UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

Hadir Alexander Garcia Castro

Uma metaheurística *simulated annealing* para o
problema de localização-roteirização periódico com
designação fixa de cliente-depósito

São Paulo

2021

Hadir Alexander Garcia Castro

**Uma metaheurística *simulated annealing* para o
problema de localização-roteirização periódico com
designação fixa de cliente-depósito**

Versão Corrigida

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração:
Engenharia Naval e Oceânica

Orientador:
Prof. Dr. André Bergsten Mendes

**São Paulo
2021**

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 25 de maio de 2021

Assinatura do autor:

Assinatura do orientador:

Catálogo-na-publicação

Castro, Hadir Alexander Garcia

Uma meta-heurística simulated annealing para o problema de localização roteirização periódico com designação fixa de cliente-depósito / H. A. G. Castro -- versão corr. -- São Paulo, 2021.
106 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Naval e Oceânica.

1.Pesquisa operacional 2.Roteirização de veículos 3.Localização de instalações 4.Otimização combinatória 5.Métodos heurísticos I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Naval e Oceânica II.t.

*Con todo mi amor para Haila y Vicente,
la luz de mis días.*

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a *Deus* pela minha vida e a força para trabalhar cada dia. À minha mãe *Gloria* e ao meu pai *Gustavo*, por seu suporte, sacrifício e companhia ao longo da minha vida.

À minha amiga e esposa *Haila*, por sua paciência, suporte, respeito, companhia, compreensão e sobre tudo o seu amor incondicional. Ela me deu o maior tesouro da minha vida, nosso filho *Vicente*.

Ao meu orientador e amigo *Prof. Dr. André Bergsten Mendes*, pelos direcionamentos e apoio, não só na pesquisa, mas também os ensinamentos que levarei comigo pelo resto da minha vida.

Aos professores da EP-USP *Dr. Marco Brinati*, *Dr. Miguel Cezar Santoro*, *Dr. Claudio Barbieri da Cunha*, *Dr. Hugo Yoshisaki*, *Dr. Rui Carlos Botter*, e todos aqueles que compartilharam seu conhecimento e contribuíram com a minha formação como pessoa e como profissional, tornando possíveis os resultados desta pesquisa.

À professora *Dra. Laura Bahiense* e ao professor *Dr. Marcos Barretto*, por aceitarem participar da banca examinadora e por todas as contribuições para o aprimoramento desta pesquisa.

À minha irmã *Yuliana* e ao meu irmão *Gustavo*, por sua presença, pelas conversas diárias e os detalhes que enchem meu coração mesmo na distância. Sou grato à minha sogra *Conceição* pelas suas orações, sua presença, o suporte e a fortaleza, quem sempre me lembrou que Deus está conosco em todos os momentos da nossa vida.

Ao PNV, ao PPGEN, à CAPES e à PETROBRAS pelo suporte financeiro recebido durante o desenvolvimento da pesquisa. À secretária do PNV *Lânia* e a todas as pessoas do corpo administrativo, pela sua gentileza, paciência e ajuda para resolver todos meus questionamentos.

Todas estas pessoas terão sempre um lugar no meu coração. ¡Muchas Gracias!

“The secret of getting ahead is getting started.”
– *Mark Twain*

RESUMO

Castro, Hadir A. G. **Uma metaheurística *simulated annealing* para o problema de localização-roteirização periódico com designação fixa de cliente-depósito.** 2021. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

A localização de instalações e a roteirização de veículos são dois processos logísticos de grande importância no gerenciamento das cadeias de suprimentos. A tomada de decisão sobre a localização de instalações integrada com o processo de elaboração das rotas dos veículos, tem se mostrado vantajosa em vários contextos, gerando ganhos econômicos maiores do que quando as decisões são tomadas sequencialmente. Na literatura, esta classe de problemas é conhecida como problema de localização-roteirização (LRP). Nesta dissertação de mestrado é desenvolvida uma metaheurística *simulated annealing* (SA) como método de solução para a variante do LRP, que considera um horizonte de planejamento dividido em múltiplos períodos. Esta variante é conhecida como o problema de localização-roteirização periódico (PLRP), sendo a sua principal característica a programação periódica dos atendimentos aos clientes, obedecendo a um padrão de visitas definido em função de uma frequência de atendimento preestabelecida por cada cliente. Em um contexto de distribuição periódica com múltiplos depósitos, é comum que existam situações em que os clientes estejam designados a um depósito específico para satisfazer suas demandas em cada período. Esta forma de operação contrasta com aplicações encontradas na literatura, em que os clientes são atendidos a partir de quaisquer depósitos ao longo do horizonte de planejamento. Portanto, nesta dissertação, foi imposta uma designação fixa de cada cliente para um único depósito, por meio de uma restrição incorporada na formulação matemática do PLRP e no método de solução desenvolvido. Uma característica da metaheurística SA é a utilização de soluções iniciais que servem como entrada para o algoritmo de busca. Nesta dissertação, as soluções iniciais são geradas utilizando um modelo de programação inteira mista (MIP) de uma versão relaxada do PLRP, seguido de uma heurística *route-first cluster-second*. Para ganho de desempenho computacional, o método de solução aproveita os recursos de computação paralela presentes nas unidades de processamento (CPUs) atuais. Os resultados obtidos, após a realização dos testes computacionais sobre as instâncias do PLRP disponíveis na literatura, comprovam a eficiência do método implementado.

Palavras-chave: Pesquisa operacional. Roteirização de veículos. Localização de instalações. Otimização combinatória. Métodos heurísticos.

ABSTRACT

CASTRO, H. A. G. **A simulated annealing metaheuristic for the periodic location-routing problem with fixed customer-depot assignment.** 2021.

Dissertation (Master) – Polytechnic School, University of São Paulo, São Paulo, 2021.

Facility location and vehicle routing are two of the main logistics processes in the supply chain management field. In many contexts, when these processes are combined in the decision-making process, larger economic benefits are perceived than when decisions are sequentially made. In the literature, this class of problems is known as the location-routing problem (LRP). In this dissertation is proposed a simulated annealing (SA) metaheuristic to solve the variant of the LRP that considers a planning horizon divided into multiple periods. This variant is known as the periodic location-routing problem (PLRP), being its main feature, the schedule of periodic visits to serve the customers' demand, following a service pattern defined in function of the customers' service frequency. In a context of periodic distribution with multiple depots, it is often necessary to have customers assigned to fixed depots, from which the demand is satisfied at each time period. In contrast, in other contributions found in the literature, customers may be served from different depots on each time period. Thus, in this dissertation it was imposed a fixed customer-depot assignment, which was treated as a constraint in the mathematical formulation of the PLRP and also in the proposed solution method. A characteristic of the SA metaheuristic is the use of an initial solution as input of the search algorithm. In this research, initial solutions are generated by solving a mixed integer programming (MIP) model of a relaxed version of the PLRP, followed by applying a route-first cluster-second heuristic. For improving the computational performance, the proposed solution method makes use of the parallel computing resources available in current CPU architectures. The results obtained, after running the proposed methods over PLRP instances available in the literature, confirm the efficiency of the method.

Keywords: Operational research. Vehicle routing. Facility location. Combinatorial optimization. Heuristic methods.

RESUMEN

CASTRO, H. A. G. **Una metaheurística *simulated annealing* para el problema de localización y ruteo periódico con asignación fija de cliente-depósito.** 2021. Disertación (Maestría) – Escuela Politécnica, Universidad de São Paulo, São Paulo, 2021.

La localización de instalaciones y el ruteo de vehículos son dos procesos logísticos de gran importancia en la gestión de las cadenas de abastecimiento. Las decisiones tomadas, considerando la combinación de estos dos procesos, muestran mayores ventajas con respecto a la reducción de costos, en comparación con el abordaje secuencial de estas decisiones. En la literatura, este tipo de problemas son conocidos con el nombre de problema de localización y ruteo (LRP). En esta tesis de maestría se desarrolló una metaheurística *simulated annealing* (SA) como método de solución para la variante del LRP que considera un horizonte de planificación dividido en múltiples períodos. Esta variante es conocida con el nombre de problema de localización y ruteo periódico (PLRP), que tiene como característica principal, la programación periódica de los atendimientos a los clientes, obedeciendo a un patrón de visitas definido en función de una frecuencia de atendimento preestablecida por cada cliente. En un contexto de distribución periódica con múltiples depósitos, es común que existan situaciones en que los clientes son asignados a un depósito específico para satisfacer su demanda en cada período. Esta manera de operación contrasta con aplicaciones encontradas en la literatura, en que los clientes son atendidos a partir de depósitos diferentes a lo largo del horizonte de planificación. Por lo tanto, en esta tesis de maestría, fue impuesta la asignación fija de cada cliente para un único depósito, por medio de una restricción incorporada a la formulación matemática del PLRP y al método de solución desarrollado. Una característica de la metaheurística SA es el uso de soluciones iniciales que sirven como entrada para el algoritmo de búsqueda. En esta tesis de maestría, las soluciones iniciales son generadas utilizando un modelo de programación entera mixta (MIP) de una versión relajada del PLRP, seguido de una heurística *route-first cluster-second*. Para mejorar el desempeño computacional, el método de solución aprovecha los recursos de computación paralela presentes en las unidades de procesamiento (CPUs) actuales. Los resultados obtenidos, después de la realización de pruebas computacionales sobre las instancias del PLRP disponibles en la literatura, comprueban la eficiencia del método implementado.

Palabras Clave: Investigación de operaciones. Ruteo de vehículos. Localización de instalaciones. Optimización combinatoria. Métodos heurísticos.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de dois períodos de uma solução para o PLRP com 200 clientes, 10 depósitos e 14 rotas em cada período.	21
Figura 2 – Combinações de dias de atendimento de acordo com as frequências de atendimento dos clientes.	24
Figura 3 – Exemplo da divisão da demanda de um cliente ao longo de um horizonte de planejamento de uma semana.	25
Figura 4 – Metodologia para a solução de problemas em pesquisa operacional.	28
Figura 5 – Solução ótima de um VRP clássico 20 clientes	34
Figura 6 – A interseção entre o FLP e o VRP que dá a origem ao PLRP.	42
Figura 7 – Analogia entre os componentes de um problema de otimização e o processo de <i>annealing</i>	47
Figura 8 – Representação gráfica de um processo de melhora da solução de um problema de otimização usando o algoritmo SA.	48
Figura 9 – Estágios que compõem o método de solução para o PLRP-FA.	54
Figura 10 – Representação de uma solução para o PLRP-FA.	56
Figura 11 – Representação dos tipos de rotas, a) três rotas radiais individuais e b) uma rota com múltiplas visitas de clientes.	59
Figura 12 – Configurações de rede únicas encontradas usando o CAM para diferentes valores do parâmetro alfa (α).	64
Figura 13 – Transformação de uma solução inicial nas do primeiro estágio do método de solução, a) solução do CAM, b) solução RBA roteiro gigante, c) solução RBA <i>split</i>	65
Figura 14 – Valores iniciais do parâmetro alfa (α) que foram testados e as respectivas configurações de rede (depósitos abertos) para cada instância do PLRP.	79
Figura 15 – Valores finais do parâmetro alfa (α) e as respectivas configurações de rede para cada instância do PRLP.	80
Figura 16 – Exemplos de partição do roteiro gigante, com a) primeira regra e b) segunda regra para definição do fator λ de excesso de capacidade.	82
Figura 17 – Resumo dos resultados dos testes computacionais para cada grupo de configurações de rede das instâncias do PLRP.	92
Figura 18 – Solução do CAM para a instância do PLRP 26 200-10-1b.	94
Figura 19 – Solução do RBA para a instância do PLRP 26 200-10-1b.	95
Figura 20 – Melhor solução do algoritmo SA para a instância do PLRP 26 200-10-1b.	96

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Definição da quantidade de veículos designada aos depósitos abertos em uma solução do PLRP-FA.	25
Tabela 2 – Notação dos conjuntos usados na modelagem matemática do PLRP-FA. . .	50
Tabela 3 – Notação dos parâmetros usados na modelagem matemática do PLRP-FA. .	51
Tabela 4 – Notação das variáveis de decisão usadas na modelagem matemática do PLRP-FA.	51
Tabela 5 – Notação dos parâmetros adicionais usados na modelagem matemática do modelo CAM.	60
Tabela 6 – Notação da nova variável de decisão usada na modelagem matemática do modelo CAM.	61
Tabela 7 – Lista de <i>flags</i> usadas durante a compilação do código fonte da implementação do método de solução para o PLRP-FA.	76
Tabela 8 – Parâmetros do <i>solver</i> Gurobi utilizados pelo modelo CAM.	77
Tabela 9 – Valores adotados para o <i>gap</i> em função do número de clientes.	78
Tabela 10 – Ganho médio no tempo processamento com os valores de alfa selecionados. .	81
Tabela 11 – Percentagem de excesso de capacidade dos veículos no algoritmo RBA. . . .	83
Tabela 12 – Resultados do primeiro estágio do método de solução para as instâncias 1-15 do PLRP.	85
Tabela 13 – Resultados do CAM para as instâncias 16-30 do PLRP.	86
Tabela 14 – Resultados do algoritmo SA para as instâncias 1-15 do PLRP.	88
Tabela 15 – Resultados do algoritmo SA para as instâncias 16-30 do PLRP.	89
Tabela 16 – Comparação dos resultados da metaheurística SA para o PLRP com os resultados da literatura.	90

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

2E-VRP	<i>Two-echelon vehicle routing problem</i>
ACO	<i>Ant colony optimization</i>
ALNS	<i>Adaptive large neighbourhood search</i>
B&B	<i>Branch-and-bound</i>
CAM	<i>Compound assignment model</i>
CPU	<i>Central processing unit</i>
DP	<i>Dynamic programming</i>
ELS	<i>Evolutionary local search</i>
FLP	<i>Facility location problem</i>
FO	Função objetivo
FT	Frota total
GA	<i>Genetic algorithms</i>
GRASP	<i>Greedy randomized adaptive search procedure</i>
GT	<i>Giant tour</i>
ILP	<i>Integer linear programming</i>
ILS	<i>Iterated local search</i>
IRP	<i>Inventory routing problem</i>
LNS	<i>Large neighborhood search</i>
LRP	<i>Location-routing problem</i>
LS	<i>Local search</i>
LTL	<i>Less than a truckload</i>
MA	<i>Memetic algorithm</i>
MACO	<i>Multiple ant colony optimization</i>
MIP	<i>Mixed integer programming</i>

MDVRP	<i>Multi depot vehicle routing problem</i>
NLP	<i>Nonlinear programming</i>
NN	<i>Neural networks</i>
NP-hard	<i>Nondeterministic polynomial time hard</i>
OD	Depósitos abertos ou <i>Open depots</i>
PFLP	<i>Periodic facility location problem</i>
PLRP	<i>Periodic location-routing problem</i>
PLRP-FA	<i>PLRP with fixed customer-depot assignment</i>
PSO	<i>Particle swarm optimization</i>
PV	Penalidade por violação de capacidade
PVRP	<i>Periodic vehicle routing problem</i> ou <i>period vehicle routing problem</i>
RBA	<i>Route building algorithm</i>
RCSP	<i>Resource-constrained shortest-path problem</i>
RECWA	<i>Randomized extended clarke and wright algorithm</i>
SA	<i>Simulated annealing</i>
SPT	<i>Set partitioning problem</i>
TP	Tempo de processamento
TS	<i>Tabu search</i>
TSP	<i>Traveling salesman problem</i>
TTRP	<i>Truck and trailer routing problem</i>
U-ALNS	<i>Unified-adaptive large neighborhood search</i>
VND	<i>Variable neighborhood descent</i>
VNS	<i>Variable neighborhood search</i>
VRP	<i>Vehicle routing problem</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

$\hat{\mathcal{A}}$	Lista de valores de alfa (α).
Δ	Diferença entre duas soluções do PLRP-FA.
$\mathcal{T}_i$	Variável inteira, representa a quantidade máxima de veículos usados pelo depósito $i \in I$.
Φ_j	Frequência de atendimento do cliente j .
α	Peso da parcela de roteirização no modelo CAM.
ε	Energia do sistema.
ϑ	Número de níveis de resfriamento.
κ	Constante de Boltzmann.
λ	Porcentagem permitida de excesso de capacidade dos veículos durante a partição do roteiro GT.
π	Uma instância do PLRP.
ρ	Número aleatório.
σ	Fator de proporção da temperatura inicial T_0 .
A_{rl}	Matriz binária, igual a 1 se o dia $l \in r$, com $r \in B_j$.
B_j	Subconjunto de R para o cliente j .
C_{ij}	Matriz de custos.
$\mathfrak{C}_{ij}$	Matriz de custos de visita do cliente $j \in J$ a partir do depósito $i \in I$.
CF	Depósito designado a cada cliente.
CB	Padrão de visitas designado a cada cliente.
D_i	Demanda no cliente i .
D_{jlr}	Demanda no cliente $j \in J$ no dia $l \in H$ com combinação $r \in B_j$.
DO	Lista de depósitos abertos.
DT	Lista de veículos designados a cada depósito.

E	Conjunto de arcos do grafo G .
F	Custo fixo de utilização do veículo $k \in K$.
G	Grafo não orientado.
GT	Roteiro gigante.
H	Horizonte de planejamento.
I	Subconjunto de V que representa os depósitos do problema.
J	Subconjunto de V que representa os clientes do problema.
K	Conjunto que representa a frota homogênea.
L	Número de níveis de resfriamento.
$\hat{L}$	Número de níveis de resfriamento sem melhoria de s' .
M	Número tentativas de exploração do espaço de solução.
O_i	Custo fixo de abertura do depósito $i \in I$
$P(\Delta\varepsilon)$	Probabilidade de aceitação.
P	Conjunto de posições exploradas na busca binária.
Q	Capacidade do veículo $k \in K$.
R	Conjunto de combinações de períodos (dias) de atendimento.
S_π	Conjunto de soluções da instância π .
S_0	Conjunto de soluções iniciais do PLRP-FA.
S_{CAM}	Conjunto de soluções do CAM.
T	Temperatura do sistema.
T_0	Temperatura inicial.
T_f	Temperatura final.
T_t	t -ésima variação de temperatura, ou temperatura corrente.
V	Conjunto de vértices do grafo G .
W_i	Capacidade de armazenagem do depósito $i \in I$.
c	Esquema de resfriamento.

b_{jr}	Variável binária, igual a 1 se a combinação de dias de atendimento $r \in B$ for designada ao cliente $j \in J$.
f_{ij}	Variável binária, igual a 1 se o cliente $j \in J$ é designado ao depósito $i \in I$.
f_{ijr}	Variável binária, igual a 1 se o cliente $j \in J$ for designado ao depósito $i \in I$ com combinação $r \in B_j$.
$f(s)$	Função objetivo da solução s .
h	Índice dos elementos do conjunto V .
i	Índice dos elementos do conjunto V .
j	Índice dos elementos do conjunto V .
k	Índice dos elementos do conjunto K .
l	Índice dos períodos do horizonte de planejamento H .
m	Tamanho do subconjunto I em cada instância do PLRP.
n	Tamanho do subconjunto J em cada instância do PLRP.
$\overline{oc}$	Ocupação média da frota.
q_{jkl}	Variável inteira, representa a quantidade de carga transportada pelo veículo $k \in K$ no dia $l \in H$ para o cliente $j \in J$.
s	Uma solução para o PLRP-FA.
s_0	Solução inicial do PLRP-FA.
s'	Solução corrente do PLRP-FA.
s^*	Melhor solução do PLRP-FA.
x_{ijkl}	Variável binária, igual a 1 se o veículo $k \in K$ percorre o arco (v_i, v_j) que liga os vértices $i, j \in V$ no dia $l \in H$.
y_i	Variável binária, igual a 1 se o depósito $i \in I$ é aberto para operação.
w_{ijl}	Variável inteira, representa a quantidade de carga do cliente $j \in J$ armazenada no depósito $i \in I$ no dia $l \in H$.

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Primeiro estágio do método de solução	58
Algoritmo 2 – Busca binária/dicotomia do CAM	63
Algoritmo 3 – Algoritmo de Bellman com frota limitada	67
Algoritmo 4 – Heurística <i>route-first cluster-second</i>	69
Algoritmo 5 – Estrutura da metaheurística SA para o PLRP-FA	70

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Descrição do problema	22
1.2	Motivação do tema	26
1.3	Objetivos	27
1.4	Metodologia	27
1.5	Estrutura do trabalho	29
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	30
2.1	Problema de localização de instalações (FLP)	30
2.2	Problema de roteirização de veículos (VRP)	32
2.3	Problema de localização-roteirização (LRP)	35
2.4	Problema de localização-roteirização periódico (PLRP)	41
2.5	Metaheurística <i>simulated annealing</i> (SA)	45
3	MODELAGEM MATEMÁTICA DO PLRP-FA	50
4	MÉTODO DE SOLUÇÃO	54
4.1	Representação de uma solução para o PLRP-FA	55
4.2	Geração de soluções iniciais	57
4.2.1	Modelo de designação composta (CAM)	58
4.2.2	Algoritmo de construção das rotas (RBA)	66
4.3	Metaheurística SA para o PLRP-FA	69
4.3.1	Componentes do algoritmo SA	70
4.3.2	Exploração do espaço de solução	73
4.4	Paralelização do método de solução	74
5	TESTES COMPUTACIONAIS	76
5.1	Calibração das componentes do método de solução	77
5.1.1	Calibração dos parâmetros do CAM	77
5.1.2	Calibração dos parâmetros do RBA	81
5.1.3	Calibração dos parâmetros do SA	83
5.2	Resolução das instâncias do PLRP	84
6	CONCLUSÕES	97
	REFERÊNCIAS	98

1 INTRODUÇÃO

Ao falar de instalações, é comum pensar em depósitos, centros de distribuição, fábricas, terminais portuários, escolas, hospitais, lojas de varejo, etc. A localização de instalações é um processo logístico importante na cadeia de suprimentos de todos os tipos de organizações. A distribuição de produtos e serviços a partir destas instalações é outro elo importante nessa cadeia logística. No meio acadêmico, as primeiras tratativas de modelos de localização foram publicadas no começo do século XX. Posteriormente, no final da década de 1950, foram propostos modelos matemáticos abordando roteirização de veículos.

Durante vários anos, a literatura abordou esses dois processos logísticos em separado, sem considerar qualquer dependência entre eles. Desta maneira, se desenvolveram fortemente os estudos científicos sobre a teoria da localização, tendo como base o problema de localização de instalações, ou *facility location problem* (FLP) (DASKIN, 1995). Do mesmo modo, desenvolveram-se os estudos de otimização de rotas, iniciando com o problema do caixeiro viajante, ou *traveling salesman problem* (TSP) (DANTZIG; FULKERSON; JOHNSON, 1954), e depois evoluindo para uma versão mais generalizada, a saber, o problema de roteirização de veículos, ou *vehicle routing problem* (VRP) (DANTZIG; RAMSER, 1959). Durante os estudos iniciais, esses dois problemas receberam um tratamento independente, como se fossem dois assuntos completamente separados. Laporte, Nickel e Gama (2019) indicam que os referidos problemas são tópicos abundantes em literatura, tanto que nos tempos atuais os pesquisadores ainda têm a preocupação de encontrar melhores métodos de solução.

A partir da busca por aprimoramento dos modelos e dos métodos de solução, surgiu uma abordagem integrada do FLP com o VRP, que foi denominada de problema de localização-roteirização, ou *location-routing problem* (LRP). Na literatura, o LRP combina estes dois processos logísticos em um único problema, de forma que as rotas ótimas de distribuição devem ser definidas concomitantemente com a seleção das instalações, a partir de um conjunto de locais candidatos (MIN; JAYARAMAN; SRIVASTAVA, 1998).

Um dos primeiros passos para a integração dos processos logísticos acima mencionados, foi o reconhecimento da interdependência existente entre os dois problemas e do efeito que isso tem nos custos logísticos de distribuição. Os estudos desenvolvidos por Watson-Gandy e Dohrn (1973), Or e Pierskalla (1979), Jacobsen e Madsen (1980), Laporte e Nobert (1981), Madsen (1983) e Perl e Daskin (1985), são considerados trabalhos pioneiros deste paradigma de integração do FLP com o VRP. Salhi e Rand (1989) realizaram um estudo com base no custo total. Estes autores analisaram os efeitos de considerar o processo de localização das instalações separadamente do processo de roteirização dos

veículos, e concluíram que nem sempre a melhor solução, encontrada após resolver o problema de localização integrado, corresponde à melhor solução obtida quando resolvido em duas etapas (localizar e roteirizar). [Tuzun e Burke \(1999\)](#) afirmam que em sistemas de distribuição *less than a truckload* (LTL) as decisões de roteirização devem ser incorporadas aos modelos de localização para uma representação mais próxima da realidade.

Nos levantamentos mais recentes sobre o LRP, os autores [Prodhon e Prins \(2014\)](#), [Drexler e Schneider \(2015\)](#) indicaram que esta abordagem, que integra os processos logísticos de localização e roteirização, tem se mostrado mais eficiente e continua como um tópico de estudo importante na comunidade acadêmica. De acordo com esses autores, o LRP possui um amplo campo de pesquisa, com múltiplos desdobramentos não só em termos de aplicações do mundo real, mas também em termos de desenvolvimento de novos métodos de solução. Os autores também apresentaram uma lista de variantes e extensões do LRP, dando destaque aos seguintes problemas:

- a) O *uncapacitated* LRP, que considera veículos e/ou depósitos sem limite de capacidade ([TUZUN; BURKE, 1999](#); [ALBAREDA-SAMBOLA; DÍAZ; FERNÁNDEZ, 2005](#); [DERBEL et al., 2010](#); [JARBOUI et al., 2013](#));
- b) O *capacitated* LRP, que considera veículos e depósitos com capacidades limitadas ([PRINS; PRODHON; CALVO, 2006a](#); [PRINS; PRODHON; CALVO, 2006b](#); [BARRETO et al., 2007](#); [PRINS et al., 2007](#); [YU et al., 2010](#); [ESCOBAR; LINFATI; TOTH, 2013](#); [ESCOBAR et al., 2014](#));
- c) O *two-echelon* LRP ([HEMMELMAYR; CORDEAU; CRAINIC, 2012](#)) e o caso da roteirização com sincronização de trailers ([VILLEGAS et al., 2013](#)), que são configurações de redes com mais de um estágio;
- d) Problemas com múltiplos objetivos ([VAHDANI et al., 2018](#));
- e) Problemas que incorporam um horizonte de planejamento de um único período ou de múltiplos períodos ([PRODHON, 2008](#); [PRODHON, 2009](#); [PRODHON, 2011](#); [ALBAREDA-SAMBOLA; FERNÁNDEZ; NICKEL, 2012](#); [HEMMELMAYR, 2015](#); [KOÇ, 2016](#));
- f) Localização e roteirização com gestão de estoques tem sido outro caso de estudo ([GUERRERO et al., 2013](#)); e
- g) Roteirização com coletas e entregas simultâneas, conhecido como o *Pick and delivery* LRP ([KARAOGLAN et al., 2012](#); [YU; LIN, 2014](#); [YU; LIN, 2016](#)).

Além das variantes acima citadas, [Nagy e Salhi \(2007\)](#) também propuseram algumas variantes para trabalhos futuros na área. [Drexler e Schneider \(2015\)](#) mencionam que alguns destes tópicos ainda precisam ser mais aprofundados, destacando-se: o LRP com múltiplos objetivos; o LRP competitivo; a inclusão de aspectos temporais no LRP com múltiplos estágios; e a integração do LRP com gestão de receita.

Neste contexto, uma das variantes menos estudadas na literatura existente do LRP é a que considera o aspecto periódico no atendimento aos clientes. Esta variante foi introduzida por [Prodhon \(2008\)](#), quem a denominou como o problema de localização-roteirização periódico, ou *periodic location-routing problem* (PLRP). Neste trabalho a autora combinou o FLP com o conhecido problema de roteirização de veículos periódico, ou *periodic vehicle routing problem* ou *period vehicle routing problem* (PVRP) ([CAMPBELL; WILSON, 2014](#)), com a finalidade de recriar um problema mais próximo da realidade de situações em que os clientes apresentam demandas recorrentes. O PLRP consiste em determinar um subconjunto de depósitos candidatos que são abertos para operação ao longo de um horizonte de planejamento, por exemplo, em uma semana com cinco períodos de visita (de segunda-feira a sexta-feira). Para cada um desses depósitos selecionados é designada uma frota homogênea dedicada, e, em seguida, são definidas as rotas de distribuição a partir de cada depósito aberto e para cada período (dia) de operação. A principal característica destas rotas é que os atendimentos aos clientes são realizados periodicamente, obedecendo a um padrão de visitas, que é definido em função da frequência de atendimento estabelecida por cada cliente.

Seguindo o raciocínio desta breve introdução do problema base, nesta dissertação de mestrado estuda-se o PLRP com uma consideração adicional que estabelece que cada cliente deve ser designado a um único depósito ao longo do horizonte de planejamento. Em outras palavras, não é permitido que um cliente seja atendido a partir de um depósito em um período, e a partir de outro depósito diferente em outro período. Assim sendo, esta variante do PLRP é denominada, neste trabalho, como o problema de localização-roteirização periódico com designação fixa de cliente-depósito, ou *periodic location-routing problem with fixed customer-depot assignment* (PLRP-FA).

O PLRP-FA surgiu após a constatação de que na literatura existente, não havia a vinculação do cliente ao depósito, o que fazia com que os modelos e os métodos de solução permitissem a troca de depósito a cada período (dia). Porém, tendo em vista que em muitas das operações reais os clientes são vinculados aos depósitos, optou-se por investigar este tema nesta dissertação. Por exemplo, a entrega periódica de suprimentos às plataformas de petróleo no mar impõe que cada unidade marítima esteja vinculada a um único depósito em terra ([CRUZ et al., 2019](#)). Na indústria de bebidas a operação é similar, os clientes de uma determinada região são usualmente atendidos a partir de um centro de distribuição escolhido em função de questões logísticas, comerciais e administrativas ([SEIXAS; MENDES, 2013](#)).

Como exemplo, a Figura 1 ilustra dois períodos (dias) de uma solução para o PLRP com 200 clientes e 10 depósitos candidatos. Esta solução mostra um total de 4 depósitos abertos, que permanecem em operação durante todos os períodos. Um total de 14 rotas de distribuição foram definidas a partir destes depósitos em cada período, isto indica que

o tamanho da frota é de 14 ou mais veículos, pois existe a possibilidade de que em algum período subsequente hajam mais rotas em operação. Cabe destacar que alguns clientes não apresentam demandas nos períodos mostrados (pontos azuis), pois são clientes que são atendidos nos demais dias da semana, compatíveis com o padrão de visita selecionado.

Figura 1 – Exemplo de dois períodos de uma solução para o PLRP com 200 clientes, 10 depósitos e 14 rotas em cada período.

Fonte: Produção do próprio autor.

De acordo com [Talbi \(2009\)](#), as soluções para estes problemas com natureza combinatória se baseiam em métodos exatos e heurísticos. Os métodos exatos, em geral, baseados em modelos de programação matemática, realizam uma enumeração implícita do espaço solução. Estes métodos se caracterizam pelo bom desempenho na resolução de problemas de pequeno porte, e, além disso, são comumente usados para encontrar limitantes inferiores e superiores. Por outro lado, os métodos heurísticos se destacam por serem rápidos e práticos na resolução de problemas complexos, embora não consigam comprovar a otimalidade da solução. As metaheurísticas, são heurísticas que possuem mecanismos para escapar de ótimos locais de baixa qualidade. Estes métodos conseguem diversificar a busca no espaço de solução, sendo capazes de lidar com problemas de grande porte e de produzir soluções de qualidade com baixos tempos computacionais. [Gendreau e Potvin \(2019\)](#) indicam que as metaheurísticas caracterizam estratégias de busca de alto nível, que podem ser usadas em diferentes tipos de problemas, e podem ser associadas a outros métodos de solução (conhecidos como métodos híbridos).

Entre as metaheurísticas muito difundidas e utilizadas tem-se a *simulated annealing* (SA) ([FRANZIN; STÜTZLE, 2019](#)). O funcionamento geral deste método é feito iterativamente a partir da aceitação de movimentos que modificam uma solução corrente

do problema e a transformam em uma nova solução, que pode ser melhor ou pior. Estes movimentos caracterizam um processo de exploração aleatória da vizinhança de uma solução, e podem levar a soluções ótimas locais, ou mesmo a alcançar a solução ótima global do problema. Comumente, o processo iterativo termina quando não são encontradas mais melhorias da solução ou quando é alcançado o limite de iterações definido.

Deste modo, nesta dissertação de mestrado apresenta-se uma metaheurística SA para resolver o PLRP-FA. Este método de solução foi escolhido devido à sua simplicidade e efetividade, e por ser um método bastante utilizado na literatura para resolver problemas com características e portes similares. Por exemplo, o algoritmo SA foi usado para resolver o LRP, mostrando-se eficiente na resolução desta classe de problemas (YU et al., 2010). O método de solução proposto nesta pesquisa integra o algoritmo SA com outros métodos exatos e heurísticos, que são utilizados para a geração de soluções iniciais. Além disso, são utilizadas técnicas de computação paralela que permitem melhor aproveitar os recursos computacionais disponíveis.

1.1 Descrição do problema

O tema central desta pesquisa é o PLRP-FA que, conforme foi mencionado anteriormente, é um problema que combina os processos logísticos de localização de instalações e de roteirização de veículos. Este problema surge em um contexto onde os atendimentos aos clientes são feitos de forma periódica, sendo que para cada cliente designa-se um único depósito que atende por completo a demanda em cada período. Estas características fazem do PLRP-FA uma representação mais próxima da realidade que diversas empresas enfrentam no dia a dia das suas operações, uma vez que as tomadas de decisões constantemente envolvem cenários com múltiplos centros de distribuição para satisfazer a demanda recorrente dos clientes.

Baseado na descrição do PLRP apresentada por Prodhon (2011), o PLRP-FA consiste em abrir um subconjunto de depósitos, para realizar o atendimento dos clientes a partir deles, sendo que as demandas desses clientes acontecem de maneira periódica ao longo do horizonte de planejamento. Estas demandas devem ser satisfeitas por completo durante o horizonte, que está dividido em períodos de tempo menores (geralmente dias). O objetivo deste problema é a minimização do custo total composto pela parcela dos custos fixos de operação dos depósitos, a parcela dos custos fixos de utilização da frota, e a parcela dos custos variáveis de distribuição. Desta maneira, as premissas que caracterizam o PLRP-FA são as seguintes:

- a) Existem múltiplas instalações ou depósitos;
- b) Todos os depósitos e clientes estão dispersos geograficamente, e com posições conhecidas;

- c) Um único produto é distribuído;
- d) A programação das rotas e a utilização dos depósitos é feita ao longo de um horizonte de planejamento, sendo de uma semana o caso mais comum na literatura;
- e) Cada cliente é designado a apenas um único depósito, o que indica que a designação do par cliente-depósito permanece fixa ao longo do horizonte de planejamento;
- f) Cada cliente tem uma frequência de atendimento conhecida (ex: uma, duas ou três vezes por semana);
- g) A demanda de cada cliente no horizonte de planejamento é conhecida e dividida de acordo com a frequência de atendimento, devendo ser atendida em sua totalidade;
- h) A frota é homogênea, limitada e possui um custo fixo de utilização;
- i) Cada depósito aberto tem uma frota associada para uso exclusivo, de forma que se um veículo é designado a um depósito, este permanece alocado nesse depósito até o final do horizonte de planejamento;
- j) Cada rota inicia e termina no mesmo depósito e no mesmo dia;
- k) Só é permitida uma única rota por veículo por dia;
- l) As rotas não têm restrições quanto à máxima distância a ser percorrida diariamente;
- m) A desigualdade triangular é satisfeita;
- n) Cada cliente é atendido por apenas um veículo em cada período em que é visitado; e
- o) Tanto os depósitos quanto os veículos possuem restrições de capacidade.

É importante observar que a frequência dos clientes está associada a um conjunto de combinações de dias de atendimento. Para os casos em que frequência de atendimento é de uma vez por semana, as combinações possíveis são cinco, considerando atendimentos de segunda-feira a sexta-feira. Quando a frequência de atendimento é de duas vezes por semana, somente três combinações são admitidas, com espaçamento de dois ou três dias entre elas, por exemplo, atendimentos às segundas e às quintas-feiras, ou às terças e às sextas-feiras. Para o caso em que a frequência de atendimento é de três vezes por semana, é permitida uma única combinação de dias de atendimento, com espaçamento de um dia entre cada atendimento. A Figura 2 mostra as combinações de dias de atendimento que constam no trabalho de [Prodhon \(2011\)](#), e que foram utilizados nesta pesquisa.

Frequência de atendimento	Número de combinações	Combinações de dias de atendimento
1 vez por semana	5	segunda-feira terça-feira quarta-feira quinta-feira sexta-feira
2 vezes por semana	3	segunda-feira / quinta-feira segunda-feira / sexta-feira terça-feira / sexta-feira
3 vezes por semana	1	segunda-feira / quarta-feira / sexta-feira

Figura 2 – Combinações de dias de atendimento de acordo com as frequências de atendimento dos clientes.

Fonte: Adaptado de [Prodhon \(2011\)](#).

Outro aspecto importante a considerar, é a divisão que sofre a demanda total dos clientes em função da frequência de atendimento, pois para os dias em que é realizado um atendimento, a demanda é dividida de acordo com a quantidade de dias transcorridos desde o último atendimento. Cabe aclarar que, a demanda dos clientes em um horizonte de uma semana, apresenta consumo durante os sete dias (de segunda-feira a domingo), porém, o problema considera atendimentos realizados só durante os dias úteis (de segunda a sexta-feira). Como exemplo, a Figura 3 mostra a curva de estoque para um cliente que tem uma demanda total de 70 unidades, de um determinado produto, ao longo do horizonte, com uma frequência de atendimento de 2 vezes por semana. Ao fazer a divisão pelos 7 dias de consumo no horizonte, tem-se que a demanda diária do cliente é de 10 unidades, considerando consumo de segunda-feira a domingo. Desta forma, ao designar uma combinação de dias de atendimento para esse cliente de, por exemplo, *segunda-feira/quinta-feira* (com base na Figura 2), o cliente deve receber 40 unidades às segundas-feiras e 30 unidades às quintas-feiras, para completar assim a demanda total no horizonte.

Figura 3 – Exemplo da divisão da demanda de um cliente ao longo de um horizonte de planejamento de uma semana.

Fonte: Produção do próprio autor.

Como mencionado anteriormente, para cada período do exemplo da Figura 1, existe a possibilidade de que alguns veículos não sejam utilizados nas rotas de distribuição. Desta maneira, o tamanho da frota em cada depósito aberto é dado pela máxima quantidade de rotas necessárias para realizar os atendimentos dos clientes de cada período. Na Tabela 1 é apresentado um exemplo com três depósitos em operação, sendo que para cada um desses depósitos foi designada uma quantidade de veículos para realizar as rotas de atendimentos durante os dois dias do horizonte. A última coluna dessa tabela corresponde ao máximo número de veículos que devem ser designados a cada depósito para atender as demandas nos dois períodos do horizonte de planejamento.

Tabela 1 – Definição da quantidade de veículos designada aos depósitos abertos em uma solução do PLRP-FA.

Id. depósito	Número de rotas		Frota por depósito
	Dia 1	Dia 2	
1	3	3	3
2	2	1	2
3	3	2	3

Fonte: Adaptado de [Prodhon \(2011\)](#).

De acordo com a descrição do problema, apresentada nas linhas acima, uma solução para o PLRP-FA deve determinar uma resposta para os seguintes questionamentos:

- Quais depósitos são abertos para operação ao longo do horizonte de planejamento?

- b) Qual depósito em operação é designado para cada cliente?
- c) Quantos veículos alocar em cada depósito aberto?
- d) Quais são os dias de atendimento para cada cliente, de acordo com sua frequência?
- e) Qual é a sequência dos atendimentos para cada rota?

De acordo com a taxonomia de [Min, Jayaraman e Srivastava \(1998\)](#), o PLRP estudado nesta dissertação pode ser classificado como sendo um único estágio, pois as mercadorias já estão alocadas nos depósitos, e não existem depósitos intermediários. Neste trabalho, todos os custos e as demandas dos clientes são de natureza determinística, pois não variam ao longo do horizonte, e também não se considera qualquer tipo de componente de incerteza. A quantidade de instalações, e a frota a elas alocada, são do tipo múltipla e limitada em quantidade e capacidade (natureza discreta). Quanto às rotas de distribuição, não são considerados nem tempos máximos de execução de rota, nem distância máxima percorrida pelos veículos, nem o nível de serviço que cada cliente requer. Segundo [Nagy e Salhi \(2007\)](#), os problemas que consideram um horizonte de planejamento podem ser classificados como do tipo dinâmico, devido ao seu aspecto temporal.

Pela própria natureza combinatória do PLRP-FA, este é classificado como um problema do tipo *NP-Hard*, pois integra dois problemas, o FLP e o VRP, que são conhecidos na literatura por pertencer ao grupo dos problemas de complexidade computacional *NP-Hard* ([LENSTRA; KAN, 1981](#); [DASKIN, 2008](#)). De acordo com [Prodhon \(2011\)](#), o PLRP pode ser reduzido ao VRP, quando considerado um único período de tempo e somente um depósito, fazendo com que o PLRP consiga herdar as características de complexidade *NP-hard* dos problemas relacionados.

1.2 Motivação do tema

O PLRP e seus problemas de origem (LRP, FLP e VRP) são problemas recorrentes nas cadeias de suprimentos de todos os tipos de organizações e indústrias ao redor do mundo. Por este motivo, a resolução do problema almeja encontrar um equilíbrio entre o nível de serviço, que está relacionado com o atendimento periódico da demanda, e a utilização dos recursos (depósitos e veículos) a serem usados nestes atendimentos. Um tópico importante que se relaciona com o referido estudo, é a avaliação sobre a política de centralização versus descentralização da rede logística. Enquanto o atendimento dos clientes a partir de um único depósito pode resultar em altos custos de distribuição, a utilização de múltiplas instalações acarreta altos custos fixos, que são compensados pelos baixos custos de distribuição. Neste sentido, trata-se de um importante *trade-off* que será avaliado ao longo deste trabalho.

Do ponto de vista científico, este trabalho é motivado por publicações do estado da arte, e pela possibilidade de disseminação do conhecimento a respeito dos problemas de roteirização e de localização de veículos, assim como dos problemas que facilitam a tomada de decisão no gerenciamento de cadeias de suprimentos. De fato, esta variante de múltiplos períodos do LRP é ainda pouco explorada, pois somente os trabalhos de [Prodhon \(2008\)](#) e [Prodhon \(2011\)](#) são referências que permitem a comparação dos casos de designação fixa cliente-depósito, pois os trabalhos de [Hemmelmayr \(2015\)](#) e [Koç \(2016\)](#) não especificam o tipo de designação, ficando evidente que os atendimentos aos clientes são feitos a partir de um depósito diferente em cada período do horizonte. Além disso, esta pesquisa é motivada pelo desafio de aprendizado e desenvolvimento de abordagens baseadas em modelagem matemática, técnicas de otimização combinatória, e pela utilização de tecnologias computacionais atuais.

1.3 Objetivos

Esta dissertação de mestrado tem por objetivo geral resolver o PLRP-FA usando uma metaheurística do tipo SA, que integra métodos exatos e heurísticos, e que utiliza computação paralela para otimizar seu desempenho computacional.

Os objetivos específicos são:

- a) Utilizar programação inteira mista, ou *mixed integer programming* (MIP), na modelagem e resolução de uma versão relaxada do PLRP-FA, que aponte as configurações de rede mais promissoras para o problema;
- b) Utilizar uma heurística construtiva para geração de soluções iniciais;
- c) Implementar uma metaheurística baseada em SA;
- d) Fazer uso de computação paralela com o intuito de aproveitar as vantagens de alto desempenho das unidades de processamento, ou *central processing units* (CPUs), atuais; e
- e) Fazer testes computacionais com as instâncias do PLRP encontradas na literatura, que permitam a comparação dos resultados e a avaliação do desempenho do método solução implementado nesta dissertação.

1.4 Metodologia

A resolução de problemas do mundo real no ramo da pesquisa operacional segue a metodologia de modelagem quantitativa proposta por [Mitroff et al. \(1974\)](#). Estes autores sugerem seguir um ciclo de quatro passos, que inicia (*Passo 1*) com a abstração do problema real, permitindo a identificação dos aspectos que serão considerados na resolução do problema; seguido pela (*Passo 2*) geração de um modelo conceitual a partir das especificações feitas no passo anterior, resultando no enunciado do problema que será modelado;

depois, (*Passo 3*) a etapa de modelagem matemática do problema, tem como produto um modelo quantitativo; o ciclo se fecha (*Passo 4*) encontrando uma solução para o problema modelado, que logo depois será implementada na realidade. Após a finalização de um ciclo, pode-se iniciar um novo ciclo, mas com novas abordagens do problema do ciclo anterior ou uma nova etapa dentro do processo de refinamento da solução. Como pode ser observado na Figura 4 as etapas do ciclo podem seguir todos os possíveis caminhos demarcados pelas setas.

Figura 4 – Metodologia para a solução de problemas em pesquisa operacional.

Fonte: Adaptado de [Mitroff et al. \(1974\)](#).

A partir da aplicação das etapas da metodologia apresentada anteriormente à abstração do problema estudado nesta dissertação, fez-se um levantamento bibliográfico sobre o LRP, que embasou uma melhor descrição e classificação de suas variantes. O levantamento compreendeu as seguintes etapas:

1. Estudo sobre o LRP e sua variante periódica;
2. Estudo dos métodos existentes para resolver esse tipo de problemas combinatórios;
3. Estudo sobre a metaheurística SA.

Este estudo da bibliografia ajudou na constatação da falta de literatura relevante sobre o PLRP e em especial a falta de trabalhos que abordem a designação fixa de cliente-depósito.

Em seguida, após conhecer inteiramente o problema abordado, fez-se uma análise do modelo matemático, com o propósito de entender mais a fundo o conceito de designação fixa e aplicá-lo ao PLRP. Depois, foram definidas as etapas que compreendem o método de solução, junto com a implementação do método e a realização de testes computacionais da metaheurística SA usando as instâncias do PLRP-FA. Os resultados obtidos neste estudo

foram comparados com os resultados disponíveis na literatura, com o propósito de validar as variações e ganhos na eficiência do método utilizado.

Durante a fase de implementação do método de solução foram testadas várias linguagens de programação, entre elas Python, Julia e C++, sendo escolhida esta última por ser uma das mais utilizadas no âmbito acadêmico para resolver problemas combinatórios de grande escala, e pelo fato de apresentar um ganho significativo de desempenho nos algoritmos implementados. Adicionalmente, o Python foi utilizado para gerar as saídas gráficas e para fazer a análise dos dados.

1.5 Estrutura do trabalho

Esta dissertação está composta por seis capítulos, incluindo o capítulo da introdução, os quais estão organizados conforme a seguir:

O Capítulo 2 faz uma revisão da bibliografia do problema estudado, começando por uma breve resenha sobre o problema de localização de instalações (seção 2.1) e o problema de roteirização de veículos (seção 2.2; em seguida, é revisado o problema de localização-roteirização, descreve-se a sua origem e os métodos de solução mais usados (seção 2.3); na sequência é apresentado o problema de localização-roteirização periódico e os principais métodos de solução (seção 2.4); para finalizar o capítulo, revisa-se a literatura sobre a metaheurística *simulated annealing* e sua utilização na resolução dos problemas combinatórios abordados neste estudo.

O Capítulo 3 apresenta a formulação matemática do problema de localização-roteirização periódico com designação fixa de cliente-depósito, e faz-se uma análise em relação à formulação apresentada por [Prodhon \(2011\)](#).

O Capítulo 4 detalha o método de solução proposto neste estudo, iniciando com a descrição da estrutura utilizada para representar uma solução do PLRP-FA (seção 4.1); seguido da explicação do estágio de geração de soluções iniciais (seção 4.2); na sequência descreve-se o algoritmo da metaheurística *simulated annealing* que forma o segundo estágio do método de solução (seção 4.3); e finaliza com a explicação da estratégia de paralelização utilizada no método de solução (seção 4.4).

O Capítulo 5 descreve os teste computacionais feitos com o método de solução desenvolvido, nele especifica-se a calibração dos parâmetros de cada estágio do método de solução (seção 5.1); e finaliza com a análise dos resultados obtidos na resolução das instâncias do PLRP disponíveis na literatura (seção 5.2).

Finalmente, o Capítulo 6 apresenta a conclusão desta pesquisa e as considerações para trabalhos futuros sobre o problema de localização-roteirização periódico.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os estudos na teoria da localização começaram no início do século XX, e por vários anos esses processos foram abordados separadamente dos processos de distribuição. A partir do final da década dos anos 1950, surgiram modelos matemáticos envolvendo planejamento de rotas de distribuição. É importante frisar que, graças ao interesse comum do meio acadêmico por buscar métodos de solução mais aprimorados e mais próximos da realidade foi o que permitiu que esses problemas fossem integrados, dando origem ao LRP.

Neste capítulo é apresentada a revisão da literatura referente ao problema estudado nesta pesquisa. Inicialmente é feita uma resenha do FLP e do VRP, alvejando o entendimento do escopo de cada um destes problemas e suas relações com o LRP. Na sequência, são citados os principais trabalhos que abordaram estes processos durante a fase inicial de integração, e a análise da literatura sobre o LRP clássico e suas principais variantes. Em seguida, é apresentada a bibliografia mais relevante sobre o PLRP, e uma revisão dos métodos de solução costumeiramente usados para resolver o LRP e o PLRP. Para finalizar, apresenta-se o levantamento da literatura sobre a metaheurística SA.

2.1 Problema de localização de instalações (FLP)

Na logística, o processo de localização de instalações tem a finalidade de definir o lugar onde são feitas as operações de produção, armazenagem e, inclusive, o atendimento dos clientes. Os estudos sobre este assunto têm suas origens na Alemanha com o trabalho de [Weber e Friedrich \(1929\)](#) intitulado *Theory of the Location of Industries*. Estes primeiros estudos, abordaram o problema de localizar um depósito de tal maneira que a distância até os clientes fosse mínima.

Segundo [Daskin \(2008\)](#), os modelos de localização de instalações têm sido usados por anos em diversos setores que vão desde a localização de hospitais, ambulâncias, postos de bombeiros, escolas, reservas para preservação de espécies em perigo, bases aéreas, até aterros sanitários; outras aplicações mais frequentes são a localização de plantas de produção e de centros de distribuição. Destaca-se que, a taxonomia apresentada por este autor divide os modelos de localização em quatro grandes áreas, classificadas pelo tipo de abordagem utilizada na modelagem, estas são:

- a) *Modelos analíticos* – são considerados como os mais simples; são aplicados em problemas específicos onde a demanda apresenta uma distribuição contínua em uma determinada área; as instalações podem ser localizadas em qualquer ponto desta área; geralmente, estes modelos são resolvidos usando técnicas como cálculo e geometria para encontrar o mínimo custo total, considerando

as parcelas de localização e de transporte;

- b) *Modelos contínuos* – são caracterizados pela demanda discreta, localizada em pontos específicos de uma determinada área; de modo geral, para resolver estes modelos são usados algoritmos iterativos, procurando minimizar a distância e o custo total;
- c) *Modelos de redes* – são representados sobre uma rede formada por vértices (pontos de demanda) e arcos (ligações entre os vértices), nestes modelos as instalações podem ficar localizadas em qualquer parte da rede, inclusive nos arcos; o objetivo deste tipo de modelos é minimizar a distância total entre as instalações e os clientes; e
- d) *Modelos discretos* – representam um grande grupo com uma ampla variedade de interpretações e abordagens; habitualmente são classificados em modelos de cobertura, como os p -centro, p -mediana e de custo fixo; no geral, são definidos sobre uma rede com as demandas nos vértices e um conjunto finito de possíveis localizações para as instalações; os arcos podem ser ponderados com o propósito de representar custos ou distâncias.

Daskin (2008) indica que os problemas de localização possuem características de planejamento de nível estratégico que impactam as decisões nos níveis tático e operacional. Como exemplo destes impactos, algumas das variantes do problema de localização consideram aspectos logísticos, como gerenciamento de estoques e roteirização, ao longo horizonte de planejamento. Inclusive, Bramel e Simchi-Levi (1995) ressalta que o FLP tem servido como estratégia para resolver o VRP, graças à simplicidade das suas restrições.

De acordo com Laporte, Nickel e Gama (2019), os modelos discretos de localização são os tópicos fundamentais no campo da teoria da localização, e servem de base para tópicos mais avançados, tais como múltiplos períodos, múltiplos critérios, roteirização de veículos, e modelos estocásticos; por citar só algumas possíveis variantes.

Uma das variantes do FLP que cabe destacar nesta revisão de literatura é aquela que considera um horizonte de planejamento com múltiplos períodos. Esta variante é conhecida como o problema de localização de instalações periódico, ou *periodic facility location problem* (PFLP), sendo uma característica importante desta variante, os impactos causados por decisões tomadas no período inicial sobre as decisões dos períodos subsequentes.

Um dos primeiros trabalhos que abordaram o PFLP foi apresentado por Ballou (1968), quem identificou uma perda de otimalidade dos modelos estáticos do FLP quando aplicados em períodos posteriores. Nos trabalhos de Wesolowsky e Truscott (1975), Van Roy e Erlenkotter (1982) foram discutidos o PFLP sem limite de capacidade e com realocação de instalações, sendo possível a abertura e fechamento de instalações a partir do

segundo período do horizonte; o fechamento acontecia em instalações abertas nos períodos anteriores ao atual. Outro estudo sobre o PFLP foi apresentado por [Albareda-Sambola et al. \(2009\)](#) que trataram o problema da demanda incremental, utilizando uma abordagem que permite abrir novas instalações de acordo com o crescimento da demanda, e permitindo só o fechamento das instalações no final do horizonte de planejamento.

2.2 Problema de roteirização de veículos (VRP)

O problema de roteirização de veículos (VRP) surgiu a partir da generalização do problema do caixeiro viajante (TSP). Este foi modelado pela primeira vez por [Dantzig e Ramser \(1959\)](#), para uma operação de distribuição de gasolina para postos de combustível. A partir de então, o VRP tem sido conhecido por ser um problema que apresenta grande variedade de aplicações no mundo real, sendo seu uso mais frequente em redes de distribuição e programação de visitas a clientes. Além disso, [Laporte \(2007\)](#) afirma que milhares de distribuidores no mundo têm utilizado o VRP em suas operações de distribuição graças à significativa importância econômica.

O VRP consiste em encontrar as rotas ótimas para o atendimento de um conjunto de clientes dispersos em uma determinada área, a partir de um ponto central (depósito). A principal diferença entre o VRP e o TSP está nessa consideração de múltiplas rotas para realizar os atendimentos dos clientes, pois o problema possui restrições que limitam a extensão das rotas, fazendo necessária a utilização de mais de um veículo. Entre as restrições do VRP, as que mais se destacam são: o limite de capacidade dos veículos, o limite de distância percorrida, e o limite de tempo de execução. Além disso, geralmente o VRP deve cumprir as seguintes condições:

- a) Cada veículo deve retornar ao ponto de origem depois de atender a demanda de um subconjunto de clientes;
- b) Encontrar rotas cíclicas de distância mínima para atender todo o conjunto de clientes;
- c) As entregas para um subconjunto de clientes são feitas em uma única viagem;
e
- d) A capacidade do veículo que atende os clientes é menor que a demanda total do conjunto de clientes.

[Laporte \(2007\)](#) ressalta a dificuldade existente para definir um modelo clássico do VRP, devido à grande quantidade de aplicações práticas que têm sido modeladas na literatura, muitas delas feitas para situações específicas. Contudo, o VRP clássico está definido sobre um grafo não orientado $G = (V, E)$ onde $V = \{0, 1, \dots, n\}$ é o conjunto de vértices e $E = \{(i, j) : i, j \in V, i \neq j\}$ é o conjunto de arcos. Comumente, o vértice $i = 0, i \in V$ representa o depósito, onde é alocado um conjunto de m veículos de capacidade

Q idêntica. A cada cliente $i \in V \setminus \{0\}$ é associada uma demanda $D_i \leq Q$ com valor não negativo. Os arcos E desta rede são ponderados de acordo com os valores de uma matriz C_{ij} que podem representar custos, tempos ou distâncias entre os vértices. Desta maneira, o problema consiste em determinar o conjunto m de rotas que deve-se cumprir as seguintes condições:

- a) O ponto de início e o ponto de término de cada rota é o mesmo;
- b) Cada cliente é visitado exatamente por um único veículo;
- c) A demanda total de cada rota não excede a capacidade do veículo;
- d) O custo total de roteirização é mínimo (objetivo); e
- e) A desigualdade triangular é respeitada.

Definido desta maneira, encontrar uma solução para o VRP pode ser comparado com encontrar a solução para m TSPs, sendo um TSP para cada veículo. Laporte (2007) destaca a complexidade combinatória por trás do VRP, podendo-o enquadrar no grupo dos problemas do tipo NP-*hard* por tratar-se de uma extensão do TSP. Este autor também apresenta alguns dos métodos mais utilizados na resolução do VRP, dando destaque aos métodos exatos, tais como: os baseados em programação linear inteira, ou *integer linear programming* (ILP); os de programação dinâmica, ou *dynamic programming* (DP); e os algoritmos *branch-and-bound* (B&B). Métodos heurísticos e metaheurísticos também têm sido considerados na sua solução, sendo mais comuns as heurísticas construtivas, tais como: o algoritmo das economias de Clarke e Wright (1964); e a heurística das pétalas de Renaud, Boctor e Laporte (1996). A Figura 5 ilustra um exemplo de uma solução ótima para o VRP clássico, com 5 rotas definidas para realizar o atendimento de 20 clientes.

Segundo Laporte (2009), as heurísticas de melhoria são outros métodos presentes na literatura para resolver o VRP utilizando uma sequência de movimentos que alteram a estrutura das rotas. Entre os movimentos mais destacados estão: os intra-rota 2-*opt* e 3-*opt*; e os inter-rota, que realizam as alterações entre os vértices de duas ou mais rotas diferentes. Além disso, o autor ressalta a utilização de métodos de solução metaheurísticos tais como: os baseados em busca local, ou *local search* (LS); os baseados em busca tabu, ou *tabu search* (TS); os de busca em vizinhança variável, ou *variable neighborhood search* (VNS); os baseados em busca populacional, como os algoritmos genéticos, ou *genetic algorithms* (GA); e os baseados em mecanismos de aprendizado, como as redes neurais, ou *neural networks* (NN); e a otimização de colônia de formigas, ou *ant colony optimization* (ACO).

Uma prática comum no meio acadêmico é a combinação de problemas clássicos, como o VRP, com outros problemas ou processos que permitam uma abordagem mais próxima da realidade. No caso do VRP, algumas variantes abordam a combinação com aspectos logísticos, tais como: a localização de instalações (LRP); o gerenciamento de estoques, *inventory routing problem* (IRP); e um horizonte de planejamento com múlti-

Figura 5 – Solução ótima de um VRP clássico 20 clientes

Fonte: Produção do próprio autor.

plos períodos (PVRP). [Paletta \(1992\)](#) afirma que, enquanto os estudos dos problemas de roteirização de veículos têm sido dedicados à exploração intensa da parte espacial, poucos trabalhos têm sido desenvolvidos combinando os aspectos espaciais da roteirização com aspectos temporais.

O PVRP surge como uma generalização do VRP, considerando um horizonte de planejamento (por exemplo, uma semana) dividido em períodos menores (por exemplo, os dias da semana). Desta maneira, o PVRP consiste em determinar as rotas de custo mínimo para o atendimento dos clientes em cada período, levando em consideração as restrições de frequência (número atendimentos durante o horizonte) de cada cliente. A resolução do problema deve determinar uma combinação de períodos (dias) de visita em que seja viável realizar o atendimento.

O PVRP foi proposto pela primeira vez por [Beltrami e Bodin \(1974\)](#), para modelar uma operação de coleta de lixo municipal que combinava entregas periódicas com os custos de roteirização, isto com o objetivo de minimizar o número de veículos utilizados na coleta e o tempo de atendimento durante as visitas. [Campbell e Wilson \(2014\)](#) realizaram um levantamento em comemoração dos 40 anos do PVRP, apresentaram uma ampla variedade de aplicações práticas divididas em três grandes grupos: coleta, entrega e prestação de serviços. Os autores também fizeram uma compilação dos métodos exatos e heurísticos mais utilizados para a resolução deste problema.

2.3 Problema de localização-roteirização (LRP)

O LRP é um problema no ramo da pesquisa operacional que surgiu na década dos anos 1960, a partir do estudo da teoria da localização (FLP) em combinação com os trabalhos desenvolvidos na área de roteirização de veículos (VRP). Este problema constitui um esforço de integração de duas grandes áreas do gerenciamento da cadeia de suprimentos, responsáveis por decisões de nível estratégico, no caso da localização de instalações, e de decisões de nível tático, como é o caso do planejamento de rotas de distribuição (DASKIN, 2013).

Os trabalhos desenvolvidos por Boventer (1961) e Maranzana (1964) foram os primeiros que trataram a ideia de relacionar as atividades de localização com as atividades de roteirização. Estes autores apresentaram métodos de solução que integrassem os respectivos custos de localização e de transporte. Posteriormente, Webb (1968) apresentou um estudo onde considerou o efeito que tem a localização dos depósitos sobre os custos de realizar rotas de distribuição com múltiplas entregas, chegando à conclusão de que a função de custos utilizada nos modelos do FLP pode não ser a mais adequada, uma vez que só considera as distâncias do depósito até os clientes.

Estes trabalhos iniciais mostram que os autores tinham ciência da relação da interdependência dos dois processos logísticos, mas existia uma limitação em compreender a complexidade de programar rotas com múltiplos atendimentos, que é o que realmente acontece nas operações de distribuição física. Além disso, era a primeira vez que os modelos de FLP consideravam esta possibilidade Min, Jayaraman e Srivastava (1998).

Outros autores que contribuíram com a evolução do LRP foram Watson-Gandy e Dohrn (1973), Or e Pierskalla (1979), Jacobsen e Madsen (1980), Laporte e Nobert (1981), Madsen (1983) e Perl e Daskin (1985). Estes trabalhos conseguiram constituir a ideia principal de relacionar os dois processos em um único problema, integrando as duas abordagens. Neles também foram apresentadas formulações baseadas em MIP, e reconheceram as vantagens decorrentes desta integração, em termos de redução de custos.

Posteriormente, Salhi e Rand (1989) avaliaram o impacto de considerar os custos de roteirização simultaneamente com as decisões de localização, quando comparado com a abordagem sequencial, isto é, decisões de localização seguidas da construção de rotas, para uma certa configuração de depósitos. Os autores concluíram que a abordagem integrada resulta em soluções que são tão boas quanto aquelas obtidas pela abordagem sequencial e, acrescentaram que, para algumas das instâncias avaliadas foram encontradas soluções melhores que indicam que a integração de ambas decisões é uma estratégia promissora.

No levantamento da literatura feito por Nagy e Salhi (2007) foi apresentado o LRP como uma boa proposta para modelar e resolver aqueles problemas de localização que têm como objetivo encontrar, simultaneamente, uma solução para o problema de roteirização

de veículos, com a finalidade de gerar uma solução satisfatória. Estes autores também mostraram que os estudos sobre LRP têm ganhado grande interesse e que, além do mais, este continua como um tópico de pesquisa ativo, segundo a ampla variedade de aplicações desenvolvidas e pelas variantes que ainda estão em exploração.

De acordo com [Berger, Coullard e Daskin \(2007\)](#), o modelo geral do LRP busca minimizar o custo total por meio da seleção paralela do conjunto de instalações e das rotas de atendimento dos clientes, satisfazendo restrições como:

- a) Atender a demanda dos clientes, respeitando tanto a capacidade dos veículos quanto a dos depósitos;
- b) A extensão e a duração das rotas não devem exceder os limites estabelecidos;
- c) Cada rota começa e termina em um mesmo depósito; e
- d) As rotas não podem exceder o número de veículos disponíveis.

Segundo [Daskin \(2013\)](#), os problemas que combinam localização e roteirização são significativamente mais difíceis que os problemas que só consideram localização. A dificuldade em resolver estes problemas está nos tipos de decisões que o modelo deve ajudar a tomar simultaneamente, por exemplo:

- a) Quantas instalações localizar?
- b) Qual o lugar onde devem estar estas instalações?
- c) Quais clientes atribuir a quais instalações?
- d) Quais clientes atribuir a quais rotas?
- e) Qual a ordem em que os clientes devem ser atendidos em cada rota?

Por outro lado, na literatura também tem sido sugerido que, dada a interdependência entre o FLP e o VRP, a composição da frota no modelo do LRP deve fazer parte das variáveis de decisão ([PERL; DASKIN, 1985](#)), a não ser que o tamanho da frota seja um limitante dentro do problema e represente uma restrição. Desta maneira, a própria solução do modelo irá associar o tamanho da frota necessário para operar a um custo mínimo.

[Prodhon e Prins \(2014\)](#) apresentaram um levantamento sobre o LRP e as principais variantes. Estes autores analisaram um total de 72 artigos de novos trabalhos, que de maneira significativa demonstram o rápido crescimento deste problema no meio acadêmico. Os autores também aportaram uma definição padronizada do problema, sendo referida como a definição clássica que consiste em determinar:

- a) O subconjunto de depósitos candidatos a serem abertos, utilizados para atender a demanda dos clientes;
- b) Os clientes que são designados a cada depósito aberto; e

- c) A sequência em que são feitos os atendimentos dos clientes.

Desta maneira, para cada depósito aberto devem ser atendidos um conjunto de clientes, que deverão ser visitados exatamente uma vez e toda sua demanda deverá ser satisfeita. Adicionalmente, a definição clássica do LRP considera que todos os dados são determinísticos, e o planejamento das rotas é feito para um único período. Além disso, o objetivo é minimizar a soma entre os custos de operação dos depósitos, os custos de utilização da frota, e os custos de execução das rotas. A importância desta função objetivo está na integração desses custos, contrariando as abordagens individuais que podem levar a considerações excessivas dos custos. Esta definição também aponta que o problema pode ser representado sobre uma rede $G = V, E$, em que V é o conjunto de vértices, que representam os depósitos e os clientes, e E é o conjunto dos arcos, que representam as ligações entre os vértices.

Na literatura têm sido estudadas outras abordagens que incluem aplicações reais e combinações com outros tipos de problemas, segundo apresentado pelas taxonomias feitas por [Prodhon e Prins \(2014\)](#) e [Drexler e Schneider \(2015\)](#). Estes autores apresentaram um amplo conjunto de variantes relacionadas com o LRP, baseadas principalmente em aspectos como: a natureza da demanda; a capacidade dos depósitos; a capacidade dos veículos; a localização em múltiplos períodos; a roteirização com múltiplos períodos; inclusão ou não de elementos como múltiplos objetivos, que geralmente são referentes a custos, cobertura da rota, eficiência da rota, nível de serviço, e riscos nas entregas; outras variantes também se destacam por possuir múltiplos estágios, roteirização com sincronização de trailers, gerenciamento de estoques, entregas fracionadas, janelas de tempo, duração do atendimento e, inclusive, coletas e entregas simultâneas.

Desta maneira, vale ressaltar que as variantes do LRP que consideram um horizonte de planejamento dividido em períodos estão separadas entre estáticas e dinâmicas. A principal característica das variantes estáticas é a natureza determinística da demanda dos clientes, que é conhecida em cada período do horizonte de planejamento. Entretanto, as variantes dinâmicas consideram a natureza estocástica dos dados, que geralmente são desconhecidos e apresentam variação entre os períodos. Na seguinte seção apresenta-se a variante periódica do LRP, conhecida como o problema de localização-roteirização periódico (PLRP), com todos os dados são de natureza determinística.

De acordo com [Talbi \(2009\)](#), os métodos exatos e os métodos heurísticos, são comumente usados para a resolução de problemas no campo da pesquisa operacional. Em geral, a literatura sobre o LRP mostra que a complexidade do problema foi reconhecida desde os primeiros estudos neste campo ([WATSON-GANDY](#); [DOHRN, 1973](#); [OR](#); [PIERSKALLA, 1979](#); [JACOBSEN](#); [MADSEN, 1980](#); [PERL](#); [DASKIN, 1985](#)), deixando evidente a necessidade de utilizar métodos heurísticos, devido a seu bom desempenho para encontrar soluções a problemas deste porte. Outros estudos também propuseram métodos

exatos, mesmo que para instâncias menores (LAPORTE; NOBERT, 1981; LAPORTE; NOBERT; PELLETIER, 1983; SALHI; RAND, 1989).

Tuzun e Burke (1999) estudou o LRP com depósitos sem capacidade. O problema foi resolvido usando um algoritmo de busca tabu (TS) de dois estágios, onde o primeiro estágio envolve uma busca de vizinhança relacionada às decisões de localização, e o segundo estágio foca-se em melhorar as rotas. Com o intuito de definir as rotas, era usado um algoritmo de economias, seguido de um processo de *2-opt*. Os resultados obtidos foram comparados com outros problemas da literatura, que indicaram que o método proposto é competitivo.

Melechovský, Prins e Calvo (2005) trabalharam o LRP capacitado, considerando economias de escala quando grandes quantidades de carga são transportadas através dos depósitos. Foi proposto um modelo matemático que considerou custos não lineares. O método de solução estava composto por uma fase de construção seguido por uma metaheurística híbrida. A primeira fase incluiu um processo de geração aleatória de soluções e um algoritmo baseado em *p-median*. Para a segunda fase, foi implementado um algoritmo VNS integrado com um algoritmo de busca tabu (TS) como mecanismo de busca local. Esta estratégia de exploração do espaço de solução foi orientada à roteirização, resultando em diferentes configurações de rede. Foram realizados testes computacionais do método usando um conjunto de 33 instâncias desenvolvidas pelos próprios autores. Os autores observaram que a utilização de custos não lineares favorecem a seleção de clientes com menores intervalos de carga, mesmo que estejam mais afastados dos depósitos, o que resulta em custos menores, mesmo com rotas mais longas. Os resultados obtidos demonstraram que a combinação dos dois métodos é eficaz para a resolução do problema, quando comparado com os resultados dos métodos utilizados de forma independente.

Já Albareda-Sambola, Díaz e Fernández (2005) estudaram o LRP com veículos sem limite de capacidade e depósitos com limite de capacidade. O método de solução proposto estava composto por uma fase de geração de soluções iniciais baseada em uma relaxação do problema baseada em ILP que fornecia *lower bounds* para a solução do problema, em seguida, na segunda fase era aplicada uma metaheurística TS com a finalidade de explorar o espaço de solução e encontrar *upper bounds*. O método proposto mostrou-se promissor para resolver o LRP, além de possibilitar a integração com o método de geração de colunas e a aplicação em versões mais gerais do LRP.

Em contrapartida, Prins et al. (2007) trabalharam o LRP capacitado. O método de solução proposto está formado por uma fase de localização, seguido de uma fase de roteirização. A primeira fase consiste em agrupar os clientes próximos para formar superclientes, em seguida, estes são designados aos depósitos resolvendo uma relaxação lagrangiana contendo as restrições de localização. A segunda fase se encarrega de fazer a melhoria das rotas usando uma heurística TS granular, seguida de uma heurística de LS. O método

realiza a troca entre as duas fases de maneira iterativa até alcançar o critério de parada, sendo que, a cada iteração os movimentos e os arcos mais frequentes são registrados e usados nas iterações seguintes. É importante ressaltar que, os resultados dos testes computacionais do referido método, conseguiram melhorar em 80% os valores das soluções, quando comparados com outros métodos heurísticos e metaheurísticos.

Barreto et al. (2007) propuseram uma heurística sequencial baseada em análise de clusterização para resolver o LRP capacitado. A ideia principal do método consiste em formar clusters de clientes próximos usando seis medidas de clusterização diferentes e limitando a formação pela capacidade dos veículos. Na sequência, é usado um algoritmo LS para converter estes clusters em rotas fechadas, a execução do algoritmo finaliza quando todas as rotas geradas são designadas aos depósitos. Destaca-se que, o método foi apresentado em quatro versões, cada uma usando uma estratégia de clusterização diferente, sendo duas hierárquicas e duas não hierárquicas. Foram realizados testes computacionais utilizando as instâncias da literatura específicas do LRP e instâncias adaptadas do VRP, as análises dos resultados demonstraram a importância de utilizar técnicas de clusterização e ressaltaram a eficiência do método na resolução do problema.

Duhamel et al. (2008) resolveram o LRP capacitado usando um *memetic algorithm* (MA), que consiste na utilização conjunta de GA com LS. As soluções do método de solução são representadas como uma sequência de clientes sem a definição de rotas nem a designação de depósitos, que podem ser facilmente convertidas em soluções viáveis, utilizando um algoritmo de partição (*split*) para a formação das rotas. No estudo, a representação das soluções favoreceu a aplicação de movimentos clássicos de LS. Após testes computacionais, o método se mostrou eficiente para resolver o problema, entregando soluções de boa qualidade, porém os autores ressaltam que a execução o método requer alto tempo computacional.

Derbel et al. (2011) aplicaram uma heurística VNS para resolver o LRP capacitado. O método utiliza um algoritmo de busca em vizinhança variável descendente, ou *variable neighborhood descent* (VND), como mecanismo de busca local. Os tipos de vizinhança utilizados incluem operadores intra-rota e inter-rota, definido pelos seguintes movimentos: remoção e inserção de um cliente; troca (*swap*) entre dois clientes; remoção e inserção de uma sequência de clientes; e *swap* de uma sequência de clientes, considerando a ordem atual e a invertida. O método também inclui um operador para mudar uma rota completa para um depósito aberto ou fechado, e a aceitação de movimentos que violam a capacidade do veículo ou do depósito, mas com uma penalização na função objetivo. As instâncias da literatura foram resolvidas com sucesso.

Hemmelmayr, Cordeau e Crainic (2012) estudaram um problema encontrado no contexto de logística urbana conhecido como o problema de roteirização de veículos de dois estágios, ou *two-echelon vehicle routing problem* (2E-VRP), que considera os atendimentos

aos clientes feitos a partir de depósitos satélites, sendo esses depósitos abastecidos a partir de um depósito central. Este problema pode ser claramente visto como uma versão generalizada do LRP capacitado. Os autores propuseram uma heurística de busca em vizinhança ampla adaptativa, ou *adaptive large neighbourhood search* (ALNS), que se baseia em uma LS com uma ampla variedade de operadores de destruição e reparação.

Villegas et al. (2013) estudou o problema de roteirização com trailers, ou *truck and trailer routing problem* (TTRP). Este problema pode ser visto como um caso especial do LRP, uma vez que os trailers representam depósitos secundários, ou satélites, que são puxados por caminhões, devendo serem estacionados em algum lugar próximo, caso as visitas dos clientes não permitam o acesso de trailers. Os autores apresentaram uma formulação do problema baseada em partição de conjuntos. O método de resolução proposto consiste em uma metaheurística de dois estágios. O primeiro estágio está encarregado pela formação de um *pool* com as rotas mais promissórias, utilizando uma heurística *route-first cluster-second* que constrói o roteiro gigante (etapa *route-first*) usando um algoritmo *greedy randomized adaptive search procedure* (GRASP), e o particiona em rotas menores (etapa *cluster-second*) usando um algoritmo de geração de etiquetas, que resolve um problema do caminho mais curto com restrições de recursos, ou *resource-constrained shortest-path problem* (RCSPP). O primeiro estágio do método é gerenciado por um algoritmo de busca local iterativa, ou *iterated local search* (ILS), que ao invés de executar um algoritmo LS, executa um de busca VND para selecionar as melhores rotas. O segundo estágio consiste em um modelo que resolve um problema de partição de conjuntos, ou *set partitioning problem* (SPT), para esse *pool* de rotas, utilizando o *solver* Gurobi. Os autores concluíram que o método proposto mostrou um desempenho superior comparado com outros métodos propostos na literatura, e que entregou soluções de melhor qualidade.

Jarboui et al. (2013) estudaram o LRP com restrição de capacidade nos depósitos e veículos sem restrição de capacidade. Os autores propuseram um heurística VNS, com quatro tipos de vizinhança para melhora de rotas e um tipo de vizinhança para modificar o conjunto de depósitos abertos. Um algoritmo de busca VND foi usado como mecanismo para substituir a LS dentro da estrutura do VNS, este estava baseado em cinco tipos de vizinhança. As perturbações feitas no algoritmo geravam soluções aleatórias e semi-aleatórias, o que contribuiu com o bom desempenho do método. O método conseguiu resolver com sucesso instâncias da literatura, com resultados melhores ou iguais quando comparado com outros métodos heurísticos.

Ting e Chen (2013) estudaram o LRP capacitado e desenvolveram um método de solução baseada em um algoritmo de otimização de colônia de formigas múltipla, ou *multiple ant colony optimization* (MACO). Sua abordagem foi capaz de resolver com sucesso as instâncias da literatura, competindo com os melhores algoritmos conhecidos. Três problemas diferentes são solucionados hierarquicamente com o *framework* MACO

proposto, que inclui: a seleção de depósitos, a designação cliente-depósito, e o problema de roteirização. Cada iteração permitia a comunicação entre as diferentes colônias de formigas, que são responsáveis pelas decisões de localização e designação, usando uma determinada regra global de feromônios.

Escobar, Linfati e Toth (2013) propuseram um algoritmo híbrido de duas fases para resolver o LRP capacitado. Na primeira fase, o método consiste em gerar um roteiro gigante com todos os clientes usando a heurística de Lin-Kernighan, seguido de um modelo ILP para encontrar a designação cliente-depósito, e depois aplica um processo de partição para definir as rotas. A fase de melhoria baseia-se em uma TS granular, que executa um esquema de granularidade que só aceita arcos pertencentes ao espaço de busca granular; seguido de movimentos como inserção, *swap*, 2-opt, inserção de dois clientes consecutivos, e inserção inter-rota que faz um *swap* com dois clientes consecutivos de rotas diferentes. Esta fase também inclui, um processo de diversificação com modificações no nível de granularidade, aceitação de soluções inviáveis e modificação da melhor solução. Esse processo é seguido por uma perturbação aleatória para escapar de ótimos locais de baixa qualidade.

Escobar et al. (2014) resolveram o LRP capacitado usando um algoritmo que combina a TS granular com um algoritmo VNS. As soluções iniciais são geradas usando uma heurística híbrida proposta por Escobar, Linfati e Toth (2013). O mecanismo VNS se encarregava de controlar as alterações de vizinhança e o TS granular servia como guia no processo de busca. o algoritmo utilizou operadores de perturbação que executavam movimentos como: intra-rotas, inter-rotas, busca em espaço granular e, inclusive, movimentos que permitiam soluções inviáveis. Os autores realizaram testes computacionais com as instâncias disponíveis na literatura, mostrando a efetividade do método quando comparado com os resultados de alguns dos melhores algoritmos estudados na literatura.

2.4 Problema de localização-roteirização periódico (PLRP)

Esta é a variante do LRP que considera um horizonte de planejamento dividido em múltiplos períodos. No trabalho de Nagy e Salhi (2007), esta variante foi indicada como um dos principais tópicos relacionados com o LRP, sendo preciso a realização de mais estudos, a fim de contribuir com o desenvolvimento do LRP como um campo promissório de pesquisa.

Os dois problemas que deram origem ao LRP apresentam variantes periódicas que consideram horizontes de planejamento (seções 2.1 e 2.2). Na Figura 6 é utilizado um diagrama de Venn para ilustrar a relação entre as duas famílias de problemas, com as versões periódicas (PFLP e PVRP) sendo representadas como um subconjunto destas. Na interseção dos dois grandes conjuntos (FLP e VRP) é possível observar o surgimento do LRP e junto com a versão temporal do VRP observa-se o surgimento o PLRP, problema

Figura 6 – A interseção entre o FLP e o VRP que dá a origem ao PLRP.

Fonte: Produção do próprio autor.

que considera somente a parte periódica durante os atendimentos dos clientes. Outro problema que surge nessa interseção é o MPLRP, que junto com as visitas periódicas aos clientes, também considera a tomada de decisão respeito à localização ao longo do horizonte de planejamento, isto é, os depósitos podem ser abertos em um período e fechados em outro período posterior. É importante ressaltar que a variante MPLRP não faz parte do escopo desta pesquisa.

O primeiro trabalho na literatura que abordou formalmente o PLRP foi apresentado por [Prodhon \(2008\)](#). Foi a partir deste estudo que o problema ficou conhecido pela sigla PLRP. Nesta variante do LRP, as decisões de localização são tomadas no começo do horizonte de planejamento, definindo um subconjunto de depósitos abertos para operação, que serão utilizados ao longo dos períodos subsequentes. Em seguida resolve-se o problema de roteirização com múltiplos depósitos, ou *multi depot vehicle routing problem* (MDVRP) ([ESCOBAR et al., 2014](#)) para cada período. A demanda em cada período de atendimento é determinada de acordo a um padrão de dias de atendimento, que obedece a frequência de visitas definida pelos clientes. Após o estudo introdutório do problema, a mesma autora publicou outros estudos que contribuíram para o amadurecimento da ideia principal do problema ([PRODHON; PRINS, 2008](#); [PRODHON, 2009](#)). Posteriormente, [Prodhon \(2011\)](#) apresentou a primeira formulação matemática para o PLRP utilizando MIP, o modelo matemático apresentado no Capítulo 3 está baseado nesta formulação.

Outros estudos têm contribuído com o desenvolvimento do PLRP, apresentando diversos métodos de solução ([PIRKWIESER; RAIDL, 2010](#); [PIRKWIESER, 2012](#); [HEM-MELMAYR, 2015](#); [KOÇ, 2016](#)) e, inclusive, aplicações práticas em produção de azeite de oliva ([TUNALIOLU; KOÇ; BEKTA, 2016](#); [RAFIE-MAJD; PASANDIDEH; NADERI, 2018](#); [VAHDANI et al., 2018](#)). Cabe ressaltar que o trabalho desenvolvido por [Albareda-Sambola, Fernández e Nickel \(2012\)](#) pode ser visto como uma variante do PLRP. Estes autores modelaram o MPLRP (mostrado na interseção da Figura 6) considerando um

horizonte de planejamento com duas escalas temporais, uma escala de maior tamanho para os períodos em que são tomadas as decisões de localização (abertura e fechamento) dos depósitos, e outra escala de menor tamanho para os períodos (dias) em que acontece a programação das rotas de atendimento aos clientes. Na prática, o fato de abrir e fechar depósitos não é uma tarefa rotineira para as empresas, uma vez que os horizontes de planejamento geralmente são longos e incertos. De modo geral, as decisões estratégicas como a localização de instalações acontecem de acordo com seus prazos de retorno do investimento ou por duração de contratos, além disso, o planejamento de operações que envolvem algum fator temporal vê-se afetado por outros fatores externos.

Os métodos de solução metaheurísticos têm sido a maneira mais comum de encontrar soluções para o PLRP. No trabalho de [Prodhon \(2008\)](#), que introduziu o problema na literatura, a autora propôs uma metaheurística iterativa baseada em uma extensão do algoritmo das economias, conhecido como o *randomized extended Clarke and Wright algorithm* (RECWA), que inicia transformando o problema em um LRP, selecionando o subconjunto de depósitos abertos; em seguida, constrói uma solução viável do problema designando os clientes para esses depósitos, assumindo que os clientes que estão adjacentes em uma solução do LRP têm uma grande chance de estar na mesma rota de uma solução do PLRP; depois o algoritmo tenta melhorar estas soluções aplicando perturbações de intensidade sobre as rotas e realizando LS. A autora realizou testes computacionais com três grupos de instâncias: as instâncias do LRP considerando o PLRP com um único período; as instâncias do PVRP considerando o PLRP com um único depósito disponível; e um conjunto novo de instâncias geradas especificamente para o PLRP com m depósitos e n clientes. A autora concluiu que o método proposto se mostrou favorável para todas as decisões que integram o problema, e conseguiu proporcionar bons resultados para o LRP e o PVRP.

Em [Prodhon \(2011\)](#) foi apresentada, pela primeira vez, uma formulação formal para o PLRP. A autora também propôs um novo método de solução, desta vez usando uma metaheurística híbrida baseada em busca local evolutiva, ou *evolutionary local search* (ELS). O método inicia utilizando o algoritmo ELS para fazer a designação de um programa de visitas (combinação de dias de atendimento) para cada cliente. Em seguida, aplica o algoritmo RECWA para a formação das soluções iniciais viáveis, que seguem para uma etapa de melhora, utilizando LS. O método foi testado com as instâncias de [Prodhon \(2008\)](#), mostrando-se eficiente na resolução do problema, conseguindo melhorar os resultados anteriores, e entregando soluções de boa qualidade. A autora sugere que trabalhos futuros devem ser direcionados a encontrar um *lower bound* do problema e a continuar explorando as metaheurísticas híbridas.

[Hemmelmayr \(2015\)](#) estudou o PLRP e desenvolveu quatro métodos de solução baseados em um algoritmo de busca em vizinhança ampla, ou *large neighborhood search*

(LNS), que combina computação paralela com decisões de hierarquia. A diferença de outros algoritmos similares na literatura, o proposto pela autora utilizava uma seleção aleatória dos operadores de destruição e reparação das rotas. Para gerar soluções iniciais, os clientes eram designados ao depósito mais próximo e depois usou o algoritmo das economias para formar as rotas, permitindo que a capacidade dos veículos fosse violada, mas com uma penalidade na função objetivo. Em seguida, o algoritmo realizava a melhoria da função objetivo realizando perturbações e aplicando LS. Os métodos de solução foram testados com as instâncias de [Prodhon \(2008\)](#), sendo comparados com as melhores soluções disponíveis na literatura, se mostrando efetivos para encontrar soluções de boa qualidade, e se destacando pelo ganho de desempenho entregue pela estratégia de paralelização. A autora concluiu o estudo reconhecendo a importância do PLRP e criticando a pouca atenção que tem sido dada na literatura.

[Koç \(2016\)](#) introduziu pela primeira vez na literatura as variantes do PLRP que consideram janelas de tempo e frota heterogênea. O método de solução proposto para resolver estes novos casos é uma metaheurística ALNS unificada. O termo unificada significa que o mesmo método pode ser usado para resolver as três variantes sem precisar de modificações. Os operadores de remoção usados enfatizaram a seleção dos clientes que representam os maiores custos; remoção de clientes próximos em distância, tempo e demanda; remoção dos clientes mais afastados de uma rota; remoção aleatória; e remoção de pares de clientes muito próximos. Como operadores de inserção foram utilizadas três estratégias de seleção baseadas em custos. Para aceitação das novas soluções foi usado o critério de aceitação da metaheurística SA. Os resultados dos testes computacionais feitos com instâncias adaptadas, provenientes de outros problemas similares, se mostraram competitivos, gerando soluções de boa qualidade e um desempenho superior quando comparados com outros métodos. Contudo o autor não deixa claro se considerou na abordagem do PLRP a possibilidade de mudar os depósitos de atendimento em cada período, a formulação matemática apresentada também omite esta restrição.

O método de solução desenvolvido por [Albareda-Sambola, Fernández e Nickel \(2012\)](#) para tratar as diferentes escalas temporais das decisões de localização e as de roteirização, consistiu em utilizar uma estratégia de aproximação que substitui as rotas fechadas por *spanning trees*, em seguida as soluções aproximadas eram transformadas em soluções do problema original usando uma heurística de decodificação. Este método conseguiu reduzir a complexidade do problema original, tornando viável a utilização de um *solver* comercial; além do mais, na maioria dos casos o método conseguiu entregar soluções ótimas e de boa qualidade.

[Vahdani et al. \(2018\)](#) apresentaram um modelo baseado em programação inteira não linear, ou *nonlinear programming* (NLP), para o PLRP com múltiplos objetivos com aplicações em operações humanitárias após a ocorrência de terremotos. o problema abor-

dou localização de centros de distribuição, roteirização de veículos e operações de reparação das vias de acesso. Os objetivos do modelo são: minimizar o tempo de viagem dos veículos, minimizar o custo total da operação e maximizar a confiabilidade das rotas de acesso. Foram propostas duas metaheurísticas para resolver o problema, a primeira baseada em GA, e a segunda baseada em otimização de enxame de partículas, ou *particle swarm optimization* (PSO), que favorecem a otimização de múltiplos objetivos. Os resultados dos métodos foram comparados entre eles, passaram por uma análise estatística e de sensibilidade, concluindo que a abordagem com GA se mostrou mais eficiente no critério espacial, enquanto a outra abordagem entrega soluções melhores nos critérios diversidade, espaço e tempo de solução.

2.5 Metaheurística *simulated annealing* (SA)

No campo da ciência dos materiais, o *annealing* é um processo físico, que consiste em aquecer uma substância a altas temperaturas e depois resfriada lentamente, com o intuito de obter uma estrutura rígida cristalizada mais resistente, ao alcançar o estado sólido com baixa energia potencial intermolecular. A técnica que simula este processo é conhecida como a metaheurística *simulated annealing* (SA), sendo amplamente utilizada na resolução de problemas de otimização combinatória.

A origem da metaheurística SA teve lugar na área de mecânica estatística, a partir de um algoritmo desenvolvido por [Metropolis et al. \(1953\)](#), para simular o comportamento dos átomos de uma substância a uma determinada temperatura. Este algoritmo pondera a transição de um nível de energia para outro nível, utilizando o fator de Boltzmann $\exp(\frac{-\varepsilon}{\kappa T})$, onde ε é a energia do sistema nesse nível, T é a temperatura, e κ é a constante de Boltzmann. Para cada novo nível de energia, calcula-se a diferença de energia $\Delta\varepsilon$ em relação ao nível anterior. Esses níveis de energia novos são selecionados de maneira aleatória. Uma das características importantes do algoritmo está no critério que os autores definiram para aceitação dos novos níveis de energia, sendo que, se $\Delta\varepsilon < 0$, então o novo nível é aceito e substitui o nível atual; caso $\Delta\varepsilon > 0$, calcula-se a probabilidade de aceitação como $P(\Delta\varepsilon) = \exp(\frac{-\Delta\varepsilon}{\kappa T})$, e sorteia-se um número aleatório ρ . Desta maneira, o novo nível é aceito somente se $\rho < P(\Delta\varepsilon)$. Os autores ressaltam que este critério de aceitação possibilita que sejam alcançados todos os níveis do sistema, não só os de mínima energia.

Posteriormente, [Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi \(1983\)](#) propuseram a utilização do algoritmo de [Metropolis et al. \(1953\)](#) para simular o processo de *annealing* com aplicações na resolução de problemas de otimização. Os autores fizeram uma analogia entre as propriedades desse processo físico e as características de um problema de otimização combinatória, de maneira que a função objetivo do problema de otimização representa a quantidade de energia do sistema, e a temperatura é mantida como um parâmetro de

controle nas próprias unidades da função objetivo. Desta maneira, ao simular o resfriamento do sistema utilizando o critério de aceitação definido por [Metropolis et al. \(1953\)](#), é possível realizar uma busca aleatória que consegue escapar da estagnação em ótimos locais de baixa qualidade. Os autores apresentaram uma aplicação do algoritmo SA na resolução de problemas de arquitetura de hardware e o TSP, utilizando um resfriamento exponencial como estratégia para decréscimo da temperatura, $T_t = (\frac{T_f}{T_0})^t T_0$, onde T_t é a t -ésima variação da temperatura, T_0 é a temperatura inicial e T_f a temperatura final. Além disso, a razão $\frac{T_f}{T_0} = 0.9$, corresponde a uma variação de 10% a cada vez que é alcançado o limite de perturbações no sistema, na ordem de entre 10 e 100 vezes o tamanho do problema. Entre as conclusões dos autores, destaca-se a temperatura como o parâmetro que fornece maior controle ao algoritmo, dado que um tipo diferente de problema é obtido a cada novo nível de temperatura, dando destaque as altas temperaturas onde ocorrem grandes alterações na função objetivo, e às temperaturas baixas onde acontecem variações mais refinadas da função objetivo.

Outro trabalho que recriou a mesma técnica de simular o processo de *annealing* com aplicações em otimização, foi apresentado por [Černý \(1985\)](#). Este trabalho é independente do apresentado por [Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi \(1983\)](#) e serviu como complemento da ideia original do surgimento da metaheurística SA. O algoritmo proposto pelo autor foi usado para resolver o TSP com 100 e 200 pontos, esfriando em razão de 1/10 o parâmetro de controle de temperatura a cada 6.600 perturbações. O autor ressalta a importância de permitir a aceitação de soluções mais afastadas da solução atual e não só das próximas a esta, para assim evitar que o algoritmo fique estagnado em algum ótimo local de baixa qualidade. Os autores também comentaram sobre a possibilidade de aplicar um reaquecimento ao sistema com o intuito de fugir destes ótimos locais e consequentemente voltar a baixar a temperatura.

Foi a partir dos trabalhos acima citados que o algoritmo SA começou a ser utilizado para a resolução de problemas de otimização combinatória. Esses trabalhos conseguiram mostrar claramente a semelhança entre as componentes de um problema de otimização e as componentes do processo de *annealing*. A Figura 7 sintetiza a relação entre os dois conceitos, listando de um lado as componentes de um problema de otimização, como são função objetivo e a solução ótima, com sua respectiva correspondente no processo físico de *annealing*, que seria a quantidade de energia e o nível de equilíbrio ou nível de energia mínima.

Problema de otimização	Processo de <i>annealing</i>
Espaço solução	Sistema de partículas
Função objetivo – $f(s)$	Energia – ε
Solução inicial – s_0	Primeiro nível de ε
Ótimo global – s^*	Nível de equilíbrio (ε mínima)
Ótimo local de baixa qualidade	Nível metastável
Busca local	Esfriamento rápido
Parâmetro de controle – T	Temperatura – T
Variáveis de decisão	Posições das partículas
Algoritmo SA	Esfriamento lento

Figura 7 – Analogia entre os componentes de um problema de otimização e o processo de *annealing*.

Fonte: Adaptado de [Talbi \(2009\)](#)

Quando comparado com outras técnicas usadas para a resolução de problemas de otimização combinatória, o algoritmo SA se posiciona como uma generalização do algoritmo de busca local (LS), que consegue resolver um dos maiores entraves que apresenta o algoritmo LS, a estagnação em ótimos locais de baixa qualidade ([DELAHAYE; CHAI-MATANAN; MONGEAU, 2019](#)).

Na Figura 8 ilustra-se um processo de melhoria de uma dada solução inicial s_0 para um problema de otimização. A figura mostra o comportamento, de picos e vales, descrito pela trilha de exploração (curva contínua de cor azul) sobre o espaço de solução (eixo horizontal) para diferentes valores da função objetivo (eixo vertical) do problema de otimização. Com o uso de técnicas como os algoritmos SA ou LS, os pontos s_1 e s_2 podem ser facilmente alcançados (a seta pontilhada de cor verde representa essa melhoria da função objetivo). O ponto s_2 representa um ótimo local de baixa qualidade, região de onde o algoritmo LS não consegue sair, pois pela sua própria natureza, este só aceita soluções que melhoram a função objetivo. No entanto, o algoritmo SA consegue alcançar facilmente o ponto s_3 (escape representado pela linha tracejada de cor vermelha), pois a partir da posição s_2 consegue aceitar uma solução pior, saindo assim da estagnação e ao final, após varias iterações, consegue alcançar o ponto s_4 , que representa a solução ótima global do problema de otimização.

Figura 8 – Representação gráfica de um processo de melhoria da solução de um problema de otimização usando o algoritmo SA.

Fonte: Produção do próprio autor.

Alguns autores, como [Laarhoven e Aarts \(1987\)](#), [Lee e Lee \(2014\)](#), se dedicaram a estudar os conceitos teóricos por trás das componentes dos problemas de otimização e os parâmetros envolvidos no algoritmo SA. Outros autores, como [Christiaens e Vanden Berghe \(2020\)](#), têm se dedicado ao desenvolvimento de aplicações práticas do algoritmo, resolvendo os mais variados problemas de otimização; com destaque para a resolução do TSP, o VRP, o FLR, e o LRP, que pertencem à área de interesse desta pesquisa. Cabe ressaltar que até a data do levantamento feito neste estudo, o algoritmo SA ainda não apresenta trabalhos resolvendo o PLRP, no entanto, o algoritmo ALNS ([KOÇ, 2016](#)) contém, na sua estrutura, um critério de aceitação semelhante ao do algoritmo SA.

[Yu et al. \(2010\)](#) resolveram o LRP capacitado usando uma heurística SA. Uma nova maneira de representar as soluções do problema foi proposta, esta consiste em uma lista que contem todas as rotas da solução separadas pelos depósitos e por zeros (clientes fictícios) para representar o final de cada rota. segundo os autores, esta representação facilita o uso de movimentos entre os clientes, tais como o operador *swap* e o operador *2-opt*. Além disso, são permitidos movimentos que resultem em violação da capacidade dos depósitos, mas com uma penalização da função objetivo. Para gerar soluções iniciais, o método utiliza um algoritmo guloso, que aloca os clientes ao depósito mais próximo, seguido de uma heurística construtiva forma as rotas com os clientes que foram designados a cada depósito. O critério de parada do algoritmo é ativado quando a o valor da temperatura final T_f é alcançado ou após 100 níveis de esfriamento sem conseguir melhorar a função objetivo. Os resultados dos testes computacionais, feitos com as instâncias disponíveis na literatura, foram bons em referência à qualidade das soluções, porém, os

autores ressaltam que o método usado requer um esforço computacional alto, justificado pela técnica de decodificação das soluções.

Ferreira e Queiroz (2018) estudaram o LRP com limites de capacidade, usando como método de solução uma metaheurística SA. No método proposto, a geração de soluções iniciais é feita utilizando um algoritmo guloso que designa os clientes ao depósito mais próximo. Cabe ressaltar que o diferencial deste método está na maneira como são feitas as explorações do espaço de solução, sendo estas organizadas em três fases: a primeira, onde são feitos movimentos (remoção e inserção de um cliente, swap entre dois clientes, remoção e inserção de uma lista de clientes) para perturbar a solução corrente, cada nova solução gerada passa pelo critério de aceitação; a segunda, onde se executa uma busca local composta por dois algoritmos de DP, o *knapsack problem* e o Lin-Kernighan; e por fim a terceira, que faz uma diversificação abrindo um depósito e fechando outro aleatoriamente, sendo os clientes designados para esse novo depósito. É importante assinalar que, duas versões do método foram propostas, uma versão que utiliza as três fases e outra que elimina a segunda fase por questão de ganho de desempenho. Os testes do método entregaram resultados bons com melhoras das soluções para as instâncias presentes na literatura.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA DO PLRP-FA

No Capítulo 1 foi apresentada a descrição do PLRP-FA, dando ênfase no detalhamento das premissas que caracterizam as restrições do problema. Neste capítulo, essas premissas são plasmadas em um modelo matemático baseado em programação inteira mista (MIP). De modo geral, este modelo está composto por uma função objetivo, que agrupa os custos presentes no problema, e uma coleção de restrições baseadas em variáveis de fluxo, que fazem o controle dos arcos percorridos pelos veículos em cada período do horizonte de planejamento.

A formulação do PLRP-FA, apresentada neste capítulo, é uma extensão da formulação do PLRP, mas com o diferencial de ser específica para a versão com designação fixa de cliente-depósito. Além disso, esta formulação leva em consideração as correções de inconsistências e não linearidades da formulação de [Prodhon \(2011\)](#) para o PLRP, que foram tratadas por [Mendes \(2015\)](#).

O PLRP-FA está definido ao longo de um horizonte de planejamento H dividido em períodos, com índice $l \in H$, e sobre um grafo $G = \{V, E\}$, onde V é o conjunto dos vértices e E o conjunto dos arcos de uma rede. Desta maneira, os conjuntos, parâmetros e variáveis de decisão, que compõem a formulação matemática do PLRP-FA, são listados na Tabela 2, Tabela 3 e Tabela 4, respectivamente.

Tabela 2 – Notação dos conjuntos usados na modelagem matemática do PLRP-FA.

Conjunto	Descrição
V	Conjunto de vértices da rede, formado por $\{I \cup J\}$
I	Subconjunto de vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_m\}$ que representam instalações ou depósitos, com índices $i \in I$
J	Subconjunto de vértices $\{v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_j, \dots, v_h, \dots, v_{m+n}\}$ que representam pontos de demanda ou clientes, com índices $j, h \in J$
E	Conjunto de arcos $\{(v_i, v_j)\}$ que ligam todo par de vértices da rede, com índices $i, j \in V, i \neq j$
R	Conjunto formado pelas combinações de períodos (dias) de atendimento apresentadas na Tabela 2 (índice $r \subset H$)
B_j	Subconjunto de R formado pelas possíveis combinações de dias de atendimento, determinadas pela frequência de visitas do cliente j
K	Conjunto que representa a frota homogênea disponível para operação, índice k

Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 3 – Notação dos parâmetros usados na modelagem matemática do PLRP-FA.

Parâmetro	Descrição
O_i	Custo fixo de abertura do depósito $i \in I$
W_i	Capacidade de armazenagem do depósito $i \in I$
C_{ij}	Custo de transporte entre cada par de vértices $i, j \in V$, que depende da distância percorrida
D_{jlr}	Demanda do cliente $j \in J$ no dia $l \in H$ que é determinada pela combinação de dias de atendimento $r \in B_j$
A_{rl}	Parâmetro binário que é igual a 1 se o dia $l \in r$, sendo $r \subset R$, e 0 em caso contrário
F	Custo fixo de utilização de cada veículo $k \in K$ que compõe a frota
Q	Capacidade de cada veículo $k \in K$

Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 4 – Notação das variáveis de decisão usadas na modelagem matemática do PLRP-FA.

Variável	Descrição
x_{ijkl}	Variável binária que é igual a 1 se o veículo $k \in K$ percorre o arco (v_i, v_j) que liga os vértices $i, j \in V$ no dia $l \in H$, e 0 em caso contrário
y_i	Variável binária que é igual a 1 se o depósito $i \in I$ é aberto para operação, e 0 em caso contrário
f_{ij}	Variável binária com valor igual a 1 se o cliente $j \in J$ é designado ao depósito $i \in I$, e 0 em caso contrário
b_{jr}	Variável binária que é igual a 1 se a combinação de dias de atendimento $r \in B$ for designada ao cliente $j \in J$, e 0 em caso contrário
$\mathcal{T}_i$	Variável inteira que representa a quantidade máxima de veículos usados pelo depósito $i \in I$, ver descrição na Tabela 1
q_{jkl}	Variável inteira que representa a quantidade de carga transportada pelo veículo $k \in K$ no dia $l \in H$ para o cliente $j \in J$
w_{ijl}	Variável inteira que representa a quantidade de carga do cliente $j \in J$ armazenada no depósito $i \in I$ no dia $l \in H$

Fonte: Produção do próprio autor.

Desta maneira, após definir os conjuntos, parâmetros e variáveis de decisão que interagem na formulação matemática do PLRP-FA, apresenta-se a função objetivo do modelo, que é a seguinte:

$$\min Z = \sum_{i \in I} O_i y_i + \sum_{i \in I} F \mathcal{T}_i + \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} \sum_{l \in H} C_{ij} x_{ijkl} \quad (3.1)$$

Sujeito a:

$$\sum_k \sum_{j \in J} x_{ijkl} \leq \mathcal{T}_i \quad \forall i \in I, \forall l \in H \quad (3.2)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in V} x_{ijkl} \leq 1 \quad \forall k \in K, \forall l \in H \quad (3.3)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ijkl} - \sum_{i \in V} x_{jikl} = 0 \quad \forall j \in J, \forall k \in K, \forall l \in H \quad (3.4)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ijkl} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq J, \forall k \in K, \forall l \in H \quad (3.5)$$

$$\sum_{i \in I} f_{ij} = 1 \quad \forall j \in J \quad (3.6)$$

$$f_{ij} \leq y_i \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (3.7)$$

$$\sum_{h \in V} x_{ihkl} + \sum_{h \in V} x_{jhkl} \leq 1 + f_{ij} \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \forall l \in H \quad (3.8)$$

$$\sum_{r \in B_j} b_{jr} = 1 \quad \forall j \in J \quad (3.9)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_k x_{ijkl} = \sum_{r \in B_j} A_{rl} b_{jr} \quad \forall j \in J, \forall l \in H \quad (3.10)$$

$$q_{jkl} \geq \sum_{r \in B_j} D_{jlr} b_{jr} - \left(1 - \sum_{i \in V} x_{ijkl}\right) Q \quad \forall j \in J, \forall k \in K, \forall l \in H \quad (3.11)$$

$$\sum_{j \in J} q_{jkl} \leq Q \quad \forall k \in K, \forall l \in H \quad (3.12)$$

$$w_{ijl} \geq \sum_{r \in B_j} D_{jlr} b_{jr} - (1 - f_{ij}) W_i \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall l \in H \quad (3.13)$$

$$\sum_{j \in J} w_{ijl} \leq W_i y_i \quad \forall i \in I, \forall l \in H \quad (3.14)$$

$$x_{ijkl} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \forall l \in H \quad (3.15)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad (3.16)$$

$$b_{jr} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, \forall r \in R \quad (3.17)$$

$$f_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (3.18)$$

$$q_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J, \forall k \in K, \forall l \in H \quad (3.19)$$

$$w_{ijl} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall l \in H \quad (3.20)$$

$$\mathcal{T}_i \in \mathbb{N} \quad \forall i \in I \quad (3.21)$$

A função objetivo (3.1) está composta por três termos, representados da seguinte maneira: primeiro, o custo fixo total de abertura dos depósitos; segundo, o custo fixo total da utilização da frota alocada em cada depósito aberto; e terceiro, o custo total de distribuição, que depende da distância entre cada par de vértices. A restrição (3.2) contabiliza o número de veículos alocados em cada depósito, ao somar o número de arcos que partem de um depósito em cada dia. A quantidade de veículos será o maior valor entre todos os dias do horizonte de planejamento. A restrição (3.3) estabelece que cada veículo

pode realizar apenas uma rota por dia. A restrição (3.4) garante a continuidade do fluxo de veículos em cada vértice visitado. A restrição (3.5) impede a formação de subciclos para cada veículo a cada dia. A restrição (3.6) associa um cliente a um único depósito em todo o horizonte de planejamento. A restrição (3.7) determina que um depósito precisa estar aberto para poder ser designado aos clientes. A restrição (3.8) impede que clientes que estejam alocados a depósitos distintos estejam presentes em uma mesma rota. A restrição (3.9) seleciona uma combinação de dias de atendimento para cada cliente. A restrição (3.10) garante que cada cliente seja visitado exatamente uma vez em cada dia que pertence à combinação de dias de atendimento escolhida. A restrição (3.11) controla a quantidade de carga que um veículo deve transportar para cada cliente em cada dia. A restrição (3.12) fixa o limite de capacidade do veículo. A restrição (3.13) contabiliza a quantidade de carga que um depósito aberto deve armazenar para cada cliente em cada dia de distribuição. A restrição (3.14) fixa o limite de capacidade diário do depósito. As restrições (3.15) a (3.21) tratam do domínio das variáveis de decisão do problema.

É importante ressaltar que as restrições (3.6), (3.7) e (3.8) impõem que o cliente seja atendido a partir de um único depósito ao longo do horizonte de planejamento. Estas são as restrições que fazem que o modelo fique mais próximo da realidade, ao considerar a designação fixa de cliente-depósito. Na formulação apresentada por [Prodhon \(2011\)](#) percebe-se que a ausência da restrição (3.6) permite que um cliente $j \in J$ seja designado a mais de um depósito $i \in I$, isto é, f_{ij} pode assumir o valor 1 para diferentes depósitos $i \in I$, para um dado cliente $j \in J$. Outros autores, como [Hemmelmayr \(2015\)](#) e [Koç \(2016\)](#), ou não apresentaram o modelo matemático, ou não teceram quaisquer considerações sobre esta questão, permitindo a designação livre de um cliente a quaisquer depósitos, dentre os abertos, ao longo dos dias de visita. Esta dissertação está focada em desenvolver um método de solução que satisfaça as restrições do modelo (3.2) - (3.21), e que seja capaz de resolver, em um tempo satisfatório, problemas com até 200 clientes e 10 depósitos.

4 MÉTODO DE SOLUÇÃO

Neste capítulo é apresentado o método de solução desenvolvido nesta pesquisa, para a resolução do PLRP-FA. O método está composto por dois estágios. O primeiro estágio consiste em gerar soluções iniciais, não necessariamente viáveis. O segundo estágio realiza um processo de busca para melhorar essas soluções iniciais.

Os estágios do método de solução são representados em forma de processo no fluxograma da Figura 9. O primeiro estágio inicia com a entrada de uma instância do PLRP. A partir daí, inicia-se o primeiro estágio, onde se utiliza um modelo de programação matemática (MIP) para gerar as configurações de redes do problema, seguido de uma heurística construtiva de dois estágios, conhecida pelo nome de *route-first cluster-second* (PRINS; LACOMME; PRODHON, 2014). Como resultado do processamento neste primeiro estágio é obtido um conjunto de soluções iniciais, não necessariamente viáveis, que serve como entrada para o segundo estágio.

Figura 9 – Estágios que compõem o método de solução para o PLRP-FA.

Fonte: Produção do próprio autor.

Seguindo o fluxo da Figura 9, o segundo estágio do método de solução consiste na utilização de um algoritmo de busca, baseado na metaheurística SA apresentada na seção 2.5. Este algoritmo está encarregado da exploração do espaço de solução, visando a busca de uma melhor solução. Ao longo do capítulo são detalhados os estágios do método proposto, sendo que na seção 4.1 descreve-se a maneira como é representada uma solução para o PLRP-FA. Depois, a seção 4.2 apresenta em detalhe o primeiro estágio, e a seção 4.3 explica o passo a passo do segundo estágio. Por último, na seção 4.4 são detalhadas as estratégias de paralelização utilizadas no método de solução.

4.1 Representação de uma solução para o PLRP-FA

A maneira como são representadas as soluções de problemas de otimização pode variar, dependendo da interpretação de cada autor. De um modo geral, cada autor utiliza uma estrutura única, que facilita a avaliação e o cálculo dos valores da função objetivo. O método de solução proposto nesta dissertação utiliza uma estrutura composta por listas e matrizes para representar uma solução $s \in S_\pi$, sendo S_π o conjunto de soluções da instância π do PLRP. Cada elemento do conjunto S_π corresponde a uma configuração de rede única, que reúne todos os valores das variáveis de decisão indicadas no modelo matemático do PLRP-FA, apresentado no Capítulo 3. Desta forma, uma solução $s \in S_\pi$ está composta pelas seguintes listas e matrizes:

- DO*: Lista formada pelo subconjunto de depósitos abertos para operação, que corresponde às variáveis $y_i = 1$, com $i \in I$.
- DT*: Lista que representa as variáveis $\mathcal{T}_i$, com o tamanho igual ao número de elementos do conjunto $I \in V$ de depósitos disponíveis, com os elementos ordenados de maneira que a posição i de *DT* corresponde à frota designada ao depósito $i \in I$.
- CF*: Lista que representa as variáveis f_{ij} , com o tamanho igual à quantidade de clientes do conjunto $J \in V$, onde cada posição j da lista representa o cliente $j \in J$, e toma o valor correspondente ao depósito aberto $i \in DO$ designado a esse cliente j em todo o horizonte.
- CB*: Lista que representa as variáveis b_{jr} , com o tamanho igual à quantidade de clientes no conjunto $J \in V$, sendo que a posição j da lista representa o cliente $j \in J$, e recebe o valor correspondente à combinação de dias de atendimento $r \in B_j$ designada ao cliente j .
- QD*: Matriz que representa a capacidade ociosa de cada depósito aberto $i \in DO$, em cada dia de operação $l \in H$. Toda vez que um cliente $j \in J$ é designado a uma rota que parte do depósito i , subtrai-se de $QD_l i$ a demanda diária deste cliente. No caso em que algum dos elementos desta matriz seja negativo, indica que existe uma violação da capacidade do depósito i no respectivo dia l do horizonte, o que resultará em uma penalidade na função objetivo.
- QV*: Similar à matriz anterior, e representa a capacidade ociosa para cada veículo $k \in DT_i$, que executa uma rota a partir de um depósito aberto $i \in DO$, no respectivo dia l do horizonte. De forma análoga aos depósitos, a função objetivo sofrerá uma penalidade caso a capacidade do veículo seja excedida.

NW: Matriz que contem a sequência dos clientes $j \in J$ que formam as rotas de distribuição, sendo uma representação das variáveis de decisão $x_{ijkl} = 1$, com cada subíndice desta variável representando uma das dimensões da matriz, ordenadas da seguinte maneira: a primeira dimensão refere-se os depósitos $i \in I$; a segunda dimensão corresponde ao horizonte de planejamento H ; a terceira dimensão representa cada veículo $k \in DT_i$; e por último, a quarta dimensão corresponde aos clientes visitados pela rota do veículo k . A sequência de cada rota inicia e termina com o depósito.

Cada uma das listas e matrizes descritas acima é ilustrada na Figura 10, com o propósito de facilitar o entendimento da representação de uma solução S_π para o PLRP-FA. Desta forma, nesta figura apresenta-se um exemplo de cada lista e matriz com valores numéricos de uma solução para o PLRP-FA. Além disso, junto com cada exemplo aparece do lado direito a referência da variável de decisão correspondente para essa solução. O exemplo começa com a lista **DO** que contem 3 elementos, os depósitos 1, 3 e 4 de um total de $m = 5$ candidatos possíveis. Os elementos nas posições 1, 3 e 4 da lista **DT** (destacados na cor verde), da quantidade de veículos que foram designados para cada depósito aberto, com valores 2, 3 e 2, respectivamente.

DO		DT		CF		CB		QD₂	QD₃	QD₄		QV_{3,1}	QV_{3,2}	QV_{3,3}		NW_{3,3,1}	NW_{3,3,2}	
1	y_1	2	$\mathcal{T}_1$	0	$f_{3,5}$	0	$b_{5,0}$	0	60	-3		-5	12	80		3	3	
3	y_3	0	$\mathcal{T}_2$	3	$f_{3,6}$	1	$b_{6,1}$	0	120	68		80	2	26		6	8	$x_{3,8,2,3}$
4	y_4	3	$\mathcal{T}_3$	4	$f_{4,7}$	9	$b_{7,9}$	0	-9	4		15	-7	8		9	10	$x_{3,10,2,3}$
		2	$\mathcal{T}_4$	1	$f_{1,8}$	3	$b_{8,3}$	0	78	36						11	12	$x_{3,12,2,3}$
		0	$\mathcal{T}_5$	1	$f_{1,9}$	6	$b_{9,6}$	0	-7	1						7	17	$x_{3,17,2,3}$
				i	$f_{i,j}$	r	$b_{j,r}$									3	3	

Figura 10 – Representação de uma solução para o PLRP-FA.

Fonte: Produção do próprio autor.

A lista **CF**, do exemplo da Figura 10, inicia com o cliente número 6 (pois de acordo com a modelagem matemática do PLRP-FA a contagem dos clientes inicia em $m + 1$), de maneira que os elementos das posições de 1 a 5 têm valor zero. Assim sendo, o cliente 6 da lista **CF** foi designado ao depósito 3, o cliente 7 foi designado ao depósito 4 e assim por diante até completar todos os clientes $j \in J$ com a designação de um depósito $i \in DO$. A lista **CB** inicia com a designação da combinação de dias de atendimento 1 para o cliente 6 (inicialização similar à lista **CF**), o cliente 7 recebeu a combinação 9 e dessa maneira até designar a todos os clientes $j \in J$ uma combinação de dias de serviço $r \in B_j$.

Continuando com o exemplo da Figura 10, pode-se observar que as matrizes QD e QV não têm uma correspondência exata com as variáveis de decisão q_{ijl}^D e q_{jkl}^V , respectivamente, pois como foi comentado anteriormente, estas matrizes indicam a quantidade de carga ociosa de cada depósito aberto e de cada veículo, respectivamente, em cada dia $l \in H$. Desta forma, o exemplo indica que a coluna 3 da matriz QD , que corresponde ao depósito $i = 3$, tem uma capacidade ociosa de 60 unidades no dia $l = 1$, uma capacidade ociosa de 120 unidades no dia $l = 2$, sendo que no dia $l = 3$ a capacidade do depósito foi ultrapassada em 9 unidades (capacidade ociosa com valor negativo). Para o caso em que um depósito $i \in I$ não foi aberto para operação, a coluna da matriz QD correspondente a este depósito terá valores iguais a zero, como é o caso da coluna QD_2 do exemplo. Neste exemplo também podem ser observadas as colunas (3, 1), (3, 2) e (3, 3) da matriz QV que contêm os valores das capacidades ociosas dos veículos do depósito $i = 3$ para os dias de operação $l = \{1, 2, 3\}$, respectivamente, sendo que um valor negativo representa a violação da capacidade do veículo, como é o caso do veículo $k = 3$ da coluna $QV_{3,2}$ que teve um excesso de capacidade de 7 unidades.

Finalizando a explicação do exemplo da Figura 10, do lado direito da figura são representadas as colunas (3, 3, 1) e (3, 3, 2) da matriz NW . No exemplo destaca-se a coluna $NW_{3,3,2}$ que mostra a sequência de atendimento da rota realizada pelo veículo $k = 2$ do depósito $i = 3$ no dia $l = 3$, acompanhada pelas respectivas variáveis $x_{3,j,2,3}$ para cada cliente $j \in J$ em referência à formulação do PLRP-FA.

Cabe destacar que uma das vantagens de representar as soluções do PLRP-FA por meio desta estrutura, está na facilidade de adaptação a cada um dos estágios do método de solução, inclusive na fase do primeiro estágio em que as soluções ainda são inviáveis. Estas fases serão detalhadas na seguinte seção.

4.2 Geração de soluções iniciais

De acordo com Raidl (2015), a utilização de soluções iniciais de boa qualidade é uma das maneiras mais usadas para melhorar a eficiência dos algoritmos de otimização. Este primeiro estágio do método de solução tem como finalidade a geração de soluções iniciais de qualidade, que precisam cumprir os critérios de viabilidade estabelecidos pelas restrições do PLRP-FA.

Como ponto de partida, a primeira fase deste estágio de geração de soluções iniciais utiliza uma versão relaxada do problema original, que tem a tarefa de definir a configuração inicial da rede, isto é, achar uma ou mais soluções iniciais. Esta relaxação consiste em um modelo de designação composta chamado de *compound assignment model* (CAM), e que se baseia em programação inteira mista (MIP). O nome de designação composta deve-se às designações que estão presentes no modelo, tanto no que se refere à designação cliente-depósito, quanto em relação à combinação de visitas de cada cliente.

Uma vez obtidas as soluções do CAM, segue-se a segunda fase deste primeiro estágio, que se encarrega da transformação das soluções iniciais geradas pelo CAM em soluções iniciais com rotas de múltiplos atendimentos. Isto é possível mediante a utilização de uma heurística construtiva do tipo *route-first cluster-second*, que funciona como algoritmo de construção de rotas. A partir daqui esta heurística é chamada de *route building algorithm* (RBA). O RBA está composto por duas fases: a primeira, onde são gerados roteiros gigantes com os clientes designados pelo CAM, para cada depósito aberto em cada dia do horizonte; e a segunda, que consiste em particionar os roteiros gigantes em rotas menores, de acordo com o tamanho da frota alocada em cada depósito aberto.

O Algoritmo 1 apresenta uma visão geral da execução das fases que compõem este primeiro estágio do método de solução. Na linha 2 deste algoritmo é executado o CAM para uma dada instância π do PLRP-FA, obtendo-se como resultado um conjunto S_{CAM} de soluções iniciais, formadas só pelas configurações únicas de depósitos abertos. Na linha 4 executa-se o RBA para cada solução inicial $s' \in S_{CAM}$, obtendo-se como resultado uma solução inicial s'' com as rotas definidas, que na sequência é adicionada ao conjunto S_0 formado pelas soluções iniciais, não necessariamente viáveis. Nas subseções seguintes são discutidas em detalhe cada uma destas etapas que compõem o primeiro estágio do método de solução.

Algoritmo 1: Primeiro estágio do método de solução

Input: Instância π do PLRP-FA

Output: conjunto S_0 de soluções iniciais para o PLRP-FA

```

1  $S_0 \leftarrow \emptyset$ 
2  $S_{CAM} \leftarrow \text{runCAM}(\pi)$  # primeira fase
3 foreach  $s' \in S_{CAM}$  do
4    $s'' \leftarrow \text{runRBA}(\pi, s')$  # segunda fase
5    $S_0 \leftarrow S_0 \cup s''$ 
6 end foreach
7 return  $S_0$ 

```

4.2.1 Modelo de designação composta (CAM)

Como descrito anteriormente, o CAM é um modelo de designação que equivale a uma versão relaxada do PLRP-FA. Este modelo foi proposto por Mendes (2015), quem identificou que o CAM reúne todas as decisões próprias do PLRP-FA, que são: a localização dos depósitos; o tamanho da frota; a designação dos clientes a um depósito; e a seleção de uma combinação de dias de atendimento para cada cliente.

Um diferencial do modelo CAM em relação ao problema original, está na modelagem simplificada das rotas, isto é, ao invés de considerar rotas que visitam uma sequência de clientes, o CAM considera rotas radiais individuais. Uma rota radial individual é aquela

em que um veículo visita um único cliente, a partir de um ponto inicial, por exemplo um depósito, e completa a rota retornando ao mesmo ponto inicial. Desta maneira ao adotar esta representação radial, o problema torna-se de mais fácil resolução, e gera soluções com características interessantes para o problema original. A Figura 11 ilustra um exemplo da representação dos tipos de rotas, diferenciando-as entre uma rota radial individual e uma rota de múltiplos atendimentos.

Figura 11 – Representação dos tipos de rotas, a) três rotas radiais individuais e b) uma rota com múltiplas visitas de clientes.

Fonte: Produção do próprio autor.

A ideia por trás da modelagem do CAM é uma extensão do modelo de designação *median relaxation* proposto por [Christofides e Beasley \(1984\)](#). Nesse trabalho, os autores usaram o modelo como uma relaxação auxiliar para resolver o problema de roteirização de veículos periódico (PVRP) com um único depósito. Esta relaxação é válida quando considerada a seguinte premissa: em um problema de roteirização veículos, a distância total esperada está diretamente relacionada com a soma das distâncias radiais, medidas a partir de um ponto central até os clientes ([CHRISTOFIDES; EILON, 1969](#)). Por conseguinte, com a utilização deste modelo espera-se que a minimização da soma das distâncias radiais dos clientes até um dado centro, por exemplo, um depósito, definido para cada período do horizonte de planejamento, também tenderá a minimizar o PVRP correspondente.

Desta maneira, uma solução inicial gerada pelo CAM para o PLRP-FA consiste em definir o seguinte:

- a) Um subconjunto de depósitos abertos para operação;
- b) Um tamanho para a frota inicial alocada em cada depósito aberto, respeitando a capacidade combinada dos veículos;
- c) Uma designação inicial dos clientes para os depósitos em operação, respeitando a capacidade de cada depósito e obedecendo a regra de designação fixa de cliente-depósito ao longo do horizonte de planejamento; e

- d) Uma combinação inicial de dias atendimento para cada cliente, obedecendo a frequência de atendimento estabelecida por cada cliente.

A formulação matemática do CAM está baseada em um modelo MIP que utiliza variáveis de designação. De maneira similar à formulação do PLRP-FA, apresentada no Capítulo 3, o CAM está definido ao longo de um horizonte de planejamento H dividido em períodos (dias), com índice $l \in H$, e sobre um grafo $G = \{V, E\}$, onde V é o conjunto dos vértices e E é o conjunto dos arcos. Desta maneira, os conjuntos que compõem a formulação do CAM são os mesmos conjuntos que compõem a formulação do PLRP-FA, com exceção do conjunto $E = \{(v_i, v_j)\}$, que agora representa o conjunto de arcos que ligam todo par de vértices da rede, com índices $i \in I$ e $j \in J$, que formam as rotas radiais em cada período $l \in H$.

No caso dos parâmetros usados na formulação do CAM, estes correspondem aos mesmos parâmetros da formulação do PLRP-FA. Adicionalmente, para a formulação do CAM faz-se necessária a definição de três novos parâmetros, descritos a seguir na Tabela 5.

Tabela 5 – Notação dos parâmetros adicionais usados na modelagem matemática do modelo CAM.

Parâmetro	Descrição
α	Peso que assume a parcela referente ao custo total de roteirização na função objetivo, com valor entre $0 < \alpha < 1$;
Φ_j	Frequência de atendimento imposta pelo cliente $j \in J$;
$\mathfrak{C}_{ij}$	Custo total que depende da distância total percorrida para realizar o atendimento do cliente $j \in J$ a partir do depósito $i \in I$ ao longo do horizonte de planejamento, considerando rotas radiais individuais. Este parâmetro é calculado utilizando a fórmula $\mathfrak{C}_{ij} = 2 C_{ij} \Phi_j$, onde C_{ij} é o custo de uma viagem entre o depósito i e o cliente j .

Fonte: Produção do próprio autor.

A formulação de programação inteira mista do CAM utiliza as variáveis de decisão y_i e $\mathcal{T}_i$ com exatamente as mesmas definições dadas na formulação do PLRP-FA. Adicionalmente, para a formulação do CAM faz-se necessária inclusão de uma nova variável de decisão, f_{ijr} , definida na Tabela 6. Esta variável possui um conceito diferente ao da variável f_{ij} , apresentada na formulação do PLRP-FA, pois ao adicionar o terceiro subíndice r permite-se a seleção conjunta de um depósito i e uma combinação r de dias de atendimento para o cliente $j \in J$. Cabe destacar que o modelo CAM recebeu o nome de “designação composta” ou “*compound assignment*” a partir da utilização desta variável.

Tabela 6 – Notação da nova variável de decisão usada na modelagem matemática do modelo CAM.

Variável	Descrição
f_{ijr}	Variável binária, que é igual a 1 se o cliente $j \in J$ for designado para realizar o atendimento a partir do depósito $i \in I$ durante os dias de atendimento definidos pela combinação $r \in B_j$ designada a este cliente, e 0 em caso contrário.

Fonte: Produção do próprio autor.

Desta maneira, a formulação matemática do modelo CAM tem como função objetivo uma equação similar à Equação 3.1, mas com os custos de roteirização definidos de maneira diferente, conforme a seguir:

$$\min Z = \sum_{i \in I} O_i y_i + \sum_{i \in I} F \mathcal{T}_i + \alpha \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{r \in B_j} \mathfrak{C}_{ij} f_{ijr} \quad (4.1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i \in I} \sum_{r \in B_j} f_{ijr} = 1 \quad \forall j \in J \quad (4.2)$$

$$f_{ijr} \leq y_i \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall r \in B_j \quad (4.3)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{r \in B_j} f_{ijr} A_{rl} D_{jlr} \leq W_i y_i \quad \forall i \in I, \forall l \in H \quad (4.4)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{r \in B_j} f_{ijr} A_{rl} D_{jlr} \leq Q \mathcal{T}_i \quad \forall i \in I, \forall l \in H \quad (4.5)$$

$$f_{ijr} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall r \in B_j \quad (4.6)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad (4.7)$$

$$\mathcal{T}_i \subset \mathbb{N} \quad \forall i \in I \quad (4.8)$$

A função objetivo (4.1) está composta por três termos, a saber: o primeiro, considera o custo fixo total de abertura dos depósitos para operação; o segundo, é o custo fixo total da frota associada a cada depósito; e o terceiro, é o custo total de distribuição considerando rotas radiais, sendo multiplicado pelo peso α desta parcela de distribuição. As restrições (4.2) estabelecem que, para cada cliente seja designado um único depósito ao longo do horizonte e uma combinação de dias de atendimento. As restrições (4.3) ligam as variáveis de abertura dos depósitos com as variáveis de designação dos depósitos aos clientes, ou seja, um depósito tem que estar aberto para este poder ser designado aos clientes. As restrições (4.4) e (4.5) garantem que as capacidades dos depósitos abertos e as capacidades combinadas dos veículos designados a esses depósitos, sejam respeitadas em cada período do horizonte. Por último, as restrições (4.6), (4.7) e (4.8) definem o domínio das variáveis de decisão.

Cabe destacar que, uma vantagem importante da utilização do CAM é a possibilidade de geração de configurações de rede diferentes na medida em que é feita a variação no valor do parâmetro alfa (α). Isto significa que, a seleção dos depósitos que são abertos para operação na solução ótima do CAM, está diretamente relacionada com o valor que assume este parâmetro. Desta forma, ao considerar na Função Objetivo (4.1) os valores do peso alfa próximos de zero, $\alpha \rightarrow 0^+$, corresponde ao caso em que o custo de roteirizar não é significativo. Já quando os valores do peso alfa são próximos de um, $\alpha \rightarrow 1^-$, trata-se do caso em que os custos da roteirização não podem ser desconsiderados no momento da tomada de decisão, devido à sua grande importância.

Como exemplo destes valores extremos do parâmetro alfa (α), quando considerada uma situação em que o custo de roteirizar é muito alto ($\alpha = 1$), o ideal seria localizar os depósitos quanto mais próximos dos clientes melhor e, com isso, ter uma operação com a quantidade de depósitos abertos que minimiza a distância percorrida pelas rotas de distribuição. Albareda-Sambola, Fernández e Nickel (2012) deram uma explicação para este comportamento na configuração dos depósitos abertos, indicando que com cada depósito que entra em operação, aumenta a quantidade de arcos a serem percorridos. Por outro lado, pode ocorrer uma situação em que o custo de roteirização é muito baixo ($\alpha = 0$), neste caso o ideal seria operar com a menor quantidade de depósitos, favorecendo a centralização das operações, mesmo que as rotas de distribuição fiquem mais “sobrecarregadas” e mais “extensas”.

De acordo com a explicação anterior para o parâmetro alfa (α), neste primeiro estágio do método de solução efetua-se a resolução do CAM utilizando diferentes valores para alfa (α), com a finalidade de serem obtidas diferentes configurações de rede, o que se traduz na obtenção de diferentes soluções iniciais para o PLRP-FA. Contudo, pode ocorrer que as configurações de rede sejam as mesmas para valores de alfa (α) muito próximo entre si. Por esse motivo, durante a resolução do CAM, utiliza-se uma estratégia de execução baseada em um algoritmo de busca binária ou dicotomia.

O Algoritmo 2 apresenta o passo a passo desta estratégia de busca de configurações de rede únicas resultantes da resolução do CAM. Este algoritmo tem como entrada uma instância π do PLRP-FA e uma lista $\hat{\mathcal{A}} = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ de valores entre $(0, 1)$, ordenada de maneira crescente. A saída do algoritmo é um conjunto S_{CAM} de soluções iniciais para o PLRP-FA. A função $\text{CAM}(\pi, \alpha)$, chamada nas linhas 3, 4, 7, 15 e 16, resolve o modelo CAM para uma instância π do PLRP-FA e um valor de alfa (α) específico, em seguida, esta função retorna uma configuração de rede no formato especificado na seção 4.1. Toda vez que um elemento da lista $\hat{\mathcal{A}}$ é avaliado pela função CAM, a posição dele na lista $\hat{\mathcal{A}}$ é salva no conjunto P de posições já exploradas.

Algoritmo 2: Busca binária/dicotomia do CAM

Input: Instância π , lista $\hat{\mathcal{A}}$
Output: Conjunto de soluções S_{CAM}

```

1  $lb \leftarrow 0; ub \leftarrow |\hat{\mathcal{A}}| - 1$ 
2  $S_{\text{CAM}} \leftarrow \emptyset; P \leftarrow \emptyset$ 
3 if  $\text{CAM}(\pi, \alpha_{lb}) = \text{CAM}(\pi, \alpha_{ub})$  then
4    $S_{\text{CAM}} \leftarrow S_{\text{CAM}} \cup \text{CAM}(\pi, \alpha_{lb})$ 
5   return  $S_{\text{CAM}}$ 
6 else
7    $S_{\text{CAM}} \leftarrow S_{\text{CAM}} \cup \{\text{CAM}(\pi, \alpha_{lb}), \text{CAM}(\pi, \alpha_{ub})\}$ 
8    $P \leftarrow P \cup \{lb, ub\}$ 
9 end if
10 while  $|P| \leq |\hat{\mathcal{A}}|$  do
11    $mb = \lfloor (lb + ub) \div 2 \rfloor$ 
12   if  $mb \in P$  then
13     # procurar novos valores de  $lb$  e  $ub$ 
14   else
15     if  $\text{CAM}(\pi, \alpha_{mb}) \notin S_{\text{CAM}}$  then
16        $S_{\text{CAM}} \leftarrow S_{\text{CAM}} \cup \text{CAM}(\pi, \alpha_{mb})$ 
17        $P \leftarrow P \cup mb$ 
18     end if
19   end if
20 end while
21 return  $S_{\text{CAM}}$ 

```

A Figura 12 ilustra um exemplo das diferentes configurações de rede, formadas pelos depósitos abertos e os clientes designados a esses depósitos para diferentes valores do parâmetro alfa (α). Nesta figura podem ser observadas três configurações de rede (subfiguras a, b e c) definidas por diferentes intervalos do parâmetro alfa (α). A subfigura a) mostra como no intervalo de 0,05 até 0,25 a configuração de rede é a mesma com um único depósito aberto, e de maneira similar para as outras subfiguras com b) dois e c) três depósitos abertos.

Figura 12 – Configurações de rede únicas encontradas usando o CAM para diferentes valores do parâmetro alfa (α).

Fonte: Produção do próprio autor.

É importante ressaltar que, as soluções iniciais entregues pelo CAM não possuem formação de rotas com múltiplas visitas, mas proporcionam a definição do subconjunto de clientes designados aos depósitos abertos em cada período, o que faz-se necessária uma adaptação da estrutura de solução indicada na seção 4.1. Essa adaptação consiste em agrupar todos os clientes designados ao depósito $i \in OD$, para cada dia $l \in H$, em uma única rota sem restrições de capacidade e sem uma sequência específica. Este procedimento é importante para dar início à segunda fase do primeiro estágio do método de solução.

Na Figura 13 são apresentadas as transformações que sofre uma solução inicial em cada etapa deste primeiro estágio. Neste exemplo, a subfigura a) mostra três linhas da matriz NW de uma solução inicial encontrada pelo CAM (primeira fase, primeiro estágio), estas linhas representam 3 veículos que foram designados ao depósito 3. Pode-se observar que todos os clientes designados ao depósito 3 no dia 1 do horizonte foram agrupados na linha $NW_{3,1,1}$ que corresponde ao veículo 1. Cabe ressaltar que este veículo recebeu a adaptação mencionada no parágrafo anterior, sendo o único veículo utilizado, enquanto os demais veículos (linhas $NW_{3,1,2}$ e $NW_{3,1,3}$) permanecem vazios. As subfiguras b) e c) mostram a transformação que sofrem estas pseudo-rotas encontradas pelo CAM durante o algoritmo RBA (segunda fase, primeiro estágio) detalhado na subseção 4.2.2.

Figura 13 – Transformação de uma solução inicial nas do primeiro estágio do método de solução, a) solução do CAM, b) solução RBA roteiro gigante, c) solução RBA *split*.

Fonte: Produção do próprio autor.

Desta maneira, após a resolução da versão relaxada do PLRP-FA, é necessário transformar a solução inicial obtida, em uma solução inicial que consiga atender todas as restrições do problema original, isto é, transformar as rotas radiais em rotas de múltiplos atendimentos. Lembrando que um aspecto importante desta transformação é a definição da sequência em que são atendidos os clientes. Como mencionado acima, o CAM faz a designação dos clientes aos depósitos abertos, escolhe uma certa combinação de dias de atendimento para esses clientes e escolhe o tamanho da frota, mas não define as rotas que eventualmente visitam mais de um cliente. Esta formação de rotas consiste em definir os arcos que ligam cada par de vértices $i, j \in V$ para todos os clientes que foram designados a um mesmo depósito nos dias correspondentes às combinações de dias de atendimento. Na seguinte subseção, detalha-se esta segunda fase do primeiro estágio do método de solução, em que são formadas as primeiras rotas com múltiplos atendimentos.

4.2.2 Algoritmo de construção das rotas (RBA)

Após encontrar as configurações de rede únicas, neste primeiro estágio do método de solução para o PLRP-FA, segue-se a transformação destas soluções iniciais, geradas do problema relaxado CAM, em soluções iniciais com rotas que permitem visitar mais de um cliente. Essa transformação é feita encontrando uma solução para o CVRP resultante, para cada depósito aberto em cada dia do horizonte. Segundo [Prins, Lacomme e Prodhon \(2014\)](#) uma das abordagens mais efetivas para a resolução do CVRP é utilizar uma heurística construtiva de dois estágios, conhecida como a heurística *route-first cluster-second*. O algoritmo RBA reúne todas as características de uma heurística *route-first cluster-second*. Na primeira fase do RBA (*route-first*) é resolvido um TSP com cada conjunto de clientes designados a cada depósito $i \in OD$ para cada dia do horizonte de uma solução $s \in S_{CAM}$, formando assim uma única rota ou roteiro gigante, *giant tour* (GT).

Cabe destacar que, o roteiro GT usa a mesma estrutura da solução inicial encontrada pelo CAM, isto é, considera-se um único veículo com capacidade que tem a flexibilidade de ultrapassar a capacidade. A resolução do TSP é feita a partir de um modelo baseado em MIP, utilizando um método exato que garante a otimalidade do GT resultante. A subfigura b) da Figura 13 ilustra um exemplo do GT encontrado a partir dos clientes indicados na subfigura a), que estão agrupados na primeira rota $NW_{3,1,1}$, porém agora os clientes estão ordenados seguindo uma sequência ótima. As rotas $NW_{3,1,2}$ e $NW_{3,1,3}$ continuam vazias nesta primeira etapa do RBA.

Na segunda fase do RBA (*cluster-second*) é realizado um processo de formação de rotas, aplicando uma técnica de partição (*split*) sobre o GT, de tal maneira que seja utilizada toda a frota que foi designada para cada depósito aberto durante a resolução do CAM. Neste processo, permite-se que os veículos apresentem eventualmente excesso de capacidade mediante uma penalização na função objetivo. Entre as técnicas usadas para fazer a partição do roteiro gigante estão:

- a) O modelo de partição de conjuntos ou *set partitioning model* (SPT) que é um método exato baseado em MIP ([VEMUGANTI, 1998](#)); e
- b) O algoritmo de Bellman, que também é outro método exato, mas está baseado em programação dinâmica ou *dynamic programming* (DP) ([VIDAL, 2016](#)).

O algoritmo de Bellman foi escolhido para fazer parte do método de solução do PLRP-FA, devido a que este apresentou um melhor desempenho nos testes feitos durante a implementação do método de solução. Além disso, o estudo feito por [Vidal \(2016\)](#) indica este algoritmo como um dos melhores métodos para fazer a partição do roteiro gigante, mesmo quando existem restrições de limitação de frota.

O Algoritmo 3 detalha o passo a passo do algoritmo de Bellman com frota limitada, adaptado para o contexto do método de solução do PLRP-FA a partir do algoritmo

disponibilizado por Vidal (2016). Este algoritmo tem como entrada um roteiro gigante GT e uma frota $\mathcal{T} = \mathcal{T}_i$, com $i \in OD$, e tem como saída o conjunto de rotas particionadas no formato da matriz $NW_{i,l,k}$. O processo principal deste algoritmo consiste em tentar acomodar o maior número de clientes em cada veículo (linha 10 a linha 31), na ordem definida pelo roteiro GT . Caso a carga de um cliente não possa entrar no veículo, o algoritmo desconsidera esse cliente e avança para o seguinte na lista, sempre selecionando aquele de menor custo linha 23. Uma das vantagens da utilização deste algoritmo está em que, durante a seleção da melhor combinação de clientes para particionar o roteiro GT , é possível calcular o custo de roteirização junto com a capacidade utilizada do veículo.

Algoritmo 3: Algoritmo de Bellman com frota limitada

Input: Roteiro gigante GT , frota $\mathcal{T}$
Output: Lista de rotas particionadas

```

1  $p[0][0] \leftarrow 0$ 
2  $\hat{p}[0][0] \leftarrow 0$ 
3 for  $k = 1$  to  $\mathcal{T}$  do
4   for  $j = 0$  to  $|GT|$  do
5      $p[k][j] \leftarrow \infty$ 
6      $\hat{p}[k][j] \leftarrow \infty$ 
7      $prev[k][j] \leftarrow -1$ 
8   end for
9 end for
10 for  $k = 0$  to  $\mathcal{T} - 1$  do
11   for  $i = k$  to  $|GT| - 1$  do
12      $carga \leftarrow 0$ 
13      $custo \leftarrow 0$ 
14      $j \leftarrow i + 1$ 
15     while  $j \leq |GT|$  and  $carga \leq \lambda Q$  do
16        $carga \leftarrow carga + demanda(j)$ 
17       if  $j = i + 1$  then
18          $custo \leftarrow custo + C_{0,j}$ 
19       else
20          $custo \leftarrow custo + C_{j-1,j}$ 
21       end if
22        $custo \leftarrow custo + C_{j,0}$  # custo do retorno
23       if  $p[k][i] + custo < p[k+1][j]$  and  $carga \leq \lambda Q$  then
24          $p[k+1][j] \leftarrow p[k][i] + custo$ 
25          $\hat{p}[k+1][j] \leftarrow carga$ 
26          $prev[k+1][j] = i$ 
27       end if
28        $j \leftarrow j + 1$ 
29     end while
30   end for
31 end for
32 return
```

Um ponto de atenção na execução do Algoritmo 3 é a capacidade dos veículos, pois o algoritmo faz a troca de veículo toda vez que esta é preenchida até alcançar o total da frota $\mathcal{T}$. Porém, quando a soma total das demandas dos clientes em GT é maior do que a capacidade total combinada dos veículos (soma das capacidades), o algoritmo não consegue completar a partição de GT , ficando as últimas posições das matrizes p e $\hat{p}$ com valor igual a ∞ . Esta situação ocorre devido à maneira como é calculada a frota designada a cada depósito no modelo CAM, pois a restrição (4.5) estabelece que $\mathcal{T}_i = \lceil \text{demanda} / \text{capacidade} \rceil$, mas é possível que as combinações de demandas dos clientes sejam maiores que a capacidade de um veículo no momento de particionar o GT . Como estratégia para evitar que o algoritmo não consiga efetuar a partição, foi adotada a possibilidade de ultrapassar a capacidade dos veículos. Desta maneira, foi definido um fator λ que representa o valor que é permitido ultrapassar a capacidade dos veículos durante a partição do roteiro GT , a calibração deste fator é detalhada na seção 5.1.

De acordo com a ilustração da subfigura c) da Figura 13, que corresponde à última transformação que sofre a solução inicial durante o primeiro estágio do método de solução. Neste ponto as soluções iniciais são aceitas, mesmo sendo consideradas como inviáveis, pois foram definidas as rotas de múltiplos atendimentos e as violações de capacidade são tratadas com penalização na função objetivo da solução inicial. Cabe aclarar que estas violações de capacidade são tratadas no segundo estágio do método de solução (seção 4.3), durante o processo de ajuste de frota.

A execução das etapas que compõem o algoritmo RBA, formação do roteiro gigante (*route-first*) e a formação das rotas (*cluster-second*), é um processo iterativo feito para cada depósito aberto em cada dia do horizonte de cada configuração de rede do conjunto S_{CAM} . No Algoritmo 4 é mostrada a estrutura que segue o algoritmo RBA, este tem como entrada uma solução inicial $s \in S_{\text{CAM}}$. Na linha 3 são somente selecionadas aquelas linhas da matriz NW que têm mais do que dois clientes, i.e, $|NW_{i,l,0}| > 4$ (as posições inicial e final são o depósito). Para estes conjuntos de clientes é executada a função **GTOUR** que resolve um TSP e retorna o roteiro gigante GT de sequência ótima. Os conjuntos com até dois clientes são assumidos como ótimos e passam direto para a fase de partição, que inicia na linha 6 aceitando só aqueles roteiros gigantes que violam a capacidade do veículo (sem considerar o fator λ). Em seguida na linha 7 executa-se a função **SPLIT** que toma como parâmetros de entrada somente aqueles roteiros GT que apresentam violação de capacidade, pois são os que precisam ser particionados utilizando o Algoritmo 3. Após fazer as partições necessárias em todos o roteiros gigantes, para cada depósito aberto em cada dia do horizonte, o algoritmo retorna uma solução inicial s' com as todas as rotas formadas.

Algoritmo 4: Heurística *route-first cluster-second*

Input: solução inicial $s \in S_{\text{CAM}}$
Output: solução inicial s'

```

1 foreach  $i \in OD$  do
2   foreach  $l \in H$  do
3     if  $|NW_{i,l,0}| > 4$  then
4        $GT \leftarrow \text{GTOUR}(NW_{i,l,0})$ 
5     end if
6     if  $QV_{i,l,0} < 0$  then
7        $NW_{i,l} \leftarrow \text{SPLIT}(NW_{i,l,0})$  # Algoritmo 3
8     end if
9   end foreach
10 end foreach
11 return

```

Após a finalização do primeiro estágio do método de solução, em que se definiu um conjunto de soluções iniciais S_0 para o PLRP-FA, segue-se o segundo estágio do método de solução. Neste próximo estágio, é utilizada uma metaheurística SA que é responsável pela busca de soluções que melhoram a função objetivo de cada solução S_0 .

4.3 Metaheurística SA para o PLRP-FA

O segundo estágio do método de solução consiste em uma metaheurística SA, encarregada de executar o processo de refinamento das soluções iniciais encontradas durante o primeiro estágio do método. O algoritmo da metaheurística SA, implementada neste método de solução para o PLRP-FA, tem uma estrutura similar ao algoritmo SA padrão, aquele que foi proposto por [Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi \(1983\)](#), mas tem o acréscimo de uma componente específica para controle de viabilidade das soluções. Assim sendo, nesta seção são detalhadas cada uma destas componentes e, para aquelas que precisam de calibração, na seção 5.1 são detalhados os experimentos feitos para encontrar o valor do parâmetro que melhor se ajusta ao problema em questão.

O Algoritmo 5 mostra a estrutura geral seguida neste segundo estágio, fazendo ênfase nas componentes e parâmetros que integram o algoritmo, sendo cada uma destacada em LETRAS MAIÚSCULAS. Este algoritmo tem como entrada uma instância π do PLRP-FA e uma solução inicial $s_0 \in S_0$, onde S_0 é o conjunto de soluções iniciais definidas durante o primeiro estágio do método. A saída do algoritmo é a melhor solução s^* encontrada durante a execução, que teoricamente seria uma solução ótima global, mas é sabido que pela natureza dos métodos heurísticos não é possível garantir essa otimalidade. Nas linhas de 1 a 5 é feita a inicialização dos parâmetros que controlam o funcionamento do algoritmo, junto com as inicializações da solução corrente s' e da melhor solução s^* . Nas demais linhas (de 6 até 20) acontece o processo iterativo de exploração do espaço de solução. Adicional

a isso, na linha 18 é feito o ajuste do tamanho da frota que foi designada a cada depósito aberto. A seguir são detalhadas cada uma das componentes do algoritmo SA.

Algoritmo 5: Estrutura da metaheurística SA para o PLRP-FA

Input: Instância π ; solução inicial s_0
Output: Melhor solução encontrada s^*

```

1  $T_0 \leftarrow$  TEMPERATURA INICIAL;  $T_f \leftarrow$  TEMPERATURA FINAL
2  $c \leftarrow$  ESQUEMA DE RESFRIAMENTO
3  $T_t \leftarrow T_0$ 
4  $s^* \leftarrow s_0$ ;  $s' \leftarrow s_0$ 
5  $\hat{L} \leftarrow 0$ 
6 while CRITÉRIO DE PARADA do
7    $\hat{L} \leftarrow \hat{L} + 1$ 
8   for  $tentativa = 0$  to NÚMERO DE TENTATIVAS do
9      $\Delta \leftarrow$  EXPLORAÇÃO DO ESPAÇO DE SOLUÇÃO
10    if CRITÉRIO ACEITAÇÃO then
11       $s' \leftarrow s' + \Delta$ 
12      if  $s' < s^*$  then
13         $s^* \leftarrow s'$ 
14         $\hat{L} \leftarrow 0$ 
15      end if
16    end if
17  end for
18  executa o AJUSTE DE FROTA
19   $T_t \leftarrow cT_0$ 
20 end while
21 return  $s^*$ 

```

4.3.1 Componentes do algoritmo SA

Nesta seção apresentam-se em detalhe cada uma das componentes que formam a estrutura do algoritmo SA, indicadas no Algoritmo 5. Geralmente, estas componentes recebem valores que dependem do tipo de problema de otimização que está sendo resolvido. Algumas das maneiras de atribuir estes valores são: baseando-se em problemas similares descritos na literatura; utilizando valores empíricos, que muitas vezes dependem do conhecimento e intuição de quem implementa o método; e designando valores com base em experimentos feitos com os dados do problema (FRANZIN; STÜTZLE, 2019).

TEMPERATURA INICIAL, T_0 — A temperatura no algoritmo SA funciona como um parâmetro de controle do processo de exploração do espaço de solução. O valor deste parâmetro tem um papel especial durante a execução do algoritmo, pois é esperado que valores muito altos favoreçam a aceitação de soluções que pioram a função objetivo em maior proporção, já temperaturas mais baixas favorecem o refinamento da solução com menor probabilidade de aceitar soluções piores (KIRKPATRICK; GELATT; VECCHI,

1983). De modo geral, este parâmetro é definido como um valor na mesma ordem de magnitude e nas mesmas unidades que a função objetivo (KIRKPATRICK; GELATT; VECCHI, 1983). Desta maneira, uma técnica sugerida para determinar o valor de T_0 é selecionar um valor que seja compatível com a diferença entre os valores da função objetivo das soluções exploradas no espaço solução (CONNOLLY, 1990). No entanto, uma forma mais simples de calcular o valor, é fazendo $T_0 = \sigma f(s)$, onde σ é um fator de proporção e $f(s)$ é o valor da função objetivo de uma solução s do problema (HUSSIN; STÜTZLE, 2014). Esta última técnica foi selecionada para ser implementada na metaheurística SA desta dissertação.

TEMPERATURA FINAL, T_f — Este é um parâmetro que define o término da execução do algoritmo SA. Comumente recebe um valor entre $0 < T_f \leq 1$ (KARAOGLAN et al., 2012; CHRISTIAENS; Vanden Berghe, 2020), mas também pode assumir valores maiores que 1 dependendo do objetivo de cada problema.

ESQUEMA DE RESFRIAMENTO, c — Esta componente é o mecanismo que realiza a transição entre os níveis de resfriamento. De modo geral, o intuito desta componente é baixar a temperatura até alcançar o valor do parâmetro T_f , mas deve-se considerar que, pela própria natureza do algoritmo SA, um resfriamento muito rápido faz com que a função objetivo fique estagnada em algum ótimo local, e um resfriamento muito lento, requer um tempo computacional muito alto, não sendo viável alcançar o objetivo de encontrar a solução ótima do problema. Na literatura, sugere-se que esta seja uma constante com valor acima de 0.90 (YU et al., 2010; FRANZIN; STÜTZLE, 2019), pois é uma componente que impacta diretamente o número de níveis de resfriamento ou variações de temperatura. Outra maneira de definir seu valor é calculando-o em função da temperatura, $c = (T_f/T_0)^{(1/L)}$, onde L representa o número de níveis de resfriamento (CHRISTIAENS; Vanden Berghe, 2020). O uso desta componente faz com que o resfriamento aconteça de maneira geométrica, isto é, resfria rápido nas primeiras iterações e lento nas últimas, tal como aparece na linha 19 do algoritmo SA.

CRITÉRIO DE PARADA — Esta é a componente que controla a extensão da execução do algoritmo SA. Comumente, a parada acontece quando se alcança o valor T_f ou quando se alcança o número de níveis de resfriamento necessários para ir de T_0 até T_f , definido como $L = 1 + \ln(T_f/T_0)/\ln(c)$. Entretanto, outros outros autores (YU et al., 2010) têm trabalhado critérios de parada mistos que acrescentam o critério de parada $\hat{L}$, que está definido como o número de níveis de resfriamento em que a solução corrente s' não apresenta melhora. O algoritmo SA para o PLRP-FA utiliza como critério de parada o valor que acontecer primeiro, L ou $\hat{L}$, sendo que toda vez que é encontrada uma solução corrente s' melhor do que a melhor solução s^* , o critério é reiniciado, $\hat{L} = 0$.

NÚMERO DE TENTATIVAS, M — O valor desta componente indica a quantidade de explorações que são feitas no espaço solução por cada nível de resfriamento, em outras pa-

lavras, é o número de tentativas feitas para encontrar uma solução melhor a cada variação da temperatura. Na literatura, este geralmente recebe um valor arbitrário, sendo definido como $M \geq 1000$ (ČERNÝ, 1985), inclusive algumas propostas de valores são dependentes do tamanho de cada problema (YU et al., 2010). O valor utilizado na implementação do algoritmo SA para o PLRP-FA foi M dependente do número de clientes $J \in V$ de cada instância.

EXPLORAÇÃO DO ESPAÇO DE SOLUÇÃO — Esta componente do algoritmo SA geralmente compreende uma função, ou outro algoritmo interno, que executa algum tipo de perturbação na solução corrente s' , com o intuito de encontrar soluções na vizinhança de s' que tenham um melhor valor da função objetivo. Esta componente é uma das que mais apresenta variação entre os trabalhos na literatura (FRANZIN; STÜTZLE, 2019), pois a definição de um movimento para avançar de uma solução corrente s' para outra solução s'' na vizinhança, depende das características de cada tipo de problema, assim como também existe uma dependência da profundidade da exploração a ser alcançada em cada problema. Neste segundo estágio do método de solução, foi definida uma função para realizar o processo de exploração do espaço de solução na vizinhança da solução s' . Esta função retorna a diferença Δ do valor da função objetivo entre uma solução corrente s' e uma solução vizinha s'' (a função é detalhada na subseção 4.3.2).

CRITÉRIO DE ACEITAÇÃO — Esta é a componente que caracteriza a metaheurística SA, pois como comentado na seção 2.5 sem esse critério de aceitação o algoritmo SA não passaria de uma LS. De modo geral, esta componente é calculada usando o critério de Metropolis et al. (1953), contudo novas regras ou novas formas de calcular esta componente têm sido definidas na literatura (FRANZIN; STÜTZLE, 2019). No algoritmo SA proposto nesta dissertação, utiliza-se um critério de aceitação $\Delta < -T_t \ln(\rho)$, que é similar ao critério de aceitação usado por Christiaens e Vanden Berghe (2020), onde T_t é a temperatura corrente em cada nível de resfriamento L definida pelo esquema de resfriamento c (linha 18), e ρ é um número aleatório entre $(0, 1)$ que requer ser sorteado a cada avaliação de $\Delta > 0$. A avaliação do critério no algoritmo, inicia verificando se $\Delta \leq 0$; se for verdadeiro, a solução corrente s' é atualizada e é verificado se s' melhora a função objetivo de s^* ; se for falso, a probabilidade de aceitação de soluções que pioram é calculada. Uma característica importante desta componente é o controle ganho sobre o processo de atualização da solução corrente s' , uma vez que o movimento para uma solução vizinha só acontece se este for de fato favorável, isto é, s' recebe toda a estrutura da solução vizinha somente se esta melhora a função objetivo ou se for aceita pelo critério.

AJUSTE DE FROTA — Esta componente está encarregada de eliminar as violações de capacidade que existirem nas rotas. Neste ponto, é importante ressaltar que, as violações de capacidade dos depósitos são tratadas implicitamente durante a exploração do espaço de solução. Esta estratégia de ajuste de frota consiste em verificar a cada ϑ

iterações (níveis de resfriamento), se a solução atual s' é viável, isto é, verificar se as rotas de s' não apresentam qualquer violação de capacidade. Se s' é inviável, então um novo veículo é adicionado, caso contrário, a verificação de viabilidade das rotas de s' é detida e o algoritmo SA continua a ser executado. É importante frisar que, este novo veículo é inserido no depósito $i \in DO$ que tiver maior ocupação média $\bar{oc}$ dos veículos ao longo do horizonte de planejamento; e que a cada inserção de um novo veículo, o sistema é reaquecido, incrementando a temperatura T_t em 50%, isto é, retornar à metade dos níveis de resfriamento avançados.

Finalmente o algoritmo retorna a melhor solução s^* encontrada para cada configuração de rede contida no conjunto de soluções iniciais S_0 , resultando em um conjunto S^* contendo as melhores soluções para uma dada instância do PLRP-FA.

4.3.2 Exploração do espaço de solução

Os movimentos propostos para fazer a exploração do espaço de solução em busca de soluções na vizinhança da solução corrente s' são em total de três. Estes movimentos foram definidos em três níveis que são: movimentos intra-rota, feitos entre as rotas do mesmo depósito; movimentos inter-rotas, feitos entre rotas de diferentes depósitos, o que implica que o cliente será designado a um depósito diferente; e finalmente o movimento de troca de combinação de dias de atendimento.

O processo de exploração é feito selecionando aleatoriamente um cliente $j \in J$ de cada vez. Em seguida, uma nova combinação de dias de atendimento $r \in B_j$ é sorteada, somente para os clientes que têm frequência $\Phi_j \neq 3$. Na sequência, um novo depósito $i \in OD$ é sorteado, para isto obedecendo uma regra de probabilidade que favorece o depósito i que estiver mais próximo do cliente j , designando uma maior probabilidade. Para ganho de desempenho na implementação do método, estas probabilidades de seleção dos depósitos são geradas para cada cliente antes de iniciar a execução do algoritmo SA.

Após ter selecionado uma nova combinação r e um novo depósito i para o cliente j , é feita uma seleção dos dias em que vai ser feita a perturbação. Para isto, é sorteado um número aleatório de acordo com a frequência Φ_j do cliente, por exemplo, para um cliente com $\Phi_j = 2$, é sorteado um número entre $(1, 2)$. Se o resultado deste sorteio for igual a 1, então deve ser decidido, mediante um novo sorteio, qual dos dois dias de atendimento é perturbado, e se o resultado for igual a 2, então os dois dias de atendimento são selecionados. Cabe ressaltar que os clientes com $\Phi_j = 1$ não são sorteados e a perturbação é feita diretamente nesse dia de atendimento.

Uma vez definidos os elementos da perturbação é inicializada a variável $\Delta = 0$, que receberá a diferença de valores da função objetivo, resultante da remoção e inserção do cliente j . A remoção das posições atuais deste cliente j gera um valor negativo que representa o ganho de tirar o cliente j da posição atual. A inserção nas novas posições é

feita de acordo com a regra de perturbação definida anteriormente, sendo que uma vez inserido o cliente na nova combinação e no novo depósito, ainda é sorteada a nova rota e a nova posição dentro desta. Esta inserção resulta em um valor positivo a ser adicionado à variável Δ .

Uma característica importante desta exploração feita na solução s' é que os movimentos de remoção e inserção de fato acontecem na rede somente se o movimento passar pelo critério de aceitação (linha 10). Esta estratégia que resultou em ganho de desempenho na implementação do método. Portanto, esta exploração só retorna o valor Δ e toda a informação do movimento que será feito somente se o Δ for aceito.

4.4 Paralelização do método de solução

Talbi (2009) cita algumas vantagens atribuídas à paralelização de métodos de solução metaheurísticos, estas são:

- a) Redução do tempo de execução da busca de melhores soluções;
- b) Melhoria da qualidade das soluções obtidas, uma vez que se aproveitam melhor os recursos computacionais para intensificar a busca;
- c) Incrementa a robustez do método metaheurístico, que pode ser medida em termos da sensibilidade dos parâmetros; e
- d) Resolução de problemas de grande escala.

Segundo Alba, Luque e Nesmachnow (2013) a paralelização é uma das maneiras de obter alto desempenho computacional nas metaheurísticas baseadas em exploração da vizinhança (ex: o algoritmo SA), que usam uma solução inicial e executam um processo de busca para melhorar a função objetivo dessa solução. As estratégias de paralelização mais usadas em metaheurísticas deste tipo são:

- a) *Exploração paralela do espaço de solução* — Esta é uma estratégia de paralelização do nível algorítmica, pois o corpo principal do algoritmo é executado de maneira sequencial, mas a exploração do espaço de solução é feita em paralelo; as *threads* executam o processo de busca sobre cópias idênticas de uma única solução;
- b) *Exploração de inicialização múltipla* — Esta estratégia executa simultaneamente o algoritmo inicializado com uma solução diferente para cada *thread*, isto é, as rodadas são independentes, no final da execução é selecionado o melhor resultado; e
- c) *Exploração paralela da solução* — Em esta estratégia, cada *thread* executa movimentos na vizinhança de única solução; esta trabalha de uma maneira diferente da estratégia de *exploração paralela do espaço de solução*, já que não

utiliza cópias da mesma solução, ao invés está explora partes diferentes do mesmo espaço de solução.

A estratégia de paralelização utilizada neste método de solução para o PLRP-FA está baseada na *exploração de inicialização múltipla*, escolhida tomando como base a natureza do algoritmo CAM, que entrega várias soluções iniciais para uma mesma instância do PLRP-FA. Desta forma, o método proposto executa de maneira simultânea e independente cada uma das fases do método de solução. A execução de cada fase é detalhada a seguir:

CAM – A paralelização deste modelo consiste em dividir a lista $\hat{\mathcal{A}}$ de valores do parâmetro alfa (α) em grupos que contêm 2 ou 3 alfas, dependendo da quantidade de alfas em $\hat{\mathcal{A}}$, em seguida é executado o modelo utilizando o Algoritmo 2.

RBA e SA – Estas duas fases do método foram paralelizadas executando cada uma das soluções encontradas pelo CAM de maneira independente, primeiro foram construídos todos os roteiros GT para todas as soluções $s' \in S_{\text{CAM}}$; em seguida se construíram todas as rotas para todas as soluções $s' \in S_{\text{CAM}} + GT$, ou seja, foi feito o *split* de cada GT de todas as soluções; e finalmente, o algoritmo SA foi executado para cada uma das soluções $s' \in S_0$. Cabe ressaltar que a implementação do método foi feita tanto de maneira sequencial quanto de maneira paralela.

5 TESTES COMPUTACIONAIS

Neste capítulo são apresentados os experimentos computacionais feitos para avaliar o desempenho da metaheurística SA proposta para resolver o PLRP-FA. O método proposto utiliza diversos parâmetros ao longo de todas suas etapas. Por esta razão, antes de serem apresentados os resultados dos testes computacionais, faz-se necessário apresentar o processo de definição dos valores com que será executado o método de solução.

Para a fase de calibração e de execução da metaheurística SA foram utilizadas as instâncias do PLRP propostas e disponibilizadas na literatura por [Prodhon \(2008\)](#). Estas instâncias são, até o momento desta pesquisa, as únicas instâncias disponíveis para esta classe de problemas. O conjunto de instâncias está composto por 30 problemas diferentes, com as seguintes características: variação na quantidade de depósitos, $m \in \{5, 10\}$, com capacidades, custos de operação e localizações diferentes; variação na quantidade de clientes, $n \in \{20, 50, 100, 200\}$, com demandas, frequências de atendimento e localizações diferentes; uma frota homogênea de tamanho igual ao número de clientes da instância, com custo fixo de utilização idêntico e capacidades $Q \in \{80, 130\}$, que variam de acordo com a instância.

O método de solução foi implementado na linguagem C++, usando o padrão 2017 do compilador MinGW-64 GCC v10.2.0. As rodadas dos testes foram realizadas em um computador do tipo *laptop* com um processador Intel® Core™ i7-8550U 1.8GHz com 4 núcleos que proporcionam 8 *threads* de processamento, e uma capacidade de 16GB de memória RAM DDR4 de 2400MHz. O ambiente de desenvolvimento e de execução dos testes foi o sistema operacional Windows 10 de 64 bits. Para resolver os modelos MIP, utilizados no primeiro estágio do método de solução (CAM e RBA), utilizou-se o programa de otimização Gurobi v9.0.3, com uma licença acadêmica. Além disso, foi utilizada a biblioteca de computação paralela OpenMP v5.0. A Tabela 7 apresenta a lista de *flags* usadas durante a compilação do código fonte.

Tabela 7 – Lista de *flags* usadas durante a compilação do código fonte da implementação do método de solução para o PLRP-FA.

<i>Flag</i>	Descrição
<code>-pthread</code>	Habilita as bibliotecas de processamento <i>multithread</i> para uso dos recursos de paralelismo.
<code>-fopenmp</code>	Ativa a interface da biblioteca OpenMP utilizada para computação paralela.
<code>-ofast</code>	Habilita a otimização do desempenho de execução do software, porém com uma compilação mais lenta e com maior uso de memória.

Fonte: Produção do próprio autor.

As seguintes seções apresentam as etapas acima mencionadas. Na seção 5.1, é descrito o processo de calibração das componentes e parâmetros, tanto do estágio de geração de soluções iniciais, quanto do estágio de refinamento das soluções com o algoritmo SA. Em seguida, na seção 5.2, são apresentados os resultados dos testes realizados com as instâncias do PLRP, e um conjunto de análises.

5.1 Calibração das componentes do método de solução

O processo de calibração foi realizado ao longo do desenvolvimento da implementação do método de solução. Os valores dados aos parâmetros impactam diretamente nos resultados obtidos, tanto no consumo de tempo computacional, quanto no valor da função objetivo. Cabe ressaltar que, a implementação do método de solução foi feita de maneira modular, permitindo executar cada etapa de maneira independente. Isto é visto como uma vantagem na hora do desenvolvimento, pois permite obter resultados rápidos em cada etapa, e tem-se a possibilidade de fazer alterações em alguma das etapas sem a necessidade de executar todo o programa desde o início.

5.1.1 Calibração dos parâmetros do CAM

Na implementação do modelo CAM, foi realizada a calibração dos parâmetros de execução do modelo de otimização utilizando a interface da biblioteca do *solver* Gurobi. Os parâmetros são listados na Tabela 8, junto com o valor designado, e uma observação sobre a escolha desse valor. Estes parâmetros proporcionam controle na execução do modelo, permitindo avaliar o equilíbrio entre os tempos de execução e a qualidade das soluções.

Tabela 8 – Parâmetros do *solver* Gurobi utilizados pelo modelo CAM.

Parâmetro	Valor	Observação
GRB_IntParam_OutputFlag	0	Cancela a saída do processo de otimização na tela do computador.
GRB_IntParam_Presolve	0	Evita que seja executado o presolve.
GRB_IntParam_Threads	1	Resolve o modelo com um único processador.
GRB_DoubleParam_MIPGap	> 0.0	Valor dinâmico em função do tamanho do problema (ver Tabela 9).
GRB_DoubleParam_TimeLimit	60	Limita o tempo de execução do processo de otimização.

Fonte: Produção do próprio autor.

Um dos parâmetros que afeta tanto a qualidade da solução quanto o tempo de resolução do modelo é o `GRB_DoubleParam_MIPGap` ou *gap*. O valor nulo desse parâmetro

Tabela 9 – Valores adotados para o *gap* em função do número de clientes.

Núm. clientes	Gap Gurobi [%]	Ganho tempo médio [s]
20	1,96	0,005
50	2,28	6,251
100	1,47	18,349
200	1,47	35,726

Fonte: Produção do próprio autor.

indica que a solução buscada pelo *solver* é a solução ótima. Os primeiros testes da resolução do CAM foram exaustivos, e utilizaram valores de *gaps* iguais a zero, o que permitiu conhecer todas as configurações ótimas de rede. Visto que a principal vantagem da resolução do CAM é encontrar configurações alternativas de redes, optou-se por designar um valor maior que zero para este parâmetro que permitisse obter as configurações ótimas de rede, mas com um ganho no tempo de execução do modelo. Desta maneira, durante a calibragem foram testados vários valores de *gaps*, sendo estes valores fixados em função do número de clientes do problema. A Tabela 9 apresenta os valores finais do parâmetro `GRB_DoubleParam_MIPGap` do Gurobi para a resolução do modelo CAM, juntamente com o ganho médio do tempo de execução (em segundos) quando comparado com o *gap* igual a zero.

Outro parâmetro que precisou ser calibrado na execução do CAM foi o alfa (α), usado na função objetivo, que é responsável pela geração das diferentes configurações de redes. Em relação a este parâmetro, foi necessário definir quantos e quais valores seriam utilizados, para garantir a exploração de todas as configurações de rede possíveis. É importante ressaltar que, se fossem testados muitos valores de alfa, então estaria sendo gasto um esforço computacional desnecessário (com a geração de configurações repetidas de rede). Por outro lado, se fossem testados poucos valores de alfa, então algumas configurações de rede poderiam, eventualmente, deixar de ser geradas, impedindo que soluções de boa qualidade sejam alcançadas.

Como mencionado na seção 4.2, os valores extremos de alfa, 0 e 1, não são considerados pelo método de solução. Desta maneira, a lista ordenada de valores de alfa $\hat{\mathcal{A}} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_9\}$, foi definida, inicialmente, como $\hat{\mathcal{A}} = \{0,10; 0,20; \dots; 0,90\}$, com nove valores diferentes e com um incremento de 0,10 entre cada valor. Depois de fazer alguns testes com estes valores, foi identificado que algumas configurações poderiam estar sendo excluídas da solução. Isto levou à necessidade de modificar a lista de valores de alfa, passando assim para 19 valores, desta vez iniciando em $\alpha_1 = 0,05$, e terminando em $\alpha_{19} = 0,95$, com um incremento de 0,05. Ao retomar os testes com estes novos valores de alfa, em que o intervalo de separação entre eles era menor, conseguiu-se identificar um conjunto de novas configurações de rede que inicialmente estavam sendo deixadas de fora

da solução.

A Figura 14 apresenta, para cada instância do PLRP (seção 5.2), todas as configurações de rede resultantes da resolução do modelo CAM, para os diferentes valores de alfa no intervalo de $[0,05; 0,95]$. Como mencionado anteriormente, cada configuração de rede corresponde a um subconjunto de depósitos, que são abertos de acordo com o valor atribuído a alfa. Os depósitos que foram abertos são representados na figura com um número entre 1 e 10, que corresponde à nomenclatura adotada para identificá-los. Além disso, nesta figura pode-se observar que, para alguns valores adjacentes de alfa os depósitos abertos são os mesmos, em outras palavras, é válido afirmar que existem intervalos de valores de alfa em que as configurações de rede são iguais. Um exemplo disto é o intervalo entre $\alpha_1 = 0,05$ e $\alpha_5 = 0,25$ para a instância 1, em que foi aberto o depósito 2, e para o intervalo entre $\alpha_6 = 0,30$ e $\alpha_{12} = 0,55$, em que foram abertos os depósitos 2 e 3. Do lado esquerdo desta figura tem-se a coluna $|S_{CAM}|$, que contém a quantidade de configurações de redes encontradas em cada instância.

Instância	Valores do Parâmetro Alfa (α)																				S _{CAM}						
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95								
1	2					2-3							2-3-5							1-2-3	4						
2	3					3-4							1-2-3								2						
3	4					1-5							1-4-5								3						
4	4					4-5																2					
5	4		1-3-4																			2					
6	4	1-2	1-3-4									1-2-3-4										4					
7	5		3-5					2-3-5	2-3-4-5													4					
8	5		3-5			2-3-5					2-3-4-5											4					
9	4		1-4																		2						
10	4-5																					1					
11	3	1-3			1-2-3									1-2-3-4							4						
12	1	1-3		1-2-3																	3						
13	4	2-4		2-4-5												1-2-4-5		2-3-4-5			5						
14	4	2-4			2-4-5										1-2-4-5					4							
15	3-5					2-3-5										1-2-3-5						3					
16	3-5					2-3-5					2-3-5											2					
17	5	1-2-5																			2						
18	5	1-2-5																			2						
19	4		3-5-10				3-4-6-7-10									2-3-4-6-9-10						4					
20	4		2-3-6		2-3-6-10	3-4-6-7-10						2-3-6-8-9-10			2-3-4-6-7-10						6						
21	5-6					2-5-6																2					
22	5-7					2-5-7										2-5-7-8						3					
23	8	3-8	3-5-7				1-3-7-8					1-3-5-7-10					1-3-5-7-9-10				6						
24	8	5-10	3-5-7						1-3-5-7		1-3-5-7-10										5						
25	8	3-8	1-4-7-9	1-2-4-8-9			1-2-3-4-8-9									1-2-3-4-8-9-10						6					
26	1-8	1-3-9	1-4-7-9	1-2-4-8-9			1-2-3-4-8-9						1-2-3-5-8-9-10								6						
27	1-10				1-8-10		1-3-8-10																3				
28	1-10			1-3-8-10												1-3-5-8-10						3					
29	1-2	1-5	5-6-10			2-5-6-10																		4			
30	5-6		5-6-10						2-5-6-10																		3
Instância	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	S _{CAM}							

Figura 14 – Valores iniciais do parâmetro alfa (α) que foram testados e as respectivas configurações de rede (depósitos abertos) para cada instância do PLRP.

Fonte: Produção do próprio autor.

Após a realização dos testes de calibração com os 19 valores do parâmetro alfa, foi observado que as configurações de rede, que apresentaram convergência da função objetivo para valores próximos aos resultados de Prodhon (2011), excluíam os valores de alfa que

se encontravam mais aos extremos da lista $\hat{\mathcal{A}}$. Desta maneira, foi feita a remoção dos valores $\alpha_1 = 0,05$ e $\alpha_2 = 0,10$, tendo como limite inferior o valor $\alpha_3 = 0,15$, e os valores do extremo superior de $\alpha_{14} = 0,70$ até $\alpha_{19} = 0,95$, permanecendo como novo limite superior o valor de $\alpha_{13} = 0,65$, resultando em um total de 11 valores para este parâmetro. A Figura 15 mostra as configurações de rede selecionadas, após a redução do número de alfas, com as que foram feitos os testes de calibração finais do primeiro estágio do método de solução. Nesta figura se observa que o número de intervalos do parâmetro alfa tiveram uma diminuição, para alguns casos, de até quatro intervalos, o que corresponde a uma redução média de 33,61% do número configurações de rede.

Instância	Valores do Parâmetro Alfa (α)											S _{CAM}
	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	
1	2			2-3						2-3-5		3
2	3		3-4									2
3	4			1-5								2
4	4		4-5									2
5	1-3-4											1
6	1-3-4								1-2-3-4			2
7	3-5				2-3-5		2-3-4-5					3
8	3-5		2-3-5						2-3-4-5			3
9	1-4											1
10	4-5											1
11	1-3		1-2-3									2
12	1-3	1-2-3										2
13	2-4	2-4-5										2
14	2-4		2-4-5									2
15	3-5		2-3-5									2
16	3-5					2-3-5						2
17	1-2-5											1
18	1-2-5											1
19	3-5-10			3-4-6-7-10								2
20	2-3-6		2-3-6-10	3-4-6-7-10						2-3-6-8-9-10		4
21	5-6			2-5-6								2
22	5-7					2-5-7						2
23	3-5-7				1-3-7-8							2
24	3-5-7						1-3-5-7		1-3-5-7-10			3
25	1-4-7-9	1-2-4-8-9			1-2-3-4-8-9							3
26	1-4-7-9	1-2-4-8-9			1-2-3-4-8-9					1-2-3-5-8-9-10		4
27	1-10		1-8-10	1-3-8-10							3	
28	1-10	1-3-8-10										2
29	5-6-10			2-5-6-10								2
30	5-6-10						2-5-6-10					2
Instância	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	S _{CAM}

Figura 15 – Valores finais do parâmetro alfa (α) e as respectivas configurações de rede para cada instância do PRLP.

Fonte: Produção do próprio autor.

Esta remoção dos valores mais aos extremos da lista $\hat{\mathcal{A}}$ resultou em um ganho de desempenho no estágio de geração de soluções iniciais, pois foram reduzidas as quantidades de chamadas do algoritmo que executa o CAM. A Tabela 10 apresenta este ganho de desempenho como sendo a média da diferença entre o tempo total de execução (em segundos) do modelo CAM com os 11 valores selecionados do parâmetro alfa e os valores iniciais deste parâmetro. Este tempo médio é apresentado em função do número de clientes em cada instância, o que significa que, para instâncias de 20 clientes é esperado que o tempo computacional seja 0,607 segundos menor ao executar o modelo CAM com 11

valores de alfa, quando comparado com a execução do modelo CAM com os 19 valores iniciais do alfa.

Tabela 10 – Ganho médio no tempo processamento com os valores de alfa selecionados.

Núm. clientes	Ganho tempo médio [s]
20	0,607
50	2,137
100	4,194
200	26,020

Fonte: Produção do próprio autor.

5.1.2 Calibração dos parâmetros do RBA

Após serem geradas todas as soluções iniciais S_{CAM} , o algoritmo RBA modifica estas soluções, de forma que as rotas, ao invés de serem radiais, passam a ser rotas que visitam, eventualmente, mais de um cliente. Este processo considera a designação feita pelo CAM, tanto em termos do depósito associado a cada cliente, quanto em termos da combinação de dias de visita. Como explanado na subseção 4.2.2, o RBA consiste em gerar, em um primeiro momento, um roteiro gigante para cada depósito em cada dia do horizonte de planejamento, e no segundo momento, realizar a partição deste roteiro gigante em rotas menores. Desta maneira, os parâmetros do *solver* Gurobi, usado na resolução do modelo matemático MIP do caixeiro viajante que gera o roteiro gigante, receberam os mesmos valores que o modelo CAM, mas com exceção do parâmetro `GRB_DoubleParam_MIPGap` que permaneceu com o seu valor igual a zero (valor padrão do Gurobi para este parâmetro).

De acordo com a descrição do algoritmo RBA (subseção 4.2.2), na etapa de partição do roteiro gigante foi estabelecida a possibilidade de exceder a capacidade dos veículos, mediante a utilização de um fator λ . É importante ressaltar que isso acontece devido às características do CAM (restrição 4.5), onde a carga combinada (agregada) de todos os clientes em cada dia não deve ultrapassar a capacidade total da frota designada ao depósito, o que pode resultar em uma violação de capacidade durante a roteirização. A utilização deste fator fez-se necessário, uma vez que existe a possibilidade de que a partição do roteiro gigante seja ineficaz em termos da ocupação dos veículos (excesso de capacidade).

Com a finalidade de ter um critério para a seleção deste fator λ foram realizados alguns testes, utilizando duas regras diferentes. Estas regras levaram em consideração, a ocupação de todos os veículos que compõem a frota de um determinado depósito em cada dia do horizonte, o que se traduz em penalidade caso seja violada a capacidade; e a consideração do custo total de roteirização, que sabe-se que depende da sequência de atendimento designada aos clientes.

Desta maneira, a primeira regra consistiu em manter as capacidades originais de todos os veículos durante a partição do roteiro gigante, exceto a capacidade do veículo que executa a rota com os clientes remanescentes (última rota da partição), que pode aceitar o total de carga excedente. Esta primeira regra equivale a multiplicar a capacidade deste último veículo pelo fator λ . A segunda regra testada consistiu em aceitar a violação da capacidade para todos os veículos, de tal maneira que com a aceitação do excesso de carga, todos os clientes que formam o roteiro gigante possam ser atendidos pela frota disponível, isto é, o fator λ multiplica a capacidade de todos os veículos que compõem a frota de um determinado depósito. Após realizar testes com cada uma das regras, foi verificado que com a utilização da primeira regra, a ocupação média dos veículos das primeiras rotas da partição do roteiro gigante era muito baixa, enquanto a última rota, com os clientes remanescentes da partição, ficava com um forte excesso de carga.

A subfigura a) da Figura 16 ilustra este comportamento da primeira regra, onde podem ser observadas duas rotas com baixa ocupação dos veículos, com 53% e 79% de ocupação, respectivamente (considerando uma frota homogênea com capacidade de 80 unidades), e uma terceira rota com 191% de ocupação. Por outro lado, a segunda regra conseguiu gerar uma melhor distribuição dos clientes, levando a uma maior ocupação dos veículos, e à partição em rotas melhor balanceadas em termos de distância. A subfigura b) da Figura 16) mostra um exemplo da utilização desta segunda regra, onde as três rotas têm uma ocupação dos veículos de 105%, 110% e 108%, respectivamente, sendo que existe excesso de capacidade nos três veículos, com rotas realmente mais homogêneas em termos de ocupação e distância.

Figura 16 – Exemplos de partição do roteiro gigante, com a) primeira regra e b) segunda regra para definição do fator λ de excesso de capacidade.

Fonte: Produção do próprio autor.

Após a realização dos testes, utilizando as duas regras para a definição do fator λ , foi constatado que a segunda regra é a mais adequada para ser utilizada no método de solução proposto. A Tabela 11 mostra os valores finais do fator λ , que foram usados durante a execução do algoritmo RBA para partição do roteiro gigante, sendo que estes valores são designados em função da quantidade de clientes de cada instância do PLRP. Além disso, estes valores do fator λ representam os mínimos, para os que o algoritmo RBA consegue particionar o roteiro gigante.

Tabela 11 – Percentagem de excesso de capacidade dos veículos no algoritmo RBA.

Núm. clientes	Fator λ
20	15%
50	28%
100	32%
200	35%

Fonte: Produção do próprio autor.

5.1.3 Calibração dos parâmetros do SA

A metaheurística SA é conhecida por requerer um determinado nível de expertise para realizar a calibração dos parâmetros que a compõem (FRANZIN; STÜTZLE, 2019). A calibração de cada uma destas componentes foi baseada em trabalhos da literatura e em testes experimentais feitos com o algoritmo. A seguir são descritos os parâmetros usados para realizar os testes computacionais com as instâncias do PLRP.

TEMPERATURA INICIAL, T_0 — O valor deste parâmetro foi definido em função do valor da função objetivo $f(s)$ com $s \in S_0$, mas ao invés de utilizar o valor total da função objetivo da solução inicial s , este utiliza o valor referente à parcela de roteirização. Desta maneira, o valor do fator σ (definido na subseção 4.3.1) precisou da realização de alguns testes para chegar em um valor de T_0 que entregasse melhores resultados durante a execução do algoritmo SA. O valor que gerou os melhores resultados foi $\sigma = 0,10$.

TEMPERATURA FINAL, T_f — O valor designado inicialmente para este parâmetro no método de solução proposto foi $T_f = 1$, porém durante os testes foi observado que o algoritmo estava ficando estagnado logo após a metade do níveis de resfriamento, pelo que foi fixado o valor de $T_f = 5$. Cabe ressaltar que o tipo de resfriamento usado neste algoritmo SA é o resfriamento geométrico.

ESQUEMA DE RESFRIAMENTO, c — Durante a implementação do algoritmo SA foi usado um valor $c \geq 0,90$, mas foi necessário aumentar o valor, pois foi percebido que o número de níveis de resfriamento com este valor de c era muito baixo. Após os testes foi selecionado um valor de $c = 0,98$.

CRITÉRIO DE PARADA — O número de níveis de resfriamento L é um valor calculado a partir dos parâmetros de temperatura T_0 , T_1 e do esquema de resfriamento (c), portanto, calibrando os parâmetros anteriores, o critério de parada já recebe um valor. O outro parâmetro do critério de parada, o número de níveis de resfriamento sem melhora da solução s^* , representado por $\hat{L}$, foi fixado como $\hat{L} = 100$ nos testes iniciais, porém foi identificado que os resultados não estavam satisfatórios devido à estagnação precoce do algoritmo. Além disso, nem todas as soluções apresentavam iguais quantidades de níveis de resfriamento, pelo que um valor fixo não seria a melhor opção. Por esse motivo, foi usado um valor $\hat{L} = \frac{L}{4}$ que, na maioria das vezes, foi um valor acima do valor proposto inicialmente.

NÚMERO DE TENTATIVAS, M — Inicialmente, este parâmetro foi fixado em $M = 20.000$, um valor relativamente alto, mas que permitiu conhecer o comportamento do método. Nos testes posteriores, foi designado um valor em função do tamanho do problema a resolver, desta maneira, o valor final usado para a execução algoritmo SA foi de $M = 200(m + n)$, sendo m o número de depósitos do problema e n o número de clientes do problema.

5.2 Resolução das instâncias do PLRP

As soluções encontradas com a realização dos testes computacionais para cada uma destas instâncias do PLRP, são comparáveis com as soluções apresentadas por [Prodhon \(2011\)](#), pois a autora deixa claro que seu método de solução considerou a designação fixa de cliente-depósito ao longo do horizonte de planejamento, sendo este um critério que não foi observado nos trabalhos de [Hemmelmayr \(2015\)](#) e [Koç \(2016\)](#).

As Tabelas 12 e 13 apresentam os resultados da execução dos testes do primeiro estágio do método de solução (modelo CAM e algoritmo RBA) para as instâncias do PLRP. A primeira coluna destas tabelas contém a nomenclatura utilizada para identificação de cada instância, com os dados ordenados conforme a ordem presente nos resultados de [Prodhon \(2011\)](#). A segunda coluna contém o valor do parâmetro alfa (α) em cada uma das soluções encontradas pelo modelo CAM, para a respectiva instância. A partir da terceira coluna até a sétima coluna aparecem os resultados do modelo CAM, sendo que a terceira coluna (FO) contém o valor da função objetivo. A quarta coluna (PV) indica se a solução possui penalidades por violação de capacidade (depósitos e veículos), ou seja, se a solução resulta inviável por excesso de capacidade, assume o valor 0, e se for viável assume o valor 1. A quinta coluna (OD) contém o número de depósitos abertos. A sexta coluna (FT) contém o tamanho da frota total designada pelo CAM para todos os depósitos abertos, em outras palavras, é a somatória de todos os veículos designados a estes depósitos. A sétima coluna (TP) contém o tempo computacional do CAM em segundos, sendo este o tempo total da execução do modelo CAM para encontrar todas as configurações de

rede, com os diferentes valores de alfa. A oitava coluna até a décima segunda coluna estão relacionadas com os resultados do algoritmo RBA, no mesmo formato das colunas referentes ao CAM.

Tabela 12 – Resultados do primeiro estágio do método de solução para as instâncias 1-15 do PLRP.

ID	α	CAM						RBA					
		FO	PV	OD	FT	TP		FO	PV	OD	FT	TP	
1 20-5-1	0,15	39.783	0	1	3	0,74		144.565	0	1	3	0,07	
1 20-5-1	0,30	55.928	0	2	3	0,74		253.340	0	2	3	0,07	
1 20-5-1	0,60	80.424	1	3	3	0,74		93.796	1	3	3	0,07	
2 20-5-1b	0,15	43.950	0	1	2	0,25		287.849	0	1	2	0,09	
2 20-5-1b	0,25	60.092	1	2	2	0,25		100.432	1	2	2	0,09	
3 20-5-2	0,15	39.796	0	1	3	0,70		177.636	0	1	3	0,06	
3 20-5-2	0,30	55.554	0	2	3	0,70		176.337	0	2	3	0,06	
4 20-5-2b	0,15	35.019	0	1	2	0,46		113.150	0	1	2	0,03	
4 20-5-2b	0,25	44.657	1	2	2	0,46		75.623	1	2	2	0,03	
5 50-5-1	0,15	81.695	0	3	5	1,22		544.105	0	3	5	0,08	
6 50-5-1b	0,15	198.684	0	3	4	0,86		602.538	0	3	4	0,12	
6 50-5-1b	0,55	184.937	1	4	4	0,86		163.989	1	4	4	0,12	
7 50-5-2	0,15	73.820	0	2	5	0,58		856.954	0	2	5	0,23	
7 50-5-2	0,35	105.842	0	3	5	0,58		660.967	0	3	5	0,23	
7 50-5-2	0,40	133.721	0	4	5	0,58		476.446	0	4	5	0,23	
8 50-5-2b	0,15	68.788	0	2	4	1,16		709.703	0	2	4	0,19	
8 50-5-2b	0,25	90.170	0	3	4	1,16		642.901	0	3	4	0,19	
8 50-5-2b	0,50	128.349	1	4	4	1,16		139.023	1	4	4	0,19	
9 50-5-2'	0,15	90.574	0	2	6	1,06		949.133	0	2	6	0,12	
10 50-5-2b'	0,15	64.899	0	2	4	0,10		882.748	0	2	4	0,08	
11 50-5-3	0,15	79.041	0	2	6	1,20		918.879	0	2	6	0,17	
11 50-5-3	0,25	99.722	0	3	6	1,20		828.779	0	3	6	0,17	
12 50-5-3b	0,15	63.941	0	2	3	0,91		307.034	0	2	3	0,14	
12 50-5-3b	0,20	74.932	1	3	3	0,91		134.679	1	3	3	0,14	
13 100-5-1	0,15	172.339	0	2	10	0,91		2.480.430	0	2	10	2,05	
13 100-5-1	0,20	203.258	0	3	10	0,91		1.831.464	0	3	10	2,05	
14 100-5-1b	0,15	142.794	0	2	6	0,42		2.541.213	0	2	6	1,63	
14 100-5-1b	0,25	199.556	0	3	6	0,42		1.932.062	0	3	6	1,63	
15 100-5-2	0,15	143.201	0	2	13	0,97		2.846.987	0	2	13	1,46	
15 100-5-2	0,25	179.283	0	3	13	0,97		2.359.243	0	3	13	1,46	

Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 13 – Resultados do CAM para as instâncias 16-30 do PLRP.

ID	α	CAM					RBA				
		FO	PV	OD	FT	TP	FO	PV	OD	FT	TP
16 100-5-2b	0,15	99.859	0	2	6	1,53	2.328.076	0	2	6	1,06
16 100-5-2b	0,45	179.558	0	3	7	1,53	1.594.422	0	3	7	1,06
17 100-5-3	0,15	126.705	0	3	9	2,97	2.066.800	0	3	9	0,33
18 100-5-3b	0,15	107.727	0	3	6	0,53	1.578.408	0	3	6	0,23
19 100-10-1	0,15	142.747	0	3	10	5,66	1.530.313	0	3	10	0,84
19 100-10-1	0,30	270.659	0	5	10	5,66	1.247.637	0	5	10	0,84
20 100-10-1b	0,15	128.460	0	3	6	14,93	1.418.890	0	3	6	1,11
20 100-10-1b	0,25	164.912	0	4	6	14,93	886.320	0	4	6	1,11
20 100-10-1b	0,30	183.589	0	5	6	14,93	691.732	0	5	6	1,11
20 100-10-1b	0,60	248.420	0	6	7	14,93	628.912	0	6	7	1,11
21 100-10-2	0,15	133.793	0	2	11	5,69	2.566.068	0	2	11	2,22
21 100-10-2	0,30	191.857	0	3	12	5,69	2.899.008	0	3	12	2,22
22 100-10-2b	0,15	104.333	0	2	6	4,76	2.094.819	0	2	6	0,80
22 100-10-2b	0,40	191.270	0	3	7	4,76	2.167.009	0	3	7	0,80
23 100-10-3	0,15	143.185	0	3	11	66,54	2.516.945	0	3	11	0,75
23 100-10-3	0,35	211.311	0	4	11	66,54	2.017.029	0	4	11	0,75
24 100-10-3b	0,15	119.494	0	3	7	11,02	2.052.551	0	3	7	0,58
24 100-10-3b	0,45	223.232	0	4	8	11,02	2.533.875	0	4	8	0,58
24 100-10-3b	0,50	237.396	0	5	7	11,02	1.136.270	0	5	7	0,58
25 200-10-1	0,15	253.884	0	4	19	15,18	5.821.138	0	4	19	2,50
25 200-10-1	0,20	281.895	0	5	19	15,18	5.009.488	0	5	19	2,50
25 200-10-1	0,35	360.630	0	6	19	15,18	4.211.809	0	6	19	2,50
26 200-10-1b	0,15	232.356	0	4	13	19,65	5.593.342	0	4	13	6,30
26 200-10-1b	0,20	264.602	0	5	13	19,65	4.219.540	0	5	13	6,30
26 200-10-1b	0,35	381.588	0	6	14	19,65	4.253.812	0	6	13	6,30
26 200-10-1b	0,60	488.867	0	7	14	19,65	4.014.618	0	7	14	6,30
27 200-10-2	0,15	215.835	0	2	19	6,10	5.688.626	0	2	19	9,75
27 200-10-2	0,25	276.597	0	3	19	6,10	5.518.264	0	3	19	9,75
27 200-10-2	0,30	297.473	0	4	19	6,10	4.962.993	0	4	19	9,75
28 200-10-2b	0,15	198.145	0	2	13	3,87	6.174.955	0	2	13	16,52
28 200-10-2b	0,20	231.383	0	4	13	3,87	5.691.089	0	4	13	16,52
29 200-10-3	0,15	284.818	0	3	22	8,22	6.652.847	0	3	22	7,53
29 200-10-3	0,30	371.752	0	4	22	8,22	5.945.658	0	4	22	7,53
30 200-10-3b	0,15	222.649	0	3	12	35,11	6.142.826	0	3	12	4,59
30 200-10-3b	0,45	451.235	0	4	12	35,11	5.578.453	0	4	12	4,59

Fonte: Produção do próprio autor.

Nas Tabelas 12 e 13 pode-se observar que a resolução do modelo CAM gera entre uma e quatro configurações de rede por instância, dependendo do valor designado ao parâmetro alfa α , com tempos computacionais razoavelmente bons. Cabe ressaltar que todas as soluções do modelo CAM são consideradas como inviáveis, uma vez que as rotas ainda não foram definidas, porém é possível encontrar alguns casos onde o CAM poderia entregar uma solução viável para o PLRP-FA. Por exemplo, a solução do modelo CAM da instância 1 (20-5-1), com $\alpha = 0,60$, em que somente foi designado um veículo para cada depósito aberto, e cujas demandas atendidas pelos veículos não ultrapassam suas capacidades. Com respeito aos resultados do algoritmo RBA, pode-se dizer que estes só alteram a função objetivo (oitava coluna) devido à inclusão das penalidades, que são resultantes da partição das rotas, ou seja, ao exceder a capacidade dos veículos, de tal maneira que seja possível usar o algoritmo de Bellman para frota limitada. Nestas tabelas, também é possível observar que os tempos computacionais do algoritmo RBA são muito baixos, quando comparados com os tempos computacionais do algoritmo CAM, conforme pode ser verificado na última coluna.

As Tabelas 14 e 15 apresentam os resultados dos testes realizados com o algoritmo SA, utilizando o conjunto de soluções iniciais S_0 encontradas pelo primeiro estágio (CAM e RBA) do método de solução do PLRP-FA. As colunas destas tabelas seguem o mesmo formato apresentado nas Tabelas 12 e 13, mas desta vez unicamente para os resultados do algoritmo SA. Nestas tabelas pode-se observar que os valores da função objetivo (FO) do algoritmo SA foram reduzidos, tendo em vista que as penalidades foram retiradas durante a execução da busca do algoritmo SA. É importante destacar que para algumas das soluções encontradas pelo algoritmo SA foi preciso ajustar a frota, isto acrescentando um ou dois veículos, de acordo com a regra de ajuste da frota. A última coluna destas tabelas mostra o tempo computacional de execução, que pode ser considerado de muito bom, ao apresentar valores abaixo dos 180 segundos, inclusive para os problemas maiores.

Tabela 14 – Resultados do algoritmo SA para as instâncias 1-15 do PLRP.

ID	α	SA				
		FO	PV	OD	FT	TP
1 20-5-1	0,15	80.464	1	1	3	1,22
1 20-5-1	0,30	78.726	1	2	3	1,22
1 20-5-1	0,60	80.855	1	3	3	1,22
2 20-5-1b	0,15	75.690	1	1	2	2,02
2 20-5-1b	0,25	78.546	1	2	2	2,02
3 20-5-2	0,15	83.984	1	1	3	1,97
3 20-5-2	0,30	78.796	1	2	3	1,97
4 20-5-2b	0,15	63.083	1	1	2	2,65
4 20-5-2b	0,25	62.491	1	2	2	2,65
5 50-5-1	0,15	146.180	1	3	5	5,91
6 50-5-1b	0,15	135.838	1	3	4	40,06
6 50-5-1b	0,55	163.989	1	4	4	40,06
7 50-5-2	0,15	146.896	1	2	6	12,63
7 50-5-2	0,35	138.820	1	3	6	12,63
7 50-5-2	0,40	145.399	1	4	6	12,63
8 50-5-2b	0,15	109.350	1	2	4	9,52
8 50-5-2b	0,25	113.431	1	3	4	9,52
8 50-5-2b	0,50	122.403	1	4	5	9,52
9 50-5-2'	0,15	169.067	1	2	7	9,75
10 50-5-2b'	0,15	97.905	1	2	4	8,78
11 50-5-3	0,15	160.924	1	2	7	13,55
11 50-5-3	0,25	153.007	1	3	7	13,55
12 50-5-3b	0,15	109.172	1	2	4	12,06
12 50-5-3b	0,20	110.951	1	3	4	12,06
13 100-5-1	0,15	350.440	1	2	11	31,73
13 100-5-1	0,20	339.989	1	3	12	31,73
14 100-5-1b	0,15	217.662	1	2	6	18,92
14 100-5-1b	0,25	247.892	1	3	6	18,92
15 100-5-2	0,15	271.069	1	2	14	21,31
15 100-5-2	0,25	259.428	1	3	14	21,31

Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 15 – Resultados do algoritmo SA para as instâncias 16-30 do PLRP.

ID	α	SA				
		FO	PV	OD	FT	TP
16 100-5-2b	0,15	159.217	1	2	7	20,97
16 100-5-2b	0,45	167.771	1	3	7	20,97
17 100-5-3	0,15	213.439	1	3	10	17,53
18 100-5-3b	0,15	160.728	1	3	6	15,52
19 100-10-1	0,15	261.625	1	3	11	86,89
19 100-10-1	0,30	252.508	1	5	11	86,89
20 100-10-1b	0,15	202.970	1	3	7	95,98
20 100-10-1b	0,25	317.229	1	4	6	95,98
20 100-10-1b	0,30	214.543	1	5	7	95,98
20 100-10-1b	0,60	224.105	1	6	8	95,98
21 100-10-2	0,15	267.238	1	2	12	28,44
21 100-10-2	0,30	252.878	1	3	13	28,44
22 100-10-2b	0,15	161.226	1	2	7	45,10
22 100-10-2b	0,40	168.786	1	3	7	45,10
23 100-10-3	0,15	262.994	1	3	12	50,80
23 100-10-3	0,35	248.099	1	4	12	50,80
24 100-10-3b	0,15	187.029	1	3	7	43,49
24 100-10-3b	0,45	197.668	1	4	8	43,49
24 100-10-3b	0,50	213.342	1	5	7	43,49
25 200-10-1	0,15	440.429	1	4	21	150,80
25 200-10-1	0,20	432.472	1	5	22	150,80
25 200-10-1	0,35	422.180	1	6	21	150,80
26 200-10-1b	0,15	350.818	1	4	14	176,90
26 200-10-1b	0,20	360.494	1	5	14	176,90
26 200-10-1b	0,35	385.493	1	6	14	176,90
26 200-10-1b	0,60	382.759	1	7	14	176,90
27 200-10-2	0,15	391.162	1	2	20	106,70
27 200-10-2	0,25	402.658	1	3	20	106,70
27 200-10-2	0,30	374.722	1	4	21	106,70
28 200-10-2b	0,15	303.575	1	2	14	117,60
28 200-10-2b	0,20	295.605	1	4	14	117,60
29 200-10-3	0,15	523.833	1	3	24	113,70
29 200-10-3	0,30	559.798	1	4	24	113,70
30 200-10-3b	0,15	329.334	1	3	13	84,99
30 200-10-3b	0,45	348.298	1	4	13	84,99

Fonte: Produção do próprio autor.

Na Tabela 16 são apresentados os resultados das melhores soluções do PLRP-FA, obtidos com a metaheurística SA. A primeira coluna contém o nome de identificação da instância. A segunda e a terceira coluna contém os limites inferior e superior, respectivamente, do intervalo do valor do parâmetro α , correspondente à melhor solução encontrada s^* de cada instância. A quarta coluna contém o valor do alfa resultante $\alpha^R = \frac{CRO}{CRA}$, sendo esta a razão entre o custo de roteirização $CRO = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} \sum_{l \in H} C_{ij} x_{ijkl}$ e o custo radial $CRA = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} C_{ij} f_{ij} \Phi_j$, ambos calculados a partir da melhor solução encon-

trada em cada instância. A quinta coluna contém os valores da função objetivo $f(s^*)$ da melhor solução encontrada. A sexta coluna contém os valores da função objetivo das soluções apresentadas por [Prodhon \(2011\)](#). A sétima coluna contém a diferença percentual (*gap*) entre os valores das duas colunas anteriores. As duas últimas colunas contém os tempos computacionais da execução da metaheurística SA para o PLRP-FA, e os tempos computacionais apresentados em [Prodhon \(2011\)](#) para o PLRP, respectivamente, ambos os tempos estão em segundos.

Tabela 16 – Comparação dos resultados da metaheurística SA para o PLRP com os resultados da literatura.

ID	α^{lb}	α^{ub}	α^R	OFSA	P2011	Gap	TSA	TP2011
1 20-5-1	0,30	0,55	0,57	78.726	78.741	-0,02	2,03	1,40
2 20-5-1b	0,15	0,20	0,34	75.690	75.554	0,18	2,36	1,40
3 20-52	0,30	0,65	0,57	78.796	80.386	-1,98	2,73	1,10
4 20-5-2b	0,25	0,65	0,47	62.491	63.179	-1,09	3,14	1,10
5 50-5-1	0,15	0,65	0,45	146.180	156.577	-6,64	7,21	5,00
6 50-5-1b	0,15	0,50	0,36	135.838	142.641	-4,77	41,04	11,20
7 50-5-2	0,35	0,35	0,46	138.820	143.934	-3,55	13,44	6,00
8 50-5-2b	0,15	0,20	0,33	109.350	117.416	-6,87	10,86	7,20
9 50-5-2'	0,15	0,65	0,41	169.067	177.529	-4,77	10,94	7,30
10 50-5-2b'	0,15	0,65	0,32	97.905	102.775	-4,74	8,96	8,30
11 50-5-3	0,25	0,65	0,52	153.007	157.929	-3,12	14,91	7,90
12 50-5-3b	0,15	0,15	0,34	109.172	114.622	-4,75	13,11	7,50
13 100-5-1	0,20	0,65	0,42	339.989	362.452	-6,20	34,69	28,60
14 100-5-1b	0,15	0,20	0,27	217.662	234.762	-7,28	20,98	38,00
15 100-5-2	0,25	0,65	0,49	259.428	281.699	-7,91	23,75	39,60
16 100-5-2b	0,15	0,40	0,33	159.217	168.754	-5,65	23,56	33,80
17 100-5-3	0,15	0,65	0,45	213.439	233.108	-8,44	20,83	35,50
18 100-5-3b	0,15	0,65	0,33	160.728	175.365	-8,35	16,29	35,00
19 100-10-1	0,30	0,65	0,46	252.508	278.508	-9,34	93,39	45,40
20 100-10-1b	0,15	0,20	0,33	202.970	220.133	-7,80	112,02	67,70
21 100-10-2	0,30	0,65	0,47	252.878	280.447	-9,83	36,35	64,10
22 100-10-2b	0,15	0,35	0,30	161.226	176.408	-8,61	50,66	66,10
23 100-10-3	0,35	0,65	0,45	248.099	273.658	-9,34	118,09	68,30
24 100-10-3b	0,15	0,40	0,34	187.029	204.897	-8,72	55,09	90,40
25 200-10-1	0,35	0,65	0,46	422.180	475.989	-11,30	168,48	309,80
26 200-10-1b	0,15	0,15	0,32	350.818	398.611	-11,99	202,85	442,70
27 200-10-2	0,30	0,65	0,45	374.722	403.962	-7,24	122,55	269,50
28 200-10-2b	0,20	0,65	0,31	295.605	324.777	-8,98	137,99	674,80
29 200-10-3	0,15	0,25	0,42	523.833	567.336	-7,67	129,46	365,20
30 200-10-3b	0,15	0,40	0,28	329.334	361.062	-8,79	124,69	484,20
Média	0,23	0,48	0,40	210.224	227.774	-6,52	54,08	107,47

Fonte: Produção do próprio autor.

Os resultados da Tabela 16 mostram que o método de resolução proposto consegue resolver de maneira eficiente as instâncias do PLRP com a abordagem de designação

fixa de cliente-depósito (PLRP-FA), conseguindo superar as soluções apresentadas por Prodhon (2011). O valor alfa resultante (α^R), na maioria dos casos esteve dentro (ou muito próximo) do intervalo de alfas correspondentes à melhor solução encontrada. A melhora média (*gap*) dos valores da função objetivo, considerando as soluções de todas as instâncias, foi de $-6,52\%$, com valor de melhora mínimo de $-0,02\%$ (instância 1) e um máximo de $-11,99\%$ (instância 26). Cabe destacar que, a instância 2 foi o único caso em que não foi possível superar a solução de Prodhon (2011). Os tempos computacionais obtidos apresentaram uma média de 54,08 segundos, com um valor mínimo de 2,03 segundos (instância 1) e valor máximo de 202.85 segundos (instância 26). Estes valores dos tempos computacionais se mostraram competitivos em relação aos tempos computacionais apresentados por Prodhon (2011), representando uma redução média de $49,68\%$ entre os dois resultados aqui comparados.

A Figura 17 mostra um resumo dos resultados obtidos para cada faixa de instâncias, agrupadas de acordo com o número de clientes e o número de depósitos, sendo que estes grupos separados da seguinte forma: quatro instâncias com 20 clientes e 5 depósitos; oito instâncias com 50 clientes e 5 depósitos; seis instâncias com 100 clientes e 5 depósitos; seis instâncias com 100 clientes e 10 depósitos, e; seis instâncias com 200 clientes e 10 depósitos. O tempo médio de execução do modelo CAM foi de 7,11 segundos, sendo os menores valores entre as instâncias com 5 depósitos e os maiores valores para as instâncias com 10 depósitos. O tempo computacional médio do algoritmo RBA foi de 2,05 segundos, sendo este significativamente maior para o grupo de instâncias com 200 clientes. O tempo médio de execução do algoritmo SA foi de 44,92 segundos, se mostrando homogêneo no incremento entre cada grupo de instâncias, sendo menor entre o grupo de 20 clientes e maior entre o grupo de 200 clientes. O tempo computacional médio da execução do método de solução (metaheurística SA, considerando os dois estágios) foi de 54,08 segundos, se mostrando também homogêneo no incremento entre cada grupo de instâncias, com um comportamento similar ao do tempo médio de execução do algoritmo SA.

Configuração de rede [Clientes - Depósitos]	[20-5]	[50-5]	[100-5]	[100-10]	[200-10]	Média
Núm. de instâncias	4	8	6	6	6	-
CAM - tempo médio [s]	0,54	0,89	1,22	18,10	14,69	7,11
RBA - tempo médio [s]	0,06	0,14	1,13	1,05	7,86	2,05
SA - tempo médio [s]	1,96	14,03	21,00	58,45	125,12	44,92
Média tempo total [s]	2,56	15,06	23,35	77,60	147,67	54,08
Média núm. soluções	2,25	2,00	1,67	3,67	3,67	2,63
CAM - frota média	2,50	4,62	8,33	8,67	16,33	8,23
SA - frota média	2,50	5,12	9,17	9,50	17,83	9,00
Frota - ocupação média [%]	59,05	71,76	83,55	79,66	85,23	76,70
Alfa resultante médio ($\overline{\alpha^R}$)	0,49	0,40	0,38	0,39	0,37	0,40
Gap médio (Prodhon, 2011) [%]	-0,73	-4,90	-7,30	-8,94	-9,33	-6,52

Figura 17 – Resumo dos resultados dos testes computacionais para cada grupo de configurações de rede das instâncias do PLRP.

Fonte: Produção do próprio autor.

Na Figura 17, também é possível observar que o número médio de soluções (configurações de rede diferentes) entre as instâncias de cada grupo foi de 2,64 soluções, sendo este número de soluções ligeiramente maior entre os grupos de instâncias com 10 depósitos. Com relação à frota alocada para execução das rotas, a média de veículos designados pelo modelo CAM, considerando todas as instâncias, foi de 8,23 veículos. Já no algoritmo SA, este tamanho de frota médio foi de 9 veículos, apresentando incremento entre todos os grupos de instâncias, exceto para o grupo de 20 clientes. A ocupação média dos veículos ao longo do horizonte de planejamento foi de 76,70%, onde se destaca significativamente o grupo de instâncias de 20 clientes por apresentar uma ocupação média abaixo de 60%. O valor médio do parâmetro alfa (α) resultante foi de 0,40, sendo este maior entre o grupo de instâncias de 20 clientes com um valor de 0,49. Finalmente, o valor médio da diferença percentual entre os valores da função objetivo das soluções encontradas pela metaheurística SA, comparado com as soluções de Prodhon (2011), foi de -6,52%, sendo o menor valor entre o grupo de 20 clientes, com uma média de -0,73%, e o maior valor entre o grupo de 200 clientes, com valor médio de -9,33%.

A Figura 18 mostra saída gráfica da solução ótima do modelo CAM, para a instância 26 (200-10-1b). Nela é possível observar as rotas radiais individuais para cada um dos clientes designados ao seu respectivo depósito, para cada dia do horizonte de planejamento. A Figura 19 ilustra a solução entregue pelo algoritmo RBA, isto após ter realizado a partição do roteiro gigante GT , e que serve como solução inicial s_0 para o algoritmo SA. Finalmente, a Figura 20 mostra de maneira gráfica a melhor solução encontrada pelo algoritmo SA. Esta instância teve a função objetivo melhorada em $-11,9\%$, valor que representa a maior redução encontrada pela metaheurística SA, entre o conjunto de instâncias do PLRP.

Figura 18 – Solução do CAM para a instância do PLRP 26 200-10-1b.

Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 19 – Solução do RBA para a instância do PLRP 26 200-10-1b.

Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 20 – Melhor solução do algoritmo SA para a instância do PLRP 26 200-10-1b.

Fonte: Produção do próprio autor.

6 CONCLUSÕES

Nesta dissertação foi solucionado o problema de localização-roteirização periódico, com designação fixa de cliente-depósito, ou *periodic location-routing problem with fixed customer-depot assignment* (PLRP), utilizando como método de solução uma metaheurística *simulated annealing* (SA). Este método proposto utiliza uma heurística híbrida para geração de soluções iniciais, composta por um modelo de programação matemática (MIP), que corresponde a uma versão relaxada do problema original, e uma heurística construtiva de duas fases *route-first cluster-second*.

A metaheurística SA proposta resolveu as instâncias do PLRP disponíveis na literatura, entregando resultados competitivos quando comparados com os resultados de [Prodron \(2011\)](#), conseguindo reduzir tanto os valores das soluções, quanto os tempos computacionais, na maioria dos casos. Cabe destacar que o ganho de desempenho deve-se à utilização de um método mais eficiente, que consegue gerar configurações de rede mais favoráveis, somado à realização de uma exploração mais abrangente do espaço de solução. Este processo contou com a utilização de computação paralela para melhorar a qualidade das soluções, e reduzir os tempos computacionais.

O problema estudado é um tópico que apresenta aplicações em diversas operações de distribuição reais, porém foi observado, durante o levantamento bibliográfico desta pesquisa, que poucos trabalhos abordam o PLRP de uma maneira clara, sendo destacável que nenhum destes trabalhos traz uma abordagem detalhada da modelagem do problema. Além disso, foi observado que a metaheurística SA somente tem sido aplicada para resolver o problema de localização-roteirização padrão, mas não a variante periódica, de modo que esta dissertação de mestrado é o primeiro estudo que resolve o PLRP utilizando a estrutura padrão da metaheurística SA.

Finalmente, recomenda-se que trabalhos futuros envolvam a proposição de novas instâncias de testes, e que os métodos e modelos aqui apresentados sejam estendidos para a versão estocástica do problema, com a introdução de incerteza nas demandas e nos tempos de viagem. Outros desdobramentos importantes desta pesquisa são as extensões de frota heterogênea, *pick-up and delivery*, e a consideração de casos em que a duração das rotas se estenda por mais de um dia.

REFERÊNCIAS

- ALBA, E.; LUQUE, G.; NESMACHNOW, S. Parallel metaheuristics: Recent advances and new trends. **International Transactions in Operational Research**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 20, n. 1, p. 1–48, jan 2013. ISSN 09696016. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1111/j.1475-3995.2012.00862.x>> <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1475-3995.2012.00862.x>> <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1475-3995.2012.00862.x>>.
- ALBAREDA-SAMBOLA, M.; DÍAZ, J. A.; FERNÁNDEZ, E. A compact model and tight bounds for a combined location-routing problem. **Computers and Operations Research**, Pergamon, v. 32, n. 3, p. 407–428, mar 2005. ISSN 03050548.
- ALBAREDA-SAMBOLA, M. et al. The multi-period incremental service facility location problem. **Computers & Operations Research**, v. 36, n. 5, p. 1356–1375, may 2009. ISSN 03050548. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054808000294>>.
- ALBAREDA-SAMBOLA, M.; FERNÁNDEZ, E.; NICKEL, S. Multiperiod Location-Routing with Decoupled Time Scales. **European Journal of Operational Research**, v. 217, n. 2, p. 248–258, mar 2012. ISSN 03772217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221711008502>>.
- BALLOU, R. H. Dynamic Warehouse Location Analysis. **Journal of Marketing Research**, American Marketing Association, v. 5, n. 3, p. 271–276, aug 1968. ISSN 00222437. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/3150343>>.
- BARRETO, S. et al. Using clustering analysis in a capacitated location-routing problem. **European Journal of Operational Research**, v. 179, n. 3, p. 968–977, 2007. ISSN 03772217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221706000786>>.
- BELTRAMI, E. J.; BODIN, L. D. Networks and vehicle routing for municipal waste collection. **Networks**, v. 4, n. 1, p. 65–94, 1974. ISSN 00283045. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/net.3230040106>>.
- BERGER, R. T.; COULLARD, C. R.; DASKIN, M. S. Location-Routing Problems with Distance Constraints. **Transportation Science**, v. 41, n. 1, p. 29–43, feb 2007. ISSN 0041-1655.
- BOVENTER, E. THE RELATIONSHIP BETWEEN TRANSPORTATION COSTS AND LOCATION RENT IN TRANSPORTATION PROBLEMS. **Journal of Regional Science**, v. 3, n. 2, p. 27–40, dec 1961. ISSN 0022-4146. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1111/j.1467-9787.1961.tb01276.x>>.
- BRAMEL, J.; SIMCHI-LEVI, D. A Location Based Heuristic for General Routing Problems. **Operations Research**, INFORMS, v. 43, n. 4, p. 649–660, aug 1995. ISSN 0030-364X. Disponível em: <<http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/opre.43.4.649?journalCode=opre>>.

CAMPBELL, A. M.; WILSON, J. H. Forty years of periodic vehicle routing. **Networks**, v. 63, n. 1, p. 2–15, jan 2014. ISSN 00283045. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/net.21527>>.

ČERNÝ, V. Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm. **Journal of optimization theory and applications**, Springer, v. 45, n. 1, p. 41–51, 1985.

CHRISTIAENS, J.; Vanden Berghe, G. Slack Induction by String Removals for Vehicle Routing Problems. **Transportation Science**, v. 54, n. 2, p. 417–433, jan 2020. ISSN 0041-1655. Disponível em: <<http://pubsonline.informs.org/doi/10.1287/trsc.2019.0914>>.

CHRISTOFIDES, N.; BEASLEY, J. E. The period routing problem. **Networks**, v. 14, n. 2, p. 237–256, 1984. ISSN 00283045. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/net.3230140205>>.

CHRISTOFIDES, N.; EILON, S. Expected Distances in Distribution Problems. **OR, Operational Research Society**, v. 20, n. 4, p. 437–443, dec 1969. ISSN 14732858. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/3008762>>.

CLARKE, G.; WRIGHT, J. W. Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points. **Operations Research, INFORMS**, v. 12, n. 4, p. 568–581, aug 1964. ISSN 0030-364X. Disponível em: <<http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/opre.12.4.568>>.

CONNOLLY, D. T. An improved annealing scheme for the QAP. **European Journal of Operational Research**, North-Holland, v. 46, n. 1, p. 93–100, may 1990. ISSN 03772217.

CRUZ, R. et al. Integrating berth allocation decisions in a fleet composition and periodic routing problem of platform supply vessels. **European Journal of Operational Research**, North-Holland, v. 275, n. 1, p. 334–346, may 2019. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S037722171830955X>>.

DANTZIG, G.; FULKERSON, R.; JOHNSON, S. Solution of a Large-Scale Traveling-Salesman Problem. **Journal of the Operations Research Society of America**, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 2, n. 4, p. 393–410, nov 1954. ISSN 0096-3984. Disponível em: <<https://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/opre.2.4.393>>.

DANTZIG, G. B.; RAMSER, J. H. The Truck Dispatching Problem. **Management Science, INFORMS**, v. 6, n. 1, p. 80–91, oct 1959. ISSN 0025-1909. Disponível em: <<http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/mnsc.6.1.80>>.

DASKIN, M. S. **Network and discrete location: models, algorithms, and applications**. New York: John Wiley & Sons, 1995. 339–349. p. ISBN 0-471-01897-X.

_____. What you should know about location modeling. **Naval Research Logistics**, v. 55, n. 4, p. 283–294, jun 2008. ISSN 0894069X. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/nav.20284>>.

_____. **Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications**. Second edi. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2013. ISBN 9781118537015. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/9781118537015>>.

DELAHAYE, D.; CHAIMATANAN, S.; MONGEAU, M. Simulated annealing: From basics to applications. In: **International Series in Operations Research and Management Science**. Springer New York LLC, 2019. v. 272, p. 1–35. Disponível em: <https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-91086-4_1>.

DERBEL, H. et al. A variable neighborhood search for the capacitated location-routing problem. In: **2011 4th International Conference on Logistics**. IEEE, 2011. p. 514–519. ISBN 978-1-4577-0322-5. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=5939452>>.

_____. An Iterated Local Search for Solving A Location-Routing Problem. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, v. 36, p. 875–882, aug 2010. ISSN 15710653. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1571065310001125>>.

DREXL, M.; SCHNEIDER, M. A survey of variants and extensions of the location-routing problem. **European Journal of Operational Research**, v. 241, n. 2, p. 283–308, mar 2015. ISSN 03772217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221714006651>>.

DUHAMEL, C. et al. A Memetic Approach for the Capacitated Location Routing Problem. **Proceedings of the EU/Meeting 2008 Workshop on Metaheuristics for Logistics and Vehicle Routing**, 2008. Disponível em: <<http://uahost.uantwerpen.be/eume/workshops/eume08/papers/paper42.pdf>>.

ESCOBAR, J. W. et al. A Granular Variable Tabu Neighborhood Search for the capacitated location-routing problem. **Transportation Research Part B: Methodological**, v. 67, p. 344–356, 2014. ISSN 01912615. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0191261514001039>>.

ESCOBAR, J. W.; LINFATI, R.; TOTH, P. A two-phase hybrid heuristic algorithm for the capacitated location-routing problem. **Computers & Operations Research**, v. 40, n. 1, p. 70–79, 2013. ISSN 03050548. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054812001116>>.

ESCOBAR, J. W. et al. A hybrid Granular Tabu Search algorithm for the Multi-Depot Vehicle Routing Problem. **Journal of Heuristics**, Kluwer Academic Publishers, v. 20, n. 5, p. 483–509, oct 2014. ISSN 15729397. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s10732-014-9247-0>>.

FERREIRA, K. M.; QUEIROZ, T. A. de. Two effective simulated annealing algorithms for the Location-Routing Problem. **Applied Soft Computing Journal**, Elsevier Ltd, v. 70, p. 389–422, sep 2018. ISSN 15684946.

FRANZIN, A.; STÜTZLE, T. Revisiting simulated annealing: A component-based analysis. **Computers and Operations Research**, Elsevier Ltd, v. 104, p. 191–206, apr 2019. ISSN 03050548.

GENDREAU, M.; POTVIN, J.-Y. **Handbook of Metaheuristics**. Springer-Verlag. Springer International Publishing, 2019. v. 272. (International Series in Operations Research & Management Science, v. 272). ISBN 978-3-319-91085-7. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-91086-4>>.

GUERRERO, W. et al. Hybrid heuristic for the inventory location-routing problem with deterministic demand. **International Journal of Production Economics**, v. 146, n. 1, p. 359–370, nov 2013. ISSN 09255273. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925527313003381>>.

HEMMELMAYR, V. C. Sequential and parallel large neighborhood search algorithms for the periodic location routing problem. **European Journal of Operational Research**, v. 243, n. 1, p. 52–60, may 2015. ISSN 03772217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221714009473>>.

HEMMELMAYR, V. C.; CORDEAU, J.-F.; CRAINIC, T. G. An adaptive large neighborhood search heuristic for Two-Echelon Vehicle Routing Problems arising in city logistics. **Computers & operations research**, v. 39, n. 12, p. 3215–3228, dec 2012. ISSN 0305-0548. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054812000871>>.

HUSSIN, M. S.; STÜTZLE, T. Tabu search vs. simulated annealing as a function of the size of quadratic assignment problem instances. **Computers and Operations Research**, Pergamon, v. 43, p. 286–291, mar 2014. ISSN 03050548.

JACOBSEN, S.; MADSEN, O. A comparative study of heuristics for a two-level routing-location problem. **European Journal of Operational Research**, v. 5, n. 6, p. 378–387, dec 1980. ISSN 03772217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377221780901241>>.

JARBOUI, B. et al. Variable neighborhood search for location routing. **Computers & Operations Research**, v. 40, n. 1, p. 47–57, 2013. ISSN 03050548. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054812001128>>.

KARAOGLAN, I. et al. The location-routing problem with simultaneous pickup and delivery: Formulations and a heuristic approach. **Omega**, v. 40, n. 4, p. 465–477, aug 2012. ISSN 03050483. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305048311001393>>.

KIRKPATRICK, S.; GELATT, C. D.; VECCHI, M. P. Optimization by simulated annealing. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 220, n. 4598, p. 671–680, may 1983. ISSN 00368075. Disponível em: <<http://science.sciencemag.org/>>.

KOÇ, Ç. A unified-adaptive large neighborhood search metaheuristic for periodic location-routing problems. **Transportation Research Part C: Emerging Technologies**, Pergamon, v. 68, p. 265–284, jul 2016. ISSN 0968-090X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0968090X16300262>>.

LAARHOVEN, P. J. M. van; AARTS, E. H. L. **Simulated Annealing: Theory and Applications**. Springer Netherlands, 1987. 7–15 p. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/978-94-015-7744-1_2>.

LAPORTE, G. What you should know about the vehicle routing problem. **Naval Research Logistics**, v. 54, n. 8, p. 811–819, dec 2007. ISSN 0894069X. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/nav.20261>>.

_____. Fifty Years of Vehicle Routing. **Transportation Science**, INFORMS, v. 43, n. 4, p. 408–416, nov 2009. ISSN 0041-1655. Disponível em: <<http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/trsc.1090.0301>>.

LAPORTE, G.; NICKEL, S.; GAMA, F. Saldanha-da. Introduction to Location Science. In: **Location Science**. Springer International Publishing, 2019. p. 1–21. Disponível em: <https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-32177-2_1>.

LAPORTE, G.; NOBERT, Y. An exact algorithm for minimizing routing and operating costs in depot location. **European Journal of Operational Research**, v. 6, n. 2, p. 224–226, feb 1981. ISSN 03772217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377221781902125>>.

LAPORTE, G.; NOBERT, Y.; PELLETIER, P. Hamiltonian location problems. **European Journal of Operational Research**, North-Holland, v. 12, n. 1, p. 82–89, jan 1983. ISSN 03772217.

LEE, C. Y.; LEE, D. Determination of initial temperature in fast simulated annealing. **Computational Optimization and Applications**, Kluwer Academic Publishers, v. 58, n. 2, p. 503–522, dec 2014. ISSN 15732894. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s10589-013-9631-y>>.

LENSTRA, J. K.; KAN, A. H. G. R. Complexity of vehicle routing and scheduling problems. **Networks**, v. 11, n. 2, p. 221–227, 1981. ISSN 00283045. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/net.3230110211>>.

MADSEN, O. B. Methods for solving combined two level location-routing problems of realistic dimensions. **European Journal of Operational Research**, v. 12, n. 3, p. 295–301, mar 1983. ISSN 03772217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377221783901996>>.

MARANZANA, F. E. On the Location of Supply Points to Minimize Transport Costs. **OR**, Operational Research Society, v. 15, n. 3, p. 261, sep 1964. ISSN 14732858. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/3007214><https://www.jstor.org/stable/3007214?origin=crossref>>.

MELECHOVSKÝ, J.; PRINS, C.; CALVO, R. W. A Metaheuristic to Solve a Location-Routing Problem with Non-Linear Costs. **Journal of Heuristics**, v. 11, n. 5-6, p. 375–391, dec 2005. ISSN 1381-1231. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s10732-005-3601-1>>.

MENDES, A. B. **Projeto de uma rede de distribuição de suprimentos para a exploração & produção do petróleo no mar**. 2015. Disponível em: <<http://www.bv.fapesp.br/28274>>.

METROPOLIS, N. et al. Equation of state calculations by fast computing machines. **The Journal of Chemical Physics**, American Institute of PhysicsAIP, v. 21, n. 6, p. 1087–1092, jun 1953. ISSN 00219606. Disponível em: <<http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1699114>>.

MIN, H.; JAYARAMAN, V.; SRIVASTAVA, R. Combined location-routing problems: A synthesis and future research directions. **European Journal of Operational**

Research, v. 108, n. 1, p. 1–15, jul 1998. ISSN 03772217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221797001720>>.

MITROFF, I. I. et al. On Managing Science in the Systems Age: Two Schemas for the Study of Science as a Whole Systems Phenomenon. **Interfaces**, INFORMS, may 1974. Disponível em: <<http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/inte.4.3.46>>.

NAGY, G.; SALHI, S. Location-routing: Issues, models and methods. **European Journal of Operational Research**, v. 177, n. 2, p. 649–672, mar 2007. ISSN 03772217.

OR, I.; PIERSKALLA, W. P. A Transportation Location-Allocation Model for Regional Blood Banking. **A I I E Transactions**, Taylor & Francis, v. 11, n. 2, p. 86–95, jun 1979. ISSN 0569-5554. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/05695557908974447>>.

PALETTA, G. A multiperiod traveling salesman problem: Heuristic algorithms. **Computers & Operations Research**, v. 19, n. 8, p. 789–795, nov 1992. ISSN 03050548. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/030505489290018Z>>.

PERL, J.; DASKIN, M. S. A warehouse location-routing problem. **Transportation Research Part B: Methodological**, v. 19, n. 5, p. 381–396, oct 1985. ISSN 01912615. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0191261585900529>>.

PIRKWIESER, D. I. S. **Hybrid Metaheuristics and Matheuristics for Problems in Bioinformatics and Transportation**. 2012. Tese (Doutorado) — Faculty of informatics, Vienna University of Technology, Vienna, 2012.

PIRKWIESER, S.; RAIDL, G. R. Variable neighborhood search coupled with ILP-based very large neighborhood searches for the (Periodic) location-routing problem. In: **Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)**. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010. v. 6373 LNCS, p. 174–189. ISBN 3642160530. ISSN 03029743. Disponível em: <https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-16054-7_13>.

PRINS, C.; LACOMME, P.; PRODHON, C. Order-first split-second methods for vehicle routing problems: A review. **Transportation Research Part C: Emerging Technologies**, Pergamon, v. 40, p. 179–200, mar 2014. ISSN 0968-090X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0968090X14000230>>.

PRINS, C.; PRODHON, C.; CALVO, R. W. **A Memetic Algorithm with Population Management (MA| PM) for the Capacitated Location-Routing Problem**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006. v. 3906. 183–194 p. (Lecture Notes in Computer Science, v. 3906). ISSN 0302-9743. ISBN 978-3-540-88438-5. Disponível em: <<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1462529.1462533>>.

_____. Solving the capacitated location-routing problem by a GRASP complemented by a learning process and a path relinking. **4OR**, Springer Verlag, v. 4, n. 3, p. 47–64, jul 2006. ISSN 16142411. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s10288-006-0001-9>>.

PRINS, C. et al. Solving the Capacitated Location-Routing Problem by a Cooperative Lagrangean Relaxation-Granular Tabu Search Heuristic. **Transportation Science**, v. 41, n. 4, p. 470–483, nov 2007. ISSN 0041-1655. Disponível em: <<http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/trsc.1060.0187>>.

PRODHON, C. A metaheuristic for the periodic location-routing problem. In: **Operations Research Proceedings 2007**. [S.l.]: Springer, 2008. p. 159–164. ISBN 3540779027.

_____. An ELSxPath relinking hybrid for the periodic location-routing problem. In: **Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)**. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. v. 5818 LNCS, p. 15–29. ISBN 3642049176. ISSN 03029743. Disponível em: <https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-04918-7_2>.

_____. A hybrid evolutionary algorithm for the periodic location-routing problem. **European Journal of Operational Research**, v. 210, n. 2, p. 204–212, apr 2011. ISSN 03772217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221710006193>>.

PRODHON, C.; PRINS, C. A memetic algorithm with population management (MA|PM) for the periodic location-routing problem. In: **Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)**. Springer Verlag, 2008. v. 5296 LNCS, p. 43–57. ISBN 3540884386. ISSN 16113349. Disponível em: <https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-540-88439-2_4>.

_____. A survey of recent research on location-routing problems. **European Journal of Operational Research**, v. 238, n. 1, p. 1–17, oct 2014. ISSN 03772217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221714000071>>.

RAFIE-MAJD, Z.; PASANDIDEH, S. H. R.; NADERI, B. Modelling and solving the integrated inventory-location-routing problem in a multi-period and multi-perishable product supply chain with uncertainty: Lagrangian relaxation algorithm. **Computers and Chemical Engineering**, Elsevier Ltd, v. 109, p. 9–22, jan 2018. ISSN 00981354.

RAIDL, G. R. Decomposition based hybrid metaheuristics. **European Journal of Operational Research**, v. 244, n. 1, p. 66–76, jul 2015. ISSN 03772217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221714009874>>.

RENAUD, J.; BOCTOR, F.; LAPORTE, G. An improved petal heuristic for the vehicle routing problem. **Journal of the Operational Research ...**, 1996. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2584352>>.

SALHI, S.; RAND, G. K. The effect of ignoring routes when locating depots. **European Journal of Operational Research**, v. 39, n. 2, p. 150–156, mar 1989. ISSN 03772217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377221789901884>>.

SEIXAS, M. P.; MENDES, A. B. Column Generation for a Multitrip Vehicle Routing Problem with Time Windows, Driver Work Hours, and Heterogeneous Fleet. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi, v. 2013, p. 1–13, mar 2013. ISSN 1024-123X. Disponível em: <<http://www.hindawi.com/journals/mpe/2013/824961/>>.

TALBI, E.-G. **Metaheuristics: From Design to Implementation**. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2009. 618. p. ISBN 9780470278581.

TING, C.-J.; CHEN, C.-H. A multiple ant colony optimization algorithm for the capacitated location routing problem. **International Journal of Production Economics**, v. 141, n. 1, p. 34–44, 2013. ISSN 09255273. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925527312002393>>.

TUNALIOLU, R.; KOÇ, Ç.; BEKTA, T. A multiperiod location-routing problem arising in the collection of Olive Oil Mill Wastewater. **Journal of the Operational Research Society**, Palgrave Macmillan Ltd., v. 67, n. 7, p. 1012–1024, jul 2016. ISSN 14769360. Disponível em: <www.palgrave-journals.com/jors/>.

TUZUN, D.; BURKE, L. I. A two-phase tabu search approach to the location routing problem. **European Journal of Operational Research**, v. 116, n. 1, p. 87–99, jul 1999. ISSN 03772217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221798001076>>.

VAHDANI, B. et al. Multi-objective, multi-period location-routing model to distribute relief after earthquake by considering emergency roadway repair. **Neural Computing and Applications**, Springer London, v. 30, n. 3, p. 835–854, aug 2018. ISSN 09410643. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00521-016-2696-7>>.

Van Roy, T. J.; ERLINKOTTER, D. A Dual-Based Procedure for Dynamic Facility Location. **Management Science**, INFORMS, v. 28, n. 10, p. 1091–1105, oct 1982. ISSN 0025-1909. Disponível em: <<http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/mnsc.28.10.1091?journalCode=mnsc>>.

VEMUGANTI, R. R. Applications of Set Covering, Set Packing and Set Partitioning Models: A Survey. In: DU, D.-Z.; PARDALOS, P. M. (Ed.). **Handbook of Combinatorial Optimization**. Boston, MA: Springer US, 1998. v. 1, p. 573–746. ISBN 978-1-4613-0303-9. Disponível em: <https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4613-0303-9_9>.

VIDAL, T. Technical note: Split algorithm in $O(n)$ for the capacitated vehicle routing problem. **Computers and Operations Research**, Elsevier Ltd, v. 69, p. 40–47, may 2016. ISSN 03050548.

VILLEGAS, J. G. et al. A matheuristic for the truck and trailer routing problem. **European Journal of Operational Research**, North-Holland, v. 230, n. 2, p. 231–244, oct 2013. ISSN 03772217.

WATSON-GANDY, C.; DOHRN, P. Depot location with van salesmen A practical approach. **Omega**, v. 1, n. 3, p. 321–329, jun 1973. ISSN 03050483. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0305048373901084>>.

WEBB, M. H. J. Cost Functions in the Location of Depots for Multiple-Delivery Journeys. **J Oper Res Soc**, Operational Research Society, v. 19, n. 3, p. 311–320, sep 1968. ISSN 0160-5682. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1057/jors.1968.74>>.

WEBER, A.; FRIEDRICH, C. J. **Alfred Weber's theory of the location of industries**. Chicago, Ill.: University of Chicago Press, 1929. (Materials for the study of business). Disponível em: <<https://archive.org/details/alfredweberstheo00webe>>.

WESOLOWSKY, G. O.; TRUSCOTT, W. G. The Multiperiod Location-Allocation Problem with Relocation of Facilities. **Management Science**, INFORMS, v. 22, n. 1, p. 57–65, sep 1975. ISSN 0025-1909. Disponível em: <<http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/mnsc.22.1.57?journalCode=mnsc>>.

YU, V. F.; LIN, S. W. Multi-start simulated annealing heuristic for the location routing problem with simultaneous pickup and delivery. **Applied Soft Computing Journal**, Elsevier Ltd, v. 24, p. 284–290, nov 2014. ISSN 15684946.

YU, V. F. et al. A simulated annealing heuristic for the capacitated location routing problem. **Computers & Industrial Engineering**, v. 58, n. 2, p. 288–299, mar 2010. ISSN 03608352. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360835209002721>>.

YU, V. F.; LIN, S. Y. Solving the location-routing problem with simultaneous pickup and delivery by simulated annealing. **International Journal of Production Research**, Taylor and Francis Ltd., v. 54, n. 2, p. 526–549, jan 2016. ISSN 1366588X. Disponível em: <<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00207543.2015.1085655>>.