0000	20,3200	0,0363	42	7,0000	17,7800	0,0363	72	6,0000	15,2400	0,0406
14	8,5000	21,5900	0,0383	43	8,0000	20,3200	0,0455	73	7,0000	17,7800	0,0428
15	9,0000	22,8600	0,0607	44	9,0000	22,8600	0,0552	74	8,0000	20,3200	0,0498
16	9,5000	24,1300	0,1034	45	9,5000	24,1300	0,0661	75	9,0000	22,8600	0,0585
17	10,0000	25,4000	0,0601	46	10,0000	25,4000	0,0758	76	10,0000	25,4000	0,0682
18	11,0000	27,9400		47	10,5000	26,6700	0,0894	77	10,5000	26,6700	0,0709
19	12,0000	30,4800		48	11,0000	27,9400	0,1051	78	11,0000	27,9400	0,0758
20	13,0000	33,0200		49	12,0000	30,4800	0,0271	79	11,5000	29,2100	0,0818
21	14,0000	35,5600		50	13,0000	33,0200		80	12,0000	30,4800	0,085
								81	13	33,02	0,1083