Eduardo Nozawa Caetano de Araujo

Desenvolvimento de um Método para Medição de Cargas em Moinhos Tubulares

Eduardo Nozawa Caetano de Araujo

Desenvolvimento de um Método para Medição de Cargas em Moinhos Tubulares

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia

Eduardo Nozawa Caetano de Araujo

Desenvolvimento de um Método para Medição de Cargas em Moinhos Tubulares

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Engenharia Mineral

Orientador:

Prof. Dr. Homero Delboni Jr.

FICHA CATALOGRÁFICA

Araujo, Eduardo Nozawa Caetano de Desenvolvimento de um Método para Medição de Cargas em Moinhos Tubulares E.N.C. Araujo. --São Paulo, 2011. 62 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Minas e de Petróleo.

1.Carga (Medição) 2.Cominuição 3.Moinhos I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Minas e de Petróleo II.t.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Homero Delboni Jr., pela orientação.

À equipe da Metso, José Silvio Corsini, Júlio Almeida, Juliana Colacioppo, Ben Connolly e especialmente ao David La Rosa e Walter Valery pela oportunidade, sugestões e incentivo ao tema.

E a todos que colaboraram, direta ou indiretamente, na execução deste trabalho.

RESUMO

Moinhos tubulares frequentemente são tomados como objetos de estudos de

otimização, pois são equipamentos que consomem grande quantidade de energia. Dentre os

recursos disponíveis para realizar tais estudos, a modelagem matemática se mostra bastante

eficiente por apresentar baixo custo, rapidez e confiabilidade.

O volume da carga total e de corpos moedores, são variáveis importates para

realizar os exercícios de modelagem que objetivam a previsão do consumo de potência e

distribuição de tamanhos de produtos. Contudo os métodos tradicionais para a medição de

cargas requerem o ingresso de pessoas no interior dos equipamentos, o que traz consigo

uma série de condições adversas, relacionadas a espaços confinados.

Neste contexto, este trabalho apresenta o desenvolvimento de um método e de

um dispositivo capaz de medir cargas de moinhos tubulares de forma rápida, precisa, com

baixo custo e sobretudo segura.

O resultado do trabalho aqui apresentado é, portanto, um método com precisão

igual ou superior aos existentes, porém o principal aspecto é eliminar a necessidade de

entrada de pessoas em um ambiente altamente perigoso, como a câmara de moagem de

moinhos tubulares de carga cadente.

PALAVRAS-CHAVE: moinhos, segurança, moagem, carga.

ABSTRACT

Tumbling mills are often taken as object of optimization studies because they are

equipment that consume large amounts of energy. Among the current available resources to

conduct such studies, mathematic modelling presents great efficiency due to its low cost,

fastness and reliability.

The total charge and grinding media charge are very important variables to

conduct modelling exercises that aims power draw and product size distribution forecasting.

However, the traditional measurement methods require people entering into equipment,

which carries a number of adversities related to confined spaces.

In this regard, this thesis presents the development of a method and the

prototype of a device able to measure tumbling mill charges, quickly, precisely, with low cost

and, above all, ensuring safety.

The result of this work is a method that allows equivalent or superior precision in

comparison to the existing methods, which main aspect is to eliminate the requirement of

people entering into dangerous environments such as tumbling mills.

KEY WORDS: mills, safety, grinding, charge.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Geometria da carga	4
Figura 2 – Medição no vale dos revestimentos	5
Figura 3 – Diagonais mensuráveis na superfície da carga	6
Figura 4 – Centro de gravidade da carga	9
Figura 5 – Formato da carga em movimento	11
Figura 6 – Variações dos ângulos de ombro e pé em função da velocidade de rotação e enchime	nto12
Figura 7 – Aderência entre as potência previstas pelo modelo e as observadas	13
Figura 8 – Terrestrial Laser <i>Scanner</i> da Leica GeoSystems (HDS-3000)	16
Figura 9 – Sistema de coordenadas esféricas com origem em O	17
Figura 10 – Ajuste de uma reta através do MMQ e pela minimização das distâncias ortogonais	21
Figura 11 – Fórmula dos Trapézios	24
Figura 12 – Fórmula de Simpson	24
Figura 13 – Minério e bolas presos no revestimento	26
Figura 14 – Relação entre S e o grau de enchimento na seção cilíndrica	27
Figura 15 – Trenas a laser (Leica, Bosch e Stanley)	29
Figura 16 – Telescópios com mecanismos Alt-Azimutal do século XIX	30
Figura 17 – Protótipo MCP	31
Figura 18 – Projeção da nuvem de pontos no plano XY	32
Figura 19 – Correção vetorial do MCP	33
Figura 20 – Vetores e ângulos do mecanismo do MCP	33
Figura 21 – Nuvem de pontos rotacionada para gerar projeção no plano XY	35
Figura 22 – Rotação em torno do eixo X	35
Figura 23 – Superfície da Carga	40
Figura 24 – Diagrama do modelo matemático	41
Figura 25 – Foto da coluna de flotação e a mesma foto rotacionada 229º no sentido anti-horário	42
Figura 26 – Resumo dos resultados após o processamento dos dados da coluna de flotação	44
Figura 27 – Foto do interior do moinho de bolas usina de beneficiamento de bauxita	45
Figura 28 – Foto do MCP na entrada do moinho de bolas usina de beneficiamento de bauxita	46
Figura 29 – Resumo dos resultados após o processamento dos dados do moinho de bolas	47
Figura 30 – Medições do autor com o MCP sendo realizadas no moinho SAG	50
Figura 31 – Interior do moinho SAG (foto do autor)	50
Figura 32 – Resumo dos resultados após o processamento dos dados do moinho SAG	52
Figura 33 – Desenho de engenharia do moinho SAG	52

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Características dos moinhos utilizados na validação do modelo de Morrell, 1994	13
Tabela 2 – Medições e cálculo da carga total de um moinho de grande diâmetro no Chile	28
Tabela 3 – Medições e cálculos da carga de bolas de um moinho de grande diâmetro no Chile	28
Tabela 4 – Medições realizadas na coluna de flotação	42
Tabela 5 – Tempo de intervenção na coluna de flotação	45
Tabela 6 – Medições realizadas no moinho de bolas para processamento de bauxita	46
Tabela 7 – Medições realizadas no moinho de bolas pelo método convencional	48
Tabela 8 – Tempo de intervenção na moinho de bolas	49
Tabela 9 – Medições realizadas no moinho SAG	51
Tabela 10 – Medições realizadas no moinho SAG pelo método convencional	53
Tabela 11 – Tempo de intervenção no moinho SAG	54
Tabela 12 – Quadro resumo dos valores calculados	55

LISTA DE ABREVIAÇÕES E SIGLAS

AG – Moinho autógeno

SAG – Moinho semi-autógeno

JKMRC – Julius Kruttschnitt Mineral Research Centre

3D - Tridimensional

2D - Bidimensional

LiDAR – Light Detection and Ranging

TLS - Terrestrial Laser Scanning

AAz – Mecanismo Alt-Azimutal

MMQ – Método dos Mínimos Quadrados

MDO – Método das Distâncias Ortogonais

MCP – Mill Charge Profiler

IC – Intervalo de Confiança

SUMÁRIO

1	Int	troduç	ão	1
2	Ok	ojetivo	s	3
3	Re	visão	Bibliográfica	4
	3.1	Mé	todos Convencionais de Medição de Carga de Moinhos	4
	3.2	Grii	nd-Out e Crash-Stopping	7
	3.3	Esti	mativas da Potência de Moinhos Tubulares	8
	3.3	3.1	Rowland	8
	3.3	3.2	Morrell	10
	3.4	Мо	inho, um Espaço Confinado	. 13
	3.5	Me	didores a Laser	. 15
	3.5	5.1	Terrestrial Laser Scanning - TLS	16
	3.6	Sist	ema de Coordenadas Esféricas	. 17
	3.7	Apr	oximação de Funções	. 19
	3.7	7.1	Polinômios	21
	3.7	7.2	Circunferência	22
	3.8	Inte	egração Numérica	. 2 3
	3.8	3.1	Fórmula dos Trapézios	2 3
	3.8	3.2	Fórmula de Simpson	24
4	De	esenvo	lvimentos e Métodos	. 26
	4.1	Мо	tivação	. 26
	4.2 Mecanismo de Medição		. 29	
	4.3	Tra	tamento Matemático	. 31
	4.3	3.1	Correção Vetorial	32
	4.3	3.2	Sistema cartesiano	34
	4.3	3.3	Ajuste da Circunferência	36
	4.3	3.4	Ajuste do Polinômio	37
	4.3	3.5	Cálculo da Carga	38
	4.3	3.6	Estimativa do Erro de Ajuste	39
	4.4	Esti	rutura Geral do Tratamento Matemático	. 41

5	Res	sultados	42
	5.1	Coluna de Flotação	. 42
	5.2	Moinho de Bolas Industrial	45
	5.3	Moinho SAG Industrial	. 49
6	Dis	cussão dos Resultados	55
	6.1	Coluna de Flotação	55
	6.2	Moinho de Bolas Industrial	56
	6.3	Moinho SAG Industrial	57
	6.4	Tempo de Intervenção	59
7	Cor	nclusões	. 60
	7.1	Tratamento Matemático	. 60
	7.2	Célula de Flotação - Caso Ideal	. 61
	7.3	Moinho de Bolas Industrial	. 61
	7.4	Moinho SAG Industrial	61
	7.5	Considerações Finais	62

1 Introdução

A civilização moderna depende inevitavelmente da explotação de recursos minerais e, por sua vez, de tecnologias de cominuição que permitam seu aproveitamento de forma econômica.

Dentre os equipamentos de cominuição atualmente disponíveis, os moinhos tubulares afirmam elevadíssima presença na indústria mineral, porém apresentam um elevado consumo energético, o que tem chamado atenção para estudos aprofundados de otimização, freqüentemente através de técnicas de modelagem matemática e simulação.

Os softwares comerciais de modelagem e simulação recebem variáveis de dois tipos. Um deles está associado ao equipamento e inclui variáveis de geometria e condições de processo e o outro tipo está relacionado à características do minério, como tenacidade e características do produto fragmentado.

Adequadamente calibrados, os modelos matemáticos permitem que sejam simuladas novas condições do circuito com eficiência e rapidez.

Nos modelos matemáticos de moinhos tubulares, as variáveis "volume da carga" e "volume de bolas" pertencem ao grupo de variáveis relacionado ao equipamento. Estas variáveis são fundamentais no cálculo do consumo energético e potência, que estão entre os produtos mais importantes nos exercícios de simulação.

Em moinhos de bolas, a variação da potência é relativamente pequena, já que a constituição da carga (proporção de bolas e polpa) é praticamente constante ao longo do tempo. Já em moinhos AG/SAG, o minério alimentado contribui significativamente como meio moedor, de modo que variações de tenacidade e de distribuição granulométrica do minério afetam o volume total da carga devido à cinética de quebra e, conseqüentemente, a potência consumida.

A técnica comumente utilizada para medir a carga de moinhos tubulares se dá através do ingresso de pelo menos duas pessoas que medem diversas dimensões em

relação à superfície da carga. A partir dessas medições é possível estimar o volume da carga através de cálculos geométricos simples.

Por vezes é necessário realizar a parada súbita do moinho ou crash-stopping para medir a carga total naquele momento de operação. Interromper o funcionamento do equipamento, aplicar os controles de segurança e realizar as medidas não é um procedimento rápido e que, mesmo assim, apresenta riscos em vista do ambiente confinado, quente, úmido, com superfície irregular, sujeito a desprendimento de material, rompimento explosivo de bolas e revestimentos, entre outras adversidades.

Outro fator a considerar é que a precisão do método tende a piorar conforme o nível da carga se aproxima do centro do moinho, pois o grau de enchimento do moinho cresce rapidamente em função da principal variável de medida, a largura da superfície da carga na seção cilíndrica.

Do ponto de vista prático não há outras dimensões da carga que possam ser medidas com instrumentos convencionais de forma precisa, rápida e segura. Além disso, é incomum obter uma superfície ideal para a medição, uma superfície relativamente plana e bem distribuída.

Como alternativa para o método de medição convencional, há scanners baseados em tecnologia laser aplicados inicialmente para modelagem de superfícies terrestres, como a topografia de cavas ou galerias subterrâneas. Contudo esta alternativa ainda apresenta um custo elevado, sendo utilizada essencialmente para acompanhamento do desgaste de revestimentos.

2 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho foi desenvolver um método e um dispositivo capaz de medir cargas de moinhos tubulares de forma rápida, precisa, segura e com baixo custo.

Como parte do trabalho, foi considerado o desenvolvimento e a aplicação de mecanismos e técnicas para a medição de geometrias em ambientes confinados, e também um tratamento matemático para interpretação dos dados obtidos.

Uma vez desenvolvido o dispositivo, o sistema foi colocado à prova e os resultados foram comparados com os métodos convencionais em termos de tempo de intervenção, precisão e segurança.

3 Revisão Bibliográfica

3.1 Métodos Convencionais de Medição de Carga de Moinhos

O grau de enchimento ou volume da carga de um moinho pode ser descrito através da fração volumétrica que os corpos moedores (incluindo os vazios entre os mesmos) ocupam em relação ao volume total do interior do equipamento. Através desta definição, outras medições de grau de enchimento podem ser definidas, como o grau de enchimento total, ou carga total, aplicável à moinhos SAG/AG, cuja medição se faz com a presença do minério.

O volume da carga de um moinho é a variável que contribui mais significativamente na potência consumida. Sob operação contínua, a variação da potência é relativamente pequena em moinhos de bolas, já que a constituição da carga (proporção de bolas e polpa) é praticamente constante ao longo do tempo. Já em moinhos AG/SAG, o minério alimentado contribui significativamente como meio moedor, de modo que variações de tenacidade e de distribuição granulométrica do minério alimentado afetam o volume da carga total. Tal variação altera a potência consumida. O conhecimento do grau de enchimento do moinho é, portanto, um parâmetro fundamental a ser determinado em campanhas de amostragem, assim como durante a operação.

A técnica comumente utilizada para medir a carga de moinhos tubulares se dá através do ingresso de pelo menos duas pessoas que medem a largura S da carga, conforme exemplificado na Figura 1. A medição deve ser realizada na região do vale dos revestimentos, conforme ilustrado na Figura 2.

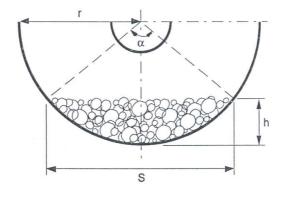


Figura 1 – Geometria da carga



Figura 2 - Medição no vale dos revestimentos

As equações (3.1) a (3.6) são utilizadas para calcular o grau de enchimento da seção cilíndrica.

$$S = 2.r.\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{3.1}$$

$$h = r\left(1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \tag{3.2}$$

$$r = \frac{h}{2} + \frac{S^2}{8h} \tag{3.3}$$

$$A_{\rm c} = \frac{\rm h}{6\rm S}(3\rm h^2 + 4\rm S^2) \tag{3.4}$$

$$V = 100 \frac{A_c}{A} \tag{3.5}$$

$$A = \pi r^2 \tag{3.6}$$

Onde:

S = largura da superfície exposta da carga (m)

r = raio do moinho (m), interno ao revestimento

h = Profundidade máxima da carga (m)

 α = ângulo do setor circular formado pela superfície exposta da carga (°)

 A_c = área da seção cilíndrica do moinho ocupada pela carga (m²)

A = área da seção cilíndrica do moinho (m²)

V = grau de enchimento da seção cilíndrica (%)

Sob o ponto de vista prático, são normalmente efetuadas de três a quatro medidas S. Por outro lado há uma forma indireta de obter outras duas medidas através da diagonal da área retangular que constitui a superfície da carga, neste caso, dependendo da medida do comprimento do cilindro.

A Figura 3 ilustra as diagonais mensuráveis.

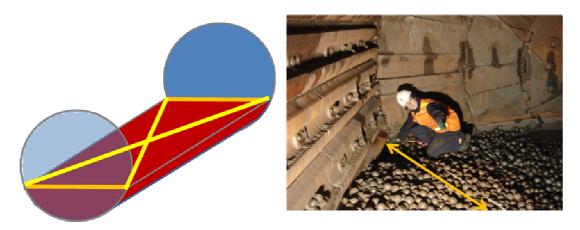


Figura 3 – Diagonais mensuráveis na superfície da carga

A Allis Chalmers (*apud* Napier Munn *et al., 1996*) propôs a seguinte fórmula, baseada na distância entre os revestimentos de topo e a superfície da carga

$$V = 113 - \left(\frac{H}{D} \times 126\right) \tag{3.7}$$

Onde:

H = distância vertical entre o topo e a superfície da carga (m)

D = diâmetro do moinho (m), interno ao revestimento

Morrell (1994) demonstrou que a Equação (3.7) apresenta erros relativamente altos para enchimentos inferiores a 20%, situação comum da carga de bolas em moinhos SAG. Além disso, muitas vezes há limitações práticas em fazer medições de altura em moinhos de grande diâmetro.

Outra forma quase não documentada, mas muito praticada nas operações para estimar o enchimento de moinhos, é a contagem dos revestimentos expostos para

deduzir o ângulo α da metodologia relativa às equações (3.1) a (3.6). O erro, neste caso, depende de interpretação na contagem e do número de revestimentos presentes no perímetro da seção cilíndrica.

3.2 Grind-Out e Crash-Stopping

Medir o volume da carga de bolas quando há mistura destas com minério gera uma grande incerteza, portanto, o procedimento de *grind-out* torna-se necessário. Este procedimento consiste do esvaziamento dos fragmentos de minério da câmara do moinho através da operação sem alimentação nova de minério. Desta forma, os fragmentos contidos na câmara serão moídos e transportados em forma de polpa para fora da câmara de moagem.

O tempo necessário para esvaziar um moinho depende de seu tamanho, do próprio volume de bolas e da tenacidade do minério presente. Normalmente, menos de 30 minutos são suficientes para remover satisfatoriamente a carga de minério da câmara de moagem. Todavia, este procedimento pode causar danos aos revestimentos uma vez que à medida que a carga de minério é reduzida, as bolas tendem a ser lançadas contra o revestimento do moinho. Portanto, tal procedimento deve ser feito com cautela, sob baixas velocidades, até que vapores de água comecem a sair pela descarga do moinho.

O procedimento de *crash-stopping* é a parada súbita do moinho com o objetivo de observar as condições da carga total naquele momento. A manobra é muito comum em moinhos SAG e geralmente é realizada pressionando-se o botão de parada de emergência seguido da interrupção imediata do fluxo de água da alimentação.

Para o *crash-stopping* é importante obter uma indicação indireta do volume da carga através da resposta do moinho poucos momentos antes de efetuar a parada. Tem sido observado que se o moinho continua rodando após a interrupção dos motores, da alimentação de minério, água e de reciclos de polpa, então a potência e o peso da carga devem diminuir assim como num procedimento típico de *grind-out*. Com isso a carga deve ter aparência seca em sua superfície após a parada, ou seja, a polpa estará a um nível abaixo da superfície da carga. Entretanto, se as condições de operação no moinho não permitirem o descarregamento da polpa, então haverá um acúmulo na

região do pé da carga e o *crash-stop* apresentará um nível da polpa mais elevado que o da superfície da carga.

Durante um *crash-stop* controlado, uma vez que as alimentações são interrompidas, a polpa tem chance de sair, tornando a carga mais viscosa e, portanto, consumindo mais potência. Esta condição tipicamente ocorre em circuitos AG/SAG fechados com taxas altas de reciclos, mas também pode ocorrer em circuitos abertos com taxas altas de produção.

3.3 Estimativas da Potência de Moinhos Tubulares

Diversos autores dedicaram-se à construção de modelos matemáticos que pudessem prever o comportamento de moinhos, sob aspectos de processo e energia, procurando compreender os fenômenos de fragmentação, transporte, e consumo energético. Dentre os modelos para previsão do consumo de potência, alguns tornaram-se mais conhecidos, dentre eles os modelos de Rowland e Morrell.

"A potência líquida (de moinhos) não pode ser determinada analiticamente devido ao presente desconhecimento das dinâmicas internas da carga em giro". Esta frase foi escrita por Taggart em 1945, e até recentemente pouca atenção foi concedida ao desenvolvimento de modelos de potência para moinhos industriais até que uma notável exceção ocorreu com o trabalho de Mishra e Rajamani (1990) que utilizaram modelagem por elementos discretos para estimar a posição e a velocidade de bolas individualmente para relacionar com a potência consumida. Esta técnica exige recursos computacionais e apesar de factível, resulta em pouca informação prática na compreensão dos fenômenos que ocorrem dentro dos moinhos e como eles afetam a potência.

3.3.1 Rowland

As primeiras aproximações para estimar a potência consumida em moinhos de bolas foram baseadas em equacionamento utilizando o centro de massa da carga em movimento e um torque aplicado a este ponto. Considerando uma seção simplificada (Figura 4), o ponto CG corresponde ao centro de massa da carga. A altura h refere-se à elevação da carga em relação à posição de descanso.

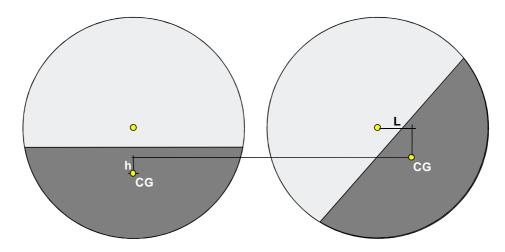


Figura 4 – Centro de gravidade da carga

Alternativamente, pode-se pensar no moinho como um sistema de frenagem em que o braço L representa a alavanca e o produto M.g.L corresponde ao torque para equilibrar a carga quando submetida à rotação, onde M corresponde à massa total da carga, g é a aceleração da gravidade e L é a distância horizontal entre o centro de gravidade CG e a linha de centro do moinho. Da relação entre torque e velocidade de rotação calcula-se a potência consumida.

Para descrever o formato da carga, dois pontos chaves são descritos como pé e ombro. São as regiões inferior e superior do setor de coroa medidos por um ângulo θ. Sabendo que os ângulos de pé e ombro variam conforme o volume da carga e a velocidade de rotação, o equacionamento deixa de ser simples (Rownland e Kjos 1978). A equação (3.8) é uma aproximação para a potência consumida em função do volume da carga de bolas e outras variáveis associadas ao equipamento e ao processo.

$$K_{Wb} = 4,879D^{0,3} \left(3.2 - 3V_p\right) f C_s \left(1 - \frac{0.1}{2^{(9-10fC_s)}}\right) + S_s$$
(3.8)

Onde:

 K_{Wb} = kW por tonelada de bolas

D = diâmetro do moinho (m), interno ao revestimento

 V_p = grau de enchimento da seção cilíndrica (fração)

 fC_s = Fração da velocidade crítica

 S_s = Fator do tamanho de bolas (kW por tonelada de bolas)

Moinhos com diâmetro superior a 3,3 m normalmente utilizam corpos moedores com maior diâmetro que influenciam o consumo de potência. A correção é sugerida através do fator de tamanho de bolas S_s , proposto na Equação (3.9)

$$S_s = 1,102 \left(\frac{b - 12,5D}{50.8} \right) \tag{3.9}$$

Onde:

b = Tamanho da bola (mm)

D = diâmetro do moinho (m), interno ao revestimento

 S_s = Fator do tamanho de bolas (kW por tonelada de bolas)

Estas equações são válidas somente para moinhos de bolas. Para moinhos de barras, segundo Rowland, equação é descrita por (3.10)

$$K_{Wr} = 1,752D^{1/3}(6,3-5,4V_r)fC_s (3.10)$$

Onde:

 K_{Wh} = kW por tonelada de barras

D = diâmetro do moinho (m), interno ao revestimento

 V_r = grau de enchimento da seção cilíndrica (fração)

 fC_s = Fração da velocidade crítica

Estas equações se aplicam a moinhos com diafragma. Moinhos com descarga por transbordo contêm excesso de polpa, o que contra-balança a carga por acréscimo de massa na região do pé e move o centro de massa em direção ao eixo do moinho. Moinhos com descarga por transbordo consomem em torno de 15% menos potência em relação a moinhos com mesmas dimensões e descarga por diafragma.

3.3.2 Morrell

Outra aproximação para o cálculo de potência é a de Morrell (1996) cujo modelo é compreendido como somatório de diversas contribuições que totalizam o consumo total de potência. Tais contribuições estão associadas ao volume da carga e seu formato em situação dinâmica, tipo de descarga (diagragma ou transbordo), tempo de

residência, velocidade de rotação, características da polpa, atritos e ineficiências, entre outros.

Para descrever o movimento da carga, a Figura 5a ilustra um moinho de laboratório com tampa transparente. Segundo Morrell, a resistência à rotação é causada somente pela região que exerce força sobre a carcaça. As partículas desprendidas não causam efeito direto algum no consumo de potência. A porção central, praticamente estacionária, também tem pouco efeito na potência (<5%). Portanto, se as partículas desprendidas e a porção central são ignoradas, resta um setor de coroa responsável pelo torque efetivamente resistivo.

A Figura 5b esquematiza a carga típica em movimento de moinhos com diafragma, sem excesso de polpa.

Em moinhos com descarga por transbordo a polpa pode sair apenas quando atinge o nível da descarga, logo, sempre há excesso de polpa, conforme esquematizado na Figura 5c. No modelo de Morrell, a região de polpa é considerada uma mistura homogênea com as mesmas propriedades de porcentagem de sólidos e densidade da polpa descarregada do moinho. A região do setor de coroa é composta de corpos moedores.

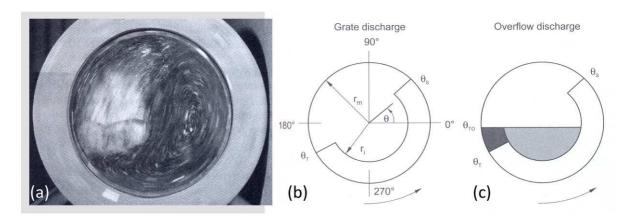


Figura 5 - Formato da carga em movimento

O aumento da velocidade aumenta o ângulo de ombro θ_s , contudo o ângulo de pé θ_r não sofre variações significativas.

A elevação do grau de enchimento aumenta o ângulo de ombro e também o ângulo de pé, ou seja, o pé da carga fica numa altura inferior. Com isso a tendência do

material centrifugar aumenta, mesmo em baixas velocidades. Estas observações estão em concordância com as pesquisa de Liddell e Moys (1988) e discordam do ponto de vista simplista de uma única e determinada velocidade centrífuga regida somente pelo balanço de forças gravitacionais e centrífugas. Contudo, parece sensato que a carga se comporta como um corpo coletivo, cujas interações entre partículas não podem ser ignoradas. Portanto, devido à pressão exercida sobre a carga, o material se achata sobre a superfície do revestimento. Com níveis maiores de enchimento este efeito é mais pronunciado propiciando ângulos de ombro ainda maiores. Este fenômeno está associado à velocidade de rotação e à magnitude das forças de atrito internas à carga. Estas forças, contudo, são diretamente proporcionais ao peso da carga. Independente do diâmetro do moinho, a posição relativa da carga se mantém, assim como a relação com a porcentagem da velocidade crítica. A Figura 6a mostra o efeito da variação da velocidade e enchimento no ângulo de ombro (shoulder) e a Figura 6b no ângulo de pé (toe).

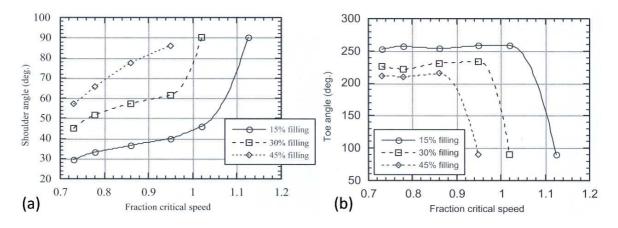


Figura 6 - Variações dos ângulos de ombro e pé em função da velocidade de rotação e enchimento

A partir dessas premissas, Morrell desenvolveu um modelo para estimar a potência consumida em moinhos tubulares com equações matemáticas que relacionam (1) a variação dos ângulos da carga em função do **grau de enchimento** e da velocidade, (2) o perfil de velocidade das partículas em diferentes posições da carga, (3) o balanço energético para a seção cilíndrica e cônica, (4) a potência em vazio e (5) potências de perda.

Em suas pesquisas, Morrell submeteu seu modelo a comparação com dezenas de moinhos industriais. A Tabela 1 relaciona os tipos de moinhos e as faixas de tamanhos compreendidos no estudo do modelo.

10 - 31

2,7 - 4,6

5

12,5 - 5500

Variável	Moinhos de Bolas	Moinhos SAG	Moinhos AG
Diâmetro (m)	0,85 – 5,34	1,80 – 9,59	1,80 - 9,50
Comprimento do cilindro (m)	1,52 - 8,84	0,59 – 7,95	0,59 - 5,18
L/D	1,00 - 1,83	0,33 – 1,50	0.33 - 1.0
% da velocidade crítica	60 – 83	48 – 89	72 – 75
Grau de enchimento Bolas (%)	20 – 48	3 – 25	0

7 - 38

2,6 - 4,1

20

14,8 - 7900

20 - 48

2,6 - 4,6

38

6,8 - 4100

Tabela 1 – Características dos moinhos utilizados na validação do modelo de Morrell, 1994

O gráfico apresentado na Figura 7 mostra a aderência entre as potências previstas pelo modelo e as medidas para os diversos moinhos.

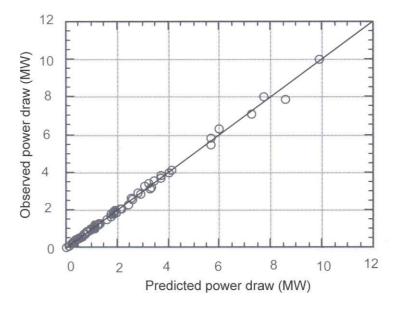


Figura 7 – Aderência entre as potências previstas pelo modelo e as observadas

O modelo de potência de Morrell foi incorporado no *software* de simulação JKSimMet. A alimentação do modelo com bons dados é fundamental para serem obtidos bons resultados, assim, dentre outras medições, o volume da carga de corpos moedores e total é o primeiro passo para um exercício confiável de modelagem e simulação.

3.4 Moinho, um Espaço Confinado

Grau de enchimento Carga (%)

Densidade do minério

Número de Moinhos

Potência Motor(kW)

A norma regulamentadora NR-33, publicação do Diário Oficial da União de 2006, define um espaço confinado como qualquer área ou ambiente não projetado para

ocupação humana contínua, que possua meios limitados de entrada e saída, cuja ventilação existente é insuficiente para remover contaminantes ou onde possa existir a deficiência ou enriquecimento de oxigênio.

Para todo espaço confinado são cabíveis deveres e responsabilidades por parte dos empregadores e trabalhadores através de medidas de segurança, de saúde, de prevenção, administrativas, pessoais e de emergência.

O interior de moinhos tubulares, portanto, é considerado um espaço confinado que freqüentemente apresenta condições elevadas de temperatura e umidade, com riscos de queda, escorregamento, explosão e queda de bolas, presença de vapores tóxicos, entre outros. Assim, o ingresso de pessoas é um procedimento a ser evitado sempre que possível.

De modo geral, o ingresso ao interior de um moinho tubular para medição da carga demanda a seguinte sequencia de passos:

- Parar o moinho,
- Bloquear os painéis elétricos do moinho com cadeados individuais,
- Remover o alimentador (spout feeder),
- Limpar o chute de alimentação, ou tampá-lo,
- Verificar a presença de gases nocivos (ex. HCN, gás cianídrico, frequentemente presente no tratamento de minérios de ouro),
- Quantificar o oxigênio presente,
- Ventilar para remover os gases e o vapor úmido,
- Atirar água para remover material prestes a cair (bolas e minério). Conforme as bolas esfriam, perdem dilatação e podem se desprender,
- Colocar manta/lona de proteção sobre a carga,
- Medir a carga.

3.5 Medidores a Laser

Uma tecnologia a laser foi adotada como parte do desenvolvimento do método de medição de carga, portanto, uma revisão sobre tais equipamentos se justifica.

Medidores a laser utilizam tecnologia LiDAR (*Light Detection and Ranging*) para determinar a distância de um objeto alvo com precisão da ordem de milímetros. O princípio de funcionamento é a medição do tempo entre a emissão e a reflexão de um pulso luminoso, na velocidade da luz. É uma tecnologia que nasceu sob fins militares, e posteriormente se disseminou para uso civil em esportes, fiscalização de tráfego de automóveis, controle de qualidade dimensional, e também para a modelagem de superfícies e objetos em três dimensões (3D).

A distância D entre dois pontos é dada por:

$$D = \frac{\text{ct}}{2} \tag{3.11}$$

Onde:

c = Velocidade da luz (m/s)

t = Tempo entre o disparo e a recepção (s)

Um aumento na precisão pode ser obtido detectando-se o ângulo de fase de um pulso modulado. Neste caso o termo t pode ser refinado e a equação torna-se

$$D = \frac{c}{4\pi f} (N\pi + \Delta \phi) \tag{3.12}$$

Onde:

c = Velocidade da luz (m/s)

f = Freqüência de oscilação do pulso (s⁻¹)

N = Número de oscilações completas detectadas

 $\Delta \phi$ = Ângulo da fase na detecção

A utilização de circuitos capazes de medir os pulsos com precisão inferior a nano-segundos é fundamental. A resposta do dispositivo resulta da média obtida do disparo de diversos pulsos.

3.5.1 Terrestrial Laser Scanning - TLS

Terrestrial Laser Scanning (TLS) é uma tecnologia que une a tecnologia LiDAR a uma estação total topográfica. O equipamento TLS captura a localização de milhares de pontos varrendo o feixe de laser ao longo da superfície ou objeto de forma automatizada, sem a necessidade de prismas refletivos. Os pontos são varridos em praticamente todas as direções, com alcance azimutal de 360°. Estes dados compõem uma nuvem de pontos que pode ser visualizada em softwares específicos capazes de triangularizar superfícies e unir os pontos com superfícies pré-existentes.

O TLS é uma forma de obter modelos tridimensionais através da medição de distâncias com variações de pequenos incrementos de ângulos em coordenadas esféricas. A Figura 8 mostra um equipamento TLS fabricado pela Leica GeoSystems.

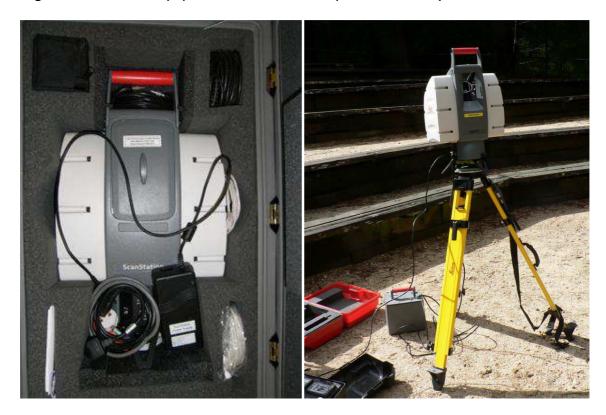


Figura 8 – Terrestrial Laser Scanner da Leica GeoSystems (HDS-3000)

A tecnologia é muito conveniente e seus resultados são comprovados, tanto pela precisão, como pela velocidade de aquisição de dados. Em contrapartida, o custo atualmente é elevado.

3.6 Sistema de Coordenadas Esféricas

Para a base matemática do método desenvolvido foram utilizados conhecimentos matemáticos envolvendo sistemas de coordenadas esféricas, assim como outros temas da Matemática que seguem nos próximos sub-capítulos.

No trabalho de Moon (1988), o sistema de coordenadas esféricas é descrito como um sistema de coordenadas 3D onde a posição de um determinado ponto é definida através de três parâmetros: (1) distância radial em relação à origem, (2) ângulo de elevação medido a partir de um plano de referência e (3) ângulo azimutal medido a partir de uma projeção ortogonal sobre o plano de referência. O ângulo de elevação freqüentemente é substituído pelo ângulo de inclinação que é medido a partir da direção zenital, perpendicular ao plano de referência.

A distância radial também é chamada de raio ou coordenada radial. A inclinação pode ser chamada de colatitude, ângulo zenital, ângulo normal, ou ângulo polar. A Figura 9a exemplifica um sistema de coordenadas esféricas em que o ângulo φ representa o ângulo azimutal e θ descreve o ângulo de elevação. Na Figura 9b, o ângulo φ representa o ângulo azimutal e θ descreve o ângulo zenital.

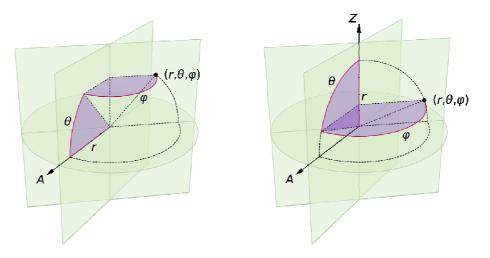


Figura 9 – Sistema de coordenadas esféricas com origem em O.

Existem diversas convenções para representar as três coordenadas do sistema esférico. Uma delas é a ordem em que devem ser escritos os caracteres que representam o raio e os ângulos. A ordem mais comum na Física é (r,θ,φ) que deve denotar respectivamente a distância radial, o ângulo de inclinação (ou elevação) e o azimute.

Contudo, alguns autores (incluindo os matemáticos) utilizam ϕ para inclinação (ou elevação) e θ para azimute. Alguns autores também podem escolher representar o azimute antes da inclinação, ou usar ρ ao invés de r.

A convenção padrão entra em conflito com a notação usual do sistema de coordenadas polares em 2D, onde θ normalmente é utilizado para descrever o azimute. Também faz parte da convenção padrão utilizar ângulos positivos para azimutes no sentido anti-horário observando-se a partir do lado zenital do plano.

As coordenadas esféricas (r, θ, φ) podem ser obtidas de um sistema cartesiano (x, y, z) através das seguintes equações:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{3.13}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \tag{3.14}$$

$$\varphi = atan2(y, x) \tag{3.15}$$

Onde arctan2(y,x) é uma variante da função arctan que retorna o ângulo entre o eixo x e o vetor (x,y) no intervalo $(-\pi,\pi]$. Não se pode utilizar a função comum $\varphi = atan(y,x)$ porque esta retorna o mesmo valor para (x,y) ou (-x,-y).

A conversão oposta pode ser obtida através das seguintes equações:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\tag{3.16}$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi\tag{3.17}$$

$$z = r\cos\theta\tag{3.18}$$

Cabe lembrar que estas conversões assumem que o plano x-y é o plano de referência, θ representa o ângulo de inclinação em relação ao eixo zenital, o eixo x coincide com o eixo azimutal, e y está situado a $\varphi=+90^o$ de x.

3.7 Aproximação de Funções

A descrição matemática de fenômenos físicos ou químicos normalmente se dá por uma função aproximadora que surge de uma família de funções previamente conhecida. Em geral, os valores observados em um experimento já são afetados de erros. Logo, uma função aproximadora não se propõe a retornar exatamente os valores observados. O propósito é de aderir ao conjunto, representando seu comportamento da melhor maneira possível segundo critérios pré-estabelecidos. (Humes *et al*, 1984)

Aproximar uma função também parece bastante conveniente quando se conhece a forma analítica da função que descreve um fenômeno, todavia substituí-la por outra função facilitaria o tratamento matemático do modelo.

A função aproximadora deve ser escolhida considerando suas características. Polinômios, por exemplo, são facilmente integráveis. Adições, subtrações, multiplicações e translações de polinômios sempre resultam em polinômios.

Ao aproximar uma função por outra, um erro estará sendo introduzido. Este erro é chamado resíduo. Assim:

$$r(x) = f(x) - g(x) \tag{3.19}$$

Dada uma função f(x), a função aproximadora g(x) será totalmente aderente quando o somatório $\sum r(x) = 0$. Aparentemente este é um bom critério para buscar a função g(x), contudo este critério falha quando erros negativos cancelam erros positivos. Este problema poderia ser contornado através de erros absolutos, contudo o tratamento matemático de |r(x)| por si só apresenta suas próprias dificuldades. Outro tratamento matemático mais simples é exigir que $\sum r^2(x)$ seja mínimo. Este critério é denominado método dos mínimos quadrados (MMQ).

Dada uma função f(x), conhecida em um número limitado e discreto de pontos, a aproximação de f(x) por uma função da família $\sum_{0}^{m}a_{k}g_{k}\left(x\right)$ significa determinar os parâmetros $a_{0},a_{1},...,a_{m}$ que minimizem a soma dos quadrados dos resíduos para todos os pontos. A soma dos resíduos na sua forma expandida pode ser escrita como:

$$M = \sum_{i=1}^{n} r^{2}(x) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i}) - g(x_{i}))^{2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i}) - a_{0}g_{0}(x_{i}) - a_{1}g_{1}(x_{i}) - \dots - a_{m}g_{m}(x_{i})]^{2}$$
(3.20)

Para minimizar M, é preciso determinar o conjunto $(\overline{a}_{_0},\overline{a}_1,...,\overline{a}_m)$ que solucione

$$\frac{\partial M}{\partial a_{l}}(\overline{a}_{0}, \overline{a}_{1}, ..., \overline{a}_{m}) =
= 2 \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i}) - a_{0}g_{0}(x_{i}) - a_{1}g_{1}(x_{i}) - \dots - a_{m}g_{m}(x_{i})] - g_{l}(x_{i})
= 0 : 0 \le l \le m$$
(3.21)

Ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{0}g_{0}(x_{i})g_{l}(x_{i}) + \sum_{i=1}^{n} a_{1}g_{1}(x_{i})g_{l}(x_{i}) + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{m}g_{m}(x_{i})g_{l}(x_{i}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i})g_{l}(x_{i}); \quad 0 \le l \le m$$
(3.22)

Esta equação pode ser escrita com notação vetorial na forma de produto escalar através de um sistema linear:

$$\begin{bmatrix} (g_{0}|g_{0}) & (g_{0}|g_{1}) & \cdots & (g_{0}|g_{m}) \\ (g_{1}|g_{0}) & (g_{1}|g_{1}) & \cdots & (g_{1}|g_{m}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (g_{m}|g_{0}) & (g_{m}|g_{1}) & \cdots & (g_{m}|g_{m}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{0} \\ a_{1} \\ \vdots \\ a_{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (g_{0}|f) \\ (g_{1}|f) \\ \vdots \\ (g_{m}|f) \end{bmatrix}$$
(3.23)

O sistema (3.23) denomina-se sistema normal. Pela propriedade do produto escalar $(g_i|g_j)=(g_j|g_i)$, o sistema normal é simétrico. Se este sistema admitir uma única solução, a família que melhor aproxima de f(x) estará determinada pelo método dos mínimos quadrados (MMQ).

Para o caso de f(x) ser contínua em um dado intervalo, o produto escalar pode ser descrito como:

$$(f|g) = \int_{a}^{b} f(x)g(x)$$
 (3.24)

E continua valendo a notação descrita pelo sistema (3.23).

A aproximação de funções pelo MMQ como descrito acima considera as diferenças entre os valores das funções. Um critério conceitualmente mais apropriado para aproximar funções é o método das distâncias ortogonais (MDO) entre a função original e a função aproximadora. A Figura 10 exemplifica este critério para a aproximação por uma reta.

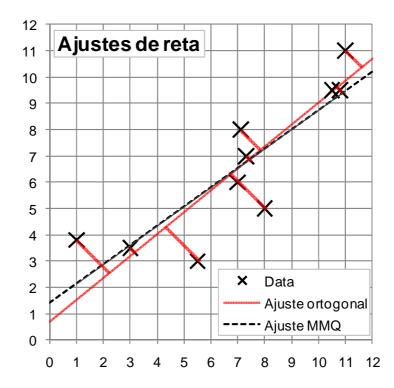


Figura 10 – Ajuste de uma reta através do MMQ e pela minimização das distâncias ortogonais.

Os coeficientes da reta da forma ax+by+c=0 foram obtidos com o objetivo de minimizar a soma das distâncias $d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ entre os diversos pontos e a reta aproximadora.

No caso da regressão por uma função constante, os dois critérios tendem a ser igualmente eficientes.

3.7.1 Polinômios

A aproximação de funções por polinômios pode ser realizada assumindo uma família de funções $\sum_{k=0}^{m} a_k g_k(x)$, tal que $g_k(x) = x^k$, e k caracteriza o grau do polinômio.

3.7.2 Circunferência

O ajuste de pontos por arcos e circunferências é um problema muito comum na física, engenharia, biologia, medicina, arqueologia, indústria entre outras áreas. Este assunto vem sendo estudado desde o início da década de 1950. Contudo os grandes avanços surgiram da necessidade de garantir grande precisão na física nuclear para calcular, através do raio de curvatura, a energia de partículas elementares ao serem desviadas por campos magnéticos constantes. Na década de 1990 muitos algoritmos surgiram para aplicação em visão computacional.

Segundo Chernov (2005), são duas as principais técnicas empregadas, cada uma com diversas variações e evoluções quanto a rapidez computacional e à precisão. São elas: (1) ajuste geométrico e (2) ajuste algébrico.

A técnica geométrica parte do princípio de minimizar as distâncias ortogonais, entre cada ponto disponível e a circunferência ajustada, considerando a seguinte equação de resíduo:

$$E = \sum_{i=1}^{l} \left(\sqrt{(\bar{x} - x_i)^2 + (\bar{y} - y_i)^2} - r \right)^2$$
 (3.25)

O erro obtido com esta equação é considerado ótimo do ponto de vista estatístico, contudo não existe um algoritmo direto para minimizar este somatório, pois se trata de um problema não linear sem solução fechada. Portanto a solução que minimiza esta equação requer a aplicação de algoritmos iterativos com algum custo computacional.

A aproximação algébrica, por sua vez, foi fundamentada inicialmente pelos matemáticos Delogne e Kåsa na década de 1970 e redescoberta e publicada por muitos autores posteriormente. O método algébrico talvez seja o algoritmo mais rápido, mas sua precisão é bastante prejudicada quando há pontos disponíveis apenas em pequenos arcos, condição pela qual o método tende a ajustar raios menores que os verdadeiros.

A equação de resíduo do método algébrico (3.26) é muito parecida com a equação do método geométrico, contudo ela é diferenciável em \mathbb{R}^2 . A interpretação gráfica é que ao invés de minimizar as distâncias entre os pontos e a borda da

circunferência, busca-se minimizar a área do anel entre duas circunferências concêntricas.

Uma delas contendo o ponto e a outra a sendo a circunferência ajustada. No apêndice 1 consta a demonstração do método algébrico por Bullock.

$$E = \sum_{i=1}^{l} ((\bar{x} - x_i)^2 + (\bar{y} - y_i)^2 - r^2)^2$$
(3.26)

Muitos aprimoramentos foram desenvolvidos sobre o método algébrico a fim de eliminar ou pelo menos diminuir o enviesamento do raio. Dentre eles, podemos citar os trabalhos dos autores Pratt (1987) e Taubin (1991) *apud* Chernov (2005). Há também trabalhos no conjunto dos números complexos, contudo a precisão e custo computacional até o momento não demonstram vantagens com relação às técnicas atualmente empregadas.

3.8 Integração Numérica

Em muitas aplicações da matemática é necessário efetuar o cálculo da integral de alguma função. Entretanto muitas vezes não se pode obter uma fórmula explícita simples para a integral indefinida desejada. Em outros casos a função pode ser conhecida apenas por seus valores em alguns pontos (Humes *et al*, 1984).

Uma fórmula que forneça um valor numérico aproximado da integral de uma função é chamada de quadratura numérica ou fórmula de integração numérica. Há diversos métodos para estimar tais fórmulas, dentre os quais os métodos de Newton-Cotes (Trapézio e Simpson) e de Gauss (polinômios interpoladores de grau n).

Quando os pontos conhecidos da função são igualmente espaçados pode-se aplicar a fórmula dos trapézios e a de Simpson. Quando os pontos são conhecidos em apenas alguns pontos pré-determinados, não necessariamente equidistantes, as fórmulas mais adequadas são as de Gauss.

3.8.1 Fórmula dos Trapézios

A integral de uma função f no intervalo [a,b] pode ser aproximada pela área de um trapézio, conforme a Figura 11.

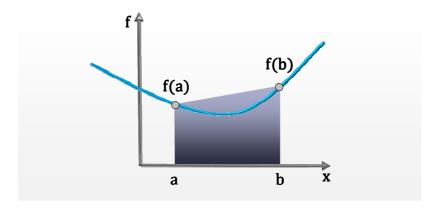


Figura 11 – Fórmula dos Trapézios

Assim,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2} \left(f(a) + f(b) \right) \tag{3.27}$$

Como pode ser observada, a fórmula dos trapézios baseia-se num polinômio interpolador de 1º grau. Para trechos de função com concavidade para cima, a fórmula dos trapézios superestima o valor da integral no intervalo. Uma forma de aumentar a precisão é aplicar a fórmula em intervalos menores.

3.8.2 Fórmula de Simpson

A fórmula de Simpson considera um polinômio interpolador de 2º grau que passa por pontos igualmente espaçados nas coordenadas (a, f(a)), (b, f(b)), (m, f(m)), tal que m é o ponto médio entre a e b. A integral da função f no intervalo [a,b] pode ser aproximada pela área abaixo da parábola, conforme a Figura 12.

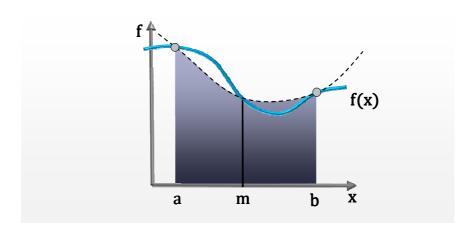


Figura 12 – Fórmula de Simpson

Assim,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6} (f(a) + 4f(m) + f(b))$$
 (3.28)

A fórmula de Simpson tende a ser mais precisa que a fórmula dos trapézios. Como regra geral, quanto maior o grau do polinômio interpolador em um dado intervalo, maior a precisão. Partindo desse princípio, as fórmulas de Gauss procuram a aproximação da integral da função f calculando a área abaixo de polinômios interpoladores de grau n.

4 Desenvolvimentos e Métodos

4.1 Motivação

A grande motivação para o desenvolvimento de um dispositivo capaz de medir a carga de moinhos surgiu de algumas experiências do autor em campanhas de amostragem, etapa fundamental em estudos de otimização de circuitos de moagem.

O ingresso em um moinho requer o cumprimento de um grande número de requisitos, o que por vezes consome um tempo oneroso ao empreendimento mineiro devido à parada de equipamentos. Estes requisitos não são dispensáveis, pois estão diretamente associados a cuidados com segurança e saúde ocupacional, temas que devem ser tratados com prioridade em uma indústria afamada pela alta periculosidade. Logo, uma forma de eliminar, ou pelo menos diminuir alguns riscos, seria evitar o ingresso de pessoas no interior dos equipamentos. As fotografias da Figura 13 ilustram um moinho SAG com minério preso ao revestimento, tornando o ingresso ao interior do equipamento proibitivo. Dependendo da condição encontrada, não é possível limpar o revestimento sem onerar a produção da usina.



Figura 13 – Minério e bolas presos no revestimento

Além de aspectos de segurança e econômicos, o método convencional é suscetível a erros, devido ao limitado número de medições possíveis, bem como a deformações na superfície da carga. Também deve ser considerado que a precisão do método tende a piorar conforme o nível da carga se aproxima do centro do moinho, pois o grau de enchimento cresce rapidamente em função do comprimento S. Assim, quando

a relação S/D tende a 1, pequenas variações em S representam grandes variações no grau de enchimento, conforme ilustrado na Figura 14.

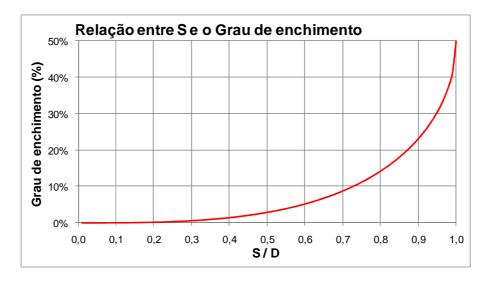


Figura 14 – Relação entre S e o grau de enchimento na seção cilíndrica

A título de exemplo, em um moinho de bolas com diâmetro interno de 5,5 m, dada a dificuldade de estabelecer pontos de medição ideais ou ainda pela irregularidade da superfície da carga, um erro de ± 5 cm na medição da largura S seria considerado comum. Numa condição em que o grau de enchimento da seção cilíndrica deste moinho seja verdadeiramente de 32%, o comprimento S esperado seria de 5,27 m. Considerando o erro de medição de ± 5 cm, o grau de enchimento poderia ser estimado entre 30,3 e 34,1 %. Embora a média de 3 a 5 medidas possa atenuar as diferenças, a precisão ainda pode ser questionável, afinal o erro pode ocorrer sistematicamente, quando por exemplo houver dúvida no tensionamento na fita métrica, ou dúvida visual na tomada da medição, no limite entre superfície da carga e revestimentos.

Outra fonte possível de erros está relacionada a desvios no diâmetro interno do moinho, pois os revestimentos estão sujeitos a desgaste. No método convencional a melhor estimativa para o diâmetro interno provém dos desenhos de projeto mecânico.

A Tabela 2 mostra as medições realizadas pelo autor em um moinho SAG de grande diâmetro (38') em uma operação no Chile.

Tabela 2 - Medições e cálculo da carga total de um moinho de grande diâmetro no Chile

Comprimento da superfície da carga (S)	(m)	Grau de enchimento da seção cilíndrica (%)
Medida S próxima à alimentação	10,68	27,0
Medida S na região central	10,79	28,4
Medida S próxima à descarga	10,59	25,8
Medida da Diagonal à direita	10,90	30,1
Medida da Diagonal à esquerda	10,44	24,1
S médio (m)	10,68	27,0
Grau de enchimento mínimo (IC 90%)*		24,9
Grau de enchimento máximo (IC 90%)*		29,3

^{*}IC - Intervalo de Confiança

Para os dados listados na Tabela 2, o grau de enchimento no *crash stopping* foi estimado em 27,0%, porém houve grande variabilidade para o estimador de S. O grau de enchimento da seção cilíndrica no intervalo de confiança de 90% foi calculado entre 24,9 e 29,3%, uma variação superior a 2% para mais ou para menos. O diâmetro interno foi adotado conforme desenho de projeto, assim como normalmente é praticado no método convencional.

No mesmo moinho foi realizado o exercício de *grind-out*, cujos resultados são apresentados na Tabela 3

Tabela 3 – Medições e cálculos da carga de bolas de um moinho de grande diâmetro no Chile

Comprimento da superfície da carga (S)	(m)	Grau de enchimento da seção cilíndrica (%)
Medida S próxima à alimentação	9,58	16,7
Medida S na região central	9,62	16,9
Medida S próxima à descarga	9,65	17,1
Medida da Diagonal à direita	9,56	16,5
Medida da Diagonal à esquerda	9,68	17,4
S médio (m)	9,62	16,9
Grau de enchimento mínimo (IC 90%)*		16,6
Grau de enchimento máximo (IC 90%)*		17,2

^{*}IC – Intervalo de Confiança

Neste *grind-out*, o grau de enchimento foi estimado em 16,9%, todavia a variabilidade de S foi consideravelmente menor. A carga de bolas mostrou uma variação de apenas 0,3% para mais ou para menos no intervalo de confiança de 90%.

Nem sempre a medição de cargas apresentam grande variabilidade como exemplificado na Tabela 2, ou apresentam pouca variabilidade como mostrado na Tabela 3, já que o método convencional não prevê uma maneira de lidar com as irregularidades da superfície.

Além disso, a medição periódica do grau de enchimento de um moinho em relação ao volume interno, por sua vez, permite estimar o consumo de bolas para uma dada quantidade e tipo de minério processado.

4.2 Mecanismo de Medição

Inicialmente foram consideradas diversas alternativas para realizar a medição de cargas, desde alternativas com o uso de vasos comunicantes, até mesmo equipamentos TLS. As limitações, a qualidade esperada dos resultados, os custos, e a segurança de cada solução foram também considerados. Dentre as alternativas, o TLS pareceu bastante atrativo por apresentar boa precisão e não necessidade da presença física no interior do moinho. Por outro lado, o critério custo mostrou-se uma grande limitação. Um dispositivo posicionado na entrada do moinho sem a necessidade de ingresso de pessoas foi um ponto crítico considerado. Assim, uma medição precisa e referenciada pela superfície dos revestimentos acabou direcionando o estudo para uma solução com tecnologia laser.

Foram encontrados outros dispositivos menos sofisticados que o TLS com tecnologia laser, trenas, a um custo bastante acessível. A Figura 15 mostra algumas trenas encontradas no mercado.







Figura 15 – Trenas a laser (Leica, Bosch e Stanley)

Embora as trenas a laser ofereçam precisão da ordem de 2 mm ou menos, de forma geral os modelos disponíveis não medem ângulos de inclinação. Os modelos que

realizam leitura do ângulo de inclinação apresentam um custo maior. Esta limitação poderia ser solucionada através de um mecanismo capaz de indicar os ângulos de inclinação/elevação e azimutal da direção apontada.

Um mecanismo AAz (Alt-Azimutal) em conjunto com a trena laser poderia viabilizar o instrumento de medição. Assim os esforços foram concentrados no desenvolvimento de um protótipo.

Um mecanismo AAz permite a rotação de um telescópio (ou outro instrumento) ao redor de dois eixos perpendiculares entre si. A título de curiosidade, a Figura 16 ilustra alguns mecanismos que datam do século XIX.



Figura 16 – Telescópios com mecanismos Alt-Azimutal do século XIX

Fonte: site wikipedia.org em 25/Jan/2010

O protótipo foi construído pelo autor e denominado MCP, acrônimo do inglês *Mill Charge Profiler*. O instrumento foi concebido para medir a localização de diversos pontos nos limites superficiais de um espaço confinado através de um sistema de coordenadas esféricas. As partes móveis foram usinadas em aço. Uma trena a laser Bosch modelo DLE 50 com alcance de 50 metros e precisão 1,5 mm foi adaptada para medir as distâncias. A geometria do mecanismo, por sua vez, foi ligeiramente modificada em relação a um típico AAz, para permitir que a trena pudesse apontar para pontos próximos do eixo zenital, tanto acima quanto abaixo do plano azimutal. Para a medição dos ângulos foram utilizados transferidores em material acrílico que permitem medições com precisão de 0,5 grau. A Figura 17 mostra ilustrações do modelo CAD desenhado pelo autor, fotos do protótipo durante a usinagem e já finalizado.



Figura 17 - Protótipo MCP

Por ter sido usinado em aço, o peso do protótipo chegou a 3,5 kg. Uma versão em alumínio pesaria cerca de 1,2 kg.

4.3 Tratamento Matemático

Uma vez realizada a leitura da nuvem de pontos, o tratamento matemático seguiu por uma série de etapas considerando correções vetoriais, ajuste de curvas aproximadoras e estimativa de erros de ajuste.

Apesar de tratar-se de um problema 3D, a interpretação foi elaborada em 2D através da projeção de todos os pontos capturados em um plano perpendicular à linha de centro (linha do eixo) do moinho. Neste plano, denominado plano XY, os pontos correspondentes ao revestimento são utilizados para aproximar uma circunferência, e os pontos correspondentes à carga são aproximados por um polinômio. A Figura 18 ilustra a projeção da nuvem de pontos no plano XY. As setas em laranja indicam a projeção dos pontos mensurados nos revestimentos e as setas em verde indicam a projeção dos pontos obtidos na superfície da carga.

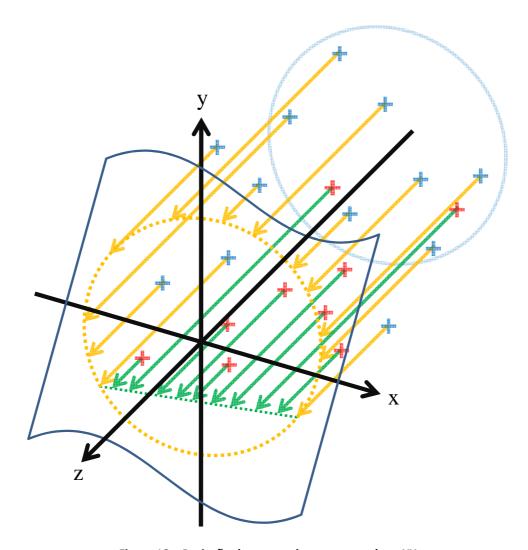


Figura 18 – Projeção da nuvem de pontos no plano XY

4.3.1 Correção Vetorial

O equipamento está apto a capturar a localização de diversos pontos em um espaço 3D, entretanto os dados precisam de uma correção matemática para que o conjunto tenha uma origem bem definida e única. Assim, a geometria do equipamento foi associada a vetores para elaborar um equacionamento corretivo, com o objetivo de resolver a norma do vetor resultante e o ângulo de elevação em relação ao plano da base, conforme ilustrado na Figura 19.

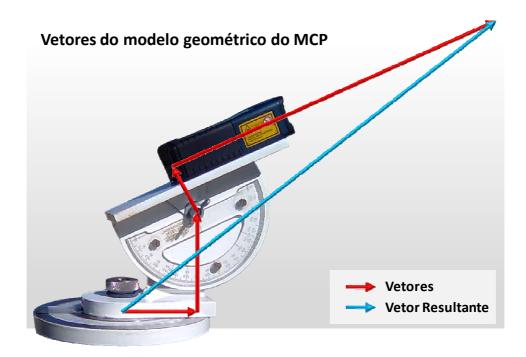


Figura 19 – Correção vetorial do MCP

Observando-se a Figura 20, a correção vetorial depende do ângulo α , medido pelo transferidor de 180 graus. Os vetores a, b e c possuem norma bem definida e fixa, a norma do vetor d é a própria medição realizada pela trena laser e o ângulo θ representa o ângulo de elevação.

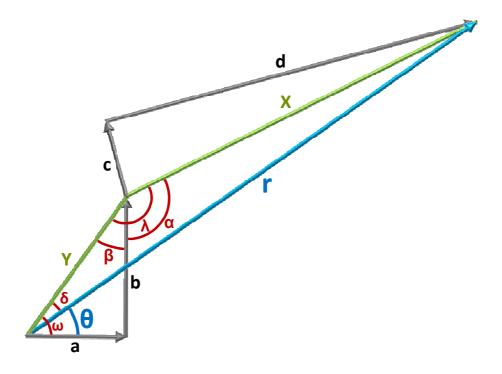


Figura 20 – Vetores e ângulos do mecanismo do MCP

Constantes:

$$a = 58,37 mm$$

 $b = 81,33 mm$
 $c = 46,12 mm$

(4.1)

$$y = 100,10 mm$$

 $\beta = 0,6225 rad$
 $\omega = 0,9483 rad$

Equações:

$$x^2 = c^2 + d^2 (4.2)$$

$$\lambda = \alpha + \beta \qquad \qquad se \ \alpha + \beta < \pi$$

$$\lambda = -(\alpha + \beta) + 2\pi \qquad se \ \alpha + \beta \ge \pi$$

$$(4.3)$$

$$r^2 = x + y^2 - 2xy\cos(\lambda) \tag{4.4}$$

$$\delta = a\cos\left(\frac{x^2 - y^2 - r^2}{-2yr}\right) \tag{4.5}$$

$$\theta = \omega + \delta
\theta = \omega - \delta
se \alpha + \beta < \pi
se \alpha + \beta \ge \pi$$
(4.6)

As correções acima referem-se portanto ao ângulo zenital, pois o ângulo azimutal $oldsymbol{arphi}$ não requer correção.

4.3.2 Sistema cartesiano

Após a correção vetorial, os pontos são convertidos do sistema de coordenadas esférico para o cartesiano através das Equações (3.16) a (3.18).

Em seguida são aplicadas transformações capazes de rotacionar toda a nuvem de pontos em torno dos eixos X e Y. Neste estágio tem início a rotina que ajusta a circunferência ao revestimento do moinho. A Figura 21 mostra uma nuvem de pontos gerada por computador representando uma superfície similar à encontrada no interior de um moinho.

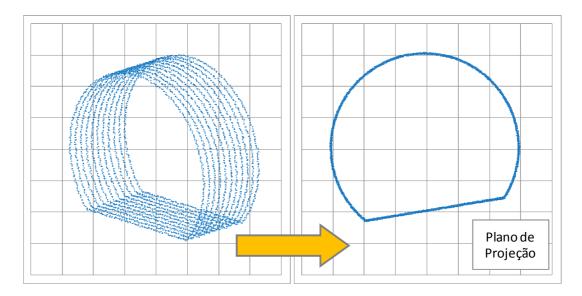


Figura 21 – Nuvem de pontos rotacionada para gerar projeção no plano XY

Primeiramente a nuvem se encontra em uma posição aleatória, tal como capturada e, posteriormente, após as rotações em torno de X e Y, transformada em uma posição que representa a projeção no plano XY, na posição apropriada para o ajuste das curvas aproximadoras (circunferência e polinômio).

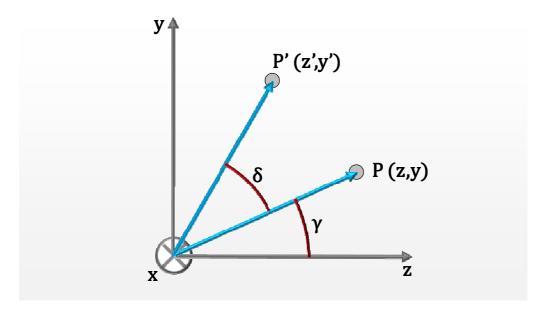


Figura 22 – Rotação em torno do eixo X

Acompanhando a Figura 22, seguem as equações para a rotação torno do eixo X:

(4.8)

$$d_x = \sqrt{y^2 + z^2} \tag{4.7}$$

$$\gamma = \operatorname{asin}\left(\frac{y}{d_x}\right) \qquad \qquad se \ z \ge 0$$

$$\gamma = \pi - \operatorname{asin}\left(\frac{y}{d_x}\right) \qquad \qquad se \ z < 0$$

$$\gamma' = \gamma + \delta \tag{4.9}$$

$$y' = d_{x} \sin(\gamma') \tag{4.10}$$

$$z' = d_x \cos(\gamma') \tag{4.11}$$

$$x' = x \tag{4.12}$$

Onde:

(x,y,z) É a coordenada do ponto P antes da rotação δ (x',y',z') É a coordenada do ponto P' após rotação δ

δ É o ângulo de rotação

Equações análogas seguem para as transformações nos eixos Y e Z.

4.3.3 Ajuste da Circunferência

O ajuste da circunferência percorre um ciclo entre rotações da nuvem de pontos e determinação dos parâmetros da circunferência propriamente.

Em cada iteração é realizado um incremento na posição da nuvem, rotacionando-a em torno de X e Y, resultando em uma nova projeção no plano XY. Na seqüência um algoritmo GRG (*Generalized Reduced Gradient*) desenvolvido por Lasdon e Waren (1978) determina os parâmetros (X₀, Y₀, R) que minimizam a equação de resíduo do método geométrico (3.25).

O ciclo de iterações é interrompido quando a solução corrente não pode ser melhorada para uma dada precisão pré-estabelecida e assim o conjunto (X_0, Y_0, R) da última iteração representa o centro e o raio da circunferência ajustada.

O Método Algébrico para ajustes de circunferência poderia ser aplicado no lugar do Método Geométrico, todavia o Método Geométrico é reconhecido como uma solução clássica e ótima do ponto de vista estatístico para este tipo de problema de ajuste.

Um ponto a ser destacado é que esta rotina computacional traz duas grandes facilidades práticas, (1) a não necessidade de nivelar o equipamento, e (2) a não necessidade de tomar um ponto de referência. Com esta característica, cerca de 10 minutos podem ser poupados no procedimento de medição.

4.3.4 Ajuste do Polinômio

Após o ajuste da circunferência, caso necessário, é possível realizar uma rotação em torno da linha de centro (eixo Z) para que o polinômio possa se ajustar aos pontos da carga pelo MMQ (método dos mínimos quadrados) adequadamente.

Quando um conjunto de pontos tende à uma função constante, que é o caso do problema em questão, o MMQ e o MDO (método das distâncias ortogonais) tendem a ser equivalentes.

A solução do MMQ pode ser obtida com a resolução do sistema linear (3.23), através de uma família de funções $\sum_{0}^{m}a_{k}g_{k}\left(x\right)$, tal que $g_{k}(x)=x^{k}$, e k é o grau do polinômio.

Uma forma de resolver o sistema linear é através da técnica da multiplicação de ambos os lados da igualdade do sistema na forma Ax = b pela matriz inversa A^{-1} . Assim:

$$A^{-1}.Ax = A^{-1}.b (4.13)$$

Como A^{-1} . A = I, segue que:

$$x = A^{-1}.b (4.14)$$

4.3.5 Cálculo da Carga

Definida a circunferência e o polinômio, calcula-se a área ocupada pela carga na seção cilíndrica. No tratamento matemático desenvolvido, o cálculo da área da carga ocorre por diferença. De fato calcula-se a área da circunferência e a área da carga é obtida subtraindo-se a área vazia. A área vazia é calculada por integração numérica através do somatório das áreas de 720 triângulos com um vértice comum na posição (X₀, Y₀) e altura equivalente à distância até a circunferência ou polinômio. A Figura 23 ilustra a divisão da área vazia em diversos triângulos.

O grau de enchimento da seção cilíndrica é obtido através da razão entre a área da carga e a área da circunferência.

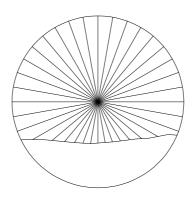


Figura 23 - Área vazia dividida em diversos triângulos

Diferente da aplicação de um método de Newton-Cotes ou de Gauss, o conceito de integral numérica foi adaptado ao problema aplicando-se uma fórmula de geometria analítica para o cálculo da área dos triângulos. Assim:

$$S_{\Delta} = \frac{|D|}{2} \tag{4.15}$$

$$D = \begin{bmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_C & Y_C & 1 \end{bmatrix}$$
 (4.16)

Tal que os vértices dos triângulos são os pontos $A=(X_A,Y_A), B=(X_B,Y_B)$ e $C=(X_C,Y_C)$.

Aprofundando o cálculo, conhecendo-se o comprimento do cilindro, o ângulo dos cones de alimentação e descarga e os diâmetros dos orifícios de alimentação e

descarga, também é possível calcular o grau de enchimento do moinho em relação ao volume interno através de integração numérica com um dos métodos convencionais.

4.3.6 Estimativa do Erro de Ajuste

A forma escolhida para avaliar o erro de ajuste foi através do desvio do raio da circunferência. Cada ponto apresenta certa distância da circunferência, uma distância ortogonal que pode ser calculada pela mesma Equação (3.25) do critério de ajuste.

Invariavelmente, após o tratamento dos dados a média da distância entre os pontos e a circunferência é zero, porém as distâncias dos pontos apresentam desvios que podem ser descritos por uma distribuição estatística. A variação do raio pode ser avaliada pela distribuição t-student devido à quantidade limitada de pontos, normalmente inferior a 30. Havendo abundância de medidas poderia ser empregada a distribuição normal.

A estatística t é descrita por:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{x} - \mu}{S_x / \sqrt{n}} \tag{4.17}$$

Onde:

 t_{n-1} Estatística t-student com n-1 graus de liberdade

 $ar{x}$ Média amostral

μ Média populacional

 S_{x} Desvio padrão da amostra

n Tamanho da amostra

Posteriormente ao cálculo da estatística t, a interpretação do desvio pode ser realizada através do intervalo de confiança bicaudal, como se segue:

$$\bar{x} = 0 \pm t_{n-1,\alpha/2} \frac{S_x}{\sqrt{n}} \tag{4.18}$$

$$IC = 1 - \alpha$$

Onde:

$t_{n-1,\alpha/2}$	É a estatística t com n-1 graus de liberdade
\bar{x}	Média amostral
S_{x}	Desvio padrão da amostra
n	Tamanho da amostra
IC	Intervalo de confiança
α	Probabilidade de erro do intervalo

Ainda como forma de interpretar o erro calculado, deve-se considerar que a superfície dos revestimentos possui irregularidades que não podem ser precisamente avaliadas no momento em que o laser é apontado. Além disso, há variações decorrentes do desgaste. Logo, o intervalo de confiança deve se estender previsivelmente na ordem de alguns milímetros.

Quanto ao erro de medição dos pontos da carga, a interpretação é de que os espaços vazios não delimitam uma superfície lisa, cuja variação esperada é da ordem de poucos centímetros. Como a precisão do laser é da ordem de milímetros, não faz sentido estimar um erro de medição da superfície da carga. A Figura 24 ilustra a superfície da carga em um moinho de bolas.



Figura 24 – Superfície da Carga

4.4 Estrutura Geral do Tratamento Matemático

O tratamento matemático pode ser resumido em uma sequência de etapas conforme organizado na Figura 25

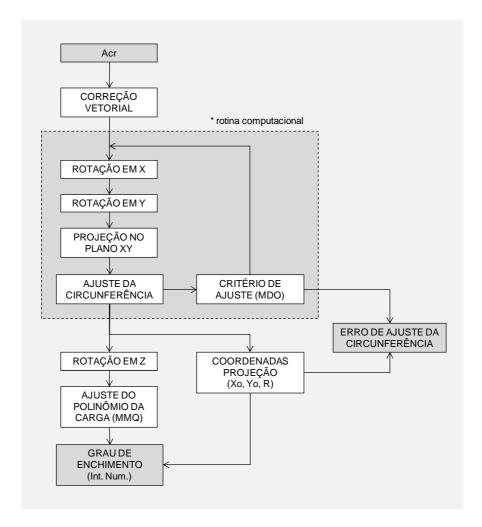


Figura 25 – Diagrama do modelo matemático

O tratamento matemático não exigiu a aplicação de nenhum *software* CAD. Todos os cálculos puderam ser realizados em planilha eletrônica.

A rotina computacional permite um ganho no tempo de intervenção já que o nivelamento do equipamento e a tomada de um ponto de referência são, neste caso, dispensados.

Um equipamento com maior resolução nas medidas angulares poderia contribuir para uma aproximação mais precisa, contudo, um erro da ordem de milímetros já é esperado devido às irregularidades e ao desgaste dos revestimentos.

5 Resultados

Foram medidas as superfícies de três equipamentos, uma coluna de flotação no dia 23 de Fevereiro de 2010, um moinho de bolas no dia 23 de Março e um moinho SAG no dia 12 de Maio do mesmo ano.

5.1 Coluna de Flotação

O primeiro equipamento medido foi uma coluna de flotação ainda não instalada que estava armazenada na posição horizontal. Apesar de não ser propriamente um moinho, a superfície interna se assemelha ao problema em questão. A Figura 26 ilustra uma fotografia da coluna e a mesma fotografia rotacionada 229º no sentido antihorário. A estrela indica o mesmo ponto nas duas fotografias.



Figura 26 – Foto da coluna de flotação e a mesma foto rotacionada 229º no sentido anti-horário

O MCP foi posicionado em frente à coluna, praticamente com a mesma vista da câmera fotográfica. Em seguida foram coletados 36 pontos da superfície cilíndrica e outros 9 pontos da chapa plana. As medições encontradas estão relacionadas na Tabela 4.

Tabela 4 – Medições realizadas na coluna de flotação

Medição	Ângulo Azimutal (°)	Ângulo de Elevação (°)	Distância (m)	Superfície apontada
1	113,0	60,0	1,431	cilindro
2	104,0	47,0	1,369	cilindro
3	88,0	37,0	1,326	cilindro
4	98,0	67,0	1,763	cilindro
5	90,0	60,0	1,783	cilindro

6	75,0	53,0	1,753	cilindro
7	88,0	72,0	2,238	cilindro
8	82,0	66,0	2,189	cilindro
9	72,0	61,0	2,169	cilindro
10	66,0	34,0	1,312	cilindro
11	41,0	37,0	1,264	cilindro
12	25,0	45,0	1,228	cilindro
13	65,0	50,0	1,701	cilindro
14	50,0	50,0	1,597	cilindro
15	40,0	55,0	1,602	cilindro
16	62,0	60,0	2,172	cilindro
17	53,0	60,0	2,063	cilindro
18	48,0	65,0	2,024	cilindro
19	18,0	56,0	1,238	cilindro
20	10,0	73,0	1,228	cilindro
21	8,0	86,0	1,238	cilindro
22	30,0	63,0	1,551	cilindro
23	25,0	74,0	1,584	cilindro
24	20,0	87,0	1,540	cilindro
25	32,0	69,0	1,930	cilindro
26	30,0	80,0	1,901	cilindro
27	30,0	90,0	2,032	cilindro
28	7,0	112,0	1,286	cilindro
29	10,0	126,0	1,319	cilindro
30	20,0	140,0	1,392	cilindro
31	20,0	107,0	1,566	cilindro
32	25,0	119,0	1,641	cilindro
33	35,0	129,0	1,716	cilindro
34	30,0	95,0	2,035	cilindro
35	35,0	110,0	2,185	cilindro
36	42,0	121,0	2,135	cilindro
37	110,0	66,0	1,423	carga
38	97,0	71,0	1,770	carga
39	89,0	75,0	2,135	carga
40	80,0	112,0	0,823	carga
41	73,0	103,0	1,286	carga
42	70,0	99,0	1,799	carga
43	50,0	141,0	1,040	carga
44	53,0	125,0	1,433	carga
45	54,0	117,0	1,918	carga

Após o processamento dos dados, a circunferência apresentou centro na coordenada (0,440; -0,260) e raio 1,209 m, ou seja, um diâmetro de 2,418 m. Neste caso em particular, a rotação em torno do eixo Z foi fundamental para prosseguir com o

cálculo da "carga". O erro de ajuste do raio foi calculado em 3 mm no intervalo de confiança 98%.

O grau de enchimento equivalente para a posição da chapa foi calculado 38,5%. A Figura 27 ilustra os resultados obtidos, a circunferência, o polinômio, e também a posição da linha de centro, do MCP e dos pontos projetados.

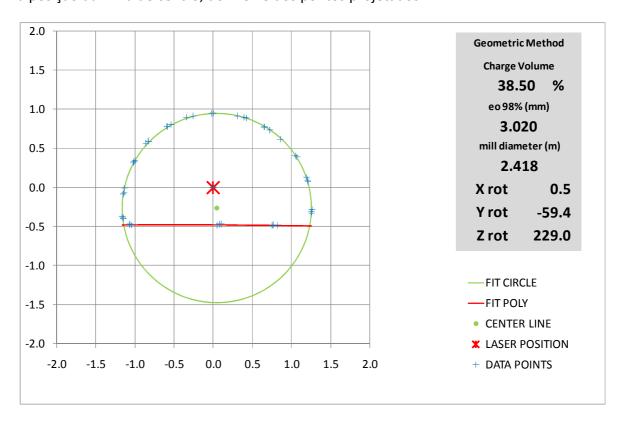


Figura 27 – Resumo dos resultados após o processamento dos dados da coluna de flotação

Além dos resultados obtidos através do laser, foram realizadas 7 medições diretas do diâmetro da coluna, o que resultou em uma média de 2,418 m. Os valores medidos foram: 2,418, 2,418, 2,418, 2,419, 2,418, 2,419.

Também foram medidas 3 alturas entre a chapa, em seu ponto médio, até a borda oposta. Os resultados foram 1,431, 1,433, 1,430 m, cuja média é 1,431 m. O cálculo do grau de enchimento através dessa altura resultou em 38,5%. Aplicando-se a fórmula da Allis Chalmers (3.7), o grau de enchimento obtido foi de 38,4%

Dentre os 36 pontos coletados na superfície, os dois pontos destacados em negrito na Tabela 4 foram descartados, pois o erro individual de tais pontos foi demasiadamente alto (superior a 80 mm). Acredita-se que houve um erro de anotação.

Com relação ao tempo de intervenção, foram anotados os horários em que cada atividade foi iniciada e terminada, conforme relacionado na Tabela 5

Tabela 5 – Tempo de intervenção na coluna de flotação

Horário	Atividade
09:10	posicionamento do MCP
09:12	início das medições na região cilíndrica
09:21	início das medições na região plana
09:24	fim das medições do MCP
09:25	MCP removido

A montagem do equipamento demorou apenas 2 minutos, porém tratou-se de uma situação ideal, num pátio de armazenamento.

Em média foram medidos 3,8 pontos por minuto.

5.2 Moinho de Bolas Industrial

O segundo equipamento, um moinho de bolas instalado em uma usina industrial de processamento de bauxita, foi medido durante uma parada para manutenção. A Figura 28 ilustra uma fotografia do interior do moinho.



Figura 28 – Foto do interior do moinho de bolas usina de beneficiamento de bauxita

O laser foi posicionado na entrada do moinho (foto ilustrada na Figura 29). Em seguida foram coletados 18 pontos da superfície cilíndrica e outros 16 pontos da superfície da carga. As medições obtidas estão relacionadas na Tabela 6.

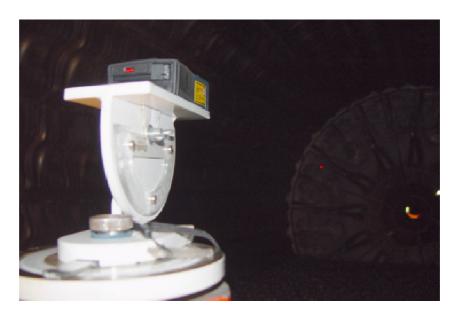


Figura 29 – Foto do MCP na entrada do moinho de bolas usina de beneficiamento de bauxita

Tabela 6 – Medições realizadas no moinho de bolas para processamento de bauxita

Medição	Ângulo Azimutal (°)	Ângulo de Elevação (°)	Distância (m)	Superfície apontada
1	10,0	67,0	1,553	cilindro
2	10,0	103,0	1,380	cilindro
3	10,0	143,0	1,298	cilindro
4	74,0	75,0	3,120	cilindro
5	74,0	92,0	2,817	cilindro
6	85,0	108,0	2,718	cilindro
7	105,0	113,0	2,950	cilindro
8	132,0	97,0	3,000	cilindro
9	133,0	73,0	3,378	cilindro
10	122,0	80,5	5,333	cilindro
11	119,0	90,0	5,671	cilindro
12	110,0	97,0	5,940	cilindro
13	100,0	97,5	6,025	cilindro
14	92,0	92,5	5,871	cilindro
15	89,0	84,5	6,040	cilindro
16	88,0	77,0	5,382	cilindro
17	160,0	78,0	2,014	cilindro
18	130,0	109,0	2,439	cilindro
19	190,0	55,0	1,520	carga
20	145,0	55,0	1,639	carga

21	110,0	55,0	1,885	carga
22	50,0	50,0	1,529	carga
23	145,0	65,0	2,188	carga
24	125,0	65,0	2,426	carga
25	105,0	65,0	2,619	carga
26	90,0	65,0	2,598	carga
27	70,0	65,0	2,457	carga
28	125,0	73,0	3,695	carga
29	115,0	73,0	3,916	carga
30	105,0	73,0	4,172	carga
31	95,0	73,0	4,212	carga
32	110,0	77,0	5,791	carga
33	92,0	76,0	5,718	carga
34	90,0	76,0	5,597	carga

Após o processamento dos dados, a circunferência apresentou centro na coordenada (-0,070; -0,220) e raio 1,608 m, ou seja, um diâmetro de 3,216 m. O erro de ajuste do raio foi calculado como inferior a 8 mm no intervalo de confiança 98%. O erro relativo foi de 0,43%. O grau de enchimento foi calculado 27,0%. A Figura 28 ilustra os resultados obtidos, a circunferência, o polinômio, e também a posição da linha de centro, do MCP e dos pontos projetados.

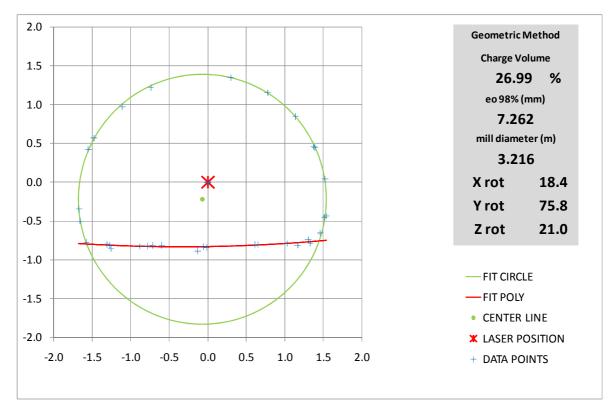


Figura 30 - Resumo dos resultados após o processamento dos dados do moinho de bolas

Ainda durante a intervenção no moinho, na seqüência foram tomadas medidas da carga através do método convencional utilizando-se uma fita métrica. As medidas obtidas estão relacionadas naTabela 7

Tabela 7 – Medições realizadas no moinho de bolas pelo método convencional

	Medida (m)	S equivalente (m)	Grau de enchimento da seção cilíndrica (%)
Medida S próxima à alimentação	3,10	3,10	33,3
Medida S na região central	3,09	3,09	32,6
Medida S próxima à descarga	3,14	3,14	36,4
Medida da Diagonal à direita	7,10	3,03	29,2
Medida da Diagonal à esquerda	7,14	3,12	35,1
Altura H próxima da alimentação	2,22	2,97	26,4
Altura H próxima da descarga	2,24	2,96	25,6
S equivalente médio (m)		3,06	30,7
Grau de enchimento mínimo (IC 90%)*			27,9
Grau de enchimento máximo (IC 90%)*			34,2
Comprimento do cilindro	6,42		
Diâmetro nos vales dos revestimentos	3,22		

^{*}Intervalo de Confiança

No método convencional o grau de enchimento considerado seria de 30,7%, contudo pode-se observar que houve uma grande variabilidade nos graus de enchimento calculados individualmente, mesmo com pequenas diferenças nos valores medidos que chegaram a apenas 5 cm nas medições diretas.

O moinho estava com um grau de enchimento relativamente alto, com uma relação S/D em torno de 0,95.

Também foram efetuadas duas medidas de alturas da carga até o revestimento mais ao alto. As alturas encontradas foram 2,24 e 2,22 m que correspondem a graus de enchimento de 26,4 e 25,6% respectivamente. Aplicando-se tais alturas na fórmula da Allis Chalmers (3.7), os resultados encontrados foram 25,2% e 26,0%

Considerando um intervalo de confiança de 90%, o grau de enchimento deste moinho estaria entre 27,9 e 34,2% pelo método convencional.

Observando-se a Figura 28, há 22 revestimentos no perímetro da seção cilíndrica e 13,5 deles estão aparentes o que equivale a grau de enchimento de 28,2%, porém uma análise subjetiva poderia indicar que seriam 13 ou 14 revestimentos aparentes, resultando em graus de enchimento de 32,3 ou 24,3% respectivamente.

Com relação ao tempo de intervenção, foram anotados os horários em que cada atividade iniciou e terminou, conforme relacionado na Tabela 8

Tabela 8 – Tempo de intervenção na moinho de bolas

Horário	Atividade		
11:15	posicionamento do MCP		
11:18	início das medições na região cilíndrica		
11:23	início das medições na região plana		
11:28	fim das medições com o MCP		
11:30	inicio das medições no método convencional		
11:37	fim das medições no método convencional		
11:38	inicio das medições das alturas		
11:40	fim das medições das alturas		
11:42	MCP removido		

A montagem do equipamento foi efetuada em cerca de 3 minutos. Em média foram medidos 3,4 pontos por minuto. O período entre o equipamento ser posicionado e removidofoi de cerca de 15 minutos. A medição através do método convencional levou 7 minutos.

5.3 Moinho SAG Industrial

O terceiro equipamento, um moinho SAG com diâmetro de 32', instalado em uma usina de beneficiamento de minério de ouro e cobre, foi medido após o *grind out* de uma campanha de amostragem. A Figura 31 ilustra as medições com o MCP sendo realizadas pelo autor.



Figura 31 – Medições do autor com o MCP sendo realizadas no moinho SAG

Logo após a parada foram posicionados ventiladores para melhorar as condições de ingresso, pois a atmosfera no interior do moinho estava repleta de vapores. A Figura 32 ilustra o interior do moinho após alguns minutos de ventilação. Os revestimentos expostos também podem ser contados através desta fotografia.



Figura 32 – Interior do moinho SAG (foto do autor)

O tripé com o MCP foi posicionado sobre o mancal de alimentação de forma bastante fácil e ergonômica. Em seguida foram coletados 12 pontos da superfície dos revestimentos e outros 8 pontos da superfície da carga. O número de pontos restringiu-se ao tempo limitado de parada, dado que a interrupção não contou com intervenções para manutenção. As medições obtidas estão relacionadas na Tabela 9.

Tabela 9 - Medições realizadas no moinho SAG

#	Ângulo Azimutal (°)	Ângulo de Elevação (°)	Distância (m)	Superfície apontada
1	302,0	78,0	5,862	cilindro
2	302,0	99,5	6,010	cilindro
3	302,0	122,0	5,727	cilindro
4	340,0	137,0	6,546	cilindro
5	20,0	132,5	6,603	cilindro
6	40,0	103,0	6,487	cilindro
7	35,0	79,5	6,948	cilindro
8	3,0	106,0	12,539	cilindro
9	16,0	88,0	12,075	cilindro
10	329,0	88,0	11,647	cilindro
11	330,0	106,5	9,793	cilindro
12	333,0	106,5	10,204	cilindro
13	336,0	54,0	3,870	carga
14	20,0	54,0	3,814	carga
15	20,0	67,5	6,280	carga
16	4,0	67,5	6,386	carga
17	331,0	68,0	6,459	carga
18	332,0	69,0	7,793	carga
19	352,5	72,5	9,740	carga
20	10,0	73,0	10,061	carga

Após o processamento dos dados, a circunferência apresentou centro na coordenada (-0,125; 0,781) e raio 4,767 m, ou seja, um diâmetro de 9,535 m. O erro de ajuste do raio foi calculado em 18 mm no intervalo de confiança 98%. O erro relativo foi de 0,37%. O grau de enchimento foi calculado 18,6%. A Figura 33 ilustra os resultados obtidos, a circunferência, o polinômio, e também a posição da linha de centro, do MCP e dos pontos projetados.

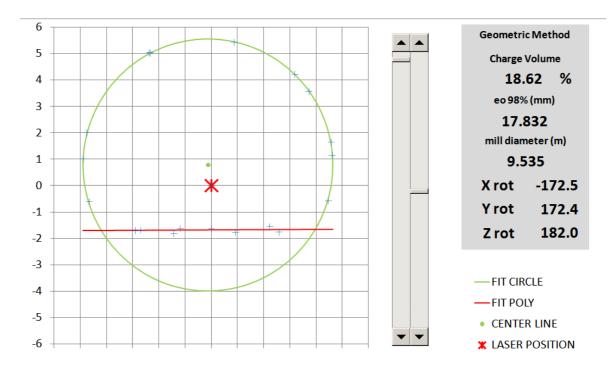


Figura 33 – Resumo dos resultados após o processamento dos dados do moinho SAG

Consultando desenhos de projeto do moinho, pode-se constatar que um diâmetro entre vales dos revestimentos de 9,52 m, valor muito próximo das medições realizadas (9,54 m), considerando ainda o desgaste das peças. A Figura 34 ilustra o desenho consultado.

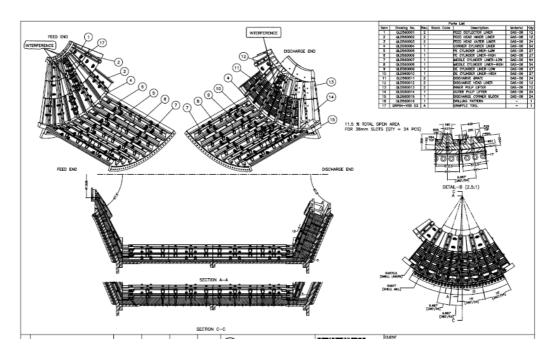


Figura 34 - Desenho de engenharia do moinho SAG

Ainda durante a intervenção no moinho, na seqüência foram tomadas medidas da carga através do método convencional utilizando-se uma fita métrica. As medidas obtidas estão relacionadas na Tabela 10

Tabela 10 – Medições realizadas no moinho SAG pelo método convencional

	Medida (m)	S equivalente (m)	Grau de enchimento da seção cilíndrica (%)
Medida S próxima à alimentação	8.07	8.07	17.7
Medida S na região central	8.10	8.10	18.0
Medida S próxima à descarga	8.08	8.08	17.8
Medida da Diagonal à direita	12.44	8.03	17.4
Medida da Diagonal à esquerda	12.46	8.06	17.6
Altura H próxima da alimentação	7.25	8.15	18.4
Altura H próxima da descarga	7.24	8.17	18.6
S equivalente médio (m)		8.09	17.9
Grau de enchimento mínimo (IC 90%)*			17.6
Grau de enchimento máximo (IC 90%*)			18.2
Comprimento do cilindro	9.50		
Diâmetro nos vales dos revestimentos	9.54		

^{*}Intervalo de Confiança

No método convencional o grau de enchimento calculado foi de 17,9%, contudo pode-se observar que houve certa variabilidade nos graus de enchimento calculados individualmente. As diferenças nos valores medidos com a fita métrica foram inferiores a 3 cm nas medições diretas.

A relação S/D ficou próxima de 0,85, o que ainda permite uma boa estimativa do grau de enchimento através de medições diretas de S. Ver Figura 14.

Com a trena a laser foram medidas alturas H da carga até o revestimento mais ao topo. As alturas encontradas foram 7,25 e 7,24 m que correspondem a graus de enchimento de 18,4 e 18,6% respectivamente. Aplicando-se tais alturas na fórmula da Allis Chalmers (3.7), os resultados encontrados foram 17,2% e 17,3%

Considerando um intervalo de confiança de 90%, o grau de enchimento deste moinho estaria entre 17,6 e 18,2% através do método convencional. Observando-se a Figura 32, podem ser contados aproximadamente 37 revestimentos expostos, o que corresponde a um grau de enchimento entre 16,2 e 18,8%.

Com relação ao tempo de intervenção, foram anotados os horários de início e término de cada atividade, conforme relacionado na Tabela 11

Tabela 11 – Tempo de intervenção no moinho SAG

Horário	Atividade
15:16	posicionamento do MCP
15:18	início das medições na região cilíndrica
15:22	início das medições na região plana
15:28	fim das medições com o MCP
15:29	MCP removido
15:30	inicio das medições no método convencional
15:37	fim das medições no método convencional
15:38	inicio das medições das alturas
15:39	fim das medições das alturas

A montagem do equipamento foi executada em cerca de 2 minutos. Em média foram medidos 2 pontos por minuto. A menor quantidade de pontos por minuto no moinho SAG pode ser atribuída a algumas dificuldades práticas, como por exemplo o nervosismo do autor frente a pressão para retomada da operação.

6 Discussão dos Resultados

O cálculo dos parâmetros relacionados ao método proposto foi rápido, não levou mais do que poucos segundos. A resolução da regressão convergiu mais rapidamente quando as rotações em torno dos eixos X e Y foram pré-solucionadas visualmente. Contudo, este procedimento não é determinante para a convergência.

A Tabela 12 resume os resultados que serão discutidos na sequencia.

Tabela 12 - Quadro resumo dos valores calculados

Medição	Diâmetro (m)	Grau de enchimento calculado (%)	Grau de enchimento mínimo	Grau de enchimento máximo	Erro relativo do raio, IC98%
Célula de Flotação					
altura H	2,418	38,5	-	-	-
Allis Chalmers	2,418*	38,4	-	-	-
MCP	2,418	38,5	-	-	0,25
Moinho de Bolas					
método convencional	3,22*	30,7	27,9	34,2	-
altura H	3,22*	26,0	25,6	26,4	-
Allis Chalmers	3,22*	25,6	25,2	26,0	-
contagem de revestimento	3,22*	28,2	24,3	32,3	-
MCP	3,216	27,0	-	-	0,43
Moinho SAG					
desenho	9,52	-	-	-	-
método convencional	9,54*	17,9	17,6	18,2	-
altura H	9,54*	18,5	18,4	18,6	-
Allis Chalmers	9,54*	17,3	17,2	17,3	-
contagem de revestimento	9,54*	17,5	16,2	18,8	-
МСР	9,535	18,6	-	-	0,37

^{*}valores assumidos para o cálculo

6.1 Coluna de Flotação

O erro estimado para o raio da coluna de flotação foi considerado excelente, levando em conta que o protótipo foi concebido com precisão angular de 0,5 grau e precisão métrica de 1,5 mm. Um erro de 3,0 mm no raio no IC de 98% atendeu às expectativas para este caso, considerado ideal. O erro relativo foi calculado 0,25%.

A rotação anti-horária de 229 graus em torno do eixo Z foi fundamental para realizar a regressão do polinômio da carga de forma apropriada, considerando principalmente as diferenças entre o MMQ e o MDO.

O valor da média de 7 medições do diâmetro resultou em 2,418 m. Considerando 4 algarismos significativos, o diâmetro médio com medições diretas e o diâmetro medido através do MCP são idênticos.

Quanto ao cálculo da superfície que virtualmente representa a carga, os resultados foram idênticos. Foram estimados 38,5% tanto pelo MCP como pela medição direta da altura H.

Através da fórmula da Allis Chalmers, o resultado obtido foi de 38,4%, resultado que mostrou-se válido para este teste, confirmando-se assim que a fórmula da Allis Chalmers apresenta boa precisão para graus de enchimento elevados.

6.2 Moinho de Bolas Industrial

No moinho de bolas, o erro estimado para o raio foi de 7,3 mm. Considerando que tratou-se de uma superfície desgastada e que não é possível garantir que o laser seja apontado precisamente no vale dos revestimentos, este erro foi considerado aceitável e coerente comparando-se ao caso ideal, da coluna de flotação. Uma suposta transformação do erro estimado pelo intervalo de confiança em erro relativo resultaria em 0,43% no moinho e 0,25% na coluna de flotação. São valores com a mesma ordem de grandeza, indicando consistência entre os dois casos.

A rotação em torno do eixo Z não foi fundamental, contudo ela se faz importante para manter um procedimento normatizado.

Para as estimativas no moinho de bolas, a medição pelo MCP resultou em um grau de enchimento de 27,0%. As medições realizadas pelo método convencional apresentaram grande variabilidade, com valor médio de 30,7%, que poderia estar entre 27,9 e 34,2% no intervalo de 90% de confiança. Considerando apenas as alturas, os resultados obtidos foram 25,6 e 26,4%, e aplicando a fórmula da Allis Chalmers os valores foram de 25,2 e 26,0%. Através da contagem dos revestimentos o valor estimado foi de 28,2%.

Ao que indica, os 30,7% pelo método convencional está superestimado em comparação com os demais métodos.

Os métodos que calculam o grau de enchimento através da altura H estimaram valores abaixo de 26,5%, porém vale salientar que a porção central da carga apresentava um nível mais baixo em relação às regiões mais próximas aos revestimentos, como pode ser observado na foto da Figura 28 e no diagrama da Figura 30. Esta observação também explica um valor levemente mais alto (28,2%) obtido pelo método da contagem de revestimentos.

No método convencional foram observadas diferenças de até 5 cm nas medições diretas de S e das diagonais, o que é bastante aceitável dada a irregularidade da carga, a dificuldade de estabelecer um critério entre o início e o fim da medição já que as bolas não possuem um diâmetro desprezível, e também pela dificuldade de estabelecer um tensionamento regular da fita métrica.

Notou-se uma propagação na diferença no S equivalente das medidas das diagonais. Enquanto a diferença entre as diagonais foi de 4 cm (7,10 e 7,14 m), contudo a diferença entre os valores de S equivalentes foi maior, cerca de 9 cm (3,03 e 3,12 m). Esta diferença proporcionou graus de enchimento completamente distintos (29,2 e 35,1%). Ver Tabela 7.

A relação S/D na condição medida estava em torno de 0.95. Conforme apresentado no gráfico da Figura 14, este valor de S/D recai sobre uma região de grande variabilidade de grau de enchimento com pequenas variações de S.

6.3 Moinho SAG Industrial

Na terceira prova, além das dificuldades observadas nas medições anteriores, foram experimentadas pressões típicas do ambiente operacional de usinas industriais de beneficiamento, devido às demandas produtivas. Antecedendo as medições com o MCP foi realizada uma campanha de amostragem na usina envolvendo a obtenção de amostras em diversos fluxos da usina, a coleta de dados dos instrumentos e por fim o *crash-stop* seguido do *grind out* no moinho SAG.

Neste moinho SAG, de diâmetro de 32', o erro estimado para o raio foi de 18 mm. O diâmetro calculado foi de 9,535 m. Consultando desenhos de projeto do moinho, foi possível constatar que o diâmetro entre vales dos revestimentos seria de 9,52 m, valor este que ficou totalmente coerente com as medições realizadas, mesmo considerando-se o desgaste das peças. O erro relativo do raio foi calculado em 0,37% que está além do caso obtido na célula de flotação (0,25%), porém mostrou-se melhor que o calculado para o moinho de bolas, de 0,43%. Os erros relativos entre si apresentam mesma ordem de grandeza, indicando boa consistência entre todos os casos estudados.

A medição pelo MCP resultou em um grau de enchimento no moinho SAG de 18,6%. As medições realizadas pelo método convencional apresentaram pouca variabilidade, porém valores sistematicamente mais baixos. Na média o valor calculado pelo método convencional foi de 17,9%, que poderia estar entre 17,6 e 18,2% no intervalo de 90% de confiança.

Considerando o cálculo através das alturas H apenas, os resultados obtidos foram 18,4 e 18,6%, bastante próximos do valor calculado através do MCP, salientando que a carga apresentou-se com bom nivelamento. Aplicando-se a fórmula da Allis Chalmers o valor obtido foi de 17,3%, que está fora da faixa de precisão aceitável (a formula é aplicável para grau de enchimento de até 20%). Através da contagem dos revestimentos o valor estimado foi de 16,2 a 18,8%.

No método convencional foram observadas diferenças de até 3 cm nas medições diretas de S e das diagonais, o que é bastante aceitável dada a irregularidade da carga e as dimensões internas do SAG.

Notou-se uma propagação na diferença no S equivalente das medidas das diagonais. A diferença entre as diagonais foi de apenas 2 cm (12,44 e 12,46 m), já a diferença entre os valores de S equivalentes foi de 6 cm (8,03 e 8,06 m). Esta diferença não gerou estimativas do grau de enchimento contraditórias como no moinho de bolas. Os valores obtidos foram 17,4 e 17,6%.

A relação S/D na condição medida estava em torno de 0,85 e, conforme apresentado no gráfico da Figura 14, este valor de S/D recai sobre região boa leitura do grau de enchimento no método convencional.

6.4 Tempo de Intervenção

O tempo de intervenção no caso da coluna de flotação não seria adequado do ponto de vista prático, contudo o tempo de medição dos pontos para cada minuto foi semelhante ao caso do moinho de bolas. Em média foram levantados 3,8 ppm (pontos por minuto) na coluna de flotação, 3,4 ppm no moinho de bolas e apenas 2,0 ppm no moinho SAG. O menor número de ppm no moinho SAG foi atribuído às dificuldades operacionais encontradas na ocasião, como a pressão para retomada da operação.

O posicionamento do equipamento foi rápido, inferior a 3 minutos, sem a necessidade de nivelar a base com nenhum tipo de botão giratório ou nível de bolhas.

A intervenção necessária para o MCP variou entre equipamentos estudados, contudo mostrou-se dentro de um intervalo de tempo viável, que ainda pode ser reduzido através de melhorias no sistema de aquisição de dados que até então é manuscrito. Uma trena mais sofisticada que realiza a leitura do ângulo de inclinação automaticamente e transmite dados por tecnologia sem fio poderia ser aplicada, ainda com um custo acessível.

Ainda assim, salienta-se que o equipamento não requer o ingresso de pessoas dentro do espaço confinado, eliminando-se riscos e condições de trabalho insalubres.

7 Conclusões

O MCP mostrou-se uma alternativa viável, precisa e, principalmente, segura para a medição de cargas de moinhos tubulares.

Com o MCP não é necessário o ingresso de pessoas nos moinhos que são espaços confinados que freqüentemente apresentam condições elevadas de temperatura e umidade, com riscos de queda, escorregamento, explosão e queda de bolas, presença de vapores tóxicos, entre outros.

7.1 Tratamento Matemático

O tratamento matemático mostrou-se eficiente, rápido e não exigiu a aplicação de nenhum *software* CAD para interpretação dos resultados. Todos os cálculos puderam ser realizados em planilha eletrônica.

A adoção da liberdade de rotação em torno dos eixos permitiu duas grandes facilidades práticas, (1) a não necessidade de nivelar o equipamento, e (2) a não necessidade de tomar um ponto de referência. Com esta concepção, cerca de 10 minutos ou mais puderam ser poupados nas intervenções.

Um equipamento com maior resolução nas medidas angulares poderia contribuir para uma aproximação mais precisa, contudo, ainda como forma de interpretar o erro calculado, deve-se considerar que a superfície dos revestimentos possui irregularidades que não podem ser precisamente avaliadas no momento de apontar o laser. Além disto, há variações decorrentes do desgaste. Logo, o erro das medidas devem se estender previsivelmente na casa de alguns milímetros.

Quanto ao erro de medição dos pontos da carga, uma interpretação plausível é de que os espaços vazios não delimitam uma superfície lisa, cuja variação esperada é da ordem de poucos centímetros. Como a precisão do laser é da ordem de milímetros, não faz sentido estimar um erro de medição da superfície da carga.

7.2 Célula de Flotação - Caso Ideal

No caso ideal, com leitura de uma superfície regular, o MCP apresentou ótima precisão, com um erro relativo de 0,25% no raio da circunferência e valores idênticos no grau de enchimento (38,5%) previstos tanto pelo MCP como através da medição direta da altura H. Considerando quatro algarismos significativos, o diâmetro médio obtido através de medições diretas e o diâmetro calculado através do MCP foram idênticos.

7.3 Moinho de Bolas Industrial

No moinho de bolas de 12' de diâmetro, a precisão foi menor que da célula de flotação e do moinho SAG. O MCP apresentou um erro relativo de 0,43% no raio da circunferência, ainda assim muito satisfatório.

As medições pelo método convencional apresentaram grande variabilidade, mesmo com pequenas diferenças (até 5 cm) nas medições diretas. A relação S/D na condição medida estava em torno de 0,95, o que justifica tal variabilidade.

Quando tomadas medições diretas da altura H, os graus de enchimento ficaram próximos de 26%, próximo do valor de 27,0% medido pelo MCP, considerando ainda que a região central da carga estava levemente rebaixada.

7.4 Moinho SAG Industrial

No moinho SAG de 32' de diâmetro o erro relativo de ajuste da circunferência foi de 0,37%, confirmando um valor baixo para desvio do raio.

A relação S/D (0,85) recaiu sobre um boa condição para a estimativa do volume da carga pelo método convencional que apresentou pouca variabilidade nas medições, porém resultou em graus de enchimento sistematicamente mais baixos que os calculados pelo MCP e demais métodos.

Conforme previsto, a fórmula da Allis Chalmers não apresentou precisão adequada nas estimativas do grau de enchimento para este caso, já que o grau de enchimento estava fora de sua faixa de aplicação.

O grau de enchimento considerando apenas a altura H ficou próximo da leitura do MCP. Neste caso, a carga estava bastante nivelada.

O enchimento calculado pela contagem de revestimentos apresentou-se dentro uma faixa com variação de 2,6% entre mínimo e máximo, o que é considerado impreciso para exercícios de simulação.

7.5 Considerações Finais

No método convencional, pequenas diferenças em medições diretas causam grande variabilidade no grau de enchimento. Esta tendência tende a se agravar quando os moinhos possuem diâmetros relativamente pequenos, como o caso do moinho de bolas. O MCP elimina critérios subjetivos adotados por uma pessoa medindo a carga pelo método convencional, dentre eles as dúvidas quanto aos limites físicos da carga e o tensionamento da fita métrica.

Conhecendo-se o comprimento do cilindro, o ângulo dos cones de alimentação e descarga e os diâmetros da entrada e descarga, também é possível calcular o grau de enchimento do moinho em relação ao volume interno através de integração numérica. A medição periódica do grau de enchimento de um moinho em relação ao volume interno, por sua vez, permite estimar o consumo de bolas para uma dada quantidade e tipo de minério processado.

O tempo de intervenção necessário para o MCP variou entre equipamentos estudados, contudo mostrou-se dentro de um intervalo de tempo viável, que ainda pode ser melhorado através de melhorias no sistema de aquisição de dados que até então é manuscrito. Uma trena mais sofisticada que realiza a leitura do ângulo de inclinação automaticamente e transmite dados por tecnologia sem fio poderia ser aplicada, ainda com um custo acessível.

Referências

AL-SHARADQAH, A. and CHERNOV, N. Error analysis for circle fitting algorithms, Electronic Journal of Statistics, 886-911, 2009.

BERALDO, J.L. **Moagem de Minérios em Moinhos Tubulares**. São Paulo. Editora Edgard Blücher, 1987.

BOND, F.C. The third theory of comminution. Trans SME/AIME, 193, 484-494, 1952

BOND, F.C. Crushing and grinding calculations. Allis Chalmers Publication N.o 07R9235B, 1961

CHAVES, A.P. Teoria e Prática de Tratamento de Minérios, Vol.III – Britagem, Peneiramento e Moagem. São Paulo. Signus Editora, 1999

CHERNOV, N. e LESORT, C., Least squares fitting of circles, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 239-251, 2005.

COSTA NETO, P.L.O 1977. Estatística. Edgard Blücher, São Paulo, p.178-228, 108-115

HUMES, A.F.P. de C. *et al*, **Noções de Cálculo Numérico** McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, p.93-109, 158-174 1984

LASDON, L.S., WAREN, A.D., (1978) **Generalized reduced gradient software for linearly and nonlinearly constrained problems**. em: Greenberg, H.J., (Ed.) Design and Implementation of Optimization Software. Sijthoff e Noordhoff, Holanda, 1978, p.335-362.

MISHRA, B.K.; RAJAMANI, R.K.. **Numerical Simulation of charge motion in a ball mill**. Preprints of the 7th Euro Symp on Comminution, 555-563, 1990.

MOON P, SPENCER DE. **Spherical Coordinates** (\mathbf{r} , $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\psi}$). Field Theory Handbook, Including Coordinate Systems, Differential Equations, and Their Solutions (corrected 2nd ed., 3rd print ed. ed.). New York: Springer-Verlag. pp. 24–27, 1988.

MORRELL S. **Power Draw of Grinding Mills – Its measurement and prediction**. 5th Mill Ops Conf, Roxby Downs, Oct, 109-114 (AusIMM), 1994.

MORRELL S. Power Draw of Wet Tumbling Mills and its Relationship to Charge Dynamics. Trans Inst Min Metall, 105, Jan-Apr, 1996.

NAPIER MUNN, T.J.; MORRELL, S.; MORRISON, R.D.; KOJOVIC, T. **Mineral Comminution Circuits** – **Their Operation and Optimisation**. Brisbane – AU:Napier Munn, T.J. Ed., JKMRC, 1996.

NR-33 **Segurança e Saúde nos Trabalhos em Espaços Confinados**, Publicação D.O.U, Portaria SIT n.o 202 22/DEZ/2006.

PRATT, V, **Direct least-squares fitting of algebraic surfaces**. Computer Graphics 21 145–152. MR0987653, 1987.

ROWLAND Jr, C.A. Selection of rod mills, ball mills, pebble mills and regrind mills. Design and installation of comminution circuits (Eds: Mular and Jergernsen), SNE/AIME, New Tork, 393-438, 1982.

ROWLAND Jr, C.A; KJOS, D.M. **Rod and ball mills**. Ch12 in Mineral Processing Plant, (Eds Mular and Bhappu), SME, 883pp, 1978.

S.M. ROBINSON, **Fitting spheres by the method of least squares** Commun. Assoc. Comput. Mach. 4, 491, 1961.

TAGGART, A.F. Handbook of mineral dressing. Wiley, New York, 1945.

TAUBIN, G. Estimation of planar curves, surfaces and nonplanarspace curves defined by implicit equations, with applications to edge and range image segmentation. IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intelligence 13 1115–1138, 1991.

Apêndice A – Demonstração do método algébrico por Bullock

Dado um conjunto de pontos em \mathbb{R}^2 , dito $\{(x_i, y_i) | 0 \le i < N\}$, define-se:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i}^{N} x_{i} \qquad \qquad e \qquad \qquad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i}^{N} y_{i}$$

Aplicando a transformação $u_i=x_i-\bar{x}$, $v_i=y_i-\bar{y}$ resolve-se o problema primeiramente nas coordenadas (u,v) e posteriormente retorna-se às coordenadas (x,y). A circunferência terá centro (u_c,v_c) e raioR.

O objetivo é minimizar $S = \sum_{i=1}^{N} (g(u_i, v_i))^2$, onde $g(u, v) = (u - u_c)^2 + (v - v_c)^2 - \infty$ e $\infty = R^2$ e portanto diferenciar $S(\infty, u_c, v_c)$.

Logo,

$$\frac{\partial S}{\partial \propto} = 2 \sum_{i=1}^{N} g(u_i, v_i) \frac{\partial g}{\partial \propto} (u_i, v_i) = -2 \sum_{i=1}^{N} g(u_i, v_i)$$

$$\text{nto,} \qquad \frac{\partial S}{\partial \propto} = 0 \qquad \text{se} \qquad \sum_{i=1}^{N} g(u_i, v_i) = 0 \tag{A1.1}$$

Portanto,

Continuando,

$$\frac{\partial S}{\partial u_c} = 2 \sum_{i=1}^{N} g(u_i, v_i) \frac{\partial g}{\partial \alpha} (u_i, v_i) =$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{N} g(u_i, v_i) 2(u_i - u_c) (-1) =$$

$$= -4 \sum_{i=1}^{N} u_i g(u_i, v_i) + 4u_c \sum_{i=1}^{N} g(u_i, v_i)$$

Da equação (A1.1), $\frac{\partial S}{\partial u_c} = 0 \qquad \qquad \text{se:} \qquad \qquad$

$$\sum_{i=1}^{N} u_i g(u_i, v_i) = 0 (A1.2)$$

De forma análoga,
$$\frac{\partial S}{\partial v_c} = 0$$
 se:

$$\sum_{i=1}^{N} v_i g(u_i, v_i) = 0 (A1.3)$$

Expandindo a equação (A1.2) tem-se:

$$\sum_{i=1}^{N} u_i \left[u_i^2 - 2u_i u_c + u_c^2 + v_i^2 - 2v_i v_c + v_c^2 - \infty \right] = 0$$

Adotando $S_u=\sum_{i=1}^N u_i, S_{uu}=\sum_{i=1}^N u_i^2$, etc. Então a pode-se escrever na notação:

$$S_{uuu} - 2u_c S_{uu} + u_c^2 S_u + S_{uvv} - 2v_c S_{uv} + v_c^2 S_u - \propto S_u = 0$$

Como $S_u = 0$, simplifica-se:

$$u_c S_{uu} + v_c S_{uv} = \frac{1}{2} (S_{uuu} + S_{uvv})$$
 (A1.4)

De forma análoga, como $S_{v}=0$, tem-se:

$$u_c S_{uv} + v_c S_{vv} = \frac{1}{2} (S_{vvv} + S_{vuu})$$
 (A1.5)

Através das equações (A1.4) e (A1.5), resolve-se um sistema linear para solucionar (u_c, v_c) .

Naturalmente, $(x_c, y_c) = (u_c, v_c) + (\bar{x}, \bar{y}).$

A partir da equação (A1.1) pode-se encontrar R, lembrando que $S_u=S_v=0$ e, portanto:

$$\propto = u_c^2 + v_c^2 + \frac{S_{uu} + S_{vv}}{N}$$

E, obviamente, $R = \sqrt{\propto}$