RENATO ESPÍRITO BASSO POLI

**Modelagem numérica do fraturamento hidráulico
de um meio poroelástico utilizando
o método dos elementos finitos coesivos
com adaptatividade de malha**

São Paulo
2020

RENATO ESPÍRITO BASSO POLI

**Modelagem numérica do fraturamento hidráulico
de um meio poroelástico utilizando
o método dos elementos finitos coesivos
com adaptatividade de malha**

Versão Revisada

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Engenharia Mineral

Orientador: Prof. Dr. Rafael dos Santos Gioria

Co-orientador: Prof. Dr. Ronaldo Carrion

São Paulo

2020

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Esse exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com anuência do seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Poli, Renato Espírito Basso

Modelagem numérica do fraturamento hidráulico de um meio poroelástico utilizando o método dos elementos finitos coesivos com adaptatividade de malha / R. E. B. Poli, 2020.

112 p.

Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Minas e de Petróleo.

Versão revisada.

1. Engenharia. 2. Engenharia de Petróleo. 3. Fraturamento hidráulico. 4. Método dos elementos finitos. 4. Elementos coesivos. 6. Malha adaptativa. I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Minas e de Petróleo II.t.

POLI, R. E. B. **Modelagem numérica do fraturamento hidráulico de um meio poroelástico utilizando o método dos elementos finitos coesivos com adaptatividade de malha.** 2020. 110 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mineral) – Departamento de Minas e de Petróleo, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2020

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. Dr. _____
Instituição: _____
Julgamento: _____

Prof. Dr. _____
Instituição: _____
Julgamento: _____

Prof. Dr. _____
Instituição: _____
Julgamento: _____

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas apoiaram decisivamente este trabalho. Foram muitas discussões, pontuais ou incessantes, não importa. O conhecimento precisa, porque assim se transforma e cresce. Agradeço, sem restrições, a todos que, de alguma forma, tangenciaram meus estudos.

Individualmente, preciso agradecer:

- à nossa pequena família, pelo carinho e apoio incondicionais:
Vanessa, Lucas e Tiago;
- à nossa grande família, pela força e exemplo:
Josemary, Frederico, Felipe e Cláudia;
- à Escola Politécnica da USP, aos professores e orientadores, pelas excelentes discussões, sugestões e acolhimento acadêmico:
Ronaldo Carrion e Rafael Gioria;
- à Petrobras, sua estrutura gerencial e consultores técnicos, por provisionar energia à sorte da minha pesquisa acadêmica:
Luís Carlos de Souza Jr., Paulo Marcos Vieira, Erick Slis Santos, Leonardo Cabral, Luciano Toledo, Maria Assunção Doria e Luís Otávio Schmall;
- à rede Geomecânica da Petrobras, aos professores e profissionais, pela receptividade, disponibilidade, sugestões e contraditórios:
Leonardo Guimarães, Leila Beserra, Philippe Devloo, Osvaldo Manzoli, Pedro Cleto, Nelson Inoue;

Muito obrigado.

RESUMO

POLI, Renato Espirito Basso. **Modelagem numérica do fraturamento hidráulico de um meio poroelástico utilizando o método dos elementos finitos coesivos com adaptatividade de malha**. 2020. 110 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mineral) – Departamento de Minas e de Petróleo, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2020

Projetos de produção de óleo e gás utilizam fraturamento hidráulico para incrementar a produtividade ou injetividade dos poços. Pesquisas recentes buscam estimar o comportamento da rocha, tanto em casos de estimulação quanto em projetos de recuperação melhorada, com injeção de água ou gás acima da pressão de fratura. O objetivo dos estudos é caracterizar as dimensões e comportamento hidráulico da fratura resultante, o incremento de injetividade ou produtividade que ela proverá ao sistema e possíveis riscos à segurança operacional. Especialmente para projetos de longo prazo, os efeitos poroelásticos, resultantes da depleção ou pressurização do meio poroso, devem ser considerados nas análises de comportamento da fratura criada. Esse trabalho tem como objeto de análise o fraturamento hidráulico do meio poroso por tração, que ocorre de maneira controlada, a partir da injeção de fluido nos poços e consequente incremento na pressão de fundo, que leva a formação rochosa à falha, propagando uma fratura. É proposto um simulador hidromecânico de reservatórios de petróleo, totalmente acoplado e totalmente implícito, de forma a considerar os efeitos poroelásticos na propagação das fraturas e garantir a estabilidade incondicional do sistema. A abordagem adotada utiliza elementos finitos para representar o meio contínuo e elementos coesivos de dimensão reduzida, para representar o comportamento hidráulico e a fragilização mecânica na região de fratura. A densidade da malha de simulação é adaptada, dinamicamente, em observação ao caminhamento da fratura, tornando a solução independente da discretização espacial do domínio e representando, com maior precisão, as regiões do domínio que concentram tensão e que apresentam gradientes de pressão mais elevados. Os resultados numéricos validam a modelagem, utilizando resultados da literatura como referência, analíticos e numéricos. É demonstrado, por fim, que as estratégias de remalhamento propostas apresentam ganho significativo de desempenho computacional, quando comparadas a malhas estáticas tradicionais.

Palavras-chave: Engenharia. Engenharia de Petróleo. Fraturamento hidráulico. Método dos elementos finitos. Elementos coesivos. Malha adaptativa.

ABSTRACT

POLI, Renato Espirito Basso. **Numerical modelling of hydraulic fracturing of poroelastic media using the cohesive finite element method with mesh adaptativity**. 2020. 117 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mineral) – Departamento de Minas e de Petróleo, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2020

Oil and gas developments make use of hydraulic fracturing to enhance well productivity and injectivity indices. Recent research seeks on estimating rock behavior during stimulation jobs and enhanced oil recovery (EOR) designs, with water or gas injection above fracturing limits. The goals of such investigations is to characterize the resulting fracture geometry and hydraulic behavior, and associated injectivity or productivity enhancements as well as assessment of potential operational risks. Especially for long-term processes, poroelastic effects responding to reservoir depletion or to overpressurization of the porous volume are not negligible and must be included in the numerical models. This report aims on hydraulic fracturing processes of a poroelastic media under tensile conditions. Such events occur after fluid injection in wells with consequent pressure increase over in-situ confining stresses and rock strength limits, initiating and propagating a crack. We implement and validate a numerical hydromechanic simulator for petroleum reservoir fully coupled and totally implicit, to deal with poroelastic effects and ensure unconditional stability to the system. The well-known finite element methodology is used as basis to the porous media model whereas reduced dimension cohesive elements are used to model hydraulic and brittle behavior of the fractures. Mesh density is dynamically updated observing the evolution of the fracture, aiming on a mesh-independent solution and modelling, with greater accuracy, domain regions which concentrates stress and with higher pressure gradients. Numerical results are compared to literature solutions, analytic and numerical, to validate the simulator. The adaptative meshing strategies are compared to fixed meshing solutions and demonstrating excellent performance and accuracy enhancements.

Keywords: Engineering. Petroleum Engineering. Hydraulic Fractures. Finite Element Method. Cohesive Elements. Adaptative mesh.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA	26
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	27
2.1	GEOMECÂNICA DE RESERVATÓRIOS	27
2.1.1	Definições.....	27
2.1.1.1	Estado de tensões em subsuperfície	27
2.1.1.2	Determinação do campo de tensões em subsuperfície	28
2.1.1.3	Perda de integridade da rocha.....	29
2.1.1.4	Contenção de fluidos	30
2.1.1.5	Falhas e fraturas	31
2.2	POROELASTICIDADE LINEAR	32
2.2.1	Definições.....	32
2.2.1.1	Tensão (σ_{ij})	32
2.2.1.2	Deformação (ϵ_{ij})	33
2.2.1.3	Pressão de poros (p)	34
2.2.1.4	Incremento de fluido (ζ)	34
2.2.1.5	Caracterização do modelo isotrópico poroelástico	34
2.2.1.6	Módulo de cisalhamento (G)	36
2.2.1.7	Coeficiente de Poisson drenado (ν).....	36
2.2.1.8	Coeficiente de armazenamento sob deformação constante (S_e)	36
2.2.1.9	Coeficiente de Biot-Willis (α).....	37
2.2.1.10	Outras grandezas de interesse.....	38
2.2.2	Modelo constitutivo do meio contínuo	39
2.2.2.1	Estado plano de deformações	39
2.2.2.2	Tensões efetivas.....	39
2.2.2.3	Equilíbrio mecânico	40
2.2.2.4	Continuidade hidráulica	41
2.2.3	Estado de tensões inicial no domínio.....	42
2.3	FRATURAMENTO HIDRÁULICO	43
2.3.1	Definições.....	43
2.3.1.1	Processos envolvidos	43
2.3.1.2	Critério de propagação de uma fratura por tração	44
2.3.1.3	Modelos analíticos	46

2.3.2	Métodos numéricos	47
2.3.2.1	Elementos coesivos de interface	50
2.3.2.2	Enriquecimento dos elementos	51
2.3.2.3	Adaptatividade de malha e projeções de Galerkin	52
2.3.3	Modelo constitutivo da fratura	53
2.3.3.1	Fluxo na fratura	54
2.3.3.2	Continuidade hidráulica	54
2.3.3.3	Equilíbrio mecânico na fratura	55
2.3.3.4	Equilíbrio mecânico na ponta da fratura	56
2.3.3.5	Sistema de coordenadas local	57
3	METODOLOGIA	59
3.1	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	59
3.1.1	Meio poroelástico linear: formulação com elementos finitos	59
3.1.1.1	Enunciado do problema poroelástico linear	60
3.1.1.2	Formulação variacional integral	60
3.1.1.3	Integração por partes	61
3.1.1.4	Aproximação de Galerkin	61
3.1.1.5	Discretização temporal pelo método das diferenças finitas	62
3.1.1.6	Funções de forma e integração por quadratura Gaussiana	62
3.1.2	Fraturas: formulação com elementos coesivos	63
3.1.2.1	Enunciado do equilíbrio hidromecânico nas fraturas	63
3.1.2.2	Formulação variacional integral	64
3.1.2.3	Aproximação de Galerkin	64
3.1.2.4	Funções de forma e integração por quadratura Gaussiana	64
3.1.2.5	Estados compressivos em interfaces danificadas	64
3.2	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	65
3.2.1	Fluxo global de execução do simulador	65
3.2.1.1	Inicialização do modelo	65
3.2.1.2	Laço de tempo (<i>t-loop</i>)	66
3.2.1.3	Laço de dano (<i>g-loop</i>)	67
3.2.1.4	Representação do dano em uma malha auxiliar (DFN)	67
3.2.1.5	Soluções analíticas e pós-processamento	68
3.2.2	Atualização da malha de simulação	69
3.2.2.1	Caminho potencial da fratura	70
3.2.2.2	Destacamento de subdomínio de remalhamento	71

3.2.2.3	Refino anisotrópico paralelo à fratura	72
3.2.2.4	Malha de transição	73
3.2.2.5	Separação nodal no caminho da fratura	74
3.2.2.6	Substituição dos elementos no subdomínio de remalhamento	75
3.2.2.7	Projeção de informações entre malhas	75
3.2.2.8	Parametrização do algoritmo	76
3.3	ORGANIZAÇÃO DA APLICAÇÃO COMPUTACIONAL	77
3.3.1	Bibliotecas próprias	77
3.3.1.1	Historiador (<i>Log</i>)	78
3.3.1.2	Sistema Global de Propriedades (SGP)	79
3.3.1.3	Manipulação de malhas	79
3.3.1.4	Explorador	80
3.3.1.5	Automação da compilação, teste e depuração	80
3.3.1.6	Testes unitários	81
3.3.1.7	Pós-processamento	82
3.3.2	Bibliotecas auxiliares utilizadas	82
3.3.2.1	<i>The Computational Geometry Algorithms Library</i> (CGAL)	82
3.3.2.2	<i>libMesh Library</i>	82
3.3.2.3	<i>Message Passing Interface</i> (MPI)	83
3.3.2.4	<i>Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation</i> (PETSc)	83
3.3.2.5	ParaView	84
3.3.2.6	Doxygen	84
3.3.2.7	Qt	84
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	85
4.1	CAMPO DE TENSÃO AO REDOR DE UM POÇO	85
4.1.1	Solução analítica	86
4.1.2	Resultados numéricos	86
4.2	CAMPO DE TENSÃO NA PONTA DE UMA FRATURA	87
4.2.1	Solução analítica	88
4.2.2	Resultados numéricos	89
4.3	PROBLEMA DE CONSOLIDAÇÃO DE TERZAGHI	90
4.3.1	Solução analítica	90
4.3.2	Resultados numéricos	91
4.4	PROBLEMA DE MANDEL	93
4.4.1	Solução analítica	94

4.4.2	Resultados numéricos	95
4.5	PROPAGAÇÃO DA FRATURA EM REGIME <i>STORAGE-TOUGHNESS</i> ..	96
4.5.1	Solução analítica	97
4.5.2	Resultados numéricos	98
4.6	PROPAGAÇÃO DA FRATURA EM REGIME <i>LEAKOFF-TOUGHNESS</i> .	101
4.6.1	Resultados numéricos	101
4.7	PROPAGAÇÃO E FECHAMENTO DA FRATURA.....	103
4.7.1	Resultados numéricos	104
4.8	DESEMPENHO COMPUTACIONAL.....	106
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	109

NOTAÇÃO

Para uma visão compacta e direta do problema, as equações utilizam notação indicial para a descrição de vetores e tensores. Os índices i e j variam de 1 a n , onde n é a dimensão do espaço de soluções. Índices repetidos, em um mesmo fator, representam o somatório de Einstein e, nesses casos, o literal k é preferido por clareza. Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, considerando os deslocamentos u_x e u_y , nos eixos x e y , respectivamente:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = u_{k,k} \equiv u_{1,1} + u_{2,2} \equiv \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

Literais minúsculos, em negrito, referem-se a vetores completos, e literais maiúsculos, em negrito, a matrizes. Nas expressões abaixo: $\mathbf{u} = u_i$ é o vetor deslocamento; $\mathbf{x} = x_i$ são os eixos de coordenadas espaciais; $\mathbf{F}$ é a matriz tangente do sistema; e a vírgula, no índice, representa derivadas parciais ou totais:

$$\mathbf{F} = u_{i,j} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$
$$p_{,t} \equiv \frac{dp}{dt}$$

As tensões positivas representam estados de tração, e as negativas, a compressão. Contraintuitivamente, maiores pressões representam fluidos sob maior compressão.

CONVENÇÕES MATEMÁTICAS

Vetores unitários	– $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
Derivada parcial	– $\mathbf{F} = u_{i,j} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$
Somatório de Einstein	– $e_{kk} \equiv e_{11} + e_{22}$
Delta de Kronecker	– $\mathbf{I} = \delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$
Divergente	– $\nabla \cdot \mathbf{u} = u_{k,k}$
Gradiente	– $\nabla \varphi = \varphi_{,i}$
Laplaciano (vetorial)	– $\nabla^2 \mathbf{u} = u_{i,kk}$
Laplaciano (escalar)	– $\nabla^2 \varphi = \varphi_{,kk}$

LISTA DE SÍMBOLOS

Literal	Descrição	Unid. (SI)
Ω^-	– Domínio do problema no lado negativo da fratura	
Ω^+	– Domínio do problema no lado positivo da fratura	
C_l	– Coeficiente de filtração de Carter	$m s^{-1/2}$
K'_s	– Módulo de compressibilidade em ensaio não revestido (<i>Unjacketed Bulk Modulus</i>)	Pa
K_u	– Módulo de compressibilidade não drenado (<i>Undrained Bulk Modulus</i>)	Pa
S_ϵ	– Coeficiente de armazenamento a deformação constante	$1/m$
U_f	– Deslocamento médio do fluido	m/s
U_s	– Deslocamento médio do sólido	m/s
V_f	– Volume de fluido	m^3
V_p	– Volume poroso	m^3
e_{ij}	– Tensor de deformações	-
k_f	– Permeabilidade equivalente da fratura	m^2
n_i	– Vetor normal a uma superfície ou contorno	-
q_i	– Velocidade de Darcy, velocidade aparente ou descarga específica: volume de fluido que atravessa uma unidade de área em uma unidade de tempo	m/s
γ_{ij}	– Deformação por cisalhamento	-
δ_{ij}	– Delta de Kronecker	-
ν_u	– Razão de Poisson não drenada	-
σ_h	– Tensão horizontal mínima	Pa
σ_v	– Tensão vertical	Pa
σ_H	– Tensão horizontal máxima	Pa
σ_{ij}	– Tensor de tensões totais	Pa

Literal	Descrição	Unid. (SI)
σ'_{ij}	– Tensor de tensões efetivas de Biot	Pa
σ''_{ij}	– Tensor de tensões efetivas de Terzaghi	Pa
ψ_k	– Função de forma associada ao grau de liberdade k	-
Ω	– Domínio de aproximação.	-
G	– Módulo de cisalhamento	Pa
K	– Módulo de compressibilidade (<i>Bulk Modulus</i>)	Pa
M	– Módulo de Biot	Pa
S	– Coeficiente de armazenamento a deformação uniaxial e tensão constante	$1/m$
c	– Coeficiente de consolidação ou difusividade hidráulica em ensaio uniaxial a tensão constante	m/s
k	– Permeabilidade intrínseca	m^2
p	– Pressão de poros	Pa
r_{ij}	– Matriz de rotação entre sistemas coordenados	-
w	– Abertura da fratura no sentido transversal ao seu plano	m
Γ	– Contorno do domínio de aproximação	-
α	– Coeficiente de Biot-Willis	-
ζ	– Incremento de fluido no REV	-
κ	– Coeficiente de mobilidade (k/μ)	$\frac{m^2}{Pa \cdot s}$
μ	– Viscosidade do fluido	$Pa \cdot s$
ν	– Razão de Poisson	-
ψ	– Função de teste na formulação do método dos elementos finitos	-
ϵ	– Deformação volumétrica	-
ϕ	– Porosidade	-

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Figura a – Perda de integridade por compactação destacando plano de cisalhamento. Figura b – Perda de integridade por tração. Figura c – Perda de integridade por cisalhamento em junção pré-existente.	30
Figura 2 –	Propagação de uma fratura hidráulica gerada na vizinhança de um poço.....	32
Figura 3 –	Volume elementar representativo, destacando o conceito do tensor de tensões de Cauchy.....	33
Figura 4 –	Ensaio não revestido (<i>unjacketed</i>) para determinação das características do sólido da rocha.	38
Figura 5 –	Correlação entre pressão efetiva de Biot com: a) tensão confinante; b) tensão efetiva de Terzaghi; c) tensão efetiva de Biot.	40
Figura 6 –	Propagação de uma fratura hidráulica gerada na vizinhança de um poço.....	43
Figura 7 –	Caminhos de integração Γ para cálculo do gradiente de energia em relação ao incremento do tamanho da fratura l . Figura a – Caminho arbitrário. Figura b – Caminho considerado para provar a validade de elementos coesivos.....	45
Figura 8 –	Modelos analíticos de propagação de fraturas hidráulicas: Figura a – PKN. Figura b – KGD. Figura c – Radial.	46
Figura 9 –	Categorias de modelos de fratura: Figura a – Malha adaptativa. Figura b – Elementos coesivos. Figura c – Elementos finitos estendidos (<i>extended finite elements</i> , XFEM). Figura d – Abordagem de campo (<i>phase-field</i>).	49
Figura 10 –	Precisão e desempenho (número de elementos ao longo da fratura) comparativo dos métodos analisados, na caracterização da propagação de uma fratura hidráulica.	50
Figura 11 –	Elemento coesivo unidimensional como interface dos elementos bidimensionais que representam o meio contínuo. Destaque para o eixo coordenado rotacionado desses elementos.....	51
Figura 12 –	Representação de uma fratura como domínio unidimensional no meio contínuo bidimensional.	54
Figura 13 –	Modelo de dano utilizado para propagação da fratura. A área pontilhada se refere à energia liberada durante o processo de fraturamento (RICE, 1968). A linha S é a secante que representa o caminho de recarga para um dano arbitrário e irreversível w_d .	

No detalhe, a identificação das aberturas no modelo da fratura, com relação à região coesiva (região rasurada na ponta da fratura).	56
Figura 14 – Solução para estados compressivos em interfaces danificadas, mostrando a elipse utilizada para cálculo contínuo da transição. A reta A representa a penalidade original da interface, e a reta S representa a rigidez com o estado danificado.....	65
Figura 15 – Malha DFN complementar à malha principal, em visão sobreposta. Os marcadores maiores representam os nós terminais e os marcadores menores, os nós intermediários dos elementos unidimensionais, com interpoladores de segunda ordem.....	68
Figura 16 – Algoritmo para atualização da malha de simulação.....	69
Figura 17 – Gatilhos para o processo de atualização da malha de simulação. Δd é a distância entre a posição da ponta fratura no laço de dano anterior e o atual; $\Delta d'$ é a distância até o último elemento coesivo da malha atual.....	70
Figura 18 – Malha ilustrando, na linha horizontal, verticalmente centrada, o caminho potencial da fratura, não conforme com a malha original. 71	
Figura 19 – Figura a – Malha ilustrando a propagação de uma fratura em parte do caminho potencial da fratura (linha preta) e a seleção de elementos em um raio, definindo o subdomínio de remalhamento. Figura b – Subdomínio remalhado, conservando nós das interfaces.	72
Figura 20 – Figura a – Refinamento anisotrópico, adaptando-se à anisotropia do campo de pressão que ocorre na fratura. Figura b – Refinamento mais detalhado, próximo à ponta da fratura, marcada pela seta.....	73
Figura 21 – Duplicação dos graus de liberdade alocados aos elementos vizinhos à fratura. Figura a – Malha geométrica. Figura b – Malha processada, com graus de liberdade vizinhos à fratura logicamente duplicados (a posição geométrica não é modificada, a figura separa por clareza).	74
Figura 22 – Análise da posição do centroide dos elementos em relação à interface fraturada. Figura a – Círculos representam os nós da fratura, e quadrados representam os centroides dos elementos vizinhos. Figura b – Vetor mais espesso representa a direção da fratura, vetores cheios representam ângulos positivos e vetores tracejados representam ângulos negativos.....	75

Figura 23 – Figura a – Malha final, após remalhamento, com marcações dos domínios e caminhos de fratura. Figura b – A região remalhada em destaque.....	76
Figura 24 – Figura a – Diagrama de um reservatório com um poço sujeito a tensões confinantes assimétricas ($\sigma_h < \sigma_H$). Figura b – Concentração de tensões esperadas ao redor do poço, com compactação em excesso acima e abaixo e tendência à tração à esquerda e direita.....	85
Figura 25 – Tensão circunferencial ou tangencial (<i>hoop stress</i>) ao redor de um poço em uma região submetida a uma carga assimétrica. Figura a – Vista areal com destaque para as linhas de isotensões circunferenciais. Figura b – Resultados numéricos concordantes com a solução analítica.	87
Figura 26 – Malha de simulação utilizada para cálculo do campo de tensão ao redor de um poço.	87
Figura 27 – Diagrama do modelo utilizado para validação da tensão na ponta de uma fratura.	88
Figura 28 – Malha de simulação utilizada para cálculo do campo de tensão na ponta de uma fratura.	89
Figura 29 – Resultados analíticos e numéricos, em coordenadas polares, para o problema de concentração de tensão na ponta de uma fratura.	90
Figura 30 – Diagrama e malha de simulação utilizada no problema de consolidação (ou adensamento) de Terzaghi. A compressão σ_v é aplicada em uma interface drenada do domínio, enquanto as demais interfaces são não-drenadas e com deslocamento x ou y prescritos. O eixo h é traçado, na Figura, como referência para observação dos resultados.....	91
Figura 31 – Validação do <i>solver</i> poroelástico linear com o teste de consolidação de Terzaghi: solução para o deslocamento vertical. O eixo horizontal mostra a distância com relação ao lado.	92
Figura 32 – Validação do <i>solver</i> poroelástico linear com o teste de consolidação de Terzaghi: solução para o deslocamento vertical. O eixo horizontal mostra a distância com relação ao lado.	93
Figura 33 – Diagrama e malha de simulação utilizadas para o problema de Mandel. A compressão σ_v é aplicada em uma interface rígida do domínio. As interfaces laterais são drenadas, a interface oposta é não-drenada e possui deslocamento vertical prescrito nulo.....	94
Figura 34 – Algoritmo do <i>solver</i> para determinação das raízes para a solução analítica de Mandel	95

Figura 35 – Validação do <i>solver</i> poroelástico linear com o problema de Mandel.	96
Figura 36 – Modelo utilizado para validação do algoritmo de fratura.	97
Figura 37 – Malha e condições de contorno utilizadas para validação do algoritmo de fraturamento. À direita, o detalhe da região em que o remalhamento é feito progressivamente.	99
Figura 38 – Detalhe da discretização de malha na região da ponta da fratura	100
Figura 39 – Resultados numéricos e analíticos para o regime <i>storage-toughness</i>	100
Figura 40 – Tensão efetiva de Terzaghi, na seção transversal da fratura ($t=3,5s$), mostrando a zona de coesão na ponta.	100
Figura 41 – Geometria da fratura em diversos passos de tempo. As linhas no gráfico são isobáricas e mostram, graficamente, o gradiente do campo de pressão de poros na região da fratura.	101
Figura 42 – Evolução da abertura e comprimento da fratura como função do tempo. Os resultados dos trabalhos de referência são apresentados para comparação.	102
Figura 43 – Geometria da fratura em alguns passos de tempo. As linhas no gráfico são isobáricas e mostram a deformação do campo de pressão na região da fratura.	103
Figura 44 – Figura a – Pressão na origem da fratura como função do tempo. Figura b – Evolução do dano e abertura ao longo da fratura durante o primeiro fluxo. Figura c – Evolução do dano e abertura ao longo da fratura durante o primeiro fechamento.	105
Figura 45 – Desempenho computacional comparando malhas adaptativas e fixas em termos de tempo de execução e número de graus de liberdade.	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Parâmetros utilizados na simulação de um reservatório com um poço sob carga assimétrica.	86
Tabela 2 –	Parâmetros utilizados na validação do cálculo da concentração de tensão na ponta de uma fratura.....	89
Tabela 3 –	Parâmetros utilizados na validação do simulador, utilizando o problema de consolidação de Terzaghi.....	92
Tabela 4 –	Parâmetros utilizados na validação do simulador, utilizando o problema de Mandel.....	95
Tabela 5 –	Parâmetros utilizados na validação do simulador, utilizando a propagação de uma fratura em regime <i>storage-toughness</i>	99
Tabela 6 –	Principais parâmetros do remalhamento adaptativo utilizados na validação do simulador, utilizando a propagação de uma fratura em regime <i>storage-toughness</i>	99
Tabela 7 –	Parâmetros utilizados na validação do simulador, utilizando a propagação de uma fratura em regime <i>leakoff-toughness</i>	102
Tabela 8 –	Principais parâmetros do remalhamento adaptativo utilizados na avaliação do desempenho do simulador.	106
Tabela 9 –	Principais características do <i>hardware</i> utilizado na execução do simulador e obtenção dos resultados apresentados	106
Tabela 10 –	Contagem dos laços de dano, contagem de remalhamentos realizados e graus de liberdade da malha final em rodadas de interesse.....	106

1 INTRODUÇÃO

Na Engenharia de Petróleo, o estudo do comportamento dos fluidos e das rochas em subsuperfície permite compreender e prever o comportamento das jazidas, buscando garantir segurança operacional, maior rentabilidade e maior fator de recuperação de petróleo (volume de óleo recuperado em relação ao volume de óleo original) possíveis. Modelos analíticos e numéricos são ferramentas importantes no processo de previsão e avaliação das jazidas.

Em um primeiro momento, as previsões embasam a definição da malha de drenagem do campo e da localização dos poços a serem perfurados. Maior número de poços proporciona incremento no volume de óleo recuperado, mas demandam investimentos consideráveis, especialmente em cenários *offshore*. A melhor relação entre os investimentos e a geração de receita de uma jazida é estimada com base na modelagem numérica dos reservatórios (DAKE, 2001; ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006; THOMAS, 2004).

Os modelos são elaborados, inicialmente, com pouca informação, uma vez que o reservatório apresenta ainda poucos poços perfurados. Com o passar do tempo, a aquisição de informações torna-se mais intensa, com a perfuração de novos poços, a observação de dados dinâmicos em testes de pressão e a implantação de projetos pilotos. Essas informações são agregadas, então, aos modelos conceituais e numéricos da jazida, que passam a ser gradativamente mais detalhados e a dispor de menos incertezas (STARFIELD; CUNDALL, 1988).

A modelagem de reservatórios considera, tipicamente, apenas o fluxo dos fluidos no meio poroso, tratando os efeitos mecânicos poroelásticos de forma simplificada (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001). Em modelagens mais complexas, a mecânica das rochas deve ser equacionada de forma detalhada, para compreensão da evolução do estado de tensões, de possíveis deslocamentos ou perda de integridade das rochas durante a vida produtiva do campo (CHENG, 2016; WANG, 2000).

Determinados fenômenos físicos demandam acoplamento rigoroso da interação hidromecânica para se obter uma modelagem fidedigna. Vários trabalhos sugerem erros consideráveis em modelagens desacopladas ou sequenciais, especialmente quando envolvem propagação de fraturas (KIM, 2010; YEW; WENG,

2014). Efeitos térmicos, penetração do fluido nas paredes das fraturas (*leakoff*) e a reação mecânica do meio poroelástico à injeção (*backstress*) são alguns dos fenômenos físicos que explicam os desvios de modelagem (CHENG, 2016; WANG, 2000).

Um projeto *offshore* em águas ultraprofundas, por exemplo, contém tipicamente algumas dezenas de poços perfurados. As vazões de drenagem do reservatório são expressivas e, por consequência, a depleção areal do campo pode tornar-se significativa. Em vista do forte acoplamento entre a pressão de poros do reservatório e o estado de tensões do sistema, as perturbações mecânicas do sistema podem se manifestar como redução da vazão de produção ou injeção dos poços, variação ou colapso do volume poroso, subsidência do solo, reativação de falhas, alteração da permeabilidade do meio, entre outros (CHENG, 2016; ZOBACK, 2010). Esses efeitos devem ser previstos e mitigados em fases iniciais do projeto, porque podem inviabilizá-lo economicamente ou levar a riscos operacionais.

Em muitos casos, projetos de recuperação secundária são implantados tendo em vista a manutenção da pressão do reservatório. Uma estratégia consolidada na indústria é a injeção de fluidos em altas vazões, buscando repor o volume de fluidos que é retirado do reservatório durante a produção de óleo e gás. As vazões limites de operação devem observar riscos operacionais importantes como o varrido, a resistência da rocha, a geologia local e as características do meio poroso (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006).

Na injeção de fluidos de longo prazo, a temperatura tem um papel importante no comportamento do material (PERKINS; GONZALEZ, 1985). Ela deve ser considerada tanto na equação de balanço de energia do sistema, uma vez que implicará em convecção e condução, quanto na resposta mecânica do sistema, uma vez que ela tende a reduzir a tensão confinante local, reduzindo as pressões máximas de fraturamento das rochas.

Projetos de estimulação de poços buscam melhorar, localmente, o acoplamento poço-reservatório, tornando a rocha próxima ao poço mais permeável. São os casos de estimulações ácidas e fraturamento hidráulico. Atualmente, o fraturamento hidráulico (*hydraulic fracturing* ou *fracking*) é utilizado para a produção de óleo e gás em reservatórios com rochas muito pouco permeáveis, como folhelhos (DETOURNAY, 2016; YEW; WENG, 2014). Nesses casos, é comum o uso de propantes, que são agentes de sustentação – sólidos granulares, tipicamente da

dimensão de areia ou cascalho (*gravel*) – adicionados ao fluido de fraturamento com o objetivo de manter a permeabilidade da fratura após o fechamento (ROCHA; AZEVEDO, 2009). Este trabalho não tratará da modelagem do uso de propantes ou aspectos térmicos, temas a serem desenvolvidos no futuro.

Observa-se que, em uma simulação numérica, o acoplamento fraco, no qual os deslocamentos mecânicos e a pressão de poros do reservatórios são tratados de forma sequencial (KIM, 2010), é adequado para fenômenos com tempos de respostas distintos, como é o caso de estudos de subsidência ou de injeção de fluidos no longo prazo. Nesses casos, a resposta mecânica do sistema apresenta constantes de tempo significativamente menores (mais rápida) do que a resposta hidráulica do reservatório. O mesmo, no entanto, não é válido para o estudo do fraturamento hidráulico, em que a propagação da fratura (deslocamentos) e a resposta hidráulica (pressão) apresentam forte acoplamento e tempos de resposta similares. Nesses casos, os fenômenos precisam ser considerados simultaneamente.

A ferramenta de modelagem numérica utilizada neste trabalho é o método dos elementos finitos, por ser amplamente utilizado em trabalhos recentes sobre o assunto e por sua flexibilidade no tratamento de problemas correlatos. Este trabalho utiliza modelagem numérica totalmente acoplada dos fenômenos hidromecânicos envolvidos na propagação de uma fratura hidráulica, em um poço de petróleo, e sua interação com o estado de tensões do reservatório. O sistema é resolvido de forma totalmente implícita, tornando-se, incondicionalmente estável e permitindo a evolução da simulação com maiores passos de tempo (CARRIER; GRANET, 2012; DONTSOV; PEIRCE, 2017; MANZOLI et al., 2019; MUNJIZA; ANDREWS; WHITE, 1999; OLIVER; HUESPE; CANTE, 2008; YAN et al., 2016).

O trabalho propõe a utilização de malhas adaptativas não estruturadas, com elevada anisotropia, em regiões em que há concentração de tensão ou alto gradiente de pressão. É o caso da ponta de uma fratura e do gradiente de pressão transversal à fratura, por exemplo. Essas regiões se deslocam, à medida que a fratura se propaga, de forma que malhas adaptativas permitem que o problema se ajuste ao longo dos passos de tempo, reduzindo o custo computacional global sem comprometer a precisão do resultado e tornando a solução independente da malha.

O trabalho está organizado da seguinte forma: após a introdução, são apresentados os objetivos do trabalho; na seção 2, realiza-se uma revisão bibliográfica sobre os assuntos tratados; na seção 3, há o detalhamento da

metodologia utilizada; na seção 4, discutem-se os resultados obtidos até o momento. Por fim, na seção 5, apresenta-se o fechamento do trabalho, propondo tópicos correlatos de interesse.

1.1 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA

O objetivo do trabalho é desenvolver um simulador numérico capaz de modelar a propagação de fraturas hidráulicas por tração em meios poroelásticos. Essa classe de simuladores permite estimar o comportamento de reservatórios de petróleo sob injeção de fluidos acima da pressão de fratura, buscando maior previsibilidade dos fenômenos, garantindo a segurança operacional e os resultados econômicos dos projetos. O simulador hidromecânico desenvolvido é totalmente acoplado (pressão e deslocamento), totalmente implícito e utiliza malhas adaptativas para representar a propagação de fraturas por tração.

Um simulador com essas características é capaz de adicionar previsibilidade à variação das características do meio como função da tensão de confinamento; ao comportamento hidráulico de falhas geológicas; ao incremento de injetividade e produtividade dos poços como consequência do fraturamento hidráulico induzido; à integridade de poços como função da variação de tensão local induzida pela drenagem do reservatório; à subsidência do solo como função da exploração das jazidas; à segurança operacional em projetos de recuperação melhorada; à avaliação do risco de perda de contenção do selo hidráulico, com possível exsudação de hidrocarbonetos; e ao resultado econômico do projeto.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 GEOMECÂNICA DE RESERVATÓRIOS

2.1.1 Definições

Esta seção aponta definições preliminares importantes relacionadas a processos geomecânicos em reservatórios de óleo e gás (GUTIERREZ et al., 2001; HEFFER, 2002; ZOBACK, 2010).

2.1.1.1 Estado de tensões em subsuperfície

O estado de tensões, em um determinado ponto de um corpo, é um tensor de segunda ordem que descreve a densidade das forças em superfícies que cruzam o ponto. O tensor depende do sistema de coordenadas utilizado e pode ser transformado para sistemas de coordenadas arbitrários. Há um sistema de coordenadas principais em que as tensões cisalhantes se anulam, e o estado de tensões do sólido pode ser completamente descrito por três componentes principais de tensão:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

A superfície terrestre é um plano de tensões principais, porque está em contato com o ar ou a água, que não suportam tensões cisalhantes. Nesse caso, próximo à superfície terrestre, um dos componentes da diagonal principal do tensor de tensões principais é, obrigatoriamente, normal à superfície (σ_v), e os outros dois perpendiculares a ele (σ_H, σ_h). Para completa caracterização desse estado de tensões, é necessário, além da magnitude das tensões principais, o azimuth das tensões horizontais. Como elas são necessariamente perpendiculares entre si, o azimuth de σ_H ou de σ_h é suficiente.

Zoback (2010) mostra dados de campo que indicam que a mesma observação, em geral, é válida para regiões profundas da crosta terrestre. Entretanto, alterações no campo de tensões podem ocorrer durante a evolução geológica. Um exemplo são as perturbações do campo de tensões associadas a domos salinos (NIKOLINAKOU

et al., 2018). A modelagens preditiva (*forward*) desses fenômenos é uma área de pesquisa acadêmica ativa e é tratada por aplicações comerciais específicas (HAWIE et al., 2015; ROCKFIELD, 2017).

Em rochas saturadas com fluidos, o campo de tensões é fortemente acoplado à pressão de poros p . Durante a vida produtiva de um reservatório, com a produção e injeção de fluidos, a variação da pressão de poros está associada a deformações mecânicas no meio, podendo causar eventos de compactação, de variação de porosidades e permeabilidades, de reativação de falhas, de exsudação, entre outros, a serem estimados e monitorados.

2.1.1.2 Determinação do campo de tensões em subsuperfície

A tensão vertical σ_v (tensão de sobrecarga ou *overburden*) é estimada a partir do perfil de densidade $\rho(z)$ das rochas, que é obtido dos poços perfurados na área. A tensão vertical, em um ponto em profundidade, é estimada pela integral:

$$\sigma_v = \int_{z_0}^{z_f} \rho(z) g dz \quad (2.2)$$

A tensão horizontal mínima σ_h é, normalmente, obtida por medição direta em testes de fraturamento hidráulico (*minifrac*s) ou testes de filtração (*leakoff tests* – *LOT*). Nos casos em que a tensão vertical é a tensão mínima (regime reverso de tensão), a estimativa das tensões horizontais se torna menos precisa.

A tensão horizontal máxima (σ_H) é de difícil medição direta. Limites mínimos e máximos são obtidos com base em dados de perfis, *breakouts* e fraturas hidráulicas induzidos durante a perfuração dos poços. Adicionalmente, as características conhecidas das rochas adjacentes aos poços são utilizadas como condições de contorno na análise, restringindo os limites da tensão horizontal máxima.

A orientação das tensões principais é obtida a partir de observações da geologia regional e dos dados de *breakout* e fraturas hidráulicas induzidas durante a perfuração dos poços, que apresentam alinhamento com o campo de tensões locais.

A pressão de poros é obtida por medição direta ou por estimativa baseada em perfis geológicos e levantamentos sísmicos. As estimativas realizadas com levantamentos sísmicos apresentam incertezas, mas são relevantes para a identificação de regiões de alta pressão e ajuste de parâmetros de perfuração, especialmente no início da vida produtiva do reservatório.

2.1.1.3 Perda de integridade da rocha

Zoback (2010) descreve os mecanismos de perda de integridade da formação, que devem ser compreendidos como fundamentos da análise geomecânica de reservatórios de petróleo. O mecanismo dominante deve ser avaliado em vista às características da rocha e das tensões *in situ*.

A falha da rocha por compressão (Figura 1a) contempla processos que ocorrem em corpos de prova submetidos a elevadas tensões confinantes. Uma forma de falha por compressão é chamada de *shear enhanced compaction*, que é a deformação plástica (irreversível) do meio poroso devido ao colapso de poros e grãos. Alternativamente, a compressão forma pequenas fraturas microscópicas e deslizamento de grãos que, eventualmente, coalescem em um plano de cisalhamento. A estimativa da resistência da rocha à compressão é feita em laboratório sob confinamento, mas tipicamente em condições desfavoráveis. A resistência é fortemente dependente do confinamento, que carrega muita incerteza nas análises de campo.

A perda de integridade por tração (Figura 1b) ocorre em cenários de pressão de poros elevada, excedendo suficientemente a mínima tensão principal confinante somada à resistência à tração da rocha. Após a iniciação da fratura, a resistência à tração torna-se pouco relevante, e pequenos excessos de tensão de fluido, com relação à tensão confinante, próximo à ponta da fratura, levarão à propagação da mesma. Fraturas hidráulicas induzidas propagam-se perpendicularmente à tensão mínima, cuja direção e magnitude podem variar de acordo com a depleção do reservatório.

A movimentação de falhas e fraturas por cisalhamento (Figura 1c) envolve, potencialmente, a modificação na condição hidráulica das mesmas e pode estar relacionada a deslocamentos significativos, causando inclusive perda de integridade de poços. Pela característica das falhas, esse fenômeno pode ser causado por sobrepressão de fluidos no plano de falha (redução da tensão normal) ou pela depleção diferencial da rocha reservatório adjacente.

Figura 1 – Figura a – Perda de integridade por compactação destacando plano de cisalhamento. Figura b – Perda de integridade por tração. Figura c – Perda de integridade por cisalhamento em junção pré-existente.

Fonte: O autor (2020).

2.1.1.4 Contenção de fluidos

A contenção de fluidos na rocha reservatório é condicionante primária em projetos de exploração de reservatórios. Trata-se da manutenção do confinamento do fluido no reservatório, que é garantido pelo selo hidráulico na porção superior do reservatório. O selo é, tipicamente, uma camada de baixa permeabilidade e capilaridade (não molhável ao óleo) tais que impeçam a migração de fluidos.

Diversos casos de perda de contenção de fluidos são reportados na indústria de óleo e gás, tipicamente, são relacionados à depleção ou sobrepressurização dos fluidos que saturam rochas reservatório. As variações da pressão de poros alteram as tensões locais e podem levar à perda do selo hidráulico ou reativação de falhas geológicas, drenando fluidos para além da rocha reservatório.

Em cenários de sobrepressurização, a perda de integridade da rocha capeadora por tração ocorrerá se a sobrepressurização exceder as tensões de confinamento local acrescidas à resistência do material à tração. Em reservatórios mais profundos, com maior sobrecarga e maiores tensões confinantes, a resistência do material tende a ser menos significativa do que as tensões propriamente ditas, que se tornam preponderantes. Em reservatórios rasos, as tensões confinantes são naturalmente menores, de forma que as heterogeneidades e a resistência das rochas são mais significativas no controle da propagação de fraturas.

Em cenários de subpressurização (depleção), as tensões efetivas também são alteradas, podendo ocasionar tanto rotação no campo de tensões na direção preferencial de fraturamento, quanto reativação de falhas, possivelmente ocasionando perda de contenção de fluidos (ZOBACK, 2010).

2.1.1.5 Falhas e fraturas

Um material poroso pode falhar por tração ou cisalhamento, formando juntas (*joints*), que são descontinuidades mecânicas no meio poroso. Elas apresentam características hidráulicas e mecânicas próprias que são, muitas vezes, preponderantes na resposta hidráulica e mecânica macroscópica do meio. A caracterização dessas juntas é essencial, demandando análises laboratoriais com amostras de grandes proporções, em ensaios com elevado confinamento. Na prática da indústria, entretanto, a maioria dos testes é feita em amostras reduzidas, representativas de rochas intactas, deixando deficiente a caracterização das juntas propriamente ditas (BANDIS; LUMSDEN; BARTON, 1983; BLANTON, 1982; MÜLLER, 1974; ZOBACK, 2010).

As juntas respondem dinamicamente às tensões efetivas do meio, que variam durante a drenagem do reservatório. Falhas criticamente tensionadas, por exemplo, podem-se movimentar, propagando-se ou compactando-se. Novas fraturas podem ser criadas, interagindo com fraturas existentes no meio (Figura 2). A variação do campo de tensões pode reativar uma falha, tornando-a hidraulicamente condutiva e modificando o padrão de fluxo do reservatório, ou até comprometendo a segurança operacional do campo, causando exsudações ou problemas à estabilidade dos poços.

Dessa forma, as incertezas intrínsecas à caracterização das falhas e o alto impacto econômico que sua dinâmica pode causar aos projetos devem ser considerados nos modelos matemáticos de reservatórios ainda em etapas iniciais dos projetos.

Figura 2 – Propagação de uma fratura hidráulica gerada na vizinhança de um poço.

Fonte: Yew (2014, p.134).

2.2 POROELASTICIDADE LINEAR

2.2.1 Definições

Esta seção descreve as principais definições e conceitos da teoria da poroelasticidade linear, conforme a literatura corrente (CHENG, 2016; WANG, 2000).

2.2.1.1 Tensão (σ_{ij})

No conceito da mecânica do contínuo, a tensão total associada a um ponto no sólido é um tensor de segunda ordem σ_{ij} (tensor de tensões de Cauchy). No meio poroso, é preciso considerar as forças exercidas pelo fluido presente nos poros da rocha, em microescala. Para tanto, define-se um volume elementar representativo (REV) em que o meio possa ser tratado como um contínuo, e σ_{ij} passa a ser chamado de tensor das tensões totais, atuando nas faces desse volume (Figura 3).

Figura 3 – Volume elementar representativo, destacando o conceito do tensor de tensões de Cauchy.

Fonte: O autor (2020).

O equilíbrio mecânico é estabelecido pelas reações às forças observadas tanto pelo sólido quanto pelo fluido. Assumindo que o fluido é ideal e não resiste ao cisalhamento e que, pelo princípio de Pascal, um fluido em equilíbrio estático oferece tensões normais, de igual magnitude, em todas as direções, a tensão exercida pelo fluido se reduz a uma única grandeza: a pressão de poros p .

Tensões positivas representam estados de tração, e tensões negativas, estados de compressão. Pressões positivas representam fluidos sob compressão. Dessa forma, um meio poroelástico, submetido à compressão, reage com aumento de pressão e redução de tensão total.

2.2.1.2 Deformação (e_{ij})

A deformação do meio é definida, para o meio poroso, como um tensor de segunda ordem:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.3)$$

A deformação volumétrica é definida como a soma das deformações normais:

$$\epsilon = e_{kk} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = u_{k,k} = \frac{\delta V}{V} \quad (2.4)$$

Neste trabalho, trata-se apenas com pequenas deformações linearmente, desconsiderando não-linearidades geométricas que ocorrem em cenários de grandes deformações.

2.2.1.3 Pressão de poros (p)

É a pressão do fluido que satura os poros da rocha, representativa para o volume de referência, REV (positivo para maior compressão do fluido).

2.2.1.4 Incremento de fluido (ζ)

O incremento de conteúdo de fluido (ζ) é o volume de fluido que entra em relação ao volume de referência, REV (positivo para volume acumulado no REV). É uma variável adimensional, assim como a deformação. Pode ser formulado da seguinte forma:

$$\zeta = \phi(U_f - U_s)_{k,k} = \frac{\delta V_p - \delta V_f}{V} = \alpha \epsilon + S_\epsilon p \quad (2.5)$$

2.2.1.5 Caracterização do modelo isotrópico poroelástico

O modelo poroelástico relaciona grandezas transientes (tensor de tensões e pressão de poros) a grandezas cinemáticas (tensor de deformações e incremento de fluido). Para tanto, é necessário definir um conjunto de constantes características da rocha e do fluido que definam o comportamento do sistema.

Em sistemas lineares elásticos homogêneos, sem fluidos, experimentos de compressão e cisalhamento são realizados para estimar as constantes elásticas do material, como: (a) módulo de Young, E ; (b) módulo de cisalhamento, G ; (c) coeficiente de Poisson, ν ; e (d) módulo de compressibilidade ou volumétrico (*bulk modulus*), K . Em um meio homogêneo isotrópico, as constantes são interdependentes entre si, de forma que duas delas são suficientes para caracterizar completamente o sistema.

No caso poroelástico, devido à presença de fluido no REV, os ensaios são realizados em duas condições-limite distintas:

- a) **drenada (*drained*)**: o fluido que permeia a rocha flui pelos limites do REV, mantendo a pressão de poros inalterada ($p = cte$);
- b) **não drenada (*undrained*)**: o fluido é trapeado no REV por uma camada não permeável, de forma que não há troca de fluidos com os arredores ($\zeta = 0$).

Esses são os estados de um corpo de prova poroelástico submetido a uma carga em degrau, nos instantes $t \rightarrow \infty$ e $t = 0^+$, respectivamente. Devido à presença

do fluido, as constantes elásticas têm significados distintos, nos ensaios drenados ou não drenados. Em linhas gerais, assume-se que, em cenários drenados, sem variação da pressão de poros, as constantes são propriedades da parte sólida do REV. Já em cenários não drenados, as constantes são propriedades combinadas da parte sólida e do fluido presente no REV.

O subscrito u , nos literais, indica uma constante relacionada a cenários não drenados (*undrained*), e a ausência de subscrito indica um cenário drenado. O módulo de cisalhamento G assume um valor único para ambos os casos. Por exemplo, para cenários não drenados, pode-se obter o seguinte parâmetro:

$$K_u = \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right|_{\text{não drenado}} \quad (2.6)$$

De forma similar, para cenários drenados:

$$K = \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right|_{\text{drenado}} \quad (2.7)$$

Outras constantes poroelásticas podem ser tratadas de forma similar. As principais constantes que caracterizam um meio poroelástico são:

- a) módulo de compressibilidade drenado (K) e não drenado (K_u);
- b) razão ou coeficiente de Poisson drenado (ν) e não drenado (ν_u);
- c) capacidade de armazenamento *unconstrained* (S_σ), *constrained* (S_ϵ) e uniaxial (S);
- d) coeficiente de tensão efetiva de Biot-Willis (α) e constante de Biot ($1/H$);
- e) coeficiente de crescimento de pressão por carga isotrópica (Skempton, B);
- f) módulo de cisalhamento (G).

Esta dissertação não descreve cada constante poroelástica individualmente, suas propriedades e formas de estimativa. Entretanto, é necessário pontuar que são necessárias apenas quatro constantes para a caracterização completa do meio poroelástico linear isotrópico, e que uma delas, pelo menos, deve caracterizar o cisalhamento.

As próximas seções descrevem as constantes que o modelo constitutivo aqui adotado utiliza, a saber: G , α , ν e S_ϵ . As demais constantes podem ser obtidas a partir dessas, conforme deduções e formulários tabelados na literatura (CHENG, 2016; WANG, 2000).

2.2.1.6 Módulo de cisalhamento (G)

O módulo de cisalhamento segue a definição da elasticidade linear de corpos rígidos, como a razão entre a tensão cisalhante aplicada no corpo e o ângulo de deformação γ_{ij} correspondente:

$$G = \frac{\sigma_{ij}}{\gamma_{ij}} \quad (i \neq j) \quad (2.8)$$

Como o fluido não resiste ao cisalhamento, o módulo de cisalhamento assume valores idênticos em cenários drenados e não drenados.

2.2.1.7 Coeficiente de Poisson drenado (ν)

A razão de Poisson, no escopo de elasticidade linear, é definida como a razão entre a deformação lateral e longitudinal em um corpo sob carga axial. De forma análoga e, considerando o caso drenado e uma carga axial σ_{ii} , a definição fica:

$$\nu = \frac{e_{jj}}{e_{ii}} \bigg|_{\Delta p=0; \sigma_{jj}=0} \quad (i \neq j) \quad (2.9)$$

A razão de Poisson é adimensional e assume tipicamente valores entre 0 e 0,5. O caso limite em que $\nu = 0$ se refere a materiais para os quais as deformações longitudinais não acarretam deformação laterais. Já o caso limite $\nu = 0,5$ está relacionado a materiais que não sofrem variação de volume quando carregados, como borrachas. Casos especiais que extrapolam estes limites estão fora do escopo deste texto.

2.2.1.8 Coeficiente de armazenamento sob deformação constante (S_ϵ)

A constante S_ϵ representa o armazenamento específico sob deformação constante (*specific storage coefficient at constant strain*):

$$S_\epsilon = \frac{1}{M} = \frac{\partial \zeta}{\partial p} \bigg|_{\Delta \epsilon=0} \quad (2.10)$$

2.2.1.9 Coeficiente de Biot-Willis (α)

O coeficiente de Biot-Willis está relacionado à compressibilidade da parte sólida da rocha. É uma propriedade do sólido e do REV, mas independe das características do fluido, sendo definido como a razão entre o volume de fluido adicionado e a deformação volumétrica do REV, em condição drenada (pressão de poros constante):

$$\alpha = \left. \frac{\partial \zeta}{\partial \epsilon} \right|_{\Delta p=0} = 1 - \frac{K}{K'_s} \quad (2.11)$$

Na equação (2.11), K'_s é o módulo de compressibilidade em ensaio não revestido (*unjacketed bulk modulus*), em que a amostra é mantida sob pressão de confinamento $\hat{p}$, e a pressão de poros é mantida constante, na mesma pressão $\hat{p}$. Dessa forma, K'_s pode ser relacionado diretamente com os grãos da rocha, muito embora, em muitos casos, o arranjo e variabilidade dos mesmos demandem uma interpretação mais cautelosa. A Figura 4 mostra um experimento conceitual para determinação de K'_s .

Ainda observando a equação (2.11), pode-se concluir que $0 \leq \alpha \leq 1$. No caso particular em que $\alpha = 1$, o volume de fluido, que entra no REV (ζ), é exatamente igual à variação volumétrica dos seus limites externos (ϵ). Toda a deformação do REV é, portanto, transferida ao volume poroso, de forma que a rigidez da matriz rochosa K'_s pode ser considerada infinita. Esse é o caso de arenitos inconsolidados, por exemplo. No limite oposto, $\alpha = 0$, a pressão de poros não influencia o comportamento elástico do REV, como é o caso de rochas muito consolidadas, com poros pouco interconectados.

Figura 4 – Ensaio não revestido (*unjacketed*) para determinação das características do sólido da rocha.

Fonte: Adaptado de Wang (2000, p. 49).

A obtenção de um valor confiável para a constante de Biot é de suma importância para análise de reservatórios de petróleo em exploração e significativa variação de pressão de poros. Em especial para casos com valores próximos a 1, a pressão de poros será fortemente acoplada ao comportamento mecânico do meio. Já em casos com valores próximos a 0 (zero) ela praticamente não terá relevância.

2.2.1.10 Outras grandezas de interesse

Sem o objetivo de exaurir a discussão, esta seção apresenta algumas identidades de interesse, com o objetivo de tornar análises posteriores mais sucintas e coerentes. A discussão abrangente sobre o significado físico e dedução teórica de cada grandeza está disponível em Cheng (2016) e Wang (2000).

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{\alpha}{2} \frac{1-2\nu}{1-\nu} & S &= S_e + \frac{\alpha \eta}{G} & c &= \frac{k}{\mu S} \\
 M &= \frac{1}{S_e} & \nu_u &= \frac{1}{2} \left[\frac{2G\nu + M\alpha^2(1-2\nu)}{G + M\alpha^2(1-2\nu)} \right] & E &= 2G(1 + \nu)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

2.2.2 Modelo constitutivo do meio contínuo

2.2.2.1 Estado plano de deformações

Problemas de estado plano de deformações (*plane strain*) são aqueles em que o deslocamento, em uma direção, é desprezível e pode ser considerado nulo. Nesses casos, o problema espacial se reduz a um problema no plano bidimensional, em $\mathbb{R}^2$.

Essa simplificação é válida para seções transversais de corpos contínuos, em que a variação da deformação longitudinal é negligenciável, mas não as tensões longitudinais. É o caso da seção areal média de um reservatório de petróleo em drenagem: a compactação do reservatório é compensada, em parte, pelo deslocamento positivo (para cima) das camadas inferiores (*underburden rebound*) e pelo deslocamento negativo (para baixo) das camadas superiores (*overburden subsidence*), anulando-se na camada média.

Dessa forma, a seção horizontal média pode ser considerada um plano de simetria em que o deslocamento, na direção do eixo vertical (z), é negligenciável. Consideram-se, então, as premissas de estado plano de deformações:

$$u_z = 0, \quad e_{xz} = e_{yz} = e_{zz} = 0 \quad (2.13)$$

2.2.2.2 Tensões efetivas

A ideia de tensão efetiva surge da relação de proporcionalidade linear entre três grandezas, observadas em um corpo de provas saturado com fluido sob tensão de confinamento hidrostática: a) a deformação volumétrica de um corpo de prova; b) a pressão de poros; e c) a tensão de confinamento.

Terzaghi propõe a diferença simples entre a tensão total e a pressão de poros como a parcela do equilíbrio mecânico que é suportada pelo sólido, a qual se denominou “tensor de tensão efetiva de Terzaghi (σ'_{ij})” (SKEMPTON, 1960):

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p \delta_{ij} \quad (2.14)$$

Em experimentos posteriores, observou-se o efeito da compressibilidade do meio poroso como função da variação da pressão de poros. Foi introduzido, então, o *tensor de tensão efetiva de Biot* (σ'_{ij}) para prever, corretamente, a deformação volumétrica do REV como função das tensões totais em suas faces:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \alpha p \delta_{ij} \quad (2.15)$$

A relação entre a tensão efetiva de Biot (σ') e a tensão efetiva de Terzaghi (σ'') é, pelas definições:

$$\sigma'_{ij} = \sigma''_{ij} + (\alpha - 1) p \delta_{ij} \quad (2.16)$$

A Figura 5 mostra a relação de proporcionalidade obtida, experimentalmente, por Nur e Byerlee (1971), utilizando, no eixo das abscissas, três grandezas: a) a tensão de confinamento apenas; b) a tensão efetiva de Terzaghi; e c) a tensão efetiva de Biot.

Figura 5 – Correlação entre pressão efetiva de Biot com: a) tensão confinante; b) tensão efetiva de Terzaghi; c) tensão efetiva de Biot.

Fonte: Adaptado de Nur, Byerlee (1971).

2.2.2.3 Equilíbrio mecânico

Desprezando-se efeitos inerciais e gravitacionais, o tensor das tensões totais deve satisfazer a equação de equilíbrio mecânico, em que seu divergente é nulo:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (2.17)$$

Considerando-se as condições lineares observadas na seção 2.2.2.2, pode-se escrever a relação tensão-deformação, com relação à tensão efetiva:

$$\sigma'_{ij} = 2G e_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \epsilon \delta_{ij} \quad (2.18)$$

Chega-se, então, à seguinte equação de equilíbrio, com relação à tensão total:

$$\sigma_{ij} = 2Ge_{ij} + \frac{2G}{1-2\nu}\delta_{ij}\epsilon - \alpha p\delta_{ij} \quad (2.19)$$

E, finalmente, utilizando a definição de deformação da Equação (2.3), obtém-se a equação de equilíbrio mecânico nas variáveis primárias de interesse u e p :

$$Gu_{i,kk} + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,ik} - \alpha p_{,i} = 0 \quad (2.20)$$

Por conveniência na análise e para posterior solução numérica, convém expressar a equação (2.17) em uma forma que guarde relação com as tensões efetivas:

$$\sigma'_{ij,j} = \alpha p_{,i} \quad (2.21)$$

Observando as equações (2.19), (2.20) e (2.21), individualiza-se, por conveniência, as equações em função dos deslocamentos $u = u_x$ e $v = u_y$:

$$\frac{2G}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + G \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right] = \alpha \frac{dp}{dx} \quad (2.22)$$

$$\frac{2G}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right] + G \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] = \alpha \frac{dp}{dy} \quad (2.23)$$

O lado esquerdo das equações (2.22) e (2.23) guardam relações diretas com a tensão efetiva de Biot (σ'). No desenvolvimento numérico (Seção 3.1), essa forma da equação será relevante para particularizar as condições de contorno do problema, que também serão diretamente relacionadas à tensão efetiva de Biot.

2.2.2.4 Continuidade hidráulica

O divergente de um campo vetorial expressa a magnitude de fluxo de saída de determinada região (ANTON, 2000). Dessa forma, a equação de conservação de massa ou continuidade de fluxo para fluidos incompressíveis relaciona o divergente da vazão específica (volume por unidade de área por unidade de tempo) com a variação temporal de fluidos no REV:

$$\zeta_{,t} + q_{k,k} = 0 \quad (2.24)$$

Complementarmente, a Lei de Darcy estabelece a proporcionalidade linear entre a vazão específica e o gradiente de pressão. Desprezando os efeitos gravitacionais, obtém-se:

$$q_i = -\kappa p_{,i} \quad (2.25)$$

Utilizando-se a definição de incremento de fluidos ζ no REV, definido na equação (2.5) como função das variáveis primárias de interesse, obtém-se:

$$S_\epsilon p_{,t} - \kappa p_{,kk} = -\alpha \epsilon_{,t} \quad (2.26)$$

2.2.3 Estado de tensões inicial no domínio

Conforme observado na seção 2.1.1.2, é possível estimar o campo de tensão local e a pressão de poros nas locações dos poços perfurados em um reservatório. Essas estimativas são localmente válidas, mas devem ser extrapoladas de forma coerente, em todo o domínio, como condição inicial para solução dos modelos matemáticos. Poços vizinhos, por exemplo, podem apresentar estados de tensões sensivelmente distintos, e é imposto ao intérprete acomodar ambas as observações como condição inicial de um único modelo matemático.

O processo de associação do estado de tensão e deformação inicial a todo o domínio é, portanto, similar ao ajuste de histórico tradicionalmente realizado na engenharia de reservatórios, em que observações de vazão e pressão são observadas e ajustadas nos poços (DAKE, 2001). Geometrias complexas e a heterogeneidade do meio tornam o processo de ajuste de histórico de tensões desafiador, uma vez que as tensões regionais são normalmente aplicadas no contorno do domínio, distantes dos pontos de observação.

No caso de modelos poroelásticos, é necessário atribuir, além da pressão de poros inicial, condições de contorno externas (tipicamente tensões) e parâmetros mecânicos aos materiais, de forma a honrar, da melhor forma possível, os dados conhecidos. Alguns autores propõem abordagens complexas, em que o estado de tensões é restaurado a partir de simulações numéricas em tempo geológico (milhões de anos), capazes de considerar eventos tectônicos, migração de fluidos e movimentações mecânicas das massas rochosas durante o período (NIKOLINAKOU et al., 2018).

No presente trabalho, assume-se um campo de tensões homogêneo, de forma a ser suficiente a prescrição de tensões no contorno do domínio. Assume-se, também, que a condição inicial de pressão é conhecida e uniforme no domínio. Com essas premissas, realiza-se um passo de simulação, a priori, a pressão constante (regime

drenado, pressão prescrita) para determinação dos deslocamentos em todo o domínio, no instante de tempo inicial.

2.3 FRATURAMENTO HIDRÁULICO

2.3.1 Definições

2.3.1.1 Processos envolvidos

A Figura 6, a seguir, representa os processos que ocorrem durante a propagação de uma fratura hidráulica em um reservatório. Tipicamente, o fraturamento hidráulico ocorre por injeção de fluidos em um poço de petróleo, que agrega energia ao sistema. A energia de bombeio é dissipada pelos seguintes mecanismos principais (DETOURNAY, 2016; PEIRCE, 2016):

- a) deformação das rochas;
- b) energia liberada pelo processo de fraturamento da rocha;
- c) fluxo de fluidos no interior da fratura;
- d) filtração de fluidos da fratura para as rochas adjacentes.

Figura 6 – Propagação de uma fratura hidráulica gerada na vizinhança de um poço.

Fonte: Cheng (2016, p. 36).

Todos esses processos ocorrem desde a microescala (a interação molecular, por exemplo), até a macroescala (dilatação das rochas, fluxo de fluidos na fratura, etc.), e são fortemente acoplados à abertura da fratura. Segundo Detournay (2016), ainda é um desafio capturar todos esses efeitos nos simuladores numéricos devido à natureza multiescala e multifísica dos mesmos. O autor menciona que muitos modelos recentes utilizam premissas originalmente desenvolvidas para materiais frágeis como

concreto ou rocha seca. Essa abordagem pode ter erros associados que, muitas vezes, não podem ser negligenciados. O papel do fluido, na fratura, é essencial para a compreensão do processo físico em estudo e deve-se evitar simplificações em excesso na caracterização do processo de filtração e das incertezas inerentes à mecânica das rochas.

A filtração de fluidos, por exemplo, relaciona-se com a dilatação das rochas adjacentes, que pressiona a fratura na direção do fechamento. Esse efeito pode ser negligenciado em um tratamento de estimulação que dure algumas horas, mas não na análise da propagação de fraturas após longo período de produção e injeção de fluidos no reservatório, por exemplo.

Howard e Fast (1957) apresentam, como anexo, o coeficiente de filtração de Carter, que considera a vazão de filtração, em um ponto da fratura, como dependente da raiz quadrada do tempo:

$$q_l(x, t) = \frac{2C_l}{\sqrt{t-t_0(x)}} \quad (2.27)$$

onde $t_0(x)$ é o tempo em que a fratura chega na posição x . Nesse caso, a redução da filtração com o tempo é resultado do aumento da pressão nas rochas adjacentes. A filtração é inibida gradualmente, de forma que a filtração atual é função do histórico dos fluidos injetados.

A qualidade da água injetada também orienta o processo de filtração no meio poroso. Água limpa e de baixa viscosidade penetrará no meio poroso mais do que água com sólidos em suspensão, que tendem a formar um reboco, pouco permeável, na parede da fratura. É importante monitorar, periodicamente, a evolução dos índices de injetividade em poços injetores, para avaliar se está ocorrendo fraturamento ou incremento de dano no poço (HOWARD; FAST, 1957; PERKINS; GONZALEZ, 1985).

Outro efeito é o atraso (*lag*) de fluido que ocorre na ponta da fratura devido a efeitos viscosos e capilares. Adachi et al. (2008) observam que esse efeito é desprezível quando as tensões confinantes são elevadas, como é o caso de reservatórios de grande soterramento, por exemplo.

2.3.1.2 Critério de propagação de uma fratura por tração

A bibliografia sobre propagação de uma fratura de tração em um material frágil é vasta. Sousa Jr. (2018) faz uma revisão recente dos métodos de modelagem

utilizados. No presente trabalho, utilizam-se elementos coesivos, como uma região fragilizada à frente do ponto de nucleação da fratura (BARENBLATT, 1962; DUGDALE, 1960; GRIFFITH, 1921; RICE, 1968).

O modelo elástico de um corpo sob tração considera que o comportamento do material é elástico até a nucleação e propagação de uma fratura, quando a ponta da fratura concentra tensão. Essa concentração de tensão é caracterizada, matematicamente, no modelo elástico, por uma singularidade numérica em que a tensão na ponta da fratura tende ao infinito. Essa concentração de tensão não tem correspondência no comportamento real do material, e desvios da linearidade elástica, que ocorrem nessa região, devem ser tratados fora da modelagem elástica.

Rice (1968) apresenta diversos métodos de tratamento da propagação de fraturas. Dentre eles, destaca o critério que avalia a variação energética durante o processo de fraturamento com uso da integral J , definida como o gradiente da energia potencial dP em relação ao incremento do tamanho da fratura dl . Ela é calculada, em um caminho arbitrário Γ , ao redor da ponta da fratura (Figura 7a):

$$J_i = -\frac{dP}{dl} = \int_{\Gamma} [Wn_i - n_j \sigma_{jk} u_{k,i}] d\Gamma \quad (2.28)$$

onde W é a densidade de energia de deformação. Para um meio elástico, W é associada ao tensor deformação ε_{ij} , como:

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \int_0^{[\varepsilon]} [\sigma]:d[\varepsilon] \quad (2.29)$$

A propagação da fratura ocorrerá se a tração aplicada for suficiente para elevar o valor de J acima da energia de Griffith, G_c . A propagação será estável se ela cessar com a carga constante (propagação quasi-estática).

Figura 7 – Caminhos de integração Γ para cálculo do gradiente de energia em relação ao incremento do tamanho da fratura l . Figura a – Caminho arbitrário. Figura b – Caminho considerado para provar a validade de elementos coesivos.

Fonte: O autor (2020).

Rice (1968) mostra que a integral J independe do caminho Γ , de forma que, ao tornar o caminho estreito, se aproximando da fratura, no sistema ordenado $\xi\eta$ (Figura 7b), obtém-se:

$$J = \int_0^{w^*} \sigma_{\eta\eta}(w)dw \quad (2.30)$$

onde w^* é a abertura no limite região coesiva, rasurada na Figura 7b. Na região em que $w > w^*$, a coesão entre as faces da fratura é nula.

Esse resultado é equivalente ao obtido por Barenblatt (1962) com o uso de elementos coesivos, já que ambos se baseiam na teoria de Griffith (1921). Dessa forma, conclui-se que o comportamento da fratura pode ser previsto de forma equivalente pela integral J ou por forças coesivas.

2.3.1.3 Modelos analíticos

Esta seção aborda os modelos analíticos bidimensionais PKN (*Perkins – Kern – Nordgren*), KGD (*Kristianovich – Geertsma-deKlerk*), e Radial (*Pennyshaped*), ilustrados na Figura 8. São soluções analíticas clássicas para a propagação de fraturas em meios porosos. Cada modelo considera um conjunto de premissas que se aplicam em condições específicas (ADACHI et al., 2007; YEW; WENG, 2014).

Figura 8 – Modelos analíticos de propagação de fraturas hidráulicas: Figura a – PKN. Figura b – KGD. Figura c – Radial.

Fonte: Adaptado de Adachi et al. (2007).

A altura da fratura gerada é controlada pelo contraste nas propriedades do material (resistência à tração, por exemplo) e a distribuição vertical de tensões, sendo este último o fator predominante na maioria dos cenários (WARPINSKI; TEUFEL, 1987; YEW; WENG, 2014). Os modelos PKN e KGD são de altura constante, portanto,

adequados para casos em que o contraste de tensões, entre camadas adjacentes, confina a fratura. No caso em que a distribuição vertical de tensões é uniforme, a fratura tenderá a ter um formato circular, e o modelo radial é mais adequado.

O modelo PKN foi, inicialmente, elaborado nas décadas de 1950 e 1960 (KHRISTIANOVIC; ZHELTOV, 1955; NORDGREN, 1972; PERKINS; KERN, 1961; SNEDDON; ELLIOT, 1946). Ele é aplicável a longas fraturas, com altura limitada, e parte das seguintes premissas:

- a) a altura da fratura é constante;
- b) a fratura está no estado plano de deformações no plano vertical;
- c) a resistência do meio à tração é negligenciável, frente às tensões confinantes;
- d) a geometria de uma seção transversal da fratura é uma elipse.

O modelo KGD (GEERTSMA; DE KLERK, 1969; KHRISTIANOVIC; ZHELTOV, 1955) é utilizado para fraturas curtas em relação à dimensão vertical. São assumidas as seguintes premissas principais:

- a) a altura da fratura é constante;
- b) a fratura está no estado plano de deformações no plano horizontal;
- c) a ponta da fratura tem um formato pontiagudo, conforme sugerido por Barenblatt (1962).

O modelo Radial é adequado quando o contraste de tensões, entre as camadas adjacentes do reservatório, é pequeno, e a injeção de fluidos ocorre em uma área reduzida, de forma que a fratura assume um formato circular (ADACHI et al., 2007; GEERTSMA; DE KLERK, 1969; GREEN; SNEDDON, 1950). O modelo radial é adequado para poços horizontais alinhados com a tensão horizontal mínima, por exemplo, em que a fratura desenvolver-se-á perpendicular ao poço.

2.3.2 Métodos numéricos

Uma fratura é uma fronteira externa (*boundary*) do meio contínuo (reservatório). O modelo constitutivo no interior da fratura é definido por um canal estreito (milimétrico), de elevada permeabilidade. Ele é incluso no modelo do reservatório, que tem diversos quilômetros quadrados de área. A ponta de uma fratura é um ponto

agudo de concentração de tensão, que se move no tempo, de forma que o problema global se torna um problema de fronteira móvel (*moving boundary*).

O estado da arte da modelagem de fraturas em reservatórios de petróleo e gás separa a abordagem numérica em duas categorias: a) representação discreta da fratura, explicitamente na malha de simulação; e b) representação contínua das propriedades de fratura equivalentes da fratura nos elementos, formando REV's equivalentes (LECAMPION; BUNGER; ZHANG, 2017; TATOMIR, 2012).

Modelos discretos de fraturas demandam maior esforço computacional, mas tendem a ser de implementação e validação mais simples, e caracterizar com mais detalhes as heterogeneidades do sistema. Nesses modelos, as fraturas têm correspondência direta nos elementos da malha e, à medida que a fratura se propaga, as condições de contorno do domínio poroelástico contínuo são atualizadas. Nesses casos, considera-se a utilização de malhas adaptativas, que se conformam dinamicamente à solução, de forma a reduzir e concentrar o esforço computacional nas posições do domínio que demandam maior detalhamento.

Técnicas de representação analítica da região de fratura no contínuo utilizam enriquecimento analítico dos elementos e extensões ao método dos elementos finitos para lidar com as descontinuidades, descrevendo e identificando os elementos por onde a fratura se propaga (BESERRA, 2015; BULLING; GRAVENKAMP; BIRK, 2019; PARVANEH; FOSTER, 2016). A velocidade com que a ponta da fratura se move é função de uma série de parâmetros, como a filtração (*leakoff*), as características mecânicas do meio e a dinâmica do fluxo na fratura. Nesse sentido, modelos analíticos descrevem essa região com mais detalhes, enquanto o resto do domínio mantém a simplicidade do modelo discreto (DETOURNAY, 2016).

A Figura 9 mostra a classificação proposta por Lecampion et al. (2017), apresentando dois métodos discretos (elementos coesivos com e sem adaptatividade de malha) e dois métodos contínuos (elementos finitos estendidos e métodos de campo). Em todas as abordagens citadas, o meio contínuo é modelado pelo método de elementos finitos. Em trabalhos que abordam fluxos multifásicos, é considerada a utilização do método dos volumes finitos, em combinação com o método de elementos finitos (OBEYSEKARA et al., 2016).

Figura 9 – Categorias de modelos de fratura: Figura a – Malha adaptativa. Figura b – Elementos coesivos. Figura c – Elementos finitos estendidos (*extended finite elements*, XFEM). Figura d – Abordagem de campo (*phase-field*).

Fonte: Adaptado de Lecampion et al. (2017, p.30).

Recentemente, *benchmarks* elaborados por universidades avaliam a precisão e desempenho dos métodos propostos (BUNGER; LECAMPION, 2017; FALCÃO et al., 2018; FLEMISCH et al., 2018). A Figura 10 compara alguns e mostra que métodos analiticamente mais sofisticados (*ILSA*, por exemplo) são capazes de utilizar malhas mais grosseiras e menos graus de liberdade, tendendo a serem, computacionalmente, mais eficientes, sem comprometer a precisão do algoritmo.

Flemisch et al. (2018) argumentam, por outro lado, que nem todos os métodos conseguem lidar com redes de fratura complexas. Muitas abordagens sofrem dificuldades técnicas, em casos mais gerais e realistas, em especial aquelas com maior carga analítica, que caracterizam o meio de forma mais homogênea. No seu trabalho, fraturas modeladas como elementos de interface de menor dimensão (elementos unidimensionais em um domínio bidimensional, por exemplo) apresentam ótimo desempenho e capacidade de representar domínios complexos. Essa abordagem faz sentido físico, porque as fraturas são ordens de magnitude mais

estreitas que o reservatório, enquanto o fluxo de fluidos, na fratura, segue, preferencialmente, o sentido da ponta da fratura.

Figura 10 – Precisão e desempenho (número de elementos ao longo da fratura) comparativo dos métodos analisados, na caracterização da propagação de uma fratura hidráulica.

Fonte: Lecampion et al. (2017, p.43).

2.3.2.1 Elementos coesivos de interface

Modelos coesivos (BARENBLATT, 1962; DUGDALE, 1960) consideram uma zona de plastificação, próxima à ponta da fratura, que reduz as forças coesivas do material, propagando a fratura. Essa plasticidade remove a singularidade numérica existente na ponta da fratura, quando o modelo constitutivo é baseado, puramente, na teoria linear elástica (*Linear Elastic Fracture Mechanics*, LEFM). O objetivo é caracterizar a energia de propagação de fratura do material, conforme descrito na seção 2.3.1.2.

Elementos coesivos de interface caracterizam a fratura, de forma discreta, na interface de dois elementos contínuos (Figura 11). Elementos vizinhos à fratura são acoplados com um elemento de dimensão reduzida e alta rigidez mecânica, de forma a manter válida a condição continuidade mecânica do meio. Os elementos coesivos podem ser considerados sem dimensão normal, como em Carrier e Granet (2012), Mahabadi et al. (2012) e Yan et al. (2016), ou com dimensões normais infinitesimais em Manzoli et al. (2019).

Figura 11 – Elemento coesivo unidimensional como interface dos elementos bidimensionais que representam o meio contínuo. Destaque para o eixo coordenado rotacionado desses elementos.

Fonte: O autor (2020).

Para cálculo da propagação da fratura, a malha pode ser fragmentada, inserindo-se elementos coesivos em diversos caminhos. Um algoritmo incremental é capaz de identificar os pontos de concentração de tensão e de fragilização do material, caracterizando a propagação das fraturas. Entretanto, embora as respostas globais dependam pouco da malha, a solução local dependerá, em maior ou menor grau, mesmo em malhas refinadas, do tamanho e da disposição dos elementos no caminho da fratura (MANZOLI et al., 2019; YAN et al., 2016).

Estratégias baseadas em elementos coesivos são simples e úteis, em especial para mapear fraturas existentes, ou quando o caminho de propagação da fratura é conhecido a priori. A depender do problema em estudo, o compromisso entre custo computacional e precisão pode-se tornar um empecilho, demandando a integração de algoritmos de *tracking* do caminho de fratura e adaptatividade de malha.

2.3.2.2 Enriquecimento dos elementos

Técnicas de enriquecimento de elementos como QPE (*Quarter Point Element*), XFEM (*Extended Finite Element Method*), métodos de campo (*Phase-field*), Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF) e *Levelset* estão em constante desenvolvimento. Essas técnicas agregam expressões analíticas nos elementos finitos para estimar, com maior precisão, a distribuição de tensão ao redor da ponta da fratura e a propagação da mesma. Tipicamente, esses métodos demandam domínios homogêneos e geometrias mais simples, quando comparados a abordagens com malhas mais refinadas que representam os atributos do meio de forma discreta, em menor escala.

A utilização de QPEs (BARSOUM, 1977), por exemplo, ajusta os elementos finitos isoparamétricos para representar, de forma precisa, a concentração de tensão na ponta da fratura. Para tanto, o autor propõe relocalizar os nós do elemento finito, utilizando uma função de forma particular para esse caso. O método ACFD (BESERRA, 2015), por sua vez, é uma maneira eficiente de modelar a propagação da fratura, incorporando, no meio contínuo, as alterações mecânicas e hidráulicas causadas pela fratura. É o caso da perda de rigidez do meio e aumento de transmissibilidade hidráulica devido à propagação de uma fratura no local.

O método *Implicit Level Set Algorithm* (ILSA) utiliza soluções assintóticas para a velocidade da ponta da fratura a fim de caracterizar a propagação no meio contínuo. A precisão e desempenho do método são notáveis (DETOURNAY, 2016; PEIRCE, 2016; PEIRCE; DETOURNAY, 2008). O ILSA resolve, explicitamente, a posição da ponta da fratura. Em seguida, identifica elementos especiais nos quais a ponta da fratura estará, impondo a velocidade da fratura diretamente na formulação variacional do sistema. O sistema é, então, solucionado de forma implícita, utilizando XFEM ou *Displacement Discontinuity Method* (DDM), e a convergência é verificada, iniciando uma nova iteração, se necessário.

Métodos de campo representam a fratura como uma variável de campo. Patil et al. (2018) usam esse método em conjunto com adaptatividade de malha em microescala. Tal estratégia resolve a principal limitação dos métodos de campo, que é a necessidade de refinamento ao redor das descontinuidades, utilizando duas malhas, uma fina e uma mais grosseira. O método *Multiscale Finite Element Method* (MsFEM) e funções de forma multiescala são utilizados para a troca de informação entre as malhas. A ideia é construir, numericamente, pela resolução de problemas de Dirichlet, as funções da escala grosseira a qual impõe condições de contorno para as malhas finas.

2.3.2.3 Adaptatividade de malha e projeções de Galerkin

A propagação de uma fratura hidráulica por tração necessita de maior detalhamento no ponto de concentração de tensão: a ponta da fratura. Com a propagação, esse ponto se move para uma nova posição, e a antiga posição passa a demandar menor detalhamento.

A adaptatividade da malha é uma abordagem que visa a conter o custo computacional, adicionando a possibilidade de conformar dinamicamente a malha à física do problema, adaptando-se à evolução da fratura (DEMKOWICZ; RACHOWICZ; DEVLOO, 2002; JACKSON et al., 2015; MOSTAGHIMI et al., 2015; SECCHI; SIMONI; SCHREFLER, 2007). Nesses casos, fraturas são representadas de forma discreta, como interfaces entre elementos vizinhos.

Malhas adaptativas reduzem a dependência do problema à malha original, mas demandam algoritmos de *tracking* do caminho da fratura e troca de informações entre as diferentes malhas, o que adiciona complexidade significativa ao problema (JÄGER; STEINMANN; KUHL, 2008; OLIVER; HUESPE, 2002).

A troca de informações entre as malhas é um ponto sensível nessa classe de problemas, que demanda atenção ao ruído numérico e à perda de informação. Nesse trabalho, a troca de informação entre as malhas utiliza projeções de Galerkin globais. Com base em uma solução existente, na malha de origem, calcula-se o valor da solução nos pontos de Gauss da malha de destino.

Para atribuir valores aos graus de liberdade, são feitas projeções de Galerkin, em $\mathbb{R}^2$, que minimizam a norma L_2 (FARRELL; MADDISON, 2011):

$$g_k \int_{\Omega} \varphi_k^g \psi_l d\Omega = f_k \int_{\Omega} \varphi_k^f \psi_l d\Omega \quad (2.31)$$

onde φ e ψ são funções de forma e função teste, respectivamente; f_k são os valores da função conhecida, avaliada nos pontos de Gauss; g_k é a incógnita da equação no grau de liberdade k ; e φ^f e φ^g são as funções de forma avaliadas na malha de origem e destino, respectivamente.

A equação 2.31 é, então, avaliada, numérica e globalmente, como o sistema linear, em que A_{lk} e b_l são conhecidos:

$$A_{lk} g_k = b_l \quad (2.32)$$

2.3.3 Modelo constitutivo da fratura

A Figura 12 representa uma fratura arbitrária, definindo o eixo coordenado $\xi\eta$ de referência, em que ξ é o eixo na direção longitudinal e η é o eixo na direção transversal à fratura.

Figura 12 – Representação de uma fratura como domínio unidimensional no meio contínuo bidimensional.

Fonte: O autor (2020).

2.3.3.1 Fluxo na fratura

A solução analítica de Navier-Stokes, para fluxo de fluido incompressível em placas paralelas, desprezando-se componentes gravitacionais, aproxima o fluxo longitudinal nas fraturas. A equação resultante é conhecida como lei cúbica e relaciona o gradiente de pressão, ao longo da fratura, com o fluxo q_ξ , em volume de fluido por unidades de tempo,

$$q_\xi = -\frac{w^3 h}{12\mu} p_{,\xi} \quad (2.33)$$

onde h é a altura da fratura.

Trata-se de uma aproximação analítica que não considera alguns elementos significativos (WITHERSPOON et al., 1980; ZIMMERMAN; BODVARSSON, 1996), dentre eles:

- a) a rugosidade das paredes da fratura;
- b) a abertura variável da fratura (e, portanto, velocidade variável do fluxo) que a rugosidade implica;
- c) turbulência do fluxo devido a velocidades elevadas.

2.3.3.2 Continuidade hidráulica

O modelo hidráulico da fratura considera, no interior da fratura, desprezível o gradiente de pressão ortogonal à direção da fratura, de forma que a conservação de massa pode ser modelada em um elemento unidimensional que corta o domínio contínuo.

Para um fluido incompressível, a continuidade hidráulica, na fratura, impõe que o divergente do fluxo específico, nessa fratura, seja igual ao volume de fluido que acumula no interior da mesma (CARRIER; GRANET, 2012; YEW; WENG, 2014). Utilizando o sistema coordenado $\xi\eta$, obtém-se:

$$q_{k,k} + w_{,t} = 0 \quad (2.34)$$

onde w é a abertura da fratura.

Pelas premissas adotadas, não há fluxo interno à fratura na direção do eixo η . Desse modo, o gradiente de pressão transversal $p_{,\eta}$ é nulo no interior da fratura, mas não no seu contorno. Portanto:

$$p^+(\xi) = p^-(\xi) \quad (2.35)$$

e q_η torna-se condição de contorno entre a fratura e o meio contínuo, representando a filtração de fluido (*leakoff*) da fratura para a rocha intacta.

Considerando as equações (2.25), (2.33) e (2.34), o balanço de fluxo no domínio da fratura torna-se:

$$\kappa p_{,\eta\eta} - \frac{w^3}{12\mu} p_{,\xi\xi} + w_{,t} = 0 \quad (2.36)$$

2.3.3.3 Equilíbrio mecânico na fratura

Em contraste ao meio poroso contínuo, a fratura é, fisicamente, um espaço vazio preenchido apenas com fluido. Quando aberta, assume-se equilíbrio estático nas paredes da fratura como condição de contorno mecânica para o meio contínuo adjacente:

$$\sigma_{\eta\eta} = -p, \quad \text{se } w > w_c \quad (\text{fratura aberta}) \quad (2.37)$$

Representando como tensões efetivas, obtém-se:

$$\sigma'_{\eta\eta} = (\alpha - 1) p \quad (2.38)$$

Na direção da fratura, considera-se o acoplamento elástico com alta rigidez E_t , sem degradação por cisalhamento:

$$\sigma'_{\xi\xi} = E_t \varepsilon_{\xi\xi} \quad (2.39)$$

2.3.3.4 Equilíbrio mecânico na ponta da fratura

Uma região coesiva evita a singularidade na ponta da fratura (seção 2.3.2.1). A ideia é incluir um acoplamento elástico, inicialmente, muito rígido entre os elementos que compartilham o caminho da fratura, utilizando uma penalidade (Figura 13, para $w < w_t$). Em outras palavras, o elemento coesivo tem um comportamento elástico enquanto estiver intacto. A partir de uma determinada tração normal, que é mensurada pela abertura infinitesimal do elemento coesivo ($w > w_t$), a rigidez é reduzida, defasando o elemento coesivo do comportamento elástico.

Figura 13 – Modelo de dano utilizado para propagação da fratura. A área pontilhada se refere à energia liberada durante o processo de fraturamento (RICE, 1968). A linha S é a secante que representa o caminho de recarga para um dano arbitrário e irreversível w_d . No detalhe, a identificação das aberturas no modelo da fratura, com relação à região coesiva (região rasurada na ponta da fratura).

Fonte: O autor (2020).

A Figura 13 mostra o modelo de dano utilizado para caracterizar a degradação da coesão na ponta da fratura. A tensão efetiva de Terzaghi σ'' é utilizada para o cálculo do critério de propagação (ZOBACK, 2010). A variável de estado w_d representa o dano, em um determinado ponto do sistema, que é assumido irreversível. Ou seja, em uma interface danificada, com dano w_d , o caminho de compressão segue a reta secante S , de rigidez reduzida, e não mais a rigidez original. Pela característica irreversível, o dano w_d não reduz com o tempo, de forma a acumular o histórico de degradação do material em cada posição do domínio. A área pontilhada, na Figura 13, corresponde à energia coesiva de Griffith (G_c) considerada para o material.

Na ponta da fratura, ou à frente da fratura, antes da fragilização, considera-se, portanto, a seguinte condição de equilíbrio mecânico:

$$\sigma''_{\eta\eta} = \hat{\sigma}''_{\eta\eta}(w, w_d) \quad (2.40)$$

onde $\hat{\sigma}''_{\eta\eta}(w, w_d)$ é a função que define a região coesiva, definida analiticamente, conforme já ilustrado pela Figura 13.

Observando a equação (2.16), fica claro que, se $\sigma''_{\eta\eta} = 0$ ($w > w_c$), então $\sigma'_{\eta} = (\alpha - 1) p$, que é a relação de equilíbrio mecânico para fratura aberta, equivalente à equação (2.38). Esta equivalência demonstra a continuidade existente na tensão observada nas paredes da fratura, no limite da região coesiva ($w = w_c$). A equação (2.40) é, portanto, válida para todo o domínio.

2.3.3.5 Sistema de coordenadas local

Elementos de dimensão reduzida (nesse caso unidimensionais, formando arestas) representam as fraturas, e a matriz de rotação r_{ij} acopla o sistema de coordenadas global, xy , ao sistema de coordenadas local da fratura, $\xi\eta$ (Figura 12). Ela é definida como:

$$r_{ij} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} : \begin{cases} c = \cos \theta \\ s = \sin \theta \end{cases} \quad (2.41)$$

onde θ é o ângulo de rotação entre os sistemas coordenados.

Os graus de liberdade são diferenciados, nos domínios Ω^+ e Ω^- . A abertura da fratura ao longo do eixo ξ , $w(\xi)$, é calculada a partir da solução de deslocamento em coordenadas globais, $u_i(x, y)$:

$$u_i(\xi) = r_{ik} u_k(x, y) \quad (2.42)$$

$$w(\xi) = \|r_{ik}[u_k^+(x, y) - u_k^-(x, y)]\| \quad (2.43)$$

A matriz tangente em $\xi\eta$, necessária ao solver não-linear (*Newton-Raphson*), é pós-multiplicada pela matriz de rotação, r_{ij} , e pré-multiplicada pela mesma transposta, r_{ji} , para transformação para o sistema de coordenadas global xy :

$$K_{ij}(x, y) = r_{mi} K_{mn}(\xi, \eta) r_{nj} \quad (2.44)$$

Por simplicidade, é utilizada a matriz de rotação tensorial equivalente, R_{ij} :

$$K_{ij}(x, y) = K_{ik}(\xi, \eta) R_{kj} \quad (2.45)$$

onde:

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} cc & sc & -cc & -sc \\ sc & ss & -sc & -ss \\ -cc & -sc & cc & sc \\ -sc & -ss & sc & ss \end{bmatrix} : \begin{cases} c = \cos \theta \\ s = \sin \theta \end{cases} \quad (2.46)$$

3 METODOLOGIA

3.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

3.1.1 Meio poroelástico linear: formulação com elementos finitos

Modelagens numéricas de equações diferenciais parciais (EDP) discretizam o domínio e o tempo para obter a aproximação da solução com custo computacional viável. A escolha do método a ser utilizado depende, basicamente, das características do problema-alvo e da experiência dos profissionais envolvidos no projeto. Na maioria dos casos, mais de um método pode ser aplicado com sucesso. Esta seção traz um breve resumo dos métodos considerados para a elaboração deste trabalho: o método das diferenças finitas (FDM), o método dos volumes finitos (FVM) e o método dos elementos finitos (FEM).

Normalmente, FDM é preferido para simulações de fluxo multifásico em reservatórios de petróleo com geometrias e condições de contorno relativamente simples. É um método simples e eficiente, capaz de aproximar localmente as derivadas da EDP. Entretanto, o FDM demanda malhas estruturadas, limitando a capacidade de representação de domínios mais complexos e impossibilitando adaptações locais de malhas para representação de fenômenos localizados e descontinuidades (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001; HURTADO et al., 2005).

Já sistemas de equilíbrio mecânico e de dinâmica de fluidos computacional utilizam, normalmente, o método dos elementos finitos (FEM), que adiciona flexibilidade pelo uso de funções interpoladoras e elementos variados, viabilizando a representação de geometrias e condições de contorno complexas. A literatura, nesse sentido, é vasta. Destacam-se, ainda, métodos FEM não-convencionais, que visam a garantir aspectos conservativos essenciais na modelagem de fluxos multifásicos (FARIAS, 2014).

Foram considerados, ainda, métodos mistos que utilizam, simultaneamente, FVM e FEM para simulações hidromecânicas conservativas, em malhas não estruturadas. Nesses casos, o FEM é utilizado para as equações relativas aos deslocamentos mecânicos, enquanto o FVM é utilizado, em uma malha complementar, para as equações de fluxo (OBEYSEKARA et al., 2016). Como o

escopo desse trabalho se limita a fluxos monofásicos, tal acoplamento não se fez necessário, sendo suficiente a utilização do FEM tradicional.

As seções seguintes apresentam a formulação matemática utilizada, nesse trabalho, para a aproximação do problema poroelástico linear monofásico pelo método dos elementos finitos (FEM). Trata-se de um problema de valores de contorno de segunda ordem (*second order boundary-value problem*). As seções seguintes utilizam o fluxo proposto por Carey et al. (1981) para formular a aproximação numérica para a poroelasticidade linear, utilizando o método dos elementos finitos.

3.1.1.1 Enunciado do problema poroelástico linear

Encontrar as funções $u_i(x, y)$ e $p(x, y)$ dadas as equações (2.21) e (2.25), que definem o modelo constitutivo do meio:

$$\sigma'_{ki,k} = \alpha p_{,i} \quad (3.1)$$

$$q_i = -\kappa p_{,i} \quad (3.2)$$

com as condições de contorno iniciais:

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{em } \Omega, t = 0 \quad (3.3)$$

$$p = \hat{p} \quad \text{em } \Omega, t = 0 \quad (3.4)$$

e com as condições de contorno naturais:

$$\sigma_i = \hat{\sigma}_i \quad \text{em } \Gamma, \forall t \quad (3.5)$$

$$q_i = \hat{q}_i \quad \text{em } u(x_0, y_0), \forall t \quad (3.6)$$

A condição inicial de deslocamento prescrito (equação 3.3) é obtida indiretamente, a priori, na inicialização do modelo: obtém-se o equilíbrio inicial pela solução do sistema de equações constitutivas com pressão prescrita (equação 3.4), em condições drenadas (sem variação de pressão), e com condições de contorno naturais prescritas (tensão no contorno, equação 3.5).

3.1.1.2 Formulação variacional integral

Pela formulação variacional, procura-se encontrar as funções $u_i(x, y)$ e $p(x, y)$, de forma que o enunciado proposto seja verdadeiro para todas as funções-teste ψ , contidas na classe de funções suficientemente suaves admissíveis, tal que:

$$\int_{\Omega} \sigma'_{ki,k} \psi \, d\Omega - \int_{\Omega} \alpha p_{,i} \psi \, d\Omega = 0 \quad \forall \psi \quad (3.7)$$

$$\int_{\Omega} q_i \psi \, d\Omega + \int_{\Omega} \kappa p_{,i} \psi \, d\Omega = 0 \quad \forall \psi \quad (3.8)$$

3.1.1.3 Integração por partes

O objetivo é obter uma solução aproximada para o sistema de equações representado pelas equações (3.7) e (3.8). Em primeiro lugar, a ordem das derivadas de segunda ordem é reduzida, utilizando a integração por partes:

$$f_{i,ij} g = (f_{i,i} g)_{,j} - f_{i,i} g_{,j} \quad (3.9)$$

e o teorema do divergente de Gauss:

$$\int_{\Omega} f_{i,i} \, d\Omega = \int_{\Gamma} f_i n_i \, d\Gamma \quad (3.10)$$

Assim, obtém-se a seguinte identidade:

$$\int_{\Omega} f_{i,ij} g \, d\Omega = \int_{\Omega} [(f_{i,i} g)_{,j} - f_{i,i} g_{,j}] \, d\Omega = \int_{\Gamma} f_{i,i} g n_i \, d\Gamma - \int_{\Omega} f_{i,i} g_{,j} \, d\Omega \quad (3.11)$$

3.1.1.4 Aproximação de Galerkin

O espaço de soluções e a função de teste são discretizados no domínio, utilizando a função de forma ψ_k como interpoladora, em um espaço de aproximação representado por uma malha discreta. Aproximações de Galerkin assumem a mesma forma para a função de teste e a função de interpolação.

Definem-se as interpolações:

$$u_x(x, y) = u(x, y) = u_k \psi_k(x, y) \quad (3.12)$$

$$u_y(x, y) = v(x, y) = v_k \psi_k(x, y) \quad (3.13)$$

$$p = p(x, y) = p_k \psi_k(x, y) \quad (3.14)$$

e a função de teste:

$$\psi(x, y) = \sum_{l=1}^n \psi_l(x, y) \quad (3.15)$$

onde k e l são índices dos nós da malha discreta. A função-base ψ_i é associada ao nó i . A função de forma ψ_i é nula fora dos elementos que compartilham o nó i , e o sistema de equações lineares pode ser construído iterando-se, em cada elemento, individualmente, e somando-se as parcelas relativas ao grau de liberdade em questão.

Manipulando as equações, chega-se ao sistema linear de equações para aproximar o problema poroelástico linear¹:

$$u_k \int_{\Omega} \left[\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \psi_{k,x} \psi_{l,x} + G \psi_{k,y} \psi_{l,y} \right] d\Omega + v_k \int_{\Omega} \left[\frac{2G}{1-2\nu} \psi_{k,y} \psi_{l,x} + G \psi_{k,x} \psi_{l,y} \right] d\Omega + p_k \int_{\Omega} \alpha \psi_{k,x} \psi_{l,y} d\Omega - \int_{\Gamma} \sigma'_x \psi_l d\Gamma = 0 \quad (3.16)$$

$$u_k \int_{\Omega} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \psi_{k,x} \psi_{l,y} + G \psi_{k,y} \psi_{l,x} \right] d\Omega + v_k \int_{\Omega} \left[\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \psi_{k,y} \psi_{l,y} + G \psi_{k,x} \psi_{l,y} \right] d\Omega + p_k \int_{\Omega} \alpha \psi_{k,y} \psi_{l,x} d\Omega - \int_{\Gamma} \sigma'_y \psi_l d\Gamma = 0 \quad (3.17)$$

$$u_{k,t} \int_{\Omega} \alpha \psi_{k,x} \psi_{l,y} d\Omega + v_{k,t} \int_{\Omega} \alpha \psi_{k,y} \psi_{l,y} d\Omega + p_{k,t} \int_{\Omega} S_{\epsilon} \psi_{k,x} \psi_{l,y} d\Omega + p_k \int_{\Omega} \kappa [\psi_{k,x} \psi_{l,i} + \psi_{k,y} \psi_{l,y}] d\Omega - \int_{\Gamma} \left(\frac{q_n}{\kappa} \right) \psi_l d\Gamma = 0 \quad (3.18)$$

3.1.1.5 Discretização temporal pelo método das diferenças finitas

A variável temporal t é discretizada em N intervalos, cada intervalo n com passo de tempo Δt^n . As derivadas temporais são calculadas por diferenças finitas para frente (*forward finite-difference approximation*):

$$u_{k,t} = \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t^n} \quad (3.19)$$

As variáveis do sistema $\{u_k, v_k, p_k\}$ são avaliadas de forma totalmente implícita, em $(n + 1)$. Dessa forma, o sistema é incondicionalmente estável, e não há limitação de tamanho do passo de tempo em vista de estabilidade numérica. A limitação do passo de tempo fica relacionada apenas à representação física dos fenômenos transientes, com especial atenção às não linearidades que podem causar bifurcações durante os laços newtonianos.

3.1.1.6 Funções de forma e integração por quadratura Gaussiana

Foram utilizados elementos triangulares de 6 pontos para representação do meio contínuo e funções de forma e de teste de segunda ordem para todas as variáveis.

¹ O somatório em l foi suprimido por clareza

As integrais das equações (3.16), (3.17) e (3.18) são definidas para todo o domínio Ω e podem ser resolvidas por quadratura Gaussiana (BATHE, 2014; CAREY; ODEN; BECKER, 1981):

$$\iint_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega = \sum_{q=0}^N w_q f(\overline{\mathbf{x}}_q) \quad (3.20)$$

onde $\overline{\mathbf{x}}_q$ é a posição espacial do ponto de quadratura q , w_q é o peso do ponto respectivo na integração, e N é a ordem da quadratura Gaussiana. A quadratura de ordem N integra, de forma exata, polinômios até a ordem $(2N - 1)$.

3.1.2 Fraturas: formulação com elementos coesivos

3.1.2.1 Enunciado do equilíbrio hidromecânico nas fraturas

Encontrar as funções $u_i(x, y)$, $p(x, y)$ e $w_d(x, y)$ dadas as equações (2.40), (2.39), (2.34) e (2.35), que definem o modelo constitutivo das fraturas:

$$\sigma''_{\eta\eta} = \sigma''_{\eta\eta}(w, w_d) \quad (3.21)$$

$$\sigma_{\xi\xi} = E_t \varepsilon_{\xi\xi} \quad (3.22)$$

$$q_{k,k} + w_{,t} = 0 \quad (3.23)$$

$$p^+(\xi) = p^-(\xi) \quad (3.24)$$

com as condições de contorno iniciais:

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{em } \Gamma, t = 0 \quad (3.25)$$

$$p = \hat{p} \quad \text{em } \Gamma, t = 0 \quad (3.26)$$

e com as condições de contorno naturais:

$$\sigma_i = \hat{\sigma}_i \quad \text{em } \Gamma, \forall t \quad (3.27)$$

$$q_i = \hat{q}_i \quad \text{em } u(x_0, y_0), \forall t \quad (3.28)$$

A função dano $w_d(x, y)$ guarda as regiões do sistema que foram danificadas em passos de tempo anteriores, de forma irreversível, como uma memória numérica. As fraturas formam um sistema de fronteira móvel que é atualizado durante a simulação, e seus graus de liberdade são compartilhados com o meio contínuo ao redor, estabelecendo o acoplamento pelas condições de contorno de ambos.

3.1.2.2 Formulação variacional integral

Pela formulação variacional, procura-se encontrar as funções $u_i(x, y)$ e $p(x, y)$, de forma que o enunciado proposto seja verdadeiro para todas as funções-teste ψ , contidas na classe de funções suficientemente suaves admissíveis, tal que:

$$\int_{\Gamma} q_{\eta} \psi d\Gamma + \int_{\Gamma} q_{\xi} \psi d\Gamma + \int_{\Gamma} w_{,t} \psi d\Gamma = 0 \quad \forall \psi \quad (3.29)$$

$$\int_{\Gamma} \sigma'_{\eta} \psi d\Gamma - \int_{\Gamma} (\alpha - 1)p \psi d\Gamma = 0 \quad \forall \psi \quad (3.30)$$

3.1.2.3 Aproximação de Galerkin

A aproximação de Galerkin é feita de forma similar à apresentada para o meio contínuo. As equações que aproximam, respectivamente, o fluxo e a tensão na fratura são:

$$p_k \int_{\Gamma} \kappa \psi_{k,\eta} \psi_l d\Gamma + \frac{w^3}{12\mu} p_k \int_{\Gamma} \psi_{k,\xi} \psi_{l,\xi} d\Gamma + \int_{\Gamma} w_{,t} \psi_l d\Gamma = 0 \quad (3.31)$$

$$\int_{\Gamma} \sigma'_{\eta} \psi_l d\Gamma - (\alpha - 1)p_k \int_{\Gamma} \psi_k \psi_l d\Gamma = 0 \quad (3.32)$$

3.1.2.4 Funções de forma e integração por quadratura Gaussiana

Foram utilizadas arestas de 3 pontos e funções de forma de segunda para representação da rede de fraturas. As integrais são resolvidas para todo o domínio Γ e podem ser resolvidas por quadratura Gaussiana. A integração de Gauss no domínio das fraturas é feita na quarta ordem.

3.1.2.5 Estados compressivos em interfaces danificadas

Conforme a seção 2.3.3, interfaces danificadas apresentam reduzida ou nenhuma coesão para estados tracionados ($\sigma_{\eta} > 0$). Entretanto, na dinâmica da fratura, caso haja alteração da pressão local ou das condições de contorno do sistema, essas interfaces podem passar a estados compressivos ($\sigma_{\eta} < 0$), voltando a interagir com alta rigidez e evitando sobreposição de malha.

A transição entre os dois estados é feita de forma contínua, para que o algoritmo de *Newton-Raphson* seja capaz de resolver o sistema naturalmente. Para

tanto, foi adotada uma geometria de elipse na transição, conforme a Figura 14. Os parâmetros da elipse, assim como os pontos de contato com as retas A (rigidez da interface intacta) e S (rigidez da interface danificada) são calculados garantindo a suavidade da função e da sua primeira derivada em todo o domínio.

Figura 14 – Solução para estados compressivos em interfaces danificadas, mostrando a elipse utilizada para cálculo contínuo da transição. A reta A representa a penalidade original da interface, e a reta S representa a rigidez com o estado danificado.

Fonte: O autor (2020).

3.2 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Esta seção apresenta os principais aspectos da implementação, destacando o fluxo global de execução do simulador e o fluxo atualização da malha.

3.2.1 Fluxo global de execução do simulador

A Figura **Erro! Fonte de referência não encontrada.** apresenta algoritmo referente ao fluxo global de execução do simulador. As seções, a seguir, detalham os principais procedimentos, individualmente.

3.2.1.1 Inicialização do modelo

A simulação inicia com a atribuição de valores iniciais para pressão e tensões externas ao modelo. As tensões são condições de contorno e não variáveis primárias

do sistema de equações lineares. Portanto, um passo de tempo é executado para atribuir os deslocamentos iniciais. Esse passo de tempo deve ser *drenado*, com pressão conhecida e constante, em vista a honrar o estado inicial fornecido pelo usuário e garantir a condição estática inicial do sistema.

Figura 15 – Algoritmo do simulador hidromecânico com propagação de fratura

Fonte: O autor (2020).

3.2.1.2 Laço de tempo (*t-loop*)

O laço de tempo inicia calculando a sua duração Δt , que é fornecida pelo usuário diretamente ou por parâmetros que permitem o cálculo automático, via Sistema Global de Propriedades (SGP).

As condições iniciais e de contorno são atualizadas com valores fornecidos pelo usuário no SGP. Em seguida, inicia o laço de dano (*g-loop*), que é responsável por calcular a nova condição das variáveis do sistema. Após o *g-loop*, se houver *solver* analítico habilitado, calcula as soluções analíticas para o passo de tempo, exporta os dados de saída (malha e exploradores) e avalia se o tempo final da simulação foi atingido. Caso afirmativo, o simulador finaliza, imprimindo estatísticas da rodada.

3.2.1.3 Laço de dano (*g-loop*)

O laço de dano lida com o aspecto evolutivo do dano, mantendo constantes as condições de contorno. Em cada iteração, o sistema de equações não lineares completo é resolvido, de forma totalmente implícita. Após a solução do sistema não linear, como pós-processamento, são calculadas as variáveis secundárias. São elas as tensões (total e efetivas), aberturas da fratura e vazões nos contornos do problema (poço, por exemplo).

Arquivos de saída relativos ao *g-loop* são gerados para pós-processamento, observação e depuração da evolução do dano em aplicações externas. Como esse laço interno não é indexado pelo tempo, tais arquivos são indexados pelo pseudotempo *g*. Observar que se tratam de resultados intermediários e que não estão, necessariamente, em equilíbrio mecânico, uma vez que o processo de propagação de fraturas pode estar instável.

O vetor dano, correspondente ao conjunto de interfaces no caminho da fratura, é atualizado, e registrado na malha DFN (ver seção 3.2.1.4). Caso não haja evolução significativa do vetor de dano, entende-se que o laço de dano convergiu, e o sistema pode seguir para um novo passo de tempo. Caso contrário, uma nova iteração *g* é iniciada.

A posição da ponta da fratura evolui, à medida que o dano é atualizado. Dessa forma, caso os gatilhos de remalhamento sejam atingidos, ele precisa ser feito internamente a esse laço, estendendo a região remalhada, caso a ponta da fratura se aproxime do final da mesma. O algoritmo de remalhamento e seus gatilhos são detalhado na seção 3.2.2.

3.2.1.4 Representação do dano em uma malha auxiliar (DFN)

Uma malha complementar DFN (*Discrete Fracture Network*) é mantida para armazenamento e interpolação do dano na fratura, que é atualizada, dinamicamente, à medida que a fratura evolui, armazenando, em seus graus de liberdade, o dano visto em cada posição da fratura. Essa malha é composta de elementos de dimensão reduzida (unidimensionais, arestas), como uma rede de fraturas efetivamente.

A Figura 15 mostra ambas as malhas sobrepostas. Observa-se a abertura da fratura na escala de cores armazenada, numericamente, nas arestas da malha DFN.

A utilização de elementos finitos para armazenar esses valores permite a rápida interpolação dos valores de dano e abertura em qualquer coordenada do domínio. Tais valores são utilizados na montagem do sistema de equações para se obter as tensões coesivas e a transmissibilidade longitudinal ao longo da fratura.

Figura 15 – Malha DFN complementar à malha principal, em visão sobreposta. Os marcadores maiores representam os nós terminais e os marcadores menores, os nós intermediários dos elementos unidimensionais, com interpoladores de segunda ordem.

Fonte: O autor (2020).

3.2.1.5 Soluções analíticas e pós-processamento

O sistema implementa *solvers* analíticos para modelos conhecidos, como ferramenta para validação e teste do *solver* numérico. Caso habilitado pelo usuário através do SGP, além da solução numérica, o fluxo de simulação exporta soluções analíticas em variáveis de campo. No pós-processamento, o usuário compara as soluções, estimando o desvio entre elas para validar a solução.

Atualmente, *solvers* analíticos estão disponíveis para problemas como *Mandel*, *Terzaghi*, concentração de tensões na ponta de uma fratura sob tração e concentração de tensões ao redor de um poço. A Seção 4 (Resultados) apresenta, de forma descritiva, as equações que cada *solver* utiliza. No pós-processamento, as variáveis secundárias – tensões locais, por exemplo – são calculadas com base nas variáveis primárias do simulador (pressão e deslocamentos).

Para atribuição dos valores das variáveis secundárias aos graus de liberdade, são utilizadas projeções de Galerkin locais, elemento a elemento, de forma análoga à descrita na Seção 2.3.2.3. Como a avaliação é feita de forma independente e individual em cada elemento, o campo resultante é descontínuo nas interfaces entre elementos vizinhos. Em outras palavras, em graus de liberdade de diferentes

elementos que compartilham a mesma posição geométrica, são atribuídos valores distintos.

Um filtro global baseado na projeção proposta na Seção 2.3.2.3 está disponível via SGP para aproximar tais resultados com um campo contínuo nas interfaces, suavizando a solução tipicamente para fins de visualização. Esse filtro demanda a solução de um sistema de elementos finitos global, com custo computacional relevante, e só deve ser habilitado se necessário.

3.2.2 Atualização da malha de simulação

A atualização da malha de simulação é feita dinamicamente, como função das soluções intermediárias do sistema, com o objetivo de tornar a solução independente da discretização espacial (malha de simulação) e minimizar o custo computacional sem perda de precisão numérica. A adaptatividade de malha proposta reduz a quantidade de graus de liberdade, quando comparada a soluções que utilizam malhas fixas. O algoritmo, descrito na Figura 16, apresenta os principais passos utilizados para atualização da malha de simulação. Os principais passos são descritos, em detalhes, nas seções que seguem.

Figura 16 – Algoritmo para atualização da malha de simulação

Identificação do caminho potencial da fratura
Divisão nodal no caminho da fratura
Destacamento do domínio de remalhamento
Refinamento anisotrópico próximo à fratura
Refinamento de transição para a região inalterada
Projeção de informações para a nova malha

Fonte: O autor (2020).

A necessidade de atualização é avaliada internamente ao laço de dano (*g-loop*). Após a atualização do dano e possível evolução da abertura da fratura, o algoritmo calcula a posição atual da ponta da fratura com base na solução atual de deslocamentos. A distância entre essa posição e a posição anterior que fora utilizada para a última atualização da malha, Δd , é utilizada como primeiro gatilho de decisão: caso o valor seja maior do que um limiar, a malha é atualizada. Alternativamente, a distância entre a ponta da fratura atual e o último elemento coesivo, $\Delta d'$, é o segundo gatilho: nesse caso, a malha será atualizada se o valor for menor do que um limiar (Figura 17). Observa-se que não é utilizada uma métrica de erro como guia da

adaptação de malha, sendo a parametrização estática e fornecida pelo usuário, via SGP.

Figura 17 – Gatilhos para o processo de atualização da malha de simulação. Δd é a distância entre a posição da ponta fratura no laço de dano anterior e o atual; $\Delta d'$ é a distância até o último elemento coesivo da malha atual.

Fonte: O autor (2020).

3.2.2.1 Caminho potencial da fratura

Assume-se que caminho da fratura é conhecido a priori, tomado como entrada da aplicação. Esse caminho, no entanto, não é conforme à malha original (Figura 18). À medida que o meio observa fragilização, tal caminho é utilizado para o remalhamento do domínio e a delimitação da nova superfície fragilizada. Em implementações futuras, o caminho potencial da fratura deve ser determinado, dinamicamente, em um algoritmo dedicado ao *tracking*, durante o remalhamento.

O caminho potencial da fratura é aplicado na malha de simulação durante o remalhamento, garantindo que arestas da malha estarão alinhadas com o caminho da fratura, à proporção que ele evolui. Essas arestas são identificadas na estrutura de dados, e uma rotina geométrica para divisão nodal separa os graus de liberdade em ambas as faces da fratura (seção 3.2.2.5).

A superfície fragilizada passa a observar danos (perda de coesão local) e consequentes aberturas ou afastamentos. A malha auxiliar (DFN) interpola tais valores em elementos finitos unidimensionais (arestas), conforme seção 3.2.1.4.

Figura 18 – Malha ilustrando, na linha horizontal, verticalmente centrada, o caminho potencial da fratura, não conforme com a malha original.

Fonte: O autor (2020).

3.2.2.2 Destacamento de subdomínio de remalhamento

O algoritmo de remalhamento inicia destacando elementos próximos à fratura que constituirão o subdomínio em que o remalhamento irá atuar. O resto da malha não será alterado, reduzindo a complexidade do problema e o confinando à região da fratura. A linha preta sob o caminho potencial da fratura, na Figura 19a, mostra a fratura atual que deve ser aplicada à malha. Os elementos em cinza definem o subdomínio de remalhamento. A Figura 19b mostra o remalhamento feito na região.

As arestas do subdomínio que fazem fronteira com a malha original não são alteradas para haver um acoplamento perfeito entre as malhas, evitando a criação de nós suspensos na interface (*hanging nodes*). Internamente ao subdomínio, o algoritmo de remalhamento trabalha nas seguintes etapas:

- a) refino anisotrópico paralelo à fratura;
- b) malha de transição;
- c) separação nodal no caminho da fratura;
- d) substituição dos elementos no subdomínio de remalhamento;
- e) projeção de informações para a nova malha.

As seções que seguem descrevem cada etapa.

Figura 19 – Figura a – Malha ilustrando a propagação de uma fratura em parte do caminho potencial da fratura (linha preta) e a seleção de elementos em um raio, definindo o subdomínio de remalhamento. Figura b – Subdomínio remalhado, conservando nós das interfaces.

Fonte: O autor (2020).

3.2.2.3 Refino anisotrópico paralelo à fratura

Uma fratura hidráulica apresenta, tipicamente, alta transmissibilidade longitudinal comparada ao meio contínuo. Dessa forma, o gradiente de pressão no corpo da fratura tende a ser mais homogêneo e linear no eixo longitudinal da fratura do que no eixo transversal, em que ocorre o oposto. Essa observação induz à utilização de malhas anisotrópicas, de forma a reduzir o número de graus de liberdade do problema sem a perda de precisão numérica.

A Figura 20a mostra a malha proposta. Observa-se que, no eixo normal à fratura, os elementos utilizados possuem alta razão de aspecto, e os seus tamanhos seguem uma progressão geométrica para atingir-se um acoplamento suave com a malha de transição. Dessa forma, os elementos próximos à fratura são capazes de representar, com precisão, um alto gradiente normal e um suave gradiente longitudinal.

Tal observação não é válida na ponta da fratura que apresenta, além de um gradiente longitudinal de pressão mais elevado, também concentração de tensão e regimes não lineares de tensões coesivas. Se não bem representadas, a propagação da fratura apresentará erros numéricos elevados. A Figura 20b mostra o refinamento mais detalhado proposto para a ponta da fratura. A seta, na figura, mostra a posição

atual da ponta da fratura determinada, dinamicamente, a partir do resultado do laço de dano anterior. Nessa posição, demanda-se que o algoritmo de remalhamento proporcione maior detalhamento da malha. A estratégia utilizada organiza a largura dos elementos também em uma progressão geométrica, em que o menor elemento é posicionado, precisamente, na ponta da fratura. Na medida em que se afasta, os elementos aumentam para representar o corpo da fratura.

Figura 20 – Figura a – Refinamento anisotrópico, adaptando-se à anisotropia do campo de pressão que ocorre na fratura. Figura b – Refinamento mais detalhado, próximo à ponta da fratura, marcada pela seta.

Fonte: O autor (2020).

É importante considerar cenários de fechamento da fratura, em que a ponta da fratura está recuando, no sentido do poço injetor, por exemplo. Da mesma forma que o processo de criação da fratura, a simulação acurada desses cenários demanda que as tensões, na ponta da fratura, sejam bem representadas e, portanto, a malha deve ser atualizada.

A abordagem proposta depende de parametrização a priori pelo usuário, sendo a mesma estática e independente das características do modelo. Como trabalho futuro, o objetivo é utilizar métricas automáticas, tornando os parâmetros do remalhamento função da dinâmica do problema, minimizando a interferência do usuário e garantindo a minimização do erro numérico.

3.2.2.4 Malha de transição

Entre a malha anisotrópica paralela à fratura e o contorno externo do domínio de remalhamento, estabelece-se uma malha de transição que deve conformar ambas

fronteiras, sem criação de nós suspensos. Um algoritmo *Delaunay*, auxiliado por um campo de dimensionamento, garante uma transição suave em que, além da condição de conformidade, os elementos próximos às extremidades externas tenham tamanhos compatíveis àqueles da malha original (Figura 19b).

3.2.2.5 Separação nodal no caminho da fratura

Os algoritmos de triangulação atribuem uma posição geométrica única a nós em lados opostos, no caminho da fratura (Figura 21a). Para permitir deslocamento independente de cada lado da fratura, o algoritmo duplica os graus de liberdade relativos a esses nós, mantendo a localização geométrica dos mesmos e definindo o plano de fratura (Figura 21b). Feita a diferenciação, o algoritmo de simulação associa as pressões dos graus de liberdade vizinhos, utilizando o método da penalidade, visando a honrar a equação (2.35). Os deslocamentos, por sua vez, são associados empregando forças coesivas, conforme descrito na seção 3.1.2.

Figura 21 – Duplicação dos graus de liberdade alocados aos elementos vizinhos à fratura. Figura a – Malha geométrica. Figura b – Malha processada, com graus de liberdade vizinhos à fratura logicamente duplicados (a posição geométrica não é modificada, a figura separa por clareza).

Fonte: O autor (2020).

A Figura 22 descreve a análise geométrica que identifica como os graus de liberdade serão diferenciados. Para cada nó da fratura, a análise considera a relação entre o ângulo do nó para o centroide de cada elemento vizinho, comparando-o com o ângulo para o próximo nó da fratura. Ângulos positivos (vetores com linha cheia, na Figura 22b) indicam que aos graus de liberdade do elemento devem ser atribuídos

novos valores. Ângulos negativos (vetores com linha tracejada na Figura 22b) indicam que os nós do elemento mantêm os graus de liberdade originais.

Figura 22 – Análise da posição do centroide dos elementos em relação à interface fraturada. Figura a – Círculos representam os nós da fratura, e quadrados representam os centroides dos elementos vizinhos. Figura b – Vetor mais espesso representa a direção da fratura, vetores cheios representam ângulos positivos e vetores tracejados representam ângulos negativos.

Fonte: O autor (2020).

3.2.2.6 Substituição dos elementos no subdomínio de remalhamento

A Figura 23 mostra a malha final, após o refino. Como o algoritmo de remalhamento mantém a geometria dos vértices originais no contorno do subdomínio de remalhamento, a substituição dos elementos originais por aqueles originados no processo de remalhamento é trivial. Atenta-se apenas para a renumeração dos graus de liberdade e identificadores particulares à estrutura de dados, uma vez que devem ser únicos e compatíveis com as estruturas globais.

3.2.2.7 Projeção de informações entre malhas

Os vetores solução do passo de tempo e do laço de dano anterior se referem ao domínio da malha anterior ao remalhamento. A nova malha contém graus de liberdade e elementos distintos, e um processo de projeção (ou mapeamento) é necessário para transferir os vetores referentes às variáveis de campo para a nova estrutura.

Figura 23 – Figura a – Malha final, após remalhamento, com marcações dos domínios e caminhos de fratura. Figura b – A região remalhada em destaque.

Fonte: O autor (2020).

A projeção de informações utiliza projeções de Galerkin globais, conforme exposto na seção 2.3.2.3. A equação 2.31 é avaliada numericamente, calculando as integrais na malha de destino, que é o domínio da função de teste ψ_i . As funções de forma φ_k^g e φ_k^f são avaliadas na posição dos pontos de Gauss da malha de destino, mas utilizam as funções de forma e valores definidos nas respectivas malhas de destino e de origem. Resolve-se o sistema linear resultante, então, para obtenção do vetor projetado na nova malha, g_k , cujos valores são atribuídos aos respectivos graus de liberdade.

É importante notar que o novo vetor de soluções, referente à nova malha, não garante equilíbrio mecânico, porque não passa pela resolução das equações constitutivas do modelo, diferentemente do vetor de soluções de origem. Entretanto, o erro de projeção é pequeno, localizado na região do remalhamento, próxima à fratura, e se dissipa rapidamente.

3.2.2.8 Parametrização do algoritmo

Esta seção resume, brevemente, os parâmetros de controle do algoritmo de remalhamento, apontando didaticamente as figuras em que o significado dos mesmos fica claro. Os parâmetros são tomados como entrada do usuário via SGP.

Parâmetro	Descrição
<i>remesh_enable</i>	Habilita o remalhamento.
<i>area_radius</i>	Distância máxima da fratura em que haverá remalhamento (Figura 19).
<i>critical_distance</i> ($\Delta d'$)	Gatilho para remalhamento: distância entre a ponta da fratura atual e o último elemento coesivo à frente. (Figura 17)
<i>critical_distance_from_last_tip</i> (Δd)	Gatilho para remalhamento: distância entre a ponta da fratura atual e a última posição da mesma (Figura 17).
<i>refine_step</i>	Uma vez atingido o gatilho, define a distância que a fratura avança.
<i>local_refine_l0</i>	Espessura do primeiro elemento normal à fratura (Figura 20a).
<i>local_refine_levels</i>	Número de elementos anisotrópicos paralelos à fratura, com crescimento em progressão geométrica de raiz 2 (Figura 20a).
<i>frac_tip_dx</i>	Tamanho do elemento na ponta da fratura (Figura 20b).
<i>frac_neck_dx</i>	Tamanho máximo dos elementos da fratura, distantes da ponta (Figura 20b).
<i>frac_pg_q</i>	Razão da progressão geométrica que definirá a evolução do tamanho dos elementos que se afastam da ponta da fratura. A progressão inicia em <i>frac_tip_dx</i> até <i>frac_neck_dx</i> (Figura 20b).

3.3 ORGANIZAÇÃO DA APLICAÇÃO COMPUTACIONAL

Com o aumento da complexidade dos simuladores e do detalhamento dos domínios, eficiência computacional é vital. Este trabalho foi desenvolvido com programação orientada a objetos, em C++, utilizando bibliotecas de código aberto de alto desempenho e de estabilidade comprovadas na literatura. Para validação do código, sistemas auxiliares de configuração, geração de malhas e *solvers* analíticos foram incorporados ao escopo do projeto. As seções, a seguir, descrevem os principais elementos com ambiente computacional utilizado.

3.3.1 Bibliotecas próprias

Esta seção descreve alguns módulos próprios que foram implementados para tornar ágil a depuração e teste do simulador. O desenvolvimento de módulos robustos

demanda testes unitários abrangentes, com interfaces coesas, de forma a permitir o acoplamento do sistema global e identificar, rapidamente, os erros.

3.3.1.1 Historiador (*Log*)

Um historiador deve garantir a depurabilidade de um sistema. Durante o desenvolvimento de uma aplicação computacional, é importante confiar, a módulos dedicados, a externalização de fluxos improváveis ou certamente falhos para identificação e correção dos erros. O historiador fornece ferramentas para identificar esses fluxos, em tempo de execução, e comunicar ao desenvolvedor, com clareza e completude, o contexto em que ocorreram.

No historiador desenvolvido, o fluxo principal registra verificações em pontos importantes do fluxo, em tempo de execução. Em caso de falha de uma verificação, o historiador comunica ao usuário e, se necessário, interrompe a execução.

Além disso, possui as seguintes funcionalidades:

- a) externar mensagens de informações, avisos e erros de forma padronizada;
- b) externar mensagens de depuração em diversos níveis;
- c) facilitar a localização das linhas e arquivos em que as mensagens foram geradas;
- d) identificar o nó de processamento que emite cada mensagem;
- e) permitir a saída de forma crítica da aplicação, integrando com o depurador *gdb*;
- f) centralizar o tratamento e direcionamento das mensagens da aplicação;
- g) aferir o desempenho dos módulos para identificar gargalos (*profiling*);
- h) direcionar as mensagens para arquivos individualizados de cada nó de processamento.

As tarefas do historiador não devem impactar, significativamente, o desempenho do sistema, dispondo de modos de compilação otimizados em que os testes de consistência são reduzidos. O código proposto dispõe de dois modos de compilação: otimizado (*opt*) e depuração (*dbg*). A utilização desses modos é controlada pelo sistema de automação da compilação e teste (seção 3.3.1.5).

3.3.1.2 Sistema Global de Propriedades (SGP)

O Sistema Global de Propriedades visa a configurar a simulação em tempo de execução, externamente ao código fonte, de modo a minimizar a necessidade de recompilação do sistema, que é um processo custoso. As propriedades do SGP são definidas em um arquivo nativo do sistema chamado *“namespace.in”*. Cada propriedade assume um valor padrão, descrição, métodos de validação e *fallbacks*.

Os *fallbacks* organizam as propriedades em cadeias ordenadas que o sistema deve consultar, sequencialmente, até encontrar o valor demandado pelo fluxo de simulação. A validação é executada cada vez que o valor da propriedade é alterado, de forma a garantir e manter a configuração do sistema válida, informando ao usuário tão logo os equívocos sejam identificados.

O usuário pode configurar o SGP com um arquivo *“usuario.in”*, ou pela linha de comando. Os parâmetros da linha de comando são soberanos e, em geral, configurados com *fallbacks*, em propriedades do sistema, de forma a estabelecer uma hierarquia entre as propriedades.

Na configuração da execução, algumas propriedades, como condições de contorno e controle numérico, podem ser associadas a um determinado passo de tempo, de forma que o sistema só irá aplicá-las quando a simulação atingir esse tempo.

Algumas propriedades controlam o fluxo do simulador permitindo modos de execução específicos. É o caso do modo de execução *“debug_mesh”* que interrompe a simulação após o remalhamento e permite ao desenvolvedor observar a malha gerada em passos internos. É possível controlar as bibliotecas de terceiros, utilizando propriedades como *“petsc_matrix_view”* que abrem uma interface gráfica, representando a matriz montada antes de chamar o *solver*.

3.3.1.3 Manipulação de malhas

O sistema de manipulação de malhas gera e atualiza as malhas, utilizando a biblioteca auxiliar CGAL. Dispõe, também, de ferramentas de análise geométrica do espaço de aproximação, localizando elementos de interesse, graus de liberdade geometricamente localizados, calculando dimensões, entre outros. Essa biblioteca

faz, ainda, o tratamento e a conversão da estrutura de dados da biblioteca CGAL para a estrutura de dados da biblioteca *libMesh*, e vice-versa.

A criação das malhas é feita no módulo *MeshFoundary*, que dispõe de alguns modelos paramétricos de malha para geração dinâmica. Um modelo, por exemplo, é o “*single_frac*”, que define um modelo retangular com uma fratura única na margem esquerda. Alguns parâmetros do modelo são a largura e altura do domínio e o comprimento da fratura.

A atualização da malha de simulação ocorre segundo a estratégia adaptativa proposta. O sistema faz a atualização da malha a partir de uma resposta transiente. Após a atualização da malha, faz a transferência de informações da malha antiga para a nova, de modo que o fluxo de simulação global possa continuar de maneira transparente. Os algoritmos são detalhados na seção 3.2.2.

3.3.1.4 Explorador

O explorador (*Probe*) extrai informações dos sistemas de elementos finitos. Um explorador é definido por uma linha, no espaço de aproximação, que é percorrida, periodicamente, pelo *solver* para coletar resultados e gerar relatórios. Se produzem, assim, tabelas em formatos de texto, separadas por tabulações, indexadas pela coordenada espacial e pelo tempo. O objetivo é permitir o pós-processamento em aplicações externas, como *Excel* ou *Matlab*.

O explorador é interligado ao sistema de testes unitários para validação de rodadas de simulação, que podem ser comparadas com rodadas de referência, gerando estados de sucesso ou falhas, dependendo do desvio observado.

3.3.1.5 Automação da compilação, teste e depuração

O projeto é compilado e depurado utilizando a ferramenta GNU *Make*, que facilita o encadeamento de dependências e automatização de processos. É uma ferramenta tradicional dos sistemas Unix, criada ainda em 1976, e utilizada por muitos projetos nela baseados até hoje. O simulador foi configurado para compilação e testes automatizados e modulares.

Um pequeno módulo de configuração do ambiente de execução foi inserido com o objetivo de direcionar, de forma semiautomática, a instalação das dependências necessárias.

O sistema de automação da compilação e teste dispõe de dois modos:

- a) depuração (*dbg*), que visa ao armazenamento de informações de depuração e verificações, em tempo de execução, em detrimento do desempenho computacional;
- b) otimizado (*opt*), que visa ao desempenho computacional, tornando o código de máquina mais enxuto e menos rico em informações de depuração.

Esse sistema automatiza, também, a geração da documentação do código, a configuração personalizada da ferramenta de depuração *GNU gdb*, os casos de teste, configuração do ambiente de compilação e a instalação de dependências.

3.3.1.6 Testes unitários

O sistema de testes unitários é parte do sistema automatizado de compilação e teste. Ele é organizado em bancos de teste (*testbenches*) que são os programas principais (executáveis) e permitem testar módulos individualmente ou o sistema integralmente. Cada caso de teste (*testcase*) utiliza um banco de teste unitário, permitindo, assim, realizar de forma automatizada e simples, a validação completa do sistema. Os *testbenches* são compartilhados por vários *testcases*.

O sistema de teste é implementado em *Perl*, uma linguagem de alto nível que permite fácil manipulação de texto e adiciona flexibilidade para controlar a aplicação principal e analisar seus resultados. O sistema recebe, como parâmetros de entrada, os limiares críticos e desvios moderados de aceitação dos resultados de cada teste. Assim, é possível validar, de forma automática, se os testes unitários continuam produzindo os resultados esperados após atualizações no código fonte.

O sistema de testes organiza os arquivos de saída, mantendo o sistema saneado. Permite, ainda, a temporização dos testes e o pós-processamento automático dos resultados.

3.3.1.7 Pós-processamento

Para o pós-processamento, além do *Paraview* (seção 3.3.2.5), foi desenvolvida uma interface simples, utilizando a biblioteca de código aberto *Qt* (seção 3.3.2.7). A interface gráfica criada torna mais ágil a interação com a malha de simulação, tendo uma interface, sem intermediários, com o núcleo de simulação. É possível, por exemplo, localizar, visualmente, elementos na malha (arestas e nós marcados), como condições de contorno ou elementos vizinhos à fratura. É possível, também, interagir com a malha utilizando o movimento do mouse, identificando elementos, coordenadas e graus de liberdade sob o cursor.

3.3.2 Bibliotecas auxiliares utilizadas

Em vista de eficiência e facilidade, foram escolhidas bibliotecas de código aberto para realizar rotinas consolidadas, como operações matriciais fundamentais, triangulação de Delaunay, pré-condicionamento de matrizes e outras.

3.3.2.1 *The Computational Geometry Algorithms Library* (CGAL)

A CGAL é uma biblioteca fundada em 1996, com a união de diversos parceiros da Europa e Israel (FABRI et al., 2000). Atualmente, é utilizada em diversas áreas do conhecimento, especialmente relacionadas à modelagem computacional e processamento de imagens. Possui um grupo de desenvolvimento qualificado e disponível para sanar dúvidas de usuários e possíveis incorreções do código interno.

A CGAL apresenta algoritmos aritméticos, combinatórios e geométricos, entre outros. Ela é desenvolvida em C++, o que torna transparente a integração com o código desenvolvido neste projeto. Foi utilizada para a geração e customização das malhas, com os módulos de triangulação Delaunay 2D e as técnicas de refino de malha da biblioteca que permitem a utilização de um campo de dimensionamento de elementos para obter malhas mais refinadas, próximo à ponta da fratura, por exemplo.

3.3.2.2 *libMesh Library*

A *libMesh* foi proposta, inicialmente, em 2002, na Universidade do Texas, em Austin (Estados Unidos) e conta com contribuições recentes de diversas

universidades e equipes internacionais. Hoje, dispõe de uma lista de discussão ativa, para suporte aos usuários e interação entre os desenvolvedores.

A *libMesh* é uma biblioteca desenvolvida em C++ que provê um ambiente para simulação numérica em elementos finitos, integrada a um ambiente orientado a objetos e altamente paralelizável (KIRK et al., 2006).

Dentre as funcionalidades oferecidas, estão simulações 1D, 2D e 3D, estáticas ou transientes, suporte a um grande número de elementos geométricos (triângulos, quadriláteros, tetraedros de diversas ordens, por exemplo), interpoladores, integração por quadratura de Gauss, adaptatividade de malha, exportação das malhas em formatos padrão para pós-processamento e outros

3.3.2.3 *Message Passing Interface (MPI)*

A *libMesh* integra diversos *solvers* numéricos como o PETSc e o MUMPS. Todas utilizam o processamento paralelo, empregando o padrão MPI – *Message Passing Interface*. Trata-se de um padrão internacional de processamento paralelo, fundado no início dos anos 1990, e que, atualmente, é implementado por diversos *softwares* e em diversos sistemas operacionais (GROPP et al., 1996). O MPI permite o processamento com memória compartilhada (em um único nó de processamento) ou em memória distribuída (vários nós de processamento interligados em rede).

3.3.2.4 *Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation (PETSc)*

A PETSc teve sua primeira versão em 1991 e, hoje, tem uma grande base de usuários e lista de discussões ativas (ABHYANKAR et al., 2018).

A biblioteca implementa um conjunto de estruturas de dados e rotinas para modelagem numérica e aplicações científicas, buscando resolver sistemas de grande escala. Ela implementa *solvers* lineares e não-lineares, pré-condicionadores, além de outros recursos, com interfaces-padrão (APIs), de forma a ser muito simples de alternar entre tipos e parâmetros de *solvers*, mesmo em tempo de execução.

Além disso, recentemente, a PETSc passou a suportar não apenas a interface MPI, mas também pode obter vantagem de *hardwares* específicos como Unidades de Processamento Gráfico (GPUs) e sistemas híbridos (MPI-GPU).

3.3.2.5 ParaView

O pós-processamento externo é feito no *software* de código aberto ParaView (AHRENS; GEVECI; LAW, 2005) cuja primeira versão foi lançada em 2002. A ferramenta se mostrou muito eficiente para processamento e análise de grande quantidade de dados, com uma interface objetiva e estável, oferecendo filtros para observar os resultados da simulação sob diversas perspectivas, exportar dados e imagens, entre outros.

3.3.2.6 Doxygen

O sistema de documentação Doxygen foi utilizado para documentação e organização do código em um sistema padrão. O Doxygen foi lançado, inicialmente, em 1997, e se tornou uma das ferramentas mais comumente utilizadas, na indústria, para documentação de códigos-fonte. É uma ferramenta muito estável e de simples utilização que gera a documentação do código em disposições visuais facilmente navegáveis.

3.3.2.7 Qt

O Qt é uma biblioteca gráfica de código aberto, criada em 1995, e muito utilizada, atualmente, para desenvolvimento gráfico. É uma biblioteca muito eficiente e estável, que se mostrou útil para a visualização e interação com os modelos numéricos durante a depuração do código, além do pré e pós-processamento.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Esta seção aborda os principais resultados gerados até o momento, em vista da validação dos modelos propostos. A validação tratou, inicialmente, apenas o meio contínuo poroelástico linear, utilizando como referência o problema de consolidação de Terzaghi e problema de Mandel (CHENG, 2016; WANG, 2000). Em um segundo momento, buscou-se a validação da propagação de uma fratura hidráulica em condições de filtração distintas. Por fim, observou-se a dinâmica de fechamento da fratura após um teste de fraturamento.

4.1 CAMPO DE TENSÃO AO REDOR DE UM POÇO

Este ensaio simula a concentração de tensão ao redor de um poço perfurado em uma região submetida a carga de tensões assimétrica. Nesses casos, há uma distorção do campo de tensões na região que podem ser calculadas analiticamente. Por causa da ausência de material como consequência da perfuração, essa região não suporta mais a tensão regional e há uma concentração de tensão na parede do poço (Figura 24).

Figura 24 – Figura a – Diagrama de um reservatório com um poço sujeito a tensões confinantes assimétricas ($\sigma_h < \sigma_H$). Figura b – Concentração de tensões esperadas ao redor do poço, com compactação em excesso acima e abaixo e tendência à tração à esquerda e direita.

Fonte: O autor (2020).

4.1.1 Solução analítica

Zoback (2010) apresenta as equações de Kirsch (1898) para cálculo analítico das tensões ao redor de um poço, em coordenadas polares (r, θ):

$$\sigma_{rr} = 0,5 (\sigma_H + \sigma_h - 2 * P_p) \left(1 - \frac{r_w^2}{r^2}\right) + 0,5(\sigma_H - \sigma_h) \left(1 - 4 \frac{r_w^2}{r^2} + 3 \frac{r_w^4}{r^4}\right) \cos 2\theta + P_p \frac{r_w^2}{r^2} \quad (4.1)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 0,5 (\sigma_H + \sigma_h - 2 * P_p) \left(1 + \frac{r_w^2}{r^2}\right) - 0,5(\sigma_H - \sigma_h) \left(1 + 3 \frac{r_w^4}{r^4}\right) \cos 2\theta - P_p \frac{r_w^2}{r^2} \quad (4.2)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0,5(\sigma_H - \sigma_h) \left(1 + 2 \frac{r_w^2}{r^2} - 3 \frac{r_w^4}{r^4}\right) \sin 2\theta \quad (4.3)$$

4.1.2 Resultados numéricos

O modelo foi executado em condições drenadas (pressão constante), de forma a obter, obrigatoriamente, um campo de pressões homogêneo, honrando as condições de contorno impostas.

A Tabela 1 apresenta os parâmetros utilizados, a Figura 25 os resultados numéricos concordantes com a solução analítica e a Figura 26 apresenta a malha utilizada na simulação. Observam-se, conforme esperado, tensões positivas (estado de tração) nos ângulos próximos à horizontal (0° e 180°), e tensões, significativamente mais compressivas, nos ângulos próximos à vertical (-90° e 90°). Durante a perfuração de poços, essas anomalias são observadas em fraturas por tração e desmoronamento de poço (*breakouts*), respectivamente (ROCHA; AZEVEDO, 2009; ZOBACK, 2010).

Tabela 1 – Parâmetros utilizados na simulação de um reservatório com um poço sob carga assimétrica.

Parâmetro	Valor
σ_h	-1 MPa
σ_H	-10 MPa
G	$7,08 \text{ GPa}$
ν	$0,2$

Figura 25 – Tensão circunferencial ou tangencial (*hoop stress*) ao redor de um poço em uma região submetida a uma carga assimétrica. Figura a – Vista areal com destaque para as linhas de isotensões circunferenciais. Figura b – Resultados numéricos concordantes com a solução analítica.

Fonte: O autor (2020).

Figura 26 – Malha de simulação utilizada para cálculo do campo de tensão ao redor de um poço.

Fonte: O autor (2020).

4.2 CAMPO DE TENSÃO NA PONTA DE UMA FRATURA

Este ensaio valida os resultados numéricos em um modelo com uma fratura no centro que é submetido à tração nas extremidades (Figura 27 e 28). É um problema

de mecânica de fratura com solução analítica conhecida (NORTON, 2004; SCHIJVE, 2001).

4.2.1 Solução analítica

A solução analítica considera um modelo de fratura de largura a , no centro de uma superfície de largura b , utilizando um eixo de simetria na origem da fratura. Para esse caso, segundo Schijve (2001), o fator de intensidade de tensão K pode ser aproximado por:

$$\beta = \sqrt{\frac{\tan\left(\frac{\pi a}{b}\right)}{\frac{\pi a}{b}}} \quad (4.4)$$

$$K = \beta \sigma_v \sqrt{\pi a} \quad (4.5)$$

Figura 27 – Diagrama do modelo utilizado para validação da tensão na ponta de uma fratura.

Fonte: O autor (2020).

Figura 28 – Malha de simulação utilizada para cálculo do campo de tensão na ponta de uma fratura.

Fonte: O autor (2020).

e o tensor de tensões:

$$\sigma_{xx} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (4.6)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (4.7)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (4.8)$$

4.2.2 Resultados numéricos

O modelo foi simulado em condições drenadas, de forma a garantir pressão nula no domínio. A Tabela 2 apresenta os parâmetros mecânicos utilizados, e a Figura 29 apresenta os resultados numéricos e analíticos em concordância.

Tabela 2 – Parâmetros utilizados na validação do cálculo da concentração de tensão na ponta de uma fratura.

Parâmetro	Valor
σ_v	1 MPa
G	7,08 GPa
ν	0,2
b	50 m
a	10 m

Figura 29 – Resultados analíticos e numéricos, em coordenadas polares, para o problema de concentração de tensão na ponta de uma fratura.

Fonte: O autor (2020).

4.3 PROBLEMA DE CONSOLIDAÇÃO DE TERZAGHI

Um teste unitário valida a poroelasticidade linear e compara com a solução analítica do problema de consolidação de Terzaghi (CHENG, 2016; WANG, 2000). Trata-se de um problema unidimensional que consiste em aplicar uma carga mecânica em um meio de dimensões laterais infinitas e saturado com fluido. Não são considerados efeitos gravitacionais.

A carga mecânica é aplicada em um lado hidraulicamente aberto para a atmosfera ($p = 0$). O lado oposto está selado ($\nabla p = 0$) e apoiado, de forma que o deslocamento é prescrito e nulo. A Figura 30 mostra um diagrama do problema. Na Figura, σ_v é a compressão aplicada em $t = 0^+$.

4.3.1 Solução analítica

Cheng (2016) apresenta a solução para o problema de consolidação de Terzaghi. A equação analítica para a pressão é:

$$p(h, t) = \frac{\sigma_v \eta}{GS} F_1(h^*, t^*) \quad (4.9)$$

$$F_1(h^*, t^*) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{h^*}\right) e^{-m^2\pi^2 t^*} \quad (4.10)$$

Figura 30 – Diagrama e malha de simulação utilizada no problema de consolidação (ou adensamento) de Terzaghi. A compressão σ_v é aplicada em uma interface drenada do domínio, enquanto as demais interfaces são não-drenadas e com deslocamento x ou y prescritos. O eixo h é traçado, na Figura, como referência para observação dos resultados.

Fonte: O autor (2020).

$$h^* = \frac{h}{H} \qquad t^* = \frac{c t}{4h^2} \qquad (4.11)$$

Para o deslocamento vertical, a solução analítica é:

$$u_v = \frac{\sigma_v H}{2G} \left[\frac{1-2\nu_u}{1-\nu_u} (1 - h^*) + \frac{\nu_u - \nu}{(1-\nu_u)(1-\nu)} F_2(h^*, t^*) \right] \qquad (4.12)$$

$$F_2(h^*, t^*) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{8}{m^2 \pi^2} \cos\left(\frac{m \pi h^*}{2}\right) (1 - e^{-m^2 \pi^2 t^*}) \qquad (4.13)$$

4.3.2 Resultados numéricos

A Tabela 3 lista os parâmetros utilizados para a validação dos resultados numéricos. Os passos de tempo são organizados em uma progressão geométrica e saturação em um valor máximo (dt_{max}), conforme a parametrização destacada na tabela. O objetivo é garantir maior discretização temporal durante o transiente inicial, minimizando erros.

Tabela 3 – Parâmetros utilizados na validação do simulador, utilizando o problema de consolidação de Terzaghi.

Parâmetro	Valor
G	28,6 GPa
ν	0,32
S_{ϵ}	10^{-11}
α	0,32
k	$10^{-15} m^2 \cong 1 mD$
μ	$10^{-3} Pa.s \cong 1 cp$
H	100 m
dt_0	0,001 s
dt_n	$dt_n = 2 . dt_{n-1}$
dt_{max}	30 s
σ_v	-10 MPa

As Figuras 31 e 32 apresentam a concordância entre os resultados analíticos e a aproximação numérica para a pressão e para o deslocamento vertical, respectivamente. Pequenos erros numéricos são observados, em passos de tempo iniciais, devido à transição abrupta, em degrau, do estado relaxado para a carga plena. Observa-se um erro maior durante o transiente inicial, mas a solução converge para o estado de equilíbrio analítico nos *timesteps* seguintes.

Figura 31 – Validação do *solver* poroelástico linear com o teste de consolidação de Terzaghi: solução para o deslocamento vertical. O eixo horizontal mostra a distância com relação ao lado.

Fonte: O autor (2020).

Figura 32 – Validação do *solver* poroelástico linear com o teste de consolidação de Terzaghi: solução para o deslocamento vertical. O eixo horizontal mostra a distância com relação ao lado.

Fonte: O autor (2020).

4.4 PROBLEMA DE MANDEL

Diferentemente do problema de Terzaghi, o problema de Mandel contempla aspectos bidimensionais da poroelasticidade linear, com uma compressão vertical, acarretando fluxos horizontais. A compressão é aplicada em uma superfície rígida, com deslocamento vertical idêntico em todas as posições (Figura 33). Como a resposta à compressão é distribuída, a solução apresenta aspectos não-monotônicos.

Inicialmente, a pressão é uniforme e o sistema responde, uniformemente, à carga. À medida que o fluido é drenado pelas laterais do modelo, a pressão da parte central do modelo fica mais elevada do que a pressão nas laterais, e a resposta mecânica é lateralmente diferenciada. Com a evolução temporal, o fluido tende a ser completamente drenado do sistema, a pressão volta a ser constante em todo o domínio e a resposta mecânica do sistema volta a ser homogênea. Esse comportamento é evidenciado nos resultados numéricos.

Figura 33 – Diagrama e malha de simulação utilizadas para o problema de Mandel. A compressão σ_v é aplicada em uma interface rígida do domínio. As interfaces laterais são drenadas, a interface oposta é não-drenada e possui deslocamento vertical prescrito nulo.

Fonte: O autor (2020).

4.4.1 Solução analítica

Wang (2000) apresenta a solução para o problema de consolidação de Terzaghi. A equação analítica para a pressão é:

$$p(x, t) = \frac{2 \sigma_v}{A_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_k}{\lambda_k - \sin \lambda_k \cos \lambda_k} \left(\cos \frac{\lambda_k x}{L} - \cos \lambda_k \right) e^{-\frac{\lambda_k^2 c t}{L^2}} \quad (4.14)$$

onde λ_k são as raízes da equação

$$\frac{\tan \lambda_k}{\lambda_k} = \frac{A_1}{A_2} \quad (4.15)$$

onde

$$A_1 = \frac{3}{(B + v_u)^2} = \alpha \frac{1-2\nu}{\nu_u - \nu} \quad A_2 = 2\eta = \alpha \frac{1-2\nu}{1-\nu} \quad (4.16)$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1-\nu}{\nu_u - \nu}$$

Os deslocamentos verticais e horizontais são calculados conforme:

$$u_x(x, t) = -\frac{\nu \sigma_v}{2 G x} + \frac{\sigma_v}{G} \sum_{k=1}^{\infty} \left[x \nu_u \frac{\sin \lambda_k \cos \lambda_k}{\lambda_k - \sin \lambda_k \cos \lambda_k} - L \frac{\cos \lambda_k}{\lambda_k - \sin \lambda_k \cos \lambda_k} \sin \left(\frac{x \lambda_k}{L} \right) \right] e^{-\frac{\lambda_k^2 c t}{L^2}} \quad (4.17)$$

$$u_y(y, t) = y \left[\frac{\sigma_v (1-\nu)}{2 G} + \frac{\sigma_v (1-\nu_u)}{G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_k \cos \lambda_k}{\lambda_k - \sin \lambda_k \cos \lambda_k} e^{-\frac{\lambda_k^2 c t}{L^2}} \right] \quad (4.18)$$

A equação (4.15) é resolvida, iterativamente, pelo método de Newton para obtenção das diversas raízes, conforme a Figura 34. Foi utilizado um amortecimento de 0,5 nas iterações Newtonianas, tendo em vista as características da função.

Figura 34 – Algoritmo do *solver* para determinação das raízes para a solução analítica de Mandel

Calcula raízes
$\lambda_{ref} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$
Laço de raízes: Para n de 1 a $N_{raízes}$
$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_{ref}$
Laço de Newton: Para k de 1 a max_newton
$f = \tan \lambda_k - \frac{A_1}{A_2} \lambda_k \quad f' = \frac{1}{\cos^2 \lambda_k} - \frac{A_1}{A_2}$
$\lambda_k = \lambda_k - 0,5 \frac{f}{f'}$
Se $\ \lambda_k - \lambda_{k-1}\ < tolerância$
então: sai do laço de Newton (encontrou nova raiz)
senão: $\lambda_{k-1} = \lambda_k$ (continua em nova iteração de Newton)
Registra raiz λ_k
$\lambda_{ref} = \lambda_{ref} + \pi$

Nota: ε é um valor infinitesimal, foi considerado $\varepsilon = 10^{-10}$

Fonte: O autor (2020).

4.4.2 Resultados numéricos

A Tabela 4, a seguir, lista os parâmetros utilizados para a obtenção de resultados numéricos. Os passos de tempo são organizados em uma progressão geométrica e saturação em um valor máximo (dt_{max}), conforme a parametrização destacada na tabela. O objetivo é garantir maior discretização temporal durante o transiente inicial, minimizando erros. A Figura 35 apresenta a concordância entre os resultados analíticos e a aproximação numérica para a pressão e para o deslocamento vertical.

Tabela 4 – Parâmetros utilizados na validação do simulador, utilizando o problema de Mandel.

Parâmetro	Valor
G	28,6 GPa
ν	0,32
S_ε	10^{-11}
α	0,32
k	$10^{-15} m^2 \cong 1 mD$
μ	$10^{-3} Pa.s \cong 1 cp$
H	5 m
L	10 m
dt_0	0,0001 s
dt_n	$dt_n = 2 \cdot dt_{n-1}$
dt_{max}	5 s
σ_v	-10 MPa

Figura 35 – Validação do *solver* poroelástico linear com o problema de Mandel.

Fonte: O autor (2020).

4.5 PROPAGAÇÃO DA FRATURA EM REGIME *STORAGE-TOUGHNESS*

A propagação de fraturas foi validada, considerando os procedimentos descritos em Carrier e Granet (2012) e Manzoli et al. (2019). Considera-se um modelo retangular, com um termo fonte nodal de vazão no centro, à esquerda (Figura 36). Os elementos coesivos são posicionados em um caminho preestabelecido, horizontal, no centro do modelo. A fratura se desenvolve, nesse caminho, como consequência do aumento localizado da pressão, no entorno do termo fonte. O domínio é submetido à tensão confinante σ_v , e não há tensão confinante horizontal. A altura da fratura é assumida constante, conforme premissas do modelo KGD.

O caso assintótico *storage-toughness* é caracterizado por baixa filtração na fratura, de forma que a parte mais significativa do fluido injetado é acomodado pelo aumento do volume da fratura.

Figura 36 – Modelo utilizado para validação do algoritmo de fratura.

Fonte: O autor (2020).

4.5.1 Solução analítica

Bunger, Detournay e Garagash (2005) apresentam solução analítica para fraturas KGD em regime *storage-toughness* com filtração. Abaixo, as equações utilizadas:

a) constantes fundamentais:

$$\begin{aligned}
 E &= 2 G (1 + \nu) & G_c &= \frac{1}{2} \sigma_t'' w_c & K_{Ic} &= \sqrt{G_c E'} \\
 E' &= \frac{E}{(1 - \nu^2)} & \mu' &= 12 \mu & K' &= 4 K_{Ic} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
 C' &= 2 C_l & \varepsilon &= \frac{C'^2}{q_0} & L &= \left(\frac{K' q_0}{E' C'^2} \right)^2
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

b) tempo adimensional:

$$t_* = \frac{K'^4 q_0^2}{E'^4 C'^6} \quad \tau = \frac{t}{t_*} \tag{4.20}$$

c) constantes do modelo:

$$\begin{aligned}
\beta &= 2/3 & \alpha &= 1/6 \\
\gamma_i &= [0,9324 \quad -1,714 \quad 2,196 \quad -1,863 \quad 0,7093] \\
\gamma(\tau) &= \tau^\beta \sum_{i=0}^n \gamma_i \tau^{\alpha i} & \Pi &= 2^{-5/2} \gamma^{-1/2} & \Omega &= 2^{-\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

d) pressão, abertura, comprimento da fratura:

$$p = \varepsilon E' \Pi \quad w = L \Omega \quad l = L \gamma \tag{4.22}$$

Para o caso *storage-toughness*, a constante de filtração de Carter C_l é mínima. Foi utilizado o valor 1,4E-5 obtido, por regressão, em Carrier e Granet (2012).

4.5.2 Resultados numéricos

A Tabela 5 apresenta os parâmetros mecânicos e hidráulicos, a Tabela 6 apresenta os parâmetros de remalhamento e a Figura 37 e 38 apresentam, respectivamente, a evolução malha de elementos finitos utilizados na simulação e o detalhe da malha na ponta da fratura. A Figura 39 apresenta os resultados obtidos para a abertura e comprimento da fratura que comparam, satisfatoriamente, com a solução analítica.

Observa-se que não é necessário, na estratégia de simulação utilizada, reduzir a coesão do primeiro nó da fratura, diferentemente do sugerido pelos trabalhos utilizados como referência. O simulador não apresentou problemas de estabilidade numérica relacionados à nucleação inicial fratura.

A Figura 40 mostra a tensão efetiva vertical de Terzaghi σ''_{yy} , calculada na extensão da fratura para o tempo 2,3s, evidenciando a zona coesiva na ponta da fratura até o limite de resistência do material $\sigma_t'' = 1,25 MPa$. Além da ponta da fratura, observa-se redução da tensão σ''_{yy} , assintótica ao campo global de tensões, à medida que se afasta da fratura. A Figura 41 apresenta a geometria da fratura e a perturbação do campo de pressões ao redor da mesma, em dois momentos distintos.

Tabela 5 – Parâmetros utilizados na validação do simulador, utilizando a propagação de uma fratura em regime *storage-toughness*.

Parâmetro	Valor
G	7,083 GPa
ν	0,2
S_ϵ	$1,45 \cdot 10^{-11}$
α	0,75
k	$10^{-16} \text{ m}^2 \cong 100 \mu D$
μ	$10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s} \cong 0,1 \text{ cp}$
σ_t''	1,25 MPa
G_f	120 Pa . m
q_0	$0,001 \text{ m}^2/\text{s}$
σ_v	-5 MPa
dt_0	0,1 s
dt_n	$dt_n = 2 \cdot dt_{n-1}$
dt_{max}	1 s

Tabela 6 – Principais parâmetros do remalhamento adaptativo utilizados na validação do simulador, utilizando a propagação de uma fratura em regime *storage-toughness*.

Parâmetro	Valor
<i>area_radius</i>	10 m
<i>critical_distance_from_last_tip</i> (Δd)	0,02 m
<i>refine_step</i>	0,2 m
<i>frac_tip_dx</i>	0,01 m
<i>frac_neck_dx</i>	0,3 m
<i>frac_pg_q</i>	1,1 m
<i>local_refine_l0</i>	0,001 m
<i>local_refine_levels</i>	4

Figura 37 – Malha e condições de contorno utilizadas para validação do algoritmo de fraturamento. À direita, o detalhe da região em que o remalhamento é feito progressivamente.

Fonte: O autor (2020).

Figura 38 – Detalhe da discretização de malha na região da ponta da fratura

Fonte: O autor (2020).

Figura 39 – Resultados numéricos e analíticos para o regime *storage-toughness*.

Fonte: O autor (2020).

Figura 40 – Tensão efetiva de Terzaghi, na seção transversal da fratura ($t=3,5s$), mostrando a zona de coesão na ponta.

Fonte: O autor (2020).

Figura 41 – Geometria da fratura em diversos passos de tempo. As linhas no gráfico são isobáricas e mostram, graficamente, o gradiente do campo de pressão de poros na região da fratura.

Fonte: O autor (2020).

4.6 PROPAGAÇÃO DA FRATURA EM REGIME *LEAKOFF-TOUGHNESS*

O modelo utilizado, nesse caso, é o mesmo da seção anterior, mas a permeabilidade do meio é maior, de forma a tornar a difusão hidráulica, no meio, significativa e com influência na propagação da fratura. Mantendo a coerência com os trabalhos tomados como referência, a tensão a que o meio é submetido também é aumentada (CARRIER; GRANET, 2012; MANZOLI et al., 2019). O caso assintótico *leakoff-toughness* é caracterizado por significativa filtração de fluidos pela parede da fratura, de forma que o fluido injetado é acomodado tanto pelo aumento do volume da fratura quanto pela penetração do fluido na formação.

4.6.1 Resultados numéricos

Os parâmetros utilizados são listados na Tabela 7. Os parâmetros de remalhamento são os mesmos apresentados para o caso *storage-toughness* (seção 4.5, Tabela 6).

Tabela 7 – Parâmetros utilizados na validação do simulador, utilizando a propagação de uma fratura em regime *leakoff-toughness*.

Parâmetro	Valor
G	7,083 GPa
ν	0,2
S_e	$1,45 \cdot 10^{-11}$
α	0,75
k	$5 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2 \cong 5 \text{ mD}$
μ	$10^{-4} \text{ Pa.s} \cong 0,1 \text{ cp}$
σ_t''	1,25 MPa
G_f	120 Pa . m
q_0	$0,001 \text{ m}^2/\text{s}$
σ_v	-5 MPa
dt_0	0,3 s
dt_n	$dt_n = 2 \cdot dt_{n-1}$
dt_{max}	5 s
Gatilho para remalhamento (Δd)	0,05 m
Passo de remalhamento	0,2 m

A Figura 42 apresenta os resultados obtidos, concordantes com os resultados obtidos por Carrier (2012), mas com desvio na abertura da fratura obtida por Manzoli (2019). Esse desvio é explicado pela diferença no algoritmo de evolução de dano utilizado por Manzoli (2019). A Figura 43 mostra a geometria da fratura e a perturbação no campo de pressão. Observa-se que, devido à maior permeabilidade do meio, o campo de pressão é mais suave e apresenta geometria radial mais bem definida do que no caso *storage-toughness*, conforme esperado.

Figura 42 – Evolução da abertura e comprimento da fratura como função do tempo. Os resultados dos trabalhos de referência são apresentados para comparação.

Fonte: O autor (2020).

Figura 43 – Geometria da fratura em alguns passos de tempo. As linhas no gráfico são isobáricas e mostram a deformação do campo de pressão na região da fratura.

Fonte: O autor (2020).

4.7 PROPAGAÇÃO E FECHAMENTO DA FRATURA

Este ensaio utiliza as mesmas premissas do caso assintótico *leakoff-toughness*, mas a vazão é interrompida aos 50 s, de forma a provocar o fechamento da fratura, com consequente queda de pressão. Aos 100 s, é simulado um novo fluxo, que abre a fratura novamente, na interface que já se encontra danificada.

Esse caso visa a observar o fechamento da fratura, sem sobreposição de malha e com evolução coerente da tensão vertical σ_{yy} e da pressão durante os fluxos e fechamentos.

4.7.1 Resultados numéricos

A Figura 44 apresenta os principais resultados para: a) pressão na origem da fratura com decaimento após o fechamento da fratura; b) evolução do dano e abertura da fratura registrados na malha DFN durante o primeiro fluxo, em que o dano cresce; e c) evolução do dano e abertura da fratura registradas durante o primeiro fechamento, evidenciando a não sobreposição de malha (abertura tende a zero), a manutenção do dano nas interfaces.

Observa-se queda, na pressão, antes da interrupção na vazão, que é consequência da propagação da fratura. Em cenários de fluxo radial transiente, sem propagação de fratura, espera-se que a pressão de fluxo seja ascendente com a injeção contínua de fluidos sob vazão constante. Dessa forma, é claro o efeito da propagação da fratura na pressão do poço.

O aspecto transiente da pressão na origem da fratura é distinto no primeiro e segundo fluxos. Isso ocorre porque, no segundo fluxo, as interfaces já estão danificadas, demandando menor pressão para abrir a fratura. É interessante observar que o fechamento mecânico da fratura ocorre em um período muito curto, em menos de 1 (um) segundo, porque o meio apresenta permeabilidade significativa, e a filtração do fluido que está na fratura para o meio poroso ocorre rapidamente.

Durante esse fechamento, a ponta da fratura se desloca na direção da origem da mesma, demandando remalhamento (ver Figura 17). Dessa forma, o remalhamento ocorre tanto na propagação quanto no fechamento da fratura, garantindo a precisão no cálculo das tensões na ponta da fratura.

Figura 44 – Figura a – Pressão na origem da fratura como função do tempo. Figura b – Evolução do dano e abertura ao longo da fratura durante o primeiro fluxo. Figura c – Evolução do dano e abertura ao longo da fratura durante o primeiro fechamento.

Fonte: O autor (2020).

4.8 DESEMPENHO COMPUTACIONAL

Esta seção apresenta uma visão geral do desempenho computacional do simulador, comparando a execução com malhas adaptativas com a execução utilizando malhas fixas, ambas em diversas granularidades. A granularidade é medida pelo tamanho do elemento na região da ponta da fratura, que tem relação direta com a precisão do método na estimativa do comprimento da mesma. Os parâmetros do remalhamento adaptativo são listados na Tabela 8.

Tabela 8 – Principais parâmetros do remalhamento adaptativo utilizados na avaliação do desempenho do simulador.

Parâmetro	Valor
<i>area_radius</i>	10 m
<i>critical_distance_from_last_tip</i> (Δd)	0,03 m
<i>refine_step</i>	0,2 m
<i>frac_tip_dx</i>	variável
<i>frac_neck_dx</i>	0,3 m
<i>frac_pg_q</i>	1,07 m
<i>local_refine_l0</i>	0,001 m
<i>local_refine_levels</i>	4

As rodadas foram executadas em um computador pessoal, cujas características são listadas na Tabela 9. A Tabela 10 detalha características de duas rodadas de interesse que, em última análise, resumem o desempenho do método.

Tabela 9 – Principais características do *hardware* utilizado na execução do simulador e obtenção dos resultados apresentados

Processador	Intel(R) Core(TM) i5-7500 CPU @ 3.40GHz
Arquitetura	x86-64 (64 bits)
Memória RAM	16 GiB (2x8GiB) DIMM DDR4 Síncrono 2133 MHz (0.5 ns)
Sistema operacional	Linux pc-desk 4.15.0-33-generic Ubuntu 18.04.2 LTS (Bionic Beaver)

Tabela 10 – Contagem dos laços de dano, contagem de remalhamentos realizados e graus de liberdade da malha final em rodadas de interesse.

	A 0,01	A 0,005	F 0,01	F 0,005
Laços de dano	2102	2879	2341	3163
Remalhamentos	109	109	0	0
Temp (min)	23,3	34,6	137,2	336,0
Graus de liberdade (mil)	13,2	15,0	73,4	143,2

As Figuras 45a e 45b apresentam o erro relativo de cada malha para a abertura e comprimento da fratura, tomando como referência a malha fixa mais fina, com células de $0,005\text{ m}$ ao longo de toda a fratura. Os elementos da malha adaptativa possuem tamanho constante de $0,3\text{ m}$ ao longo da fratura e tamanho variável na ponta. O tamanho dos elementos, na ponta, varia de $0,005\text{ m}$ (rodada “A 0,005”) até $0,1\text{ m}$ (rodada “A 0,1”).

Os resultados mostram que, para estimativa do comprimento da fratura, a malha adaptativa atinge resultados com erro menor que 1% com um número reduzido de graus de liberdade e tempo de execução significativamente menores. Os resultados relativos à estimativa da abertura da fratura mostram que a malha adaptativa apresenta erros reduzidos para todos os casos, em tempo de execução reduzidos em até duas ordens, quando comparados à malha fixa.

A Figura 45c mostra, ainda, a evolução do número de graus de liberdade comparando uma rodada com malha fixa (“F 0,01”) com a rodada equivalente com malha adaptativa (“A 0,01”). Naturalmente, o número de graus de liberdade, no caso de malha fixa, é constante – 73,4 mil, no caso em análise. Observa-se que o número de graus de liberdade na estratégia de adaptação de malha proposta cresce pouco, após alguns passos de tempo, estando em 13,2 mil após 100 s de simulação. Isso ocorre porque o processo de remalhamento define uma grande densidade de graus de liberdade na ponta da fratura, que se move com o tempo. Entretanto, ao longo da fratura, a densidade é mais baixa e, à medida que a fratura se propaga, apenas essa quantidade é incrementada aos graus de liberdade globais.

Pelos resultados, a adaptação de malha mostrou-se uma ferramenta eficiente para a simulação numérica da evolução de uma fratura hidráulica por tração, proporcionando excelentes resultados no que tange à qualidade da aproximação numérica e o custo computacional.

Figura 45 – Desempenho computacional comparando malhas adaptativas e fixas em termos de tempo de execução e número de graus de liberdade.

(a) Comprimento da fratura

(b) Abertura da fratura

(c) Evolução do número de graus de liberdade

Fonte: O autor (2020).

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Esta dissertação tratou da implementação, validação e teste de um simulador hidromecânico de reservatórios de petróleo com propagação de fraturas por tração, utilizando elementos finitos coesivos e remalhamento adaptativo.

Os resultados foram validados em ensaios dedicados à validação da resposta mecânica elástica do sistema (poço em um reservatório sob carga anisotrópica e uma fratura em um meio contínuo, sem propagação); ensaios dedicados à validação da poroelasticidade linear (Terzaghi e Mandel); e ensaios dedicados à validação da propagação de uma fratura de tração em condições assintóticas (*storage* e *leakoff*). Foi observada ótima aderência a soluções de referência disponíveis na literatura.

A utilização de condições de contorno transientes (abertura e fechamento do poço) demonstrou a capacidade de modelar um teste de fraturamento completo, lidando de forma eficiente com não-linearidades impostas pelos efeitos transientes, relacionados à abertura e fechamento da fratura.

Por fim, a avaliação do desempenho computacional do simulador foi discutida, demonstrando as potencialidades das estratégias de adaptatividade de malha implementada. A adaptatividade de malha mostrou redução de 10 a 100 vezes no tempo de computação, para um erro de aproximação equivalente. O algoritmo proposto garante a discretização espacial da malha onde ela é numericamente demandada e reestrutura a malha em elementos maiores onde, a priori, se entende que não há necessidade de detalhamento numérico.

Esta estratégia mostrou-se interessante para projetos futuros, em que o custo computacional crescerá com o desenvolvimento de modelos mais complexos. Nesse escopo, há interesse do autor em estudar os seguintes tópicos que extrapolam o escopo desta dissertação:

- a) utilização de um algoritmo de detecção do caminho da fratura no meio contínuo (*tracking*);
- b) otimização numérica na estimativa do dano, algoritmos Newtonianos e multiescala;
- c) incorporação de mais efeitos físicos na adaptatividade de malha, reduzindo o número de parâmetros de usuário;
- d) avaliação de modelos tridimensionais, afastando as simplificações impostas pelo estado plano de tensões ;

- e) incorporação de novos processos físicos, como térmicos, interações químicas, perda de integridade por cisalhamento e poroplasticidade;
- f) utilização de campos heterogêneos de permeabilidade e de parâmetros elásticos;
- g) avaliação da interação entre fraturas hidráulicas e naturais, utilizando uma rede de fraturas discreta como entrada;
- h) incorporação da modelagem numérica da injeção de fluidos viscosos e propados;
- i) avaliação de soluções de longo tempo, em vista a incorporar parametricamente o fraturamento hidráulico em modelos de maior escala;
- j) automação do sistema para ajustes de histórico de testes de fraturamento sob incertezas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABHYANKAR, Shrirang; BROWN, Jed; CONSTANTINESCU, Emil M.; GHOSH, Debojyoti; SMITH, Barry F.; ZHANG, Hong. **PETSc/TS: a modern scalable ODE/DAE solver library**, 2018. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1806.01437>.

ADACHI, José I.; DETOURNAY, Emmanuel. Plane strain propagation of a hydraulic fracture in a permeable rock. **Engineering fracture mechanics**, [S. l.], v. 75, n. 16, p. 4666–4694, 2008. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2008.04.006.

ADACHI, José I.; SIEBRITS, E.; PEIRCE, A.; DESROCHES, J. Computer simulation of hydraulic fractures. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, [S. l.], v. 44, n. 5, p. 739–757, 2007.

AHRENS, James; GEVECI, Berk; LAW, Charles. ParaView: an end-user tool for large-data visualization. **Visualization handbook**, [S. l.], p. 717–731, 2005. DOI: 10.1016/B978-012387582-2/50038-1.

ANTON, Howard. **Cálculo: um novo horizonte**. 6ª edição ed. Porto Alegre: Bookman, 2000. v. 2

BANDIS, S. C.; LUMSDEN, A. C.; BARTON, N. Fundamentals of rock joint deformation. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts**, [S. l.], v. 20, n. 6, p. 249–268, 1983.

BARENBLATT, G. I. The mathematical theory of equilibrium cracks formed in brittle fracture. **Zhurnal Prikladnoy Mekhaniki i Tekhnicheskoy**, [S. l.], 1962.

BARSOUM, Roshdy S. Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S. l.], v. 11, n. 1, p. 85–98, 1977. DOI: 10.1002/nme.1620110109.

BATHE, Klaus-Jürgen. **Finite element procedures**. Watertown, MA: Prentice Hall, Pearson Education, Inc, 2014.

BESERRA, Leila Brunet de Sá. **Análise hidromecânica do fraturamento hidráulico via elementos finitos com descontinuidades fortes incorporadas**. 2015. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil, 2015. Disponível em: <http://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/18305>.

BLANTON, Thomas L. An experimental study of interaction between hydraulically induced and pre-existing fractures. **SPE Unconventional Gas Recovery Symposium**, [S. l.], 1982. DOI: 10.2118/10847-MS. Disponível em: <http://www.onepetro.org/doi/10.2118/10847-MS>.

BULLING, Jannis; GRAVENKAMP, Hauke; BIRK, Carolin. A high-order finite element technique with automatic treatment of stress singularities by semi-analytical enrichment. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S. l.], v. 355, p. 135–156, 2019. DOI: 10.1016/j.cma.2019.06.025. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.06.025>.

BUNGER, Andrew P.; DETOURNAY, Emmanuel; GARAGASH, Dmitry I. Toughness-dominated hydraulic fracture with leak-off. **International Journal of Fracture**, [S. l.], v. 134, n. 2, p. 175–190, 2005.

BUNGER, Andrew P.; LECAMPION, Brice. Four critical issues for successful hydraulic fracturing applications. **Rock mechanics and engineering**, [S. l.], v. 5, p. 551–593, 2017.

CAREY, G. F.; ODEN, J. T.; BECKER, E. B. **Finite elements – an introduction**, v. I. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1981.

CARRIER, Benoit; GRANET, Sylvie. Numerical modeling of hydraulic fracture problem in permeable medium using cohesive zone model. **Engineering fracture mechanics**, [S. l.], v. 79, p. 312–328, 2012. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2011.11.012. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2011.11.012>.

CHENG, Alexander H. D. **Poroelasticity**. Switzerland: Springer International Publishing, 2016. v. 27 DOI: 10.1007/978-3-319-25202-5. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-25202-5>.

DAKE, Laurie P. **The practice of reservoir engineering**. Burlington, MA: Elsevier, 2001. v. 36

DEMKOWICZ, L.; RACHOWICZ, W.; DEVLOO, P. H. A fully automatic hp-adaptivity. **Journal of Scientific Computing**, [S. l.], v. 17, n. 1–4, p. 117–142, 2002. DOI: 10.1023/A:1015192312705.

DETOURNAY, Emmanuel. Mechanics of Hydraulic Fractures. **Annual review of fluid mechanics**, Minneapolis, MN, v. 48, n. 1, p. 311–339, 2016. DOI: 10.1146/annurev-fluid-010814-014736. Disponível em: <http://www.annualreviews.org/doi/10.1146/annurev-fluid-010814-014736>.

DONTSOV, E. V.; PEIRCE, A. P. A multiscale Implicit Level Set Algorithm (ILSA) to model hydraulic fracture propagation incorporating combined viscous, toughness, and leak-off asymptotics. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, [S. l.], v. 313, n. March, p. 53–84, 2017. DOI: 10.1016/j.cma.2016.09.017. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2016.09.017>.

DUGDALE, Donald S. Yielding of steel sheets containing slits. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, [S. l.], v. 8, n. 2, p. 100–104, 1960. DOI: 10.1016/0022-5096(60)90013-2.

ERTEKIN, Turgay; ABOU-KASSEM, Jamal H.; KING, Gregory R. **Basic applied reservoir simulation**. Richardson, TX: Society of Petroleum Engineers, 2001.

FABRI, Andreas; GIEZEMAN, Geert-Jan; KETTNER, Lutz; SCHIRRA, Stefan; SCHÖNHERR, Sven. On the design of CGAL a computational geometry algorithms library. **Software: Practice and Experience**, [S. l.], v. 30, n. 11, p. 1167–1202, 2000.

FALCÃO, F. et al. Synthetic benchmark for the computation of equivalent properties in coupled flow and geomechanics conditions for a fractured carbonate rock. In: 2ND INTERNATIONAL DISCRETE FRACTURE NETWORK ENGINEERING

CONFERENCE 2018, Seattle, USA. **Anais [...]**. Seattle, USA: American Rock Mechanics Association, 2018. p. 20–22.

FARIAS, Agnaldo Monteiro. **Novas formulações de elementos finitos e simulações multifísicas**. 2014. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

FARRELL, P. E.; MADDISON, J. R. Conservative interpolation between volume meshes by local Galerkin projection. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, [S. l.], v. 200, n. 1–4, p. 89–100, 2011. DOI: 10.1016/j.cma.2010.07.015. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2010.07.015>.

FLEMISCH, Bernd; BERRE, Inga; BOON, Wietse; FUMAGALLI, Alessio; SCHWENCK, Nicolas; SCOTTI, Anna; STEFANSSON, Ivar; TATOMIR, Alexandru-Bogdan. Benchmarks for single-phase flow in fractured porous media. **Advances in water resources**, [S. l.], v. 111, p. 239–258, 2018. DOI: 10.1016/j.advwatres.2017.10.036.

GEERTSMA, J.; DE KLERK, F. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures. **Journal of Petroleum Technology**, [S. l.], v. 21, n. 12, p. 1–571, 1969.

GREEN, A. E.; SNEDDON, I. N. The distribution of stress in the neighbourhood of a flat elliptical crack in an elastic solid. **Mathematical proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, [S. l.], v. 46, n. 1, p. 159–163, 1950. DOI: 10.1017/S0305004100025585.

GRIFFITH, Alan Arnold. VI. The phenomena of rupture and flow in solids. **Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character**, [S. l.], v. 221, n. 582–593, p. 163–198, 1921.

GROPP, William; LUSK, Ewing; DOSS, Nathan; SKJELLUM, Anthony. A high-performance, portable implementation of the MPI message passing interface standard. **Parallel computing**, [S. l.], v. 22, n. 6, p. 789–828, 1996.

GUTIERREZ, M.; LEWIS, R. W.; MASTERS, I.; OTHERS. Petroleum reservoir simulation coupling fluid flow and geomechanics. **SPE Reservoir Evaluation & Engineering**, [S. l.], v. 4, n. 3, p. 164–172, 2001.

HAWIE, Nicolas; BARROIS, Aurélien; MARFISI, Emerson; MURAT, Bruno; HALL, Jonathan; EL-WAZIR, Zinhom; AL-MADANI, Noura; AILLUD, Gary. Forward stratigraphic modelling, deterministic approach to improve carbonate heterogeneity prediction; Lower cretaceous, Abu Dhabi. **Society of Petroleum Engineers - Abu Dhabi International Petroleum Exhibition and Conference, ADIPEC 2015**, [S. l.], 2015. DOI: 10.2118/177519-ms.

HEFFER, K. Geomechanical influences in water injection projects: An overview. **Oil & Gas Science and Technology**, [S. l.], v. 57, n. 5, p. 415–422, 2002.

HOWARD, George C.; FAST, C. R. Optimum fluid characteristics for fracture extension. In: **DRILLING AND PRODUCTION PRACTICE 1957**, Nova York, Estados Unidos. **Anais [...]**. Nova York, Estados Unidos: American Petroleum Institute, 1957.

HURTADO, Fernando Sandro Velasco; MALISKA, Clovis Raimundo; SILVA, A. F. C.; CORDAZZO, Jonas. An element-based finite volume formulation for reservoir simulation. *In: PROCEEDINGS OF THE XXVI IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING 2005*, Guarapari, Espirito Santo, Brazil. **Anais [...]**. Guarapari, Espirito Santo, Brazil p. 19–21.

JACKSON, Matthew et al. Reservoir modeling for flow simulation by use of surfaces, adaptive unstructured meshes, and an overlapping-control-volume finite-element method. **SPE Reservoir Evaluation & Engineering**, [S. l.], v. 18, n. 2, p. 115–132, 2015. DOI: 10.2118/163633-pa.

JÄGER, Philippe; STEINMANN, Paul; KUHL, Ellen. On local tracking algorithms for the simulation of three-dimensional discontinuities. **Computational Mechanics**, [S. l.], v. 42, n. 3, p. 395–406, 2008. DOI: 10.1007/s00466-008-0249-3.

KHRISTIANOVIC, S.; ZHELTOV, Y. Formation of vertical fractures by means of highly viscous fluids. *In: 4TH WORLD PETROLEUM CONGRESS 1955*, Roma. **Anais [...]**. Roma p. 579–586.

KIM, Jihoon. **Sequential methods for coupled geomechanics and multiphase flow**. 2010. Stanford Univesity, Stanford, California, Estados Unidos, 2010.

KIRK, Benjamin S.; PETERSON, John W.; STOGNER, Roy H.; CAREY, Graham F. libMesh : a C++ library for parallel adaptive mesh refinement/coarsening simulations. **Engineering with Computers**, [S. l.], v. 22, n. 3–4, p. 237–254, 2006. DOI: 10.1007/s00366-006-0049-3. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/s00366-006-0049-3>.

KIRSCH, C. Die theorie der elastizitat und die bedurfnisse der festigkeitslehre. **Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure**, [S. l.], v. 42, p. 797–807, 1898.

LECAMPION, Brice; BUNGER, Andrew; ZHANG, Xi. Numerical methods for hydraulic fracture propagation: A review of recent trends. **Journal of Natural Gas Science and Engineering**, [S. l.], 2017.

MAHABADI, O. K.; LISJAK, A.; MUNJIZA, A.; GRASSELLI, G. Y-Geo: New Combined Finite-Discrete Element Numerical Code for Geomechanical Applications. **International Journal of Geomechanics**, [S. l.], v. 12, n. 6, p. 676–688, 2012. DOI: 10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000216. Disponível em: <http://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%29GM.1943-5622.0000216>.

MANZOLI, Osvaldo L.; CLETO, Pedro R.; SÁNCHEZ, Marcelo; GUIMARÃES, Leonardo J. N.; MAEDO, Michael A. On the use of high aspect ratio finite elements to model hydraulic fracturing in deformable porous media. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, [S. l.], 2019.

MOSTAGHIMI, Peyman; PERCIVAL, James R.; PAVLIDIS, Dimitrios; FERRIER, Richard J.; GOMES, Jefferson L. M. A.; GORMAN, Gerard J.; JACKSON, Matthew D.; NEETHLING, Stephen J.; PAIN, Christopher C. Anisotropic Mesh Adaptivity and Control Volume Finite Element Methods for Numerical Simulation of Multiphase Flow in Porous Media. **Mathematical Geosciences**, [S. l.], v. 47, n. 4, p. 417–440, 2015. DOI: 10.1007/s11004-014-9579-1. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s11004-014-9579-1>.

014-9579-1.

MÜLLER, Leopold. **Rock mechanics**. Viena: Springer-Verlag Wien Gmbh, 1974. v. 6

MUNJIZA, A.; ANDREWS, K. R. F.; WHITE, J. K. Combined single and smeared crack model in combined finite-discrete element analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S. l.], v. 44, n. 1, p. 41–57, 1999.

NIKOLINAKOU, M. A.; HEIDARI, M.; HUDEC, M. R.; FLEMINGS, P. B. Geomechanical modeling of stress and deformation associated with salt-sheet advance. **52nd U.S. Rock Mechanics/Geomechanics Symposium**, [S. l.], n. 2017, 2018.

NORDGREN, R. P. Propagation of a vertical hydraulic fracture. **Society of Petroleum Engineers Journal**, [S. l.], v. 12, n. 4, p. 306–314, 1972.

NORTON, Robert L. **Design of machinery: an introduction to the synthesis and analysis of mechanisms and machines**. Boston, Estados Unidos: McGraw-Hill Higher Education, 2004.

NUR, Amos; BYERLEE, J. D. An exact effective stress law for elastic deformation of rock with fluids. **Journal of Geophysical Research**, [S. l.], v. 76, n. 26, p. 6414–6419, 1971.

OBEYSEKARA, A.; LEI, Q.; SALINAS, P.; PAVLIDIS, D.; LATHAM, J. P.; XIANG, J.; PAIN, C. C.; OTHERS. A fluid-solid coupled approach for numerical modeling of near-wellbore hydraulic fracturing and flow dynamics with adaptive mesh refinement. In: 50TH US ROCK MECHANICS/GEOMECHANICS SYMPOSIUM 2016, **Anais [...]**. [s.l.: s.n.]

OLIVER, J.; HUESPE, A. E. On strategies for tracking strong discontinuities in computational failure mechanics. **WCCM V - Fifth World Congress on Computational Mechanics**, [S. l.], 2002.

OLIVER, J.; HUESPE, A. E.; CANTE, J. C. An implicit/explicit integration scheme to increase computability of non-linear material and contact/friction problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S. l.], v. 197, n. 21–24, p. 1865–1889, 2008. DOI: 10.1016/j.cma.2007.11.027.

PARVANEH, S. M.; FOSTER, C. D. On numerical aspects of different updating schedules for tracking fracture path in strain localization modeling. **Engineering Fracture Mechanics**, [S. l.], v. 152, p. 26–57, 2016. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2015.11.011. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.11.011>.

PATIL, R. U.; MISHRA, B. K.; SINGH, I. V. An adaptive multiscale phase field method for brittle fracture. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, [S. l.], v. 329, p. 254–288, 2018. DOI: 10.1016/j.cma.2017.09.021. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.09.021>.

PEIRCE, Anthony. Implicit level set algorithms for modelling hydraulic fracture propagation. **Phil. Trans. R. Soc. A**, [S. l.], v. 374, n. 2078, 2016.

PEIRCE, Anthony; DETOURNAY, Emmanuel. An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, [S. l.], v. 197, n. 33–40, p. 2858–2885, 2008.

PERKINS, T. K.; GONZALEZ, J. A. The effect of thermoelastic stresses on injection well fracturing. **Society of Petroleum Engineers Journal**, [S. l.], v. 25, n. 1, p. 78–88, 1985.

PERKINS, T. K.; KERN, L. R. Widths of hydraulic fractures. **Journal of Petroleum Technology**, [S. l.], v. 13, n. 9, p. 937–949, 1961.

RICE, J. R. Mathematical analysis in the mechanics of fracture. In: **Mathematical Fundamentals**. Nova York, Estados Unidos: Academic Press, 1968. v. 2p. 191–311.

ROCHA, Luiz Alberto Santos; AZEVEDO, Cecília Toledo. **Projetos de poços de petróleo: geopressões e assentamento de colunas de revestimentos**. Rio de Janeiro, Brasil: Interciência, 2009. v. 511

ROCKFIELD. **ELFEN Forward Modeling**, 2017. Disponível em: <https://www.rockfieldglobal.com/>.

ROSA, Adalberto José; CARVALHO, Renato de Souza; XAVIER, José Augusto Daniel. **Engenharia de reservatórios de petróleo**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SCHIJVE, Jaap. **Fatigue of structures and materials**. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2001.

SECCHI, Stefano; SIMONI, Luciano; SCHREFLER, Bernhard. Mesh adaptation and transfer schemes for discrete fracture propagation in porous materials. **International journal for numerical and analytical methods in geomechanics**, [S. l.], v. 31, n. 2, p. 331–345, 2007.

SKEMPTON, A. W. Terzaghi's discovery of effective stress. **From theory to practice in soil mechanics: selections from the writings of Karl Terzaghi**, [S. l.], p. 42–53, 1960.

SNEDDON, I. N.; ELLIOT, H. A. The opening of a Griffith crack under internal pressure. **Quarterly of applied mathematics**, [S. l.], v. 4, n. 3, p. 262–267, 1946.

SOUSA JR, Luis Carlos. **Análise geomecânica da injeção de fluidos em subsuperfície**. 2018. Universidade de Brasília, Brasília, 2018.

STARFIELD, Anthony M.; CUNDALL, P. A. Towards a methodology for rock mechanics modelling. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts**, [S. l.], v. 25, n. 3, p. 99–106, 1988.

TATOMIR, Alexandru-Bogdan. **From discrete to continuum concepts of flow in fractured porous media**. 2012. University of Stuttgart, Stuttgart, 2012.

THOMAS, José Eduardo. **Fundamentos de engenharia de petróleo**. Segunda Ed ed. Rio de Janeiro, Brasil: Interciência, 2004.

WANG, Herbert F. **Theory of linear poroelasticity with applications to geomechanics and hydrogeology**. Princeton, Estados Unidos: Princeton University Press, 2000.

WARPINSKI, N. R.; TEUFEL, L. W. Influence of geologic discontinuities on hydraulic fracture propagation (includes associated papers 17011 and 17074). **Journal of Petroleum Technology**, [S. l.], v. 39, n. 2, p. 209–220, 1987.

WITHERSPOON, Paul Adams; WANG, Joseph S. Y.; IWAI, K.; GALE, John E. Validity of cubic law for fluid flow in a deformable rock fracture. **Water resources research**, [S. l.], v. 16, n. 6, p. 1016–1024, 1980.

YAN, Chengzeng; ZHENG, Hong; SUN, Guanhua; GE, Xiurun. Combined finite-discrete element method for simulation of hydraulic fracturing. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, [S. l.], v. 49, n. 4, p. 1389–1410, 2016. DOI: 10.1007/s00603-015-0816-9.

YEW, Ching H.; WENG, Xiaowei. **Mechanics of hydraulic fracturing**. Austin, Texas: Gulf Professional Publishing, 2014.

ZIMMERMAN, Robert W.; BODVARSSON, Gudmundur S. Hydraulic conductivity of rock fractures. **Transport in Porous Media**, [S. l.], v. 23, n. 1, p. 1–30, 1996. DOI: 10.1007/BF00145263.

ZOBACK, Mark D. **Reservoir geomechanics**. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 2010.