SANDRO BERNARD MOREIRA DE FREITAS

**Planejamento estocástico de lavra: metodologias de simulação,
otimização e gestão de risco para a mina do futuro**

São Paulo

2015

SANDRO BERNARD MOREIRA DE FREITAS

**Planejamento estocástico de lavra: metodologias de simulação,
otimização e gestão de risco para a mina do futuro**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Mestre em
Engenharia.

São Paulo

2015

SANDRO BERNARD MOREIRA DE FREITAS

**Planejamento estocástico de lavra: metodologias de simulação,
otimização e gestão de risco para a mina do futuro**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Mestre em
Engenharia.

Área de Concentração:

Engenharia Mineral

Orientador:

Prof. Dr. Giorgio F. C. de Tomi

São Paulo

2015

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Freitas, Sandro

Planejamento Estocástico de Lavra: Metodologias de Simulação,
Otimização e Gestão de Risco para a Mina do Futuro / S. Freitas -- versão corr.
- São Paulo, 2015.
179 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São
Paulo. Departamento de Engenharia de Minas e Petróleo.

1.Simulação Estocástica 2.Otimização 3.Risco Geológico 4.Programação
Linear 5.Geoestatística I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.
Departamento de Engenharia de Minas e Petróleo II.t.

Dedico este trabalho à minha família.

Aos meus pais que me propiciaram as bases para chegar até este ponto.

À Claudiane, minha esposa, e filhas, Samara, Soraya e Sofia, pela compreensão e apoio.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece o apoio da FAPESP por meio do processo **no. 2010/51287-0**, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Ao professor Giorgio de Tomi pela orientação e estímulo, a toda equipe do LAPOL e à VALE S.A pela oportunidade de participação no projeto de pesquisa Min-AO (*Open pit mine asset optimization*).

Aos professores Marcelo Rocha do Instituto de Geociências da USP pela sua valiosa contribuição na área de geoestatística e à professora Ana Carolina Chierigati pelo apoio na área de reconciliação proativa.

À equipe da mina do Sossego, sobretudo das áreas de planejamento de lavra e geologia de longo e curto prazo, por facilitar o acesso às informações que suportaram a pesquisa e testes práticos do estudo.

À equipe da Mintec Prominas pelo suporte na utilização do *software MineSight MSSO*.

Em suma, a todos que contribuíram direta e indiretamente para a realização deste trabalho de pesquisa.

"The difficulty lies not so much in developing new ideas as in escaping from old ones..."

John Maynard Keynes

RESUMO

O desempenho operacional e econômico de empreendimentos de mineração é de suma importância para a sustentação dos níveis de produção demandados, sendo imprescindível um nível de governança capaz de prever e gerenciar eficazmente as incertezas e riscos inerentes ao processo de lavra, sejam eles geológicos, operacionais ou financeiros. O recente desenvolvimento de tecnologias e do conceito de “mina do futuro” ou “mina autônoma” indica a possibilidade de captura de dados através de sensores variados e do uso destes dados para geração de simulações estocásticas, para otimização tanto do ativo físico quanto do aproveitamento do recurso ou ativo mineral, minimizando riscos e custos. O planejamento estocástico de lavra vem nos últimos anos apresentando potenciais ferramentas para esse nível de gerenciamento de riscos na mineração, contudo sua resposta em diversos tipos de depósito é ainda pouco conhecida e carece de esforços de pesquisa e desenvolvimento. A presente pesquisa tem o objetivo de descrever essas abordagens probabilísticas de planejamento comparando com as tradicionais (determinísticas), definir procedimentos de aplicação desses conceitos na indústria, integrados em um sistema de gestão, quantificar seus impactos no desempenho de uma operação mineira e gerar informações para a comunidade acadêmica e técnica da indústria mineral preocupados com o futuro da mineração, quanto à aplicabilidade efetiva de técnicas como planejamento estocástico de lavra e simulação de lavra, englobando incertezas relativas ao ativo mineral e ativo físico da operação mineira. Para tanto, foi realizada inicialmente uma extensa pesquisa bibliográfica em relação ao tema proposto, destacando os pontos de maior relevância, permitindo então o desenvolvimento de uma metodologia de gestão que auxilie, de forma eficaz, o processo de tomada de decisões referentes à otimização de ativos em minas a céu aberto. Visando-se atingir tais objetivos, serão realizados testes piloto em uma mina na Província Mineral de Carajás-PA. A Mina do Sossego, em operação desde 2004, é a primeira mina de cobre da VALE, está entre as maiores minas brasileiras e será o foco do estudo da presente pesquisa.

Palavras-chave: Simulação Estocástica. Otimização. Risco Geológico. Programação Linear. Geoestatística.

ABSTRACT

Both operational and economic performance of mining projects are critical for sustaining the demanded production levels, being indispensable a level of governance able to predict and effectively manage the uncertainties and risks inherent to mining process such as geological, operational or financial risks. Recent developments of technologies and concepts of “mine of the future” or “Autonomous mine” indicates a possibility of on-line data acquisition by a number of sensors and the use of such data to generate stochastic simulations for optimization of equipments assets and mineral resource, minimizing risks and costs. Stochastic mining planning recently have been presenting potential tools for this level of risk management in mining, but the response of such approach in various types of deposit is still poorly understood and requires research and development efforts. This research aims to describe these probabilistic mine planning approaches comparing to traditional approaches (deterministic), to define procedures for implementation of these concepts in the industry in an integrated management system, to quantify their performance impacts of a mining operation and to generate information for the academic community and mineral industry technical staff concerned about the future of mining, as the applicability of planning techniques such as stochastic mining planning and discrete event simulation, covering uncertainties related to mineral assets and physical assets (equipments) of the mining operation. Thus, initially will be performed an extensive literature review regarding the proposed theme, highlighting the points of major relevance, thus allowing the development of a management methodology that effectively assists the decision making process regarding asset optimization in open pit mines. Aiming to achieve these goals, pilot tests will be performed at an operating mine in the Carajás Mineral Province-PA. The Sossego Mine, in operation since 2004, is the first VALE copper mine, is among the largest Brazilian mines and will be the focus of the case study of this research.

Keywords: Stochastic Simulation. Optimization. Geological Risk. Linear Programming. Geostatistics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Visão da mina do futuro e suas características chaves.....	25
Figura 2 – Tendência da tecnologia e processos necessários para mina do futuro ..	28
Figura 3 – Principais estágios do planejamento de lavra e o papel do engenheiro de planejamento.....	31
Figura 4 – Modelo de reconciliação proativa	37
Figura 5 - Princípio de construção do método de bandas rotativas.....	47
Figura 6 - Ilustração do cálculo do ponto simulado, no método de bandas rotativas.	47
Figura 7 – Sobreposição das vizinhanças para um grupo de quatro pontos a serem simulados	52
Figura 8 – Simulação direta em suporte de blocos. O bloco 19 é simulado utilizando-se os dados condicionantes e os blocos previamente simulados em sua vizinhança.	54
Figura 9 - Diferentes padrões apresentam o mesmo variograma	57
Figura 10 – Exemplo de construção de árvore de busca para uma imagem teste binária, vermelho (minério) branco (estéril).....	59
Figura 11 – Ponto x_0 a ser simulado, considerando que os valores nos pontos $x_1, x_2, \dots, x_n$ são conhecidos.....	60
Figura 12 – Simulações de porosidade em um reservatório fluvial geradas pelo algoritmo HOSIM.....	63
Figura 13 – Classificação dos problemas de otimização.....	66

Figura 14 – Relação entre incerteza e o valor do Projeto	80
Figura 15 - Estimativa de recursos e planejamento de lavra, do ponto de vista tradicional e pela visão orientada a gestão de risco.....	81
Figura 16 – Estágios da metodologia de otimização de sequenciamento de lavra baseado em “simulated annealing”	90
Figura 17 – Tipos litológicos, mineralização e zonas de alteração hidrotermal dos depósitos do Sequeirinho e Sossego.	100
Figura 18 - Localização da cava do Sequeirinho, Mina do Sossego	101
Figura 19 – Metodologia de planejamento estocástico de lavra englobando o ativo físico (equipamentos) e o ativo mineral em relação à metodologia determinística (tradicional).....	105
Figura 20 – Metodologia de simulação e otimização orientada ao risco	107
Figura 21 – Fluxograma das etapas de planejamento estocástico aplicadas à gestão dos ativos físicos (equipamentos) e ativo mineral (distribuição dos teores de cobre na jazida).....	108
Figura 22 – Gráfico de probabilidade do tempo de manutenção corretiva em um turno	110
Figura 23 – Estudo de estacionaridade para definição dos agrupamentos dos dados	111
Figura 24 – Exemplo de teste de ajuste de curvas de distribuição de probabilidades para escavadeira à cabo P&H 4100 XPB (ES3001).....	113
Figura 25 – Escavadeira PC2000, Resultado das simulações de DF e comparativo com a disponibilidade real executada.	118

Figura 26 - Escavadeira PC2000, Resultado das simulações de produção e comparativo com a produção real executada.....	118
Figura 27 - Escavadeira P&H 4100 XPB, Resultado das simulações de DF e comparativo com a disponibilidade real executada.	119
Figura 28 - Escavadeira P&H 4100 XPB, Resultado das simulações de produção e comparativo com a produção real executada.....	119
Figura 29 – Distribuição de possíveis valores de movimentação para os períodos chuvosos e secos em comparação com o a movimentação executada em 2013 ...	120
Figura 30 – Sensibilidade da produção para diferentes variáveis de entrada da simulação	121
Figura 31 – Movimentação real e simulada (<i>Box-plot</i>) para os períodos chuvoso e seco.....	122
Figura 32 – Valores simulados para a variável cobre e a média do modelo estimado por krigagem	124
Figura 33 – Validação da continuidade espacial das simulações com relação ao modelo variográfico usado e variograma experimental das principais direções anisotrópicas definidas, Depósito Sequeirinho.....	125
Figura 34 – Localização das amostras e histogramas de teores de cobre nos bancos de dados: sondagem exploratória (a, c), e perfuratrizes (b, d), utilizados na estimativa dos modelos de longo e curto prazo respectivamente.	127
Figura 35 – Cava do Sequeirinho - teores de cobre, Modelo de blocos de longo prazo (a), modelo de curto prazo (b), amostras de perfuratriz (c) e três simulações estocásticas (Sim 02, Sim 10 e Sim 30).....	128
Figura 36 – Histórico de reconciliação dos teores de cobre no modelo do longo prazo, modelo de curto prazo e teor real lavrado (a) e histórico de dos índices de aderência F1, F2 e F3 (b).....	131

Figura 37 – Geometrias de final de ano da cava do Sequeirinho, período de 2003 a 2012.	134
Figura 38 – Fator F1 de reconciliação, teores estimados nos modelos de longo e curto prazo e espectro de incerteza mapeado pelas simulações estocásticas, ao longo da direção Leste-Oeste, depósito do Sequeirinho.	135
Figura 39 – Mapas do Fator F1 da reconciliação e Coeficiente de variação condicional (CCV)	137
Figura 40 – Histórico de reconciliação dos teores e perfil de risco das simulações estocásticas, avanços de lavra realizados entre 2004 e 2012.	139
Figura 41 – Depósito do Sequeirinho, banco 128RL, Distribuição do valor econômico (V_i), coeficiente de variação do valor econômico (CEV_i) e classificação de risco dos blocos (CR_{iski}).	144
Figura 42 – Modelo de otimização usando o software MSSO	146
Figura 43 – Modelo de destinação no sequenciamento de lavra	147
Figura 44 – Teores de cobre, perfil de risco e reconciliação entre modelos simulados e estimados. Sequenciamento tradicional versus baseado no risco	154
Figura 45 – Sequenciamento dos polígonos considerando classes de risco. Na escala, identificação dos períodos.	155
Figura 46 – Perfil de risco dos métodos de otimização, conteúdo metálico - fator de risco normalizado pela média das simulações.	158
Figura 47 – Quantidades lavradas de minério e estéril	159
Figura 48 – Relação estéril-minério obtida, sequenciamento tradicional versus baseado no risco	160

Figura 49 – Fluxo de caixa descontado acumulado (FCDA) resultante de cada método de otimização	160
--	-----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Frota de equipamentos utilizada no estudo.....	109
Tabela 2 – Ajuste das funções de probabilidades para tempos de manutenção corretiva por equipamento.....	114
Tabela 3 - Ajuste das funções de probabilidades para produtividade horária por equipamento.....	114
Tabela 4 - Ajuste das funções de probabilidades para tempo improdutivo por mês.....	114
Tabela 5 – Critério de classificação de risco baseado nos valores de CEV_i	142
Tabela 6 – Valores de restrição para capacidade de movimentação por período, cenários simulados.....	149
Tabela 7 – Valores do custo de risco na lavra ($cmrskm, rt$) e beneficiamento ($pmrskm, rt$) adotados para penalização das incertezas na otimização.	150
Tabela 8 – Parâmetros da otimização.....	151

SUMÁRIO

1. Introdução	18
1.1. Objetivos e meta	20
1.2. Organização da dissertação	20
2. Revisão da Literatura	22
2.1. Automação na Indústria Mineral	22
2.1.1. Pesquisa e Desenvolvimento	26
2.1.2. Estabelecimento da Cultura	28
2.2. Planejamento de Lavra Convencional	29
2.2.1. Planejamento estratégico	31
2.2.2. Planejamento de longo prazo	33
2.2.3. Planejamento de curto prazo	34
2.2.4. Técnicas de reconciliação	35
2.3. Simulação	37
2.3.1. Modelagem da Simulação	38
2.3.2. Simulação de Monte Carlo	40
2.3.2.1. Processos estocásticos	40
2.3.3. Simulação Geoestatística	41
2.3.3.1. Turning Bands (TB)	44
2.3.3.2. Simulação Sequencial Gaussiana (SGS)	47
2.3.3.3. Simulação Sequencial de Indicadores (SIS)	51
2.3.3.4. Simulação sequencial gaussiana generalizada de grupo (GSGS)	52
2.3.3.5. Simulação Direta de Bloco (DBSim)	53
2.3.3.6. Geoestatística de múltiplos pontos	55

2.3.3.7. Estatísticas Espaciais de Alta Ordem (HOSS).....	59
2.4. Otimização.....	63
2.4.1. Conceito e Classificação dos Problemas de Otimização	64
2.4.2. Programação Linear.....	66
2.4.3. Programação Inteira.....	67
2.4.4. Programação Estocástica	69
2.4.4.1. Modelo de Recurso com Dois Estágios	71
2.5. Pesquisa Operacional Aplicada ao Planejamento de Lavra	73
2.5.1. Modelos de Sequenciamento de Lavra	74
2.6. Planejamento Estocástico de Lavra.....	78
2.6.1. Planejamento estratégico e de longo prazo	82
2.6.1.1. Otimização de cava e “pushbacks”	82
2.6.1.2. Estratégia de teor de corte.....	83
2.6.1.3. Sequenciamento de Lavra	84
2.6.2. Planejamento de curto prazo	86
2.7. Programação Matemática Orientada ao Risco.....	86
2.7.1. Simulated Annealing	87
2.7.2. Programação estocástica.....	90
2.8. Simulação em Problemas de Mineração.....	92
2.8.1. Confiabilidade e disponibilidade	94
2.8.2. Simulação de operações mineiras	96
3. Materiais e Métodos.....	99
3.1. Mina do Sossego	100
3.1.1. Geologia.....	100

3.1.2. Operação e planejamento da produção	101
3.2. Definição do problema	103
3.3. Metodologia de Simulação-Otimização	105
3.4. Simulação da Capacidade Produtiva	109
3.4.1. Análise dos dados	110
3.4.2. Determinação da distribuição de probabilidade dos eventos	112
3.4.3. Simulação da produção.....	114
3.4.3.1. Validação do modelo de simulação	116
3.4.4. Análise de risco quanto à capacidade produtiva	120
3.5. Simulação geoestatística: Modelo de incerteza espacial dos teores.....	123
3.6. Analise de risco e reconciliação dos modelos simulados.....	125
3.6.1. Avaliação dos dados disponíveis	126
3.6.2. Inspeção visual dos modelos	127
3.6.3. Avaliação do histórico de reconciliação da mina	129
3.6.4. Coeficiente de variação condicional.....	131
3.6.5. Quantificação da aderência entre os modelos	133
3.6.6. Resultados das validações e discussão.....	134
3.6.7. Comentários sobre os resultados da validação.....	140
3.7. Programação matemática estocástica.....	141
3.7.1. Cálculo do valor dos blocos	141
3.7.2. Classificação dos materiais baseada no risco.....	142
3.8. Otimização do sequenciamento da produção.....	145
3.8.1. Otimização tradicional	146
3.8.2. Otimização baseada no risco	148

4. Resultados da otimização	152
4.1. Perfil de risco na alimentação da planta.....	152
4.2. Sequência de lavra	155
4.3. Risco normalizado	156
4.4. Quantidades extraídas e valor obtido	158
5. Discussão.....	161
6. Conclusão e Recomendações	164
7. Referências bibliográficas	167

1. Introdução

A expansão econômica na China tem apresentado desaceleração em função de menores taxas de investimentos. Além disso, a recuperação da Europa e dos Estados Unidos após a crise financeira internacional dos últimos anos continua sendo apenas moderada. Uma das consequências desse cenário de incerteza e de crescimento mais fraco é uma demanda reduzida por commodities, o que leva as empresas de mineração a otimizar custos e aumentar sua eficiência operacional.

A crescente utilização de métodos de simulação na indústria mineral aponta uma tendência de migração de modelos determinísticos para modelos estocásticos de planejamento e gestão de lavra. Esta migração está em acordo com a expectativa de que no futuro, a mineração deve operar de forma autônoma, coletando dados através de dispositivos eletrônicos, alimentando banco de dados que serão a base para programas especialistas em análise probabilística que quantifiquem a variabilidade inerente a tais dados, além de simuladores que incorporem tais incertezas no processo de tomada de decisão de lavra. Nesse contexto, a incorporação dos modelos estocásticos de planejamento de lavra na indústria mineral é de suma importância no sentido de familiarizar geólogos e engenheiros com essa nova perspectiva, em que os riscos e os potenciais de ganhos decorrentes da incerteza dos parâmetros chaves da operação de lavra devem ser usados para se tirar proveito e maximizar o aproveitamento sustentável do ativo ou reserva mineral. No que diz respeito ao ativo físico, sobretudo à frota de equipamentos de lavra, a simulação estocástica vem mostrando um grande potencial como ferramenta na determinação da confiabilidade mecânica dos equipamentos, além de proporcionar aos engenheiros mecânicos ferramentas que permitam a melhor combinação da estratégia de manutenção e substituição dos equipamentos.

O principal problema a ser estudado e pesquisado no presente trabalho é a incorporação de conceitos e mecanismos de gestão orientada ao risco no processo de lavra na “mina do futuro”; como esses mecanismos vêm sendo desenvolvidos e quais as perspectivas de implementação dessas técnicas na indústria mineral

brasileira a médio e longo prazo. O presente trabalho propõe um esforço de pesquisa para responder a três principais questões:

- 1. O planejamento de lavra pode ser aprimorado com uma abordagem estocástica?**
- 2. É possível fazer a análise e gestão de riscos utilizando simulação e otimização no planejamento estocástico?**
- 3. Qual o papel do planejamento estocástico na mina do futuro?**

O método de pesquisa adotado consiste em aplicar uma abordagem estocástica no planejamento de lavra para simular teores e indicadores operacionais. Dessa forma, foram gerados múltiplos cenários para representar a variabilidade dos parâmetros simulados e comparar os resultados com a abordagem tradicional (determinística) baseada na reconciliação entre planejado e realizado. Posteriormente desenvolveu-se um algoritmo para cálculo do risco geológico dos blocos por meio de medida de incerteza do teor, base de um modelo de classificação do risco geológico que possibilite realizar a otimização do sequenciamento de lavra orientada ao risco, pela definição de uma matriz de custos penalizantes para cada categoria ou classe de risco.

No contexto da mina do futuro é de suma importância estudar o formato dos dados de desempenho operacional da mina e seu aproveitamento no planejamento estocástico de lavra, além de desenvolver métodos de análise dos dados de desempenho operacional para utilização no planejamento de lavra que possibilitem uma discussão sobre as alternativas de automação para captura, interpretação e análises dos dados de desempenho.

A abordagem desenvolvida foi aplicada no ciclo de gestão e planejamento de uma mina para avaliar as vantagens, impactos e possíveis limitações técnico-operacionais atuais de implementação, bem como os potenciais de automação desses processos futuramente, considerando o contexto da “Mina do Futuro”.

1.1. Objetivos e meta

A meta da presente pesquisa é explorar a possibilidade de uso de abordagens de planejamento de lavra que incorporem a incerteza geológica e a variabilidade de indicadores operacionais durante o sequenciamento da produção, definindo uma sequência que retorne o máximo valor econômico e reduza a variabilidade e consequentemente o risco de não alcance de metas, bem como o potencial de aplicação do planejamento estocástico de lavra na mina do futuro. Para atingir essa meta os seguintes objetivos devem ser alcançados:

- Estudar os conceitos e princípios de planejamento estocástico aplicados à indústria mineral.
- Estudar os conceitos de automação em mineração e a visão da “Mina do Futuro”, correlacionando-os com a importância de evolução no uso das técnicas de simulação e otimização na indústria mineral.
- Propor uma metodologia para aplicação do planejamento estocástico no planejamento de lavra para minas a céu aberto.
- Aplicar a abordagem proposta a uma operação de mina a céu aberto para avaliar os benefícios do planejamento estocástico de lavra na operação geral da mina.
- Quantificar os impactos do uso do planejamento estocástico de lavra na gestão de ativos (físicos e minerais) em minas a céu aberto.

1.2. Organização da dissertação

A presente dissertação está organizada da seguinte maneira:

Capítulo 1: Introdução ao tema abordado na pesquisa, com foco na motivação, objetivos e metas do trabalho, bem como apresentação da organização da dissertação.

Capítulo 2: Uma revisão da literatura com respeito aos tópicos centrais da pesquisa. São detalhadas as etapas de planejamento de lavra e análise de risco, otimização,

simulação, automação e o conjunto de técnicas que compõem o planejamento estocástico de lavra. Introdução ao problema de planejamento de lavra na “mina do futuro” e sua relação com processos de coleta autônoma de dados, simulação, otimização e automação das etapas de lavra.

Capítulo 3: Introduz uma abordagem de planejamento estocástico de lavra em múltiplos estágios, aplicada no sequenciamento de lavra da principal cava da mina de cobre do Sossego (VALE S.A), no contexto do planejamento de médio prazo. A metodologia proposta é descrita em seus vários estágios e são discutidas as diferenças, vantagens e desvantagens com relação às abordagens tradicionais.

Capítulo 4: são apresentados os resultados da abordagem proposta, enfatizando as informações geradas e como tais informações podem suportar a tomada de decisão orientada ao risco ao longo do ciclo de planejamento de lavra.

Capítulo 5: Discussão abordando a aplicação de simulação estocástica na indústria mineral, análise de risco no ciclo de planejamento de mina e suas contribuições para o planejamento da “mina do futuro”.

Capítulo 6: Conclusões gerais e recomendações para trabalhos futuros.

2. Revisão da Literatura

2.1. Automação na Indústria Mineral

Operações autônomas vêm se tornando cada vez mais atrativas na cadeia de produção mineral, sejam caminhões autônomos, perfuratrizes e carregadeiras LHD (*Load-Haul-Dump*) operadas por controle remoto ou aplicações de logística automatizadas. As operações mineiras vêm crescentemente introduzindo esses tipos de equipamentos e soluções, focando melhorar indicadores de desempenho de saúde e segurança, mas principalmente buscando atrair e reter trabalhadores altamente capacitados para áreas frequentemente remotas e de mão de obra qualificada escassa.

A mina do futuro é descrita como uma operação autônoma em que todas as operações unitárias funcionam sob o gerenciamento de um sistema de controle central. Perfuratrizes são guiadas automaticamente e durante a perfuração são coletados dados químicos que caracterizem a qualidade dos minérios lavrados. Escavadeiras terão sensores e câmeras embarcadas que possibilitarão o direcionamento nas frentes de lavra. Caminhões serão guiados via satélite utilizando o sistema GPS (*Global Positioning System*). Todos os índices operacionais dos equipamentos serão monitorados, armazenados e utilizados na otimização do sequenciamento das operações de lavra, garantindo maior produtividade, baixos custos e risco mínimo de acidentes.

A visão, segundo os engenheiros da ACFR (*Australian Centre for Field Robotics*, da Universidade de Sydney, Austrália), é que em 10 anos a automação de operações mineiras inclua (Ramos, 2008):

- Ferramentas estatísticas e probabilísticas que irão permitir o mapeamento do minério por sensores (teores, feições estruturais, etc.) com precisão de centímetros;

- Equipamentos de escavação serão equipados com sensores usados para fornecer visualizações em tempo real da face da bancada lavrada;
- Novos sensores e algoritmos de compilação de dados serão utilizados para atualizar e validar o modelo de minério em tempo real;

Um estudo conceitual (Bäckblom, 2010) realizado com o objetivo de desenvolver uma visão da mina do futuro para 2030, comum para mineradoras, empresas globais fornecedoras de soluções para automação e pesquisadores da área de engenharia e tecnologia mineral, com foco em lavra subterrânea, incluiu os seguintes pontos relativos à visão da mineração do futuro:

- a) alcançar acidente zero;
- b) contribuir para mineração sustentável através da redução do consumo de energia, emissão de CO₂ e redução de perdas e diluição na lavra;
- c) manter a competitividade através de investimentos em pesquisa, desenvolvimento e inovação que transformarão a indústria mineral de puramente mecanizada para uma indústria com total controle dos processos.

A Figura 1 ilustra a visão desenvolvida no referido estudo, onde são listadas as seguintes características chaves da mina do futuro:

1. **Sala de controle:** a sala de controle recebe informações processadas online da qualidade do minério, do pessoal técnico e das máquinas e equipamentos, o que torna possível o controle e ajustes finos na operação como um todo (controle de processo e controle do produto), desde a caracterização do minério até o produto final. Sensores, câmeras e técnicas de imageamento permitem o acompanhamento em tempo real da operação na sala de controle ou em qualquer local que seja necessário.
2. **Nenhuma presença humana nas áreas de produção:** Todos os processos da operação, incluindo a caracterização das rochas, são controlados remotamente ou automatizados. Robôs especializados são desenvolvidos

para realizar a manutenção preventiva dos equipamentos e o reestabelecimento seguro das operações. A manutenção dos robôs, bem como o reparo de equipamento quando necessário, são realizados em câmaras subterrâneas estruturalmente reforçadas e seguras. Todos os equipamentos subterrâneos são elétricos e do uso de diesel é totalmente desnecessário.

3. **Escavação mecanizada contínua:** Fluxo contínuo é uma questão fundamental para otimização da mineração e maior automatização. A mineração do futuro é um processo contínuo, o que significa que operações mecânicas contínuas também são usadas em tipos de rocha competentes.
4. **Pré-concentração:** O estéril é separado em subsuperfície para minimizar a energia para o transporte, bem como o impacto ambiental sobre a superfície.
5. **Caracterização mineralógica:** São utilizados sistemas que permitem o controle geometalúrgico dos minérios e produtos e a maximização do valor inerente às rochas.
6. **Caracterização estrutural:** São utilizados sistemas que descrevem as feições estruturais da rocha, auxiliando no controle do processo de lavra.
7. **Produto final:** Do ponto de vista da sustentabilidade, o estéril deve ser transformado em subproduto, a verticalização da produção deve acontecer gerando os metais (produto final) na localidade da mina, evitando o transporte desnecessário. O valor agregado gerado na localidade da mina deve contribuir pra uma melhor qualidade de vida local.

Figura 1 – Visão da mina do futuro e suas características chaves

Fonte: adaptado de Bäckblom, 2010.

Atualmente, em decorrência da incerteza associada à qualidade do minério e ao estado dos equipamentos como confiabilidade, disponibilidade e utilização, as minerações têm que operar de maneira conservadora de modo a satisfazer a demanda do seu produto e o lucro da operação. Na mina do futuro flexibilidade e agilidade serão muito mais importantes que atualmente, necessitando o planejamento integrado da operação, o processo de planejamento será cada vez mais dinâmico e reativo aos cenários operacionais da mina. Segundo Nebot (2005), o sistema de gestão de operação de lavra tende a assumir a forma de um banco de dados espaço-temporal muito abrangente que representará a estrutura física real da mina, incluindo geologia, equipamentos, layout da cava, infraestrutura de acessos, situação geotécnica dos taludes, etc.

Os engenheiros de planejamento poderão revisar e avaliar de forma dinâmica as decisões operacionais baseadas em modelos compreensivos de custo e ferramentas probabilísticas de prognóstico. Serão utilizadas tecnologias de acurado

monitoramento em tempo real para realizar o acompanhamento entre atividades realizadas e planejadas, retroalimentando informações no processo de planejamento. Essas mudanças serão possíveis devido o desenvolvimento de tecnologias que fornecerão informações precisas, de alta qualidade e em tempo real, que proporcionarão o acompanhamento do desempenho operacional em relação às metas de produção estabelecidas, além de reduzir a variabilidade da operação, tornando os equipamentos mais confiáveis e a produção mais previsível.

A operação autônoma demandará avanços na categorização dos recursos minerais, a expectativa é que existam novas ferramentas para mapeamento das frentes de lavra com exatidão de centímetros, incluindo espessura de camadas, feições estruturais, composição química, etc. Os equipamentos de escavação possuirão sensores embarcados usados para fornecer visualização on-line das frentes a serem lavradas, esses sensores serão parte integrante do sistema de gerenciamento e suas informações serão transmitidas por rede *wireless* e usados para validar e atualizar o mapa da mina em tempo real. O plano de lavra e a situação da mina estarão contidos em um ambiente que fornecerá minuto a minuto todos os dados da mina, incluindo a topografia, mapas geológicos, o progresso dos equipamentos, etc. As informações serão gerenciadas e atualizadas automaticamente de várias fontes como imagens aéreas, sensores montados em plataformas móveis, mapas dinâmicos de minério e geologia. Tal ambiente será uma evolução dos atuais sistemas de despacho.

2.1.1. Pesquisa e Desenvolvimento

Publicações internacionais especializadas (Dunbar, 2009; Ramos, 2008; Zoschke, 2001) e trabalhos na área de automação (CODELCO, 2008) vêm enfatizando e dando foco às empresas de mineração, como a Rio Tinto, que vem desde 2008, desenvolvendo um programa denominado “A Mina do Futuro”, com o plano de introduzir níveis de automação e operações remotas sem precedentes, que devem revolucionar o modo que a mineração vem sendo conduzida nos últimos cem anos.

A mina de ferro de West Angelas, na Austrália, é a segunda operação no mundo a colocar em operação a solução da Komatsu de caminhões autônomos (AHS FrontRunner). A Codelco realizou testes e avaliações iniciais desta tecnologia, entre 2005 e 2007, na mina de cobre de Radomiro Tomic (Chile).

O Centro Australiano de Robótica de Campo (Australian Centre for Field Robotics – ACFR), na Universidade de Sidney, implantou o maior Centro de Automação de Mina (Rio Tinto Centre for Mine Automation – RTCMA) com o apoio da Rio Tinto, que investiu, por um período inicial de cinco anos, cerca de US\$ 21 milhões. O objetivo deste Centro, criado em agosto de 2007 e composto por um time de vinte engenheiros vindos de seis continentes, é desenvolver e implementar a visão de uma mina totalmente autônoma e operada remotamente.

A parceria entre Komatsu e Modular Mining System vem trazendo bons resultados em termos práticos. Caminhões Komatsu 930E com o sistema *FrontRunner* vêm sendo testados em minas no Chile e na Austrália. Codelco e Rio Tinto têm relatado resultados encorajadores e de relativo sucesso.

A Caterpillar vem desenvolvendo projetos objetivando um sistema de lavra totalmente autônomo, vários estágios de desenvolvimento foram alcançados dentro dos sistemas existentes. Em outubro de 2008 a Caterpillar anunciou o desenvolvimento, em conjunto com a BHP Billiton, com a intenção de testar em 2010 uma operação de lavra autônoma. Porém, em 2009 esse acordo foi encerrado, pois metas primárias do projeto não foram alcançadas. A Caterpillar tem vários parceiros nesta área, incluindo a universidade de Carnegie Mellon e o Grupo de Robótica da Austrália.

Na Mina Brucutu, em São Gonçalo do Rio Abaixo, a Vale investiu no projeto de Perfuratriz Autônoma, equipamento capaz de se locomover e perfurar conforme um plano previamente definido, sem a necessidade de operador na cabine. O projeto entrou em teste em fevereiro de 2013 e atualmente está na fase de operação assistida. A iniciativa é parte do projeto Piloto Mina Autônoma. Com o processo autônomo de perfuração, a mineração melhora significativamente a precisão e

eficiência do processo de desmonte por explosivos, reduz o esforço das máquinas de carregamento e assegura melhoras no desempenho dos caminhões que transportam o material. Os responsáveis pelo projeto estimam um aumento da produtividade em 10% e redução de horas paradas para manutenção em 8%. Além disso, há um aumento da vida útil do equipamento e redução de custos com manutenção, peças sobressalentes e explosivos.

2.1.2. Estabelecimento da Cultura

A crescente utilização de métodos de simulação na indústria mineral aponta uma tendência de migração de modelos determinísticos para modelos estocásticos de planejamento e gestão de lavra. Esta migração está de acordo com a tendência, ilustrada na Figura 2, de que no futuro a mineração deve operar de forma autônoma, coletando dados através de dispositivos eletrônicos, alimentando banco de dados que serão a base para programas especialistas em análise probabilística que quantifiquem a variabilidade inerente a tais dados, além de simuladores que incorporem tais incertezas no processo de tomada de decisão de lavra.

Figura 2 – Tendência da tecnologia e processos necessários para mina do futuro

Fonte: Arquivo próprio

Nesse contexto, a incorporação dos modelos estocásticos de planejamento de lavra na indústria mineral é de suma importância no sentido de familiarizar geólogos e engenheiros com essa nova perspectiva, em que os riscos e os potenciais de ganhos decorrentes da incerteza dos parâmetros chaves da operação de lavra devem ser usados para se tirar proveito e maximizar o aproveitamento sustentável do ativo ou reserva mineral. No que diz respeito ao ativo físico, sobretudo à frota de equipamentos de lavra, a simulação estocástica vem mostrando um grande potencial como ferramenta na determinação da confiabilidade mecânica dos equipamentos, além de proporcionar aos engenheiros mecânicos ferramentas que permitam a melhor combinação da estratégia de manutenção e substituição dos equipamentos.

2.2. Planejamento de Lavra Convencional

A rápida proliferação da tecnologia de computador na segunda metade do século XX tem estimulado decisivamente o crescimento da indústria de mineração a céu aberto. O uso de computadores para auxiliar na análise, projeto e operação de lavra tem sido fundamental para a exploração segura e rentável de depósitos, cada vez mais profundos e de menores teores, através de métodos de lavra à céu aberto.

Maximizar o valor presente líquido (VPL) de um projeto é o objetivo comum do planejamento de mina e alcançar este objetivo através da otimização do processo de planejamento tem sido objeto de pesquisa e desenvolvimento significativo ao longo dos últimos cinquenta anos, novos desenvolvimentos continuam, sobretudo nas áreas de controle, simulação e automação dos processos. Apesar dos avanços nos algoritmos disponíveis, procedimentos e software de planejamento de mina a céu aberto, o papel do engenheiro de planejamento ainda é fundamental. É particularmente importante para o engenheiro de planejamento de lavra ter uma compreensão holística do planejamento de mina, uma vez que as diferentes atividades de planejamento são altamente interdependentes. Uma decisão em

qualquer etapa da atividade, não só vai influenciar o trabalho futuro, mas também pode exigir revisitar e rever as avaliações anteriores. Quase todas as decisões no processo de planejamento envolvem um dilema do tipo "galinha ou ovo". Isto requer que os planejadores tenham uma compreensão abrangente das potenciais implicações de suas decisões sobre fases posteriores do projeto, bem como a compreensão de se as suas decisões em um determinado estágio de planejamento demandam revisitar análises anteriores. Segundo Whittle (2011), a consequência de não se ter uma compreensão das interdependências no sistema de planejamento, pode ser um plano que atinge uma meta local em detrimento de objetivos mais amplos ou de longo prazo.

Normalmente o objetivo do planejamento de mina é produzir um plano de lavra viável, que maximiza o valor presente líquido do depósito em estudo. Em alguns casos, o objetivo pode ser diferente, podendo ser o de maximizar o fluxo de caixa de curto prazo da operação, para maximizar a oferta de emprego (por exemplo, uma mina de propriedade do governo), ou para maximizar a recuperação de recursos minerais (por exemplo, atendimento a requisitos legais). Um plano de mina viável significa que este satisfaz todas as restrições.

A mineração a céu aberto inclui restrições sociais e jurídicas (variável de acordo com o local), restrições tecnológicas (se equipamentos e processos necessários existem), restrições geométricas (precedência de lavra, áreas mínimas de trabalho, ângulos de taludes) e restrições econômicas no que diz respeito ao capital disponível. O plano é desenvolvido por uma classe técnica de funcionários tipicamente, embora não exclusivamente, engenheiros de minas e tecnólogos treinados. O planejamento de mina interage com uma variedade de outras áreas de planejamento, e é influenciado por objetivos corporativos e restringido pelas exigências regulatórias. É uma atividade constante ao longo da etapa de produção da vida de uma mina. Minas de grande porte demandam a presença de engenheiros de planejamento, no local das operações, todos os dias da semana para responder às mudanças na operação assim que elas ocorram.

Alguns aspectos do sistema de planejamento de negócios empregado por empresas de mineração são apresentados na Figura 3, com ênfase sobre o papel do planejador de mina e nas principais etapas do sistema de planejamento de lavra.

Figura 3 – Principais estágios do planejamento de lavra e o papel do engenheiro de planejamento

Fonte: adaptado de Thorley (2012)

2.2.1. Planejamento estratégico

O planejamento estratégico de mina tem como objetivo responder qual a melhor maneira de desenvolver o aproveitamento de uma jazida mineral de modo a

maximizar o VPL. O desenvolvimento de um plano estratégico deve ser o foco dos trabalhos em uma etapa de estudo conceitual de lavra e deve continuar ao longo da vida do empreendimento, desde os estudos conceituais, durante as atividades de operação e até o fechamento da mina. O planejamento estratégico estabelece o valor potencial do projeto de mineração através de:

- a. Identificação dos materiais que serão lavrados, através de uma análise de cava final, determinando a forma, extensão e profundidade da cava de exaustão;
- b. Definição da sequência de lavra ótima, isto é, a ordem de extração dos materiais;
- c. Determinação dos destinos de cada parcela dos materiais a serem lavrados, definindo se o material será tratado como estéril ou minério e qual a rota de beneficiamento dos diferentes minérios;
- d. Determinação da taxa de produção tanto da mina quanto da usina, bem como a vida útil da mina.

Esta tarefa é uma das mais desafiadoras e importantes do ciclo de planejamento de lavra, uma vez que define o suprimento de matéria prima (minério) a ser produzido durante a vida da mina (*LOM – Life-of-Mine*) e consequentemente tem impacto substancial no valor presente líquido do empreendimento.

As principais etapas do planejamento estratégico de lavra englobam:

- Análise de cava final
- Geração de cavas aninhadas (*nested pit shells*)
- Determinação de fases ou “*push-backs*”
- Determinação da escala de produção
- Definição da estratégia de teor de corte
- Definição dos princípios de fechamento de mina e recuperação ambiental
- Definição do sequenciamento de lavra

2.2.2. Planejamento de longo prazo

Segundo Thorley (2012), as atividades de planejamento de longo prazo iniciam nos estudos de pré-viabilidade e continuam ao longo da vida da mina. O objetivo ainda é a maximização do VPL do projeto, porém limitantes relacionados à execução das operações começam a ser estudadas em maior detalhe, envolvem principalmente análises no desenvolvimento de premissas, mais ênfase em análise de cenários que têm por objetivo identificar as melhores opções em termos de projeto, decisões de planejamento e maior detalhe no sequenciamento da mina e decisões táticas relacionadas à exequibilidade do plano, incluindo a frota de equipamentos requerida.

Muitas atividades realizadas durante a etapa de planejamento estratégico são revisadas no planejamento de longo prazo, porém com a diferença principal de que as premissas adotadas, relacionadas a parâmetros-chaves do planejamento de mina, são consideravelmente melhores, devido estudos de pré-produção mais detalhados e a experiência adquirida depois que a mina entra em operação, reduzindo as incertezas relacionadas às variáveis de entrada no processo de planejamento.

O planejamento de longo prazo usa o plano estratégico como base e produz, a partir deste, um plano que contém simultaneamente decisões estratégicas e táticas. Maior rigor é demandado nas atividades de planejamento, de tal forma que o plano possa evoluir do plano conceitual, com tomada de decisão menos complexas, para decisões fortemente baseadas em estudos de engenharia com análises e planejamento detalhado.

As principais etapas do planejamento de lavra de longo prazo englobam:

- Determinação da capacidade de produção
- Planejamento do *layout* da mina
- Seleção e dimensionamento de equipamentos
- Sequenciamento da lavra

- Análise de cenários operacionais e econômicos

2.2.3. Planejamento de curto prazo

O objetivo do planejamento de curto prazo é garantir que a demanda da usina de beneficiamento seja atendida (tanto de massa quanto de qualidade ou teor de alimentação), obedecendo às premissas definidas no plano de longo prazo. Assim como o planejamento de longo prazo é uma extensão do planejamento estratégico, o planejamento de curto prazo desenvolve os planos detalhados para que o plano de longo prazo seja implementado. Um planejamento de longo prazo inadequado ou pouco detalhado não raramente pode ser substituído ou complementado por um plano de curto prazo, porém um plano de curto prazo não executado devidamente pode acarretar em implicações negativas significativas para o sucesso de uma mina (Thorley, 2012).

O plano de curto prazo determina a execução do plano de longo prazo, definido em planos de orçamento anual ou quinquenal e requer menos revisões, isto é, é menos recursivo, comparado ao planejamento de longo prazo ou planejamento estratégico, sobretudo em se tratando de planos diários, semanais e mensais. A função de planejamento de curto prazo existe em minas em etapa de produção e em minas em pré-operação, assim o planejamento de curto prazo é frequentemente chamado de plano de produção ou plano operacional.

O planejamento de curto prazo compreende estágios progressivos que englobam desde planos dos primeiros doze ou dezoito meses até planos diários das operações de lavra. À medida que esses estágios evoluem maiores níveis de certeza são exigidos com relação a cronogramas de manutenção e disponibilidade dos equipamentos, demanda da usina, avanços de lavra nos bancos, avanço de depósitos e garantia da disponibilidade e flexibilidade de acesso aos bancos de lavra.

As principais etapas do planejamento de lavra de curto prazo englobam:

- Plano anual de orçamento
- Plano de lavra trimestral
- Plano de lavra mensal
- Plano de lavra semanal
- Plano de lavra diário

2.2.4. Técnicas de reconciliação

No contexto da indústria mineral, a reconciliação pode ser definida como uma comparação entre as estimativas dos modelos e a produção da usina. A prática comum de reconciliação baseia-se no cálculo do *Mine Call Factor (MCF)* e sua aplicação às estimativas dos modelos de longo e de curto-prazo, visando melhorar a previsão do desempenho de uma operação (Morley, 2003). A reconciliação é um método amplamente empregado na indústria mineral como ferramenta de controle e gerenciamento dos erros de estimativa, entre modelos de longo prazo, modelos de curto prazo e a produção efetiva da mina, expressos em fatores de aderência, com o objetivo de quantificar a capacidade de modelar o depósito e a capacidade de lavrar o depósito de forma eficiente (minimizando diluição e perdas). Uma prática adequada de reconciliação deve detectar as causas dos erros entre as estimativas dos modelos e a produção observada. Eliminando-se as causas desses erros, as estimativas tornam-se prognósticos, ou seja, seus valores tendem a se aproximar do teor e da quantidade real do minério avaliado. Este é o conceito de “reconciliação proativa”, um processo iterativo que permite a correção dos procedimentos de amostragem e de estimativa de produção, visando melhorar a previsibilidade dos modelos, sem a necessidade de aplicação de fatores às suas estimativas (Chierigati et al., 2008). A reconciliação proativa é a chave de que a empresa dispõe para demonstrar que as informações divulgadas sobre recursos,

reservas e desempenho de suas operações são precisas, acuradas e auditáveis (Morley e Thompson, 2006). O modelo de recurso mineral, estimado a partir de furos de sondagem, é reconciliado com o modelo de controle de teor, destinado a direcionar a lavra e estimado a partir de um banco de dados de alta densidade amostral, composto das análises químicas dos furos de perfuração para desmonte das frentes de lavra. Já o modelo de controle de teor (modelo de curto prazo) é reconciliado com a produção de ROM da mina.

A Figura 4 esquematiza o modelo de reconciliação proativa (Chierigati et al., 2011) e seus fatores ou indicadores:

- MCF ou *Mine Call Factor*: indica a previsibilidade do modelo de longo prazo.
- MM ou *Mine Model*: indica a consistência do modelo de longo-prazo.
- MP ou *Mine Planning*: indica a utilidade do modelo de curto-prazo para o planejamento.
- MO ou *Mine Operation*: indica o desempenho da operação de lavra.
- MR ou *Mine Reconciliation*: indica a qualidade das estimativas do modelo de longo-prazo.
- PR ou *Plant Reconciliation*: indica o desempenho da operação de beneficiamento.

Cada indicador é calculado dividindo-se o valor da variável estudada (massa, teor ou conteúdo metálico) de uma etapa pelo valor da variável na etapa anterior. Por exemplo, admitamos o conteúdo metálico Q de cobre nos modelos de longo prazo ($MLP_Q=10$ t) e curto prazo ($MCP_Q=12$ t), o indicador de consistência do modelo de longo prazo (MM) será $MM=12/10=1.2$, isto é, o modelo de curto prazo revelou 20% mais conteúdo metálico que o previsto no modelo de longo prazo. É evidente que o ideal para os indicadores é que eles se aproximem do valor 1.

Figura 4 – Modelo de reconciliação proativa

Fonte: Extraído de Chieregati et al. (2011)

2.3. Simulação

No contexto de modelagem de sistemas, uma simulação pode ser definida como um modelo de um sistema complexo que possui similitude ao sistema original e que tem o objetivo de disponibilizar previsões de determinados comportamentos do sistema modelado (Altioek e Melamed, 2007). O advento dos computadores tem estendido enormemente a aplicabilidade prática de modelos de simulação. Desde a segunda guerra mundial a simulação vem se tornando uma ferramenta indispensável em muitas atividades sistêmicas e vem sendo aplicada para estimar indicadores de desempenho para responder questões do tipo “e se” e mais recentemente para treinar operadores no uso de novos sistemas.

Segundo Chwif e Medina (2006), o termo simulação pode ser dividido em duas grandes categorias: a simulação computacional e a simulação não computacional (um protótipo de uma aeronave em escala reduzida para ser usado em um túnel de vento, por exemplo). A simulação computacional pode ainda ser classificada em três categorias básicas: simulação de “Monte Carlo”, simulação contínua e simulação de eventos discretos.

Tanto a simulação contínua quanto a simulação de eventos discretos levam em consideração a mudança de estado do sistema ao longo do tempo. A simulação

contínua é utilizada para modelar sistemas cujo estado varia continuamente no tempo e utiliza-se de equações diferenciais para cálculo das mudanças das variáveis de estado ao longo do tempo.

2.3.1. Modelagem da Simulação

Altioek e Melamed (2007) ponderam que a modelagem da simulação é uma atividade complicada que combina arte e ciência, porém, de um ponto de vista generalista, pode-se distinguir as seguintes etapas:

- a. **Análise do problema e coleta de informações:** analisar o problema em si, tendo em vista que o objetivo do projeto de simulação é a solução do problema apresentado pelo sistema em questão (ex.: minimizar ociosidade em uma frota de lavra). Esta atividade inclui a identificação de informações como parâmetros e variáveis, medidas de desempenho (KPI), relações entre parâmetros e variáveis, regras que governem a operação dos componentes do sistema, etc. Essas informações são então representadas em um fluxograma lógico, árvores de hierarquia, descrições ou outra forma adequada de representação que proporcione a análise do problema e o mapeamento de possíveis soluções.
- b. **Coleta de dados:** é necessária tanto para estimar parâmetros de entrada quanto para posterior validação do modelo de simulação.
- c. **Construção do modelo:** Uma vez que o problema está satisfatoriamente estudado e os dados necessários foram coletados, pode-se iniciar a construção do modelo de simulação e sua implementação como um programa de computador. A linguagem computacional utilizada pode ser de propósito geral (ex.: C++, Visual Basic, FORTRAN) ou uma linguagem ou ambiente de simulação (ex.: Arena, Promodel, GPSS).
- d. **Verificação do Modelo:** o objetivo nesta etapa é certificar-se de que o modelo está corretamente construído, isto é, se o modelo está de acordo com as especificações e fins definidos. É uma inspeção que compara o código do modelo com suas especificações e qualquer discrepância encontrada deve ser tratada, modificando-se o código ou as especificações.

- e. **Validação do modelo:** todo modelo deve ser visto inicialmente como uma proposta sujeita a validação. Nesta etapa é examinada a aderência do modelo aos dados empíricos (medidas do sistema real a ser modelado). Uma boa aderência do modelo significa que um conjunto de indicadores chaves, estimados pelo modelo, condizem com os observados no sistema real. Qualquer discrepância significativa pode sugerir que o modelo proposto é inadequado considerando as propostas do projeto, sendo necessárias mudanças. Na prática é comum realizar vários ciclos de construção, verificação e modificação do modelo até que uma boa aderência seja obtida.
- f. **Projeto e realização de simulações experimentais:** com o modelo validado, deve-se realizar simulações experimentais para estimar o desempenho do modelo, ajudar a resolver o problema do projeto e suportar tomadas de decisão. O analista seleciona um número de cenários e executa a simulação para colher percepções sobre seu funcionamento. Para atingir a confiabilidade estatística suficiente nas medidas de desempenho relacionadas com o cenário, cada cenário é replicado (executado várias vezes, sujeitas a diferentes sequências de números aleatórios).
- g. **Análise dos resultados:** nesta etapa as medidas de desempenho estimadas são submetidas a uma completa análise lógica e estatística. Um problema típico em simulação de sistemas produtivos é identificar a melhor entre uma série de alternativas concorrentes. A realização de testes de inferência estatística pode determinar se um dos projetos de simulação alternativos apresenta medidas de desempenho melhores, sendo assim selecionado como potencial melhor cenário.
- h. **Recomendações finais:** finalmente, as análises dos resultados serão a base da formulação de recomendações finais para a solução do problema do sistema em estudo.

2.3.2. Simulação de Monte Carlo

A Simulação de Monte Carlo é capaz de incorporar o caráter estocástico de um sistema real através da amostragem de valores aleatórios de uma distribuição específica (histograma). Tais modelos de simulação utilizam-se de geradores de números aleatórios, uniformemente distribuídos, para simular sistemas físicos ou matemáticos complexos (Altiok e Melamed, 2007). A partir dos anos 70 os métodos de simulação não condicional eram bem conhecidos e usados em muitos campos da engenharia, particularmente na engenharia elétrica (Godoy, 2003).

2.3.2.1. Processos estocásticos

Segundo Altiok e Melamed (2007), em modelagem de sistemas, um processo estocástico é um conjunto de variáveis aleatórias dependentes do tempo, $\{X_t\}_{t \in T}$, com um espaço comum de estados S , pertencente a um espaço comum de probabilidade. A medida ou função de densidade de probabilidade (*pdf*) associada é chamada de **lei de probabilidade** do processo e o conjunto dos tempos, T , pode ser discreto ou contínuo, tipicamente na forma $T = \{0, 1, \dots, n\}$ ou $T = [0, \theta]$, onde θ pode ser tanto finito quanto infinito. Processos estocásticos são largamente utilizados para modelagem de fenômenos aleatórios, como por exemplo, o nível de estoque de uma pilha de minério no momento t , tempos de atividades de lavra, tempos de ciclo de equipamentos ou filas em um sistema de transporte.

Um processo estocástico é dito estritamente estacionário se a função de distribuição de probabilidade se mantém invariável escolhidos quaisquer instantes finitos. Abordagens geoestatísticas são baseadas no conceito de modelos de funções aleatórias espaciais do fenômeno (Kolmogorov, 1950; Yaglom, 1962; Whittle, 1963). O conjunto de amostras de um atributo dentro de um depósito mineral pode ser considerado como uma realização particular do conjunto de variáveis aleatórias, chamadas de função aleatória ou processo estocástico (Goovaerts, 1997; Chilès e Delfiner, 1999).

2.3.3. Simulação Geoestatística

A simulação geoestatística, também chamada de simulação estocástica, originalmente apresentada por Matheron (1973), como método de quantificação de incerteza, é a extensão espacial do conceito de simulação de Monte Carlo (Vann et al, 2002), isto é, além de reproduzir o histograma dos dados do sistema real a simulação geoestatística também objetiva reproduzir a variabilidade espacial dos dados, normalmente caracterizada por um modelo de autocorrelação espacial, chamado variograma.

Uma característica chave dos modelos de simulação geoestatística (contrário aos modelos de estimativa geoestatística como a krigagem) é que uma família ou sistema de realizações do modelo é gerado, não uma única estimativa (*best estimate*).

Se as simulações honram também os valores dos dados em suas posições no espaço elas são denominadas “simulações condicionais” (Vann et al, 2002). Há uma distinção clara entre os métodos que realizam esse condicionamento em um único processo, o condicionamento “a priori” (ex.: simulação sequencial gaussiana), daqueles nos quais o condicionamento é realizado em uma etapa posterior de krigagem, o condicionamento “a posteriori” (ex.: *turning bands*).

A Simulação condicional de dados geológicos espacialmente dependentes, como teores em um depósito mineral, foi introduzida na mineração nos anos 70. Na última década o uso de simulações condicionais para fins de quantificação de riscos em projetos de mineração vem ganhando particular importância devido à extensa aplicação destes métodos em pesquisas na área de engenharia mineral e em menor proporção, porém de forma crescente, com implementação, em casos reais, na indústria. Uma vez quantificado o espectro de incerteza do depósito mineral torna-se possível submeter os modelos condicionalmente simulados às diversas funções de transferência, peculiares à mineração, como por exemplo, a otimização de cava final ou do sequenciamento da produção, para quantificar os riscos existentes nesses processos em decorrência da variabilidade dos teores do

depósito. Pesquisas recentes demonstram a utilização de otimização estocástica como ferramenta capaz de analisar vários cenários simulados do depósito, resultando em uma única solução capaz de maximizar o valor presente da operação de lavra, reduzindo e efetivamente controlando os riscos associados.

Nas simulações condicionais é produzido um conjunto de realizações ou imagens equiprováveis do depósito mineral que representam um intervalo de possíveis valores da variável em estudo (teores de blocos de lavra, por exemplo), cada uma dessas imagens reproduz os momentos estatísticos de primeira e segunda ordem dos dados (histograma e variograma respectivamente), bem como os valores originais em suas posições no espaço. Apesar das simulações condicionais serem costumeiramente descritas como imagens “equiprováveis” da mineralização, tanto o variograma quanto o histograma dos dados amostrais são reproduzidos com pequenas flutuações, chamadas flutuações ergódicas, conseqüentemente algumas imagens terão teores ligeiramente maiores e outras ligeiramente menores. Esta é a razão pela qual se pode classificar as imagens como otimista, mediana ou pessimista.

Os métodos de simulação são fortemente dependentes da natureza da variável a ser simulada. Três classes de variáveis podem ser distinguidas:

- a) Variáveis contínuas, que normalmente representam propriedades físicas como teores, espessura de camadas, etc.;
- b) Variáveis categóricas ou discretas, usadas para representar litologias, unidades geológicas ou envelopes de teor; e;
- c) Objetos que são definidos por suas posições no espaço, forma e orientação, (ex.: canais sedimentares, grãos de minerais, etc.).

Dependendo das variáveis, alguns métodos serão mais apropriados para reproduzir satisfatoriamente a distribuição espacial. Os métodos de simulação geoestatística em particular dependem da escolha do modelo para a distribuição das variáveis de interesse, parcialmente caracterizada pelo histograma e pelo

variograma. O modelo de distribuição pode ser usado para classificar os métodos de simulação (para mais detalhes consulte Chilès e Delfiner, 1999), como segue:

a) Métodos Não paramétricos

- Simulação Sequencial de Indicadores (*SIS - Sequential Indicator Simulation*)
- Simulação de campo de probabilidade (*p-field simulation*)

b) Métodos Gaussianos

- Bandas rotativas (*TB-turning bands*)
- Simulação Sequencial Gaussiana (*SGS-Sequential Gaussian Simulation*)
- Simulação Sequencial Gaussiana de Grupo (*GSGS - Group Sequential Gaussian Simulation*)

c) Métodos Não Gaussianos

- Simulação Direta de Bloco (*DBSim - Direct Block Simulation*)

d) Geoestatística de Múltiplos Pontos

- Simulação de equação normal única (*SNESIM - Single Normal Equation Simulation*)
- Simulação usando filtros (*FilterSim*)

e) Estatísticas ou Cumulantes Espaciais de Alta Ordem

- Simulação High Order (*HOSIM – High Order Simulation*)

Nesta pesquisa o método de simulação empregado foi o de bandas rotativas ou “*turning bands*” devido à simplicidade de aplicação e melhor reprodução dos histogramas das variáveis de interesse.

A partir de agora serão abordados os principais métodos de simulação geoestatística desenvolvidos tanto para modelagem da variabilidade de teores como também de feições estruturais e geológicas, com o objetivo de mostrar o

potencial dos algoritmos de simulação para uma possível aplicação em sistemas de caracterização do recurso mineral citado no capítulo 2.1.

2.3.3.1. Turning Bands (TB)

O método de simulação por bandas rotativas foi o primeiro algoritmo aplicado para simulações gaussianas 3D de larga escala (Journel, 1974; Mantoglou e Wilson, 1982) e é muito eficiente para construção de simulações não condicionais e particularmente bom no que diz respeito à reprodução de variogramas. O método consiste na simulação de um processo unidimensional em linhas regularmente espaçadas no plano. As simulações unidimensionais são posteriormente projetadas no espaço de modo a obter-se a simulação no espaço tridimensional. O condicionamento é obtido através de uma krigagem posterior.

Segundo Chilès e Delfiner (1999), o valor a ser simulado no ponto $u_1(x, y)$ em um plano, é a soma dos valores obtidos da projeção do ponto u_1 até a linha simulada em uma dimensão, conforme a Eq. (2.3.1).

$$Z^*(u_1) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N Z_{1,n}(u_{1,n}) \quad (2.3.1)$$

Onde $Z^*(u_1)$ é o valor simulado em um ponto u_1 , $u_{1,n}$ é o local da projeção u_1 na n -ésima linha que divide o plano, $Z_{1,n}$ é o valor simulado no local $u_{1,n}$ e N é o número de linhas que dividem o plano.

Conforme Journel e Huijbregts (1978), a Eq. (2.3.1) também pode ser utilizada para o caso tridimensional e a distribuição dos valores simulados (em n -dimensões), pela simulação por bandas rotativas, é Gaussiana, visto que cada simulação é obtida pela soma de um grande número de realizações, realizadas em diferentes linhas e de forma independente. Baseando-se nesse fato, os autores explicam que a distribuição dos valores originais deve ser transformada em uma distribuição normal, quando necessário, antes da simulação não condicional por bandas rotativas. O modelo de covariância (que reflete a continuidade espacial) dos dados

normais deve ser reproduzido (considerando as flutuações ergóticas) pelo modelo de covariância dos valores simulados Z^* . Para isso, as simulações realizadas em cada linha são baseadas em um modelo de covariância para uma dimensão, obtido a partir do modelo de covariância dos dados normais para n -dimensões. Matheron (1973) apresenta a fórmula, form. (2.3.2), que relaciona os modelos de covariância para uma dimensão e para n -dimensões, considerando que o modelo de covariância para n -dimensões é isotrópico:

$$C(h) = \int C_1(\{h, s\}) * W_n(ds) \quad (2.3.2)$$

Onde: $C(h)$ é a covariância para um par de valores em R^n separados por um vetor h ; $C_1(\{h, s\})$ é a covariância para um par de valores em R^1 , separados pela projeção do vetor h na linha s ; W_n é a distribuição de probabilidade para a linha (vetor) s em R^n .

A simulação em cada linha é considerada como a simulação não condicional para valores de uma função aleatória em R^1 , com uma determinada covariância. Lantuéjoul (2001) exemplifica alguns algoritmos para simular valores em uma dada linha, respeitando o respectivo modelo de covariância.

A Eq. 2.3.2 supõe que o modelo de covariância para n -dimensões é isotrópico, porém, existem casos em que o modelo de covariância para n -dimensões é anisotrópico. Journel e Huijbregts (1978) demonstram que um covariograma anisotrópico pode ser modelado como uma soma de modelos isotrópicos e, neste caso, uma realização em n -dimensões seria obtida pela soma de realizações obtidas para cada um dos modelos isotrópicos.

Segundo Lantuéjoul (2001), o condicionamento dos valores simulados, nos locais de interesse, pode ser realizado através de uma etapa de krigagem posterior, da seguinte forma:

$$z_c^*(u_1) = z(u_1)^k + [z^*(u_1) - z^*(u_1)^k] \quad (2.3.3)$$

Onde:

$z_c^*(u_1)$ = simulação condicional no local u_1 ;

$z(u_1)^k$ = valor obtido por krigagem no local u_1 , usando os dados amostrais;

$z^*(u_1)$ = simulação não condicional no local u_1 ;

$z^*(u_1)^k$ = valor obtido por krigagem dos valores simulados não condicionais no local u_1 .

Dessa forma, as simulações não condicionais são convertidas em simulações condicionais somando-se ao valor obtido por krigagem a simulação do desvio ou resíduo da krigagem, permitindo que os valores simulados reproduzam os valores dos dados originais em seus respectivos locais.

De maneira esquemática, o algoritmo para aplicar o método de bandas rotativas compreenderia as seguintes etapas:

- a. Gerar n direções independentes $D_1, \dots, D_n$ (Figura 5);
- b. Traçar uma perpendicular de uma linha (banda) simulada até o ponto x (Figura 5);
- c. Gerar n processos estocásticos independentes $y_1, \dots, y_n$ de funções de covariâncias respectivas $CD_1, \dots, CD_n$ e obter o valor $y_n(x_n, D_n)$ em cada banda (Figura 6);

- d. Obter o valor simulado em x por: $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N z_1(x, D_1)$, onde n = número de bandas.

Figura 5 - Princípio de construção do método de bandas rotativas.

Fonte: adaptado de Chilès & Delfiner (1999)

Figura 6 - Ilustração do cálculo do ponto simulado, no método de bandas rotativas.

Fonte: adaptado de Souza (2007)

2.3.3.2. Simulação Sequencial Gaussiana (SGS)

O método de simulação sequencial é baseado na decomposição de uma função de distribuição multivariada (*mdf*) em uma sequência de funções de distribuição

condicionais (cdf) univariadas. Fazendo $Z(u)$ uma classe de função aleatória (FA) com mdf $f(u_1, \dots, u_n; z_1, \dots, z_n)$ teremos:

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_n; z_1, \dots, z_n) &= f(u_1; z_1) \\ f(u_2; z_2 | Z(u_1) = z_1) & \\ \dots & \\ f(u_n; z_n | Z(u_\alpha) = z_\alpha, \alpha = 1, \dots, n-1) & \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Se todas as distribuições condicionais univariadas da Eq. (2.3.4) forem conhecidas, então uma realização $z(u)$ da FA $Z(u)$ pode ser construída por uma sequência de seleções aleatórias para cada uma das n distribuições condicionais, de acordo com os passos a seguir:

- Uma realização z_1 da variável aleatória $Z(u_1)$ é obtida por uma seleção aleatória de um valor da distribuição marginal $f(u_1; z_1)$;
- A realização z_1 é usada para condicionar a distribuição de $Z(u_2)$;
- Uma realização z_2 da variável $Z(u_2)$ é obtida por uma seleção aleatória de um valor da distribuição condicional $f(u_2; z_2 | Z(u_1) = z_1)$;
- As realizações z_1 , e z_2 são então usadas para condicionar a distribuição de $Z(u_3)$;
- Uma realização z_3 da variável $Z(u_3)$ é obtida por uma seleção aleatória de um valor da distribuição condicional $f(u_3; z_3 | Z(u_2) = z_2, Z(u_1) = z_1)$;
- As seleções aleatórias e os condicionamentos subsequentes são feitos até que a última distribuição $f(u_n; z_n | Z(u_\alpha) = z_\alpha, \alpha = 1, \dots, n-1)$ seja completamente condicionada. Então, uma realização z_n da variável $Z(u_n)$ é aleatoriamente selecionada desta distribuição.

O conjunto de n valores $z(u_\alpha)$ constitui uma realização da FA $Z(u)$ nas n posições u_α . Se um conjunto amostral inicial existir, isto é, $z(u_\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, m$, com $m \ll n$, então a sequência de passos apresentada anteriormente deve começar pela determinação da distribuição condicional $f(u_{m+1}; z_{m+1} | Z(u_\alpha) = z_\alpha)$, e subsequente seleção aleatória de um valor $z(u_{m+1})$.

Para que este algoritmo possa ser utilizado na prática, uma sequência completa de distribuições condicionais para uma dada *mdf* deve ser conhecida. Tais distribuições podem ser facilmente determinadas através de krigagem simples (SK) no caso de uma FA normal multivariada $Y(u)$ (Deutsch e Journel, 1998). Assim, a FA $Z(u)$ deve ser transformada para uma FA normal multivariada $Y(u)$. Segundo Peroni (2002), o método de simulação sequencial Gaussiana consiste na aplicação da equação de decomposição em uma função aleatória estacionária com distribuição Gaussiana multivariada $Y(u)$, com os seguintes parâmetros, conforme equação (Eq. 2.3.5):

$$\text{Média: } E\{Y(u)\} = m = 0$$

$$\text{Covariância: } E\{Y(u_1)Y(u_2)\} - m^2 = \text{Cov}(u_2, u_1) \quad (2.3.5)$$

$$\text{Variância: } \text{VAR}\{Y(u)\} = \sigma^2 = 1$$

O objetivo é construir uma realização $Y_s(u)$ que reproduza os parâmetros de $Y(u)$ descritos acima. As cdfs locais necessárias para a simulação de cada um dos n valores $y_s(u)$ são modeladas pelos valores locais de m e σ^2 , onde m é uma combinação linear dos dados condicionantes (dentro da vizinhança de u) que minimiza variância da estimativa. O valor de $m(u)$ pode ser determinado por krigagem simples de acordo com a equação (Eq. 2.3.6).

$$y_{SK}^*(u) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}(u) y(u_{\alpha}) + \left[1 - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}(u) \right] \cdot E\{Y(u)\} \quad (2.3.6)$$

Onde λ_{α} representa os pesos obtidos pelo sistema de krigagem simples, expresso na equação (Eq. 2.3.7).

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta}(u) \text{Cov}(u_{\beta} - u_{\alpha}) = \text{Cov}(u - u_{\alpha}), \forall \alpha = 1, \dots, n \quad (2.3.7)$$

A variância condicional, σ^2 é dada pelo cálculo da variância de krigagem, conforme equação (Eq. 2.3.8):

$$\text{Var}\{y(u) | (n)\} = \text{Var}\{Y(u)\} - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}(u) \text{Cov}(u - u_{\alpha}) \quad (2.3.8)$$

Um valor selecionado aleatoriamente da cdf definida por m e σ^2 , constitui uma realização local $y_s(u_{\alpha})$. O conjunto de n realizações locais $y_s(u_{\alpha})$ determinadas sequencialmente reproduz o variograma, $CY(h)$, em $Y_s(u)$.

Em geral, variáveis encontradas em geociências não apresentam distribuição normal multivariada. Para que se possa aplicar a metodologia descrita, como já mostrado anteriormente, se faz necessária uma transformação (anamorfose gaussiana), conforme a equação (Eq. 2.3.9), dos dados condicionantes $z(u_{\alpha})$ $\alpha = 1, \dots, m$ do tipo:

$$y(u_{\alpha}) = \phi[z(u_{\alpha})] \quad \alpha = 1, \dots, m \quad (2.3.9)$$

Sendo ϕ a função de normalização definindo os valores obtidos para $y(u_{\alpha})$ como normais com média=0 e variância=1.

As realizações $y_s(u)$ devem ser então retrotransformadas em realizações $z_s(u)$ através da função (2.3.10) inversa ϕ^{-1} .

$$z_s(u_\alpha) = \phi^{-1}[y_s(u_\alpha)] \quad \alpha=1,\dots,n \quad (2.3.10)$$

2.3.3.3. Simulação Sequencial de Indicadores (SIS)

No final dos anos 80 Alabert (1987) e Journel e Alabert (1989) propuseram o método de simulação sequencial de indicadores (SIS). O uso de indicadores é uma estratégia de análise estrutural apropriada para caracterizar a distribuição espacial de teores em diferentes faixas de teor ou de variáveis categóricas. Os métodos de simulação de indicadores foram desenvolvidos para aplicação em modelagem de depósitos de petróleo onde valores extremos (alta permeabilidade) apresentam alta conectividade no espaço. Sob o paradigma multigaussiano tais padrões de conectividade são difíceis de serem modelados.

Segundo Vann *et al* (2002), o algoritmo pode ser descrito sucintamente da maneira a seguir. Após definir-se um caminho aleatório passando pelos pontos a serem simulados, deve-se:

- Discretizar a distribuição em (k+1) classes usando k intervalos (ou *cut-offs*).
- Transformar os dados em um vetor de indicadores (1 ou 0) dependendo dos valores serem pertencentes ou não a um intervalo.
- Calcular o variograma do indicador para cada intervalo ou classe
- Determinar k funções de distribuição condicional acumulada (*ccdf*) usando o algoritmo de krigagem.
- Corrigir as relações de ordem e construir um modelo *ccdf* completo.
- Obter um valor simulado da *ccdf*.
- Adicionar o valor simulado ao conjunto de dados condicionantes.
- Ir para o próximo ponto do caminho aleatório e repetir os passos anteriores.

2.3.3.4. Simulação sequencial gaussiana generalizada de grupo (GSGS)

Davis (1987) introduziu as simulações condicionais por decomposição LU (*Lower-Upper*), este método realiza o condicionamento simultaneamente à simulação. A equivalência entre SGS e LU torna possível o uso de um novo algoritmo SGS, no qual o processo sequencial é realizado em grupos de k pontos, resultando em um processo mais rápido.

Lou (1998) apresentou uma generalização do algoritmo de simulação sequencial gaussiana. O método chamado de simulação sequencial gaussiana de grupo (GSGS) explora o fato de que na prática a malha de pontos a serem simulados normalmente é muito maior e mais densa que os pontos amostrais disponíveis, resultando em uma tendência de sobreposição das vizinhanças de pontos próximos a serem simulados (Figura 7). O autor usa essa propriedade para gerar realizações de um grupo de pontos próximos simultaneamente, contrariamente ao processo ponto-a-ponto realizado na simulação sequencial gaussiana.

No que diz respeito a sua implementação computacional, o compartilhamento das vizinhanças entre os grupos de pontos minimiza buscas espaciais redundantes e proporciona a obtenção do valor simulado ao mesmo tempo para todos os pontos pertencentes ao grupo, resultando em uma redução considerável no tempo de processamento e fazendo deste método uma opção recomendada para grandes malhas de pontos de simulação.

Figura 7 – Sobreposição das vizinhanças para um grupo de quatro pontos a serem simulados

Fonte: Adaptado de Dimitrakopoulos e Luo (2004)

Dimitrakopoulos e Luo (2004) apresentaram resultados que sugerem que o tamanho ideal para o grupo de pontos é em torno de 80% da vizinhança de amostras utilizada para SGS. O agrupamento realizado usando-se SGSG resulta em uma perda de acurácia nas simulações, porém este mesmo trabalho mostra, através de uma medida de acurácia, “*screen-effect approximation loss*” (*SEA loss*), que esta perda é inferior a 5%, considerando vários modelos de covariância e malhas de pontos.

2.3.3.5. Simulação Direta de Bloco (DBSim)

A simulação direta de bloco (DBSIM) é um método rápido e eficiente para simulação condicional de atributos do depósito mineral e considerada uma extensão do método SGSG. A principal vantagem deste método é a velocidade e eficiência computacional, proporcionando uma alternativa relativamente simples de simulação de múltiplas realizações de depósitos minerais de grande porte (em que são necessários mais de 10^8 blocos), diretamente no suporte de bloco desejado.

A ideia original e os algoritmos desenvolvidos para simulação direta no suporte de blocos são descritas em Godoy (2003) e Dimitrakopoulos (2010). A Figura 8 mostra a ideia principal do algoritmo DBSIM.

Figura 8 – Simulação direta em suporte de blocos. O bloco 19 é simulado utilizando-se os dados condicionantes e os blocos previamente simulados em sua vizinhança.

Fonte: Adaptado de Dimitrakopoulos (2010)

Para integrar ao processo de simulação os dados condicionantes em suporte de bloco o algoritmo é desenvolvido em uma cosimulação, onde a segunda variável está relacionada ao valor do bloco sequencialmente calculado durante o processo de simulação. Os valores simulados são obtidos através da solução de um sistema de cosimulações idêntico ao método de simulação LU (Myers, 1989).

O algoritmo DBSIM segue os seguintes passos:

1. Normalizar os dados.
2. Definir um caminho aleatório que visite cada bloco a ser simulado.
3. Para cada bloco, gerar um valor simulado no espaço gaussiano nos pontos internos que discretizam o bloco, usando LU ou LU combinada quando houver valores em blocos simulados previamente disponíveis.

4. Calcular os valores simulados no suporte de blocos pela média dos valores dos pontos em um grupo (bloco) no espaço gaussiano e posteriormente calcular o valor do bloco no espaço dos dados reais.
5. Descartar os valores obtidos para os pontos internos e adicionar o valor simulado do bloco no espaço gaussiano aos dados condicionantes e armazenar o valor do bloco no espaço dos dados como resultado da simulação.
6. Repetir os passos de 3 a 5 até que todos os blocos sejam simulados.

As maiores vantagens em termos práticos do algoritmo DBSIM são:

- a) Menor alocação de memória devido o descarte dos pontos internos;
- b) Grande melhoria na eficiência computacional;
- c) Melhor eficiência na validação dos variogramas na escala de blocos comparada às realizadas em suporte de pontos;
- d) Não há necessidade de realizar cálculos de mudança de suporte

2.3.3.6. Geoestatística de múltiplos pontos

A geoestatística de múltiplos pontos é uma alternativa baseada em simulação estocástica para a modelagem da geologia de um depósito, incluindo litologias, zonas de intemperismo e envelopes mineralizados.

A abordagem tradicional para modelagem de domínios geológicos consiste no desenho das envoltórias geológicas por um geólogo, resultando em uma interpretação subjetiva, isto é, sujeita a variações de acordo com o julgamento de cada pessoa. Existem métodos automáticos de construção de sólidos, porém esses podem ser demasiadamente suavizados, não sendo boas representações das feições geológicas. Além disso, tal interpretação, por ser única, não leva em consideração a incerteza associada à posição espacial dos contatos dos domínios geológicos bem como seus volumes, levando a inconsistências entre os planos de lavra e produção da mina.

O princípio utilizado pela simulação estocástica é interpretar a ocorrência de uma unidade geológica em uma posição no espaço como uma realização de uma variável aleatória discreta. Esta abordagem probabilística honra o fato de que a geologia em qualquer posição no espaço não pode ser precisamente conhecida pelos dados de sondagem. Todas as informações disponíveis, incluindo a estatística e geoestatística dos dados e interpretações geológicas são utilizadas neste tipo de abordagem de forma a construir modelos mais reais do depósito.

Vários métodos de simulação estocástica vêm sendo desenvolvidos e testados em modelos geológicos de depósitos minerais e consistem principalmente no uso de simulação sequencial de indicadores (Goovaerts, 1997) e simulação pluri-gaussiana truncada (Le Loc'h e Gali, 1997). Abordagens alternativas incluem métodos baseados em probabilidades de transição Markovianas (Li, 2007) e métodos baseados em objetos (Seifert e Jensen, 2000). Porém, esses métodos não conseguem capturar complexidades geológicas não lineares, pois representam tais complexidades geológicas sob estatísticas de dois pontos, através de variogramas que descrevem a variabilidade de pares de pontos separados por uma dada distância. A Figura 9 modificada de Journel (2007) ilustra esta limitação.

Visando superar essas limitações, esforços vêm sendo feitos para desenvolver novas técnicas que levem em consideração as chamadas estatísticas espaciais de alta ordem. Tais técnicas incluem a abordagem de múltiplos pontos (Strebelle, 2002) bem como abordagens de estatísticas de alta ordem baseadas em campos aleatórios Markovianos (Daly, 2004). Essas técnicas substituem o variograma pelas chamadas “*training images*” ou TI, uma imagem de referência que descreve aspectos geométricos das unidades geológicas as quais se quer modelar e reflete o entendimento geológico prévio do depósito mineral considerado.

Figura 9 - Diferentes padrões apresentam o mesmo variograma

Fonte: modificado de Journel (2007)

A construção da imagem de referência é a etapa mais importante desta abordagem, pois todos os resultados da simulação dependem dela. O Algoritmo proposto por Strebelle, conhecido como SNESIM (*Single Normal Equation Simulation*) permite a obtenção das probabilidades condicionais dos pontos a partir das proporções obtidas pelo escaneamento da imagem de referência, considerando que o nó central do elipsoide de busca é desconhecido. Para cada ponto visitado, são armazenadas informações de valor e posição espacial dos pontos vizinhos. O processo é executado em toda a TI e o número de vezes que cada padrão ocorre é armazenado para se calcular a frequência de cada padrão. A varredura da TI é realizada apenas uma vez e os padrões são armazenados em uma estrutura dinâmica chamada pelo autor de árvore de busca (*search tree*). A partir dos padrões, constrói-se a curva de distribuição de probabilidades, obtendo de forma direta um modelo estocástico que representa a continuidade espacial do corpo de minério ou domínio litológico.

A Figura 10, extraída de Robles e Dimitrakopoulos (2009), ilustra o processo de construção da árvore de busca (c), em um exemplo simples, para uma imagem teste binária (a) e o padrão usado para rastreamento dos padrões geométricos possíveis (b). A construção da árvore de busca segue os passos abaixo:

1. Usar o nó do centro do padrão para contar a frequência dos nós vermelhos e brancos da parte interna da imagem de treinamento, neste exemplo uma malha de 4x4 resultando em um total de 16 nós (dentro da linha grossa), resultando em uma distribuição de 9 nós brancos e 7 nós vermelhos, essas frequências são salvas no topo da árvore de busca.
2. A imagem de treinamento é escaneada considerando apenas o ponto central e o ponto da posição 1 do padrão de busca. Assim o nó na posição 1 só pode ser branco ou vermelho, quando o nó central é branco o nó na posição 1 é branco 4 vezes e vermelho 5 vezes, quando o nó central é vermelho o nó na posição 1 é branco 6 vezes e vermelho 1 vez.
3. A imagem de treinamento é escaneada considerando 3 pontos, o ponto central, o ponto da posição 1 e o ponto da posição 2 do padrão de busca. Agora existem 8 combinações possíveis que são contadas quantas vezes aparecem na imagem de treinamento, como um dos padrões não existe na imagem temos apenas 7 padrões possíveis.
4. A imagem de treinamento é escaneada considerando 4 pontos (central, posições 1, 2 e 3). Agora aparecem na imagem de treinamento 10 de 16 possíveis combinações.
5. A imagem de treinamento é escaneada considerando 4 pontos (central, posições 1, 2 e 3). Agora aparecem na imagem de treinamento 10 de 16 possíveis combinações.

Figura 10 – Exemplo de construção de árvore de busca para uma imagem teste binária, vermelho (minério) branco (estéril).

Fonte: Robles e Dimitrakopoulos (2009)

2.3.3.7. Estatísticas Espaciais de Alta Ordem (HOSS)

Segundo Mustapha e Dimitrakopoulos (2009), apesar dos avanços na modelagem e simulação espaciais oferecidos pelas abordagens multipontos disponíveis atualmente, existem limitações inerentes a esses métodos como:

- i. Algoritmos multipontos são considerados *ad-hoc* e carecem de uma base matemática consistente.
- ii. A escolha da imagem de referência incorpora ainda alguma subjetividade ao processo, podendo em certas porções do depósito não ser representativa

das relações espaciais dos dados amostrais, sendo aparentes conflitos entre as simulações e os dados reais.

Recentemente Dimitrakopoulos et al. (2009) sugeriu um novo conceito de cumulantes espaciais de alta ordem (*high-order spatial cumulants*) e seu uso na modelagem de padrões geológicos complexos. Os cumulantes de alta ordem são combinações de parâmetros estatísticos dos momentos que caracterizam variáveis aleatórias não gaussianas (Billinger e Rosenblatt, 1966) e podem ser entendidas como uma extensão da função covariância. As definições detalhadas de cumulantes espaciais, incluindo variáveis aleatórias, os respectivos momentos e cumulantes, campos aleatórios espaciais não gaussianos e suas estatísticas espaciais de alta ordem são encontradas em Dimitrakopoulos et al. (2009).

Mustapha e Dimitrakopoulos (2010) propuseram um algoritmo (HOSIM – *High Order Simulation*) para calcular os cumulantes através do escaneamento de uma TI e dados amostrais disponíveis.

Figura 11 – Ponto x_0 a ser simulado, considerando que os valores nos pontos $x_1, x_2, \dots, x_n$ são conhecidos

Fonte: Mustapha e Dimitrakopoulos (2010)

Na Figura 11, x_0 representa um ponto a ser simulado a partir do conjunto de dados na sua vizinhança. A correlação espacial entre a variável z_0 definida por x_0 e duas variáveis aleatórias Z_i e Z_j definidas respectivamente nos pontos x_i e x_j é expressa

usando-se um cumulante de terceira ordem $cum(Z_0, Z_i, Z_j)$. Assumindo-se que Z_0 , Z_i e Z_j são variáveis aleatórias de média zero, então $cum(Z_0, Z_i, Z_j)$, descrito como uma função da distância $cum(h_1, h_2)$, é calculado como:

$$cum(h_1, h_2) = \frac{1}{N_{h_1, h_2}} \sum_{k=1}^{N_{h_1, h_2}} Z(x_k) Z(x_k + h_1) Z(x_k + h_2),$$

$$\{x_k; x_k + h_1; x_k + h_2\} \in T_3^{h_1, h_2} \quad (2.3.11)$$

Onde $T_3^{h_1, h_2}$ é o padrão espacial de terceira ordem associado e é definido, considerando o ponto x como referência, por:

$$T_{n+1}^{h_1, h_2}(h_1, h_2, a_1, a_2) = \{(x, x + h_1, x + h_2)\} \quad (2.3.12)$$

De forma que os pontos $\{x, x + h_i, i = 1, 2\}$ sejam um conjunto da distribuição original dos pontos.

Na Eq. (2.3.13), as distâncias h_1 e h_2 ocorrem ao longo de duas direções $\{\vec{d}_i, i = 1, 2\}$ que seguem os ângulos $\{a_1, a_2\}$. Finalmente, os elementos em $T_3^{h_1, h_2}$ são capturados da TI e a partir dos dados amostrados. O cumulante de quarta ordem é expresso como uma função de distância com três variáveis.

$$\begin{aligned}
& cum(h_1, h_2, h_3) \\
&= \frac{1}{N_{h_1, h_2, h_3}} \sum_{k=1}^{N_{h_1, h_2, h_3}} Z(x_k) Z(x_k + h_1) Z(x_k + h_2) Z(x_k + h_3) \\
&\quad - \frac{1}{N_{h_1, h_2, h_3}^2} \left[\left(\sum_{k=1}^{N_{h_1, h_2, h_3}} Z(x_k) Z(x_k + h_1) \right) * \left(\sum_{k=1}^{N_{h_1, h_2, h_3}} Z(x_k + h_2) Z(x_k + h_3) \right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{N_{h_1, h_2, h_3}^2} \left[\left(\sum_{k=1}^{N_{h_1, h_2, h_3}} Z(x_k) Z(x_k + h_2) \right) * \left(\sum_{k=1}^{N_{h_1, h_2, h_3}} Z(x_k + h_1) Z(x_k + h_3) \right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{N_{h_1, h_2, h_3}^2} \left[\left(\sum_{k=1}^{N_{h_1, h_2, h_3}} Z(x_k) Z(x_k + h_3) \right) * \left(\sum_{k=1}^{N_{h_1, h_2, h_3}} Z(x_k + h_1) Z(x_k + h_2) \right) \right], \\
&\{x_k; x_k + h_1; x_k + h_2\} \\
&\in T_3^{h_1, h_2, h_3}
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Onde N_{h_1, h_2} e N_{h_1, h_2, h_3} são os números de elementos de $T_3^{h_1, h_2}$ e $T_3^{h_1, h_2, h_3}$ respectivamente. Cumulantes de ordem superior à quarta ordem são calculados de forma similar. Para mais detalhes consultar Mustapha e Dimitrakopoulos (2010).

A Figura 12 compara a imagem original (1) dos níveis de porosidade de um reservatório e duas realizações geradas (2 e 3) com o algoritmo de simulação estocástica HOSIM, nas quais são mostradas boas reproduções da imagem original.

Figura 12 – Simulações de porosidade em um reservatório fluvial geradas pelo algoritmo HOSIM

Fonte: Mustapha e Dimitrakopoulos (2010)

Para mais detalhes quanto ao cálculo dos cumulantes espaciais de alta ordem consultar Mustapha e Dimitrakopoulos (2010) e apêndices.

2.4. Otimização

A otimização é uma abordagem científica para tomada de decisão, através da aplicação de métodos matemáticos e uso de modernas técnicas computacionais e estão disponíveis há mais de um século. Inicialmente, o cálculo diferencial foi a ferramenta básica aplicada em problemas de definição dos valores máximo e mínimo de funções as quais figuravam em muitos problemas práticos e teóricos. Durante a segunda guerra mundial o governo britânico organizou grupos de cientistas para dar suporte aos comandantes na solução de problemas táticos e estratégicos complexos, com o objetivo de maximizar seu potencial de guerra com os recursos limitados que tinham. O sucesso dos grupos britânicos levou os Estados Unidos a instituir esforços similares em 1942. A comunidade científica britânica descreveu as atividades desenvolvidas como “pesquisa operacional” e em decorrência do sucesso dessas atividades a pesquisa operacional tem sido reconhecida e estabelecida como uma disciplina distinta no meio acadêmico. Deve-se mencionar, segundo Sarker e Newton (2008), que a otimização é uma das disciplinas da pesquisa operacional.

Depois da segunda guerra mundial ocorreu um enorme desenvolvimento e refinamento das técnicas de pesquisa operacional, que tiveram sua aplicação estendida para solução de problemas encontrados em muitas indústrias públicas e privadas e serviços públicos. Gestores e tomadores de decisão constataram que a aplicação das técnicas de pesquisa operacional era muito significativa devido o porte da produção, onde centavos por unidade processada podem somar até milhões de dólares.

Em 1947 George B. Dantzig desenvolveu o algoritmo Simplex, para solução de problemas de programação linear, tornando-o conhecido como um dos pais da pesquisa operacional. A programação linear é uma das técnicas básicas mais usadas em otimização, sobretudo em problemas de alocação de recursos, planejamento da produção industrial, planejamento de atividades, formulação de estratégia de marketing, etc.

Além das muitas outras técnicas convencionais de otimização desenvolvidas nos últimos 50 anos, o desenvolvimento recente de técnicas heurísticas modernas como “*simulated annealing*”, “*tabu search*”, algoritmos genéticos, computação neural, lógica “*fuzzy*” e otimização “*ant colony*” estão tornando possível o tratamento de situações mais complexas com ferramentas mais sofisticadas.

2.4.1. Conceito e Classificação dos Problemas de Otimização

O conceito básico da otimização é encontrar a melhor solução possível ou solução ótima para um dado modelo ou problema, analisando-se, para tanto, todas as alternativas possíveis. Segundo Hillier e Lieberman (2001), uma vez que o problema é identificado, o próximo passo é reformulá-lo de forma conveniente para posterior análise, sendo que em pesquisa operacional, a abordagem tradicional para isso é construir um modelo matemático que represente a essência do problema.

A estrutura geral de um modelo matemático, ou modelo de programação matemática, pode ser representada da seguinte forma:

Determinar x para

Maximizar $f(x)$

Sujeito a $g_i(x) \leq gb_i, \quad i = 1, \dots, m$ (2.4.1)

$h_j(x) \leq hb_j, \quad j = 1, \dots, p$

$x \geq 0$

Onde a **função objetivo** f é uma função de uma única **variável de decisão** x e as **funções de restrição** g_i e h_j são funções gerais atribuídas à variável $x \in R^n$. gb_i e hb_j são normalmente constantes do problema, em problemas determinísticos, na terceira linha há uma restrição de não negatividade, necessária em muitos problemas práticos, pois muitas variáveis não podem ser negativas.

O modelo padrão da formulação 2.4.1 pode variar contendo limites superior e inferior para a variável x ao invés de uma restrição de não negatividade, outra restrição qualquer ou conter múltiplas variáveis de decisão.

Os problemas de otimização podem ser classificados como ilustrado na Figura 13.

Figura 13 – Classificação dos problemas de otimização

Fonte: adaptado de Hilier e Lieberman (2001)

2.4.2. Programação Linear

O termo programação refere-se a um planejamento, sendo assim, a programação linear (PL) envolve as técnicas de planejamento de atividades para obter um resultado ótimo. Apesar do tipo de aplicação mais comum da PL ser em problemas de alocação de recursos em atividades, existem várias outras aplicações. O modelo de programação linear é descrito da seguinte forma: Dado um conjunto m de inequações ou equações lineares de n variáveis, deseja-se encontrar os valores não negativos de tais variáveis que satisfaçam às restrições impostas e maximize ou minimize uma função linear das variáveis, sendo condições básicas:

- **Certeza:** os valores dos parâmetros (dados) são conhecidos e constantes.
- **Proporcionalidade:** qualquer função (objetiva ou de restrição) é proporcional ao nível da atividade a ser planejada e possui uma unidade de medida consistente.

- Aditividade: O resultado total da atividade é soma de todas as atividades componentes do problema
- Divisibilidade: A variável de decisão pode ser tanto real quanto inteira
- Não negatividade: somente valores positivos são permitidos para as variáveis.

Existem três métodos que se popularizaram na solução de problemas de PL: a) Métodos gráficos, b) o método simplex e seus derivados e c) o método do ponto interior. Todos esses métodos definem o espaço de soluções viáveis para o problema, isto é, o espaço limitado pelas restrições e pelas variáveis.

2.4.3. Programação Inteira

Em alguns problemas reais o uso de valores decimais para as variáveis não é recomendado ou não tem significados práticos. A programação inteira (PI) é uma extensão do problema geral de programação linear, porém sem a necessidade da condição de divisibilidade. Existem três modelos de PI.

- Inteira: onde todas as variáveis de decisão são inteiras.
- Inteira binária: onde todos os valores das variáveis de decisão são binários (zero ou um)
- Inteira mista ou inteira mista linear: possuem variáveis de decisão inteiras e reais.

Segundo Korte e Vygen (2008), problemas que envolvem a Programação Inteira são mais difíceis de solucionar do que os de Programação Linear (PL), pois para resolver PL existem algoritmos de uso geral que são computacionalmente eficientes, como os métodos Simplex e de Pontos Interiores, o que não existe para PI. Os métodos de solução para PI possuem quatro características, duas quanto à aplicação e duas quanto à qualidade da solução:

- a) **Uso Geral:** podem resolver qualquer PI, mas são altamente ineficientes do ponto de vista computacional e se aplicam apenas a problemas de pequeno porte;
- b) **Uso Especial:** são formulados para resolver um tipo particular de PI de forma muito mais eficiente;
- c) **Ótimo:** um algoritmo ótimo é aquele que garante matematicamente que a solução ótima pode ser encontrada;
- d) **Heurística:** os algoritmos heurísticos são capazes de encontrar boas soluções factíveis, geralmente próximas do ótimo, com boa eficiência computacional. Também podem encontrar o ponto ótimo, entretanto não há garantias de que isso aconteça sempre.

Assim, os algoritmos para resolver PI podem ser de quatro categorias:

- a) **Uso Geral, Ótimo:** nesta categoria têm-se basicamente dois tipos de algoritmos, a enumeração completa (busca exaustiva) e o *Branch-and-Bound* (Busca em árvore). O primeiro é factível apenas para problemas de pequeno porte, com poucas variáveis, pois a explosão combinatória torna praticamente impossível a avaliação de todas as possibilidades de problemas maiores. Já o segundo algoritmo realiza uma enumeração sistemática, geralmente resultando na avaliação de uma pequena fração das alternativas, e dentro de determinadas condições garante encontrar a solução ótima.
- b) **Uso Geral, Heurística:** são algumas técnicas aplicadas aos algoritmos de uso geral que visam diminuir o número de avaliações e restringir o tempo computacional para encontrar soluções factíveis.
- c) **Uso Especial, Ótimo:** são algoritmos especialmente desenvolvidos para um problema específico, baseados na busca em árvore e gerando restrições via:
 - Ajuste de multiplicadores;
 - Ascendente “*dual*”;
 - Otimização de sub-gradiente;
 - Relaxação lagrangeana.

d) **Uso Especial, Heurística:** existe uma série de algoritmos desenvolvidos para solução de PI que dependem de ajustes muito específicos de acordo com o problema em questão, são exemplos disto:

- Algoritmos de intercâmbio;
- Algoritmos genéticos ou evolucionários;
- Busca gananciosa;
- Busca tabu (*Tabu search*);
- Heurísticas lagrangeanas;
- Arrefecimento simulado (*simulated annealing*).

Se somente algumas variáveis assumem valores inteiros, o modelo de PI é chamado de programação inteira mista (*MIP-mixed integer programming*).

Dentre várias aplicações da programação linear e inteira mista, destacam-se:

- Planejamento e controle da produção (*scheduling*);
- Fluxo em rede;
- Transbordo;
- Distribuição de mercadorias e roteirização de veículos;

2.4.4. Programação Estocástica

Enquanto problemas de otimização determinísticos são modelados com parâmetros conhecidos, problemas reais quase que invariavelmente envolvem parâmetros que não são conhecidos no momento em que as decisões têm que ser tomadas (Shapiro *et al.*, 2009). Quando tais parâmetros são incertos, mas estão em certos níveis de valores possíveis, pode-se desenvolver uma solução que possa ser viável para todas as escolhas possíveis deste parâmetro e que maximize uma dada função objetivo.

Existem vários exemplos de problemas de otimização estocásticos em finanças, logística e gestão de produção. Em mineração, o problema de delimitação da cava final e sequenciamento econômico da lavra é um problema de programação estocástica devido à incerteza associada aos teores utilizados como variáveis de decisão. A variável aleatória é substituída pela média, de modo a simplificar o problema de otimização, utilizando-se uma abordagem determinística. O modelo determinístico permite calcular a solução ótima para cada um dos cenários separadamente, enquanto que o modelo estocástico considera o conjunto de todos os cenários simultaneamente, cada um com uma probabilidade de ocorrência associada. Dado que o cenário futuro não é conhecido, o modelo estocástico pode apresentar uma solução muito mais adequada do que o modelo determinístico.

A programação estocástica trata de problemas de otimização com parâmetros que assumem uma distribuição de probabilidade discreta ou contínua e pode ser dividida em:

- Modelos de recurso (*recourse models*): esta abordagem foi originalmente proposta por Dantzig (1955) para problemas de programação estocástica de dois estágios, podendo ser estendida para múltiplos estágios. Modelos de recurso usam ações corretivas para compensar a violação de restrições que surgiram após a realização de incertezas.
- Modelos probabilísticos (*chance-constrained programming*): apresentados por Charnes *et al.* (1958), permitem que algumas restrições de segundo estágio sejam expressas em termos de declarações probabilísticas sobre as decisões de primeiro estágio. As ações corretivas presentes nos modelos de recurso são evitadas nesta abordagem, já que algumas restrições de segundo estágio podem ser violadas ao incorporarem uma medida de risco. Os modelos probabilísticos são particularmente úteis quando os custos e benefícios associados às decisões de segundo estágio são difíceis de serem avaliados.

A seguir será detalhado o modelo de recurso em dois estágios, que vem sendo utilizado para solução de problemas de programação estocásticas na indústria mineral.

2.4.4.1. Modelo de Recurso com Dois Estágios

O modelo de programação estocástica mais aplicado e estudado é o de programação linear de dois estágios (Shapiro *et al.*, 2009). O modelo de dois estágios, como o próprio nome sugere, divide as variáveis de decisão em dois estágios. As variáveis de primeiro estágio devem ser decididas antes da realização de incertezas. As variáveis de segundo estágio são utilizadas como medidas de correção contra qualquer inviabilidade que tenha surgido após a realização de incertezas. O modelo de programação estocástica de dois estágios pode ser formulado como:

$$\mathbf{Min}_{x \in \mathbb{R}^n} \quad c^T x + E[Q(x, \xi)],$$

$$\text{sujeito a} \quad Ax \leq b, \quad (2.4.2)$$

$$x \geq 0,$$

Onde $Q(x, \xi)$ é o valor ótimo do problema do segundo estágio:

$$\mathbf{Min}_{y \in \mathbb{R}^m} \quad q^T y,$$

$$\text{Sujeito a} \quad Wy \leq h - Tx, \quad (2.4.3)$$

$$y \geq 0$$

Nesta formulação, $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor das variáveis de decisão de primeiro estágio, c , A e b são os dados associados ao problema de primeiro estágio, $y \in \mathbb{R}^m$ é o vetor das variáveis de decisão de segundo estágio e $\xi = (q, T, W, h)$ contém os dados para o problema de segundo estágio que podem ser representados por variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade conhecidas. Aqui assume-se que o vetor aleatório ξ possui um número finito de realizações $\xi_1, \dots, \xi_s$ com as

respectivas probabilidades $p_1, \dots, p_s$. Assim o valor esperado $E[Q(x, \xi)]$ pode ser escrito em função do somatório:

$$E[Q(x, \xi)] = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S Q_s(x, \xi_s) \quad (2.4.4)$$

Assumindo o modelo discreto, pode-se reescrevê-lo na forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{Min}_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^T x + \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S Q_s(x, \xi_s) \\ \text{sujeito a} \quad & Ax \leq b, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Onde $Q_s(x, \xi_s)$ é o valor ótimo do problema de segundo estágio para cada realização $s = 1, \dots, S$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Min}_{y \in \mathbb{R}^m} \quad & q_s^T y_s \\ \text{Sujeito a} \quad & W_s y_s \leq h_s - T_s x, \\ & y_s \geq 0 \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

No primeiro estágio deve ser tomada a decisão do tipo “aqui e agora” (*here-and-now*) do vetor x , antes da realização das incertezas representadas por ξ . No segundo estágio, onde as informações ξ já estão disponíveis, é tomada a decisão sobre o valor do vetor y . No primeiro estágio é minimizado o custo $c^T x$ da decisão do primeiro estágio mais o valor esperado do custo do problema de segundo estágio. A decisão tomada no problema de segundo estágio reflete o comportamento ótimo no momento em que a incerteza é revelada, compensado qualquer decisão inadequada tomada no primeiro estágio.

A decisão de primeiro estágio x , como explicado anteriormente, depende apenas da informação disponível até aquele momento, este princípio é chamado de *nonanticipativity constraint*. No problema de dois estágios isto implica que a decisão x independe das realizações do segundo estágio, sendo assim o vetor x é

o mesmo para todos os possíveis eventos que venham a ocorrer no segundo estágio do problema (Birge e Louveaux, 1997).

2.5. Pesquisa Operacional Aplicada ao Planejamento de Lavra

As técnicas de pesquisa operacional (PO) foram aplicadas preliminarmente nos estágios de desenvolvimento e de extração, onde as principais decisões incluem a definição de quando e como lavar a jazida mineral. O processo de extração consiste em determinar como lavar os diversos materiais e posteriormente a destinação de tais materiais, além dos tipos e quantidades de equipamentos que são também decisões necessárias ao processo de extração.

No que diz respeito a operações de lavra a céu aberto, os principais problemas são definir a cava final e o sequenciamento da lavra. Para tanto, tradicionalmente, são necessárias análises preliminares que determinem:

- a) Um modelo da mineralização no qual o depósito é discretizado em um conjunto de blocos, em que cada bloco contém as informações de volume, materiais e suas propriedades correspondentes como densidade, teores e demais atributos, obtidos através de furos de sondagem.
- b) O valor econômico de cada bloco, resultante da comparação entre o preço do metal a ser lavrado e os custos de lavra e beneficiamento do mesmo.
- c) Um modelo geométrico/geotécnico que garanta a estabilidade dos taludes da cava e o acesso dos equipamentos.

Dois métodos clássicos principais são aplicados para determinação da cava final: O método dos cones flutuantes (Laurich, 1990) e o método de Lerchs e Grossmann (1965).

Segundo Hochbaum e Chen (2000) a determinação da cava ótima pode ser modelado como um problema de programação linear, como descrito a seguir:

$$\begin{aligned} & \max \sum_b v_b y_b \\ & \text{Sujeito a} \\ & y_b < y_{b'} \quad \forall (b, b') \in B, \\ & 0 \leq y_b \leq 1. \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Onde $(b, b') \in B$ representa o conjunto de precedências entre os blocos, v_b é o valor econômico obtido pela extração do bloco b e y_b é uma variável binária que assume o valor 1 se o bloco é extraído e faz parte da cava final e 0 no caso contrário.

Lerchs e Grossmann (1965), especificamente, usaram um algoritmo de fechamento máximo que explora a malha de ligação entre os blocos para atingir uma solução ótima.

2.5.1. Modelos de Sequenciamento de Lavra

Os problemas de sequenciamento de lavra além de determinar quais blocos remover, isto é, quais blocos são economicamente viáveis, procura otimizar a sequência de extração dos blocos ao longo do tempo. Ao introduzirmos o fator tempo nos modelos de otimização torna-se possível a aplicação de restrições nos recursos alocados, como capacidade de lavra e capacidade de beneficiamento, bem como a aplicação de desconto do valor econômico dos blocos ao longo do tempo.

Segundo Osanloo *et al* (2007), muitas pesquisas vêm sendo desenvolvidas para solução de problemas de sequenciamento de lavra, sendo que desde 1965 muitos tipos de formulações matemáticas foram considerados, incluindo programação

linear (PL), programação inteira mista (MIP), programação inteira pura e programação dinâmica (DP). Os métodos desenvolvidos podem ser classificados em três categorias:

- Métodos exatos (Dagdelen e Johnson, 1986; Caccetta e Hill, 2003; Ramazan, 2007; Boland *et al.*, 2009);
- Métodos heurísticos e meta-heurísticos (Gershon, 1987; Denby e Schoeld, 1994; Ferland *et al.*, 2007; Chatterjee *et al.*, 2010);
- Métodos híbridos (Tolwinski e Underwood, 1996; Sevim e Lei, 1998; Moreno *et al.*, 2010).

Segundo Johnson (1969), o problema de otimização do sequenciamento de lavra pode ser modelado da seguinte maneira:

$$\max \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^N C_i^{tm} TB_i x_i^{tm} \quad (2.4.8)$$

Sujeito a

$$G_{min}^{tm} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^N g_i TB_i x_i^{tm}}{\sum_{i=1}^N TB_i x_i^{tm}} \right) \leq G_{max}^{tm} \quad \forall \quad t = 1, \dots, T; \quad m = 2, \dots, M \quad (2.4.9)$$

$$PC_{min}^{tm} \leq \sum_{i=1}^N TB_i x_i^{tm} \leq PC_{max}^{tm} \quad \forall \quad t = 1, \dots, T; \quad m = 2, \dots, M \quad (2.4.10)$$

$$MC_{min}^t \leq \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M TB_i x_i^{tm} \leq MC_{max}^t \quad \forall \quad t = 1, \dots, T \quad (2.4.11)$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M x_i^{tm} = 1 \quad \forall \quad i = 1, \dots, N \quad (2.4.12)$$

$$\sum_{m=1}^M x_i^{tm} - \sum_{r=1}^t \sum_{m=1}^M x_i^{rm} \leq 0 \quad \forall \quad t = 1, \dots, T; \quad b = 1, \dots, N; \quad \forall l \in \Gamma_b \quad (2.4.13)$$

$$0 \leq x_i^{tm} \leq 1 \quad (2.4.14)$$

Onde:

T = número máximo de períodos a sequenciar

N = número máximo de blocos a sequenciar

i = índice dos blocos

b = índice dos blocos lavrados no período t

Γ_b = conjunto dos índices definidos pra o bloco b , consiste nos índices de todos os blocos que devem ser removidos para a extração do bloco b segundo um ângulo máximo de talude.

l = contador de $l \in \Gamma_b$

m = destinação dos materiais (ex.: estéril=1, minério=2, ...)

C_i^{tm} = VPL resultante da lavra e beneficiamento do bloco i a ser lavrado no período t como material m

x_i^{tm} = proporção do bloco i a ser lavrado no período t como material m

g_i = teor médio do bloco i

TB_i = massa total do bloco i

G_{min}^{tm} = teor médio mínimo admitido na usina, considerando o material m no período t

G_{max}^{tm} = teor médio máximo admitido na usina, considerando o material m no período t

PC_{min}^{tm} = Capacidade mínima de beneficiamento do material m no período t

PC_{max}^{tm} = Capacidade máxima de beneficiamento do material m no período t

MC_{min}^t = Capacidade mínima de lavra no período t

MC_{max}^t = Capacidade máxima de lavra no período t

Este modelo considera o valor do dinheiro no tempo, múltiplos materiais e rotas de processo e uma estratégia dinâmica de teor de corte (por período e material). Na solução deste modelo de PL o problema de programação da produção multiperíodos é decomposto em um problema principal e um conjunto de subproblemas, usando o princípio de decomposição de Dantzig-Wolfe¹. Cada subproblema é solucionado como um problema de único período que tem as mesmas características do problema de cava ótima, para tanto pode ser utilizado um algoritmo de fluxo máximo em redes, posteriormente, com os subproblemas solucionados, é possível obter a solução do problema principal. Apesar do método de Johnson (1969) gerar resultados ótimos para cada período individualmente, uma solução ótima para o problema completo não é garantida, esta metodologia também tornou claro que modelos de PL apresentam limitações quanto à lavra parcial dos blocos.

Naturalmente que o método ilustrado é um exemplo simples de modelagem, sendo que para cenários mais complexos é possível incluir pilhas de estoque como em Caccetta e Hill (2003) e blendagem (Whittle, 2007; Ramazan e Dimitrakopoulos, 2007), porém, tais modelos dificultam o uso de modelos de programação linear. Gershon (1983) apresenta uma abordagem combinando modelos de PL e MIP para otimização do sequenciamento. Dagdelen e Johnson (1986) formularam o problema de sequenciamento de longo prazo da produção sob um modelo MIP e

¹ O princípio da decomposição de Dantzig-Wolfe, originalmente desenvolvida pelos matemáticos norte-americanos George Dantzig e Phil Wolfe, foi publicado em 1960, dando início a um intenso trabalho de pesquisa na área de programação matemática em larga escala. Este procedimento é mais adequado quando aplicado à problemas lineares cuja matriz de coeficientes tem uma estrutura angular, isto é, um ou mais blocos independentes ligados por equações acopladas. Ele opera formando um “problema mestre” equivalente, com poucas linhas, mas com número muito maior de colunas. Este problema é então resolvido sem tabular todas as colunas, gerando-as sempre que o método simplex precisa, usando uma técnica conhecida com geração de coluna. O algoritmo envolve iterações entre um conjunto de subproblemas cuja função objetivo contém parâmetros variáveis e um problema mestre. O subproblema recebe um conjunto de parâmetros do problema mestre e então envia suas soluções para o problema mestre, que combina esta solução com a solução anterior e computa novos parâmetros.

aplicou métodos de sub-gradiente e de Relaxação Lagrangeana² para solução do problema.

Uma das maiores limitações dos primeiros modelos MIP para sequenciamento de lavra estava em resolver problemas de grande escala, já que estes precisam de uma quantidade grande de variáveis binárias. Os modelos baseados em PL quase sempre utilizam metodologias de lavra fracionada dos blocos, que resultam em sequências de lavra operacionalmente inviáveis e sub-ótimas. Ramazan (2007) propôs um novo método baseado no conceito de “árvore fundamental”, um método de agregação, reduzindo substancialmente o número de variáveis binárias nos modelos MIP para sequenciamento de longo prazo. Ramazan e Dimitrakopoulos (2004) também apresentaram uma metodologia alternativa para redução do número de variáveis binárias. A agregação, que combina os blocos em conjuntos de propriedades similares, tem tido um papel importante na redução do tamanho dos modelos de otimização do sequenciamento de lavra.

Nasab *et al.* (2010) apresentaram a aplicação prática de um modelo MIP para o problema de sequenciamento da produção em cava a céu aberto, para reduzir a quantidade de variáveis binárias na formulação agregaram os blocos em unidades maiores que representam polígonos de lavra.

2.6. Planejamento Estocástico de Lavra

Os investimentos em projetos de mineração, assim como na maioria dos negócios, estão sujeitos e são susceptíveis a riscos e incertezas. Riscos de gerenciamento,

² Na Relaxação Lagrangeana as restrições complicadas são retiradas do conjunto de restrições e adicionas à função objetivo como uma penalização. Dado um vetor de multiplicadores positivos, a Relaxação Lagrangeana sempre nos fornece um limite inferior para o valor ótimo do problema original. O problema dual Lagrangeano consiste em encontrar o maior limitante inferior. Normalmente, o problema dual Lagrangeano é resolvido através de um processo iterativo onde em iterações subseqüentes, o vetor de multiplicadores de Lagrange é atualizado e resolvemos um novo problema com os novos multiplicadores.

financeiros, associados ao país, ambientais, operacionais, técnicos e riscos associados ao recurso mineral são os mais importantes ligados aos negócios em mineração.

O Planejamento estocástico de lavra é o conjunto de técnicas, algoritmos e modelos matemáticos inovadores que proporcionam a incorporação dos riscos e incertezas, relacionados ao recurso mineral, no processo de gestão e otimização de lavra, com o objetivo de maximizar o valor dos projetos de mineração, levando em consideração o caráter estocástico das variáveis, ignorado nas abordagens determinísticas.

Tradicionalmente, a determinação da distribuição espacial de teores em um modelo de minério é baseada em técnicas geoestatísticas de estimativa, das quais, a mais aplicada na indústria mineral é a krigagem ordinária. A principal característica das técnicas de estimativa, sejam elas geoestatísticas ou não, é que elas são incapazes de reproduzir a variabilidade espacial *in-situ* como inferida a partir dos dados disponíveis (furos de sondagem ou amostras de perfuratriz). Ignorar tal consequente fonte de incerteza e risco pode levar a planos de lavra pouco realísticos (Dimitrakopoulos *et al.* 2002).

A capacidade de avaliação dos riscos reais do projeto está diretamente ligada ao seu valor econômico. Quanto mais controle se tem sobre os riscos de um Projeto maior é o valor agregado às reservas declaradas e melhor a base de informações disponíveis para tomadas de decisão, em função da menor exposição ao risco. Em se tratando de projetos de mineração, em que o maior patrimônio é o recurso mineral existente e passível de aproveitamento econômico, as incertezas geológicas (geometria do corpo de minério) e as relacionadas à distribuição espacial dos teores na jazida (incerteza geoquímica) são as mais importantes. O controle dessas duas fontes principais de incerteza passa por estágios onde a capacidade de análise e gestão do risco aumenta de modo a obter-se o maior nível possível de análise e mitigação dos riscos associados ao valor do empreendimento.

A Figura 14 ilustra os estágios básicos possíveis no desenvolvimento de técnicas de gestão de incertezas geológicas e geoquímicas, para os quais existem ferramentas geoestatísticas específicas em variados graus de desenvolvimento e aplicação prática (Dimitrakopoulos *et al.*, 2002). No primeiro estágio as incertezas são simplesmente ignoradas (maior risco ao projeto), no estágio intermediário a incerteza geoquímica é avaliada dentro de limites geológicos interpretados, com uso de simulação estocástica, já no estágio mais avançado, tanto a incerteza geológica quanto a geoquímica podem ser avaliadas com uso, por exemplo, de geoestatística de múltiplos pontos (*multi-point geostatistics*) e demais métodos de simulações estocásticas.

Fonte: Adaptado de Dimitrakopoulos *et al.* (2002)

De modo a lidar com a distribuição espacial de determinado atributo de um depósito mineral, vários modelos do depósito podem ser condicionalmente gerados tendo como base um mesmo conjunto de dados e suas características estatísticas. Esses modelos são todos destinados a:

- a) Reproduzir as informações amostrais disponíveis e suas estatísticas;
- b) Representar modelos equiprováveis da real distribuição espacial dos teores;

A disponibilidade de múltiplos modelos equiprováveis de um depósito a ser lavrado possibilita ao planejamento de lavra avaliar a sensibilidade dos algoritmos de otimização do sequenciamento de lavra, com relação à incerteza geológica (estimativa de teores). Essa abordagem vem sendo proposta por vários autores nos últimos 20 anos (David, 1988; Journel, 1992; Ravenscroft, 1992; Dimitrakopoulos, 1998; Dimitrakopoulos *et al.*, 2005; Dimitrakopoulos e Ramazan, 2008; Kent *et al.*, 2007; Godoy e Dimitrakopoulos, 2010; Freitas, 2009; Freitas *et al.*, 2012; entre outros). A Figura 15 ilustra a diferença entre o processo tradicional usado para converter um recurso mineral em reserva técnico-economicamente lavrável e a abordagem baseada em análise de risco, utilizando-se técnicas de simulação condicional.

Figura 15 - Estimativa de recursos e planejamento de lavra, do ponto de vista tradicional e pela visão orientada a gestão de risco.

Fonte: Adaptado de Godoy e Dimitrakopoulos (2010)

A seguir serão descritas as principais abordagens de planejamento estocástico desenvolvidas para cada etapa do ciclo de planejamento de lavra.

2.6.1. Planejamento estratégico e de longo prazo

2.6.1.1. Otimização de cava e “pushbacks”

Godoy e Dimitrakopoulos (2010) ilustraram diferentes aplicações de análise de risco, quantificando os efeitos da incerteza nos teores em vários aspectos do processo de definição da cava final e seleção de *pushbacks*, usando tabelas, gráficos e mapas estabeleceram uma série de procedimentos para avaliar informações valiosas que podem ser usadas para desenvolver estratégias de planejamento resilientes³ às incertezas geológicas.

Dimitrakopoulos e Abdel-Sabour (2007) propõe um método de opções reais de valoração (*ROV - Real Options Valuation*), baseado em simulação de Monte Carlo e simulação geoestatística, que considera múltiplas incertezas e a variabilidade de parâmetros do fluxo de caixa que caracterizam os projetos de mineração. Apresentam um exemplo para investigar o impacto que a metodologia ROV pode ter sobre a rentabilidade do projeto, através da melhoria do processo de tomada de decisão onde um estudo de caso envolvendo seleção de cava final mais rentável e sequência de produção para uma mina de ouro australiana, sob múltiplas fontes de incerteza, é fornecido. Tanto o método convencional (de análise de fluxo de caixa e VPL) e o método de opções reais de avaliação (*ROV*) são aplicados para avaliar os vários planos de lavra tecnicamente viáveis com sequenciamento fixo, de modo a selecionar o mais atraente economicamente. Os resultados mostram que o projeto baseado na maximização de valor indicado pelo método VPL estático é diferente daquele da metodologia ROV. A comparação entre os valores de cavas finais estimados com base nos dados de mercado recomendados pelas duas técnicas

³ Segundo Christopher (2003), no contexto da gestão de risco em cadeias produtivas, **Resiliência** é a habilidade de um sistema (ou cadeia produtiva) de retornar ao seu estado original ou adaptar-se a um novo e mais adequado estado, depois de perturbado. Implícita na definição de resiliência está a noção de **flexibilidade** e, como o estado desejável pode ser diferente do original, **adaptabilidade** é também um fator importante.

indica que o valor do método ROV é entre 11 e 18% mais elevada do que o valor da cava final definida pelo método do VPL.

Meagher et al (2009) apresentam uma metodologia ROV para incorporar as incertezas geológicas e de mercado na forma de modelos estocásticos, integrando flexibilidade na destinação dos blocos no processo de valoração dos mesmos durante o planejamento de lavra. O resultado dessa modelo ROV são valores econômicos esperados descontados em função do tempo, que capturam o valor da flexibilidade gerencial ao invés de um valor estático. Um algoritmo paramétrico de corte mínimo é aplicado para produzir um único desenho de cava, considerando um conjunto de simulações estocásticas da mineralização, gerando *pushbacks* com VPL e desvios com relação às metas de produção otimizados.

Consuegra e Dimitrakopoulos (2010) utilizaram um modelo de programação estocástica inteira (*SIP-stochastic integer programming*) para incorporar incertezas geológicas ao processo de definição de *pushbacks*. Sua metodologia consiste na parametrização da cava final, gerando cavas intermediárias que são posteriormente agrupadas de modo a gerar o número de *pushbacks* desejado e, finalmente, utilizando-se SIP para gerar o sequenciamento de lavra da cava final, baseado nas cavas intermediárias geradas previamente, com VPL máximo e minimizando os desvios com relação às metas de produção. A metodologia foi testada em um depósito de cobre pórfiro e os resultados mostraram a sensibilidade do VPL nos *pushbacks*, além de obter um incremento de 30% no VPL quando comparado com técnicas convencionais (utilizando o algoritmo Milawa do software Whittle).

2.6.1.2. Estratégia de teor de corte

Vidal e Dimitrakopoulos (2011) apresentam um novo método para determinação de estratégias de teor de corte durante a seleção de *pushbacks*, através de uma formulação matemática que determina simultaneamente a sequência de lavra e os teores de corte ótimos, além disso, o método leva em consideração a incerteza dos teores através do uso de simulações geoestatísticas do depósito, gerando assim

um sequenciamento de máximo VPL e alta probabilidade de alcançar os altos teores planejados.

Asad e Dimitrakopoulos (2013) apresentam uma modificação da abordagem heurística aplicada por Lane (1988) para otimização de teor de corte, que leva em consideração a incerteza do recurso mineral, na forma de um conjunto de curvas de tonelagem-teor. Apesar de considerar várias curvas de tonelagem-teor o método heurístico proposto sugere uma única estratégia de teores de corte capaz de manter o fluxo de caixa para maximizar o VPL do sequenciamento de lavra de longo prazo, considerando os possíveis cenários de variação de teor, proporcionando ferramentas para avaliar estratégias alternativas antes de investimentos significativos e garantindo a utilização sustentável do recurso mineral sob incerteza.

2.6.1.3. Sequenciamento de Lavra

Muitos métodos vêm sendo desenvolvidos com o objetivo de incorporar as incertezas geológicas no processo de sequenciamento de lavra. Godoy e Dimitrakopoulos (2004) implementaram um algoritmo de *simulated annealing* para controlar a incerteza no processo de determinação do período de lavra do bloco para minimizar o risco de desvios de metas de produção.

Golamnejad et al. (2006) propôs uma formulação determinística que seria equivalente à formulação estocástica para sequenciar a produção ao longo da vida da mina. Sua idéia foi substituir as variáveis de restrições estocásticas por variáveis determinísticas não lineares, porém considerações irreais tiveram que ser adotadas como, por exemplo, a de que a distribuição dos teores em um bloco é normal ou gaussiana, o que nunca é o caso em problemas de mineração.

Menabde et al. (2007) introduziu uma formulação baseada em programação estocástica para otimização simultânea do sequenciamento de lavra e da estratégia

de teores de corte, em sua pesquisa é enfatizado que o tamanho do problema de sequenciamento se torna proibitivo, impondo dificuldades computacionais ao processo de otimização, para resolver essa questão utilizou agregação dos blocos em unidades maiores reduzindo assim o número de variáveis binárias de decisão.

Ramazan e Dimitrakopoulos (2004) introduziram restrições probabilísticas ao modelo convencional (determinístico) de programação inteira mista buscando controlar o risco de um bloco estar acima ou abaixo de um determinado teor de corte, apesar de que a probabilidade é um parâmetro único que não descreve totalmente a incerteza de teor no depósito.

Buscando controlar efetivamente as incertezas dos teores, Ramazan e Dimitrakopoulos (2007) introduzem um modelo SIP que visa maximizar o fluxo de caixa descontado e minimizar os desvios com relação às metas de produção ao longo da vida da mina. O gerenciamento do risco é obtido incorporando-se uma taxa de desconto de risco geológico (*GRD-Geological Risk Discount*) no cálculo dos custos que penalizam tanto o déficit quanto o excesso de produção. Ao invés de um teor de corte tradicional, um teor de corte probabilístico é usado para classificar os blocos em minério e estéril. Posteriormente Leite e Dimitrakopoulos (2007) estudaram a variação do teor de corte probabilístico e seus impactos na efetividade do sequenciamento de lavra gerado pela formulação introduzida por Dimitrakopoulos e Ramazan (2004).

Diedrich (2012) apresenta um método de incorporação da incerteza dos teores no sequenciamento de lavra, pela otimização de uma medida de risco (ESR), usando um algoritmo de *simulated annealing* e definindo classes de risco que devem ser posteriormente consideradas como guia em processos de sequenciamento de lavra manuais ou por programação matemática. O método foi aplicado a um estudo de caso no planejamento de lavra anual na mina do Sossego e indicou potencial de minimização dos riscos de não alcance das metas de produção.

Freitas *et al* (2012) aplica métodos de quantificação e gerenciamento de risco na otimização e desenho de cava final, sequenciamento fases de lavra e produção em

uma mina de cobre a céu aberto⁴. As análises forneceram informações para tomada de decisões de aversão e mitigação de riscos que incluíram atraso em dois anos no início da lavra de áreas com maior risco (fase de lavra mais externa), combinação entre fases de lavra objetivando a minimização dos riscos ao longo do sequenciamento manual da lavra e desenvolvimento de campanhas de sondagem para maior conhecimento geológico e controle das incertezas. Neste estudo nenhum algoritmo de otimização orientado ao risco foi utilizado, apenas comparação e mudanças no sequenciamento da lavra baseado no perfil de risco das diferentes fases de lavra.

2.6.2. Planejamento de curto prazo

Godoy et al. (2001) apresentam um método de otimização aplicado à etapa de controle de teor na lavra, incorporando a incerteza dos teores dos blocos e o uso de funções econômicas de perda e ganho no processo de classificação entre minérios e estéril ao invés de aplicar um teor de corte determinístico em teores estimados, com o objetivo de reduzir os erros de classificação dos blocos decorrentes da incerteza dos teores.

2.7. Programação Matemática Orientada ao Risco

Existem muitos métodos desenvolvidos para integração da incerteza no planejamento de lavra incluindo métodos heurísticos, programação linear inteira mista e programação estocástica. Serão descritos o método de *Simulated Annealing* e de *SIP*, que são os mais desenvolvidos desde que as pesquisas neste campo começaram.

⁴ A mina é a mesma do presente estudo, localizada na região de Carajás no Pará.

2.7.1. Simulated Annealing

Simulated annealing (Kirkpatrick et al, 1983) é um método heurístico que integra as estratégias de criação de algoritmos “divisão e conquista” e “melhoramento iterativo” e sua aplicação tem como pré-requisitos:

- i. Descrição concisa da configuração do sistema
- ii. Gerador aleatório dos rearranjos dos elementos do sistema
- iii. Função objetivo que quantifique as tentativas realizadas
- iv. Critério de finalização para o algoritmo

O algoritmo realiza a ponderação da configuração inicial do sistema usando o fator de probabilidade de Boltzmann, aumentando então sua “temperatura” até que ele atinja o estado de fusão, posteriormente dá-se o arrefecimento da configuração do sistema, de modo gradual, até que o critério de finalização seja alcançado. O fator de probabilidade de Boltzmann é definido como $e^{-(E\{r_i\}/k_bT)}$, onde $E\{r_i\}$ é a energia do sistema baseada na configuração r de i elementos, k_b é a constante de Boltzmann e T é a temperatura do sistema a qual é quantificada em cada estágio pela função objetivo e força o processo a permitir grandes mudanças na configuração do sistema em altas temperaturas enquanto pequenas mudanças na configuração do sistema são postergadas até baixas temperaturas, produzindo uma forma adaptada da estratégia “divisão e conquista”, além disso, a temperatura também controla a estratégia de “melhoria iterativa”, aceitando as mudanças que resultem em máximos da função objetivo, a fim de evitar que o processo de otimização pare em configurações ótimas locais.

Godoy (2003) apresentou uma metodologia de sequenciamento de lavra baseada no método “*simulated annealing*” que incorpora a incerteza considerando uma cava final fixa para um conjunto de modelos simulados estocasticamente e taxa de lavra constante. A ideia é determinar um sequenciamento de produção que minimize os desvios com relação às metas de produção de minério e estéril pelo gerenciamento da incerteza dos blocos de lavra em um dado período. Os estágios desta abordagem são:

- i. Definição da cava de exaustão baseado no modelo estimado por *krigagem*;
- ii. Realização de sequenciamentos de lavra no limite da cava de exaustão predefinida para cada modelo simulado;
- iii. Uso da simulação “*annealing*” considerando os sequenciamentos gerados anteriormente para obter um único sequenciamento que atinja as metas de produção. Sendo os principais parâmetros desta técnica:
 - a. Número de sequências de lavra de entrada
 - b. Parâmetros relacionados ao processo de “*annealing*”
 - c. Metas de produção de minério e estéril

No problema em questão a função objetivo é definida como uma medida da diferença entre as características desejadas e as de um sequenciamento candidato. Consideremos, assim, o objetivo de alcançar taxas de produção ótimas de minério e estéril para cada período de um sequenciamento de lavra plurianual. Se este sequenciamento atinge as metas, considerando todos os modelos simulados, temos 100% de chance de que as metas de produção serão alcançadas, dado o conhecimento do modelo de minério representado pelas simulações estocásticas. Sendo assim, a função objetivo que represente o desvio médio com relação às metas de produção para um dado sequenciamento de lavra em um sistema de modelos de teor simulados é definida por:

$$O = \sum_{n=1}^N O_n \quad (2.7.1)$$

Onde O_n , $n = 1, \dots, N$ são os componentes da função objetivo para um dado período de lavra. Então, para todos os n componentes a função objetivo mede o desvio médio entre a produção de minério $\theta^*(s)$ e estéril $\omega^*(s)$ da sequência de lavra perturbada e a meta de produção de minério $\theta(s)$ e estéril $\omega(s)$, para cada modelo simulado de teor, com $s = 1, \dots, S$, como segue:

$$O_n = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S |\theta^*(s) - \theta(s)| + \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S |\omega^*(s) - \omega(s)| \quad (2.7.2)$$

O mecanismo de perturbação consiste na troca de um bloco selecionado aleatoriamente a partir de seu período real para um período candidato, que é determinado pelo período dos blocos na vizinhança, pela probabilidade do bloco pertencer ao período candidato e pela satisfação das restrições de ângulo máximo de talude entre os blocos. Assim, a decisão de aceitar ou rejeitar uma perturbação é baseada na mudança da função objetivo:

$$\Delta O = \sum_{n=1}^N \Delta O_n \quad (2.7.2)$$

E na distribuição de probabilidade de aceitação:

$$P\{a\} = \begin{cases} 1, & \text{se } O_{atual} \leq O_{anterior} \\ e^{\frac{O_{anterior} - O_{atual}}{T}}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.7.3)$$

Considerando-se a perturbação em que um bloco é trocado do período x para um período y , os únicos dois n componentes da função objetivo O_n que precisam ser atualizados são O_x e O_y , atualizando a função objetivo de $O_{anterior}$ para O_{atual} por:

$$O_{atual} = O_{anterior} - O_x - O_y + O'_x + O'_y \quad (2.7.4)$$

Onde O'_x e O'_y são as componentes da função objetivo após a perturbação.

O método apresentado proporciona uma maneira de obtenção de um sequenciamento de lavra único que minimiza as chances de desvio com relação às metas de produção, considerando os modelos simulados que representam a incerteza na distribuição espacial dos teores no depósito. Os múltiplos estágios desta metodologia são ilustrados na Figura 16.

Figura 16 – Estágios da metodologia de otimização de sequenciamento de lavra baseado em “simulated annealing”

Fonte: Adaptado de Godoy (2003)

2.7.2. Programação estocástica

Nesta abordagem introduzida por Ramazan e Dimitrakopoulos (2007) o processo de otimização é baseado no valor econômico V_i de cada bloco i ($i = 1, \dots, N$) que pertencem ao conjunto de blocos a serem sequenciados. O valor econômico de cada bloco EV_i é calculado com base em seu retorno esperado, definido como a receita (NR_i) resultante da venda do metal contido no bloco. Sendo PC_i e MC_i os custos de beneficiamento e de lavra do bloco respectivamente, o valor do bloco é calculado por:

$$EV_i = \begin{cases} NR_i - MC_i - PC_i & \text{se } NR_i > PC_i \quad \text{então, o bloco } i \text{ é minério} \\ -MC_i & \text{se } NR_i \leq PC_i \quad \text{então, o bloco } i \text{ é estéril} \end{cases} \quad (2.7.5)$$

Com:

$$NR_i = T_i * G_i * Rec_i * (P_v - C_v) \quad (2.7.6)$$

Onde T_i é a massa do bloco, G_i é o teor do bloco, Rec_i é o percentual de recuperação do beneficiamento, P_v é o preço de venda do metal e C_v é o custo de venda do metal.

Considerando um conjunto de modelos de simulação estocástica da mineralização ($s = 1, \dots, M$), o valor esperado do bloco no período t é dado por:

$$\mathbb{E}(EV)_i^t = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^M \{EV_i\}_s^t \quad (2.7.7)$$

E o valor presente considerando a taxa de desconto R é:

$$\mathbb{E}\{(VPL)_i^t\} = \frac{\mathbb{E}(EV)_i^t}{(1 + R)^t} \quad (2.7.8)$$

A função objetivo deste problema envolve a maximização do valor presente líquido esperado $\mathbb{E}\{(VPL)_i^t\} = V_i^t$, o qual é obtido pela lavra de um bloco em um dado período de lavra, minimizando o risco de não alcance de metas de produção, considerando o conjunto M de simulações estocásticas do depósito:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{t=1}^P \left\{ \sum_{i=1}^N V_i^t b_i^t \right. \\ & \left. - \sum_{s=1}^M (c_u^{to} d_{su}^{to} + c_l^{to} d_{sl}^{to} + c_u^{tg} d_{su}^{tg} + c_l^{tg} d_{sl}^{tg} + c_u^{tq} d_{su}^{tq} + c_l^{tq} d_{sl}^{tq}) \right\} \quad (2.7.9) \end{aligned}$$

Onde $b_i^t = \begin{cases} 1, & \text{se o bloco } i \text{ é lavrado no período } t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

d_{su}^{to} = Quantidade excessiva u de minério o produzida no período t considerando o modelo simulado s . Sendo que na Eq.(2.7.9) no lugar de o , g representa o teor e q representa a quantidade de metal.

c_u^{to} = Custo unitário para d_{su}^{to} .

d_{sl}^{to} = Quantidade deficiente l de minério o produzida no período t considerando o modelo simulado s .

c_l^{to} = Custo unitário para d_{sl}^{to} .

O gerenciamento do risco é obtido pela introdução de uma taxa de desconto do risco geológico, GRD (*Geological Risk Discount*), no cálculo dos custos que penalizam as produções excessivas e deficientes. Considerando um GRD de valor d , o valor unitário dos desvios é definido com:

$$c_u^{to} = \frac{c_u^{00}}{(1 + d)^t} \quad (2.7.10)$$

$$c_l^{to} = \frac{c_l^{00}}{(1 + d)^t} \quad (2.7.11)$$

c_u^{00} e c_l^{00} são valores iniciais fixos para os custos no período “0” e permanecem constantes ao longo dos períodos no caso em que d for considerado “0”, porém pode-se incorporar um controle maior dos riscos em função do tempo atribuindo valores maiores que “0” ao fator de desconto d .

A função objetivo é sujeita a restrições de capacidade de lavra, capacidade de alimentação da planta, reserva mineral, blendagem de teor, estoque de minério e ângulos de talude.

Esta abordagem tem a vantagem de incorporar diretamente as incertezas na formulação do problema, proporcionando maior gerenciamento dos riscos no processo de otimização.

2.8. Simulação em Problemas de Mineração

A tendência atual em equipamentos para indústria mineral pode ser resumida em duas áreas distintas, porém relacionadas, (i) porte e (ii) tecnologia embarcada.

Nas minas a céu aberto os equipamentos utilizados são cada vez maiores, por exemplo, Caterpillar e Komatsu já possuem caminhões fora de estrada com capacidades entre 360 e 400 toneladas, minas de grande porte no Brasil já incorporaram equipamentos deste porte, buscando redução de custos. Tanto em

minas subterrâneas quanto em minas à céu aberto os equipamentos vêm se tornando extremamente avançados tecnologicamente, estão sendo desenvolvidos caminhões autônomos para ambas as aplicações (Komatsu, 1999).

Com esse rápido desenvolvimento de novas tecnologias e equipamentos, gerentes e engenheiros mecânicos encaram uma diversidade de decisões que vão desde qual equipamento adquirir até qual estratégia de manutenção adotar. Essa evolução nos equipamentos de lavra torna necessário o desenvolvimento de melhores técnicas para tomada de decisão no que diz respeito à gestão dos mesmos, sobretudo devido ao fato de que o aumento do porte dos equipamentos tem um limite, a partir do qual as oportunidades de redução de custos em sistemas de carregamento e transporte dependerão do aumento de produtividade dos equipamentos, através da gestão otimizada da confiabilidade, disponibilidade, manutenção e planejamento do transporte, incluindo estratégias de alocação e despacho.

Com foco nessa oportunidade de redução de custo, um esforço muito grande vem sendo aplicado para desenvolver um método de gestão que transforme essa oportunidade em lucro e uma melhoria geral da frota de equipamentos. Várias pesquisas apresentam soluções baseadas em otimização de diferentes funções objetivo que envolvem problemas de minimização de custos de transporte e manutenção, minimização da demanda de transporte, maximização da quantidade de material transportado, minimização dos tempos de ciclo, espera e ociosidade de caminhões e escavadeiras, entre outros.

Os modelos de simulação de sistemas de carregamento e transporte visam reproduzir o comportamento real desses sistemas, o carregamento e o transporte dos materiais são simulados em um ambiente estocástico, que permite recriar as ocorrências determinísticas e aleatórias de eventos como falhas, manutenções preventivas e corretivas e paradas operacionais. Funções de distribuição de probabilidade são atribuídas, baseadas em dados históricos da operação, aos tempos das ocorrências e durações dos eventos aleatórios e processos de lavra.

2.8.1. Confiabilidade e disponibilidade

Os custos de manutenção em minerações de grande porte representam entre 40% e 60% dos custos operacionais, ocasionados por diversos fatores que incluem:

- (i) ambiente adverso para a operação dos equipamentos,
- (ii) mudanças nas características do minério,
- (iii) problemas de logística e mão de obra em áreas remotas e
- (iv) necessidade de manutenção de grandes estoques de peças.

A parcela significativa de custos operacionais que a manutenção representa, a tendência de maior porte e complexidade dos equipamentos e as condições operacionais extremas citadas anteriormente tornam evidente a necessidade de desenvolvimento de métodos mais rigorosos para tomada de decisão relacionadas aos equipamentos na indústria mineral.

Nesse contexto, a avaliação da confiabilidade mecânica dos equipamentos, baseada em um modelo estatístico, construído a partir de dados históricos da frota, através da simulação estocástica, é uma ferramenta cada vez mais utilizada na seleção de equipamentos, definição de estratégias de manutenção e substituição dos equipamentos e consequentemente contribui para um planejamento de lavra mais robusto no que diz respeito à estimativa da capacidade de produção da frota, por considerar o comportamento estocástico da disponibilidade mecânica, representada pelo perfil de eventos de falha de cada equipamento (Hall, 2000).

Cao *et al.* (2013) estimam o custo associado à disponibilidade de um sistema de processamento químico industrial, usando uma técnica de simulação de eventos discretos e o mecanismo de otimização de alocação orçamentária (*OCBA-Optimal Computing Budget Allocation*) com o objetivo de definir a melhor estratégia de manutenção para o sistema.

Mena *et al.* (2013) apresentam um novo modelo de simulação e otimização de produtividade de sistemas de carregamento e transporte, no qual a disponibilidade

dos equipamentos é uma variável para determinação da função de produtividade do sistema. Este modelo é usado para alocação de caminhões em uma operação de mina a céu aberto, de acordo com seu desempenho operacional e considerando o caráter estocástico do comportamento do sistema, de modo a maximizar a produtividade da frota, composta por duas escavadeiras, quatro pás carregadeiras e trinta e um caminhões fora de estrada. O tempo entre falhas (TBF_e) dos equipamentos são incorporados ao modelo de simulação, admitindo-se que elas ocorrem em períodos aleatórios e são descritas por distribuições do tipo *Weibull* (Eq. 2.8.2) as quais tem seus parâmetros inferidos pelos dados históricos de cada equipamento e , o tempo médio entre falhas ($MTBF_e$) é a média da distribuição *Weibull*. Considera-se que o tempo necessário para reparo das falhas (TTR_e) ocorre segundo uma distribuição lognormal (Eq. 2.8.3) com parâmetros igualmente inferidos a partir dos dados históricos.

$$R_e(TBF_e) = e^{-\left(\frac{TBF_e}{\alpha_e}\right)^{\beta_e}} \quad (2.8.1)$$

$$MTBF_e = \alpha_e \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta_e}\right) \quad (2.8.2)$$

$$M_e(TTR_e) = \Phi\left(\frac{\ln(TTR_e) - \mu_e}{\sigma_e}\right) \quad (2.8.3)$$

$$MTTR_e = E^{\mu_e + \frac{1}{2}\sigma_e^2} \quad (2.8.4)$$

Onde, para cada equipamento e :

R_e é a função confiabilidade; TBF_e é o tempo entre falhas; α_e é o parâmetro de escala da distribuição Weibull; β_e é o parâmetro de forma da distribuição Weibull; $MTBF_e$ é o tempo médio entre falhas; Γ é a função gama; M_e é a função manutenção; TTR_e é o tempo necessário para reparo; Φ é a distribuição normal padrão; μ_e é a média da função de distribuição log-normal e σ_e é o desvio padrão da função de distribuição log-normal.

Hall (2000) introduz um método para suportar a tomada de decisão relacionada à gestão de equipamentos de lavra na qual são combinados técnicas de simulação e manutenção centrada em confiabilidade (*RCM – Reliability Centered Maintenance*). São ilustrados estudos de caso específicos que mostram a eficácia do método para aumento da confiabilidade em decorrência de uma gestão mais efetiva da manutenção, incorporada no modelo de simulação do processo produtivo.

2.8.2. Simulação de operações mineiras

Segundo Rodrigues (2006), a simulação é cada vez mais utilizada na mineração. Ela consiste em uma ferramenta que pode ajudar no melhoramento de operações de qualquer porção específica de uma mina e proporciona uma rápida avaliação de custos das operações complexas da mineração, como o projeto de uma mina ou o planejamento da operação. Segundo White et al. (1993), no setor mineral, a simulação é mais utilizada para avaliação e comparação entre cenários. Panagiotou (1999) afirma que as aplicações mais comuns no setor mineral são em sistemas de otimização e dimensionamento ou tomada de decisão. Para Vagenas (1999), a simulação vem sendo utilizada no setor mineral principalmente nos sistemas de transporte nas operações e nos planejamentos das minas, e no sequenciamento da produção. Segundo Chironis (1985), o primeiro sistema para o sequenciamento de caminhões na mineração foi implementado em uma mina de cobre no ano de 1975. Depois dessa data é possível encontrar diversos trabalhos na literatura que tratam da simulação e do problema de sequenciamento de caminhões em operações de lavra.

Merschmann (2002) desenvolveu um sistema computacional de otimização e simulação para o problema de planejamento operacional de lavra chamado OTISIMIN. O sistema de simulação utiliza o resultado do modelo de otimização. O modelo de programação linear utilizado na otimização considera as metas de qualidade, bem como a minimização do número de caminhões utilizados.

Tu e Hucka (1985) desenvolveram um modelo de simulação para analisar a produtividade de uma operação de carregamento e transporte por caminhões fora-de-estrada em uma mina a céu aberto. Além de permitir a análise das operações dos caminhões e das carregadeiras, o modelo também pode ser usado para avaliar diferentes arranjos de redes de transporte na fase de planejamento e/ou para comparar o desempenho esperado de alternativas de sistemas de despacho (sequenciamento) de caminhões.

Ramos Neto e Pinto (2004) desenvolveram um *template*, conjunto de módulos, chamado Mineração 1.0, para utilização no programa ARENA®, visando facilitar a modelagem e a simulação de operações de carregamento e transporte em minas a céu aberto. O template considera as atividades de carga, descarga, deslocamento vazio e carregado dos caminhões, além de paradas para manutenção dos equipamentos de carga e transporte, bem como a alocação estática e dinâmica de caminhões. Na alocação estática um determinado caminhão só pode realizar viagens a uma mesma frente. Na alocação dinâmica, um caminhão pode realizar viagens a diferentes frentes.

Guimarães *et al.* (2007) desenvolveram um modelo de simulação computacional para validar resultados obtidos pela aplicação de um modelo de programação matemática na determinação do ritmo de lavra em minas a céu aberto. Neste problema, sabe-se que cada frente possui características de qualidade diferentes e que o ritmo de lavra deve ser realizado de forma proporcional, gerando uma alimentação que atenda as metas de qualidade e produção preestabelecidas. Para atender esses objetivos utilizou-se a técnica de programação linear por metas, e para analisar a possibilidade de implantação dos resultados fez-se uso da simulação computacional.

Marin (2009) propõem uma metodologia para desenvolver planos de lavra que incorporem a incerteza em parâmetros operacionais através da aplicação de técnicas de simulação. Essa metodologia é testada em um estudo de caso de simulação de uma operação de lavra de carregamento e transporte. Os resultados comprovam os benefícios da aplicação da simulação estocástica para

determinação de metas de produção, além de identificar potenciais de aplicação no sentido de incorporar a incerteza geológica e de automação do processo de simulação.

3. Materiais e Métodos

Com base no tema estudado nesta pesquisa foi desenvolvido um método para incorporar modelos de simulação e otimização que considerem o caráter estocástico das variáveis de decisão no planejamento de lavra, no qual as principais etapas são:

- a) Gerenciamento do risco no ativo mineral
 - (i) Geração de modelos estocasticamente simulados do teor da mineralização;
 - (ii) Validação das simulações estocásticas através de reconciliação;
 - (iii) Desenvolvimento de programação matemática para cálculo de medidas de risco;
 - (iv) Cálculo do valor econômico do bloco considerando o conjunto de modelos simulados;
 - (v) Otimização do sequenciamento de lavra orientado ao risco;

- b) Gerenciamento do risco no ativo físico (frota de equipamentos)
 - (i) Coleta e validação de dados históricos dos equipamentos;
 - (ii) Obtenção das distribuições dos eventos a partir de dados históricos;
 - (iii) Simulação estocástica dos eventos de falha e paradas operacionais para cada frota de escavação e transporte;
 - (iv) Utilização das métricas de produção obtidas nas replicações como restrição no processo de otimização do sequenciamento de lavra orientada ao risco;

Tal abordagem eleva o processo de planejamento de lavra a um nível maior de gestão pela incorporação de ferramentas de análise e minimização dos riscos inerentes às estimativas de parâmetros operacionais e do modelo de recurso mineral, proporcionando informações que anteciparão a análise de cenários de não alcance das metas estabelecidas no planejamento, em decorrência das incertezas existentes.

3.1. Mina do Sossego

3.1.1. Geologia

A metodologia proposta foi aplicada no principal depósito da mina de cobre do Sossego, localizada no município de Canaã dos Carajás, no estado do Pará, Brasil. A capacidade de movimentação da mina é de 70 Mt/a e produção de 15 Mt/a de ROM, com produção de concentrado de cobre com teor médio de 30%. O concentrado é transportado em caminhões convencionais de 35 toneladas até a cidade de Parauapebas de onde segue em trens até o porto de Itaqui no Maranhão para exportação.

A Figura 17 mostra uma seção vertical no sentido S-N do depósito do Sequeirinho.

Figura 17 – Tipos litológicos, mineralização e zonas de alteração hidrotermal dos depósitos do Sequeirinho e Sossego.

Fonte: Adaptado de Augusto *et al.* (2008)

A mineralização do depósito Sequeirinho é estruturalmente controlada, cortando rochas vulcânicas félsicas, granitos e gabros. Essas rochas foram alteradas por processo hidrotermal para rochas ricas em actinolitita e magnetita. A mineralização está presente na forma de veios de calcopirita nas fraturas hidráulicas de brechas

hidrotermais e também na forma disseminada. Maiores detalhes sobre a mineralização são encontrados em Augusto *et al.* (2008).

3.1.2. Operação e planejamento da produção

A cava do Sequeirinho é caracterizada por lavra a céu aberto, desenvolvida desde 2003, em operação típica de carregamento e transporte, em bancos de 16 metros de altura. Atualmente está com aproximadamente 300 metros de profundidade, sendo que das seis fases de lavra previstas, três (fases 1, 2 e 3) já foram exauridas, duas (fases 4 e 6) estão em operação e uma (fase 5) deverá ser iniciada em meados de 2017. A cava de exaustão deve ser atingida em 2021 e alcançará profundidade aproximada de 500 metros (elevações de 240 à -248).

Figura 18 - Localização da cava do Sequeirinho, Mina do Sossego

Fonte: Adaptado de Google Maps (<https://maps.google.com.br>)

Após etapas de perfuração, desmonte por explosivos e carregamento, que é realizado por escavadeiras a cabo, escavadeiras hidráulicas e pás carregadeiras, os materiais são transportados por caminhões fora-de-estrada de 150 t ou 240 t, destinando-se o minério para o britador primário ou estoques de baixo teor e o

estéril para as pilhas existentes em volta da cava (Figura 18). A mina opera em três turnos de 8 horas cada um.

O processo de planejamento de lavra na mina do Sossego compreende as seguintes etapas:

- a) Planejamento de longo prazo: responsável pela definição das reservas minerais, otimização econômica de cava de exaustão, desenho de fases intermediárias de lavra (*pushbacks*), plano de lavra plurianual (*LOM – Life-of-Mine*), plano de produção de cinco anos ou plano de negócio e plano anual de orçamento, este último detalhado em períodos mensais.
- b) Planejamento de curto prazo: responsável pelos planos semestral, mensal, semanal e diário (*Line Up*).

Com exceção do sequenciamento de lavra plurianual (*LOM*), os avanços de lavra são projetados manualmente, usando-se ferramentas CAD de um software de planejamento (GEOVIA GEMS™ 6.1), obedecendo às metas de produção de minério e estéril pré-definidas, em simulações realizadas em planilhas eletrônicas (MS Excel™). Com o objetivo de aprimorar o processo de planejamento, sobretudo na capacidade de construção de múltiplos cenários de lavra, diminuição do tempo necessário para sequenciamento de lavra no modelo atual e integração do dimensionamento de equipamentos ao sequenciamento de lavra, o software de otimização *MSSO (MineSight Schedule Optimizer)* está sendo adotado no sequenciamento de médio e curto prazo.

Para auxiliar a gestão das operações de mina e o processo de planejamento de lavra, a mina conta com um sistema de despacho (Dispatch™ Modular), um sistema interno de informações e monitoramento de indicadores operacionais (CIG – Centro de Informações Gerenciais) e um sistema de controle das atividades diárias programadas (*Line Up*). Apesar de fornecerem informações importantes para gestão e tomada de decisão nas operações de lavra, esses sistemas não são totalmente integrados atualmente.

Um comportamento importante no planejamento da lavra é a sazonalidade do clima devido a rigoroso período chuvoso que interfere de forma significativa nas operações de lavra. O período chuvoso é compreendido entre os meses de novembro a abril enquanto que o período seco começa em maio e vai até outubro.

3.2. Definição do problema

A estimativa de indicadores operacionais como disponibilidade física, utilização física e produtividade dos equipamentos de lavra, bem como o tempo de atrasos e ociosidades na operação em função de causas diversas (como chuva, neblina, detonações, deslocamentos de equipamentos para manutenção, entre outras) são variáveis de entrada chave para um planejamento de lavra eficaz. Atualmente as horas de manutenção são estimadas por cronogramas de paradas, que na maioria dos casos não consideram as interações e impactos de uma frota na outra, por exemplo: quanto à utilização de uma frota de transporte é impactada pela parada de uma escavadeira. Além disso, são utilizados valores médios, baseados em dados históricos dos equipamentos, que podem não refletir as situações operacionais futuras a serem planejadas ou mesmo a probabilidade de ocorrência dos eventos. Não considerar tais interações e as incertezas em tais parâmetros pode levar a planos de produção não realísticos e estratégias de manutenção e gestão das operações de lavra não otimizadas, aumentando significativamente o custo das operações mineiras.

Da mesma forma, a estimativa dos teores médios e sua distribuição espacial no depósito mineral, são variáveis chave para determinação do fluxo de caixa resultante da operação de lavra e beneficiamento em um empreendimento mineiro. À medida que a lavra avança em profundidade, os dados amostrais vão ficando mais escassos e mais espaçados, resultando em estimativas com baixa reconciliação com as informações de curto prazo, provenientes das perfurações para desmonte, ou mesmo com a produção executada. Além disso, o uso de modelos gerados a partir de interpolação linear, como a krigagem, tende a suavizar

a distribuição dos teores na jazida, resultando em definição de metas de teor frequentemente não alcançáveis sem prejuízo a outras metas do plano de lavra, como por exemplo, a remoção de estéril para liberação de novas frentes de minério ou a expansão de bancos nos depósitos de estéril que viabilizem a abertura de novos bancos, devido à necessidade de redução de distâncias de transporte. Não considerar tais incertezas e seus impactos, tanto na alimentação da planta e produção de metal quanto no sequenciamento de lavra, pode levar a situações de desequilíbrio no desenvolvimento da lavra e a necessidade de novos investimentos para manter a produção planejada, além do risco de fechamento prematuro do empreendimento mineiro.

A redução de custos nas atividades de mineração depende de uma gestão efetiva, que considere as incertezas relevantes associadas às variáveis de entrada do planejamento de lavra e forneça ferramentas de análise e controle de tais riscos. O planejamento estocástico de lavra é proposto como ferramenta para obtenção de melhores resultados no desempenho operacional-financeiro da mina do Sossego em etapas que compreendem: simulação geoestatística (teores de cobre), simulação estocástica da operação de lavra (eventos de falha dos equipamentos e paradas operacionais) e otimização orientada ao risco.

A Figura 19 ilustra a metodologia de planejamento estocástico de lavra proposta, na qual ao invés de valores médios de disponibilidade física (%DF), utilização (%UF) e produtividade em toneladas por hora (t/h), são usadas funções de distribuição para indicadores como tempo entre quebras (TBF), tempo para reparo (TTR) e tempo improdutivo nos ciclos operacionais dos equipamentos (carregamento e transporte), além de usar múltiplos modelos simulados equiprováveis ($S_1, \dots, S_n$) para caracterizar o depósito, ao invés de um único modelo obtido por krigagem (Krig).

Figura 19 – Metodologia de planejamento estocástico de lavra englobando o ativo físico (equipamentos) e o ativo mineral em relação à metodologia determinística (tradicional)

Fonte: Arquivo próprio

3.3. Metodologia de Simulação-Otimização

Com o objetivo de incorporar o comportamento estocástico das variáveis de entrada do processo de otimização do sequenciamento de lavra, é proposta uma metodologia de simulação-otimização em múltiplos estágios, na qual simulações estocásticas são utilizadas para modelar diferentes cenários para variáveis de decisão e restrições do modelo de otimização baseado em programação linear inteira mista, disponível em um software de sequenciamento de lavra comercial.

A simulação de Monte Carlo é usada para construção de múltiplos cenários (replicações) de indicadores operacionais da frota de carregamento e transporte que serão adicionadas ao modelo como restrições no uso desses recursos, considerando os eventos de falhas (manutenções corretivas), manutenções preventivas e paradas operacionais. Etapas de coleta e validação de dados

provenientes do sistema de despacho da mina são necessárias para garantir a qualidade dos resultados da simulação.

A simulação estocástica espacial ou simulação geoestatística será usada para gerar múltiplas imagens dos teores de cobre da jazida, que descrevem a incerteza associada à distribuição espacial dos teores. Através de krigagem ordinária são gerados os modelos estimados de longo e curto prazo. As seguintes etapas são necessárias para gerações destes modelos:

- a) Estimativa do modelo de recursos minerais, a partir de amostras de sondagem exploratória (modelo de longo prazo);
- b) Estimativa do modelo de controle de teor, a partir de amostras de furos de perfuratriz para desmonte das frentes de lavra (modelo de curto prazo);
- c) Simulação geoestatística de um conjunto de modelos de teores de cobre, a partir de amostras de sondagem exploratória (modelo de incerteza);

Como não existem softwares comerciais para otimização estocástica de lavra para minas a céu aberto, uma programação matemática é usada para calcular, com base nos múltiplos modelos de teor de cobre, medidas de risco que serão usadas para classificar os blocos em diversos níveis de risco que serão associados a penalidades (custos) para os blocos, em função da sua incerteza e incorporados na função objetivo do processo de otimização. Esta etapa visa converter as variáveis estocásticas definidas em Ramazan e Dimitrakopoulos (2007) em variáveis determinísticas com o risco incorporado em seu cálculo.

Definidas as variáveis de decisão e as restrições baseadas no risco, a otimização é realizada em um software de sequenciamento de lavra voltado para o planejamento de médio e curto prazo, *Minesight® Schedule Optimizer – MSSO*, que segundo Huang *et al.* (2008), formula o problema de sequenciamento em um modelo de programação linear inteira mista e usa um otimizador comercial (LINDO 7) para encontrar a solução, definindo a sequência ótima de polígonos de lavra que atinja as metas objetivo de produção e satisfaça as restrições de qualidade, quantidade e blendagem dos produtos.

A Figura 20 ilustra a metodologia de simulação-otimização proposta para gestão de risco no ciclo de planejamento de lavra.

Fonte: Arquivo próprio

Contrariamente a maioria das abordagens existentes de sequenciamento de lavra orientado ao risco, que são voltadas ao planejamento estratégico e planejamento de longo prazo, a metodologia proposta é voltada para o planejamento de médio prazo e serão aplicada no contexto de um planejamento de cinco a dez anos subdivididos em períodos semestrais, assim os objetivos são muito mais voltados ao controle da qualidade (e risco) dos materiais, porém buscando atingir metas estabelecidas no planejamento de longo prazo, como por exemplo, o teor mínimo a ser atingido no ano.

A Figura 21 ilustra as principais etapas da metodologia proposta, que inclui etapas de coleta, tratamento estatístico e validação de dados de entrada das simulações que garantam que as análises e conclusões posteriores estejam corretas e suportem satisfatoriamente as tomadas de decisão no planejamento de lavra e gestão dos equipamentos e operações de lavra.

Figura 21 – Fluxograma das etapas de planejamento estocástico aplicadas à gestão dos ativos físicos (equipamentos) e ativo mineral (distribuição dos teores de cobre na jazida)

Fonte: Arquivo próprio

Na etapa de validação dos modelos estimados e simulados uma análise de risco é realizada, usada tanto para avaliação do histórico de operação da mina quando para novos sequenciamentos de lavra.

Para considerar parâmetros operacionais mais realísticos e diminuir o tamanho do problema de otimização foi introduzida uma etapa de agregação dos blocos em polígonos de lavra, combinando blocos de mesmas qualidades em volumes maiores.

Na gestão dos equipamentos a etapa de validação dos dados históricos coletados no sistema de despacho é de extrema importância no sentido de excluir valores errôneos ou que incorporem ineficiências operacionais e inclui análises estatísticas.

3.4. Simulação da Capacidade Produtiva

O sistema de carregamento e transporte a ser simulado considera a frota de equipamentos da tabela a seguir:

Tabela 1 – Frota de equipamentos utilizada no estudo

Tipo	Modelo	Id. Mina	Quantidade	Capacidade nominal (t)
Escavadeira à cabo	CAT 7495 HD	BUC 495 HR	1	120
	P&H 4100 XPB	P&H 4100	1	120
Escavadeira Hidráulica	Komatsu PC5500	PC 5500	1	65
	Komatsu PC2000	PC 2000	1	25
Caminhão	CAT 793c	CAT 793	20	240

Fonte: Arquivo próprio

O método aplicado, baseado em simulação de Monte Carlo, tem como objetivo realizar o dimensionamento da frota e posteriormente realizar análises de sensibilidade quanto à capacidade produtiva dos equipamentos e exequibilidade do plano de lavra, definindo limites plausíveis de produção para os períodos no processo de otimização subsequente. A simulação empregada pode ser classificada como estocástica e estática, pois não considera a evolução do sistema ao longo do tempo, como a chamada simulação dinâmica, porém são avaliadas e modeladas as interferências da época do ano em algumas variáveis estocásticas chaves.

As principais questões que se busca conhecer através da simulação são:

- Qual a probabilidade de ocorrência de falhas de cada equipamento, dado seu histórico de operação e vida útil?
- Qual a probabilidade de ocorrência de horas improdutivas de cada equipamento?
- Quais podem ser níveis confiáveis de produção para cada equipamento?
- Qual a capacidade mínima e máxima da frota em cada período?
- Qual poderia ser o plano de ação otimizado para investimentos e ajustes na operação na busca de melhorias operacionais e redução de custos?

3.4.1. Análise dos dados

Foram extraídos do sistema de despacho da mina dados dos eventos relacionados às horas de manutenção preventiva e corretiva, ciclo dos equipamentos e horas improdutivas, turno a turno, com sua duração em minutos, referente ao ano de 2013. Esta base de dados passou por extensa análise estatística que incluiu a avaliação descritiva dos dados, visualização em histogramas e gráficos de probabilidade para identificação de valores anômalos e exclusão de tais valores do banco de dados disponibilizado pela equipe do despacho eletrônico da mina. Marin (2009) enfatiza a importância do tratamento dos dados utilizados para inferência das funções de distribuição que descrevem os eventos em um estudo de simulação.

Figura 22 – Gráfico de probabilidade do tempo de manutenção corretiva em um turno

Fonte: Arquivo próprio

A Figura 22 ilustra a análise com gráfico de probabilidade realizada para o tempo total de manutenção corretiva (em minutos) em um turno de produção, considerando cada equipamento e para a frota de transporte. Esta análise permite a identificação da assimetria na distribuição dos dados em todas as frotas, onde aproximadamente 50% das ocorrências estão abaixo de 0 minuto, isto é, 100% de

disponibilidade. É possível identificar ocorrências em que as máquinas ficaram paradas em manutenção por pelo menos um turno inteiro (tempo ≥ 500 minutos).

Com o objetivo de capturar a interferência da sazonalidade do clima foi realizada um estudo de estacionariedade considerando como agrupamento o mês de coleta dos dados. Pôde-se observar que os eventos de parada por manutenção (% de disponibilidade) não apresentam correlação significativa com relação ao mês de coleta (sazonalidade do clima), sendo o tipo de equipamento mais relevante para agrupamento dos dados para construção das curvas de probabilidade que descrevem esses eventos. Já quanto aos dados de utilização da disponibilidade, pôde-se observar comportamentos bem característicos e parecidos entre os equipamentos entre os meses de novembro a abril, apresentando menores índices de utilização dos mesmos como resultado das interferências da chuva nas operações, como menor visibilidade, maior parada para bombeamento no fundo de cava e correção de drenagem das frentes de lavra.

Figura 23 – Estudo de estacionariedade para definição dos agrupamentos dos dados

Fonte: Arquivo próprio

Baseado nesse comportamento optou-se por agrupar os dados de parada para manutenção unicamente pelo tipo de equipamento, enquanto que os dados de paradas operacionais (horas improdutivas) foram agrupados por mês. Com isso pretende-se modelar a capacidade produtiva diferenciada para períodos secos e

chuvosos conforme observado nos dados históricos da operação. Os dados de produtividade também foram agrupados por equipamento e modelados como variáveis estocásticas.

Optou-se por desmembrar os tempos de paradas de manutenção preventiva dos de manutenção corretiva, já que os primeiros comumente decorrem de um cronograma pré-definido e que tendem a se comportar de forma menos aleatória, serão assim modelados como uma variável determinística.

3.4.2. Determinação da distribuição de probabilidade dos eventos

Foram construídos os histogramas dos dados que serão modelados como variáveis estocásticas do modelo de simulação e ajustados modelos de distribuição de probabilidades. Várias distribuições são ajustadas e ordenadas de acordo com o teste de adequação do ajuste, que mede a qualidade do ajuste dos dados amostrados a uma função de densidade de probabilidade hipotética.

A figura 24 exemplifica o teste de ajuste de distribuição de probabilidades para os dados históricos de produtividade da escavadeira a cabo P&H 4100 XPB (*Input*), considerando distribuições do tipo lognormal, gaussiana inversa, *weibull*, normal e triangular. Para esses dados, a curva que obteve o melhor ajuste de parâmetros estatísticos foi a distribuição lognormal.

Figura 24 – Exemplo de teste de ajuste de curvas de distribuição de probabilidades para escavadeira à cabo P&H 4100 XPB (ES3001)

Fonte: Arquivo próprio

As tabelas 2, 3 e 4 a seguir ilustram as funções de distribuição de probabilidades que apresentaram os melhores ajustes aos dados históricos para: a) tempo de parada para manutenção corretiva por turno; b) tempo de parada operacional por mês e c) produtividades (t/h).

Os tempos de manutenção corretiva são descritos por funções exponenciais $Expon(\beta)$, onde a média da distribuição é igual à β , que frequentemente representa bem o tempo de espera para a primeira ocorrência de um processo que é contínuo no tempo e de intensidade constante. Pode ser usada em aplicações como filas, manutenção e modelagem de quebras.

Os dados de produtividade horária das escavadeiras são descritos por diferentes funções de distribuição de probabilidade, sendo elas triangular, lognormal e *weibull*.

Tabela 2 – Ajuste das funções de probabilidades para tempos de manutenção corretiva por equipamento

Tempo em manutenção (minutos/turno)		
Equipamento	Estatística dos dados	Função ajustada
BUC 495 HR	$\mu = 153,70$; $\sigma = 141,79$	Expon (151.83)
P&H 4100 XPB	$\mu = 162,57$; $\sigma = 161,89$	Expon (161.89)
PC 5500	$\mu = 195,39$; $\sigma = 169,48$	Expon (194.71)
PC 2000	$\mu = 131,75$; $\sigma = 141,80$	Expon (131.25)

Fonte: Arquivo próprio

Tabela 3 - Ajuste das funções de probabilidades para produtividade horária por equipamento

Produtividade (t/h)		
Equipamento	Estatística dos dados	Função ajustada
BUC 495 HR	$\mu = 3.738,26$; $\sigma = 1.038,48$	Triang (1.354; 3.153,9; 6.698.1)
P&H 4100 XPB	$\mu = 3.124,32$; $\sigma = 529,99$	Lognorm (2.856; 526,8)
PC 5500	$\mu = 2.157,56$; $\sigma = 420,66$	Lognorm (2.101,6; 417,12)
PC 2000	$\mu = 1.032,26$; $\sigma = 113,25$	Weibull (1,9804; 281,6)

Fonte: Arquivo próprio

Tabela 4 - Ajuste das funções de probabilidades para tempo improdutivo por mês

Tempo improdutivo (minutos/turno/mês)		
Mês	Estatística dos dados	Função ajustada
janeiro	$\mu = 53,74$; $\sigma = 82,81$	Lognorm (56,6; 116,03)
fevereiro	$\mu = 40,43$; $\sigma = 57,26$	Lognorm (43,975; 90,075)
março	$\mu = 44,02$; $\sigma = 67,80$	Lognorm (44,247; 80,054)
abril	$\mu = 52,48$; $\sigma = 98,10$	Lognorm (51,232; 109,18)
maio	$\mu = 47,90$; $\sigma = 81,54$	Lognorm (48,763; 96,814)
junho	$\mu = 49,15$; $\sigma = 84,54$	Lognorm (49,679; 100,62)
julho	$\mu = 51,10$; $\sigma = 98,98$	Lognorm (51,104; 98,982)
agosto	$\mu = 42,43$; $\sigma = 65,77$	Lognorm (45,251; 88,78)
setembro	$\mu = 52,69$; $\sigma = 87,60$	Lognorm (55,506; 122,63)
outubro	$\mu = 57,11$; $\sigma = 168,78$	Lognorm (60,981; 168,78)
novembro	$\mu = 43,48$; $\sigma = 57,24$	Lognorm (47,436; 83,037)
dezembro	$\mu = 43,93$; $\sigma = 69,14$	Lognorm (47,141; 102,93)

Fonte: Arquivo próprio

3.4.3. Simulação da produção

O modelo de simulação estocástica desenvolvido para determinação da capacidade produtiva da frota de escavação é descrito da seguinte forma:

Considere uma operação de lavra com e equipamentos de escavação trabalhando em t turnos de h horas cada, d dias por mês. A produtividade horária de cada escavadeira é representada por uma variável estocástica $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, descrita por uma função de distribuição de probabilidade. O tempo (em minutos) que cada escavadeira fica em manutenção corretiva em cada turno é igualmente representado por uma variável estocástica $Mc = \{Mc_1, \dots, Mc_n\}$. Já o tempo (em horas por mês) que cada escavadeira fica em manutenção preventiva HMP é representado por uma variável determinística definida por um cronograma de paradas. As horas improdutivas da frota de escavação são representadas por uma variável estocástica $Im = \{Im_1, \dots, Im_n\}$ que descreve a quantidade de minutos por turno gastos com eventos improdutivos para cada mês do ano.

As horas totais mensais de manutenção corretiva, HMC , são dadas por:

$$HMC = \frac{Mc}{60} * t * d \quad (3.4.1)$$

As horas improdutivas mensais totais, HIM , são dadas por:

$$HIM = \frac{Im}{60} * t * d \quad (3.4.2)$$

As horas calendário, isto é, horas totais disponíveis em cada mês são calculadas por:

$$HC = h * t * d \quad (3.4.3)$$

As horas trabalhadas mensais de cada equipamento, considerando as paradas para manutenção e paradas operacionais são calculadas por:

$$HT = HC - HMP - HMC - HIM \quad (3.4.4)$$

A produção mensal de cada escavadeira PM_e é o resultado básico da simulação e é dada pelo produto das variáveis estocásticas HT e P .

As produções mensais são somadas nos meses que correspondem ao período seco e período chuvoso, definindo um conjunto de possíveis valores de produção para cada um desses períodos.

Foram realizadas 30 simulações com 500 iterações cada, em cada iteração as distribuições das variáveis estocásticas foram amostradas aleatoriamente e as equações do modelo foram recalculadas, construindo um conjunto de possíveis valores simulados de:

- a) Horas trabalhadas para cada período;
- b) Disponibilidade física (DF) de cada escavadeira;
- c) Utilização da disponibilidade e;
- d) Capacidade de produção no período.

Este modelo de simulação foi implementado em planilha Excel® utilizando-se o *software* @Risk® 6.

3.4.3.1. Validação do modelo de simulação

A validação do modelo de simulação é uma etapa importante do estudo e consiste em comparar as distribuições resultantes com os dados reais de produção. Para tanto foram extraídos do banco de dados do sistema de despacho da mina os valores reais de disponibilidade e produção total das escavadeiras referente ao ano de 2013.

A Figura 25 mostra o histograma em frequência relativa (eixo *y* da esquerda) e curva de probabilidade acumulada (eixo *y* da direita e *x* superior) para os possíveis valores de DF (eixo *x* inferior) para a escavadeira hidráulica PC2000, o valor real de disponibilidade da escavadeira (84.0%) em 2013 foi lançado no gráfico para avaliação dos resultados obtidos. O modelo de simulação previu que há probabilidade de 72% de que a DF real ocorresse e que existe potencial para alcançar valores de disponibilidade de até 90.2% para esta máquina (P90), verifica-se assim que a mesma encontra-se muito próximo de sua confiabilidade máxima

provável. Fato que corresponde à realidade, pois esta escavadeira, adquirida em 2013, é a mais nova da frota.

Na Figura 27 temos a mesma análise para a escavadeira a cabo P&H 4100 XPB, observa-se que o valor real de DF (73%) também se encontra na porção de valores mais prováveis segundo os resultados das simulações estocásticas (com 60% de probabilidade de ocorrência) e que há potencial de alcance de DF de até 90%.

No que diz respeito à capacidade produtiva anual das escavadeiras podemos observar na Figura 26 que a massa real produzida (5,38 Mt) pela escavadeira hidráulica PC2000 está na porção de valores mais prováveis da distribuição resultante da simulação. Porém, com potencial de alcançar produção na ordem de 6,7 Mt (valor de maior probabilidade). Para a escavadeira a cabo P&H 4100 XPB a massa real produzida no ano de 2013 (10,9 Mt), também foi razoavelmente bem prevista pelo modelo de simulação e nota-se também um potencial de alcançar produção de 16,7 Mt (valor modal ou mais provável).

Os potenciais de maior produção decorrem principalmente, mas não unicamente, dos potenciais de maior disponibilidade identificados anteriormente e é importante que essa informação seja utilizada no sentido de otimizar esforços para capturar tais potenciais como priorização de componentes, priorização de equipamentos no cronograma de manutenções e reformas além da avaliação conjunta com o sequenciamento da lavra. Nos capítulos futuros serão avaliadas abordagens para captura dos potenciais identificados.

Figura 25 – Escavadeira PC2000, Resultado das simulações de DF e comparativo com a disponibilidade real executada.

Fonte: Arquivo próprio

Figura 26 - Escavadeira PC2000, Resultado das simulações de produção e comparativo com a produção real executada.

Fonte: Arquivo próprio

Figura 27 - Escavadeira P&H 4100 XPB, Resultado das simulações de DF e comparativo com a disponibilidade real executada.

Fonte: Arquivo próprio

Figura 28 - Escavadeira P&H 4100 XPB, Resultado das simulações de produção e comparativo com a produção real executada.

Fonte: Arquivo próprio

A Figura 29 mostra a distribuição de possíveis valores de movimentação para os períodos chuvoso e seco, considerando as 500 iterações da simulação 1 (Sim.1), em comparação com a movimentação executada em 2013 (20,7 Mt e 22,2 Mt respectivamente). Pode-se observar que a capacidade produtiva nos períodos foi bem modelada e que o período seco mostra um maior intervalo de possíveis valores, porém com menor desvio padrão. Já no período chuvoso é observada uma maior variabilidade operacional, descrita probabilisticamente pelo maior desvio padrão.

As replicações apontam igualmente maior capacidade de produção no período seco relativamente ao chuvoso, além de maior potencial de aumento de produção, P90 de 30,69 Mt contra P90 de 29,7 Mt no período chuvoso. Pode-se interpretar com este comportamento que o período seco é o que oferece ganho de produção com menor esforço tanto em manutenção quanto em redução de horas improdutivas.

Figura 29 – Distribuição de possíveis valores de movimentação para os períodos chuvosos e secos em comparação com o a movimentação executada em 2013

Fonte: Arquivo próprio

3.4.4. Análise de risco quanto à capacidade produtiva

As diversas saídas do processo de simulação configuram um conjunto de ferramentas para análise mais profunda do processo de escavação e indicação de ações de melhoria em função do impacto de cada variável no resultado final. As

distribuições resultantes de disponibilidade mecânica e produção indicam de forma probabilística a confiabilidade de cada equipamento, paradas operacionais e níveis confiáveis de produção.

A Figura 30 mostra uma análise de risco realizada com o objetivo de avaliar a sensibilidade de cada variável de entrada nos resultados de produção simulados, tanto para o período seco como para o período chuvoso. As variáveis estocásticas de entrada são classificadas de acordo com seu impacto (em toneladas) na produção média obtida das iterações em cada simulação. Tanto para o período seco quanto para o chuvoso as variações de horas de manutenção corretiva das escavadeiras de grande porte são as que mais afetam negativamente, o resultado obtido.

Figura 30 – Sensibilidade da produção para diferentes variáveis de entrada da simulação

Fonte: Arquivo próprio

A produtividade horária da escavadeira BUC 495 HR vem em seguida, porém com maior significância no período seco, indicando o potencial de aumento na produção com melhorias na produtividade. Ainda no período seco, a produtividade da PC 5500 apresentou pouco impacto.

Com relação à variação nas horas improdutivas, no período seco houve ordenação de criticidade no impacto na produção na seguinte sequência: junho, maio, julho, setembro e outubro. Já para o período chuvoso a priorização foi: fevereiro, novembro, abril, dezembro e janeiro.

Esta análise é uma ferramenta importante de priorização em planos de ações de melhoria e ganho de produtividade, além de descrever quantitativamente a variabilidade operacional, seus impactos na produção e potenciais de melhoria, quantificando os esforços necessários e indicando onde atuar de forma mais efetiva e com baixos custos.

As 30 simulações de movimentação são comparadas com a produção real obtida no ano de 2013 e representadas no gráfico da Figura 31. Observa-se que a média dos valores simulados apresenta maior aderência para o período seco e que o espectro de variação nos valores simulados também é menor no período seco, evidenciando que o agrupamento de códigos adotado foi satisfatório para modelar as diferenças de variabilidade e capacidade operacional entre os períodos seco e chuvoso.

Posteriormente, valores desta distribuição serão utilizados na definição de limites máximos e mínimos plausíveis em um processo de otimização do sequenciamento de lavra.

Figura 31 – Movimentação real e simulada (*Box-plot*) para os períodos chuvoso e seco

Fonte: Arquivo próprio

3.5. Simulação geoestatística: Modelo de incerteza espacial dos teores

Os modelos simulados disponibilizados para esta pesquisa são os mesmos gerados no trabalho de Diedrich (2012) e informações mais detalhadas sobre o processo de simulação geoestatística podem ser encontradas no mesmo. Serão citados apenas os aspectos mais importantes desta etapa.

O método de simulação por bandas rotativas apresentado no item 2.3.3.1 foi utilizado para gerar um conjunto de 30 realizações estocásticas de teores de cobre do depósito do Sequeirinho. O processo de simulação condicional engloba as seguintes etapas:

Análise de dados: Envolve a análise da estatística descritiva das variáveis de estudo nos diversos domínios geológico-estatísticos para evitar misturas populacionais e identificar valores extremos que devem ter sua influência adequadamente restringida na etapa de krigagem; a normalização dos dados (transformação da distribuição não gaussiana para uma distribuição gaussiana), verificação de multinormalidade da função aleatória e a análise de continuidade espacial, através da modelagem de variogramas.

Simulação condicional: Geração de 30 simulações estocásticas em blocos de 10 x 10 x 16 metros, discretizados em nós de 2,5 x 2,5 x 4 metros (64 pontos por bloco). O tempo de simulação foi de aproximadamente 52 h, incluindo validações, em um computador com quatro processadores com 1GHz cada. A Figura 32 ilustra os valores simulados para a variável cobre e a média do modelo estimado por krigagem, considerando o depósito do Sequeirinho.

Figura 32 – Valores simulados para a variável cobre e a média do modelo estimado por krigagem

Fonte: Diedrich (2012)

Validação das simulações condicionais: Um dos pontos mais importantes em se utilizar tais métodos de simulação é a capacidade do método escolhido de reproduzir a variabilidade espacial *in situ* dos teores, isto é, representar um modelo de incerteza razoável do depósito em questão. Além disso, como critério de validação, tais modelos devem reproduzir as estatísticas de primeira e segunda ordem dos dados condicionantes, isto é, o histograma e o variograma dos dados amostrais (Deutsch e Journel, 1998).

A Figura 33 ilustra o resultado obtido na validação da continuidade espacial das simulações para o depósito do Sequeirinho, comparando o variograma experimental, o modelo variográfico e o variograma de cada uma das 30 simulações estocásticas.

Figura 33 – Validação da continuidade espacial das simulações com relação ao modelo variográfico usado e variograma experimental das principais direções anisotrópicas definidas, Depósito Sequeirinho.

Fonte: Diedrich (2012)

3.6. Análise de risco e reconciliação dos modelos simulados

A metodologia utilizada baseia-se nos seguintes passos:

- Inspeção visual dos modelos estimados e simulados, com foco na continuidade e variabilidade espacial dos teores;
- Reconciliação entre modelos de longo prazo estimados e simulados e o modelo de curto prazo;

- c) Comparação do espectro de incerteza mapeado pelas simulações geoestatísticas com a variabilidade real obtida no modelo de curto prazo;
- d) Quantificação dos teores de cobre para cada um dos modelos, no período de lavra de 2004 a 2012;

3.6.1. Avaliação dos dados disponíveis

Para desenvolvimento da presente pesquisa, foram disponibilizados os modelos de blocos de longo prazo, de curto prazo, o histórico de reconciliação da mina e as cavas de final de ano realizadas, para quantificação dos materiais lavrados.

Na Figura 34 são ilustrados os bancos de dados completos utilizados para estimativas do modelo de recurso mineral e do modelo de controle de teor e liberação de frentes de lavra do depósito do Sequeirinho. Através da inspeção visual dos dados amostrais de perfuratriz (Figura 34b) pode-se evidenciar a variabilidade espacial dos teores de cobre, pelo padrão errático das cores. O objetivo da simulação geoestatística é fornecer múltiplas realizações, equiprováveis, da distribuição espacial dos teores, capazes de descrever esta variabilidade espacial.

O modelo de longo prazo, ilustrado na Figura 34 (a), é discretizado em blocos de 10x10x16 metros, no qual teores de cobre, ouro e densidade são estimados por krigagem ordinária, a partir de 35.000 amostras de furos de sondagem exploratória espaçados em uma malha de aproximadamente 20 x 40 metros. A partir do mesmo conjunto de dados são criados os modelos de simulação geoestatística utilizando-se a técnica de bandas rotativas (*TB-turning bands*). A Figura 35 ilustra três simulações (Sim nº 01, nº 10 e nº 30) das trinta realizadas para o depósito estudado.

O modelo de curto prazo, ilustrado na Figura 35 (b), tem as mesmas dimensões de blocos do modelo de longo prazo e também é estimado por krigagem ordinária, porém a partir de 90.000 amostras de furos de perfuratriz, ilustrados na Figura

35(c), em malha de aproximadamente 6,5 x 7,5 metros, utilizados no desmonte das frentes de lavra. Perfuratrizes elétricas e a diesel, com diâmetro de 12^{1/4} de polegadas, são usadas nesta operação.

Figura 34 – Localização das amostras e histogramas de teores de cobre nos bancos de dados: sondagem exploratória (a, c), e perfuratrizes (b, d), utilizados na estimativa dos modelos de longo e curto prazo respectivamente.

Fonte: Arquivo próprio

3.6.2. Inspeção visual dos modelos

A inspeção visual é a primeira abordagem ao se avaliar modelos de teores estimados. A mineralização do Sequeirinho possui três zonas de maior concentração de cobre, predominantemente na forma de calcopirita, identificados na Figura 35 pelas letras x, y e z e observados em todos os modelos.

Figura 35 – Cava do Sequeirinho - teores de cobre, Modelo de blocos de longo prazo (a), modelo de curto prazo (b), amostras de perfuratriz (c) e três simulações estocásticas (Sim 02, Sim 10 e Sim 30).

Fonte: Arquivo próprio

É possível verificar porções do depósito que apresentam no modelo de longo prazo uma suavização e conectividade dos teores não observados no modelo de curto prazo. Esta suavização é característica de estimadores não enviesados como a krigagem ordinária, que atinge seu objetivo reduzindo a variância de estimação. É uma consequência do “efeito de informação” (Journel e Huijbregts, 1978) e implica que os valores estimados dos blocos têm uma variância menor que os valores dos “blocos reais”.

Outra situação facilmente observada é a existência de porções do depósito (zona x) onde foram estimados altos teores, decorrentes da propagação dos teores de amostras na vizinhança dos blocos, não confirmados pelas amostras de curto prazo (Figura 35 c) e que conseqüentemente representarão um risco de não obtenção dos teores esperados na lavra. Neste caso o modelo de curto prazo (Figura 35 b) incorpora informações importantes que minimizarão estes riscos durante a operação de lavra nestes locais.

Avaliando-se as três simulações geoestatísticas, ilustradas como exemplo, é possível verificar que o padrão errático observado nos dados de perfuratriz e no modelo de curto prazo são reproduzidos pelas simulações, fornecendo um sistema de cenários que, avaliados conjuntamente, podem dar informações importantes relacionadas ao sequenciamento de lavra dos blocos. Avaliando-se em termos práticos, o sequenciamento dos polígonos de avanço de lavra é diretamente dependente da distribuição espacial dos teores, além de seu valor médio.

3.6.3. Avaliação do histórico de reconciliação da mina

Com o objetivo de avaliar a capacidade dos modelos de longo e curto prazo representarem adequadamente o depósito mineral e os resultados obtidos na operação de lavra, foram calculados os fatores de reconciliação, com relação aos teores de cobre, em uma análise histórica da lavra no período de 2005 a 2012. Seguindo a nomenclatura tradicional de tais fatores, como segue:

MLP= Modelo de longo prazo;

MCP= Modelo de curto prazo;

ROM= Produção real da mina;

F1 = MCP/MLP; **F2** = ROM/MCP; **F3** = F1*F2 = ROM/MLP;

O programa de reconciliação da mina do Sossego é extenso, considerando as variações de massa, teor e metal contido, desde o modelo de longo prazo até o embarque do concentrado no porto. Devido ao foco do estudo, analisaremos apenas os modelos de longo e curto prazo e a produção, no que diz respeito aos teores de cobre. Na mina do Sossego, devido o tipo de mineralização, admite-se como valores toleráveis até $\pm 10\%$ de variação para cada um dos indicadores de reconciliação, considerando o montante produzido anualmente. Porém, para o comitê de reservas da Vale, variações de até $\pm 15\%$ são aceitas.

A Figura 36 a mostra o histórico dos teores de cobre entre os anos de 2005 e 2012, considerando o modelo de longo prazo (Cu LP), o modelo de curto prazo (Cu CP) e a produção de ROM real da mina. O histórico dos fatores de reconciliação relativo ao mesmo período é mostrado na Figura 36b. A reconciliação entre modelo de curto prazo e produção (F2) revela uma boa aderência, apresentando na maioria dos anos variação inferior a $\pm 7\%$, o pior resultado aconteceu no ano de 2006 (-11%) e os melhores resultados foram reportados nos anos de 2008 e 2011 (+2% e +1% respectivamente). Considerando a reconciliação entre o modelo de longo prazo e a produção (F3), apesar dos bons resultados em 2005 e 2008, o resultado é bem diverso e mostra que a partir do ano de 2009 a aderência vem consistentemente caindo, atingindo nos dois últimos anos variações acima de 10%, consequência direta da baixa reconciliação entre os modelos de curto e longo prazo (F1). Esse comportamento é natural, devido o aprofundamento da mina e consequente maior espaçamento entre os furos de sondagem utilizados na estimativa do modelo de longo prazo à medida que a profundidade aumenta, conforme verificado na Figura 34a.

Figura 36 – Histórico de reconciliação dos teores de cobre no modelo do longo prazo, modelo de curto prazo e teor real lavrado (a) e histórico de dos índices de aderência F1, F2 e F3 (b).

Fonte Arquivo próprio

As equipes de geologia de longo e curto prazo incorporam anualmente ao modelo de longo prazo as diferenças evidenciadas na lavra e modeladas no curto prazo, porém esta medida é reativa e não permite prever a variabilidade dos teores em distâncias maiores que um ou dois bancos, além de não proporcionar medidas claras de como a variabilidade espacial pode interferir positiva ou negativamente no sequenciamento dos avanços de lavra. Nesse contexto, no caso do modelo de incerteza composto pelo conjunto de simulações estocásticas geradas a partir dos dados de sondagem ser capaz de cobrir o espectro de variabilidade e reproduzir a tendência dos teores do depósito real, representado pelo modelo de teores de curto prazo, tal modelo de incerteza representará uma boa medida dos riscos associados à variabilidade espacial dos teores e adicionará informações valiosas à etapa de sequenciamento da lavra e, ao contrário da abordagem tradicional de reconciliação, representa uma abordagem proativa, de gestão efetiva dos riscos, no ciclo de planejamento de mina.

3.6.4. Coeficiente de variação condicional

Segundo Dimitrakopoulos *et al.* (2008), o uso de simulações geoestatísticas proporciona a incorporação de medidas de incerteza local que consideram simultaneamente a densidade de dados e a continuidade da mineralização, bem

como a variabilidade *in situ* dos teores. Tais medidas de incerteza são calculadas a partir da função de distribuição condicional (cdf) dos teores $Z(u)$ dos blocos na posição u do depósito. As medidas de incerteza básicas incluem a variância condicional (CV), o coeficiente de variação condicional (CCV), intervalo interquartil (IQR) e intervalo de probabilidade (IPR).

O Coeficiente de variação condicional (CCV) corresponde ao desvio padrão condicional dividido pela média das simulações em cada bloco. Esta medida de incerteza expressa a variabilidade como um percentual da média e é calculada por:

$$CCV(u) = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{K+1} [\bar{Z}_k - Z_E^*(u)]^2 [F(u; Z_k) - F(u; Z_{k-1})]}}{Z_E^*(u)} \quad (3.6.1)$$

Onde, Z_k $k = 1, \dots, K$, são os k valores do intervalo que discretizam o espectro de variação dos valores de z , $\bar{Z}_k$ é a média das classes $Z_{k-1}, (Z_{k-1}, Z_k]$ a qual, no caso de um modelo de interpolação linear, corresponde a $\bar{Z}_k = (Z_{k-1} + Z_k)/2$ e $Z_E^*(u) = \sum_{k=1}^{K+1} \bar{Z}_k [F(u; Z_k) - F(u; Z_{k-1})]$ é a aproximação discreta da soma para o valor esperado da função de distribuição condicional das simulações.

O CCV discrimina melhor as zonas em termos de densidade de dados, isto é, em termos da disponibilidade de dados condicionantes. A vantagem do CCV com relação ao CV é que este é expresso diretamente como uma proporção da média e por sua vez é capaz de filtrar o efeito proporcional. Em função disso, recentemente vem sendo estudado o uso desta medida de incerteza para fins de classificação de recursos minerais.

Nesta pesquisa o CCV será utilizado como critério de correlação com os resultados de reconciliação dos modelos, expresso pelo fator F1 (MCP/MLP).

3.6.5. Quantificação da aderência entre os modelos

Este procedimento tem o objetivo de avaliar o perfil de reconciliação do Fator F1 (MCP/MLP), o comportamento dos teores de cobre nos modelos estimados de longo prazo, curto prazo e dos trinta modelos estocasticamente simulados. Foram utilizadas as seguintes técnicas:

- a) Análise de tendência ao longo de uma direção preferencial do depósito (Leste-Oeste), para mapear os valores médios de cobre nos blocos e o perfil de variabilidade e o valor esperado das simulações (*e-type*);
- b) Elaboração de mapas do fator F1 e sua correlação com o coeficiente de variação condicional (CCV) das simulações geoestatísticas; Identificação espacial das áreas de baixa reconciliação, onde pode-se planejar sondagens para melhor conhecimento ou ajuste de parâmetros de krigagem de modo a minimizar o impacto de *outliers* na estimativa.
- c) Cubagem dos modelos: Os modelos digitais de terreno, superfícies tridimensionais que representam a situação da cava no final de cada ano, no período de 2003 a 2012, foram utilizados para calcular, através de uma cubagem realizada no software GemsTM, a massa e o teor lavrado em cada período;

A Figura 37 ilustra uma seção vertical na região central do depósito do Sequeirinho, na qual se pode evidenciar a situação da cava no final de cada ano. Como salientado anteriormente, nos anos de 2011 e 2012 o minério lavrado localizava-se na porção mais profunda da cava do Sequeirinho.

Os resultados dessas duas análises são mostrados na seção de resultados e discussão a seguir.

Figura 37 – Geometrias de final de ano da cava do Sequeirinho, período de 2003 a 2012.

Fonte: Arquivo próprio

3.6.6. Resultados das validações e discussão

Realizando a análise de tendência longitudinalmente ao corpo mineralizado do Sequeirinho é possível avaliar a variabilidade dos teores de cobre no modelo de longo prazo (Cu LP), no modelo de curto prazo (Cu CP) e no conjunto de simulações geoestatísticas, em termos de valor máximo, mínimo e média (min, max e med), além do perfil do fator F1 de reconciliação ao longo do depósito.

A Figura 38 ilustra o resultado desta análise, onde é possível identificar as três áreas de maior concentração de cobre da mineralização (zonas x, y e z), citadas anteriormente. Outra observação que se pode fazer é a de que na maioria da extensão do corpo mineral as simulações geoestatísticas foram capazes de mapear o espectro de incerteza satisfatoriamente, uma vez que o teor revelado pelo modelo de curto prazo está compreendido entre os valores mínimos e máximos das simulações. Porém, em algumas porções o teor de curto prazo não pôde ser previsto, isto é, pelos modelos simulados não haveria probabilidade de ocorrência, por exemplo, próximo às coordenadas 602.665, 603.315 e 604.115. Obviamente que nestes exemplos, em coordenadas próximas às extremidades do corpo lavrado, a exatidão do modelo de curto prazo tende a cair devido a pouca quantidade de amostras de perfuratriz, conforme pode ser evidenciado na Figura 34 b. Já na proximidade da coordenada 603.315, na zona x, onde as amostras de perfuratriz são abundantes, a similaridade de teores entre o modelo estimado e os

simulados e a diferença com relação ao modelo de curto prazo sugerem a necessidade de melhor conhecimento através de sondagem exploratória, para melhorar a estimativa do modelo de longo prazo e das simulações condicionais.

Figura 38 – Fator F1 de reconciliação, teores estimados nos modelos de longo e curto prazo e espectro de incerteza mapeado pelas simulações estocásticas, ao longo da direção Leste-Oeste, depósito do Sequeirinho.

Fonte: Arquivo próprio

Em termos de planejamento a pior situação é na qual os teores estimados no longo prazo não são confirmados no momento da lavra, comum em zonas de altos teores pouco amostradas ou em porções marginais do depósito (Fator $F1 < 1$). Essa situação pode ser evidenciada na Figura 38, próximo à coordenada 603.635 e entre as coordenadas 603.835 e 603.955.

É evidente também o aumento da amplitude do espectro de incerteza em função dos teores ou da proximidade de zonas na extremidade do corpo mineralizado. Este último em função da escassez de informação e o primeiro em função da natural raridade dos altos teores ($> 1\%$ Cu) no depósito, característica facilmente notada nos mapas e nos histogramas dos teores de cobre (distribuições fortemente assimétricas positivas) da Figura 34. No banco de dados de perfuratrizes, a probabilidade de ocorrência de teores acima de 1% de cobre é de aproximadamente 18%, isto é, 82% dos dados têm teores inferiores a 1% de cobre.

A elaboração de mapas contendo o fator F1 da reconciliação bloco a bloco constitui uma ferramenta de grande auxílio na identificação mais detalhada das áreas onde os teores não foram confirmados no modelo de curto prazo e que representam risco potencial de não alcance das metas de teor de alimentação da planta no futuro (extensão do corpo mineral em profundidade).

Conforme ilustrado na Figura 39, são identificados, em uma escala de cores, valores de interesse para mapeamento dessas áreas, como:

- a) Fator $F1 > 1,10$ – Vermelho: subestimativa do modelo de longo prazo além do permitido, isto é, teores mais altos lavrados;
- b) $0,90 \leq \text{Fator } F1 \leq 1,10$ – Verde: Variação entre os teores dos modelos dentro do permitido;
- c) Fator $F1 < 0,90$ – Azul: Superestimativa do modelo de longo prazo além do permitido, isto é, teores mais baixos lavrados;

A zona x da mineralização do Sequeirinho é um exemplo de área onde ocorre superestimativa do modelo de longo prazo e em menor proporção blocos com reconciliação dentro dos limites aceitáveis, enquanto que a zona y evidencia uma área de subestimativa e uma proporção comparativamente maior de blocos com reconciliação dentro dos limites aceitáveis. Apesar de ser um bom indicativo das áreas de potenciais ganhos e perdas de teor com relação ao modelo estimado, essa abordagem é como comentado anteriormente reativa e limitada por necessitar da disponibilidade de dados da perfuração de desmonte.

Ao correlacionarmos o fator F1 com os valores de CCV é possível notar uma correspondência, nas áreas onde a frequência de Fatores F1 dentro do esperado é maior os valores de CCV são menores, a zona y exemplifica bem essa correlação observada ao longo dos bancos de lavra. Da mesma forma, áreas onde a frequência de Fatores F1 dentro do esperado (verde) é menor, os valores de CCV tendem a ser maiores e mais frequentes, indicando maior incerteza, a zona x exemplifica essas ocorrências. A porção oeste da cava do sequeirinho apresenta

as maiores incertezas e esta variabilidade tem estreita relação com os elevados valores de F1 observados na Figura 39, entre as coordenadas 602.650 e 603.000.

Figura 39 – Mapas do Fator F1 da reconciliação e Coeficiente de variação condicional (CCV)

Fonte: Arquivo próprio

A análise da cubagem dos modelos de longo prazo (krigado e simulados) e sua aderência com o modelo de curto prazo possibilita a quantificação do perfil de risco em cada período de lavra e a avaliação da capacidade dos modelos simulados

abrangerem o espectro de incerteza do depósito, considerando as combinações de diferentes minérios que ocorrem durante a lavra nas fases independentes. Isto é, permite avaliar o comportamento do modelo estocástico (simulações) com relação ao modelo determinístico (krigagem) e o depósito real (curto prazo) em um sequenciamento de lavra já realizado, o que representa um conjunto de informações importantes em se tratando de um estudo de otimização estocástica do sequenciamento de lavra, o qual se propõe a considerar simultaneamente um conjunto de modelos simulados, objetivando uma solução ótima única, capaz de efetivamente maximizar o valor presente da operação mineira sem expor em demasia ao risco inerente e já comprovado da variabilidade dos teores do depósito.

Conforme ilustrado na Figura 40, para cada período a estatística descritiva da função de distribuição condicional dos teores simulados foi expressa na forma de um diagrama de caixas (*boxplot*), ilustrando a mediana (P50), o intervalo interquartil (P25-P75), o máximo e o mínimo dos teores cubados em cada modelo simulado. Os teores dos modelos de longo e curto prazo também foram incluídos na análise. O perfil de risco acumulado até 2012 é igualmente ilustrado na figura.

Um fato importante observado é a que o teor real do depósito (Cu_MCP) foi mapeado no espectro de variação das simulações geoestatísticas em todos os períodos e no acumulado lavrado até 2012. E o mais importante, o modelo estimado pela krigagem, considerando toda a massa já lavrada até 2012 (Total), apresenta teor sem probabilidade de ocorrência, de acordo com o intervalo de variação dos modelos simulados, um risco totalmente ignorado quando não se utilizam modelos de incerteza como o proposto.

Uma abordagem para auxiliar técnicas de reconciliação proativa é proposta e consiste na incorporação de um indicador que compara o valor médio das simulações e o teor do modelo de longo prazo ($F4 = E\text{-Sim}/MLP$). Este fator é um indicador de quanto o modelo de longo prazo é capaz de representar os teores reais, mas desconhecidos, considerando a incerteza na distribuição espacial dos teores em porções da jazida ainda não lavradas, onde as informações de perfuratriz ainda não estão disponíveis. É possível observar na Figura 40 a

reprodução da tendência de reconciliação real (F1) no indicador proposto (F4), prevendo-se antecipadamente riscos de não alcance das metas estabelecidas no plano de lavra.

Figura 40 – Histórico de reconciliação dos teores e perfil de risco das simulações estocásticas, avanços de lavra realizados entre 2004 e 2012.

Fonte: Arquivo próprio

Com exceção do ano de 2007, em todos os períodos o intervalo interquartil das simulações está mais próximo do valor real, expresso pelo modelo de curto prazo, do que do modelo de longo prazo. Isto é, a diferença absoluta entre o valor esperado das simulações e o do modelo de curto prazo é menor do que com relação ao modelo de longo prazo. Esse comportamento sugere que um algoritmo de otimização, ou mesmo um sequenciamento iterativo, que considere o conjunto de simulações estocásticas obterá um sequenciamento com teores mais próximos dos reais do depósito do que um algoritmo baseado em um único modelo determinístico. Motivo pelo qual se torna bastante encorajador a aplicação de uma abordagem de planejamento de lavra orientada ao risco.

3.6.7. Comentários sobre os resultados da validação

Em se tratando de algoritmos de otimização, qualquer método irá priorizar os altos teores buscando maximizar o VPL do sequenciamento da lavra, consequentemente priorizará a porção mais incerta do depósito podendo resultar em desempenhos desastrosos logo no início da operação ou posteriormente em finais de fases intermediárias ou mesmo na cava de exaustão, os quais configuram resultados sub-ótimos na prática.

Nesse contexto, a quantificação dos riscos relacionados à variabilidade dos teores e o desenvolvimento de algoritmos que incorporem tais informações no processo de otimização é de suma importância para o sucesso do planejamento de mina. Assim, o tomador de decisão poderá definir sua postura de exposição ao risco e definir estratégias menos conservadoras com relação à lavra de altos teores ou porções pouco amostradas do depósito.

O desempenho do modelo de incerteza, composto do conjunto de simulações geoestatísticas, com relação ao modelo de curto prazo, mostrado através de gráficos de tendência, mapas de teores, fatores de reconciliação e medidas de incertezas mostraram um potencial interessante do uso de tais modelos como variáveis de decisão ou mesmo restrições em um processo de otimização que objetive a maximização de VPL e o controle efetivo dos riscos associados à incerteza dos teores do depósito. A literatura recente mostra vários estudos de aplicação de algoritmos exatos ou heurísticos, que englobam principalmente programação mista, programação estocástica inteira e *simulated annealing* na solução de problemas de otimização do sequenciamento da lavra sob incerteza.

3.7. Programação matemática estocástica

A formulação matemática proposta visa incorporar no cálculo do valor econômico do bloco e na classificação dos materiais a serem sequenciados para os diversos destinos, medidas de risco e parâmetros que tornem o processo de otimização do sequenciamento da produção mais robusta, revelada a incerteza dos teores na jazida. Com o objetivo de dar flexibilidade à tomada de decisão da lavra e às opções de gestão do risco, uma classificação em várias categorias de risco e faixas de teor foi empregada. Foi utilizada a linguagem de programação Python™, disponível no software Minesight®, permitindo o cálculo diretamente no modelo de blocos e rápida análise visual dos resultados.

3.7.1. Cálculo do valor dos blocos

Considerando um conjunto de simulações estocásticas s , com $s \in \{1, \dots, S\}$, dos teores de cobre para um bloco $i \in \{1, \dots, N\}$ da jazida, Cu_i^s , o valor econômico do bloco para cada imagem simulada é dado por:

$$V_i^s = \begin{cases} NR_i^s - MC_i - PC_i & \text{se } NR_i^s > PC_i \quad \text{então, o bloco } i \text{ é minério} \\ -MC_i & \text{se } NR_i^s \leq PC_i \quad \text{então, o bloco } i \text{ é estéril} \end{cases} \quad (3.7.1)$$

Considerando que o percentual de recuperação na planta é uma função não linear do teor de cobre, a receita resultante para cada modelo simulado é:

$$NR_i^s = T_i * Cu_i^s * Rec_i^s * (P_v - C_v) \quad (3.7.2)$$

Onde T_i é a massa do bloco, Cu_i^s é o teor médio do bloco, Rec_i^s é o percentual de recuperação do beneficiamento considerando a simulação s , P_v é o preço de venda do metal e C_v é o custo de venda do metal.

O valor econômico esperado de cada bloco é a média do valor econômico de cada imagem simulada:

$$V_i^* = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S V_i^s \quad (3.7.3)$$

O coeficiente de variação do valor econômico esperado de cada bloco CEV_i é a medida de incerteza definida para classificá-los em categorias de risco e é dado por:

$$CEV_i = \frac{\sqrt{\frac{1}{S} \sum_{s=1}^S (V_i^* - V_i^s)^2}}{V_i^*} \quad (3.7.4)$$

O coeficiente de variação do valor econômico discrimina melhor as zonas de incerteza no depósito, pois este é expresso diretamente como uma proporção da média. Esta é uma qualidade importante, pois fornece uma medida de risco que leva em consideração as diferenças de média de blocos de baixo, alto e super alto teor. A principal qualidade do coeficiente de variação é a capacidade de comparação de distribuições diferentes.

3.7.2. Classificação dos materiais baseada no risco

Baseado nos valores de coeficiente de variação do valor econômico dos blocos fornecido pela simulação, foi criada uma classificação de risco ($CRisk_i$) para os materiais, de acordo com os critérios da Tabela 5.

Tabela 5 – Critério de classificação de risco baseado nos valores de CEV_i

Classificação	Código (CRisk_i)	Critério
Risco Alto	1 (vermelho)	$CEV_i > 1.20$
Risco Moderado a Alto	2 (amarelo)	$0.80 < CEV_i \leq 1.20$
Risco Moderado a Baixo	3 (verde)	$0.55 < CEV_i \leq 0.80$
Risco Baixo	4 (azul)	$CEV_i \leq 0.55$

Fonte: Arquivo próprio

A Figura 41 mostra a distribuição do valor econômico esperado (V_i^*), coeficiente de variação do valor econômico (CEV_i) e a classificação de risco ($CRisk_i$) dos blocos no nível 128RL do depósito do Sequeirinho. As cores quentes representam os valores

altos das variáveis e as cores frias os valores baixos para V_i^* e CEV_i , já para $CRisk_i$ as cores seguem a codificação da Tabela 5.

É possível verificar, correlacionando valor econômico com seu coeficiente de variação, que o efeito proporcional dos teores é filtrado sendo que a incerteza do bloco fica muito mais em função da quantidade de informação disponível do que do teor do bloco. Isto é, é anulada a chance de minimização do VPL por rejeição de minérios de alto teor durante a otimização. O controle e minimização do risco no processo de otimização será obtido pela atribuição de custos adicionais (penalidades) de lavra e beneficiamento para os blocos de acordo com sua classificação de risco.

Figura 41 – Depósito do Sequeirinho, banco 128RL, Distribuição do valor econômico (V_i^*), coeficiente de variação do valor econômico (CEV_i) e classificação de risco dos blocos ($CRisk_i$).

Fonte: Arquivo próprio

3.8. Otimização do sequenciamento da produção

Com o objetivo de quantificar as diferenças, vantagens e desvantagens de aplicação da abordagem proposta, serão realizados dois sequenciamentos de produção para a cava do depósito Sequeirinho. Na otimização tradicional (determinístico) a classificação de risco dos blocos é ignorada e na otimização baseada no risco considera-se a classificação de risco, gerenciada de acordo com os objetivos estratégicos da empresa.

No que diz respeito às restrições do problema relacionadas aos equipamentos, no sequenciamento tradicional as metas de produção serão adotadas baseados em valores médios históricos de disponibilidade e utilização física. Já para o sequenciamento baseado no risco, serão informados os valores máximos e mínimos de produção referentes às replicações obtidas na simulação estocástica dos eventos de lavra.

O processo de otimização será realizado no software MSSO, capaz de resolver problemas de programação inteira mista de sequenciamento de lavra que envolvem múltiplos modelos de teor, múltiplos processos de beneficiamento e múltiplas destinações, considerando as restrições de equipamentos, quantidade, qualidade e blendagem dos produtos (Huang *et al.*, 2011). A Figura 42 ilustra o modelo da otimização no MSSO.

Figura 42 – Modelo de otimização usando o software MSSO

Fonte: Huang et al. (2011)

3.8.1. Otimização tradicional

No caso do modelo para a otimização da cava do Sequeirinho, devemos considerar p pushbacks disponíveis para aproveitamento de m materiais que serão destinados, de acordo com seu teor de cobre, para beneficiamento na usina, para estoque em pilhas destinadas a cada qualidade de minério ou para a pilha de estéril SE (Figura 18).

Os estoques de minério considerados serão:

- Estoque BT ($0.27 \leq \text{Cu \%} < 0.40$)
- Estoque AT1 ($0.40 \leq \text{Cu \%} < 0.70$)
- Estoque AT2 ($0.70 \leq \text{Cu \%} < 1.00$)
- Estoque SAT ($\text{Cu \%} \geq 1.00$)

A Figura 43 ilustra o painel de modelagem da destinação do sequenciamento de lavra no MSSO.

Figura 43 – Modelo de destinação no sequenciamento de lavra

Fonte: Arquivo próprio

O objetivo é a maximização da função benefício Z :

$$\max Z = \sum_{t=1}^T \sum_{p=1}^P \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^N Vpl_{i,p,m}^t * x_{i,p,m}^t \quad (3.8.1)$$

Sujeito às restrições de:

- Capacidade de alimentação no britador (t);
- Capacidade de movimentação por período e por fase (h);
- Capacidades dos estoques de minério e pilha de estéril (t);
- Ângulo máximo de talude;
- Avanço vertical (máximo de 5 bancos por período);
- Precedência de lavra entre fases e entre polígonos de lavra.

Onde:

- x_i^t é uma variável binária que assume o valor **1** se o bloco i é lavrado no período t e **0** em caso contrário;

- $Vpl_{i,p,m}^t$ é o valor presente do bloco i resultante do beneficiamento do material m lavrado no pushback p no período t , considerando a taxa de desconto d e é dado por:

$$Vpl_{i,p,m}^t = \frac{V_{i,p,m}^t}{(1+d)^t} \quad (3.8.2)$$

É importante salientar que o valor econômico do bloco, $Vpl_{i,p,m}^t$, é calculado com base em um modelo único de teor, estimado por krigagem, onde:

$$V_i = \begin{cases} NR_i^{OK} - M_i - PC_i & \text{se } NR_i^{OK} > PC_i \quad \text{então, o bloco } i \text{ é minério} \\ -MC_i & \text{se } NR_i^{OK} \leq PC_i \quad \text{então, o bloco } i \text{ é estéril} \end{cases} \quad (3.8.3)$$

$$NR_i^{OK} = T_i * Cu_i^{OK} * Rec_i * (P_v - C_v) \quad (3.8.4)$$

onde NR_i^{OK} , MC_i , PC_i são respectivamente a receita líquida, o custo total de lava e o custo total de beneficiamento do minério. O custo de lava possui duas componentes que representam (a) o custo básico mcb_i e; (b) custo adicional por banco mcv_i , referente ao aprofundamento da cava. Assim temos:

$$MC_i = T_i * (mcb_i + mcv_i) \quad (3.8.5)$$

3.8.2. Otimização baseada no risco

A modelagem do problema na abordagem orientada ao risco incorpora na função objetivo, isto é, no cálculo do VPL, custos penalizantes associados à classificação de risco definida preliminarmente, considerando-se as $r \in R$ classes de risco da Tabela 5. Assim temos:

$$\max Y = \sum_{t=1}^T \sum_{p=1}^P \sum_{r=1}^R \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^N Vpl_{i,p,r,m}^t * x_{i,p,r,m}^t \quad (3.8.6)$$

$$Vpl_{i,p,r,m}^t = \frac{Vr_{i,p,r,m}^t}{(1+d)^t} \quad (3.8.7)$$

Sujeito às mesmas restrições da versão determinística, com a diferença que na capacidade de produção ao invés de valores médios obtidos tradicionalmente são utilizados dois dos possíveis valores oriundos das replicações da simulação estocástica da operação de lavra descrita no item 3.4.4., de acordo com a tabela a seguir:

Tabela 6 – Valores de restrição para capacidade de movimentação por período, cenários simulados

Valor (toneladas)	Período Seco	Período Chuvoso
Mínimo	21.700.000	21.100.000
Máximo	22.500.000	21.500.000

Fonte: Arquivo próprio

O valor do bloco é calculado por:

$$Vr_{i,p,r,m}^t = \mathbb{E}N_{i,m,r}^t - M_{i,m,r}^t - PC_{i,m,r}^t \quad (3.8.8)$$

Com:

$$\mathbb{E}NR_{i,m,r}^t = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S T_i * Cu_i^s * Rec_{i,m,r} * (Pv - C) \quad (3.8.9)$$

$$MC_{i,m,r}^t = T_{i,m,r} * (mcb_i + mcv_i + cm_{m,r}^t) \quad (3.8.10)$$

$$PC_{i,m,r}^t = T_{i,m,r} * (pcb_i + pcrs_{m,r}^t) \quad (3.8.11)$$

Utilizando-se a capacidade do MSSO de incluir múltiplos modelos na formulação, é possível calcular o valor esperado da receita auferida considerando o conjunto das simulações estocásticas de teor de cobre. Isso é importante para considerar as relações não lineares da função de transferência em decorrência das diferentes recuperações para cada *cut-off* alimentado na planta.

Note-se que na versão orientada ao risco há o custo adicional de lavra ($cmrsk_{m,r}^t$) e de beneficiamento ($pmsk_{m,r}^t$), referente à classificação de risco r do material m lavrado e beneficiado no período t .

A inclusão do custo $cmrsk_{m,r}^t$ irá orientar o processo de otimização de acordo com a estratégia de exposição ao risco do planejador, uma vez que, como observado anteriormente, os altos teores e baixos teores, no limite estéril-minério, normalmente apresentam maior incerteza associada. Além disso, é possível variar o custo do risco de acordo com o período, conseguindo postergar a lavra de um determinado material ao longo do tempo. Já o custo adicional $pmsk_{m,r}^t$ (Tabela 7) irá orientar a decisão de destinação do minério lavrado, se alimenta a planta diretamente ou se é estocado no período de lavra considerado t . A estratégia de aversão ao risco pode ser evidenciada pelos valores, onde blocos com risco baixo não são penalizados, e as demais categorias são penalizadas com custos maiores de acordo com a categoria de risco.

Como no caso estudado houve uma correlação alta entre baixos teores e altos níveis de incerteza e a penalização das classes de risco não representaria um impacto substancial na lavra dos altos teores, optou-se por não variar os custos por faixas de teor, mantendo-se apenas a penalização por classe de risco, simplificando assim a aplicação do método e a estrutura de cálculos na otimização.

Tabela 7 – Valores do custo de risco na lavra ($cmrsk_{m,r}^t$) e beneficiamento ($pmsk_{m,r}^t$) adotados para penalização das incertezas na otimização.

Custo de penalização (US\$/t)	$cmrsk_{m,r}^t$	$pmsk_{m,r}^t$
RISCO ALTO	50	50
RISCO MODERADO ALTO	30	30
RISCO MODERADO BAIXO	5	5
RISCO BAIXO	0	0

Fonte: Arquivo próprio

Os demais parâmetros econômicos usados para otimização de ambos os sequenciamentos são apresentados na Tabela 8.

Tabela 8 – Parâmetros da otimização

Parâmetro (Unidade)	Valor
Custo de lavra básico (US\$/t)	4,52
Custo de lavra variável (US\$/t/banco)	0,05
Custo de processo (US\$/t)	11
Taxa de desconto (%)	8
Preço de venda Cu (US\$/t)	7000
Custo de venda Cu (US\$/lb)	0,54
Recuperação da usina	f(Cu)

Fonte: Arquivo próprio

A definição dos custos de penalização das categorias de risco envolvem custos relacionados ao investimento necessário para minimizá-lo, considerou-se assim custos com sondagem de pesquisa necessária para redução da malha original de 20x40 m para 20x20 m, incluindo amostragem e análise química, descrição geotécnica e geológica dos furos, revisão do modelo geológico e do modelo de classificação de recursos e reservas, incluindo assim mão de obra de pelo menos 2 auxiliares de geologia, um técnico em geologia, um geólogo e um engenheiro de minas, alcançando um valor médio de 50 US\$/t. A expectativa é que o método proposto, em função das penalidades impostas às classes de maior risco, priorize a lavra de blocos com menor incerteza, postergando os de maior incerteza ao máximo, respeitando as restrições de operação de lavra e qualidade dos materiais que alimentarão a usina de beneficiamento. Nos próximos capítulos serão apresentados os resultados dos métodos de otimização tradicional e orientada ao risco, discussões e conclusões sobre a metodologia proposta para o planejamento estocástico da lavra.

4. Resultados da otimização

A otimização do sequenciamento de lavra foi realizada implementando-se tanto o modelo determinístico quanto o baseado no risco. Inicialmente foram sequenciados os cinco primeiros anos, porém devido os resultados iniciais optou-se por estender a otimização para os primeiros dez anos para uma melhor amostragem dos resultados provenientes de cada método.

Os resultados serão apresentados avaliando-se:

- a) Distribuição dos teores e perfil de risco associado ao longo dos períodos, utilizando-se o fator de reconciliação proativa F4 proposto no item 3.6.6;
- b) Comparação geométrica dos sequenciamentos dos polígonos;
- c) Avaliação do risco de cada sequenciamento, considerando uma medida de risco normalizada;
- d) Quantidades de minério e estéril removidas e relação estéril-minério resultante;
- e) Fluxo de caixa descontado acumulado obtido em cada método de otimização.

4.1. Perfil de risco na alimentação da planta

Na Figura 44 são mostrados os resultados de cada método de otimização com relação aos teores obtidos em cada período, considerando os modelos estimados (Cu_OK) e os valores simulados (*Box-plots*). De forma geral, tanto o método tradicional quanto o baseado no risco resultaram uma curva decrescente de teores ao longo do tempo, decorrente do objetivo comum de maximizar o VPL do sequenciamento de lavra. No que diz respeito ao risco e aderência entre os modelos de teores, o método baseado no risco mostrou-se capaz de selecionar polígonos de modo a manter sempre os valores de cobre estimados dentro do espectro de variação descrito pelos modelos simulados de teor, enquanto que o

sequenciamento tradicional resulta em seleção de polígonos com teores fora dos possíveis valores simulados nos períodos 3, 8, 9, 16 e 17, isto é, com risco de não alcance de metas de teor na usina.

Quanto ao fator de reconciliação proativa F4, observa-se que a otimização orientada ao risco resulta em fatores melhores (próximos de 1) que o método tradicional nos primeiros cinco semestres, além de reduzir substancialmente o impacto das incertezas nos períodos mais críticos observados no sequenciamento tradicional (períodos 8, 9 e 17). De forma geral, no método orientado ao risco foram reduzidas as ocorrências e magnitude de reconciliação fora dos limites aceitáveis, isto é, abaixo de 0,9 e acima de 1,1 (barras em cor laranja). Observa-se também que o risco distribui-se de forma errática no sequenciamento tradicional, enquanto que no sequenciamento orientado ao risco há uma distribuição mais uniforme e controlada, de acordo com o perfil de risco assumido.

Figura 44 – Teores de cobre, perfil de risco e reconciliação entre modelos simulados e estimados.
Sequenciamento tradicional versus baseado no risco

Fonte: Arquivo próprio

4.2. Sequência de lavra

Na Figura 45 são mostrados os resultados na sequência dos polígonos de lavra, considerando cada método. As maiores diferenças são observadas nos polígonos da borda da cava final a ser sequenciada, pois são as áreas com maior ocorrência de classes de risco alta. No detalhe do banco 176 é mostrada a distribuição espacial dos valores de coeficiente de variação do valor econômico do bloco e o período em que cada porção é lavrada.

Figura 45 – Sequenciamento dos polígonos considerando classes de risco. Na escala, identificação dos períodos.

Fonte: Arquivo próprio

Observa-se que o método tradicional lava já no período 9 polígonos de alto coeficiente de variação do valor econômico do bloco, enquanto que no método orientado ao risco esses polígonos são postergados e lavrados somente no período 13 e áreas mais centrais do corpo, associadas a baixos coeficientes de variação são priorizadas e lavradas no período 9, resultando na redução substancial do risco

dos teores de alimentação da usina não serem alcançados (redução do F4 de 1,37 para 1,12). O adiamento da lavra dessas áreas, localizadas na extremidade oeste da fase 4 da cava do Sequeirinho, torna possível o desenvolvimento de sondagens “*in-fill*” com o objetivo de redução das incertezas observadas, assim os impactos na planta podem ser ainda mais minimizados. Este resultado está de acordo com os resultados e medidas de mitigação de riscos apresentados por Freitas *et al.* (2012), onde a fase 5 do Sequeirinho, extensão desta mesma mineralização, foi manualmente postergada como medida de mitigação. Isto valida a abordagem adotada no presente estudo e torna evidente que o processo analítico de avaliação e gerenciamento do risco foi incorporado em um algoritmo de otimização capaz de automatizar o processo de tomada de decisão resiliente ao risco.

Observa-se que o uso de polígonos evita a criação de avanços não operacionais como “ilhas” entre períodos de lavra ou faixas descontínuas de lavra. Quanto maior o rigor na confecção dos polígonos melhor o resultado em termos de sequenciamento operacional, porém quanto maiores os polígonos, sobretudo em regiões de minério, menor a flexibilidade de gerenciamento do risco, devido a menor seletividade. A forma e tamanho dos polígonos devem ser cuidadosamente escolhidos, para conciliar operacionalidade e flexibilidade de gerenciamento de risco e é fortemente dependente da seletividade das escavadeiras disponíveis na frota.

4.3. Risco normalizado

Com o objetivo de avaliar de forma clara as mudanças no perfil de risco de ambos os métodos de otimização, foi utilizado um fator de risco para cada simulação (conteúdo metálico alimentado na planta). O “risco normalizado da simulação *S*” é definido em Goodfellow e Dimitrakopoulos (2013) como:

$$RiscNorm = \frac{Q_t(s)}{Q_t} \quad (4.1)$$

Onde:

$t \in \{1, \dots, T\}$ Representa o índice dos períodos em que o minério é alimentado na usina.

$s \in \{1, \dots, S\}$ Representa o índice da simulação estocástica de cobre.

$Q_t(s)$ Representa a quantidade de metal (em toneladas) enviada à usina no período t considerando o cenário simulado s .

Q_t Representa a quantidade média de metal (em toneladas) enviada à usina no período t considerando todos os cenários simulados. Sendo:

$$Q_t = \frac{1}{|S|} \sum_{s=1}^S Q_t(s) \quad (4.2)$$

Nessa análise o perfil de risco é definido pelos valores máximos e mínimos do risco normalizado das simulações para cada período, tornando mais claro o desempenho de cada método de otimização baseado no perfil de risco gerado. Note-se que a meta para esse fator é 1. Um valor de 1.05, por exemplo, indica que uma das simulações possui o potencial de obter 5% mais metal do que o esperado. Da mesma forma um valor de 0.95 indica o potencial de em uma simulação haver 5% menos metal que o esperado.

De forma geral observa-se que ambos os métodos resultam em uma variabilidade de aproximadamente $\pm 10\%$ na quantidade de metal alimentado na planta, com exceção dos períodos 10, 11, 12, 13 e 20, nos quais a variabilidade pode alcançar +30% (método tradicional, período 11) e -17% (método tradicional, período 13). O método orientado ao risco é capaz de postergar as maiores incertezas, conforme já visto na análise anterior, reduzindo o espectro de variabilidade em 10% e 9% nos períodos 10 e 11 respectivamente, enquanto que nos períodos 6, 15 e 17 a redução foi de 5%.

Figura 46 – Perfil de risco dos métodos de otimização, conteúdo metálico - fator de risco normalizado pela média das simulações.

Fonte: Arquivo próprio

4.4. Quantidades extraídas e valor obtido

Na Figura 47 e na Figura 48 são ilustradas as quantidades de minério e estéril acumuladas em cada período e a relação estéril/minério (REM) respectivamente. Em ambos os gráficos pode-se observar que o método de otimização baseado no risco lava uma quantidade menor de estéril (Risc_ESTERIL acum) para liberar o minério a ser enviado à britagem primária da usina (Risc_BRITADOR acum), em comparação com as massas resultantes da otimização tradicional (Trad_ESTERIL acum e Trad_BRITADOR acum), sobretudo a partir do período 6. Isso decorre da aversão às zonas de risco alto, comumente associadas às áreas de borda de minério e de maior REM. Essa capacidade acaba impactando positivamente no fluxo de caixa do sequenciamento de lavra, pois adia a lavra de estéril ao longo do tempo.

A Figura 49 mostra o FCDA (Fluxo de Caixa Descontado Acumulado) obtido a cada período por cada um dos métodos de otimização, na qual podemos observar que o método baseado no risco resulta em valores na maioria das vezes maiores ao

longo dos períodos alcançando incrementos de até 5% em relação ao FCDA obtido pelo método tradicional. A estratégia de aversão ao risco adotada na otimização priorizou polígonos mais ricos e com menor incerteza associada (antecipação de receitas), postergando a lavra de áreas de baixo teor e estéril associadas às zonas da mineralização onde ocorrem as maiores incertezas geológicas, quantificadas através do coeficiente de variação do valor econômico dos blocos de lavra (postergação de custos).

Figura 47 – Quantidades lavradas de minério e estéril

Fonte: Arquivo próprio

Figura 48 – Relação estéril-minério obtida, sequenciamento tradicional versus baseado no risco

Fonte: Arquivo próprio

Figura 49 – Fluxo de caixa descontado acumulado (FCDA) resultante de cada método de otimização

Fonte: Arquivo próprio

5. Discussão

As variáveis de entrada do planejamento de lavra possuem diversos níveis de incertezas e tais incertezas podem transformar-se em riscos, para obter planos de lavra mais realísticos e de sucesso é necessária a correta determinação e redução desses riscos. As informações geradas pela adoção das técnicas de simulação, otimização e análise de risco, oferecidas pelo planejamento estocástico de lavra elevam o conhecimento da operação e seus fatores de risco a níveis ainda não observados na indústria mineral.

Considerando os resultados obtidos nesta pesquisa e o contexto da mina do futuro, fica clara a necessidade de desenvolvimento e aprimoramento de técnicas de planejamento de lavra capazes de gerenciar a gama de informações disponibilizada pelos dispositivos e sensores embarcados nos equipamentos autônomos de lavra e armazenados em bancos de dados complexos e inter-relacionados. As técnicas, algoritmos e modelos matemáticos emergentes que compõem o planejamento estocástico vêm se mostrando capazes de preencher esta lacuna no conhecimento, propiciando a base científica que preparará as gerações futuras de engenheiros para implantar e desenvolver sistemas de gestão condizentes com os níveis de tecnologia e automação esperados para a mina do futuro, garantindo o aproveitamento máximo dos recursos tecnológicos cada vez mais disponíveis. Ou seja, garantir que a mineração evolua a gestão de seus processos, pessoas e tecnologias dentro de uma abordagem sistêmica, com visibilidade holística e comunicações bidirecionais que permitirão que amplas quantidades de dados circulem entre a operação da mina e a central de controle da operação. Simulação, otimização e análise de risco são disciplinas cada vez mais associadas a esse modelo de gestão sistêmica e fazem do planejamento estocástico de lavra ferramenta essencial para a correta tomada de decisão em um ambiente dinâmico como o esperado para a mina do futuro.

A simulação de Monte Carlo aplicada ao dimensionamento dos indicadores da frota de equipamentos de lavra mostrou-se não só mais eficiente como ferramenta de

prognóstico do comportamento da frota, através da descrição probabilística dos eventos de manutenção e operação dos equipamentos, como também forneceu informações importantes de como gerenciar a frota, priorizando e indicando ações corretivas ou de melhoria com base nas variáveis mais impactantes na produção dos equipamentos.

A simulação geoestatística e quantificação da variabilidade relacionada aos teores de cobre na jazida tornou possível o entendimento mais amplo das incertezas geológicas do depósito, através de análises quantitativas, sustentando decisões de lavra e de melhoria do conhecimento geológico, com informações que possibilitam um planejamento de sondagem mais robusto e eficaz em termos de custo e benefício. Além de fornecer informações para o desenvolvimento de um modelo de classificação de risco e otimização orientada à gestão efetiva de tais riscos, minimizando perdas e custos.

A otimização orientada ao risco, apesar de não ser uma otimização estocástica pura, mostrou resultados animadores no que diz respeito ao controle dos riscos de não alcance das metas de alimentação da usina, redução e postergação dos riscos no processo de sequenciamento de lavra e ganhos no desempenho operacional e financeiro da mina em relação ao método tradicional de otimização do sequenciamento de lavra, traduzindo-se em uma ferramenta poderosa de gestão proativa dos riscos decorrentes das incertezas geológicas, fornecendo um caminho técnico, operacional e econômico mais sustentável para o aproveitamento da jazida e possibilitando a minimização dos impactos negativos dos riscos, bem como apontando o momento crítico para novos investimentos para um melhor conhecimento da jazida, onde mesmo a mudança do sequenciamento da lavra não fornece reduções substanciais no perfil de risco.

Em planejamento estocástico as incertezas inerentes ao ativo físico e ao ativo mineral são convertidas em medidas quantitativas de risco, que fornecem possíveis valores para os principais indicadores chaves do processo produtivo. Tais valores podem ser analisados estatisticamente e utilizados como base para definir metas de produção e níveis de confiança para os processos de mineração,

sequenciamento dos avanços de lavra, operação e manutenção dos equipamentos, configurando uma gestão proativa integrada. Atualmente essas incertezas são apenas acompanhadas por processos de reconciliação, que não permitem uma gestão clara e efetiva.

6. Conclusão e Recomendações

Retomando as questões básicas iniciais desta pesquisa é possível verificar as seguintes respostas e conclusões:

1. O planejamento de lavra pode ser aprimorado com uma abordagem estocástica?
 - Foi desenvolvido um exemplo de planejamento de lavra de longo prazo com cenários múltiplos. Esses cenários múltiplos permitiram mapear a variabilidade dos parâmetros de decisão (teor de cobre e indicadores operacionais), fornecendo um plano único que contempla as alternativas práticas da operação.
 - O planejamento estocástico eliminou a necessidade de elaborar revisões no plano, como é o caso do planejamento de lavra tradicional pelo método determinístico, que deve ser revisado para incorporar as mudanças evidenciadas na reconciliação e aderência.
2. É possível fazer a análise e gestão de riscos utilizando simulação e otimização no planejamento estocástico?
 - O sequenciamento de lavra resultante prioriza os blocos de menor risco geológico dentro dos objetivos de produção do plano de lavra.
 - A análise de risco dos indicadores operacionais aprimorou a definição de metas no planejamento de lavra e de parâmetros no processo de otimização.
 - A análise dos impactos de cada variável de entrada (DF, UF e produtividade) na produção planejada forneceu informações que melhoram a gestão da frota e de serviços de manutenção e operação.
3. Qual o papel do planejamento estocástico na mina do futuro?

- Dada a grande quantidade de dados gerados pelos dispositivos embarcados nos equipamentos autônomos, o planejamento de lavra deverá gerenciar e utilizar de forma eficiente tais dados.
- O uso de métodos de "back analysis" através de simulação de múltiplos cenários é capaz de projetar para o futuro desempenhos observados no histórico da operação.
- A simulação geoestatística e quantificação da variabilidade relacionada aos teores de cobre na jazida tornou possível um entendimento mais amplo das incertezas geológicas do depósito, sustentando decisões de lavra e de melhoria do conhecimento geológico, com informações que possibilitam um planejamento de sondagem mais robusto e eficaz em termos de custo e benefício.

Conclui-se com os resultados desta pesquisa que o entendimento dos processos, técnicas e algoritmos que fazem parte do planejamento estocástico de lavra é de suma importância para o desenvolvimento de um sistema de gestão eficaz do processo de lavra no contexto da mina do futuro. Os ganhos com relação à previsibilidade das operações e da variabilidade da matéria prima, a possibilidade de simulação da realidade e de análise quantitativa dos riscos associados mostram a importância da migração de modelos determinísticos de planejamento para os modelos estocásticos desenvolvidos nas últimas décadas.

Conclui-se ainda que a abordagem estocástica trás benefícios significativos para a tomada de decisões operacionais de lavra. É essencial que o planejamento de lavra utilize uma abordagem estocástica para aprimorar os resultados da operação, sobretudo com a inclusão de gestão de risco. Com o cálculo e a classificação do risco geológico de cada bloco é possível realizar o planejamento estocástico com análise e gestão de risco, utilizando técnicas de simulação e otimização. O controle da variabilidade do risco geológico permite priorizar os blocos com menor risco, aprimorando os resultados de reconciliação e aderência do planejamento de lavra.

Recomenda-se que para trabalhos futuros a simulação da geometria do corpo de minério seja também considerada no estudo de simulação geoestatística, para cobrir um aspecto relevante da incerteza geológica e fornecer um conhecimento mais amplo da incerteza do depósito.

O uso de dados históricos do despacho da mina para definição das distribuições de probabilidade de ocorrência dos eventos de operação e manutenção dos equipamentos foi essencial para a confiabilidade nos resultados da simulação e demandou uma extensa análise estatística para agrupamento dos códigos e exclusão de dados incorretos ou anômalos, tornando clara a importância da etapa de validação dos dados de entrada em um estudo de simulação. Recomenda-se para trabalhos futuros o uso de simulação de eventos discretos para uma melhor previsão das interações entre as frotas no processo produtivo, com análise detalhada de filas e ociosidades.

Em trabalhos futuros a otimização orientada ao risco pode evoluir para uma otimização estocástica pura, não realizada no presente estudo devido o escopo da pesquisa e inexistência de programas de otimização estocástica comercializados na época em que o estudo de otimização foi realizado.

7. Referências bibliográficas

- ALABERT, F. **Stochastic imaging of spatial distributions using hard and soft information**. Masters of Science thesis, Department of Applied Earth Sciences, Stanford University (Palo Alto): 197p. 1987.
- ALTIOK, T., MELAMED, B. **Simulation Modeling and Analysis with Arena**. Elsevier Academic Press, 2007, 456 p.
- ASAD, M. W. A., DIMITRAKOPOULOS, R. **A heuristic approach to stochastic cutoff grade optimization for open pit mining complexes with multiple processing streams**. Resources Policy, n. 38 v. 4, p. 591-597. 2013.
- AUGUSTO, R. A., MONTEIRO, L. V. S., XAVIER, R. P., FILHO, G.R.S. **Zonas de alteração hidrotermal e paragênese do minério de cobre do Alvo Bacaba, Província Mineral de Carajás (PA)**. Revista Brasileira de Geociências, SBG, São Paulo, v. 38, n. 2, p.263-277, Jun. 2008.
- B. KORTE, J. VYGEN. **Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms**. Algorithms and Combinatorics 21. Springer - New York. Fourth Edition. 2008.
- BÄCKBLÖM, G. **MIFU-Smart Mine of the Future: Conceptual Study 2009-2010**, Final Report. RTC-Rock Tech Centre. 2010.
- BILLINGER, D.R., ROSENBLATT, M., **Asymptotic theory of kth-order spectra in Spectral Analysis of Time Series**, B. Harris (ed.), John Wiley, New York, 1966, p. 189-232.
- BIRGE, J.R. AND LOUVEAUX, F., **Introduction to stochastic programming**. Springer series in operations research. New York, 1997. 421p.
- BOLAND, N., DUMITRESCU, I., FROYLAND, G., GLEIXNER A. M. **LP-based disaggregation approaches to solving the open pit mining production scheduling problem with block processing selectivity**. Computers & Operations Research v. 36 (4), p. 1064-1089. 2009.

- CACCETTA, L., HILL, S. P. **An application of Branch and Cut to open pit mine scheduling.** Journal of Global Optimization v.27, p. 349-365. 2003.
- CAO, D., SUN, Y., GUO, H., **Optimizing Maintenance Policies based on Discrete Event Simulation and the OCBA Mechanism.** 2013 Reliability and Maintainability Symposium, January, 2013.
- CHARNES, A., COOPER, W. W., SYMONDS, G. H. **Cost horizons and certainty equivalents: an approach to stochastic programming of heating oil.** Management Science. v. 4, p. 235-263. 1958.
- CHATTERJEE, S., LAMGHARI, A., DIMITRAKOPOULOS, R. **A two-phase heuristic method for constrained pushback design.** In: Proceedings of MININ2010, Conference on Mining Innovation (R. Castro, X. Emery, and R.Kuyvenhoven eds.). Santiago, Chile. p. 195-204. 2010.
- CHIEREGATI, A. C., DELBONI JR., H., COSTA, J. F. C. L. **Sampling for proactive reconciliation practices.** Mining Technology: IMM Transactions section A, v. 117, p. 136-141. 2008.
- CHIEREGATI, A. C., PIGNATARI, L. E. C., DELBONI JR., **Novo modelo de reconciliação para a indústria do ouro.** REM: R. Esc. Minas, Ouro Preto, v. 64, no. 2, p. 237-243, abr. jun. , 2011.
- CHILÈS, J.P., DELFINER, P. **Geostatistics. Modelling Spatial Uncertainty.** Wiley Series in Probability and Statistics: Wiley Inter-Science: New York. 1999.
- CHIRONIS, N. P. **Computer Monitors and Controls all Truck-Shovel Operations.** Coal Age, v. 90:3, p. 50-55, 1985.
- CHRISTOPHER, M., **Creating Resilient Supply Chains: A Practical Guide.** London: Centre for Logistics and Supply Chain Management, Cranfield School of Management. 2003.
- CHWIF, L. MEDINA, A. C. **Modelagem e simulação de eventos discretos: Teoria e Aplicações.** 1. Ed. São Paulo: Bravart, v. 1. 255 p. 2006.

CODELCO. **Annual Report 2008**. Santiago, Chile. 2009, p. 53-61.

CONSUEGRA, F. R. A., DIMITRAKOPOULOS, R. **Algorithmic approach to pushback design based on stochastic programming: method, application and comparisons**. IMM Transactions, Mining Technology, vol. 119, no. 2, p. 88-101. 2010.

DAGDELEN, K., JOHNSON, T.B. **Optimum open pit mine production scheduling by lagrangian parameterization**. Proceedings of 19th International APCOM Symposium. Littleton, p. 127-142. 1986.

DALY, C. **High order models using entropy, Markov random fields and sequential simulation**. in Geostatistics Banff 2004 (eds: O. Leuangthong and C. Deutsch), v. 2, p. 215-224 (Springer: Dordrecht). 2004.

DANTZIG, G. B. **Linear programming under uncertainty**. Management Science. v. 1. p. 197-206. 1955.

DAVID, M. **Handbook of Applied Advanced Geostatistical Ore Reserve Estimation**, (Elsevier Science Publishers: Amsterdam). 216 p. 1988.

DAVIS, M. **Production of conditional simulations via the small LU decomposition of the covariance matrix**. Mathematical Geology. v. 19. n. 2. p. 91-98. 1987.

DENBY B., SCHOELD D. **Open-pit design and scheduling by use of genetic algorithms**. Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy 103:A21-A26. 1994.

DEUTSCH, C. V., JOURNEL, A. G. **GSLIB Geostatistical software library and users guide**, Second Edition, Oxford University Press: New York. 1998.

DIEDRICH, C. **Incorporação da variabilidade dos teores para análise de risco de recursos minerais e sequenciamento de lavra**. Dissertação (Mestrado em Engenharia – Tecnologia Mineral) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e dos Materiais-PPGEM, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, 2012.

- DIMITRAKOPOULOS, R. **Conditional simulation algorithms for modelling orebody uncertainty in open pit optimisation**. International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment, v. 12, 1998, p.173-179.
- DIMITRAKOPOULOS, R. **Ore Reserve Risk and Mine Planning Optimization Stochastic models and optimization for the mining industry- DBSIM Manual**. McGill University, Canada, 2010.
- DIMITRAKOPOULOS, R., LUO, X. **Generalized sequential Gaussian simulation on group size v and screen-effect approximations for large field simulations**, Mathematical Geology, v. 36 n.5, 2004, p. 567-591.
- DIMITRAKOPOULOS, R., RAMAZAN, S. **Stochastic integer programming for optimizing long term production schedules of open pit mines: methods, application and value of stochastic solutions**. Mining Technology: Transactions of the Institute of Mining and Metallurgy, Section A, Volume 117, Number 4, 2008, p 155-167.
- DIMITRAKOPOULOS, R., FARRELLY C. T., GODOY M. C. **Moving forward from traditional optimization: grade uncertainty and risk effects in open-pit design**. Transactions of the Institutions of Mining and Metallurgy, Section A: Mining Technology, 111, Jan/Apr 2002. p. A82-A88.
- DIMITRAKOPOULOS, R., MARTINEZ, L., RAMAZAN, S. **Optimising open pit design with simulated orebodies and Whittle Four-X: A maximum upside/minimum downside approach**. Orebody Modelling and Strategic Mine Planning, second edition (ed: R Dimitrakopoulos). (The Australasian Institute of Mining and Metallurgy: Melbourne), 2005. pp 181-186.
- DIMITRAKOPOULOS, R., MUSTAPHA, H., GLOAGUEN, E. **High-order statistics of spatial random fields: Exploring spatial cumulants for modelling complex, non-Gaussian and non-linear phenomena**, Math Geosci (in press). 2009.
- DIMITRAKOPOULOS, R. ABDEL-SABOUR, S. A. **Evaluating mine plans under uncertainty: Can the real options make a difference?** Resources Policy, v. 32 n. 3, p. 116-125. 2007.

- DIMITRAKOPOULOS, R., RAMAZAN, S., **Uncertainty based production scheduling in open pit mining**. SME Transactions, 2004. p 316
- DIMITRAKOPOULOS, R., CHOU, C., GODOY, M. C. **Resource/Reserve Classification with Integrated Geometric and Local Grade Variability Measures**. COSMO Research Report #2 2008.
- DUNBAR, W. S. **A Future of Mining**. The 13th Annual Americas School of Mines - Part F. Presentation. (Department of Mining Engineering - University of British Columbia). 2009. p. 39.
- FERLAND, J.A., AMAYA, J., DJUIMO, M.S. **Application of a particle swarm algorithm to the capacitated open pit mining problem**. Autonomous Robots and Agents, Mukhopadhyay S. and Sen Gupta G. Ed. Springer-Verlag. p.127-133. 2007.
- FREITAS, S. B. M. **Planejamento de Lavra em Complexos Mineiros: Aplicação do Whittle™ Multi-Mine em Modelos Simulados na Mina do Sossego**, 2009. 105 p. Monografia (Bacharelado). Faculdade de Engenharia de Minas e Meio Ambiente, Universidade Federal do Pará-UFPA, Marabá, Pará, 2009.
- FREITAS, S. B. M., AIRES, B., TOMI, G., AGRA, R. **Risk management incorporated to life-of-mine planning at Sossego copper mine, Carajás, Brazil**. In: 7th International Conference on Intelligent Processing and Manufacturing of Materials (IPMM 2012). São Paulo, 2012.
- GERSHON, M. E. **Optimal mine production scheduling: evaluation of large scale mathematical programming approaches**. Int. J. Mining Eng., 1983, v.1, p. 315 – 329.
- GERSHON, M. **Heuristic approaches for mine planning and production scheduling**. International Journal of Mining and Geological Engineering v. 5 (1), p. 1-13. 1987.
- GODOY, M. C., DIMITRAKOPOULOS, R., COSTA, J. F., **Economic Functions and Geostatistical Simulation Applied to Grade Control**. In Mineral Resource and Ore Reserve Estimation – The AusIMM Guide to Good Practice (Ed: A C Edwards), The Australasian Institute of Mining and Metallurgy (Melbourne). p. 591–600. 2001.

- GODOY, M. **The Effective Management of Geological Risk in Long-term Production Scheduling of Open Pit Mines**, PhD thesis, W. H. Bryan Mining Geology Research Centre, The University of Queensland, Brisbane. 2003, 256 p.
- GODOY, M., DIMITRAKOPOULOS, R. **A Framework for Risk Quantification in Strategic Mine Planning and Design Method and Application**. Journal of Mining Science, in press. 2010.
- GOLAMNEJAD, J., OSANLOO M., KARIMI, B. **A chance-constrained programming approach for open pit long-term production scheduling in stochastic environments**. J. S. Afr. Inst. Min. Metall. n.106, p.105–114, 2006.
- GOOVAERTS, P. **Geostatistics for Natural Resources Evaluation**. Applied Geostatistics Series. xiv + 483 pp. New York, Oxford: Oxford University Press. 1997.
- GOODFELLOW R., DIMITRAKOPOULOS, R. **Algorithmic integration of geological uncertainty in pushback designs for complex multi-process open pit mines**. Mining Technology (Trans. Inst. Min. Metall. A), v. 122, n. 2, p. 67 – 77. , 2013.
- GUIMARÃES, I. F., PANTUZA JR, G.; SOUZA, M. J. F. **Modelo de simulação computacional para validação dos resultados de alocação dinâmica de caminhões com atendimento de metas de qualidade e de produção em minas a céu aberto**. In: XIV Simpósio de Engenharia de Produção – SIMPEP, Bauru – SP. 2007.
- HALL, R. A. **Reliability Analysis and Discrete Event Simulation as Tools for Mining Equipment Management**. Phd. Thesis, Department of Mining Engineering, Queen's University, Kingston, Ontario, Canada. April, 2000.
- HILLIER, F., LIEBERMAN, G. **Introduction to Operations Research**. 7th ed. McGraw-Hill, Boston, 1214 p. 2001.
- HOCHBAUM, D. S., A. CHEN. **Performance analysis and Best implementations of old and new algorithms for the open-pit mining problem**. Oper. Res. n. 48, v. 6, p. 894–914. 2000.

- HUANG, Z., CAI, W., BANFIELD, A. F., CANCINO, R., CHACON, E. **A medium-term and short-term mine planning tool based on mixed integer linear programming technique**. 2nd Seminar on Mine planning, June 8-10, Antofagasta, Chile. 2011.
- HUANG, Z., CAI, W., BANFIELD, A. F. **A New Short- and Medium-Term Production Scheduling Tool - MineSight Schedule Optimizer (MSSO)**. Proceedings of Seventeenth International Symposium on Mine Planning and Equipment Selection (MPES 2008), October 20-22, Beijing, China, p. 316-330. 2008.
- JOHNSON, T.B. **Optimum production scheduling**. in Proceedings of the 8th International Symposium on Computers and Operations Research, 1969, p. 539 – 562.
- JOURNEL, A. G. **Geostatistics for conditional simulation of ore bodies**. Economic Geology: V.69 p.673. 1974.
- JOURNEL, A. G. **Computer imaging in the minerals industry – Beyond mere aesthetics**. in Proceedings 23rd APCOM (International Symposium on Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry). p 3-13 (Society for Mining, Metallurgy and Exploration: Littleton). 1992.
- JOURNEL, A. G. **Roadblocks to the evaluation of ore reserves — The Simulation overpass and putting more geology into numerical models of deposits**. in Orebody Modelling and Strategic Mine Planning, second edition (ed: R Dimitrakopoulos), p. 29-32 (The Australasian Institute of Mining and Metallurgy: Melbourne). 2007.
- JOURNEL, A. G., ALABERT, F. **Non-Gaussian data expansion in the earth sciences**: Terra Nova v.1 p. 123-134 . 1989.
- JOURNEL, A. G., HUIJBREGTS, C. H. J. **Mining geostatistics**: 600 p. Academic Press: London. 1978.

- KENT, M., PEATTIE, R., CHAMBERLAIN, V. **Incorporating grade uncertainty in the decision to expand the main pit at the Navachab gold mine, Namibia, through the use of stochastic simulation.** *Orebody and Strategic Mine Planning*, second edition (ed: R. Dimitrakopoulos), The Australasian Institute of Mining and Metallurgy: Melbourne. p. 187-196. 2007.
- KIRKPATRICK, S., GELATT, C. D., VECCHI, M.P. **Optimization by simulated annealing**, *Science*, v. 220, p. 671 – 680. 1983.
- KOLMOGOROV, A. N. **Foundations of the theory of probability.** Chelsea Publishing Co., New York, 1950. 84p.
- KOMATSU MINING SYSTEMS. **Presentation at 101st Annual General Meeting of the Canadian Institute of Mining, Metallurgy and Petroleum.** Calgary, Alberta. May 3-5, 1999.
- KORTE, B. H., VYGEN, J. **Combinatorial optimization: theory and algorithms.** 4th ed. Berlin: Springer, 627 p. 2008.
- LANE, K. E. **The economic definition of ore: cut-off grades in theory and practice.** Mining Journal Books Ltd., London, 1988. 149 p.
- LANTUEJOUL, C. **Geostatistical Simulation. Models and Algorithms:** 256p. Springer. New York. 2001.
- LAURICH, R. **Planning and design of surface mines.** B. Kennedy, ed. *Surface Mining*, Chapter 5.2. Port City Press, Baltimore, p. 465–469. 1990.
- LE LOC'H, G., GALLI, A. **Truncated plurigaussian method: theoretical and practical points of view.** In: E.Y. Baafi & N.A. Schofield (eds) *Geostatistics Wollongong '96*, Dordrecht, Kluwer Academic Press, v.1, p.211-222. 1997.
- LEITE, A., DIMITRAKOPOULOS, R. **Stochastic optimization model for open pit mine planning: Application and risk analysis at copper deposit,** *Mining Technology* (Trans. Inst. Min. Metall. A), v. 116, n. 3, p. 109 – 118. , 2007.

LERCHS, H., GROSSMAN, F. **Optimum design of open-pit mines**. Trans. CIM. v. 58, p. 47 – 54. 1965.

Li, W. **A fixed-path Markov algorithm for conditional simulation of discrete spatial variables**, Mathematical Geology, n.39, v.2, 2007.

LUO, X. **Spatiotemporal stochastic models for earth science and engineering applications**. PhD thesis, McGill University, Montreal, 177p. 1998.

MANTOGLIOU, A., WILSON, J. L., **The turning bands method for simulation of random fields using line generation by a spectral method**: Water Resources Research V. 18, N. 5, p.1379-1394. 1982.

MARIN, T. **Impacto da variabilidade operacional na execução do plano de lavra**. Dissertação (Mestrado em Engenharia – Tecnologia Mineral) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Minas e de Petróleo, São Paulo, 87 p., 2009.

MATHERON, G. **The intrinsic random functions and their applications**. Advances in Applied Probability, V. 5, p. 439-468. 1973.

MEAGHER, C., ABDEL SABOUR, S.A., DIMITRAKOPOULOS, R. **Pushback Design of Open Pit Mines Under Geological and Market Uncertainties**. In proceedings, Orebody Modelling and Strategic Mine Planning 2009, AusIMM, p. 297-304. 2009.

MENA, R., ZIO, E., KRISTJANPOLLER, F., ARATA, A. **Availability-based simulation and optimization modeling framework for open-pit mine truck allocation under dynamic constraints**. International Journal of Mining Science and Technology. N. 23 v.1, p.113–119. 2013.

MENABDE, M.; FROYLAND, G.; STONE, P. e YEATES, G. A. **Mining schedule Optimisation for Conditionally Simulated Orebodies**. in: R. Dimitrakopoulos (Org). Orebody Modelling and Strategic Mine Planning, 2° edition. (The Australasian Institute of Mining and Metallurgy: Melbourne), 2007. p. 379-384.

- MERSCHMANN, L. H. C. **Desenvolvimento de um sistema de otimização e simulação para análise de cenários de produção em minas a céu aberto.** Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro, 2002.
- MORENO, E., ESPINOZA, D., GOYCOOLEA, M. **Large-scale multi-period precedence constrained knapsack problem: A mining application.** Electronic Notes in Discrete Mathematics, v. 36, p. 407-414. 2010.
- MORLEY, C. **Beyond reconciliation: a proactive approach to using mining data.** In: LARGE OPEN PIT MINING CONFERENCE, 5, 2003. Kalgoorlie. Proceeding Melbourne: AusIMM, 2003. p. 185-192.
- MORLEY, C., THOMPSON, K. **Extreme reconciliation - a case study from Diavik diamond mine,** Canada. In: INTERNATIONAL MINING GEOLOGY CONFERENCE, 6, 2006. Darwin. Proceedings. Melbourne: AusIMM, 2006. p. 313-321.
- MUSTAPHA, H., DIMITRAKOPOULOS, R. **An Algorithm for Geological Patterns Recognition using High-Order Spatial Cumulants.** COSMO Research Report v. 2, 2009.
- MUSTAPHA, H., DIMITRAKOPOULOS, R. **HOSIM: A High-order Stochastic Simulation Algorithm for Generating Three- dimensional Complex Geological Patterns.** COSMO Research Report v. 2, 2010.
- MYERS, D. E. **Vector conditional simulation,** in Proceedings, Third International Geostatistical Congress (ed: M Armstrong), (D. Reidel Publishing Company: Dordrecht). p 283-293. 1989.
- NASAB, H. A., OFFEI, K. A., EIVAZY, H. **Large-scale open pit production scheduling using Mixed Integer Linear Programming.** International Journal of Mining and Mineral Engineering. V. 2, n. 3, P.185-214. 2010.
- NEBOT, E. **Surface Mining: Challenges and Main Research Issues for Autonomous Operations.** 12th International Symposium on Robotics Research (ISRR 2005), Germany: Springer. 2005.

- OSANLOO, M., GHOLAMNEJAD, J. AND KARIMI, B. **Long-term open pit mine production planning: a review of models and algorithms**, International Journal of Mining, Reclamation and Environment, n. 22, v.1, p. 3 - 35, 2007.
- PANAGIOTOU, G. N. **Discrete mine system simulation in Europe**. International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment, v. 13, p. 43-46, 1999.
- PERONI, R. L. **Análise da Sensibilidade do Sequenciamento de Lavra em Função da Incerteza do Modelo Geológico**. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais (PPGEM), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 126 p., 2002.
- RAMAZAN, S., DIMITRAKOPOULOS, R. **Stochastic optimisation of long-term production scheduling for open pit mines with a new integer programming formulation**, Proc. Conf. on 'Orebody modelling and strategic mine planning', Perth, Australia, The Australasian Institute of Mining and Metallurgy, p. 353–359. 2004.
- RAMAZAN, S., DIMITRAKOPOULOS, R. **Production scheduling with uncertain supply: A new solution to the open pit mining problem**. COSMO Stochastic Mine Planning Laboratory: Technical Report, p. 257-294. 2007.
- RAMAZAN, S. **The new fundamental tree algorithm for production scheduling of open pit mines**. European Journal of Operational Research v.177, p.1153-1166. 2007.
- RAMOS NETO, A. N., PINTO, L. R. **Template do programa Arena para simulação das operações de carregamento e transporte em minas a céu aberto**. Revista Escola de Minas, v. 57(1), p. 65-69, 2004.
- RAMOS, F. **Large Scale Autonomous Systems for Mining Automation**. Presentation. Australian Centre for Field Robotics. ARC Centre of Excellence for Autonomous Systems. The University of Sydney, Australia. 2008.
- RAVENSCROFT, P. J. **Risk analysis for mine scheduling by conditional simulation**. Transactions of the Institutions of Mining and Metallurgy, Mining Technology, n. 101:A, p. 101-108. 1992.

- ROBLES, L., DIMITRAKOPOULOS, R. **Stochastic Simulation of the Fox Kimberlitic Diamond Pipe, Ekati Mine, Northwest Territories, Canada**. COSMO Research Report n. 3, 2009.
- RODRIGUES, L. F. **Análise comparativa de metodologias utilizadas no despacho de caminhões em minas a céu aberto**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Belo Horizonte – MG, 2006.
- SARKER, R. A., NEWTON, C. S. **Optimization Modelling: A Practical Approach**. CRC Press Taylor & Francis Group. 469p. 2008.
- SEIFERT, D., JENSEN, J. L. **Object and pixel-based reservoir modelling of a braded and fluvial reservoir**, Mathematical Geology, v. 32, p. 581-603. 2000.
- SEVIM, H., LEI, D. **The problem of production planning in open pit mines**. INFOR 36 (1-2): 1-12. 1998.
- SHAPIRO, A.; DENTCHEVA, D.; RUSZCZYNSKI, A., **Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory**. Society for Industrial and Applied Mathematics and the Mathematical Programming Society series on optimization, 2009. 436 p.
- SOUZA, L. E. **Proposição Geoestatística para Quantificação do Erro em Estimativas de Tonelagens e Teores**. Tese de Doutorado. Programa de Pós Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais (PPGEM), Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 193p. 2007.
- STREBELLE, S. **Conditional simulation of complex geological structures using multiple-point statistics**. Mathematical Geology, n. 34, v. 1, p.: 1-21. 2002.
- THORLEY, U. **Open Pit Mine Planning: Analysis and system modeling of conventional and oil sands applications**. PhD thesis. Queen's University Kingston, Ontario, Canada. September, 2012, 77 p.
- TOLWINSKI, B., UNDERWOOD, R. **A scheduling algorithm for open pit mines**. IMA Journal of Mathematics Applied in Business & Industry v.7. p. 247-270. 1996.

- TU, J. H., HUCKA, V. J. **Analysis of open-pit truck haulage system by use of a computer model.** CIM Bulletin, v. 78, n. 879, p. 53-59, 1985.
- VAGENAS, N. **Applications of discrete-event simulation in Canadian mining operations in the nineties.** International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment, v. 13, n. 2, p. 77-78, 1999.
- VANN, J., BERTOLI, O., JACKSON, S. **An Overview of Geostatistical Simulation for Quantifying Risk.** In: "Quantifying Risk and Error" Symposium. Geostatistical Association of Australasia, 2002.
- VIDAL, V., DIMITRAKOPOULOS, R. **Dynamic Cut-off Grade Determination under Grade Uncertainty.** COSMO Research Report n. 2, 2011.
- WHITE, J. W., OLSON, J. P., VOLNOUT, S. I. **On improving truck/shovel productivity in open pit mines.** CIM Bulletin, v. 8, n. 973, p. 43-49, 1993.
- WHITTLE, G. **Global Asset Optimisation.** In proceedings, Orebody modelling and strategic mine planning: Uncertainty and risk management models, AusIMM Spectrum Series 14, 2nd Edition. 2007. p. 331-336.
- WHITTLE, J. **Long-term scheduling.** Proceedings of the 35th International Symposium: Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry. Wollongong: The Australasian Institute of Mining and Metallurgy. p. 76-80. 2011.
- WHITTLE, P. **Stochastic processes in several dimensions.** Bulletin International Statistical Institute, V. 40. 1963. p. 974-994.
- YAGLOM, A. M. **An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions.** Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. 1962. 235p.
- ZOSCHKE, LES T. **Recent Experiences With Autonomous Haul Truck In Open Pit Mines.** Modular Mining Systems Inc. 2001. 26 p.