Gabriel Henrique de Souza Ribeiro

Desenvolvimento de Ferramentas Computacionais para a Simulação
do Fenômeno de Cravação de Estacas Torpedos pelo Método de
Partículas Moving Particle Semi-implicit (MPS)

São Paulo

2019

Gabriel Henrique de Souza Ribeiro

Desenvolvimento de Ferramentas Computacionais para a Simulação
do Fenômeno de Cravação de Estacas Torpedos pelo Método de
Partículas Moving Particle Semi-implicit (MPS)

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do título
de Mestre em Ciências.

Área de concentração:
Engenharia Naval e Oceânica

Orientador:
Prof. Dr. Cheng Liang-Yee

São Paulo

2019

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Ribeiro, Gabriel Henrique de Souza

Desenvolvimento de Ferramentas Computacionais para a Simulação do Fenômeno de Cravação de Estacas Torpedos pelo Método de Partículas Moving Particle Semi-implicit (MPS) / G. H. S. Ribeiro -- versão corr. -- São Paulo, 2019.

94 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Naval e Oceânica.

1.Mecânica dos Fluidos Computacional 2.Método de Partículas 3.Estaca Torpedo I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Naval e Oceânica II.t.

Nome: RIBEIRO, Gabriel Henrique de Souza

Título: Desenvolvimento de Ferramentas Computacionais para a Simulação do Fenômeno de Cravação de Estacas Torpedos pelo Método de Partículas Moving Particle Semi-implicit (MPS).

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do título
de Mestre em Ciências.

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. Dr. Cheng Liang-Yee

Instituição: Universidade de São Paulo

Julgamento: _____

Prof. Dr. Fernando Akira Kurokawa

Instituição: Universidade de São Paulo

Julgamento: _____

Prof. Dr. Joel Roberto Guimarães Vasco

Instituição: Universidade Federal de Goiás

Julgamento: _____

*Aos meus pais, Paulo e Odila, e
às minhas pequenas, Priscila e Giovanna.*

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Cheng Liang-Yee, pela orientação e apoio durante todo o desenvolvimento desse trabalho.

Aos meus pais por sempre me apoiarem e me darem suporte durante os meus estudos.

À minha noiva, Priscila, por estar sempre ao meu lado e ser meu alicerce e porto seguro.

Ao Prof. Dr. Kazuo Nishimoto pela orientação inicial ao meu trabalho e à minha pesquisa.

Aos meus colegas do grupo de pesquisa MPS, em especial ao Cezar Bellezi, Rubens Amaro, Fábio Motezuki, Marcio Michiharu e Lucas Pereira, pelas conversas construtivas e colaborações à minha pesquisa.

À Lania pela ajuda em todos os momentos que foram necessários.

À CAPES pelo aporte financeiro que me possibilitou me dedicar à minha pesquisa.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo desenvolver ferramenta computacional para simulação e análise do fenômeno de penetração e cravação de estacas torpedos em solo marítimo. A abordagem será baseada no método *Moving Particle Semi-Implicit* (MPS). Por se tratar de um método de partícula, sem malha, o mesmo apresenta grande flexibilidade na modelagem de problemas de interação fluido-sólido com fragmentação ou junção de superfície livre e grandes deslocamentos ou deformações dos sólidos, fenômenos esses presentes no impacto e cravação da estaca no solo marítimo. Para isso, dois desafios foram elencados: a modelagem dos solos como fluidos não-newtonianos e a determinação da força de arrasto viscosa na superfície de sólidos.

A modelagem do fluido não-newtoniano foi feita considerando os modelos de Power Law, Bingham e Herschel-Bulkley. O cálculo da força de arrasto viscosa foi avaliado determinando-se o gradiente da velocidade do fluido na direção normal à parede com base na regressão polinomial. Por simplicidade, foi considerada a hipótese de que a variação da velocidade na direção tangencial da parede é muito menor se comparada a variação da mesma na direção do vetor normal.

O método implementado, assim como o escoamento de fluidos não-newtonianos, foi validado por meio de comparação entre o resultado obtido de simulações com geometrias pré-definidas e as respostas analíticas para tais casos.

Como exemplo de aplicação da ferramenta computacional desenvolvida, um caso simplificado de cravação das estacas torpedos foi simulado avaliando-se o seu deslocamento dentro do solo e os esforços cisalhantes a ela submetidas.

Palavras-chave: Mecânica dos Fluidos Computacional. Método de Partículas. Estaca Torpedo.

Abstract

This work aims to develop computational tools to simulate and analysis the torpedo anchor penetration in marine soil. The approach will be based on the Moving Particle Semi-Implicit (MPS) method. Because it is a meshless method, it is extremely flexible to model fluid-solid interaction with fragmentation or junction of free surface and large displacements or deformations of solids, phenomena presented at the torpedo anchor impact. Two challenges were listed: the modeling of soils as non-Newtonian fluids and the determination of the viscous drag on the solids surface.

The modeling of non-Newtonian fluid was done based on the Power Law, Bingham and Herschel-Bulkley models. The calculation of the viscous drag was evaluated by determining the velocity gradient in the normal direction of the wall based on polynomial regression considering the fluid particles near the solid wall. In this work, for sake of simplicity, the hypothesis that the velocity variation in the tangential direction of the wall is much smaller compared to its variation in the normal direction is adopted.

The proposed technique, as well as the flow of non-Newtonian fluids, were validated comparing the results obtained in flow simulations with predefined geometries with the expected analytical responses.

As an example of the application of the computational tools developed, a simplified case of torpedo penetration was simulated by evaluating its displacement and the shear stresses submitted to it.

Keywords: Computational Fluid Dynamics. Particle Method. Torpedo Anchor.

Sumário

1 Introdução	11
1.1 Objetivos do Trabalho.....	12
1.2 Organização do Trabalho	13
2 Revisão Bibliográfica	14
2.1 Métodos Numéricos	14
2.1.1 Método <i>Moving Particle Semi-implicit</i> (MPS)	15
2.2 Estaca Torpedo.....	17
2.3 Reologia	17
3 Aspectos Reológicos	19
3.1 Fluidos Newtonianos	20
3.2 Fluidos Não-Newtonianos	21
3.2.1 Fluidos Dilatantes	21
3.2.2 Fluidos Pseudoplásticos	22
3.2.3 Plástico de Bingham	22
3.2.4 Fluidos Herschel-Bulkley	22
3.3 Modelos Reológicos.....	23
3.3.1 Modelo de Ostwald de Waale (Lei da Potência)	23
3.3.2 Modelo de Bingham.....	24
3.3.3 Modelo de Herschel-Bulkley	25
4 Método <i>Moving Particle Semi-implicit</i>	26
4.1 Função Peso	27
4.2 Densidade do Número de Partículas	27

4.3 Gradiente.....	27
4.4 Divergência.....	28
4.5 Laplaciano.....	28
4.6 Incompressibilidade	28
4.7 Condições de Contorno.....	30
4.7.1 Condição de Parede.....	30
4.7.2 Superfície Livre	31
4.7.3 Condição Periódica	31
4.8 Modelagem Numérica para o Comportamento Reológico	32
4.8.1 Modelagem Bilinear.....	33
4.8.2 Modelagem Papanastaciou	34
4.9 Cálculo das Forças e Momentos Devido à Pressão	35
5 Cálculo da Força de Arrasto Viscoso	37
5.1 Abordagem Teórica	37
5.2 Procedimento do Algoritmo.....	37
5.3 Implementação Computacional	40
6 Validação do Método Numérico.....	43
6.1 Escoamento de Fluido Não-Newtoniano	43
6.1.1 Dam break.....	43
6.1.2 Slump	49
6.2 Força de Arrasto Viscosa em Fluidos Newtonianos	52
6.2.1 Escoamento de <i>Poiseuille</i> em 2D	53
6.2.2 Escoamento de <i>Poiseuille</i> em 3D	58
6.2.3 Escoamento de <i>Taylor-Couette</i> em 2D	63
6.3 Força de Arrasto Viscosa em Fluidos Não-Newtonianos	66

7 Estaca Torpedo	69
8 Considerações Finais	73
8.1 Sugestões para Trabalhos Futuros	74
Referências	75
Anexo A.....	79
A.1 Escoamento de <i>Poiseuille</i> em 2D	79
A.1.1 Equações de Movimento	80
A.1.2 Tensões e Forças Cisalhantes.....	82
A.2 Escoamento de <i>Poiseuille</i> em 3D	84
A.2.1 Equações de Movimento	84
A.2.2 Tensões e Forças Cisalhantes.....	87
A.3 Escoamento de <i>Taylor-Couette</i> em 2D.....	89
A.3.1 Equações de Movimento	90
A.3.2 Tensões e Forças Cisalhantes.....	91
A.4 Escoamento de <i>Poiseuille</i> em 2D com Fluido Bingham	93
A.4.1 Equações de Movimento	93
A.4.1 Tensões e Forças Cisalhantes.....	94

1 Introdução

A importância do petróleo para a sociedade atual levou a busca e exploração desse bem não durável a águas cada vez mais profundas. Esse avanço a distâncias cada vez maiores trouxe necessidade de evolução nas plataformas, desenvolvimento nos métodos de prospecção, melhorias no sistema de ancoragens, dentre outros aprimoramentos. Nesse âmbito, a ancoragem por meio de estacas torpedos, desenvolvido por tecnologia nacional, vem sendo utilizado na ancoragem de unidades de produção, e traz como vantagem ser economicamente viável em profundidades elevadas (Kunitaki, 2006).

No seu desenvolvimento, projeto e concepção, a estaca torpedo passa por diversos estudos que visam estimar sua capacidade de carga, analisar as tensões a que serão submetidas, bem como a previsão da sua penetração no solo. A Figura 1.1 ilustra uma estaca torpedo.

Figura 1.1 - Estaca torpedo.

Fonte: Lacey – COPPE/UFRJ.

Para tanto, além da utilização de ensaios experimentais, tais estudos também são desenvolvidos através de ferramentas numéricas e computacionais, sendo necessário que melhorias nesses métodos sejam sempre buscadas a fim de reduzir os custos e melhorar as estimativas obtidas.

Os métodos numéricos apresentam vantagens em relação aos métodos analíticos por permitir estudar e simular geometrias e problemas mais complexos, além de apresentar vantagens em relação aos ensaios laboratoriais por serem menos onerosos.

Os métodos numéricos evoluíram substancialmente nos últimos anos, acompanhando a evolução da tecnologia computacional. Dentre os diversos métodos existentes, podemos citar os métodos já consagrados como o método de elementos finitos, métodos de volumes finitos, método de diferenças finitas. Porém, tais métodos apresentam a característica de terem seu domínio computacional discretizado por meio de malhas, que dificulta a modelagem da superfície livre, principalmente em situações extremas envolvendo fragmentação e separação do fluido, grande deslocamento de sólidos ou deformação do contorno deste.

Como alternativa aos métodos numéricos baseado em malha, surgem os métodos de partículas, que discretizam o domínio computacional por partículas independentes que simplificam e tornam muito mais flexíveis a modelagem da superfície livre.

Dentro deste contexto, este trabalho visa proporcionar uma nova alternativa para a investigação do processo de cravação da estaca torpedo, utilizando o método de partículas. Por simplicidade, foca-se na penetração de um sólido no solo, que será modelado como material com propriedade reológica de um fluido não-newtoniano.

As forças cisalhantes atuantes na estaca devido ao seu deslocamento dentro do solo são determinadas através de uma técnica proposta. Tais forças são então impostas ao movimento da estaca para melhor representar a sua dinâmica.

1.1 Objetivos do Trabalho

O objetivo geral desse trabalho é baseado na modelagem por um método de partículas, prover bases para estudar a penetração e cravação de estacas torpedos, avançando na modelagem computacional dos fluidos não-newtonianos e desenvolver técnicas para o cálculo das tensões cisalhantes atuantes na estaca.

Como objetivos específicos têm-se:

- Validação da modelagem de fluidos não-newtonianos a fim de consolidar a ferramenta computacional;
- O estudo, desenvolvimento e implementação das técnicas de cálculo da tensão cisalhante atuante nos corpos sólidos presentes na simulação, necessário à simulação da penetração da estaca torpedo no solo;
- Realizar estudo de caso da penetração e cravação da estaca torpedo.

1.2 Organização do Trabalho

O presente trabalho é organizado da seguinte maneira:

- O Capítulo 2 apresenta uma revisão da literatura pertinente ao assunto desse trabalho: método MPS, cravação de estacas torpedo e reologia;
- O Capítulo 3 aborda o conceito de reologia, seus modelos e aplicações;
- O Capítulo 4 apresenta a formulação teórica sobre o método de partículas MPS;
- O Capítulo 5 exhibe a técnica computacional proposta para o cálculo das forças de arrasto viscoso;
- O Capítulo 6 mostra a validação do método numérico estudado, destacando a validação do escoamento de fluidos não-newtonianos e a validação do cálculo do arrasto viscoso para escoamento de fluidos newtonianos e não-newtonianos;
- O Capítulo 7 ilustra alguns estudos para avaliar a penetração e cravação da estaca torpedo;
- O Capítulo 8 apresenta as considerações finais do trabalho e sugestões para trabalhos seguintes;
- E, por fim, o Anexo A visa determinar as equações analíticas utilizadas para a validação dos casos apresentados no Capítulo 6.

2 Revisão Bibliográfica

A literatura pertinente ao trabalho encontra-se apresentada nesse capítulo, subdivide-se em métodos numéricos, estaca torpedo e reologia.

2.1 Métodos Numéricos

No estudo do comportamento de fluidos, três diferentes abordagens são possíveis: os métodos analíticos, experimentos laboratoriais e métodos numéricos.

Os métodos analíticos são importantes na formulação de modelos matemático que busquem representar o escoamento dos fluidos e no equacionamento de fenômenos físicos, porém, devido à complexidade de muitos escoamentos de fluidos, sua aplicação é restrita para casos de geometrias simples e condições de contorno simplificadas.

Os experimentos laboratoriais permitem analisar fenômenos em condições próximas as reais, porém trazem consigo um alto custo na elaboração dos experimentos, além de, no caso de modelos em escalas reduzidas, os efeitos de escala podem ser críticos.

Uma alternativa às duas abordagens citados são os métodos numéricos. Com o advento dos computadores e aprimoramento das técnicas numéricas, a abordagem numérica-computacional se tornou viável. Os métodos numéricos permitem reproduzir e simular escoamentos complexos, com estruturas elaboradas e fenômenos físicos variados. e com baixos custos se comparados às técnicas experimentais.

No que tange a área de simulação numérica de escoamentos, destaca-se o método de Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC), ou *Computational Fluid Dynamics* (CFD) em inglês. Os métodos baseados no CFD buscam resolver as equações governantes do escoamento de fluidos a fim de prever o comportamento do mesmo.

O desenvolvimento dos métodos CFD, historicamente, se inicia com o trabalho de Richardson (1910) que propõem uma das primeiras soluções para o método de diferenças finitas, em inglês *Finite Difference Method* (FDM), que é base para a solução de sistema de equações diferenciais, como os presentes no método CFD.

Os métodos de CFD podem ser divididos em duas categorias: os métodos eulerianos e os lagrangeanos. Os métodos eulerianos dividem o domínio computacional em pontos de observação ou volumes de controle que conjuntamente formam a malha do cálculo.

Tais métodos são relativamente rápidos e estáveis. Mas por necessitar de uma malha fixa enfrentam dificuldades ou limitações na modelagem de geometrias muito complexas, na representação de fenômenos de grande fragmentação da superfície livre e, principalmente, problemas na conservação da massa na presença de superfície livre.

Outra diferente abordagem para os métodos CFD são aqueles que utilizam uma discretização do domínio computacional em partículas lagrangeanas. Tal descrição pode ser por meio de malhas, que se movem juntamente com o fluido (diferente do método euleriano que apresenta malha fixa); ou sem malhas, cuja descrição do fluido é feita por meio de um conjunto finito de partículas que buscam representar fisicamente o comportamento do fluido.

As principais diferenças entre os dois métodos lagrangeanos é a maior flexibilidade do método sem malhas em modelar a superfície livre do fluido, principalmente quando envolve grande fragmentação, separação ou deformação dessa superfície.

Como exemplo dos métodos de partículas destacam o *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) e o *Moving Particle Semi-implicit* (MPS).

O método SPH surgiu primeiramente para a solução de problemas astrofísicos (Gingold e Monaghan, 1977), sendo posteriormente utilizada na solução de escoamentos compressíveis por Monaghan e Gingold (1983). Enquanto que o método MPS surgiu com os trabalhos de Koshizuka et al. (1995) e Koshizuka e Oka (1996), visando modelar e solucionar o escoamento incompressível.

Para o desenvolvimento desse trabalho, considerando a característica do fenômeno a ser estudado que consiste na presença de corpo livre, interação fluido-estrutura e forte impacto hidrodinâmico, optou-se pelo uso do método MPS.

2.1.1 Método *Moving Particle Semi-implicit* (MPS)

O Método MPS foi desenvolvido inicialmente para simular escoamentos incompressíveis através da discretização do domínio computacional por um conjunto finito de partículas. O

método proposto por Koshizuka et al. (1995) resolve as equações governantes da mecânica dos fluidos, que são a equação da conservação da massa e conservação da quantidade de movimento, substituindo os operadores diferenciais por operadores discretos baseado em uma função peso, de suporte compacto que limita a interação de uma dada partícula para as partículas vizinhas próximas, reduzindo o custo computacional.

O algoritmo de solução adotado pelo método é dividido em duas etapas: uma primeira etapa explícita, onde a posição e velocidade das partículas são estimadas considerando-se as forças de campo e as forças viscosas e desconsiderando-se, nessa etapa, a contribuição da pressão. Posteriormente, baseado em uma modelagem de incompressibilidade, as pressões nas partículas são determinadas implicitamente resolvendo-se um sistema de equações de *Poisson* de pressão. Uma vez determinado o campo de pressão, é feita a correção da velocidade e posição das partículas de fluido.

No trabalho de Koshizuka e Oka (1996), os autores buscaram melhorar a estabilidade numérica do método apresentado em Koshizuka et al. (1995) por meio de alteração na função peso e mudança no modelo de incompressibilidade. Posteriormente, estudos da interação fluido-estrutura foram desenvolvidos em Koshizuka e Oka (1997) e as primeiras modelagens tridimensionais foram propostas em Koshizuka et al. (1998).

Um entrave do método atualmente é que todo o domínio apresenta a mesma resolução, o que impede refinar regiões do domínio em que se tenha maior interesse, fazendo-se necessário que o domínio inteiro seja refinado. Uma solução a isso são as propostas de implementação de um método multi-resolução. Tal implementação se iniciou com Tanaka et al. (2009), assim como outras modelagens no método de cálculo de pressão que foram sugeridos, como o trabalho de Shibata et al. (2015) e Chen et al. (2014).

Na área de otimização computacional tem-se o trabalho de Fernandes (2013) que desenvolveu um processamento em paralelo em cluster, melhorando significativamente o tempo de processamento em relação a versão serial.

2.2 Estaca Torpedo

A estaca torpedo é um sistema de ancoragem desenvolvido pela Petrobras. Seu desenvolvimento se deu buscando a redução dos custos de instalação em águas profundas. Tal sistema funciona por meio de queda livre, com a estaca penetrando o solo marinho e cravando, sendo idealizada para ser instalada em solo argiloso mole, como o que ocorre na Bacia de Campos (Kunitaki, 2006).

Estudos sobre a cravação das estacas torpedos, baseados em métodos numéricos, foram desenvolvidos por Carvalho et al. (2005) e Gonzalez et al. (2009) que investigaram o fenômeno pelo método dos elementos discretos. A capacidade de carga das estacas foi avaliada por Aguiar (2011) através do método dos elementos finitos; enquanto que Souza (2011) utilizou o método dos elementos finitos para estudar a hidrodinâmica das estacas. Bezerra (2017) buscou analisar a reação do solo ao impacto da estaca, por meio de análise numérica do fenômeno.

Como alternativa para a modelagem do processo de cravação de estaca torpedo, uma primeira simplificação pode ser a consideração do solo marinho como material com propriedades reológicas de um fluido não-newtoniano. Dentro dessa premissa, o problema pode ser simplificado como o impacto e penetração de um sólido em um fluido não-newtoniano. São escassos os estudos relacionados a isso. Porém, para o impacto hidrodinâmico e penetração, foram muitos os trabalhos publicados, entre as quais podemos citar as pesquisas de Cheng (1995), que estudou o impacto das estruturas por meio de simulações numéricas e o trabalho de Miyagi (2003), que realizou ensaios experimentais para avaliar o problema.

2.3 Reologia

Neste trabalho, a fim de representar o impacto da estaca torpedo em solo marinho, caracteriza-se o solo por meio de um fluido não-newtoniano, cujas propriedades reológicas representam o comportamento das lamelas dos solos marinhos, em especial a argila mole. Nessa área, destaca-se o trabalho de Melo (2013), que estudou o solo da região serrana do Rio de Janeiro, estimando suas propriedades reológicas por meio de diferentes ensaios laboratoriais e os caracterizando por meio do modelo de Bingham e de Herschel-Bulkley.

A simulação do escoamento de fluidos não-newtonianos pela mecânica dos fluidos computacional leva em conta o fato da viscosidade desses fluidos não ser constante, o que leva a uma abordagem mais cuidadosa do seu modelamento e da determinação de seu comportamento. Na modelagem desses fluidos por meio do método de partículas MPS, temos o trabalho de Shakibaeinia e Jin (2012), que focaram no processo de derramamento de areia em água parada, considerando a fase de areia como um fluido não-newtoniano. O método implementado pôde ser validado por meio de comparações entre os resultados obtidos da simulação e ensaios experimentais, mostrando boas correlações.

Também destacam-se os trabalhos de Pereira et al. (2013), que simularam o escoamento de concreto fresco utilizando-se do método MPS, e o estudo de Motezuki et al. (2015), que simularam ensaios de fluidos reológicos recorrentes da indústria civil, como o teste de *slump* e de *dam break*.

Fora do escopo de método de partículas, temos a contribuição de Cremonesi et al. (2010), que se utilizaram de um método de malhas para a simulação de fluidos não-newtonianos e o trabalho de Leite (2009), que conduziu estudos experimentais com um fluido não-newtoniano homogêneo, o Carbopol 940, através de testes de *dam break*, além de avaliar o escoamento por meio de equações analíticas.

3 Aspectos Reológicos

A reologia é a área da ciência mecânica que consiste no estudo do escoamento e deformação da matéria ao longo do tempo quando a mesma é submetida à uma tensão de cisalhamento. Os materiais estudados por essa ciência são aqueles que apresentam um comportamento contínuo da matéria, podendo a mesma ser sólida ou líquida.

Quando a matéria se encontra no estado sólido, a tensão externa aplicada leva a uma deformação na matéria. Quando cessada a tensão, o sólido pode retornar ao seu estado original, caracterizando assim os sólidos elásticos ou hookeanos; ou o sólido pode se deformar permanentemente, caracterizando os sólidos plásticos.

Para o caso de a matéria ser fluida, a tensão cisalhante aplicada leva o líquido a se deformar continuamente, ou seja, a escoar. Assim, para o caso dos fluidos, não se pode associar uma deformação à tensão aplicada, mas sim uma taxa de deformação. Quando a relação entre essa taxa de deformação e a tensão cisalhante aplicada no fluido for linear, o fluido é chamado de newtoniano e apresenta viscosidade constante; quando essa relação não for linear o fluido é chamado de não-newtoniano e a viscosidade não é constante podendo, em alguns casos, ser infinita, ou seja, o fluido apresenta comportamento de sólido.

Assim, as propriedades elásticas, plásticas e viscosas dos materiais que ditam como os mesmos se comportam quando tensionados, são o foco de estudo da reologia.

A Figura 3.1, a seguir, apresenta um resumo do comportamento reológico dos materiais.

Figura 3.1 - Resumo do comportamento reológico dos materiais.

Fonte: Rheology (adaptado).

O conceito e definição de fluidos não newtonianos serão melhores desenvolvidos nas seções subsequentes.

3.1 Fluidos Newtonianos

Uma das maneiras de se caracterizar um fluido é, conforme descrito na seção anterior, por meio de sua resposta a uma tensão cisalhante aplicada. Tal conceito pode ser mais claramente entendido por meio do escoamento de *Couette*, representado na Figura 3.2. O arranjo do escoamento consiste em um fluido confinado entre duas placas paralelas: uma fixa e outra móvel, aplica-se então uma força tangencial constante na placa superior fazendo com que a mesma se desloque com uma velocidade U , constante.

Figura 3.2 - Escoamento de *Couette*.

Fonte: Próprio autor.

A força tangencial atuante formará tensões de cisalhamento τ_{yx} agindo em todas as camadas do fluido e a diferença de velocidades entre as placas gera, pelo princípio da aderência, um gradiente de velocidade $\frac{\partial u(y)}{\partial y}$ na direção vertical. Quando essas duas propriedades se correlacionam de maneira diretamente proporcional o fluido é chamado de fluido newtoniano e a constante de proporcionalidade entre elas é chamado de viscosidade dinâmica, μ , conforme a Equação (3.1):

$$\tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u(y)}{\partial y} \right). \quad (3.1)$$

O gradiente de velocidade costuma ser também chamado de taxa de deformação, $\dot{\gamma}$ (Equação (3.2)), como expresso na seção anterior, e será assim referenciado ao longo do texto.

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial u(y)}{\partial y}. \quad (3.2)$$

3.2 Fluidos Não-Newtonianos

Diferentemente dos fluidos newtonianos, os fluidos não-newtonianos não apresentam uma relação diretamente proporcional entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação. Ou seja, a viscosidade nesses fluidos não é constante e, portanto, define-se um novo parâmetro, chamado viscosidade aparente, η , que busca representar essa característica reológica. Esse parâmetro é obtido pela relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação (Equação (3.3)), da mesma maneira que a viscosidade dinâmica é obtida, porém não é mais considerada constante.

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}. \quad (3.3)$$

A viscosidade aparente é comumente representada pela letra η , para se diferenciar da viscosidade dinâmica, representada pela letra μ , que se trata de um caso particular na qual a viscosidade é constante, independentemente da taxa de deformação sofrida.

O comportamento viscoso que esses fluidos apresentam com a variação da taxa de deformação serve para classificá-los em algumas classes de fluidos. Essas classes serão apresentadas nas subseções a seguir.

3.2.1 Fluidos Dilatantes

Nessa classe de fluidos, a viscosidade aparente aumenta quanto maior for a taxa de deformação, isso significa que quanto mais se agitar esse fluido, aumentando a taxa de deformação (ou, em outras palavras, aumentando o gradiente de velocidade no interior do fluido), mais viscoso esse fluido se torna. São exemplos de fluidos dilatantes as misturas de água – amido de milho e água – areia (areia movediça).

3.2.2 Fluidos Pseudoplásticos

Nessa classe de fluidos a viscosidade aparente diminui com o aumento da taxa de deformação, significando que um aumento na deformação causada no fluido leva o a escoar mais facilmente. São exemplos de fluidos pseudoplásticos algumas suspensões coloidais e soluções de polímeros, assim como o látex.

3.2.3 Plástico de Bingham

Os plásticos de Bingham são uma categoria de fluidos não-newtonianos que necessitam que uma tensão de cisalhamento inicial, τ_0 , seja vencida para que comece a escoar. Antes que essa tensão inicial seja atingida, o fluido apresenta comportamento de sólido indeformável, com viscosidade infinita, após essa tensão ser vencida o fluido passa a escoar com viscosidade constante.

3.2.4 Fluidos Herschel-Bulkley

Esses fluidos são semelhantes aos plásticos de Bingham, apresentando a necessidade de uma tensão de cisalhamento inicial seja vencida, porém, sua viscosidade após o fluido começar a escoar não é constante, podendo aumentar ou diminuir com a elevação da taxa de deformação.

Esses comportamentos reológicos diversos podem ser representados de maneira gráfica conforme a Figura 3.3, onde se apresenta o comportamento da tensão de cisalhamento com a variação da taxa de deformação.

Figura 3.3 - Tensão de cisalhamento pela taxa de deformação por cisalhamento para alguns fluidos.

Fonte: Leite (2009).

3.3 Modelos Reológicos

Os modelos reológicos buscam representar matematicamente o comportamento desses diversos fluidos a fim de melhor compreendê-los e poder estudá-los. Esses modelos correlacionam a tensão de cisalhamento com a taxa de deformação, sendo os mais relevantes explicitados a seguir.

3.3.1 Modelo de Ostwald de Waale (Lei da Potência)

Esse modelo busca representar os fluidos cujo comportamento seja dilatante ou pseudoplástico. Tal modelo é definido pela Equação (3.4):

$$\tau = K(\dot{\gamma})^n, \quad (3.4)$$

onde K representa o índice de consistência e n representa o índice de escoamento. Substituindo a Equação (3.4) na Equação (3.3), temos que a viscosidade aparente fica representada nesse modelo por:

$$\eta = K(\dot{\gamma})^{n-1}. \quad (3.5)$$

Caso o índice de escoamento seja igual a 1, temos que a viscosidade aparente passa a ser uma constante e o fluido é newtoniano. Já para valores de índice de escoamento diferentes da unidade tem-se que a viscosidade aparente se torna uma função da taxa de deformação representando, portanto, os fluidos não-newtonianos. Os possíveis valores para o índice de escoamento e o respectivo fluido que representa estão resumidos na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Tipos de fluidos com relação ao índice de escoamento.

n	Tipos de Fluidos
<1	Pseudoplástico
1	Newtoniano
>1	Dilatante

3.3.2 Modelo de Bingham

O modelo de Bingham busca representar a característica desse fluido de necessitar de uma tensão cisalhante inicial para escoar, representado pela Equação (3.6):

$$\tau = \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma}, \quad (3.6)$$

onde o parâmetro μ_p representa a viscosidade plástica desses fluidos. Substituindo a Equação (3.6) na Equação (3.3) temos que a viscosidade aparente desses fluidos é dada por:

$$\eta = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \mu_p. \quad (3.7)$$

Como pode ser observado, quando a taxa de deformação tende a valores próximos de zero, a viscosidade aparente tende ao infinito, representando a característica de sólido indeformável que esse modelo assume quando submetido a tensões inferiores que a tensão de cisalhamento inicial.

3.3.3 Modelo de Herschel-Bulkley

Esse modelo possui as características principais dos dois modelos anteriores: a presença de uma tensão de cisalhamento inicial e a variação da viscosidade aparente com a variação na taxa de deformação, sendo representado pela Equação (3.8):

$$\tau = \tau_0 + K(\dot{\gamma})^n. \quad (3.8)$$

Esse modelo apresenta uma formulação mais geral, englobando as formulações dos dois modelos anteriores. Novamente, substituindo a Equação (3.8) na Equação (3.3), temos que a viscosidade aparente fica dada por:

$$\eta = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K(\dot{\gamma})^{n-1}. \quad (3.9)$$

Os três modelos apresentados são os mais difundidos da reologia, porém diversos outros modelos existem como o modelo de Casson, modelo de Ellis, modelo de Cross, dentre outros.

4 Método *Moving Particle Semi-implicit*

O método *Moving Particle Semi-Implicit* (MPS) é um método de partículas que tem como equações governantes a equação da continuidade (Equação (4.1)) e a equação de Cauchy (Equação (4.2)). Ambas as equações representam a base das equações de meios contínuos para fluidos viscosos.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (4.1)$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \mathbb{T} + \rho \vec{f}, \quad (4.2)$$

Onde ρ é a massa específica do fluido, t é o tempo, $\vec{V}$ é o campo de velocidade, P a pressão, $\mathbb{T}$ é o tensor das forças viscosas e $\vec{f}$ as forças de corpo atuantes, como a gravidade.

A Equação (4.1) está expressa na sua fórmula mais geral, ou seja, considerando que o escoamento possa ser compressível. A hipótese de escoamento incompressível é expressa pela Equação (4.3):

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0. \quad (4.3)$$

Utilizando dessa hipótese, temos que a Equação (4.1) assume a forma de:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0. \quad (4.4)$$

Tal equação representa que a variação volumétrica do sistema é constante ao longo do tempo (escoamento isovolumétrico).

Para a solução numérica destas equações, o método MPS substitui os operadores diferenciais por operadores diferenciais discretos derivados da aplicação de uma função peso.

4.1 Função Peso

A função peso tem a finalidade de contabilizar a contribuição de uma partícula vizinha. Ela também é responsável por limitar essa interação entre as partículas para um domínio finito e próximo. A função peso pode ser representada conforme a Equação (4.5):

$$\omega(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1, & \text{se } 0 \leq r \leq r_e, \\ 0, & \text{se } r > r_e, \end{cases} \quad (4.5)$$

onde r_e é o raio efetivo, pré-estabelecido, que delimita o domínio de influência de uma partícula vizinha e r é a distância entre duas partículas vizinhas i e j , conforme:

$$r = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|. \quad (4.6)$$

4.2 Densidade do Número de Partículas

Outro parâmetro importante do método é a densidade do número de partículas (pnd), expressa por:

$$\langle pnd \rangle_i = \sum_{i \neq j} \omega(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|). \quad (4.7)$$

A densidade do número de partículas é proporcional à densidade do fluido. Sendo assim, ao manter esse valor constante em cada interação do método garante-se que a propriedade de incompressibilidade seja satisfeita (Equação (4.3)).

4.3 Gradiente

Com base na função peso, o gradiente de uma função escalar ϕ qualquer pode ser dado por:

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{d}{pnd^0} \sum_{i \neq j} \left[\frac{\phi_j - \phi_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \omega(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \right], \quad (4.8)$$

onde d representa o número de dimensões, pnd^0 o valor inicial da densidade do número de partículas, que deve ser mantido o mesmo durante toda a simulação, e ϕ_i e ϕ_j representam as quantidades escalares genéricas das partículas i e j , respectivamente.

4.4 Divergência

Da mesma maneira, a divergência de uma função vetorial ϕ genérica pode ser expresso por:

$$\langle \nabla \cdot \phi \rangle_i = \frac{d}{pnd^0} \sum_{i \neq j} \left[\frac{(\phi_j - \phi_i) \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2} \omega(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \right]. \quad (4.9)$$

4.5 Laplaciano

Por fim, o laplaciano de uma função escalar ϕ genérica pode ser determinado por:

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \frac{2d}{pnd^0 \delta} \sum_{i \neq j} [(\phi_j - \phi_i) \omega(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|)]. \quad (4.10)$$

A constante δ é dada por:

$$\delta = \frac{\int_v \omega(r) r^2 dv}{\int_v \omega(r) dv} \quad (4.11)$$

4.6 Incompressibilidade

Como já foi mencionado, a incompressibilidade do escoamento é garantida mantendo-se constante a densidade do número de partículas. Ou seja, considerando um instante de tempo qualquer, a densidade do número de partículas nesse instante, pnd_i^* , calculado explicitamente, deve ser igual à densidade do número de partículas inicial, pnd^0 . Caso esses valores sejam

diferentes, a densidade do número de partículas pnd_i^* deve ser corrigido por uma parcela pnd_i' , calculada implicitamente, conforme Equação (4.12):

$$pnd^0 = pnd_i^* + pnd_i'. \quad (4.12)$$

Essa parcela se relaciona com a correção do campo de velocidades $\vec{u}'$ a fim de que a conservação da massa do sistema, expressa pela Equação (4.4), seja satisfeita, segundo a Equação (4.13):

$$\nabla \vec{u}' = -\frac{1}{\Delta t} \frac{pnd_i'}{pnd^0}, \quad (4.13)$$

onde Δt é o intervalo de tempo entre as iterações. A correção do campo de velocidades é obtida por meio do termo implícito do gradiente do campo de pressão, apresentada na Equação (4.14):

$$\vec{u}' = -\frac{\Delta t}{\rho} \langle \nabla P^{n+1} \rangle, \quad (4.14)$$

onde o sobrescrito $n + 1$ serve para indicar que o campo de pressões P está sendo calculado no intervalo de tempo posterior ao intervalo de tempo na qual se calculou a densidade do número de partículas pnd^* . Substituindo-se a Equação (4.14) na Equação (4.13), obtém-se:

$$\frac{\Delta t}{\rho} \langle \nabla^2 P^{n+1} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \frac{pnd_i'}{pnd^0}. \quad (4.15)$$

Substituindo a Equação (4.12) na Equação (4.15) e rearranjando os termos, tem-se:

$$\langle \nabla^2 P^{n+1} \rangle = -\frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{pnd_i^* - pnd^0}{pnd^0}. \quad (4.16)$$

A Equação (4.16) representa a equação de Poisson de pressão. O seu lado esquerdo representa o laplaciano do campo de pressão. O operador laplaciano deve ser substituído conforme a Equação (4.10), resultando em:

$$\frac{2d}{pnd^0 \delta} \sum_{i \neq j} (P^{n+1}_j - P^{n+1}_i) \omega(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) = -\frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{pnd_i^* - pnd^0}{pnd^0}. \quad (4.17)$$

Rearranjando-se os termos da equação acima, obtemos:

$$\sum_{i \neq j} \omega(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) (P^{n+1}_i - P^{n+1}_j) = (pnd_i^* - pnd^0) \frac{\delta \rho}{2d \Delta t^2}. \quad (4.18)$$

O sistema matricial representado pela Equação (4.18) apresenta a característica de ser um sistema linear simétrico e esparsa que pode ser resolvido para as incógnitas P^{n+1}_i . Uma vez obtido as pressões nas partículas, pode se corrigir o campo de velocidades $\vec{u}'$ por meio da Equação (4.14), onde o operador gradiente deve ser substituído conforme a Equação (4.8), resultando em:

$$\vec{u}' = \frac{d\Delta t}{pnd^0\rho} \sum_{i \neq j} \left[\frac{(p^{n+1}_j - p^{n+1}_i) \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2} \omega(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \right]. \quad (4.19)$$

4.7 Condições de Contorno

As condições de contorno utilizadas no algoritmo são: condição de parede, de superfície livre e condição periódica.

4.7.1 Condição de Parede

Neste trabalho, as paredes no método MPS são modeladas através de três fileiras de partículas, onde a primeira seria de partículas de parede e as demais de partícula do tipo *dummy*. Essas partículas visam completar a vizinhança das partículas de parede a fim de permitir o correto cálculo da pressão. A necessidade de duas camadas de partículas *dummy* está relacionado com o raio efetivo adotado no método que, nesse estudo, vale 2,1 vezes a distância entre partículas l_0 do modelo.

A condição de aderência, ou não escorregamento, que as partículas de fluido apresentam na proximidade das paredes é imposta espelhando a velocidade nas partículas *dummy*, para se obter o correto cálculo das taxas de deformação nas partículas, conforme Figura 4.1.

Fonte: Próprio autor.

4.7.2 Superfície Livre

A determinação se uma partícula se encontra na superfície do fluido segue o desenvolvido por Tsukamoto et al. (2016), que estabelece que duas condições sejam satisfeitas:

$$\begin{cases} pnd_i^* < \beta \cdot pnd^0, \\ \sigma_i < \delta \cdot l_0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Com σ_i sendo expresso pela Equação (4.21):

$$\sigma_i = \frac{|\sum_{i \neq j} |\vec{r}_j - \vec{r}_i| \cdot w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|)|}{pnd_i}. \quad (4.21)$$

O numerador da Equação (4.21) acima representa o módulo do vetor da contribuição do peso das partículas vizinhas à partícula i . Assim, se o valor de σ_i for maior que $\delta \cdot l_0$, com l_0 sendo a distância entre partículas do modelo, considera-se que há um desbalanceamento na distribuição das partículas ao redor da partícula central i , significando se tratar de uma partícula de superfície.

Os coeficientes β e δ utilizados são, respectivamente, 0,97 e 0,25.

Caso uma partícula satisfaça à condição estabelecida pela Equação (4.20) ela é considerada uma partícula da superfície e impõem-se a ela o valor de pressão nula, condizente com a condição de contorno de superfície livre para fluidos.

4.7.3 Condição Periódica

A condição de contorno de periodicidade consiste em uma repetição espacial das propriedades das partículas nas fronteiras onde há o fluxo e influxo de partículas. Tal condição busca reproduzir a periodicidade espacial de um fenômeno que se repete espacialmente. A Figura 4.2 ilustra essa condição: quando uma partícula atravessa a fronteira (partículas em vermelho), ela é reinserida na simulação na outra fronteira (partículas em verde).

Figura 4.2 - Condição de Periodicidade.

Fonte: Próprio autor.

4.8 Modelagem Numérica para o Comportamento Reológico

A modelagem computacional da contribuição viscosa, necessária na etapa explícita onde se estima a velocidade e posição intermediárias das partículas, consiste em, primeiramente, determinar o divergente do tensor das tensões viscosas, por meio da Equação (4.22):

$$\nabla \cdot \mathbb{T} = 2\mathbb{D} \cdot \nabla \eta + \eta \nabla^2 \vec{u}, \quad (4.22)$$

sendo que o operador nabla (∇) representa o divergente do tensor, η é a viscosidade aparente do fluido e $\mathbb{D}$ é o tensor taxa de deformação.

A viscosidade aparente varia de acordo com o modelo reológico que o fluido representa, alguma das expressões mais usuais que ela pode assumir está dado pelas Equação (3.5), Equação (3.7) e Equação (3.9).

O tensor taxa de deformações é um tensor simétrico e é representado pela Equação (4.23):

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial r_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial r_2} + \frac{\partial u_2}{\partial r_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial r_3} + \frac{\partial u_3}{\partial r_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial r_1} + \frac{\partial u_1}{\partial r_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial r_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial r_3} + \frac{\partial u_3}{\partial r_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial r_1} + \frac{\partial u_1}{\partial r_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial r_2} + \frac{\partial u_2}{\partial r_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial r_3} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

onde u_1 , u_2 e u_3 são, respectivamente, as componentes do vetor velocidade $\vec{u}$ nas direções dos vetores $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ e $\vec{r}_3$, ortogonais entre si. A matriz apresentada na Equação (4.23) pode ser expressa resumidamente segundo a Equação (4.24):

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2} [(\nabla \vec{u}) + (\nabla \vec{u})^T]. \quad (4.24)$$

Para se determinar a viscosidade aparente do fluido é necessário se determinar a taxa de deformação por cisalhamento, tal parâmetro pode ser obtido por meio da Equação (4.25):

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2(\mathbb{D}:\mathbb{D})}, \quad (4.25)$$

onde a expressão $\mathbb{D}:\mathbb{D}$ representa a norma euclidiana do tensor $\mathbb{D}$. Por fim, a contribuição das forças viscosas ao campo de velocidade das partículas é obtida por meio da Equação (4.26).

$$\vec{u}^* = \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \cdot \mathbb{T}. \quad (4.26)$$

A abordagem computacional desenvolvida para o cálculo da influência viscosa enfrenta uma singularidade na modelagem de fluidos que apresentam uma tensão limite de escoamento, casos dos modelos de Bingham e de Herschel-Bulkley. Se analisarmos a Equação (3.7) e a Equação (3.9) tem-se que, quanto menor for a taxa de deformação por cisalhamento, maiores serão os valores de viscosidade aparente sendo que, no limite, tal valor tenderia ao infinito, o que poderia levar a instabilidades numéricas.

Para se evitar tal problema, duas diferentes abordagens foram introduzidas e serão apresentadas a seguir.

4.8.1 Modelagem Bilinear

Nesse modelo é introduzido uma taxa de deformação crítica ($\dot{\gamma}_{cr}$), limitando os valores de viscosidade aparente, conforme a Equação (4.27).

$$\tilde{\eta} = \begin{cases} \eta(\dot{\gamma}) & \text{se } \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_{cr} , \\ \eta(\dot{\gamma}_{cr}) & \text{se } \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_{cr} . \end{cases} \quad (4.27)$$

Devido a essa modelagem reológica computacional, tais fluidos apresentam um comportamento reológico diferente do real, como a inexistência de uma tensão de cisalhamento mínima necessária para que o fluido comece a escoar. A Figura 4.3 representa a curva tensão-deformação para um fluido Binghamiano modelado pelo modelo bilinear e a sua respectiva curva teórica.

4.8.2 Modelagem Papanastacius

O modelo de Papanastacius é baseado no trabalho de Papanastacius (1987), tal modelo utiliza-se de um parâmetro m que, quando tende a infinito, leva à curva teórica do modelo de Bingham. A equação da tensão cisalhante por esse modelo é dada pela Equação (4.28) e a viscosidade fica dada pela Equação (4.29).

$$\tau = \mu_p |\dot{\gamma}| + \tau_0 (1 - e^{-m|\dot{\gamma}|}), \quad (4.28)$$

$$\eta = \mu_p + \frac{\tau_0}{|\dot{\gamma}|} (1 - e^{-m|\dot{\gamma}|}). \quad (4.29)$$

A Figura 4.4 apresenta a curva tensão-deformação para um fluido Binghamiano modelado pelo modelo de Papanastacius e a respectiva curva teórica do fluido.

4.9 Cálculo das Forças e Momentos Devido à Pressão

A força de contato normal nas estruturas sólidas que se encontram no interior de um escoamento pode ser obtida por meio da integração da pressão pela superfície do sólido. Para tanto, para cada partícula de parede do sólido, deve se determinar o seu vetor área, de valor igual a área da partícula e com direção e sentido da normal da mesma, e multiplicar pela pressão da partícula. A somatória da contribuição de cada partícula de parede do sólido define a força na estrutura. A Equação (4.30) representa esse cálculo.

$$\vec{F} = - \sum_{i=1}^k \vec{A}_i \cdot p_i , \quad (4.30)$$

onde k é o número de partículas de parede do sólido, $\vec{A}_i$ é o vetor área de uma partícula de parede i desse sólido, com direção normal à parede e sentido positivo para fora, e p_i é a pressão nessa partícula. A Figura 4.5 ilustra os vetores normais a um sólido em forma de estaca.

Figura 4.5 - Vetores normais a um sólido em forma de estaca em 2D.

Fonte: Próprio autor.

Para o cálculo do momento no sólido deve se multiplicar a distância entre a partícula e o centro de gravidade do sólido, ou seja, multiplicar pelo braço $\vec{b}_i$ da partícula, conforme a Equação (4.31):

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^k \vec{A}_i \cdot \vec{b}_i \cdot p_i . \quad (4.31)$$

5 Cálculo da Força de Arrasto Viscoso

Esse capítulo visa explicar o método abordado para o cálculo das tensões e forças cisalhantes nos sólidos e detalhar o procedimento do algoritmo utilizado.

5.1 Abordagem Teórica

O algoritmo proposto visa calcular as tensões cisalhantes nos corpos sólidos devido ao movimento de partículas fluidas ao seu redor. Para tanto, calcula-se a taxa de deformação do fluido próximas à parede e, utilizando-se da Equação (3.1), obtém-se o valor da tensão na parede.

A taxa de deformação é avaliada através das velocidades do fluido ao redor da parede e, considerando-se esse perfil como parabólico, utiliza uma regressão polinomial para obter a função do segundo grau que relaciona a velocidade das partículas de fluido com a sua distância normal à parede.

Obtendo-se a função, calcula a sua taxa de variação ao longo da direção normal na posição da partícula de parede, determinando-se assim a taxa de variação da parede.

5.2 Procedimento do Algoritmo

A tensão de cisalhamento em fluidos foi brevemente explanada no Capítulo 3. Para se obter o valor dessa tensão, utiliza-se a Equação (3.1), representada novamente a seguir:

$$\tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u(y)}{\partial y} \right), \quad (5.1)$$

sendo u a velocidade do fluido, y a direção normal à parede e μ a viscosidade dinâmica do fluido.

De maneira mais geral, a Equação (5.1) pode ser escrita como:

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial(\vec{u} \cdot \vec{t})}{\partial(\vec{r} \cdot \vec{n})}, \quad (5.2)$$

onde $\vec{n}$ e $\vec{t}$ representam, respectivamente, os versores normal e tangente à parede e o vetor $\vec{r}$ representa o vetor posição entre uma partícula de fluido (P) e a parede, conforme ilustrado na Figura 5.1.

Figura 5.1 - Esquema para cálculo da tensão de cisalhamento.

Fonte: Próprio autor.

Para determinar a tensão cisalhante na parede devido ao movimento do fluido ao seu redor, basta calcular a derivada para a posição $r = 0$, conforme:

$$\tau = \mu \cdot \left. \frac{\partial(\vec{u} \cdot \vec{t})}{\partial(\vec{r} \cdot \vec{n})} \right|_{r=0} \quad (5.3)$$

Para implementar o cálculo dessa tensão cisalhante na parede dos sólidos num método de partículas como MPS, a seguinte abordagem foi desenvolvida:

Considerando um reticulado, onde há partículas de fluido, partículas de sólido e partículas *dummy*, o algoritmo faz uma varredura em todas as partículas procurando as partículas de sólido e, para cada partícula sólida encontrada, calcula a tensão cisalhante naquela partícula devido ao movimento das partículas de fluido ao seu redor.

Assim, tomando a Figura 5.2 a seguir como exemplo, temos:

Figura 5.2 - Reticulado considerado para o cálculo.

Fonte: Próprio autor.

Na Figura 5.2, a partícula destacada em vermelho representa uma partícula de parede que está sendo considerada para o cálculo, as partículas pretas representam as demais partículas de parede, as partículas azuis representam as partículas de fluido e as partículas cinzas representam as partículas *dummy*.

Para essa partícula em questão, buscam-se todas as partículas de fluido vizinhas dentro de um raio de vizinhança pré-estipulado (valendo $4,0l_0$), conforme a Figura 5.3.

Figura 5.3 - Partículas de fluido consideradas para o cálculo.

Fonte: Próprio autor.

Para cada partícula de fluido vizinha encontrada calcula-se, então, dois parâmetros: a sua distância normal à parede e a componente da sua velocidade paralela à parede.

Calculados esses dois parâmetros para todas as partículas de fluido dentro do raio de vizinhança, determina-se, então, uma equação do segundo grau que relaciona a velocidade em função da distância à parede, conforme a Equação (5.4):

$$v(r) = a.r^2 + b.r + c, \quad (5.4)$$

onde os parâmetros a , b e c são determinados por meio de uma regressão polinomial.

Derivando a Equação (5.4) em relação à distância r , temos:

$$\frac{\partial v(r)}{\partial r} = 2.a.r + b \quad (5.5)$$

Como se quer o valor da derivada na posição $r = 0$ (centro da partícula de parede), teremos:

$$\left. \frac{\partial v(r)}{\partial r} \right|_{r=0} = b \quad (5.6)$$

Ou seja, na modelagem do perfil de velocidades das partículas próximas à parede como sendo uma função do segundo grau em relação à distância normal dessas partículas até a parede, deve-se, portanto, determinar-se o valor da constante b , obtida por meio da interpolação quadrática, para se determinar o valor da taxa de deformação do fluido na parede.

Nessa abordagem, ao utilizar-se todas as partículas de fluido dentro do raio de vizinhança, assume-se a hipótese de que a variação das velocidades das partículas na direção do escoamento (direção tangencial a parede) é desprezível se comparada a variação da mesma na direção normal, isto é:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{t}} \ll \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{n}}. \quad (5.7)$$

Assim, a tensão cisalhante na parede pode ser obtida multiplicando o parâmetro b pela viscosidade dinâmica do fluido, conforme a Equação (5.3).

E, por fim, para se obter a força cisalhante na parede resultante da tensão cisalhante, basta integrar o valor da tensão cisalhante na área, conforme a equação a seguir:

$$F = \int \mu \cdot \left. \frac{\partial (\vec{v} \cdot \vec{t})}{\partial (\vec{r} \cdot \vec{n})} \right|_{r=0} \cdot dA. \quad (5.8)$$

5.3 Implementação Computacional

A função que realiza o cálculo do arrasto viscoso está posicionada no fluxograma do MPS após o fim da etapa implícita, onde as velocidades e posições das partículas foram determinadas e antes do próximo incremento de tempo ocorrer, conforme representado na Figura 5.4.

Figura 5.4 - Fluxograma do método MPS.

Fonte: Próprio autor.

As etapas dentro da função que calcula a tensão cisalhante seguem o fluxograma representado na Figura 5.5, de acordo com a seguinte ordem:

1. A cada passo de tempo o programa varre todos os materiais do modelo;
2. Se o material for sólido, o programa percorre todas as partículas desse sólido;
3. Para cada partícula de sólido, o programa busca as partículas de fluido vizinhas dentro de um raio de vizinhança pré-estabelecido;
4. Para cada partícula de fluido dentro do raio de vizinhança, o programa calcula a distância normal da partícula à parede e a velocidade paralela à parede;
5. Para todas as partículas obtidas em 4, interpola-se uma função do segundo grau do tipo apresentado na Equação (5.4);
6. Da função obtida, atribui-se o valor do parâmetro b como a taxa de deformação da partícula de sólido, conforme Equação (5.6);

7. Findadas todas as partículas do sólido, o programa calcula a tensão de cisalhamento na superfície do mesmo, conforme a Equação (5.8).

Figura 5.5 - Fluxograma do método implementado.

Fonte: Próprio autor.

6 Validação do Método Numérico

Foram conduzidas simulações numéricas com o propósito de comparar os resultados com a literatura a fim de validar o método numérico implementado, tanto no que tange o escoamento de fluidos não-newtonianos, quanto o cálculo da força de arrasto viscosa.

6.1 Escoamento de Fluido Não-Newtoniano

Para o escoamento de fluido não-newtoniano, as simulações conduzidas foram os testes de *dam break* em três dimensões e o teste de *slump*, também em três dimensões:

6.1.1 Dam break

O ensaio de *dam break* consiste no colapso de uma coluna de fluido previamente confinada sobre seu peso próprio. Tal ensaio visa avaliar o avanço da frente de onda ao longo do tempo, sendo corriqueiro na indústria civil com o intuito de avaliar a trabalhabilidade das pastas de cimento.

Leite (2009) avaliou esse teste por meio de ensaios experimentais e analíticos. Seu estudo foi conduzido focando na resposta do fluido não-newtoniano Carbopol 940, um polímero poli acrílico homogêneo que, por ser homogêneo, pode viabilizar melhores comparações com o método MPS que também se baseia em fluidos homogêneos. O trabalho de Leite (2009) também serviu de base para o desenvolvimento do estudo de Pereira et al. (2013), que simulou as condições dos ensaios de Leite (2009) para o método MPS em duas dimensões, também com o interesse de validar o método implementado.

As dimensões principais do ensaio experimental conduzido por Leite (2009) estão apresentadas na Figura 6.1. As dimensões da coluna de fluido no início do problema são um comprimento de 500mm, uma largura de 320mm e, seguindo os experimentos realizados por Leite (2009), três alturas (h) da coluna de fluido foram estudadas: 80mm, 100mm e 120mm.

Assim, no instante inicial, a coluna é liberada e colapsa sobre seu peso próprio, avançando na direção horizontal do aparato. Conforme Leite (2009) avaliou, o fluido em questão é melhor representado pelo modelo de Herschel-Bulkley, suas propriedades reológicas, levantadas a priori por Leite (2009), estão apresentadas na Tabela 6.1 e foi utilizado, nessas simulações, o modelo bilinear para representar o fluido.

Figura 6.1 - Dimensões do problema dam break.

Fonte: Leite (2009).

Tabela 6.1 - Propriedades reológicas do fluido simulado.

$\tau_0 [Pa]$	$K [Pa \cdot s^n]$	n	$\rho [kg/m^3]$
4.4715	1.1849	0.5497	1200

Fonte: Leite (2009).

Como o método MPS é um método numérico de partículas pelo qual, quanto menor for o tamanho das partículas que representam o domínio computacional, melhor é o resultado do problema. Em contrapartida, maior é o tempo de solução do problema, faz-se necessário conduzir um estudo de convergência numérica, a fim de avaliar qual a melhor dimensão das partículas que compõem o problema. Ou seja, qual a melhor resolução do domínio computacional traz os melhores resultados sem prejudicar em demasia o tempo computacional para a simulação se proceder.

Para o caso de *dam break* estudado, define-se uma resolução para o caso como L/l_0 , onde L é o comprimento do bloco de fluido (500mm) e l_0 é a distância entre partículas do modelo (10mm, 5mm e 4mm). Assim, os valores de resolução que serão simulados são os valores de 50, 100 e 125, ou seja, têm-se, para o caso de menor resolução, 50 partículas de fluido ao longo do comprimento e, para o caso de maior resolução, 125 partículas ao longo do comprimento. Na Tabela 6.2 são apresentados a quantidade de partículas presente em cada diferente

configuração de problema gerado para a simulação e o passo de tempo utilizado nas simulações foi de 0,0001s.

Tabela 6.2 - Quantidade de partículas dos modelos.

Resolução (L/l_0)	Quantidade de partículas		
	$h = 8cm$	$h = 10cm$	$h = 12cm$
50	54586	57686	60786
100	261909	287109	312309
125	1442191	1645391	1848592

O tempo de simulação de cada caso estudado é apresentado na Tabela 6.3. Os tempos de processamento computacional são para um tempo de simulação real de 0,4 segundo.

Tabela 6.3 - Tempo de processamento dos modelos.

Resolução (L/l_0)	Tempo de processamento (min)		
	$h = 8cm$	$h = 10cm$	$h = 12cm$
50	18	20	21
100	110	122	138
125	862	1030	1219

Os resultados das simulações conduzidas são comparados com os ensaios experimentais e analíticos de Leite (2009) e/ou os ensaios no MPS 2D realizados por Pereira et. al (2013). Assim, primeiramente, nas Figura 6.2, Figura 6.3 e Figura 6.4 estão representados o estudo de convergência do método numérico comparando-os com os resultados obtidos por Leite (2009). Nas figuras em questão, o tempo de simulação é de 0,4 segundo após a liberação da coluna de fluido. A Figura 6.2 apresenta os resultados para a altura de coluna de 8cm, enquanto que a Figura 6.3 é representativa da coluna de altura de 10 cm e, por último, a Figura 6.4 representa a altura de 12cm. Por fim, é importante ressaltar que a região de comparação das figuras é a região central da simulação, ou seja, uma posição de 160mm de distância da parede (lembrando que a largura do aparato experimental tem 320mm).

Figura 6.2 - Comparação entre os resultados numéricos 3D obtidos pelo MPS e os resultados experimental e numérico de Leite (2009) para frente de onda no instante $t = 0,4s$ e para $h = 8cm$.

Fonte: Próprio autor.

Figura 6.3 - Comparação entre os resultados numéricos 3D obtidos pelo MPS e os resultados experimental e numérico de Leite (2009) para frente de onda no instante $t = 0,4s$ e para $h = 10cm$.

Fonte: Próprio autor.

Figura 6.4 - Comparação entre os resultados numéricos 3D obtidos pelo MPS e os resultados experimental e numérico de Leite (2009) para frente de onda no instante $t = 0,4s$ e para $h = 12cm$.

Fonte: Próprio autor.

Analisando as figuras apresentadas, têm-se que os resultados obtidos pelo método de partículas MPS apresenta uma boa concordância com ambos os métodos conduzidos por Leite (2009), tanto o método analítico quanto o método experimental. Com relação à convergência do método, tem-se que a maior resolução, ou seja, a resolução de dimensão $L/l_0 = 125$, é aquela onde apresenta, como esperado, a menor oscilação da superfície livre. Isto é, o fluido tende a ter um comportamento mais próximo do real.

Posteriormente à etapa de análise de convergência, passa-se à uma comparação entre os testes realizados. Assim, nas Figura 6.5, Figura 6.6 e Figura 6.7 são apresentados, comparativamente, os melhores resultados para a análise conduzida em 3-dimensões no MPS, a análise de melhor resolução conduzida por Pereira et. al (2013), ou seja, uma resolução de $L/l_0 = 500$, e os resultados analíticos e numéricos de Leite (2009); em todas as imagens considerou-se o instante de tempo igual a 0,4 segundo.

Figura 6.5 - Comparativo entre os resultados numéricos 3D, resultados numéricos 2D de Pereira et al. (2013) e os dados experimental e numérico de Leite (2009) no instante $t = 0,4s$ e para $h = 8cm$.

Fonte: Próprio autor.

Figura 6.6 - Comparativo entre os resultados numéricos 3D, resultados numéricos 2D de Pereira et al. (2013) e os dados experimental e numérico de Leite (2009) no instante $t = 0,4s$ e para $h = 10cm$.

Fonte: Próprio autor.

Figura 6.7 - Comparativo entre os resultados numéricos 3D, resultados numéricos 2D de Pereira et al. (2013) e os dados experimental e numérico de Leite (2009) no instante $t=0,4s$ e para $h=12cm$.

Fonte: Próprio autor.

Analisando as figuras apresentadas, tem-se que o método desenvolvido em um ambiente em três dimensões levaram a uma maior distância da frente de onda se comparado ao método em duas dimensões; tal fato se explica pela presença das paredes laterais que, no caso de um modelo em 3-dimensões, influenciam no cálculo do gradiente de velocidade e, consequentemente, no cálculo da taxa de deformação.

Posteriormente aos estudos conduzidos, é interessante apresentar o comportamento da frente de onda do fluido com o passar do tempo. Assim, na Tabela 6.4, tem-se o comportamento da frente de onda para o caso analisado no MPS em três dimensões, resolução de L/l_0 125 (maior resolução analisada) e altura da coluna de fluido igual a $h = 12\text{cm}$. Na Tabela 6.4 estão apresentados o comportamento do fluido com relação aos campos de pressão, aos campos de velocidade e à viscosidade do fluido, nos tempos iguais a 0 segundo, 0,2 segundo e 0,4 segundo.

Tabela 6.4 - Campos de pressão, velocidade e viscosidade do fluido nos instantes $t = 0,0\text{s}$, $t = 0,2\text{s}$ e $t = 0,4\text{s}$, $\frac{L}{l_0} = 125$ e $h = 12\text{cm}$.

Tempo (s)	Pressão (Pa)	Velocidade (m/s)	Viscosidade (Pa.s)
0,0
0,2
0,4
	Pressao (Pa)	Velocidade (m/s)	Viscosidade (Pa.s)

Fonte: Próprio autor.

6.1.2 Slump

Outro caso utilizado na validação da modelagem numérica consiste no caso de *slump*. Tal caso consiste no preenchimento de um corpo de cone de dimensões características (Figura 6.8) e material fluido e, posteriormente, remoção vertical da forma de maneira que o fluido possa escoar horizontalmente para todas as direções. Nesse ensaio é interessante analisar o diâmetro final alcançado pelo fluido previamente confinado no dispositivo. Como o teste é conduzido para fluidos de comportamento não-newtoniano que apresentam, no geral, uma tensão de cisalhamento inicial para escoar, que é uma característica dos fluidos de Bingham e de Herschel-Bulkley, temos que o escoamento do fluido se cessa a partir do momento em que a tensão cisalhante local seja menor que a tensão cisalhante inicial característica do fluido em questão (τ_0). Com relação a esse ensaio, baseia-se esse estudo no trabalho de Cremonesi et al. (2010).

Figura 6.8 - Geometria do teste de *slump*.

Fonte: Cremonesi et al. (2010).

No estudo conduzido, os parâmetros geométricos apresentados na figura acima são: $h = 300\text{mm}$, $b_1 = 100\text{mm}$ e $b_2 = 50\text{mm}$. Já os parâmetros de ordem reológicas são os mesmos conduzidos por Cremonesi et al. (2010), a fim de comparar adequadamente os resultados. Nesse estudo, o modelo reológico que melhor se adequa ao comportamento do fluido é o modelo de Bingham, cujas propriedades estão apresentadas na Tabela 6.5, sendo utilizado o modelo bilinear para representar o fluido.

Tabela 6.5 - Propriedades do fluido simulado.

τ_0 (Pa)	μ (Pa.s)	ρ (kg/m ³)
50	50	2200

Fonte: Cremonesi et al. (2010).

Para o estudo de convergência desse problema, consideram-se três diferentes resoluções do reticulado, onde a resolução em questão é definida pela relação: b_2/l_0 , com b_2 sendo ilustrado na Figura 6.8 e l_0 referenciando a distância entre partículas da discretização do

modelo. Assim, para esse teste temos as seguintes resoluções: 5, 10 e 12,5. O passo de tempo da simulação computacional é de 0,0001 segundo e a quantidade de partículas de cada caso estudado está apresentado na Tabela 6.6.

Tabela 6.6 - Quantidade de partículas de cada modelo.

Resolução (b_2/l_0)	Quantidade de Partículas
5	30203
10	141723
12,5	239691

O tempo total de processamento computacional para um tempo de simulação de 40 segundos é apresentado na Tabela 6.7.

Tabela 6.7 - Tempo de processamento dos modelos.

Resolução (b_2/l_0)	Tempo de processamento (horas)
5	24
10	133
12,5	143

Para o caso estudado, o diâmetro final do espalhamento é o parâmetro de interesse. Assim, na Figura 6.9a têm-se o comportamento do diâmetro final de espalhamento para as três diferentes resoluções, enquanto que, na Figura 6.9b, têm-se os resultados numéricos e experimental de Cremonesi et al. (2010).

Figura 6.9 - Diâmetro do espalhamento em função do tempo.

Fonte: Próprio autor.

Fonte: Cremonesi et al. (2010).

Analisando-se o resultado conduzido pelo método MPS (Figura 6.9a) tem-se que, quanto mais refinado for a resolução do problema, mais próximo são os valores finais do diâmetro dos valores obtidos por Cremonesi et al. (2010). Porém, como pode ser percebido, a evolução do escoamento conduzido no método MPS se dá de maneira diferente do apresentado por Cremonesi et al. (2010), onde a dispersão das partículas nos instantes iniciais do problema se dá em uma taxa mais elevada do que o apresentado pelo autor.

O diâmetro final do escoamento no MPS 3D, após totais 40 segundos de simulação, estão apresentados na Tabela 6.8 onde, também, é apresentado o erro percentual do método de partículas em relação ao método experimental conduzido pelo autor.

Tabela 6.8 - Diâmetro final da simulação e respectivo erro relativo.

Resolução (b_2/l_0)	Diâmetro MPS (m)	Erro (%)
5	0,511	14,03
10	0,583	1,91
12,5	0,613	3,13

Dos resultados desprendidos da tabela acima tem-se que, com um aumento da resolução b_2/l_0 de 5 para 10 houve uma redução significativa nos erros de 14,03% para menos de 2%. No entanto, com o aumento da resolução de 10 para 12,5 o erro nos resultados permaneceu praticamente a mesma, por volta de 2 a 3%. Tais erros, embora relativamente pequenos, reflete também a dificuldade em se estimar o momento em que o escoamento de um fluido não newtoniano que apresente uma tensão inicial (τ_0) deva parar devido às baixas tensões cisalhantes no interior do mesmo. Isso ocorre pela singularidade que esses modelos apresentam de possuir uma tensão infinita para uma taxa de deformação nula o que, computacionalmente, se torna difícil de representar.

Além da variação do diâmetro de espalhamento do fluido, é comum se avaliar o abatimento do fluido (abatimento do tronco de cone), conforme apresentado na Figura 6.10. Pela figura temos que, quanto maior for a resolução, maior é o abatimento do fluido, ou seja, menor é a altura final do fluido ao final do escoamento

Fonte: Próprio autor.

Por fim, a Figura 6.11 ilustra o comportamento do ensaio de *slump* ao longo do tempo considerando os campos de pressão, velocidade e viscosidade do fluido. Na Figura 6.11 são apresentados os resultados para as melhores resoluções do problema, isto é, uma resolução de $b_2/l_0 = 12,5$ e para três diferentes instantes de tempo: 0 segundo, 0,2 segundos e 40 segundos.

Figura 6.11- Campos de pressão, velocidade e viscosidade do fluido 3D para $b_2/l_0 = 12.5$.

Fonte: Próprio autor.

6.2 Força de Arrasto Viscosa em Fluidos Newtonianos

Para o estudo da força de arrasto viscoso em fluidos newtonianos, foram simulados o escoamento de *Poiseuille* em 2 e 3 dimensões e o escoamento de *Taylor-Couette*.

6.2.1 Escoamento de *Poiseuille* em 2D

O Escoamento de *Poiseuille* em 2D consiste no escoamento de um fluido confinado por duas placas infinitas, paralelas e fixas, onde, para esse caso estudado, uma aceleração, na direção paralela as placas, é imposta ao fluido, acelerando-o, e a variação de pressão ao longo do escoamento é desconsiderada.

As equações aqui utilizadas estão explanadas no Capítulo A1 do Anexo A.

A geometria da simulação é: altura (H) igual a 0,2m e comprimento (L) igual a 0,5m, conforme a Figura 6.12 a seguir.

Figura 6.12 - Dimensão do problema utilizado no ensaio de *Poiseuille* em 2D.

Fonte: Próprio autor.

Impõem-se uma condição de periodicidade nas entradas e saídas do escoamento, de maneira que as partículas que alcançam o fim do percurso de 0,5m retornam ao início do mesmo, mantendo-se o fluido sempre em circulação. Impõem-se, também, a condição de aderência nas paredes presentes no modelo a fim de refletir a condição de aderência das partículas de fluido às partículas de parede de velocidade nula.

O fluido que escoa por dentro do tubo é a glicerina, cujas propriedades físicas são (Segur e Oberstar (1951)): densidade (ρ) 1260kg/m³ e viscosidade dinâmica (μ) 1,412 Pa.s.

Foram estudadas três diferentes resoluções: 20, 40 e 100, onde, para esse problema, a resolução é definida como a relação entre a altura do tubo e a distância entre as partículas do modelo, ou seja, H/l_0 .

Além disso, para cada resolução, impôs-se sete diferentes campos de aceleração (a_x) na direção do escoamento: 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 2,0; 5,0 e 10,0 m/s².

O fluido inicia o movimento no repouso e há apenas a imposição da aceleração constante na direção do escoamento durante todo o período do escoamento.

As quantidades de partículas no reticulado, para cada uma das diferentes resoluções, são apresentadas na Tabela 6.9.

Tabela 6.9 - Quantidade de partículas dos modelos.

Resolução (H/l_0)	Quantidade de partículas
20	1275
40	4545
100	26355

O tempo total de simulação foi de 20 segundos e o passo de tempo diminuiu conforme se aumentava a aceleração e a resolução, conforme representado na Tabela 6.10.

Tabela 6.10 - Passo de tempo de cada simulação.

Resolução (H/l_0)	Aceleração (a_x) (m/s^2)						
	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	10,0
20	0,002s	0,001s	0,0005s	0,00025s	0,0001s	5e-5s	1e-5s
40	0,001s	0,0005s	0,0002s	0,0001s	5e-5s	2e-5s	1e-5s
100	0,0005s	0,00025s	0,0001s	5e-5s	2,5e-5s	1e-5s	5e-6s

Para se determinar o perfil de velocidades do escoamento, procedeu-se da seguinte maneira: subdividiu-se verticalmente o escoamento em segmentos de mesma largura e calculou-se a média das velocidades das partículas em cada segmento, gerando, para cada segmento, um par ordenado que relaciona a posição vertical do escoamento e a velocidade média das partículas daquele segmento. A quantidade de divisões verticais é igual ao valor da resolução (H/l_0) de cada caso. Esses pares ordenados são, então, interpolados por uma curva polinomial do segundo grau.

O perfil de velocidades analítico é obtido por meio da Equação (A.12).

Na Tabela 6.11 estão apresentados os perfis de velocidades obtidos para três diferentes acelerações, sendo apresentado os resultados para as três diferentes resoluções simuladas, bem como o perfil analítico esperado.

Tabela 6.11 - Perfil de Velocidades para as três resoluções simuladas e para três diferentes acelerações.

Fonte: Próprio autor.

Analisando os resultados apresentados na Tabela 6.11, têm-se que os resultados numéricos estão convergindo para o valor analítico esperado. É possível notar que, para baixas acelerações, o resultado converge já para as menores resoluções, porém, a medida que a aceleração aumenta, faz-se necessário uma maior resolução para que a resposta numérica se aproxime do valor esperado analiticamente e, para as resoluções estudadas, o valor numérico não atinge o valor esperado analiticamente para as maiores acelerações.

Na Tabela 6.12 são apresentados a variação temporal da taxa de deformação média nas partículas de parede (segunda coluna) e a variação temporal da força cisalhante por unidade de comprimento nas mesmas partículas (terceira coluna), obtidos por meio da modelagem numérica proposta, para três diferentes acelerações. As respostas obtidas para as três resoluções simuladas são mostradas, bem como o valor analítico esperado quando o escoamento atinge o regime permanente (reta horizontal). O valor analítico para a taxa de deformação é dado por meio da Equação (A.21) e para a força por unidade de comprimento é dado por meio da Equação (A.25).

Tabela 6.12 - Taxa de deformação para as três resoluções simuladas e para três diferentes acelerações.

Aceleração (a_x) (m/s ²)	Taxa de deformação (s ⁻¹)	Força por unidade de comprimento (N/m)
0,1		
1,0		
5,0		

Fonte: Próprio autor.

Pelos resultados demonstrados na Tabela 6.12 temos que o resultado numérico converge para o valor esperado analiticamente, sendo que, quanto maior a aceleração, mais refinado faz se necessário ser o reticulado. É interessante notar que, embora o perfil de velocidades não atinge o valor esperado analiticamente para as maiores acelerações (ver Tabela 6.11), para a taxa de deformação o valor analítico é alcançado. Isso se dá, pois, a taxa de deformação é calculada avaliando o perfil de velocidades próximo à parede. E, nessa região, o perfil de velocidades é bem próximo ao valor analítico para a maior resolução, divergindo ao se afastar da mesma.

O erro entre a taxa de deformação calculada pelo método proposto e o esperado analiticamente, para as diferentes resoluções e diferentes acelerações, é ilustrado na Figura 6.13.

Figura 6.13 - Erro entre a taxa de deformação obtida e a esperada analiticamente.

Fonte: Próprio autor.

Analisando-se os resultados temos que quanto maior a aceleração imposta ao escoamento, maior é o erro obtido no cálculo da taxa de deformação do sólido. Portanto, faz se necessário uma maior resolução do reticulado para tentar minimizar esses erros.

Comparando-se as diferentes resoluções tem-se que o aumento da resolução do problema leva a uma redução dos erros das grandezas avaliadas, que são o perfil de velocidades, a taxa de deformação e a força cisalhante, observando-se uma convergência para a resolução (H/l_0) igual a 100, apresentando resultados muito próximos dos valores analíticos, com erros menores do que 5% (exceto para a maior aceleração simulada ($10,0\text{m/s}^2$) que apresentou um erro de 12,8%).

6.2.2 Escoamento de *Poiseuille* em 3D

Para o escoamento de *Poiseuille* em 3D utilizamos o caso do escoamento dentro de um tubo cilíndrico com uma aceleração imposta na direção do escoamento, acelerando o fluido. Nesse estudo, como no anterior, a variação de pressão ao longo do escoamento é desconsiderada.

As equações aqui utilizadas estão explanadas no Capítulo A2 do Anexo A.

A geometria da simulação é: diâmetro (D) igual a 0,2m e comprimento (L) igual a 0,5m, conforme a Figura 6.14, a seguir.

Figura 6.14 - Dimensão do problema utilizado no ensaio de *Poiseuille* em 3D.

Fonte: Próprio autor.

O fluido é o mesmo da simulação anterior, ou seja, a glicerina. As condições iniciais e de contorno são equivalentes ao caso 2D, isto é: o fluido inicia o movimento no repouso, sendo imposto uma aceleração na direção do escoamento (ao longo do comprimento do tubo) e desconsiderando a aceleração da gravidade. É imposta condição de periodicidade nas entradas e saídas da seção tubular, de maneira que as partículas que alcançam o fim do percurso retornam ao início do mesmo. E impõem-se a condição de aderência nas paredes presentes no modelo a fim de obter uma melhor resposta do perfil de velocidades.

Duas diferentes resoluções foram simuladas: 20 e 40, onde a resolução é definida como a relação entre o diâmetro do tubo e a distância entre as partículas do modelo, ou seja, D/l_0 .

Manteve-se os mesmos sete campos de aceleração (a_z) na direção do escoamento: 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 2,0; 5,0 e 10,0 m/s^2 .

As quantidades de partículas no reticulado, para cada uma das diferentes resoluções, são apresentadas na Tabela 6.13.

Tabela 6.13 - Quantidade de partículas dos modelos.

Resolução (D/l_0)	Quantidade de partículas
20	28407
40	172205

O tempo total de simulação se manteve em 20 segundos e o passo de tempo é dado pela Tabela 6.14.

Tabela 6.14 - Passo de tempo de cada simulação.

Resolução (D/l_0)	Aceleração (a_z) (m/s^2)						
	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	10,0
20	0,002s	0,001s	0,0005s	0,00025s	0,0001s	5e-5s	1e-5s
40	0,001s	0,0005s	0,0002s	0,0001s	5e-5s	2e-5s	1e-5s

O perfil de velocidades analítico para o caso em 3D é obtido por meio da Equação (A.41).

Na Tabela 6.15 estão apresentados os perfis de velocidades obtidos por meio da simulação para três diferentes acelerações, sendo mostrado as duas resoluções simuladas e o perfil analítico esperado.

Na Tabela 6.16 são apresentadas a variação temporal da taxa de deformação média nas partículas de parede (segunda coluna) e a variação temporal da força cisalhante nas mesmas partículas (terceira coluna), para três diferentes acelerações. As respostas obtidas para as duas resoluções simuladas são mostradas, bem como o valor analítico esperado quando o escoamento atinge o regime permanente (reta horizontal). O valor analítico para a taxa de deformação é dado por meio da Equação (A.52) e para a força cisalhante é dado pela Equação (A.56).

Tabela 6.15 - Perfil de velocidades para as duas resoluções estudadas e três diferentes

Fonte: Próprio autor.

Tabela 6.16 - Taxa de deformação para as três resoluções simuladas e para três diferentes acelerações.

Aceleração (a_x) (m/s ²)	Taxa de deformação (s ⁻¹)	Força (N)
0,1
1,0
5,0

Fonte: Próprio autor.

O erro obtido para a simulação em 3D estão apresentados na Tabela 6.17, para a taxa de deformação, e na Tabela 6.18, para a força cisalhante na parede.

Tabela 6.17 - Erro relativo entre a taxa de deformação calculada pelo método proposto e o esperado analiticamente.

Resolução (D/l_0)	Aceleração (a_x) (m/s ²)						
	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	10,0
20	20,78%	20,68%	20,74%	20,71%	20,67%	20,66%	21,26%
40	23,21%	23,23%	23,22%	23,42%	23,21%	23,31%	23,89%

Tabela 6.18 - Erro relativo entre a força calculada pelo método proposto e o esperado analiticamente.

Resolução (D/l_0)	Aceleração (a_x) (m/s ²)						
	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	10,0
20	1,98%	3,96%	2,93%	2,97%	3,02%	3,03%	2,24%
40	1,25%	1,28%	1,27%	1,52%	1,25%	1,38%	1,84%

Pelas Tabela 6.17 e Tabela 6.18 têm-se que, para o caso 3D, o erro dos parâmetros calculados independe da aceleração imposta ao escoamento.

Outra relação interessante é o erro da taxa de deformação na parede ser bem mais elevado que o erro associado a força, diferença essa que não ocorre para o caso de 2D.

Essa variação para o caso em 3D ocorre devido à disposição das partículas no reticulado, conforme ilustrado na Figura 6.15. Nessa figura pode se notar que localmente há partículas de parede que ficam mais internas à circunferência, estando essas em contato com mais partículas de fluido e calculando com uma melhor precisão a taxa de deformação na parede devido ao escoamento. Porém, há partículas de parede que se encontram mais externas à parede, essas partículas se fazem necessárias para evitar que o fluido escape por entre as partículas de parede, mas, por estarem mais externa, elas vão apresentar, no cálculo da tensão cisalhante, uma distância para as partículas de fluido maior que as partículas de parede mais internas, conforme representado na Figura 6.15. Assim, para essas partículas mais externas, ao se calcular a taxa de deformação por meio da equação (5.6) teremos, devido a maior distância dessas partículas às partículas de fluido, um menor valor da relação $\partial \vec{u} / \partial \vec{n}$. Assim, ao se calcular a taxa de deformação média por meio de todas as partículas de parede, têm-se, devido a esse valor inferior aferido às partículas de parede mais externas, uma taxa de deformação média menor, o que reflete no maior erro relativo apresentado por esse parâmetro, conforme a Figura 6.15.

Porém, esse erro relativo local é minimizado ao se determinar a força na parede, que é calculada por meio da integral do produto da taxa de deformação pela viscosidade do fluido e pela área, como pode ser visto na Tabela 6.18.

Figura 6.15 - Disposição das partículas de parede no reticulado em uma seção transversal para as duas diferentes resoluções e para o caso de aceleração de $5,0\text{m/s}^2$ quando alcançado o regime permanente.

Fonte: Próprio autor.

6.2.3 Escoamento de *Taylor-Couette* em 2D

Considere, agora, o escoamento entre dois cilindros concêntricos em 2D, também conhecido como escoamento de *Taylor-Couette*. Para o caso estudado, o cilindro interno é rotacionada a uma velocidade ω constante e o cilindro externo é mantido fixo. As equações aqui utilizadas estão explanadas no Capítulo A3 do Anexo A.

A geometria da simulação é: diâmetro interno (D_{int}) igual a 0,1m e diâmetro externo (D_{ext}) igual a 0,25m, conforme ilustrado na Figura 6.16. O fluido permanece sendo a glicerina.

Nesse caso, nenhum campo de aceleração externo é imposto ao fluido, sendo imposto apenas a rotação ao cilindro interno. A velocidade do fluido, no início da simulação, é nula e é utilizada a condição de contorno de aderência nas paredes.

Três diferentes resoluções foram simuladas: 15; 37,5 e 75, onde a resolução é definida como a relação entre as diferenças entre os raios dos cilindros e a distância entre as partículas do modelo, ou seja, $(R_{ext} - R_{int})/l_0$.

Para cada resolução, simulou-se quatro diferentes velocidades angular do cilindro interno: 5; 10; 20 e 50 rad/s.

Figura 6.16 - Geometria para o escoamento entre dois cilindros concêntricos.

Fonte: Próprio autor.

As quantidades de partículas no reticulado, para cada uma das diferentes resoluções, são apresentadas na Tabela 6.19.

Tabela 6.19 - Quantidade de partículas dos modelos.

Resolução $\left(\frac{R_{ext}-R_{int}}{l_0}\right)$	Quantidade de partículas
15	2376
37,5	4545
75	26355

O tempo de simulação foi de 20 segundos.

O perfil de velocidades obtido para a velocidade angular do cilindro interno de 10 rad/s está apresentado na Figura 6.17, enquanto que para a velocidade de 50 rad/s está apresentado Figura 6.18. O perfil analítico é dado pela Equação (A.67).

Figura 6.17 - Perfil de velocidades para $\omega = 10$ (rad/s).

Fonte: Próprio autor.

Figura 6.18 - Perfil de velocidades para $\omega = 50$ (rad/s).

Fonte: Próprio autor.

Percebe-se que, para a maior velocidade angular do cilindro interno, há um amortecimento numérico no cálculo do perfil de velocidades, destoando do esperado analiticamente. Tal disparidade entre a curva calculada e a real acarreta numa má avaliação da taxa de deformação das partículas de parede.

A taxa de deformação média das partículas de parede do cilindro interno estão apresentadas na Figura 6.19, enquanto que para a parede externa estão apresentadas na Figura 6.20 para as três resoluções e para o valor esperado analiticamente (Equação (A.71)).

Figura 6.19 - Taxa de deformação nos cilindros interno.

Fonte: Próprio autor.

Figura 6.20 - Taxa de deformação nos cilindros externo.

Fonte: Próprio autor.

Para as baixas rotações, onde há boa aderência entre o perfil de velocidades obtido numericamente e o perfil analítico, a taxa de deformação tanto para o cilindro interno quanto para o cilindro externo apresentou boa correlação entre o calculado e o esperado analiticamente, independente da resolução adotada.

Para as altas rotações do cilindro interno, onde ocorre um amortecimento numérico no cálculo do perfil de velocidades, decorre-se duas consequências: nas partículas da parede do cilindro interno, a variação de velocidades calculada tende a ser maior do que o esperado, levando a uma superestimação da taxa de deformação nessas partículas; enquanto que, nas partículas da parede do cilindro externo, essa variação acaba sendo menor do que o esperado, levando a um cálculo subestimado da taxa de deformação nessas partículas, conforme pode ser visto nas Figura 6.19 e Figura 6.20.

6.3 Força de Arrasto Viscosa em Fluidos Não-Newtonianos

A implementação do cálculo da força de arrasto viscosa para fluidos não-newtonianos foi estudada através da simulação do escoamento de *Poiseuille* em 2D para um fluido Binghamiano.

Manteve-se as mesmas dimensões apresentadas na, com o fluido apresentando as propriedades de tensão de escoamento (τ_0) 15Pa, viscosidade plástica (μ_p) 50Pa.s e massa

específica 2200kg/m^3 , conforme o modelo reológico apresentado na Equação (3.6), sendo utilizado o modelo de Papanastacios para representar o fluido.

As mesmas condições consideradas para o estudo de escoamento de *Poiseuille* 2D com fluido newtoniano são utilizadas para o caso de fluido não-newtoniano.

Três diferentes resoluções (D/l_0) foram estudadas: 20, 40 e 100; e 5 diferentes acelerações foram impostas ao fluido: 0,5; 1,0; 2,0; 5,0 e $10,0\text{ m/s}^2$.

A Figura 6.21 representa o perfil de velocidades obtido pela simulação e o perfil analítico para o plástico de Bingham, dado pela Equação (A.80).

Fonte: Próprio autor.

Os erros relativos obtidos na simulação para cada caso estão sintetizados na Figura 6.22.

Figura 6.22 - Erro entre a taxa de deformação obtida e a esperada analiticamente.

Fonte: Próprio autor.

Analisando os resultados apresentados, tem-se uma ótima correlação entre os valores esperados e os resultados obtidos pelo cálculo proposto, o que valida, a priori, o método para o escoamento de um fluido Binghamiano.

7 Estaca Torpedo

Como uma aplicação do escoamento de fluidos não-newtonianos e de cálculo da tensão cisalhante em sólidos dentro do escoamento, foi considerado o fenômeno de penetração e cravação de estacas torpedos em solos marinhos.

O solo marinho foi modelado como um fluido de Bingham, com massa específica de 2200kg/m^3 , baseado no trabalho de Melo (2013). Já os parâmetros de tensão de cisalhamento e viscosidade plástica precisaram ser estimados. O trabalho de Melo estimou esses valores para lamas de regiões serranas do Rio de Janeiro, mas esses valores não são representativos das características dos solos marinhos, uma vez que estes são mais compactos. Além disso, outra dificuldade é que, conforme a estaca vai penetrando no solo marinho, as propriedades reológicas do solo variam, se tornando mais denso e compacto. Porém, no algoritmo do MPS, os fluidos são definidos e simulados como homogêneos, o que dificulta uma caracterização mais fidedigna da realidade. Posto isto, definiu-se, portanto, as propriedades reológicas como sendo: $\tau_0 = 300\text{Pa}$ e $\mu_p = 50\text{Pa}\cdot\text{s}$, sendo utilizado a modelagem de Papanastaciou.

Foi estudado o comportamento da estaca em um reticulado 3D, a dimensão da estaca são: uma altura de 4,0m, um diâmetro de 0,8m e uma massa de 15000kg, conforme Figura 7.1. A estaca inicia seu movimento logo acima do solo, com uma velocidade perpendicular e para baixo de 5m/s. Por simplicidade a água do mar não foi considerada na simulação.

Figura 7.1 - Dimensões da estaca torpedo.

Fonte: Próprio autor.

O solo marítimo ficou confinado em um tanque cilíndrico de 16m de altura e duas diferentes medidas de diâmetro: 4,8m e 6,4m.

Dois diferentes resoluções foram utilizadas: 10 e 20. A resolução é definida como a relação entre o diâmetro da estaca e a distância entre partículas.

São feitas simulações considerando-se a força cisalhante no movimento da estaca e, também, sem considerar essa força no movimento, a fim de comparar os resultados.

Na Figura 7.2 são apresentadas algumas imagens da evolução da penetração da estaca para o tanque de diâmetro igual a 4,8m.

Figura 7.2 - Evolução da penetração da estaca.

Fonte: Próprio autor.

Percebe-se que a consideração da força cisalhante no movimento da estaca acarreta leva a uma menor profundidade da penetração da mesma dentro do solo se comparado ao caso sem a consideração da força. A Figura 7.3 ilustra a profundidade atingida pela estaca para os dois diferentes diâmetros dos tanques e para o caso com e sem força cisalhante.

A Figura 7.4 mostra a velocidade alcançada pela estaca para os dois diferentes diâmetros dos tanques e para o caso com e sem força cisalhante.

Figura 7.3 - Profundidade atingida pela estaca.

Fonte: Próprio autor.

Figura 7.4 - Velocidade da estaca.

Fonte: Próprio autor.

Dos resultados apresentados temos que o fenômeno simulado pode ser dividido em duas etapas:

1. uma primeira etapa onde ocorre o impacto contra o solo, nessa etapa as forças devido à componente normal são preponderantes e os resultados entre os casos com e sem força cisalhante são próximos;
2. e uma segunda etapa onde a estaca já está totalmente submersa, nessa etapa a força cisalhante faz com que a estaca penetre menos no solo e a velocidade de avanço da estaca se estabiliza.

O efeito de parede devido ao tanque de diâmetro finito é, em geral, pouco significativo.

A Figura 7.5 apresenta a força cisalhante na estaca.

Fonte: Próprio autor.

Na etapa inicial, quando a estaca está penetrando no solo, a força cisalhante aumenta quase linearmente até atingir um máximo. Posteriormente, quando a estaca já está totalmente dentro do solo, há uma suave e gradual redução dessa força devido à estabilização da velocidade da estaca.

8 Considerações Finais

O presente trabalho buscou desenvolver, aprimorar e validar as ferramentas de simulação numérica que permitissem avaliar e entender o fenômeno de penetração e cravação de estacas torpedos em solos marinhos. Foram assumidas as hipóteses de solo marinho como fluido Binghamiano e homogêneo, com propriedades reológicas estimadas a fim de tentar reproduzir as características do solo. Foi desconsiderado a presença da água do mar, simulando apenas a interação entre estaca e solo.

Dentre os tópicos abordados ao longo do estudo, destacam-se a validação do cálculo de escoamento de fluidos não-newtonianos e o desenvolvimento e validação de um método para o cálculo da tensão de cisalhamento em sólidos dentro do escoamento.

O estudo do comportamento de escoamentos de fluidos não-newtonianos mostrou uma boa correlação entre os resultados obtidos e as respostas analíticas esperadas, consolidando e validando o algoritmo de modelagem para esses fluidos. O que resulta em uma maior confiabilidade nos resultados obtidos para essas simulações.

No que tange o método de cálculo proposto no trabalho para se determinar a tensão de cisalhamento em sólidos, considerou-se que a taxa de deformação na superfície do sólido possa ser calculada por meio da taxa de variação das velocidades das partículas de fluido na direção normal à parede do sólido, assumindo a hipótese de que a variação da velocidade dessas partículas na direção tangencial da parede é muito menor se comparada a variação na direção normal. Para se estimar o valor da taxa de deformação, assumiu-se que o perfil de velocidades é uma função do segundo grau.

Por meio desses trabalhos preliminares conduzidos, foi possível estudar o fenômeno de penetração e cravação de estacas torpedo. Foi modelado o solo marinho como um fluido binghamiano e foi considerado as forças cisalhantes decorrentes da movimentação da estaca dentro do solo. Um estudo de caso em 3D foi conduzido. Dos resultados obtidos têm-se que a consideração das forças cisalhantes é impactante para a resposta do movimento, levando a uma menor penetração da estaca no solo e a estabilização da velocidade de penetração da estaca.

Algumas dificuldades encontradas nesse estudo foram a modelagem de uma coluna de solo marinho por um fluido não-newtoniano não homogêneo, sendo que para essas grandes distâncias percorridas pela estaca torpedo, as propriedades reológicas do solo não permanecem as mesmas.

8.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, destacam-se algumas sugestões para melhor reproduzir o fenômeno do impacto de estaca torpedo pelo método de partículas:

- Avaliação do solo marinho com propriedades reológicas que variam com a profundidade, permitindo representar um solo mais “mole” na superfície e mais compacto para maiores profundidades;
- Avaliar outras maneiras de modelar o solo diferentes da consideração do mesmo como fluido não-newtoniano;
- Avaliar o atraso numérico ocorrido no cálculo do perfil de velocidades para o escoamento de *Taylor-Couette*, um possível motivo para tal erro pode ser a condição de contorno de aderência, pois é essa a condição que permite ao fluido rotacionar junto com o cilindro interno;
- Aprimorar o método para o cálculo de perfil de velocidades considerando perfis que sejam diferentes de uma função do segundo grau com relação a normal;
- Colocar a presença da água do mar na simulação para avaliar o impacto na redução da velocidade.

Referências

- AGUIAR, C. S. Análise da Interação Solo-Estrutura de Âncoras do Tipo Torpedo para Plataformas Offshore. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2011.
- BEZERRA, C. M. N. Análise Numérica de Cravação de Estacas Torpedo Modeladas por Integral de Pressões. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2017.
- CARVALHO, H. JR.; CINTRA, D. T.; RAMOS, A. S. JR.; SILVEIRA, E. S. S.; LIRA, W. W. M.; LAGES, E. N.; RAMOS, V. C. L.; VIEIRA, L. C. L. M. Simulação do Lançamento e Cravação de Estacas Torpedo em Solo Marinho com a Utilização do Método dos Elementos Discretos. In *Proceedings of the XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2005.
- CHEN, X.; XI, G.; SUN, Z.-G. Improving Stability of MPS Method by a Computational Scheme Based on Conceptual Particles. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014.
- CHENG, L.-Y. Evaluation of Water Impact Load by Numerical Simulation and Its Application to Ship Design. Tese de Doutorado. Yokohama National University, 1995.
- CREMONESI, M.; FERRARA, L.; FRANGI, A.; PEREGO, U. Simulation of the flow of fresh cement suspensions by a Lagrangian finite element approach. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 165, n. 23-24, pp. 1555–1563, 2010.
- FERNANDES, D. T. Implementação de framework computacional de paralelização híbrida do Moving Particle Semi-Implicit Method para modelagem de fluídos incompressíveis. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, 2013.
- GINGOLD, R.; MONAGHAN, J. J. Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-Spherical Stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, pp. 375-389, 1977.

GONZALEZ, J. R. P.; SILVA, C. E.; GUEVARA, N. O.; ALVES, J. L. D. Simulação de Interação Solo-Estrutura, Estudo de caso: Estaca Torpedo. 5ª Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás, 2009.

HARLOW, F. H.; WELCH, J. E. Numerical Calculation of Time-dependent viscous incompressible Flow of Fluid with Free Surface. *Physics of Fluids*, v.8, n.12, pp. 2182-2189, 1965.

KOSHIZUKA, S.; OKA Y. Development of a 3D Scheme Using Moving Particles Semi-Implicit for Thermal Hydraulics. S.I., American Society of Mechanical Engineering, 1998.

KOSHIZUKA, S.; OKA, Y. Moving Particle Semi-implicit Method for Fragmentation of Incompressible Fluid. *Nuclear Science and Engineering*, Volume 123, pp. 421-434, 1996.

KOSHIZUKA, S.; OKA, Y. A Particle Method for Complex Fluid Dynamics with Interfaces. Tokyo, The Japan Society of Mechanical Engineers, 1997.

KOSHIZUKA, S.; TAMAKO, H.; OKA, Y. A Particle Method for Incompressible Viscous Flow with Fluid Fragmentation. *Journal of Computational Fluid Dynamics*, pp. 29-46, 1995.

KUNITAKI, D. M. K. N. Tratamento de Incertezas no Comportamento Dinâmico de Estacas Torpedo para Ancoragem de Sistemas Flutuantes na Exploração de Petróleo Offshore. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2006.

LACEO-COPPE/UFRJ. Disponível em <<http://www.laceo.coppe.ufrj.br/>>. Acesso em 05/05/2016.

LEITE, L. O. B. Determinação física e numérica de corridas de lama resultantes de ruptura de barreira retendo material viscoplástico. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista, 2009.

MATA, M. S.; MOTEZUKI, F. K.; CHENG, L.-Y.; KUROKAWA, F.A. Modelagem Numérica para Fluidos Não Newtonianos Utilizando o Modelo Bingham-Papanastasiou e o

Método Moving Particle Semi-implicit (MPS) In *Proceedings of the XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2017.

MELO, D. F. M.; Comportamento Reológico de Solos Sujeitos a Corridas de Lama por Liquefação Estática. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo, 2013.

MIYAGI, C. H. Desenvolvimento de um Aparato Experimental para Estudo do Impacto Hidrodinâmico Bidimensional. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo, 2003.

MONAGHAN, J. J.; GINGOLD, R. Shock Simulation by the Particle Method SPH. *Journal of Computational Physics*, pp. 374-389, 1983.

MOTUZUKI, F. K.; RIBEIRO, G. H. S.; KUROKAWA, F. A.; CHENG, L.-Y. Modelagem do Escoamento Tridimensional do Concreto Fresco Utilizando o Método Moving Particle Semi-Implicit. In *Proceedings of the XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2015.

PAPANASTASIOU, T.C. Flows of material with yield. *Journal of Rheology*, vol. 31, pp. 385-404. 1987

PEREIRA, D. S.; MELO, P. S. S.; KUROKAWA, F. A.; CHENG, L.-Y. Uma modelagem numérica do escoamento do concreto fresco baseado no método Moving Particle Semi-implicit (MPS). In *Proceedings of the XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2013.

RHEOLOGY. Em Wikipedia: The Free Enciclopedia. Disponível em <<https://en.wikipedia.org/wiki/Rheology>>. Acesso em 05/05/2016.

SEGUR, J. B.; OBERSTAR, H. E. (1951). "Viscosity of Glycerol and Its Aqueous Solutions". *Industrial & Engineering Chemistry*. 43 (9): 2117–2120. doi:10.1021/ie50501a040.

SHAKIBAEINIA, A.; JIN, Y.-C. Lagrangian Multiphase Modeling of Sand Discharge Into Still Water. *Advances in Water Resources*, 2012.

SHIBATA, K.; MASAIE, I.; KONDO, M.; MUROTANI, K.; KOSHIZUKA, S. Improved Pressure Calculation for the Moving Particle Semi-implicit Method. Computational Particle Mechanics, 2015.

SOUZA, M. A. JR. Estudo Hidrodinâmico da Estaca Torpedo Através do Software Ansys CFX. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Pernambuco, 2011.

TANAKA, M; MASUNAGA, T.; NAKAGAWA, Y. Multi-resolution MPS Method. Japan Society for Computational Engineering and Science, 2009.

TSUKAMOTO, M. M.; CHENG, L.-Y.; MOTEZUKI, F. K. Fluid Interface detection technique based on neighborhood particles centroid deviations (NPCD) for particle methods. International Journal for Numerical Methods in Fluids, v. 1, 2016.

Anexo A

Esse anexo visa elucidar as equações de movimento utilizadas no capítulo 6.2, sendo apresentadas as equações para o escoamento de *Poiseuille* em 2 e 3 dimensões e o escoamento entre dois cilindros concêntricos (similar ao ensaio de viscosímetro). Parte-se, para desenvolver essas equações, da equação geral de Navier-Stokes para fluidos newtonianos incompressíveis, representada na Equação (A.1).

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}. \quad (\text{A.1})$$

A.1 Escoamento de *Poiseuille* em 2D

Considere o escoamento de um fluido newtoniano entre duas placas paralelas e fixas distanciando $2h$ entre si, conforme apresentado na Figura A.1.

Figura A.1 – Escoamento de *Poiseuille* em 2-dimensões.

Fonte: Próprio autor.

A.1.1 Equações de Movimento

Para esse escoamento, é interessante utilizar-se das equações de Navier-Stokes em coordenadas cartesianas (x, y, z) , com o vetor campo de velocidades representado por $\vec{V} = (u, v, w)$, assim, a Equação (A.1) resume-se a:

Na coordenada x :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho a_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right). \quad (\text{A.2})$$

Na coordenada y :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho a_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right). \quad (\text{A.3})$$

Na coordenada z :

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho a_z + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (\text{A.4})$$

Como estamos estudando um caso em 2-dimensões, a equação e as variáveis associada à coordenada z são descartadas. Assim, as equações de Navier-Stokes em coordenadas cartesianas em 2-dimensões resultam:

Na coordenada x :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho a_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (\text{A.5})$$

Na coordenada y :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho a_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (\text{A.6})$$

Assim, para o escoamento ilustrado na Figura A.1, as hipóteses adotadas são: velocidade $u = u(y)$, velocidade $v = 0$, variação de pressão nula, regime permanente e campo de aceleração atuando apenas na direção do escoamento, ou seja, $\vec{g} = (a_x, 0)$. O que resume a Equação (A.6) a ser identicamente nula e reduz a Equação (A.5) a:

$$\rho a_x + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 . \quad (\text{A.7})$$

Rearranjando os termos temos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\mu} a_x . \quad (\text{A.8})$$

O que resulta em:

$$u(y) = -\frac{\rho a_x}{\mu} y^2 + C_1 y + C_2 , \quad (\text{A.9})$$

onde C_1 e C_2 são as constantes de integração, dadas pelas condições de contorno que, para o caso do problema, são:

$$u(y) = 0 \text{ para } y = \pm h . \quad (\text{A.10})$$

O que resulta nas constantes de integração iguais a:

$$C_1 = 0 \text{ e } C_2 = \frac{\rho a_x h^2}{2\mu} . \quad (\text{A.11})$$

E, por fim, temos que o perfil de velocidades para o escoamento de *Poiseuille* em 2-dimensões é representado por:

$$u(y) = \frac{\rho a_x h^2}{2\mu} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) . \quad (\text{A.12})$$

A velocidade máxima que esse escoamento assume se dá para $y = 0$:

$$V_{\text{máx}} = \frac{\rho a_x h^2}{2\mu} . \quad (\text{A.13})$$

A vazão em volume por unidade de comprimento é dada por:

$$\dot{q} = \int u(y) dy . \quad (\text{A.14})$$

Substituindo a Equação (A.12) em (A.14), temos que:

$$\dot{q} = \int_{-h}^h \frac{\rho a_x h^2}{2\mu} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) dy, \quad (\text{A.15})$$

o que resulta em:

$$\dot{q} = \frac{2\rho a_x h^3}{3\mu}. \quad (\text{A.16})$$

Por fim, a velocidade média do escoamento é dada por:

$$V_{méd} = \frac{\dot{q}}{2h} = \frac{\rho a_x h^2}{3\mu} = \frac{2}{3} V_{máx}. \quad (\text{A.17})$$

A.1.2 Tensões e Forças Cisalhantes

O campo de tensões cisalhantes em coordenadas cartesianas para um escoamento em 2-dimensões é definido por:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (\text{A.18})$$

Como v é nulo, temos que:

$$\tau_{xy} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (\text{A.19})$$

que é equivalente à Equação (5.1) e, onde $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ representa a taxa de deformação que, para esse caso estudado, vale (considerando-se o perfil de velocidades dado pela Equação (A.12)):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\rho a_x y}{\mu}. \quad (\text{A.20})$$

E, na superfície da parede ($y = h$), apresenta o valor de:

$$\dot{\gamma}_{xy_parede} = \frac{\rho a_x h}{\mu}. \quad (\text{A.21})$$

Assim, substituindo (A.20) em (A.19), temos que a tensão cisalhante no fluido é dada por:

$$\tau_{xy} = -\rho a_x y, \quad (\text{A.22})$$

onde o sinal negativo representa que a tensão está na direção contrária ao do escoamento (direção da aceleração a_x).

A tensão cisalhante resultante na superfície da parede ($y = h$) fica dada por:

$$\tau_{xy_parede} = -\rho a_x h. \quad (\text{A.23})$$

E, por fim, podemos determinar a força cisalhante na parede pela integral da tensão cisalhante na área:

$$F_{parede} = \int \tau_{xy_parede} dA. \quad (\text{A.24})$$

Para o caso em questão, considerando um comprimento L de canal e o problema como sendo de duas dimensões, teremos que a força por unidade de comprimento, considerando-se as duas paredes, fica dada por:

$$F_{parede} = -2\rho a_x hL. \quad (\text{A.25})$$

Essa mesma expressão da força nas paredes também pode ser obtida por meio da somatória de forças no sistema na direção da coordenada x , onde a força de resistência na parede mais a força para acelerar o fluido devem ser nulas, conforme:

$$F_{parede} + \text{densidade} \cdot \text{volume} \cdot \text{aceleração} = 0, \quad (\text{A.26})$$

$$F_{parede} = -\rho \cdot 2hL \cdot a_x. \quad (\text{A.27})$$

Que é igual a expressão obtida anteriormente (Equação (A.25)).

A.2 Escoamento de *Poiseuille* em 3D

Considere, agora, o escoamento de um fluido newtoniano dentro de um tubo de raio R , conforme apresentado na Figura A.2.

Figura A.2 – Escoamento de *Poiseuille* em 3-dimensões.

Fonte: Próprio autor.

A.2.1 Equações de Movimento

Já, para esse escoamento, é interessante utilizar-se das equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , com o vetor campo de velocidades representado por $\vec{V} = (u_r, u_\theta, u_z)$, assim, para esse caso, a Equação (A.1) resume-se a:

Na coordenada r :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho a_r + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Na coordenada θ :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho a_\theta + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Na coordenada z :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho a_z + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Para esse escoamento, as hipóteses adotadas são: velocidade $u_r = 0$, velocidade $u_\theta = 0$, velocidade $u_z = u_z(r)$, variação de pressão nula, regime permanente e campo de aceleração atuando apenas na direção do escoamento, ou seja, $\vec{g} = (0, 0, a_z)$. O que resume as Equação (A.28) e Equação (A.29) a serem identicamente nulas e reduz a Equação (A.30) a:

$$\rho a_z + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right) = 0. \quad (\text{A.31})$$

Rearranjando os termos, temos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\mu} a_z. \quad (\text{A.32})$$

O que resulta em:

$$u_z(r) = -\frac{\rho a_z}{4\mu} r^2 + C_1 \ln|r| + C_2. \quad (\text{A.33})$$

A primeira condição de contorno necessária para se determinar as constantes C_1 e C_2 , é:

$$u_z(r) = 0 \quad \text{para } r = R. \quad (\text{A.34})$$

A segunda condição para esse caso é obtida por meio da equação da tensão cisalhante entre as coordenadas r e z (dada pela Equação (A.49)):

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = -\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right). \quad (\text{A.35})$$

Como $u_r = 0$, temos:

$$\tau_{rz} = -\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \quad (\text{A.36})$$

Substituindo (A.33) em (A.36), temos:

$$\tau_{rz}(r) = -\mu \left(-\frac{\rho a_z}{2\mu} r + \frac{C_1}{r} \right). \quad (\text{A.37})$$

E usando-se da condição de contorno:

$$\tau_{rz}(r) = 0 \quad \text{para } r = 0. \quad (\text{A.38})$$

Essa condição só é possível de ser satisfeita se C_1 for identicamente nulo:

$$C_1 = 0. \quad (\text{A.39})$$

Assim, utilizando a primeira condição de contorno, representada pela Equação (A.34), e considerando a constante C_1 nula, tem-se que:

$$C_2 = \frac{\rho a_z R^2}{4\mu}. \quad (\text{A.40})$$

O que leva a Equação (A.33) a assumir a forma:

$$u_z = \frac{\rho a_z R^2}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (\text{A.41})$$

onde a velocidade máxima para esse escoamento, que ocorre na posição $r = 0$, vale:

$$V_{\text{máx}} = \frac{\rho a_z R^2}{4\mu}. \quad (\text{A.42})$$

A vazão em volume é dada por:

$$\dot{q} = \iint u_z dA. \quad (\text{A.43})$$

Substituindo a Equação (A.41) em (A.43), temos:

$$\dot{q} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho a_z R^2}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr d\theta. \quad (\text{A.44})$$

O que resulta em:

$$\dot{q} = \frac{\rho a_z \pi R^4}{8\mu}. \quad (\text{A.45})$$

Com a velocidade média sendo dada por:

$$V_{med} = \frac{\dot{q}}{A} = \frac{\rho a_z R^2}{8\mu} = \frac{V_{m\acute{a}x}}{2}. \quad (\text{A.46})$$

A.2.2 Tensões e Forças Cisalhantes

O campo de tensões cisalhantes em coordenadas cilíndricas para um escoamento em 3-dimensões é definido por:

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right), \quad (\text{A.47})$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), \quad (\text{A.48})$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = -\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right). \quad (\text{A.49})$$

Considerando as hipóteses já elencadas, tem-se que há apenas tensões cisalhantes entre as coordenadas r e z , que se resume a:

$$\tau_{rz} = -\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \quad (\text{A.50})$$

Da mesma maneira que procedido para o escoamento em 2-dimensões, tem-se que $\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)$ representa a taxa de deformação e vale (considerando-se o perfil de velocidades dado pela Equação (A.41)):

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = \dot{\gamma}_{rz} = \frac{\rho a_z r}{2\mu}. \quad (\text{A.51})$$

Na superfície da parede ($r = R$), a taxa de deformação assume o valor de:

$$\dot{\gamma}_{rz} = \frac{\rho a_z R}{2\mu}. \quad (\text{A.52})$$

Substituindo a Equação (A.51) em (A.50), temos que a tensão de cisalhamento fica:

$$\tau_{rz} = -\frac{\rho a_z r}{2}, \quad (\text{A.53})$$

onde, mais uma vez, o sinal negativo indica que a tensão tem direção contrária ao do escoamento (direção da aceleração a_z).

Na parede, essa tensão cisalhante assume o valor de:

$$\tau_{rz_parede} = -\frac{\rho a_z R}{2}. \quad (\text{A.54})$$

Por fim, pode-se determinar a força cisalhante na parede pela integral da tensão cisalhante na área:

$$F_{parede} = \int \tau_{rz_parede} dA \quad (\text{A.55})$$

Para o caso em questão, considerando um comprimento L de canal, tem-se que a força fica dada por:

$$F_{parede} = -\rho a_z \pi R^2 L. \quad (\text{A.56})$$

Novamente, a expressão da força na parede também pode ser obtida por meio da somatória de forças no sistema na direção da coordenada z , onde a força de resistência na parede mais a força para acelerar o fluido devem ser nulas, conforme:

$$F_{parede} + \text{densidade} \cdot \text{volume} \cdot \text{aceleração} = 0, \quad (\text{A.57})$$

$$F_{parede} = -\rho \cdot \pi R^2 L \cdot a_z, \quad (\text{A.58})$$

que é igual a expressão obtida anteriormente (Equação (A.56)).

A.3 Escoamento de *Taylor-Couette* em 2D

Considere o escoamento de um fluido newtoniano entre dois cilindros concêntricos, onde o cilindro mais interno, de diâmetro D_{int} e raio R_{int} , rotaciona a uma velocidade constante ω e o cilindro mais externo, de diâmetro D_{ext} e raio R_{ext} , é fixo. Tal escoamento é representado na Figura A.3.

Figura A.3 – Escoamento de fluido entre dois cilindros.

Fonte: Próprio autor.

A.3.1 Equações de Movimento

Para esse escoamento, é interessante se utilizar das equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas. No entanto, como o problema é em 2-dimensões, a equação e as variáveis referentes a coordenada z são descartadas. Assim, as equações (A.28) e (A.29) se resumem a:

Na coordenada r :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho a_r + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

Na coordenada θ :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r u_\theta}{r} \right) \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho a_\theta + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Nesse escoamento, as hipóteses adotadas são: velocidade $u_r = 0$, velocidade $u_\theta = u_\theta(r)$, variação de pressão nula, regime permanente e campo de aceleração nulo. Assim, reduz-se a Equação (A.60) a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) = \frac{u_\theta}{r^2}, \quad (\text{A.61})$$

resultando em uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, cuja solução é dada por:

$$u_\theta(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (\text{A.62})$$

As condições de contorno para esse problema iguais a:

$$u_\theta(r) = 0 \quad \text{para} \quad r = R_{ext} \quad e \quad (\text{A.63})$$

$$u_\theta(r) = \omega R_{int} \text{ para } r = R_{int}. \quad (\text{A.64})$$

Resultando em:

$$C_1 = -\frac{\omega R_{int}^2}{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)} e \quad (\text{A.65})$$

$$C_2 = \frac{\omega R_{ext}^2 R_{int}^2}{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}. \quad (\text{A.66})$$

Substituindo (A.65) e (A.66) em (A.62), temos:

$$u_\theta(r) = \frac{\omega R_{int}^2}{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)} \left(\frac{R_{ext}^2}{r} - r \right). \quad (\text{A.67})$$

A.3.2 Tensões e Forças Cisalhantes

O campo de tensões cisalhantes em coordenadas cilíndricas para um escoamento de 2-dimensões é dado conforme a Equação (A.47), reproduzida novamente a seguir:

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right). \quad (\text{A.68})$$

Considerando-se as hipóteses simplificadoras desse problema, tem-se que a Equação (A.68) se resume a:

$$\tau_{r\theta} = -\mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right). \quad (\text{A.69})$$

Substituindo a Equação (A.67) em (A.69), tem-se:

$$\tau_{r\theta} = \frac{\omega R_{int}^2 R_{ext}^2 \mu}{(R_{ext}^2 - R_{int}^2) r^2}. \quad (\text{A.70})$$

E a taxa de deformação fica dada por:

$$\dot{\gamma}_{r\theta} = \frac{\omega R_{int}^2 R_{ext}^2}{(R_{ext}^2 - R_{int}^2) r^2}. \quad (A.71)$$

Considerando o cilindro interno, a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação ficam dadas por:

$$\tau_{r\theta_paredeInterna} = \frac{\omega R_{ext}^2 \mu}{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)} e \quad (A.72)$$

$$\dot{\gamma}_{r\theta_paredeInterna} = \frac{\omega R_{ext}^2}{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}. \quad (A.73)$$

Enquanto que no cilindro externo, as mesmas grandezas valem:

$$\tau_{r\theta_paredeExterna} = \frac{\omega R_{int}^2 \mu}{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)} e \quad (A.74)$$

$$\dot{\gamma}_{r\theta_paredeExterna} = \frac{\omega R_{int}^2}{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}. \quad (A.75)$$

O torque por unidade de comprimento nos cilindros fica dado pelo produto da integral da tensão cisalhante na área e o raio do cilindro. O torque no cilindro interno e no cilindro externo ficam, portanto, representados por:

$$T_{cilindroInterno} = R_{int} \cdot \int \tau_{r\theta_paredeInterna} \cdot dA, \quad (A.76)$$

$$T_{cilindroInterno} = \frac{2\omega\pi R_{ext}^2 R_{int}^2 \mu}{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)} e \quad (A.77)$$

$$T_{cilindroExterno} = R_{ext} \cdot \int \tau_{r\theta_paredeExterna} \cdot dA, \quad (A.78)$$

$$T_{cilindroExterno} = \frac{2\omega\pi R_{ext}^2 R_{int}^2 \mu}{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}. \quad (A.79)$$

Que, como esperado, apresentam o mesmo valor.

A.4 Escoamento de *Poiseuille* em 2D com Fluido Bingham

Considere o mesmo escoamento apresentado na Figura A.1, de comprimento L e altura $2h$, mas, agora, considerando um fluido de Bingham sendo acelerado.

A.4.1 Equações de Movimento

Por se tratar de um fluido não-newtoniano, a equação de Navier-Stokes (representada na Equação (A.1)) não pode ser usada pois essa equação só é válida para fluidos com viscosidade constante.

Porém, o perfil de velocidades para este caso pode ser encontrado na literatura, como no trabalho de MATA et al. (2017):

$$u(Y) = \begin{cases} \frac{\rho a_x}{2\mu_p} Y^2 - \frac{1}{\mu_p} (h\rho a_x + \tau_0) Y, & \text{se } 0 \leq Y \leq y_{lim} \\ u_{m\acute{a}x} = -\frac{1}{2\mu_p} \left(h^2 \rho a_x + \frac{h\tau_0}{2} + \frac{\tau_0^2}{\rho a_x} \right), & \text{se } y_{lim} \leq Y \leq (2h - y_{lim}) \\ \frac{\rho a_x}{2\mu_p} (2h - Y)^2 - \frac{1}{\mu_p} (h\rho a_x + \tau_0)(2h - Y), & \text{se } (2h - y_{lim}) \leq Y \leq 2h, \end{cases} \quad (\text{A.80})$$

com Y sendo um eixo paralelo ao eixo y da Figura A.1, mas com origem no centro da parede inferior, sendo $u_{m\acute{a}x}$ a velocidade máxima que o fluido alcança no escoamento, que ocorre para a região onde o fluido se comporta como sólido, e y_{lim} representa a altura em que ocorre a transição entre comportamento de sólido e fluido:

$$y_{lim} = h - \frac{\tau_0}{\rho a_x}. \quad (\text{A.81})$$

A.4.1 Tensões e Forças Cisalhantes

A tensão em um fluido de bingham fica dado por (Equação (3.6):

$$\tau_{xy} = \tau_0 + \mu_p \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (\text{A.82})$$

Como v é nulo, temos que:

$$\tau_{xy} = \tau_0 + \mu_p \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (\text{A.83})$$

A taxa de deformação na parede é obtida através do perfil de velocidades apresentado na Equação (A.80)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \dot{\gamma}_{xy_parede} = - \frac{(\rho h a_x + \tau_0)}{\mu_p}. \quad (\text{A.84})$$

Utilizando-se da Equação (A.83), tem-se que a tensão de cisalhamento é dada por:

$$\tau_{xy_parede} = \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma}_{xy_parede} = -\rho h a_x. \quad (\text{A.85})$$

Por fim, determina-se a força cisalhante na parede pela integral da tensão cisalhante na área:

$$F_{parede} = \int \tau_{xy_parede} dA. \quad (\text{A.86})$$

Para o caso em questão, considerando um comprimento L de canal e o problema como sendo de duas dimensões, tem-se que a força por unidade de comprimento, considerando-se as duas paredes, fica dada por:

$$F_{parede} = -2\rho a_x h L. \quad (\text{A.87})$$