SIDINEI COLODETI CRISTO

**MODELAGEM MATEMÁTICA DA CONDUÇÃO DE CALOR
TRANSIENTE E QUASE-ESTACIONÁRIA NO PROCESSO DE
REFUSÃO POR ELETROESCÓRIA**

São Paulo
2008

SIDINEI COLODETI CRISTO

**MODELAGEM MATEMÁTICA DA CONDUÇÃO DE CALOR
TRANSIENTE E QUASE-ESTACIONÁRIA NO PROCESSO
DE REFUSÃO POR ELETROESCÓRIA**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Engenharia Metalúrgica

São Paulo
2008

SIDINEI COLODETI CRISTO

**MODELAGEM MATEMÁTICA DA CONDUÇÃO DE CALOR
TRANSIENTE E QUASE-ESTACIONÁRIA NO PROCESSO DE
REFUSÃO POR ELETROESCÓRIA**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Engenharia Metalúrgica

Área de Concentração: Engenharia Metalúrgica
Orientador: Prof. Dr. Marcelo de Aquino
Martorano

São Paulo
2008

FICHA CATALOGRÁFICA

Cristo, Sidinei Colodeti

Modelagem matemática da condução de calor transiente e quase-estacionária no processo de refusão por eletroescória / S.C. Cristo / São Paulo, 2008.

128 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Metalúrgica e de Materiais.

1. Simulação da solidificação 2. Fornos de refusão por eletroescória I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Metalúrgica e de Materiais II. t.

DEDICATÓRIA

À Tatiana, minha esposa, com amor e gratidão pela compreensão nos momentos em que não estive presente e por seu apoio nos momentos em que mais precisei ao longo da elaboração deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus que me proveu de todas as condições para execução deste trabalho e me colocou ao lado de pessoas de boa vontade como as mencionadas a seguir.

Ao Professor Doutor Marcelo de Aquino Martorano, pela sua paciência, dedicação e empenho como orientador e amigo durante a execução deste trabalho.

À Villares Metals S.A. representada pelo senhor Gilberto Cardozo por disponibilizar equipamentos e outros recursos e ainda pela flexibilização de tempo para a minha dedicação a este trabalho.

À Escola Politécnica da Universidade de São Paulo pela oportunidade da realização do curso de mestrado.

Aos professores doutores: Eduardo Carmargo de Oliveira Pinto, Cyro Takano e Marcelo Breda Mourão pelo contínuo apoio e incentivo durante as disciplinas cursadas.

Aos funcionários da Villares Metals que me apoiaram em várias fases deste trabalho, em especial, aos colegas: Sílvio Amorielo Lopes, Adeildo da Silva Bezerra, Radilson Santiago, Carlos Batista de Aguiar Rosa, Adair Balbino e José Carlos Rillo Rodrigues, Fabiano Cassula, Ricardo Machado Lucianetti e David Delagostini Jarreta.

RESUMO

Um modelo matemático para a transferência de calor no processo de refusão por eletroescória (ESR - "electroslag remelting") foi implementado a partir da equação diferencial de condução de calor transiente em coordenadas cilíndricas. A resolução numérica da equação diferencial foi facilitada através de uma mudança de variável que possibilitou fixar-se o tamanho do domínio de cálculo durante o período de crescimento do lingote. Duas análises foram conduzidas. Na primeira, uma análise paramétrica foi feita e na segunda um caso industrial foi analisado. Na primeira análise, a equação diferencial foi escrita na forma adimensional, indicando os parâmetros adimensionais importantes para o processo. Realizou-se um estudo paramétrico do modelo examinando-se o efeito de algumas variáveis de processo na geometria da poça de fusão, no tempo local de solidificação (LST) e no comprimento do lingote necessário para o sistema atingir um regime quase-estacionário. As variáveis de processo escolhidas para o estudo foram: (1) a taxa de refusão; (2) o tipo de material refundido e (3) as condições de extração de calor pelo molde. Os resultados mostraram que não é possível definir, para todas as condições industriais, uma única razão entre o comprimento e o raio do lingote no momento em que a poça de fusão atinge estado quase-estacionário. Observou-se ainda que o número de Stefan, que define o tipo de material, tem efeito desprezível na profundidade da poça de fusão e no tempo local de solidificação quando atinge valores maiores do que 0,5. Na segunda análise (caso industrial), o modelo foi usado para simular a refusão industrial de um lingote da liga ASTM F138. O perfil da poça de fusão e o fluxo de calor na interface metal-lingoteira foram medidos e apresentaram uma excelente aderência aos resultados do modelo. Os resultados apresentados permitem ainda a determinação (sob o ponto de vista microestrutural) do valor ótimo da taxa de refusão e do momento em que o processo atinge o estado quase-estacionário para uma ampla faixa de materiais, diâmetros de lingote e condições de transferência de calor adotadas industrialmente.

Palavras-chave: Refusão, Eletroescória, Simulação, Solidificação.

ABSTRACT

A mathematical model for heat transfer in the electroslag remelting process (ESR) was implemented using the transient heat conduction equation in cylindrical coordinates. The solution of the equations was facilitated by using a change of the axial coordinate, also known as the Landau transformation, which fixed the calculation domain size during the ingot growth period. Two analyses were carried out. In the first, a parametric study of the model was done, while in the second, the solidification of an industrial ingot was modeled. In the first analysis, the differential equation in dimensionless form indicated the important processing parameters, namely, the melting rate, the type of solidifying material, and the heat extraction to the mold. The effects of these parameters were examined on the pool profile geometry, local solidification time (LST) and length of ingot to reach quasi-steady state. The results showed that it is not possible to define, for all industrial conditions, a unique ratio of ingot length to ingot radius when the metal pool reaches the quasi-steady state. It was also observed that the Stefan number (Ste), which defines the type of solidifying material, had a negligible effect on the pool depth and on the LST for $Ste > 0.5$. In the second analysis, the model was used to simulate the solidification in the ESR process of an ingot made of the ASTM 138 steel. The geometric profile of the metal pool and the heat flux at the metal-mold interface were measured, showing reasonable agreement with the model results. Finally, the results given in the present work allow the definition (from a microstructural standpoint) of the optimum melting rate and the time to reach quasi steady-state for a wide range of industrial materials, ingot diameters and heat transfer conditions.

Keywords: ESR. Simulation. Solidification. Mathematical Modeling.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Desenho esquemático do forno ESR com lingoteira estática, onde V_m indica a velocidade de crescimento do lingote refundido e V_e a velocidade de descida do eletrodo.	12
Figura 2 - Foto frontal da parte superior do forno ESR número 1 da Villares Metals S.A..	13
Figura 3 - Foto lateral da parte superior forno ESR número 1 da Villares Metals S.A..	14
Figura 4 - Tempo local de solidificação (LST) em função da taxa de refusão calculado para lingotes de 300 mm de diâmetro da liga Udimet 700 (BALLANTYNE; KENNEDY; MITCHEL, 1979).	17
Figura 5 - Diagrama esquemático do processo Hopkins (MCKEEN, JOSEPH e SPEHAR, 1948)	21
Figura 6 - Esquema do ESR mostrando em detalhe as gotas metálicas, interface lingote-molde e velocidade de crescimento do lingote (V_m) e de descida do eletrodo (V_e).	23
Figura 7 - Detalhe dos sítios onde ocorre a interação entre as inclusões e a escória.	26
Figura 8 - Forno com lingoteira estática utilizando apenas um eletrodo: (a) início e (b) final da refusão.	27
Figura 9 - Seqüência de etapas consecutivas na refusão de um lingote no forno com lingoteira deslizante utilizando seqüencialmente 3 eletrodos.	27
Figura 10 - Seqüência de etapas consecutivas na produção de um lingote no forno com base retrátil utilizando 3 eletrodos seqüencialmente.	28
Figura 11 - Gráfico mostrando o planejamento da taxa de refusão ao longo de uma corrida, realçando o procedimento conhecido como “cabeça quente” para um lingote da liga SAE 4340 de 1000 mm de diâmetro (MITCHELL, 1985).	30
Figura 12 - Principais domínios de simulação do processo ESR: eletrodo, escória, e metal, que está subdividido em poça de metal líquido, zona pastosa e lingote sólido.	31
Figura 13 - Isotermas <i>solidus</i> , <i>liquidus</i> , da temperatura eutética, a 1366°C e isofração de sólido a 50% calculadas considerando a liberação de calor latente na	

zona na pastosa como obedecendo ao: (a) ao modelo de Scheil e (b) modelo linear (JEANFILS, CHEN e KLEIN,1979).....	35
Figura 14 - Principais interfaces da região metálica onde devem ser definidas condições de contorno.	46
Figura 15 – Desenho esquemático mostrando: (a) a região do metal, que consiste no lingote sólido e na poça de fusão e (b) a malha de nós utilizadas para a discretização.	50
Figura 16 – Estrutura de grãos e perfil de poça construído a partir de um lingote de 410 mm de diâmetro da liga 718 (ASTM B 637) (REITER et al.,2005).	53
Figura 17 - Perfis de poças metálicas obtidas através de sucessivas adições de FeS em lingotes de 25,4 cm de diâmetro. As linhas pontilhadas indicam o diâmetro do eletrodo (LONGBOTTOM et. al.,1973).....	53
Figura 18 - Parâmetros geométricos da poça metálica utilizados para definição do fator de forma (LONGBOTTOM et al., 1973).....	54
Figura 19 – Mapa que possibilita determinar o tipo de geometria da poça de fusão (A ou B) a partir da taxa de resfriamento e da velocidade de crescimento dos lingotes (MELLBERG, 1979).	55
Figura 20 - Profundidade da poça de fusão e espessura da zona pastosa em função da taxa de refusão. Adaptado de Jeanfils, Chen e Klein (1979).....	55
Figura 21 - Comparação entre os perfis geométricos experimentais (linha pontilhada) de poças de fusão e perfis calculados através de um modelo matemático (linhas contínuas) para uma liga Co-Ni-Cr-Al-Ti em três diferentes instantes de crescimento do lingote (LONGBOTTOM; GREENFIELD, 1973).	56
Figura 22 - Poça metálica observada experimentalmente e calculada (linha tracejada) para um lingote da liga A286 de 320 mm de diâmetro (BALLANTYNE; MITCHELL, 1977).	57
Figura 23 - Comparação entre o perfil geométrico da poça de fusão medida experimentalmente (os símbolos Δ e $\square$ indicam os resultados das impressões de Balmann) e calculada pelos modelos de Ferng, Chieng e Pan (1989) (linha contínua) e Choudhary e Szekely (1981) (linha tracejada).	57
Figura 24 – Evolução da razão entre a profundidade da isoterma <i>liquidus</i> instantânea e a profundidade da isoterma <i>liquidus</i> após o estado quase-estacionário ter sido atingido em função do tempo adimensional (F_0) obtida através de um modelo	

matemático para: $Pe = (1) 5,8; (2) 7,9; (3) 11,9;$ e obtida experimentalmente $(4) 13,7$ (PATON et al. (1973)).	58
Figura 25 - Profundidade adimensional da isoterma <i>liquidus</i> , Z_L^* , em função da altura adimensional do lingote (L^*) para vários números de Péclet (Pe) (TAKAHAMA; GAMMAL, 1979).	59
Figura 26 - Tempo local de solidificação (LST) para um aço ferramenta do tipo H13 (ASTM A681) calculado em função da taxa de refusão (BALLANTYNE; MITCHELL, 1979).	60
Figura 27 – Tempo local de solidificação (LST) em função da taxa de refusão para lingotes de dois diâmetros diferentes da liga INC 718 (ASTM B 637). A linha tracejada representa um limite mínimo desejado. (MITCHELL e SMAILER, 1979).	60
Figura 28 - Desenho do domínio modelado juntamente com suas condições de contorno	64
Figura 29 - Desenho esquemático dos parâmetros principais que afetam as resistências térmicas entre a superfície do lingote e a água de refrigeração.	75
Figura 30 - Posicionamento dos termopares na lingoteira ESR 20 polegadas. As setas azuis e vermelhas representam o fluxo de água fria e quente (dimensões em milímetros).	78
Figura 31 – Perfil de temperatura determinados pelos termopares 1, 2 e 3 no instante $t=4h$ e 41 minutos.	79
Figura 32 – Foto de um funcionário da Villares Metals mostrando o dispositivo criado para adição de tungstênio metálico.	81
Figura 33 – Seqüência de preparação da amostra para macrografia retirada da cabeça do lingote.	82
Figura 35 – Desenho mostrando o domínio e as condições de contorno para um problema de condução de calor bidimensional em um cilindro de comprimento L e raio R . h_b e h_m são os coeficientes de transferência de calor convectivos na base e na lateral do cilindro, respectivamente, enquanto T_a é a temperatura do ambiente que envolve o cilindro.	85
Figura 36 - Comparação entre os resultados do modelo implementado e a solução exata (Özisik, 1993) para a posição $r = 0,9875$ m e $z = 0,49375$ m de um cilindro resfriado em um meio convectivo.	87

Figura 37 – Desenho esquemático mostrando o domínio para a solidificação de um cilindro de comprimento infinito pela remoção de energia por um sorvedouro filiforme localizado em seu eixo longitudinal.	88
Figura 38 - Comparação entre as curvas de resfriamento calculadas pelo modelo implementado e pela solução analítica para uma posição de coordenada $r = 0,05625\text{m}$ durante a solidificação radial de um cilindro de comprimento infinito.	90
Figura 39 – Desenho esquemático do domínio de comprimento variável, indicando as condições de contorno de temperatura.	91
Figura 40 – Resultados do teste de condução de calor unidimensional em domínio crescente (a) Comparação entre o perfil de temperatura calculado pelo modelo implementado e calculado pela solução analítica para o instante $t=2500\text{s}$ (b) Evolução do comprimento do cilindro ao longo do tempo.	93
Figura 41 – Ilustração mostrando a posição da isoterma solidus no eixo axial do cilindro, utilizada para o teste de convergência da solução numérica.	94
Figura 42 - Profundidade da isoterma <i>solidus</i> em função do comprimento do lingote para diferentes números de volumes da malha definidos ao longo da direção axial do cilindro:	95
Figura 43 – Desenho esquemático dos principais parâmetros adimensionais associadas ao perfil da poça de metal líquido obtidos a partir do campo de temperaturas calculado pelo modelo.	96
Figura 44 – Evolução da profundidade das isothermas solidus e liquidus em função do comprimento instantâneo do lingote.	98
Figura 45 - Profundidade adimensional da isoterma solidus, z_s^* , no eixo longitudinal do lingote no regime quase-estacionário em função de Pe para diferentes Ste e Bi	99
Figura 46 – Evolução do tempo local de solidificação adimensional (LST^*) em função da taxa de refusão adimensional (Pe) para vários números de Stefan (Ste) e Biot (Bi).	102
Figura 47 – Fator de forma ϕ (razão entre as profundidades z_s^* no centro e a meio raio do lingote em função de Pe para vários Ste e Bi . Na região inferior são apresentados dois formatos de poça mostrando o campo térmico e as isothermas <i>solidus</i> e <i>liquidus</i> para diferentes Pe . Também é mostrada a escala de temperatura adimensional T^* correspondentes as cores sobrepostas ao campo de temperaturas.	103

Figura 48 - Comprimento adimensional do lingote no momento em que a poça de fusão atinge o regime quase-estacionário, L_s^* , em função de Pe , para vários Ste e Bi . Os dados obtidos por Takahama e Gammal (1979) e ainda Paton (1973) também são apresentados.....	105
Figura 49 - Evolução térmica no interior da parede da lingoteira de cobre.	106
Figura 50 - Fluxo de calor calculado em função da do topo do lingote.	107
Figura 51 - Macrografia obtida a partir da seção longitudinal da cabeça de um lingote de 20 polegadas de diâmetro da liga VI138 (ASTM F138).....	108
Figura 52 – Isotermas <i>solidus</i> e <i>liquidus</i> calculadas pelo modelo implementado sobrepostas à macrografia da poça metálica obtida a partir do lingote industrial. ..	109
Figura 53 – Campos térmicos para todo o lingote para 5 comprimentos de lingote (0,38m; 0,76m; 1,14m; 1,52m e 1,9m)	110
Figura 54 – Evolução da profundidade das isotermas <i>solidus</i> e <i>liquidus</i> , da espessura da zona pastosa e do tempo local de solidificação (LST) ao longo do comprimento do lingote.	110
Figura 55 – Comparação da evolução do fluxo de calor ao longo da altura da lingoteira a partir do topo do lingote calculado através do modelo de resistências térmicas e calculado a partir das temperaturas obtidas no experimento industrial.	111
Figura 56 – Gráfico e equação do espaçamento dendrítico secundário em função do tempo local de solidificação (LST) obtidos por regressão não linear a partir de resultados experimentais (JERNKONTORET,1977)	112
Figura 57 – Micrografia da região central do lingote utilizada para medição do espaçamento dendrítico secundário.....	113

LISTA DE SÍMBOLOS

$\vec{F}$	Vetor da força de Lorentz
$\vec{\beta}$	Densidade de fluxo magnético
V_z'	Velocidade axial superficial ($V_z' = \varepsilon_L V_z$)
V_r'	Velocidade radial superficial ($V_r' = \varepsilon_L V_r$)
$\vec{J}$	Vetor densidade de corrente elétrica
ϕ	Grandeza instantânea (temperatura ou velocidade)
$\bar{\phi}$	Grandeza média (temperatura ou velocidade)
A	Área da poça metálica (figura 18)
Bi_b	Número de Biot ($Bi_b = \frac{h_b \cdot R}{k}$)
Bi_m	Número de Biot ($Bi_m = \frac{h_m \cdot R}{k}$)
C_p	Calor específico a pressão constante
C_{peq}	Calor específico equivalente
erf	Função erro de Gauss
e_e	Espessura da película de escória
e_l	Espessura da lingoteira de cobre
e_g	Espessura do vão formado entre lingoteira e superfície da escória
e_a	Espessura da passagem de água de refrigeração
F_o	Número de Fourier ($Fo = \frac{t \cdot \alpha}{R^2}$)
F_r	Componente radial da força de Lorentz
F_z	Componente axial da força de Lorentz
g	Aceleração gravitacional
h	Altura instantânea do lingote
H	Entalpia por unidade de volume (entalpia específica)
h_b	Coeficiente de transferência de calor na interface metal-base
h_m	Coeficiente de transferência de calor na interface metal-lateral do lingote
h_d	Coeficiente de transferência de calor convectivo no depósito de resíduos sobre a superfície da lingoteira
h_a	Coeficiente de transferência de calor convectivo da água de refrigeração
h_r	Coeficiente de transferência de calor para a radiação no vão
k	Condutividade térmica
k'	Condutividade térmica molecular na região do metal sólido
k_{ec}	Condutividade térmica efetiva ($k_{ec} = \lambda k$)

k_{et}	Condutividade térmica efetiva com turbulência ($k_{et} = k_t + k$)
k_t	Condutividade térmica turbulenta
k_e	Condutividade térmica da escória
k_l	Condutividade térmica da lingoteira de cobre
k_g	Condutividade térmica do ar no vão formado devido à contração
k_a	Condutividade térmica da água
L	Calor latente de fusão
L ou $L(t)$	Altura instantânea do lingote
L^*	Altura adimensional do lingote ($L^* = \frac{L(t)}{R}$)
L_0	Altura inicial do lingote
L_0^*	Altura inicial do lingote adimensional ($L^* = \frac{L_0}{R}$)
L_s^*	Altura adimensional do lingote quando o estado quase-estacionário é atingido
LST	Tempo local de solidificação ou o tempo necessário para que o metal que está na temperatura <i>liquidus</i> atinja a temperatura <i>solidus</i>
LST^*	Tempo local de solidificação adimensional
P_r	Pressão
Pe	Número de Péclet ($Pe = \frac{V_m \cdot R}{\alpha}$)
P	Perímetro ao longo da poça metálica (figura 18)
q	Fluxo de calor por unidade de área
R	Raio do Lingote
r	Coordenada radial para sistema de coordenadas fixo no topo do lingote
r^*	Coordenada radial adimensional ($r^* = \frac{r}{R}$)
r'	Coordenada radial para sistema de coordenadas fixo na base do lingote
S_{II}	Espaçamento dendrítico secundário
S_g	Transferência de calor que ocorre entre o metal líquido da poça e as gotas de metálicas.
S_J	Geração de calor por efeito Joule
S_L	Calor latente liberado durante a solidificação
Ste	Número de Stefan ($Ste = \frac{c_p \cdot (T_L - T_s)}{L_f}$)
t	Tempo
T	Temperatura

T^*	Temperatura adimensional ($T^* = \frac{T - T_s}{T_L - T_s}$)
t^*	Tempo adimensional ($t^* = \frac{t \cdot \alpha}{R^2}$)
T_a	Temperatura da água de refrigeração
T_{B1} e T_{B2}	Temperaturas superficiais
T_{inf}	Temperatura inicial
T_L	Temperatura <i>liquidus</i>
T_{Ling}	Temperatura da superfície do lingote
T_{ref}	Temperatura de referência usada no modelo de Ferng, Chieng e Pan
T_S	Temperatura <i>solidus</i>
u	Viscosidade da água de refrigeração
u_0	Viscosidade da água de refrigeração na interface com a superfície sólida
v	Velocidade média da água de refrigeração
V_c	Velocidade de crescimento do lingote refundido
V_m	Velocidade de crescimento do lingote
V_r	Componentes de velocidade do fluido na direção radial
V_z	Componentes de velocidade do fluido na direção axial
X	Largura da poça metálica à meia altura (figura 18)
x	Coordenada da distância na lingoteira
z	Coordenada axial para sistema de coordenadas fixo no topo do lingote
z^*	Coordenada axial adimensional ($z^* = \frac{z}{L(t)}$)
z'	Coordenada axial para sistema de coordenadas fixo na base do lingote
Z_P^*	Espessura da zona pastosa ($Z_P^* = Z_S^* - Z_L^*$)
Z_S^*	Profundidade adimensional da isoterma <i>liquidus</i>
Z_S^*	Profundidade adimensional da isoterma <i>solidus</i>
α	Difusividade térmica
α_L	Coefficiente de expansão térmica linear
β	Coefficiente de expansão térmica
γ	Constante de velocidade
Δt	Período de tempo ao longo do qual $\bar{\phi}$ é calculada
ϵ_L	Fração de líquido
ϵ_s	Fração de sólido
κ	Permeabilidade local da zona pastosa à passagem do metal líquido
μ	Viscosidade molecular

μ_{eff}	Viscosidade efetiva
μ_t	Viscosidade turbulenta
ρ	densidade
σ_e	Condutividade elétrica
ψ	Fator de forma definido pela equação [34]

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
2 OBJETIVOS	19
3 REVISÃO DA LITERATURA	20
3.1 Histórico do Processo de Refino por Eletroescória.....	20
3.2 Características e Funcionamento do Processo de Refino por Eletroescória ...	23
3.2.1 Características das Escórias	24
3.2.2 Tipos de Fornos	26
3.2.3 Características dos Eletrodos	28
3.2.6 Seqüência de Processo e Parâmetros de Controle	29
3.3 Modelagem Matemática do Processo ESR	30
3.3.1 Modelagem Matemática da Região do Metal	32
3.3.2 Modelagem Matemática da Região da Escória e do Eletrodo.....	44
3.3.3 Condições de Contorno no Processo ESR	45
3.3.4 Metodologia de Solução Numérica	50
3.4 Efeitos das Variáveis de Processamento na Solidificação do Processo ESR .	52
3.4.1 Geometria da Poça de Fusão	52
3.4.2 Período Transiente.....	57
3.4.3 Tempo Local de Solidificação	59
4 METODOLOGIA	62
4.1 Equações do Modelo Matemático.....	62
4.2 Mudança de Coordenadas (Transformação de Landau)	66
4.3 Modelo Adimensional para a Análise Paramétrica	67
4.4 Solução das Equações do Modelo	69
4.5 Condições de Simulação	69
4.5.1 Condições da Análise Paramétrica	69
4.5.2 Condições da Análise do Caso Industrial.....	72
4.6 Medida das Temperaturas na Parede Lateral da Lingoteira e Cálculo do Fluxo de Calor na Interface Lingote-Lingoteira.....	77
4.7 Observação da Poça de Fusão e Medição do Espaçamento Dendrítico Secundário.....	80
5 RESULTADOS E DISCUSSÃO	84
5.1 Validação do Modelo Matemático.....	84

5.1.1 Condução de Calor Transiente e Bidimensional	85
5.1.2 Solidificação Radial de um Cilindro	87
5.2 Teste de Convergência da Solução	94
5.3 Análise Paramétrica	95
5.3.1 Geometria da Poça e LST no Estado Quase-estacionário	96
5.3.2 Regime Transiente no ESR	104
5.4 Resultados do Experimento Industrial	105
5.5 Simulação do Experimento Industrial	108
6 CONCLUSÕES	114
REFERÊNCIAS	116

1 INTRODUÇÃO

O processo de refusão por escória eletrocondutora (ESR – “electroslag remelting”) ou eletroescória, mostrado esquematicamente na Figura 1 e por fotos na Figura 2 e Figura 3, tem como objetivo obter produtos de alta qualidade sob o ponto de vista de controle da composição química, nível de inclusões, macrossegregação e de estrutura bruta de solidificação.

Figura 1 - Desenho esquemático do forno ESR com lingoteira estática, onde V_m indica a velocidade de crescimento do lingote refundido e V_e a velocidade de descida do eletrodo.

Este processo, que foi desenvolvido por R. K. Hopkins em meados da década de 30 (MITCHELL, 1985), consiste em, inicialmente, refundir um eletrodo sólido da liga que se deseja produzir. A base do eletrodo está em contato com uma escória

eletrocondutora aquecida através da passagem de uma corrente elétrica (efeito Joule). A refusão da base do eletrodo ocorre devido ao calor transferido no contato com a escória aquecida. O metal fundido da base do eletrodo atravessa a escória na forma de gotículas e deposita-se na poça de fusão, localizada logo abaixo. Este metal líquido entra em contato com uma lingoteira de cobre refrigerada a água, solidificando-se.

Figura 2 - Foto frontal da parte superior do forno ESR número 1 da Villares Metals S.A..

A solidificação nos processos de refusão difere daquela no lingotamento convencional ou contínuo, pois a fusão e a solidificação ocorrem no mesmo aparelho (MITCHELL, 1972). Outra diferença em relação aos processos convencionais de solidificação é a possibilidade de alterar o gradiente de temperatura e a velocidade de avanço da frente de solidificação de forma mais independente. Esta característica permite que a estrutura de solidificação seja mais bem controlada.

Figura 3 - Foto lateral da parte superior forno ESR número 1 da Villares Metals S.A..

Os lingotes produzidos pelo processo ESR apresentam as seguintes vantagens em relação àqueles produzidos pelos processos convencionais (DUCKWOTH e HOYLE, 1969):

1. Estrutura bruta de solidificação isenta de rechupes e poros;
2. Inclusões em menor quantidade e menor tamanho;
3. Estrutura metalúrgica (grãos e dendritas) mais refinada;
4. Maior ductilidade e tenacidade;
5. Maior rendimento metalúrgico (relação entre os pesos do produto final e do lingote);
6. Melhores propriedades a altas temperaturas, como a resistência à fluência;
7. Melhor qualidade superficial devido à formação de um filme de escória entre o lingote e a parede lateral da lingoteira (a remoção de defeitos superficiais antes do trabalho a quente posterior não é necessária).

Duckworth e Hoyle (1969) ainda ressaltaram as seguintes vantagens do processo ESR em relação aos processos de lingotamento convencionais:

1. Menor quantidade de deformação a quente requerida posteriormente à refusão para que o centro do produto final atinja as especificações metalúrgicas necessárias (tenacidade, resistência à tração, distribuição de carbonetos);

2. Melhor controle sobre a direção e velocidade de solidificação;
3. Melhor controle do tamanho de grão e, no caso de aços rápidos, do tamanho de carbonetos;
4. Redução controlada de elementos indesejáveis como o enxofre e o oxigênio, e diminuição da oxidação de elementos geralmente muito oxidados, como o silício e o titânio.

No caso de componentes produzidos em superligas e aços especiais, as características mencionadas são imprescindíveis para garantir um desempenho satisfatório em aplicações de alta responsabilidade na indústria aeroespacial e em motores de alto desempenho. Estas aplicações geralmente necessitam de materiais com alta resistência mecânica a altas temperaturas (PLÖCLINGER, 1973), que podem ser obtidos através do processo ESR. Desta forma, pode-se concluir que o processo ESR dificilmente poderá ser substituído pelos processos de metalurgia secundária devido à sua capacidade de remoção de inclusões e de controle da solidificação.

A Figura 1 indica a complexidade do sistema utilizado no processo ESR, principalmente em relação à solidificação do lingote refundido. Vários são os fenômenos e parâmetros que interferem neste processo (MITCHELL, 1985). Entre eles estão:

1. A transferência de calor entre eletrodo, escória e poça de metal líquido;
2. A transferência de calor através das interfaces eletrodo-escória, metal-escória e metal-molde refrigerado;
3. A convecção no metal líquido e na escória devido aos gradientes de temperatura e concentração de soluto e devido à interação dos campos elétrico e magnético, resultando na força de Lorentz;
4. O aquecimento da escória devido à corrente elétrica que a atravessa;
5. A refusão da base do eletrodo gerando gotículas que percolam a escória com a qual trocam calor e massa durante o percurso, depositando-se no topo do lingote.

A alta qualidade dos lingotes produzidos pelo processo ESR depende de sua estrutura metalúrgica, que é muito dependente dos parâmetros de processo. A previsão desta dependência, entretanto, não é simples dada a complexidade do

sistema e o acoplamento dos vários fenômenos mencionados. Até 1970 acreditava-se que a menor taxa de refusão possível geraria uma poça metálica mais rasa e, por conseguinte, uma estrutura metalúrgica com menor microsegregação e porosidade (HERNANDES-MORALES; MITCHELL, 1999). Portanto, para se obter a melhor qualidade, utilizava-se a menor taxa de refusão. Conseqüentemente, a produtividade decrescia, aumentando o custo do produto (MELLBERG 1979). Entretanto, alguns trabalhos realizados na década de 70 (Niimi et al., 1973) mostraram que um aumento da taxa de refusão (ou da velocidade de crescimento do lingote) poderia também, em alguns casos, melhorar a qualidade dos lingotes.

Diante de tal cenário de dúvidas e incertezas, a modelagem matemática e a simulação numérica surgiram como ferramentas importantes para a análise do processo, considerando simultaneamente os fenômenos envolvidos. Através de um dos primeiros modelos matemáticos propostos para o ESR, Ballantyne, Kennedy e Mitchell (1976) demonstraram que a análise apenas do perfil geométrico da poça de fusão era um critério pobre de avaliação da estrutura e funcionava apenas para prever defeitos grosseiros, como a macrossegregação. Também mostraram que o tempo local de solidificação (LST - "Local Solidification Time"), definido como o período necessário para que uma determinada região do material resfrie da temperatura *liquidus* para a *solidus*, é um parâmetro mais adequado para a previsão da estrutura dendrítica do lingote. Quanto menor for o valor de LST, menor será o espaçamento entre os braços dendríticos. Por outro lado, quanto menor for o espaçamento, melhores serão as propriedades mecânicas do material e menores os tempos necessários para um tratamento posterior de homogeneização do mesmo (Kurz, 1976). Portanto, o LST é um parâmetro que pode auxiliar na otimização das propriedades dos produtos obtidos no processo ESR.

A Figura 4 apresenta um gráfico no qual são apresentadas curvas calculadas de LST em função da taxa de refusão da liga Udimet 700 (Ni-18%Co-4%Al-3,4%Ti) em processos de refusão. Uma das curvas está associada ao processo ESR e a outra, ao processo VAR ("Vacuum Arc Remelting"), que é semelhante ao ESR sob o ponto de vista de solidificação. Observa-se no gráfico a presença de um ponto de mínimo no LST em função da taxa de refusão. A partir desta observação, pode-se concluir que as condições de processamento industriais devem ser ajustadas para se obter o menor LST e, por conseguinte, a estrutura mais refinada possível.

A grande maioria dos modelos matemáticos encontrados na literatura apresentou resultados para simulações sob situações muito específicas, ou seja, foram definidos: um tipo de material, uma única dimensão de lingote, uma taxa de refusão e uma condição de extração de calor através do molde. Uma análise mais ampla envolvendo estas quatro variáveis (tipo de material, taxa de refusão, condição de extração de calor e diâmetro do lingote) não foi apresentada. Isto dificulta a aplicação dos resultados da literatura para definir as variáveis de processamento nas diversas condições industriais atualmente utilizadas.

Figura 4 - Tempo local de solidificação (LST) em função da taxa de refusão calculado para lingotes de 300 mm de diâmetro da liga Udimet 700 (BALLANTYNE; KENNEDY; MITCHEL, 1979).

A solidificação no processo ESR ocorre em um regime transiente, porque o lingote cresce continuamente com o tempo. Entretanto, observa-se que, no topo do lingote, onde se localiza a poça de fusão, parâmetros como o campo de temperaturas, a profundidade da poça de fusão e o tamanho da zona pastosa permanecem inalterados após um determinado período. Este regime é muitas vezes chamado de estado estacionário na literatura, porém será definido como estado quase-estacionário no presente trabalho, visto que na base do lingote o campo de temperaturas ainda varia continuamente. Por outro lado, existem trabalhos de pesquisa onde o lingote foi assumido ter o tamanho final desde o início da simulação, desprezando o período inicial antes de se atingir o estado quase-estacionário. Nestes casos, o regime foi definido como estacionário no presente trabalho.

O conhecimento da duração do período transiente necessário para o sistema atingir o estado quase-estacionário é muito importante, pois apenas após este período a estrutura do lingote passa a ser uniforme, resultando também em propriedades uniformes. Portanto, o modelo matemático deve ser capaz de prever este período. No entanto, entre os modelos propostos para o ESR, apenas alguns tratam o regime transiente e, entre estes, não há uma análise mais profunda dos mecanismos de transferência de calor. A Tabela 1 resume o regime térmico utilizado nos vários modelos já propostos.

Tabela 1 Regimes térmicos adotados nos modelos matemáticos apresentados na literatura.

Autor(es)	Regime de solidificação
Elliot e Maultvault (1973)	Estacionário
Paton et al. (1973)	Transiente e Quase-estacionário
Jeanfils, Chen e Klein (1979)	Transiente e Quase-estacionário
Takahama e Gammal (1979)	Transiente e Quase-estacionário
Ballantyne e Mitchell (1977)	Transiente e Quase-estacionário
Dilawari e Szekely (1977)	Estacionário
Dilawari e Szekely (1978)	Estacionário
Choudhary e Szekely (1980)	Estacionário
Ridder et al. (1978)	Estacionário
Ferng, Chieng e Pan (1989)	Estacionário
Jardy, Ablitzer e Wadier (1991)	Estacionário
Gartling e Sackinger (1997)	Transiente e Quase-estacionário
Xu, Zhang e Lee (2002)	Transiente e Quase-estacionário

2 OBJETIVOS

O objetivo geral do presente trabalho é construir um modelo matemático de condução de calor bidimensional com mudança de fase para simular a solidificação dos lingotes durante os regimes transiente e quase-estacionário no processo de refino por eletroescória (ESR – "*Electroslag Remelting*"). Como objetivos específicos, os efeitos de uma extensa gama de condições de resfriamento, tipos de materiais, diâmetros de lingotes e taxas de refusão serão examinados nas características de solidificação dos lingotes, a saber, no formato da poça de metal líquido (poça de fusão), no tempo local de solidificação (LST) e no comprimento de lingote necessário para se atingir o regime quase-estacionário. Finalmente, o modelo será aplicado a uma situação industrial concreta e os seus resultados comparados a dados obtidos em uma siderúrgica.

3 REVISÃO DA LITERATURA

3.1 Histórico do Processo de Refino por Eletroescória

Concebido em 1935 nos Estados Unidos da América pelo inventor R. K. Hopkins, o processo “Kellogg Electric Ingot Process”, ou processo Hopkins (Figura 5), foi o predecessor do processo de refusão por eletroescória (ESR) (MCKEEN, JOSEPH, SPEHAR, 1962). Tal processo consistia na fusão de uma fita metálica em bobina, que era constantemente alimentada sobre uma escória à base de fluorita. Elementos de liga também eram adicionados ao sistema com a finalidade de se produzir vários tipos de ligas, uma vez que a fita metálica continha apenas o metal base (aço 1010 para aços ligados e níquel puro para ligas à base de níquel).

O processo Hopkins, que foi utilizado com sucesso durante vários anos, apresentava uma grande desvantagem: eventualmente, os usuários encontravam “inclusões de fita metálica” no interior dos produtos acabados devido a fragmentos das fitas que atravessavam a escória e eram incorporados à poça de fusão. Portanto, nos anos 50 as fitas foram substituídas por eletrodos sólidos de composição química muito próxima daquela desejada, que evitavam a ocorrência de inclusões.

Durante e após a II Guerra Mundial, a indústria aeronáutica demandou produtos com altos níveis de limpeza e com alta forjabilidade. Em 1953 a empresa Firth-Sterling produziu a liga A-286 (ASTM A453) através do processo VAR (“Vaccum Arc Remelting”), observando uma melhora sensível na qualidade do produto. Entretanto, também foi observado que era necessário esmerilhar a superfície do eletrodo (condicionamento) e cortar parte de sua extremidade superior para se obter a qualidade necessária. Além disso, a taxa de fusão deveria ser relativamente baixa para evitar a segregação. Este último procedimento piorava ainda mais a qualidade superficial do lingote, demandando uma nova etapa de condicionamento para se atingir a forjabilidade necessária. Em uma tentativa de solucionar este problema, a Firth-Sterling enviou vários eletrodos para a M. W. Kellogg Co para serem processados através do processo Hopkins. Os eletrodos foram enviados em três

condições: sem nenhum condicionamento (como fundido); com uma etapa de condicionamento (superfície esmerilhada); forjado, posteriormente torneado e sem a extremidade superior (“cabeça-quente”). A qualidade de todos os lingotes obtidos através da refusão dos três eletrodos utilizando o processo foi excelente e levou a Firth Sterling Inc. à adquirir o processo Hopkins em 1959. (MITCHELL, 1985)

Figura 5 - Diagrama esquemático do processo Hopkins (MCKEEN, JOSEPH e SPEHAR, 1948)

Os desenvolvimentos do processo ESR na antiga União Soviética começaram em 1954, quando foram realizadas as primeiras experiências de refusão no Instituto

E.O. Paton Welding, em Kiev (Schlatter, 1975)¹. No começo da década de 60 os soviéticos começaram a publicar seus resultados, mostrando a sua excelente capacidade na produção de ligas com alta qualidade. Estes trabalhos geraram grande interesse no ocidente, onde foram iniciados diversos projetos para o desenvolvimento do processo.

O desenvolvimento do processo ESR em grande escala começou na Inglaterra em 1963, através da English Steel Corporation e da British Iron and Steel Association. Trabalhos de pesquisa importantes conduzidos pela Boehler Brothers na Áustria culminaram em avanços significativos na tecnologia do controle da refusão. O desenvolvimento da tecnologia do processo ESR permitiu a obtenção de ligas com propriedades excelentes. Um dos objetivos do processo na época em que foi desenvolvido era a remoção de enxofre. Atualmente esta remoção pode ser realizada através dos processos de metalurgia de panela. No entanto, os lingotes produzidos pelo processo ESR ainda apresentam características especiais devido aos menores níveis de inclusão comparados com o processo convencional (MELLBERG, 1979) e ao melhor controle da solidificação, permitindo a obtenção de uma estrutura dendrítica e de grãos mais refinada do que aquelas observadas nos processos de lingotamento convencionais.

A produção de materiais refundidos pelo processo ESR tem crescido em torno de 3,8% ao ano. A produção mundial cresceu de 400.000 para 650.000 toneladas no período de 1992 a 2006 ². Atualmente, as previsões para os próximos dois anos, segundo a empresa austríaca Steel Market Research apontam para um crescimento de 4% na produção de aços ferramentas e de 5% na produção de ligas à base de níquel e aços inoxidáveis especiais. Desta forma, o processo ESR ainda se mantém como uma excelente alternativa para a fabricação de ligas com propriedades que satisfazem altíssimos níveis de exigência.

---

¹ Notas de aula do curso "Vacuum Metallurgy" ministrado por René Schlatter na UCLA em março de 1975.

² Informação fornecida pela empresa Steel Market Research em Junho de 2007.

3.2 Características e Funcionamento do Processo de Refino por Eletroescória

O processo de refino ou refusão por eletroescória (ESR), que é utilizado para refino secundário de ligas metálicas, está apresentado novamente na Figura 6 para facilitar a leitura deste capítulo.

Figura 6 - Esquema do ESR mostrando em detalhe as gotas metálicas, interface lingote-molde e velocidade de crescimento do lingote (V_m) e de descida do eletrodo (V_e).

Inicialmente, um eletrodo sólido da liga que será processada é posicionado sobre o banho líquido de escória. Aplica-se uma diferença de potencial elétrico entre o eletrodo e a base da lingoteira, resultando em uma corrente elétrica que percorre o eletrodo, a escória, o lingote e a base da lingoteira. Através do efeito Joule, esta

corrente aquece a escória (que apresenta a maior resistência elétrica do sistema) a temperaturas acima da temperatura liquidus da liga do eletrodo. Calor é então transferido da escória ao eletrodo, resultando na fusão de sua extremidade inferior e na formação de gotículas metálicas. Estas gotículas atravessam a escória, com a qual trocam calor e massa, e acabam por se alojar na poça de fusão localizada logo abaixo. O metal líquido da poça de fusão acaba solidificando devido à extração de calor pela lingoteira, resultando no aumento contínuo do comprimento do lingote.

O eletrodo é continuamente introduzido através da superfície superior do banho de escória. O lingote refundido, que age como um eletrodo secundário, é continuamente formado abaixo deste banho. A escória líquida é continuamente movimentada na direção ascendente pela ação das forças de empuxo impostas pelo metal líquido localizado abaixo. A escória toca a superfície lateral refrigerada da lingoteira, resultando na formação de uma camada de escória sólida em torno do perímetro da mesma (DUCKWORTH e HOYLE, 1969). O formato resultante é de um toróide. Na medida em que a poça de metal líquido sobe, tal camada é refundida apenas na sua porção interior, resultando, portanto, em uma fina camada sólida (que está em contato com a lingoteira) recoberta por uma camada líquida (que está em contato com o metal). Esta camada de escória líquida formada promove a alta qualidade superficial do lingote, pois evita o contato direto entre o metal líquido e a lingoteira refrigerada (DUCKWORTH e HOYLE, 1969). À medida que o menisco avança, este filme líquido solidifica-se sobre o filme sólido pré-existente gerando assim a camada de escória final mostrada esquematicamente em detalhe na Figura 6. Após o final do processo e posterior resfriamento, o lingote deve ser extraído do interior da lingoteira. A camada de escória formada quebra-se, facilitando também o processo de extração.

3.2.1 Características das Escórias

A escória do processo ESR tem um papel fundamental na qualidade do lingote produzido e no funcionamento do sistema elétrico do equipamento. A quantidade de inclusões, a composição química, a qualidade superficial do lingote e as condições de utilização do sistema elétrico estão diretamente associadas às características das

escórias. As escórias comumente utilizadas no processo ESR são compostas de fluorita (CaF_2), cal (CaO), alumina (Al_2O_3) e pequenas adições de óxido de magnésio (MgO), sílica (SiO_2) e titânia (TiO_2) (DUCKWORTH; HOYLE, 1969). Algumas das características destas escórias estão apresentadas a seguir (DUCKWORTH; HOYLE, 1969):

1. A composição química da escória deve ser selecionada para evitar a oxidação de elementos facilmente oxidáveis, como o titânio e o silício;
2. É desejável que a temperatura *liquidus* da escória esteja pouco abaixo da temperatura *liquidus* da liga a ser refundida, resultando em um lingote de boa superfície;
3. Existe uma faixa desejável para a condutividade elétrica da escória, acima da qual o calor gerado pelo efeito Joule não é suficiente para refundir o eletrodo e abaixo da qual a potência necessária para o sistema elétrico e periféricos torna-se muito elevada;
4. A volatilidade dos elementos que compõe a escória deve ser relativamente baixa para minimizar a utilização de sistemas de exaustão de grande capacidade;
5. As inclusões são removidas principalmente pela escória e, portanto, ela deve ser selecionada para dissolver e reagir com as inclusões contidas nas gotículas líquidas do eletrodo fundido.

A capacidade de remover inclusões é uma das características fundamentais do processo ESR. A remoção ocorre tanto por dissolução como por reação química com a escória. Tal remoção ocorre quando os materiais não metálicos são expostos diretamente à escória em três locais (Figura 7): (1) região do filme fino de metal líquido que se forma na ponta do eletrodo em contato com a escória aquecida; (2) interface entre as gotas metálicas e a escória e (3) interface entre a poça metálica e a escória, onde pode haver a presença de inclusões após a sua flotação na poça metálica. (DUCKWORTH; HOYLE, 1969)

Figura 7 - Detalhe dos sítios onde ocorre a interação entre as inclusões e a escória.

3.2.2 Tipos de Fornos

Os dois principais tipos de fornos empregados no processo ESR são aqueles que utilizam um único eletrodo para cada lingote refundido em um molde estático ("*static mold*") sem movimento relativo entre o lingote e a lingoteira (Figura 8). Uma segunda classe de processo emprega múltiplos eletrodos juntos ou em sequência para formar um lingote refundido. Esta segunda classe pode ser ainda subdividida em fornos que utilizam moldes deslizantes (Figura 9), nos quais o molde se movimenta em relação ao forno ("*moving mold*"), e aqueles que possuem base retrátil ("*withdraw*"), nos quais o lingote se movimenta em relação ao forno (Figura 10).³

³ Notas de aula do curso "Vacuum Metallurgy" ministrado por René Schlatter na UCLA em março de 1975.

Figura 8 - Forno com lingoteira estática utilizando apenas um eletrodo: (a) início e (b) final da refusão.

Figura 9 - Seqüência de etapas consecutivas na refusão de um lingote no forno com lingoteira deslizante utilizando seqüencialmente 3 eletrodos.

Figura 10 - Seqüência de etapas consecutivas na produção de um lingote no forno com base retrátil utilizando 3 eletrodos seqüencialmente.

3.2.3 Características dos Eletrodos

Entre as características principais dos eletrodos que alimentam o processo ESR estão: a composição química; o diâmetro e a condição superficial (superfície esmerilhada ou não) (DUCKWORTH; HOYLE, 1969). Geralmente, o eletrodo possui composição química muito próxima daquela objetivada no produto final. Em alguns casos, os teores de elementos oxidáveis nos eletrodos são obtidos com um pequeno acréscimo em relação à aos teores no produto final, pois uma ligeira oxidação ocorre durante o processo ESR.

O diâmetro do eletrodo deve ser menor do que o da lingoteira no qual será refundido. A razão entre as áreas da seção transversal do eletrodo e da lingoteira, chamada de "*fill ratio*", segundo Duckworth e Hoyle (1969) define a profundidade da poça de fusão: quanto maior esta razão, mais rasa será a poça metálica.

A preparação da superfície do eletrodo é necessária somente se a retenção dos elementos químicos for crítica. A presença de uma camada de óxidos sobre o eletrodo pode, por exemplo, tornar difícil a retenção de elementos prontamente oxidáveis como o titânio e o alumínio, pois acarreta no aumento do potencial de

oxigênio na escória. Quando tal efeito não é crítico, muito pouca preparação do eletrodo é feita, sendo possível o uso de eletrodos produzidos em lingoteiras de ferro fundido sem praticamente nenhum condicionamento superficial.

3.2.6 Seqüência de Processo e Parâmetros de Controle

A seqüência do processo ESR consiste na adição da escória no forno, na ignição da fonte de potência e na refusão propriamente dita. A escória pode ser adicionada ao forno de duas formas, definindo se o tipo de partida é realizado com escória líquida ("*liquid start*") ou com escória sólida ("solid" ou "*dry start*"). Na partida líquida a escória é fundida em um forno a arco elétrico contendo um cadinho e eletrodos de grafite. Por outro lado, na partida sólida a escória é colocada juntamente com uma pequena quantidade de material condutor pulverizado (geralmente alumínio ou grafite) sobre a base da lingoteira de cobre durante a montagem do conjunto lingoteira-base. O forno é então ligado pela ignição da fonte de potência, resultando na formação de arcos elétricos entre o eletrodo e a base de cobre, que finalmente aquecem e fundem a escória (MITCHELL, 1985).

Após a estabilização da corrente elétrica, a potência aplicada e a taxa de refusão são elevadas. Esta elevação é necessária para compensar a taxa de extração de calor relativamente alta através da base da lingoteira refrigerada no período inicial do processo e para promover rapidamente a formação da poça de metal líquido abaixo da escória. Após a formação da poça, a potência é levemente reduzida à medida que o comprimento do lingote aumenta e a poça metálica abaixo da escória afasta-se da base da lingoteira (MITCHELL, 1985).

Quando se atingem os estágios finais do processo de refusão, as condições são alteradas para reduzir a profundidade da poça de fusão, resultando em uma direção de solidificação praticamente vertical (solidificação direcional) (MITCHELL, 1985). Este procedimento é chamado de cabeça-quente ("*hot top*") e visa minimizar a retenção de porções da escória na poça de fusão e a quantidade de porosidade no topo do lingote refundido. Um exemplo de programa de refusão utilizado na fabricação de lingotes do aço SAE 4340 está apresentado na Figura 11.

Figura 11 - Gráfico mostrando o planejamento da taxa de refusão ao longo de uma corrida, realçando o procedimento conhecido como “cabeça quente” para um lingote da liga SAE 4340 de 1000 mm de diâmetro (MITCHELL, 1985).

Os principais parâmetros de controle do processo ESR são: a taxa de refusão; a vazão da água de refrigeração da lingoteira; a espessura do banho de escória e o tipo e quantidade dos desoxidantes adicionados (DUCKWORTH e HOYLE, 1969). A taxa de refusão é a quantidade de material refundido por unidade de tempo, que depende da quantidade de energia fornecida à poça de metal líquido através da corrente elétrica e da diferença de potencial aplicadas. A utilização de uma taxa de refusão e de uma vazão da água de refrigeração corretas pode resultar no refinamento da estrutura metalúrgica e na diminuição da quantidade de porosidade nos lingotes produzidos (DUCKWORTH e HOYLE, 1969). Por exemplo, uma corrida com extração de calor e taxa de refusão relativamente baixas induzem a formação de uma grossa camada de escória e uma solidificação vertical. Estas condições reduzem a profundidade da poça de metal líquido, aumentando a possibilidade de formação de porosidades e rechupes no lingote.

3.3 Modelagem Matemática do Processo ESR

A modelagem matemática do processo ESR será descrita nesta seção. As regiões geralmente modeladas matematicamente no ESR são denominadas de

eletrodo, escória e metal. O metal é ainda subdividido em poça de metal líquido, zona pastosa e lingote sólido ou refundido. A zona pastosa compreende a região localizada entre as isotermas *liquidus* e *solidus*. Estas regiões estão indicadas na Figura 12. A modelagem matemática destas regiões está descrita nos quatro próximos itens. No item 3.3.1, será apresentada a modelagem da transferência de calor nos processos ESR e VAR para a região metálica. No item 3.3.2 serão apresentados os principais efeitos modelados nas regiões da escória e do eletrodo. Em seguida, no item 3.3.3, serão apresentadas as condições de contorno normalmente adotadas para modelar o processo ESR e, finalmente, no item 3.3.4 as metodologias empregadas para a solução numérica das equações diferenciais dos modelos serão apresentadas.

Figura 12 - Principais domínios de simulação do processo ESR: eletrodo, escória, e metal, que está subdividido em poça de metal líquido, zona pastosa e lingote sólido.

3.3.1 Modelagem Matemática da Região do Metal

A região metálica do processo ESR, que compreende o lingote refundido (sólido), a zona pastosa e a poça de metal líquido (Figura 12), é a região que foi mais estudada sob o ponto de vista da modelagem matemática, pois é o local onde a solidificação ocorre. Podem-se dividir os trabalhos estudados em modelos de domínio único, que consideram o metal líquido, a zona pastosa e o lingote sólido como um só domínio regido pelo mesmo conjunto de equações, e modelos de vários domínios, que tratam os diversos fenômenos em cada uma destas sub-regiões através de equações individuais. Esta seção será, portanto, subdividida em duas subseções que mostrarão a modelagem matemática através dos modelos de domínio único e dos modelos de vários domínios.

3.3.2.1 Modelos de Domínio Único

A transferência de calor na região metálica, muitas vezes envolvendo a convecção no metal líquido, afeta diretamente a solidificação. Portanto, inicialmente serão apresentadas as equações utilizadas para modelar a transferência de calor na região metálica do ESR e, em seguida, as equações utilizadas para modelar o escoamento, que afeta o transporte por convecção. Utilizando este equacionamento, os autores calcularam diversos parâmetros na região metálica, como por exemplo, o campo de temperaturas, o campo de fração de sólido e a profundidade da poça de fusão.

a) Modelagem da Transferência de Calor

Paton et. al. (1973), Ballantyne e Mitchell (1977) utilizaram a equação diferencial de condução de calor para modelar a transferência de calor no processo ESR. Portanto, a convecção no líquido foi desprezada, mas a mudança de fase devido à solidificação foi considerada. A equação utilizada, escrita em um sistema de

coordenadas cilíndricas fixo na base do lingote (Figura 12) para duas dimensões e com simetria axial do campo de temperaturas, está apresentada abaixo:

$$\rho C_{peq} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(k_{ec} r' \frac{\partial T}{\partial r'} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \left(k_{ec} \frac{\partial T}{\partial z'} \right) \quad [1]$$

onde T é a temperatura, r' e z' são as coordenadas espaciais ao longo do raio e da altura, respectivamente, e ρ é a densidade. Esta equação nos apresenta, ainda, dois termos que serão comentados em mais detalhes a seguir: a condutividade térmica efetiva k_{ec} e o calor específico equivalente C_{peq}

Os gradientes térmicos e a interação entre os campos magnético e elétrico resultam na convecção da fase líquida da região metálica. Para simular tal efeito, utiliza-se a condutividade térmica efetiva, dada por $k_{ec} = \lambda k$, onde k é a condutividade térmica molecular e λ é um coeficiente que aumenta a condutividade térmica na região onde existe líquido ($\lambda > 1$). Este coeficiente simula de forma simplificada o aumento de transporte de calor devido à convecção. Ballantyne e Mitchell (1977) simularam o processo ESR para um lingote de 400 mm de diâmetro utilizando $\lambda = 2$ e $\lambda = 5$ e não observaram diferenças significativas na profundidade da poça de fusão calculada. No entanto, Elliot e Maultvault (1973) mencionaram variações de 3 a 5 cm na profundidade de poça e um ligeiro aumento na espessura da zona pastosa quando λ foi alterado de 1 para 3 durante a simulação de um lingote de 400 mm de diâmetro.

O segundo termo que merece maior atenção é o calor específico equivalente, C_{peq} , que é utilizado para modelar a liberação de calor latente na solidificação, sendo definido como (Rappaz; 1989):

$$C_{peq} = C_p - L \frac{d\varepsilon_s}{dT} \quad [2]$$

onde C_p é o calor específico a pressão constante, L é o calor latente de fusão e ε_s é a fração de sólido. O cálculo de C_{peq} foi realizado por diversos autores, como Elliot e Maultvault (1973), Paton et al (1973), Ballantyne e Mitchell (1977) e Choudhary e Szekely (1980), assumindo que a fração de sólido variava linearmente ao longo das temperaturas *solidus* (T_s) e *liquidus*. (T_L). Neste caso, C_{peq} foi definido como:

$$C_{peq} = C_p - \frac{L}{T_s - T_L} \quad [3]$$

Em seu modelo, Takahama e Gammal (1979) acrescentaram à equação [1] a geração de calor por efeito Joule devido à passagem da corrente elétrica ao longo do lingote. Para tanto o termo S_J foi adicionado à equação de condução de calor, obtendo-se:

$$\rho C_{peq} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(k r' \frac{\partial T}{\partial r'} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \left(k \frac{\partial T}{\partial z'} \right) + S_J \quad [4]$$

No entanto, os autores não apresentaram como este termo foi calculado. Aparentemente, a condutividade térmica efetiva não foi utilizada, pois nenhuma menção é feita sobre ajustes da condutividade para simular o efeito da convecção.

Jeanfils, Chen e Klein (1979), diferentemente dos autores anteriores, fixaram o referencial na superfície superior (em movimento) do lingote (Figura 12), com o eixo z orientado no sentido oposto ao do crescimento do lingote. A equação utilizada por estes autores está apresentada abaixo:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + V_m \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_{ec} r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{ec} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad [5]$$

onde H é a entalpia por unidade de volume (entalpia específica) e V_m é a velocidade de crescimento do lingote refundido, que é igual à velocidade do sistema de referências. O segundo termo ao lado esquerdo da equação está associado à convecção (ou advecção) decorrente da movimentação do lingote em relação ao sistema de referência móvel. Esta movimentação relativa aparece com a mudança do sistema de referência fixo localizado na base (r', z') para um sistema de referência móvel localizado no topo do lingote em crescimento (r, z).

Observa-se também que, nos termos do lado esquerdo da equação [5], aparece a entalpia específica, ao invés da temperatura. A entalpia específica é definida como (RAPPAZ, 1979):

$$H(T) = \int_0^T c_p \cdot d\theta + L \cdot (1 - \varepsilon_s) \quad [6]$$

Quando esta entalpia específica é utilizada na equação de transferência de calor para modelar a solidificação, o método de modelagem é chamado de método da entalpia. Note que a utilização da equação [6] para o cálculo de H em função de T somente é possível se a fração de sólido, ε_s , for conhecida em função da temperatura. Para este cálculo, diversos autores assumiram que esta fração variava linearmente entre a temperatura *liquidus* (T_L) e a temperatura *solidus* (T_S). Jeanfils,

Chen e Klein (1979), no entanto, utilizaram o modelo de Scheil (KURZ; FISHER; 1989). As poças de fusão calculadas através dos dois modelos (variação linear e de Scheil) foram comparadas, mostrando que não há diferenças significativas. Estes autores utilizaram ainda $\lambda = 2$ para simular o efeito da convecção no líquido (Figura 13).

Figura 13 - Isothermas *solidus*, *liquidus*, da temperatura eutética, a 1366°C e isofração de sólido a 50% calculadas considerando a liberação de calor latente na zona na pastosa como obedecendo ao: (a) ao modelo de Scheil e (b) modelo linear (JEANFILS, CHEN e KLEIN, 1979).

Elliot e Maultvault (1973), Choudhary e Szekely (1980) apresentam modelos para o ESR que consideravam apenas o estado estacionário, desprezando o transiente inicial. A equação utilizada foi:

$$\frac{\partial(\rho \cdot C_p \cdot V_c \cdot T)}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S_J + S_L \quad [7]$$

onde S_L é o calor latente liberado durante a solidificação e S_J , já definido anteriormente, é o calor gerado devido ao efeito Joule. Os autores não descreveram como estes dois termos foram calculados. Elliot e Maultvault (1973) justificaram a hipótese do estado estacionário argumentando que este era verificado logo após o lingote ter atingido um comprimento igual a 2,5 vezes o valor de seu raio. Elliot e Maultvault (1973) observaram que uma variação de k_{ec} não alterou significativamente a profundidade das isothermas *solidus* e *liquidus* e o tamanho da zona pastosa.

Choudhary e Szekely (1980) propuseram um modelo onde uma equação semelhante à equação [7] foi utilizada. Nesta equação, apresentada abaixo, as condições estacionárias assumidas para gerar a equação [7] foram mantidas, porém o termo à esquerda foi escrito na forma não-conservativa:

$$\rho C_{peq} V_c \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_{ec} r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{ec} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad [8]$$

Nesta equação também foi utilizada a condutividade térmica efetiva, k_{ec} . O valor de λ assumido foi igual a 1/3 do valor de λ obtido para a escória, calculado através de um modelo matemático detalhado onde o escoamento turbulento foi considerado.

Ferng, Chieng e Pan (1989) propuseram um modelo de domínio único onde a zona pastosa foi assumida inexistente, ou seja, a região do metal consistia da poça líquida e do lingote sólido. A equação principal foi escrita para um sistema de referências móvel, fixo no topo do lingote em movimento. Nestas condições, como observado nas equações [5] a [8], um termo de convecção devido ao movimento relativo do lingote deve aparecer. No entanto, além de assumirem estado estacionário para o regime térmico, Ferng, Chieng e Pan (1989) consideraram que este termo de convecção era desprezível. A equação utilizada por estes autores para modelar a transferência de calor, escrita na forma conservativa, está apresentada abaixo:

$$\frac{\partial(\rho V_z T)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho V_r T)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k'}{C_p} r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k'}{C_p} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S_g \quad [9]$$

onde V_z e V_r são as componentes da velocidade do fluido nas direções axial e radial, respectivamente; k' representa a condutividade térmica molecular na região do metal sólido e a condutividade térmica turbulenta (k_t , que será comentada adiante) na região do metal líquido da poça; S_g representa a transferência de calor que ocorre entre o metal líquido da poça e as gotas de metal que se destacaram da base do eletrodo, atravessaram a escória e finalmente depositaram-se na poça de metal líquido sob a escória.

Uma diferença importante entre este modelo e os anteriores é a consideração explícita do transporte de calor por convecção, representado pelos termos no lado esquerdo da equação. Estes termos contêm as componentes do campo de velocidades do metal líquido (V_r e V_z) e contabilizam o efeito do transporte de massa na transferência de calor. Nos modelos anteriores foi utilizada a condutividade

térmica efetiva para modelar a convecção de forma mais simples, sem a necessidade de se conhecer o campo de velocidades no fluido.

O efeito do movimento turbulento no transporte de calor na poça líquida também foi modelado por Ferng, Chieng e Pan (1989). Neste caso, os valores de temperatura e de velocidade que aparecem na equação [9] são os tradicionais valores médios de Reynolds, definidos para o movimento turbulento como (SZEKELY, 1979):

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \phi(t) dt \quad [10]$$

onde $\bar{\phi}$ é uma grandeza média (temperatura ou velocidade média); ϕ é a grandeza instantânea e Δt é o período de tempo ao longo do qual a média da grandeza é calculada. Além das grandezas médias, Ferng, Chieng e Pan (1989) utilizaram em seu modelo de turbulência a condutividade térmica turbulenta, k_t , que simula o transporte de calor devido aos vórtices turbulentos.

Ferng, Chieng e Pan (1989) desprezaram o aquecimento pelo efeito Joule no metal causado pela passagem da corrente elétrica, porque a condutividade elétrica da fase metálica é relativamente alta. Como este modelo é de domínio único, na região do metal sólido a equação [9] automaticamente se transforma na equação de condução no interior da fase sólida, onde as componentes da velocidade do metal são nulas. Os autores propuseram um procedimento especial para considerar o calor latente que é liberado na região da interface sólido-líquido.

Gartling e Sackinger (1997) desenvolveram um modelo para simulação da solidificação no processo de refino por refusão a arco sob vácuo (VAR - "Vaccum Arc Remelting"). Apesar de existirem diferenças entre os equipamentos utilizados nos processos ESR e VAR, a transferência de calor e a solidificação são bastante semelhantes nos dois casos, por isso os modelos para o VAR serão também apresentados. A principal equação para simular a transferência de calor utilizada por Gartling e Sackinger (1997) foi:

$$\begin{aligned} \rho C_{peq} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p (1 - \varepsilon_s) \left(V_z \frac{\partial T}{\partial z} + V_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{|\vec{J}|^2}{\sigma_e} \end{aligned} \quad [11]$$

onde $\vec{J}$ é o vetor densidade de corrente elétrica e σ_e é a condutividade elétrica. O valor utilizado para a condutividade térmica k foi uma média das condutividades no sólido e no líquido, ponderada pela fração de sólido local. O último termo à direita da equação está associado à geração de calor por efeito Joule, devido à passagem da corrente elétrica no metal.

Neste modelo, como no modelo de Ferng, Chieng e Pan (1989), também se considerou explicitamente o transporte de calor por convecção. No entanto, apenas o efeito do escoamento laminar foi simulado, ou seja, desprezou-se o eventual movimento turbulento na região do metal líquido e da poça de fusão. Uma outra diferença fundamental é que a equação [9] (modelo de Ferng, Chieng e Pan (1989)) foi aplicada apenas às fases líquida e sólida (a zona pastosa foi desprezada), enquanto a equação [11], de Gartling e Sackinger (1997), foi aplicada também à zona pastosa.

Zhang e Lee (2002) também desenvolveram um modelo matemático que simula a transferência de calor em lingotes produzidos pelo processo VAR considerando também explicitamente o transporte de calor por convecção (apenas devido ao escoamento laminar). A principal equação utilizada foi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho H)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_z H)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho V_r H)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{C_p} r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{C_p} \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \\ + \frac{|\vec{J}|^2}{\sigma_e} - \left[\frac{\partial(\rho \varepsilon_L L)}{\partial t} + \frac{\partial(V_z \rho \varepsilon_L L)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r V_r \rho \varepsilon_L L)}{\partial r} \right] \end{aligned} \quad [12]$$

Como pode ser observado na equação, foi utilizado o método da entalpia. Os três últimos termos entre colchetes ao lado direito da equação surgiram devido à utilização da entalpia específica nos termos de condução de calor. Além disso, os termos ao lado esquerdo foram escritos na forma conservativa, em lugar da forma não-conservativa utilizada na equação [11].

b) Modelagem do Escoamento do Metal Líquido

Os modelos de Ferng, Chieng e Pan (1989), Gartling e Sackinger (1997), e Zhang e Lee (2002) consideraram explicitamente o transporte de calor por convecção através de termos que dependem do campo de velocidades no metal líquido (V_r e V_z). Desta forma, o cálculo do campo de temperaturas através das

equações de seus modelos (equações [9], [11] e [12]) somente foi possível após o cálculo do campo de velocidades obtido através da modelagem do escoamento, como descrito a seguir.

Ferng, Chieng e Pan (1989) calcularam o campo de velocidades utilizando as equações da continuidade e da conservação da quantidade de movimento para o movimento turbulento aplicadas apenas à poça de metal líquido, já que a zona pastosa foi desconsiderada. Estas equações estão apresentadas abaixo, respectivamente, para o regime quase-estacionário:

$$\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho V_r)}{\partial r} = 0 \quad [13]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho V_z V_z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho V_r V_z)}{\partial r} = & -\frac{\partial P}{\partial z} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu_{eff} \frac{\partial V_z}{\partial z} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_{eff} r \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \right] \\ & + \rho \beta (T - T_{ref}) g + F_z \end{aligned} \quad [14]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho V_z V_r)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho V_r V_r)}{\partial r} = & -\frac{\partial P_r}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right] + 2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_{eff} r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right] \\ & - 2 \mu_{eff} \frac{V_r}{r^2} + F_r \end{aligned} \quad [15]$$

onde $\mu_{eff} = \mu + \mu_t$ é a viscosidade efetiva, sendo μ a viscosidade molecular e μ_t a viscosidade turbulenta; P_r é a pressão; β é o coeficiente de expansão térmica; g é a aceleração gravitacional; T_{ref} é uma temperatura de referência fixa, na qual a densidade ρ é calculada; e F_z e F_r são as componentes da força de Lorentz. A viscosidade turbulenta, μ_t , foi calculada através do modelo de turbulência k- ϵ (SZEKELY, 1979). Analogamente à aplicação da equação [9], as equações [13] a [15] são utilizadas também para o cálculo de valores médios das grandezas de campo (V_r , V_z , e P_r) do escoamento turbulento. Como mencionado anteriormente neste modelo, o sistema de referências foi fixado no topo do lingote.

Gartling e Sackinger (1997), no seu modelo para o processo VAR, utilizaram também as equações da continuidade e da quantidade de movimento para a previsão do campo de velocidades do metal líquido, agora em um regime transiente. Estas equações, definidas abaixo, foram aplicadas para a modelagem do escoamento laminar na poça de metal líquido e na zona pastosa:

$$\frac{\partial V_z'}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_r')}{\partial r} = 0 \quad [16]$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\varepsilon_L} \left[\frac{\partial V_z'}{\partial t} + V_r' \frac{\partial V_z'}{\partial r} + V_z' \frac{\partial V_z'}{\partial z} \right] = - \frac{\partial P}{\partial z} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial V_z'}{\partial z} \right] \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu r \left(\frac{\partial V_z'}{\partial r} + \frac{\partial V_r'}{\partial z} \right) \right] - \left(\frac{\mu}{\kappa} \right) V_z' - \rho \beta (T - T_{ref}) g + F_z \end{aligned} \quad [17]$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\varepsilon_L} \left(\frac{\partial V_r'}{\partial t} + V_r' \frac{\partial V_r'}{\partial r} + V_z' \frac{\partial V_r'}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial V_r'}{\partial z} + \frac{\partial V_z'}{\partial r} \right) \right] + 2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu r \frac{\partial V_r'}{\partial r} \right] \\ - 2 \mu \frac{V_r'}{r^2} - \left(\frac{\mu}{\kappa} \right) V_r' + F_r \end{aligned} \quad [18]$$

onde ε_L é a fração de líquido local e κ é a permeabilidade à passagem do metal líquido na zona pastosa. As componentes de velocidade radial e axial foram substituídas pelas chamadas velocidades superficiais V_r' e V_z' , que são definidas como $V_r' = \varepsilon_L V_r$ e $V_z' = \varepsilon_L V_z$, respectivamente. Observa-se que são também consideradas: as forças de Lorentz (componentes F_r e F_z) e a resistência à passagem do fluido na zona pastosa ($\mu V_r' / \kappa$ e $\mu V_z' / \kappa$). Assim como no modelo de Ferng, Chieng e Pan (1989), o sistema de referências foi fixado no contorno superior do lingote. Logo, este sistema tem uma velocidade de movimentação igual à do crescimento do lingote. A velocidade do crescimento do lingote (movimento de translação) não foi separada da velocidade local do metal líquido, pois as equações [16] a [18] são aplicadas também à fase sólida. Desta forma, a velocidade relativa imposta aos contornos é automaticamente transmitida à fase sólida, que é assumida possuir uma viscosidade aparente relativamente elevada.

Zhang e Lee (2002) calcularam o campo de velocidades no metal líquido para um regime laminar e transiente a partir da solução das equações da continuidade e da conservação da quantidade de movimento aplicadas tanto à região completamente líquida, como à zona pastosa (modelo de domínio único). As equações estão, respectivamente, apresentadas abaixo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho V_r)}{\partial r} = 0 \quad [19]$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r V_r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right] - \left(\frac{\mu}{\kappa} \right) V_r + F_r \quad [20]$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] - \left(\frac{\mu}{\kappa} \right) V_z - F_z + \rho \beta \frac{H - H_{ref}}{C_p} g \quad [21]$$

onde H_{ref} é uma entalpia de referência relativa à temperatura onde a densidade ρ é calculada. Apesar das equações [19] a [21] serem válidas tanto na poça de metal líquido como na zona pastosa, as velocidades V_r e V_z não foram mencionadas como sendo a velocidade superficial, como considerado no modelo de Gartling e Sackinger (1997). Desta forma, este equacionamento está em desacordo com as equações usualmente utilizadas para modelar o escoamento na zona pastosa (Ni e Beckermann, 1991). Os autores também não mencionaram explicitamente o local onde o sistema de coordenadas foi fixado. Como a condição de contorno utilizada para as equações do escoamento foi a de velocidade nula nos contornos laterais, em contato com a lingoteira, o sistema de coordenadas parece ter sido fixado na lingoteira.

Nos três modelos apresentados para o cálculo do escoamento, foi considerada a força de Lorentz, de componentes F_r e F_z . Esta força é definida como sendo uma força de campo que resulta da interação entre a densidade de fluxo magnético $\vec{B}$ e a densidade de corrente $\vec{J}$. A força de Lorentz, calculada de acordo com a equação abaixo (SZEKELY, 1979), é suficientemente intensa no processo ESR para influenciar o escoamento do metal líquido:

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} \quad [22]$$

Note que, para o cálculo de $\vec{F}$, é necessário calcular também os campos vetoriais $\vec{B}$ e $\vec{J}$. Estes campos são obtidos através das equações de Maxwell (SZEKELY, 1979).

3.3.2.2 Modelos de Vários Domínios

No modelo de vários domínios, equações diferenciais são definidas individualmente para cada região do metal, a saber, o metal líquido, a zona pastosa e o lingote sólido. Os modelos que foram construídos sobre este conceito são

geralmente mais antigos, onde a posição e o formato da interface sólido-líquido era assumida *a priori*. Existem basicamente três modelos matemáticos de vários domínios propostos para o processo ESR: o modelo de Dilaware e Szekely (1978), de Ridder et al. (1978) e de Jardy, Ablitzer e Wadier (1991).

Dilaware e Szekely (1978) solucionaram o transporte de calor por convecção na poça do metal líquido, assumindo condições estacionárias e considerando que a geometria da poça de metal líquido era plana (não dendrítica) e horizontal. A zona pastosa foi assumida inexistente. A principal equação utilizada para modelar a transferência de calor, apresentada abaixo, foi escrita para um referencial móvel localizado no topo do lingote em movimento:

$$\rho C_p \left[(V_c + V_z) \frac{\partial T}{\partial z} + V_r \frac{\partial T}{\partial r} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_{et} r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{et} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S_g \quad [23]$$

onde k_{et} é uma condutividade térmica efetiva tradicionalmente utilizada na modelagem dos efeitos do escoamento turbulento. Esta condutividade é definida como $k_{et} = k_t + k$, onde k_t é a condutividade térmica turbulenta, também utilizada no modelo de Ferng, Chieng e Pan (1989) (equação [9]), e k é a condutividade térmica molecular do líquido. Novamente, as grandezas de campo da equação [23] são grandezas médias, definidas pela equação [10].

Jardy, Ablitzer e Wadier (1991) também modelaram a transferência de calor no metal líquido da poça de fusão através de uma equação análoga à equação [23]. No entanto, estes autores consideraram o aquecimento devido ao efeito Joule, representado pelo termo S_J , mas desprezaram a troca de calor entre a poça e as gotas originárias na base do eletrodo (termo S_g). Apesar de não ter sido mencionado, a velocidade de crescimento do lingote refundido parece ter sido desprezada, pois esta velocidade não aparece no equacionamento e a taxa de refusão, que está diretamente associada à velocidade, não foi fornecida.

Jardy, Ablitzer e Wadier (1991) modelaram o escoamento turbulento do metal líquido através das seguintes equações:

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_r)}{\partial r} = 0 \quad [24]$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_{eff} r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{eff} \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \quad [25]$$

$$- \rho \beta (T - T_{ref}) g + F_z$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_{eff} r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) - \mu_{eff} \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{eff} \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) + F_r \quad [26]$$

Estas equações são equivalentes àquelas utilizadas por Ferng, Chieng e Pan (1989) (equações [13], [14] e [15]) para modelar o escoamento turbulento na poça de fusão. No entanto, os termos no lado esquerdo das equações [24], [25] e [26] estão escritos na forma não-conservativa, enquanto Ferng, Chieng e Pan (1989) escreveram na forma conservativa. Nos dois modelos foi utilizada a viscosidade efetiva, μ_{eff} , que é função da viscosidade turbulenta, μ_t . Esta viscosidade turbulenta, obtida através do modelo de turbulência k- ϵ , varia ao longo do fluido, ou seja, não é constante. Porém, nas equações [24], [25] e [26], propostas por Jardy, Alitzer e Wadier (1991), foram omitidos alguns termos no lado direito que não poderiam ser desprezados quando a viscosidade não é constante.

Dilawari e Szekely (1978) apresentam as mesmas equações que Jardy, Alitzer e Wadier (1991) para descrever o escoamento. Entretanto, elas foram escritas na forma da função de corrente-vorticidade para facilitar a resolução numérica.

Como mencionado anteriormente, Dilawari e Szekely (1978) assumiram que a interface sólido-líquido era plana, ou seja, desprezaram a zona pastosa. Jardy, Alitzer e Wadier (1991), entretanto, obtiveram a zona pastosa a partir de um modelo semelhante ao de Ballantyne e Mitchell (1977), definido pela equação [1]. Os detalhes do equacionamento não foram fornecidos. O modelo de Ridder et al. (1978), por outro lado, foi o primeiro modelo de vários domínios a considerar o escoamento na zona pastosa. Estes autores utilizaram a equação da continuidade e a Lei de Darcy, tradicionalmente empregadas em meios porosos para determinar o campo de velocidades na zona pastosa. As equações estão apresentadas abaixo:

$$\frac{\partial(\rho_L(1-\epsilon_s) + \rho_s \epsilon_s)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho_L(1-\epsilon_s)V_z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho_L(1-\epsilon_s)rV_r)}{\partial r} \quad [27]$$

$$V_r = - \frac{\kappa}{\mu(1-\epsilon_s)} \frac{\partial P_r}{\partial r} \quad [28]$$

$$V_z = - \frac{\kappa}{\mu(1-\epsilon_s)} \left(\frac{\partial P_r}{\partial z} + \rho g \right) \quad [29]$$

No domínio do lingote sólido, Ridder et al. (1978) utilizaram a equação de condução apresentada abaixo para obter o campo de temperaturas, após fixarem o referencial no topo móvel do lingote:

$$\rho C_p V_c \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad [30]$$

Dilawari e Szekely (1978), diferentemente de Ridder et al. (1978), não parecem ter solucionado a equação de condução no sólido.

3.3.2 Modelagem Matemática da Região da Escória e do Eletrodo

Apenas uma breve descrição da modelagem matemática da transferência de calor na região da escória e do eletrodo será apresentada neste item, pois uma abordagem mais profunda está fora do escopo do presente trabalho. A transferência de calor na região do eletrodo foi modelada por Mitchell, Joshi e Cameron (1971) considerando condições estacionárias e utilizando a equação diferencial de condução. O campo térmico no interior do eletrodo também foi obtido por Choudhary e Szekely (1980) considerando que a ponta deste eletrodo estava na temperatura *liquidus* do metal de que é produzido e solucionando a equação de condução de calor.

Dilawari e Szekely (1977) calcularam o campo de velocidades na escória solucionando as equações de Navier-Stokes para o escoamento turbulento (RANS - "Reynolds Averaged Navier-Stokes") e as equações de Maxwell para o cálculo do termo que envolve a força de Lorentz. Estes autores assumiram ainda condições estacionárias, e de temperatura uniforme e constante na escória. Os resultados mostraram que, em condições industriais, as velocidades da escória variavam entre 5 a 10 cm.s⁻¹, enquanto que as velocidades do metal líquido são substancialmente menores. Choudhary e Szekely (1981) utilizaram um modelo matemático em regime estacionário onde as equações do escoamento foram solucionadas na escória considerando a energia transferida para as gotas metálicas que a atravessavam e o aquecimento pelo efeito Joule devido à passagem da corrente elétrica. Em simulações sob condições industriais, estes autores reportaram um número de

Reynolds de 5900 ($Re = \frac{\rho.V.2.R}{\mu}$), onde: ρ é a densidade, V é velocidade, R é o raio e μ é a viscosidade. A partir deste valor de Re , os autores concluíram que o movimento na escória é realmente turbulento. Eles concluíram também que, devido à forte convecção existente, o campo térmico é relativamente uniforme e que os maiores gradientes de temperatura estão nas regiões limítrofes da escória próximas às interfaces com a lingoteira. Além disso, suas simulações mostraram que 60% do calor gerado através do efeito Joule devido à passagem da corrente elétrica na escória é transferido para a lingoteira e não para o eletrodo ou para o metal líquido.

3.3.3 Condições de Contorno no Processo ESR

Nos itens anteriores, as equações propostas para modelar a transferência de calor e o escoamento no processo ESR foram apresentadas. Esta modelagem é relativamente complexa e os vários autores que propuseram modelos matemáticos utilizaram as condições de contorno que serão apresentadas neste item. A Figura 14 mostra esquematicamente as interfaces ou contornos da região metálica, onde existe algum tipo de transferência de calor que deve ser definido através de condições de contorno. As condições de contorno para outras regiões não serão apresentadas aqui, pois está fora do escopo do presente trabalho, mas podem ser encontradas na revisão apresentada por Hernandez-Morales e Mitchell (1999).

Figura 14 - Principais interfaces da região metálica onde devem ser definidas condições de contorno.

Verifica-se a existência de três interfaces principais nas quais as condições de contorno devem ser definidas (Figura 14), a saber: (1) interface entre o lingote e a base da lingoteira (região do pé do lingote); (2) interface entre a superfície lateral do lingote e da lingoteira e (3) interface entre a superfície superior do lingote (cabeça do lingote) e a escória líquida.

Na interface (1) (lingote-base) Choudhary e Szekely (1980) e Ferng, Chieng e Pan (1989), que apresentaram modelos estacionários, não mencionaram explicitamente o tipo de condição de contorno utilizada. Entre os modelos que consideraram estado transiente, apenas Elliot e Maultvault (1973) assumiram que o fluxo de calor é nulo (condições adiabáticas) nesta interface. Esta hipótese parece ser razoável quando se está interessado em modelar a poça de fusão, pois após o lingote refundido atingir um determinado comprimento, a transferência de calor na sua base não deve afetar significativamente a região da poça. Os outros modelos (Paton et al (1973), Jeanfils, Chen e Klein (1979), Ballantyne e Mitchell (1977)) utilizaram um coeficiente de transferência de calor para definir o fluxo de calor nesta interface, como mostrado abaixo:

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} = h_b (T - T_a) \quad [31]$$

onde h_b é o coeficiente de transferência de calor entre o lingote refundido e a base da lingoteira e T_a é a temperatura da água de refrigeração. Ballantyne e Mitchell (1977) utilizaram um coeficiente h_b que variou entre $795,4 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ e $209,3 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ do início até o final da corrida, respectivamente. Através de simulações de um lingote do aço AISI 4340 com 1000 mm de diâmetro e 4000 mm de comprimento final, observou-se que a profundidade de poça era pouco afetada quando os valores de h_b eram alterados entre zero e $419 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$.

A condição de contorno na interface (2), localizada no contato entre a superfície lateral do lingote e da lingoteira, foi modelada pela maioria dos autores (Elliot e Maultvault (1973), Paton et al (1973), Jeanfils, Chen e Klein(1979), Takahama e Gammal (1979), Ballantyne e Mitchell (1977) e Dilawari e Szekely (1978)) através de um coeficiente de transferência de calor definido pela equação abaixo (sistema de coordenadas cilíndricas):

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = h_m (T - T_a) \quad [32]$$

onde h_m é o coeficiente de transferência de calor na interface lateral lingote-lingoteira, e T_a é a temperatura da água de refrigeração. Nesta interface existem cinco principais resistências térmicas (YU; 1984), a saber: (1) filme lateral de escória; (2) vão formado devido à contração do lingote; (3) parede da lingoteira de cobre e (4) filme de depósito de resíduos da água de refrigeração e (5) contato entre a superfície da lingoteira e a água de refrigeração. Note que o coeficiente h_m é então um coeficiente de transferência de calor global que abrange todas estas resistências térmicas. Como estas resistências variam ao longo do comprimento do lingote, o valor de h_m deve variar também.

Elliot e Maultvault (1973) consideraram que o vão entre o filme de escória e a parede da lingoteira se iniciava quando a temperatura da superfície do lingote decrescia abaixo de $1000 \text{ }^\circ\text{C}$ durante a solidificação de um aço carbono, cujo teor não foi especificado. Também assumiram que o vão aumentava com a diminuição da temperatura na superfície do lingote, resultando na diminuição do coeficiente h_m . A faixa de valores usados foi de $418,68$ a $188,41 \text{ W m}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

Takahama e Gammal (1979) analisaram o efeito da presença do vão entre o filme de escória e a lingoteira e o efeito da ebulição da água de refrigeração. O valor de h_m para a região onde não há vão utilizado foi de $4,07$ a $11,63 \text{ kW m}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

Ballantyne e Mitchell (1979) assumiram o valor de $556,8 \text{ W m}^{-2} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ antes da formação do vão e uma variação de $556,8 \text{ W.m}^{-2}.\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ a $20,93 \text{ W.m}^{-2}.\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ após a sua formação para a lingoteira de base retrátil. Não foram esclarecidos os critérios utilizados para determinar quantitativamente esta variação ao longo da altura do lingote.

Ferng, Chieng e Pan (1989) também utilizaram a condição dada pela equação [32], assumindo também a existência de uma camada líquida de escória e que a temperatura da superfície do lingote era mantida na temperatura de fusão da escória.

A interface (3), entre o metal e a escória, é uma das mais complexas para se definir, resultando na proposta de diversas hipóteses. Elliot e Maultvault (1973) adotaram uma condição de temperatura prescrita no topo do lingote de um aço médio-carbono (condição de Dirichlet⁴), mas utilizaram três formas de variação da temperatura ao longo do raio: (1) temperatura constante (1680°C); (2) variação parabólica da temperatura com o raio entre 1720°C e 1580°C e (3) variação linear da temperatura com o raio entre a superfície e o centro do lingote. Uma comparação dos resultados de profundidade das isothermas *solidus* e *liquidus* calculadas utilizando-se as três abordagens não mostrou diferenças para um lingote de 20 cm de raio.

Takahama e Gammal (1979) também consideraram que a temperatura na interface metal-escória é constante. Ballantyne e Mitchell (1977), simulando a solidificação de ligas de níquel no processo ESR, mantiveram a temperatura do topo do lingote constante em um valor na faixa de 150°C a 250°C acima da temperatura *liquidus* da liga.

Paton et al. (1973) utilizaram uma condição de contorno onde o fluxo de calor da escória para o metal líquido foi definido (condição de Neumann⁵). No entanto, não foi apresentado como tal fluxo foi obtido ou mesmo quais os valores utilizados.

No modelo de Jeanfils, Chen e Klein (1979) esta condição de contorno foi definida pela somatória de dois fluxos: um fluxo de calor que vem da escória e um segundo fluxo associado ao calor transportado pela movimentação das gotas superaquecidas em 111°C . O fluxo de calor transferido pela escória foi modelado

---

⁴ Condição de contorno na qual a temperatura é conhecida.

⁵ Condição de contorno na qual o fluxo de calor é conhecido.

utilizando-se um coeficiente de transferência de calor global entre o interior da escória e a superfície do metal no valor de $2840 \text{ W m}^{-2} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.

Ballantyne e Mitchell (1979) utilizaram um coeficiente de transferência de calor global entre o interior da escória e o interior do metal líquido para definir a condição de contorno na interface metal-escória. Estes autores examinaram o efeito de três diferentes valores de coeficientes, a saber, $837,36 \text{ W.m}^{-2}.\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$; $4.186,8 \text{ W.m}^{-2}.\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ e $12.560 \text{ W.m}^{-2}.\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, resultando em uma variação máxima na profundidade da poça líquida de aproximadamente 7%. Os autores verificaram que tal falta de sensibilidade está ligada ao fato de que o fluxo de calor trocado por convecção entre a escória e a poça de metal líquido é muito menor do que o calor transferido entre as gotas de metal líquido que percolam a escória e a poça.

Dilawari e Szekely (1978), Ferng, Chieng e Pan (1989) modelaram a transferência de calor na escória e no eletrodo, além da região metálica. Portanto, obtiveram os campos de temperatura em todas estas regiões. Desta forma, como condição de contorno na interface metal-escória, simplesmente assumiram a igualdade de fluxos de calor e temperaturas nos dois lados da interface. Os resultados do modelo de Dilawari e Szekely (1978) mostraram que a temperatura ao longo da interface metal-escória variava de acordo com uma parábola em função da coordenada radial, mostrando uma diferença de aproximadamente 60°C entre as temperaturas da superfície e do centro do lingote.

Ridder et al. (1978) utilizaram condições semelhantes às de Dilawari e Szekely (1978) e Ferng, Chieng e Pan (1989), porém utilizaram coeficientes de transferência de calor para definir os fluxos no metal e na escória, pois o campo de temperaturas detalhado não foi calculado para a escória.

Todos os modelos apresentados acima consideraram que o campo de temperaturas é simétrico em relação ao eixo longitudinal do lingote. Desta forma, na linha de centro do lingote cilíndrico pode-se escrever:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad [33]$$

Acima foram descritas as principais equações e condições de contorno utilizadas na modelagem matemática do processo ESR. A seguir, a metodologia numérica empregada para resolução destas equações será descrita.

3.3.4 Metodologia de Solução Numérica

As equações descritas acima para modelar o processo ESR são complexas e soluções analíticas são muito difíceis de serem obtidas. Portanto, a maior parte dos autores solucionou seu conjunto de equações através de métodos numéricos. A solução através de métodos numéricos envolve a subdivisão do domínio através de um conjunto de pontos ou volumes, processo denominado de discretização (Fortuna 2000). Ao conjunto de pontos ou volumes dá-se o nome de malha. A Figura 15 mostra um exemplo de uma malha de pontos utilizada no método das diferenças finitas aplicado a lingote do processo ESR.

No processo ESR, o lingote cresce continuamente ao longo do tempo. Logo, a simulação numérica deste processo apresenta um desafio adicional de como adaptar a malha ao aumento contínuo do domínio físico. Muitos autores, no intuito de contornar esta dificuldade, analisaram apenas uma região de tamanho fixo após o lingote ter atingido um determinado comprimento, a partir do qual acreditava-se existir um estado estacionário do perfil de poça metálica. Os modelos que utilizam tal abordagem são classificados neste trabalho como estacionários (Tabela 1).

Dentre os autores que consideraram o aumento contínuo do domínio, ou seja, utilizaram um modelo transiente, apenas Ballantyne e Mitchell (1977), Jeanfils, Chen e Klein (1979) explicitaram em seu trabalho o procedimento numérico usado.

Figura 15 – Desenho esquemático mostrando: (a) a região do metal, que consiste no lingote sólido e na poça de fusão e (b) a malha de nós utilizadas para a discretização.

O procedimento usado por Ballantyne e Mitchell (1977) consiste na simples adição de uma nova linha de nós da malha após o transcorrer de um determinado período de tempo. Jeanfils, Chen e Klein (1979), por outro lado, aumentaram gradativamente a distância entre as duas linhas de nós superiores da malha à medida que o lingote crescia. Quando esta distância atingia um determinado espaçamento, adicionava-se uma nova linha de nós. Não há estudos detalhados da eficácia desta técnica de adaptação de malha nos resultados destas simulações.

Após a definição da malha, o processo de solução numérica envolve a discretização das equações diferenciais. O processo de discretização transforma as equações diferenciais em um sistema de equações algébricas, que pode ser solucionado por métodos numéricos conhecidos. Esta solução é chamada de solução numérica da equação diferencial. Devido às diversas aproximações utilizadas em todo o processo numérico, a solução numérica difere da solução exata destas equações e esta diferença é chamada de erro numérico. Este erro numérico está diretamente associado, entre outros, ao número de elementos (nós ou volumes) desta malha. Observa-se que um aumento do número de elementos geralmente reduz o erro numérico e aproxima a solução numérica da solução exata das equações (Fortuna, 2000).

Durante a resolução numérica das equações diferenciais discretizadas, um experimento numérico é altamente recomendável para se garantir que o erro entre a solução numérica e a solução exata, muitas vezes desconhecida, seja desprezível. Tal experimento, chamado de teste de convergência, pode ser feito através de comparações de sucessivas soluções com malhas cada vez mais refinadas. Entre os trabalhos consultados, apenas Jeanfils, Chen e Klein (1979) mencionaram a realização de um teste de convergência. Para a liga simulada (Ni-27%Mo), a profundidade da poça de metal líquido de um lingote de 41 cm de diâmetro variou de 15,2 cm para 17,8 cm, quando o tamanho de 25,4 x 25,4 mm dos elementos foi diminuído para a metade.

3.4 Efeitos das Variáveis de Processamento na Solidificação do Processo ESR

Durante a solidificação de um lingote produzido no processo ESR, o formato da poça de metal líquido, o comprimento do lingote no qual o regime quase-estacionário é atingido e o tempo local de solidificação são sensivelmente afetados pelas variáveis de processamento. Estes três parâmetros de solidificação definem a estrutura metalúrgica (p.ex., o espaçamento entre os braços dendríticos) e, portanto, também as propriedades dos materiais produzidos. Dados relativos a estes parâmetros de solidificação e as técnicas utilizadas para sua determinação serão apresentados a seguir.

3.4.1 Geometria da Poça de Fusão

A poça de fusão consiste na região que engloba o metal líquido e a zona pastosa. O perfil geométrico desta poça foi determinado experimentalmente através da adição de FeS (MELLBERG, 1973 e LONGBOTTOM, et. al., 1973) ou tungstênio (JEANFILS, CHEN e KLEIN, 1979) durante a solidificação, ou ainda simplesmente desligando-se a fonte de potência (REITER et al., 2005) e examinando-se o efeito na estrutura metalúrgica final. A técnica de adição é eficiente para determinar o perfil da poça, porque o material que é adicionado à superfície do metal líquido decanta até a profundidade da poça e permanece nesta posição até o final da solidificação. No caso da adição do sulfeto de ferro, o lingote é posteriormente cortado na sua seção longitudinal, onde é realizada uma impressão de Balmann, que revela as regiões ricas em enxofre. Desta forma, a impressão mostra a posição final do FeS adicionado, que deve ser aproximadamente a posição do fundo da poça de fusão. Por outro lado, quando o tungstênio é adicionado, devido à sua alta densidade ele se deposita mais rapidamente no fundo da poça de metal líquido e se dissolve muito pouco até o final da solidificação. Desta forma, ele também permite a observação do formato da poça à temperatura ambiente.

Utilizando uma técnica diferente, Reiter et al. (2005) determinaram o perfil da poça metálica para a liga 718 (ASTM B 637) tracejando linhas perpendiculares ao

eixo central de grãos colunares observados em um corte longitudinal do lingote. (Figura 16). Esta técnica é puramente baseada na hipótese que os grãos estão sempre orientados perpendicularmente às isoterma.

Figura 16 – Estrutura de grãos e perfil de poça construído a partir de um lingote de 410 mm de diâmetro da liga 718 (ASTM B 637) (REITER et al.,2005).

Longbottom et al. (1973) obtiveram perfis de poça metálica em 16 lingotes produzidos através do processo ESR adicionando FeS em intervalos de tempo correspondentes ao crescimento de trechos de 150 mm no comprimento do lingote. A Figura 17 apresenta a poça de fusão obtida para dois lingotes diferentes.

Figura 17 - Perfis de poças metálicas obtidas através de sucessivas adições de FeS em lingotes de 25,4 cm de diâmetro. As linhas pontilhadas indicam o diâmetro do eletrodo (LONGBOTTOM et. al.,1973).

Utilizando esta técnica, Longbottom et al. (1973) estudaram o efeito no formato da poça de fusão da área transversal do molde, da espessura da camada de

escória, da razão entre a área do eletrodo e a área do lingote ("fill ratio"), do perímetro do molde e da potência aplicada. Para caracterizar o formato da poça, foi utilizado um fator de forma, ψ , definido como:

$$\psi = \frac{P^2 \cdot X}{A \cdot 2R} \quad [34]$$

onde X é a largura da poça metálica à meia altura; P é o perímetro da poça; $D = 2R$ é o diâmetro do lingote e A é a área da poça observada na seção longitudinal do lingote. Estes parâmetros podem ser observados na Figura 18.

Figura 18 - Parâmetros geométricos da poça metálica utilizados para definição do fator de forma (LONGBOTTOM et al., 1973).

Mellberg (1979) utilizou dados experimentais apresentados por Mellberg (1973) para correlacionar o formato da poça de fusão nos lingotes do processo ESR com a velocidade de crescimento destes lingotes e com a taxa de resfriamento (Figura 19). O formato das poças foi obtido através da adição de FeS e a taxa de resfriamento foi obtida a partir da temperatura medida por um termopar inserido no metal líquido e outro na escória. Mellberg (1979) observou o aparecimento de dois tipos de geometrias, que foram denominadas A e B (Figura 19) sem um critério preciso.

Figura 19 – Mapa que possibilita determinar o tipo de geometria da poça de fusão (A ou B) a partir da taxa de resfriamento e da velocidade de crescimento dos lingotes (MELLBERG, 1979).

O efeito da taxa de refusão nas características da poça líquida durante o regime quase-estacionário foi analisado por Jeanfils, Chen e Klein (1979). Estes autores concluíram que um aumento na taxa de refusão resulta em um aumento na profundidade da poça líquida e na espessura da zona pastosa (Figura 20).

Figura 20 - Profundidade da poça de fusão e espessura da zona pastosa em função da taxa de refusão. Adaptado de Jeanfils, Chen e Klein (1979).

Os perfis da geometria da poça líquida determinados por Logbottom e Greenfield (1973) pela adição de partículas de tungstênio mostraram uma boa aderência aos perfis calculados através de um modelo matemático de condução de calor, como mostra a Figura 21.

Figura 21 - Comparação entre os perfis geométricos experimentais (linha pontilhada) de poças de fusão e perfis calculados através de um modelo matemático (linhas contínuas) para uma liga Co-Ni-Cr-Al-Ti em três diferentes instantes de crescimento do lingote (LONGBOTTOM; GREENFIELD, 1973).

Ballantyne e Mitchell (1977) utilizaram seu modelo matemático para simular a solidificação de lingotes do aço 4340 e observaram que, nas condições simuladas, a profundidade da poça metálica na linha de centro varia de forma aproximadamente linear com o diâmetro do lingote e com a taxa de refusão. Durante a simulação da solidificação de um lingote com taxa de refusão de 1000 kg.h^{-1} , observou-se que a profundidade da poça atingiu o estado quase-estacionário a uma altura entre 1 e 1,5 vezes o diâmetro do lingote. Um dos formatos da poça de fusão calculados por Ballantyne e Mitchell (1977) está comparado com o formato obtido experimentalmente na Figura 22.

Figura 22 - Poça metálica observada experimentalmente e calculada (linha tracejada) para um lingote da liga A286 de 320 mm de diâmetro (BALLANTYNE; MITCHELL, 1977).

Choudhary e Szekely (1980), Ferng, Chieng e Pan (1989) apresentaram comparações entre o formato geométrico das poças metálicas obtidas experimentalmente e as calculadas pelos seus respectivos modelos, obtendo boa aderência (Figura 23).

Figura 23 - Comparação entre o perfil geométrico da poça de fusão medida experimentalmente (os símbolos Δ e $\square$ indicam os resultados das impressões de Balman) e calculada pelos modelos de Ferng, Chieng e Pan (1989) (linha contínua) e Choudhary e Szekely (1981) (linha tracejada).

3.4.2 Período Transiente

O período transiente é definido como o período necessário para que as variáveis de campo e o formato da poça de fusão atinjam o estado quase-estacionário. Após este período, a estrutura do lingote produzido passa a ser mais homogênea. Paton

et al. (1973) determinou através de um modelo matemático de condução e experimentalmente o período transiente monitorando a evolução da profundidade da poça metálica ao longo do tempo para diversas taxas de refusão (Figura 24). O tempo adimensional ou número de Fourier foi definido como $Fo = \frac{\alpha t}{R^2}$ (α é a difusividade térmica do material e R é o raio do lingote), e a taxa de refusão adimensional (número de Péclet) como $Pe = \frac{V_m R}{\alpha}$. O estado quase-estacionário é atingido quando a alteração da profundidade da poça é desprezível.

Figura 24 – Evolução da razão entre a profundidade da isoterma *liquidus* instantânea e a profundidade da isoterma *liquidus* após o estado quase-estacionário ter sido atingido em função do tempo adimensional (Fo) obtida através de um modelo matemático para: $Pe = (1) 5,8$; $(2) 7,9$; $(3) 11,9$; e obtida experimentalmente $(4) 13,7$ (PATON et al. (1973)).

Takahama e Gammal (1979) calcularam a profundidade adimensional da poça de fusão, Z_L^* , definida como a razão entre a profundidade da isoterma *liquidus* e o raio do lingote, em função do comprimento adimensional do lingote, L^* , definido pela razão entre o seu comprimento instantâneo e o seu raio. Como mostrado na Figura 25, após o lingote atingir o comprimento de aproximadamente 3,5 vezes o seu raio, a profundidade da isoterma *liquidus* não mais é alterada, indicando que o estado quase-estacionário foi atingido. Este comprimento para se atingir o estado quase-estacionário foi determinado apenas para um número reduzido de condições e de tipos de materiais. Os autores também afirmaram que a profundidade da poça parece variar linearmente com a taxa de refusão (Pe).

Figura 25 - Profundidade adimensional da isoterma *liquidus*, Z_L^* , em função da altura adimensional do lingote (L^*) para vários números de Péclet (Pe) (TAKAHAMA; GAMMAL, 1979).

3.4.3 Tempo Local de Solidificação

Nos trabalhos anteriores à década de 70, acreditava-se que o formato geométrico da poça de fusão determinava a estrutura metalúrgica do lingote. Nos trabalhos posteriores, considerou-se que a estrutura dendrítica, especificamente o espaçamento entre os braços dendríticos, seria mais bem correlacionada com o tempo local de solidificação (LST - "local solidification time"), diante de diversas evidências experimentais nos mais variados sistemas (Flemings; 1974; Kurz e Fisher; 1989). O LST calculado em função da taxa de refusão através do modelo de Ballantyne e Mitchell (1979) para um aço ferramenta H13 (ASTM A681) e para a liga INC 718 (ASTM B 637) está mostrado na Figura 26 e na Figura 27, respectivamente.

Figura 26 - Tempo local de solidificação (LST) para um aço ferramenta do tipo H13 (ASTM A681) calculado em função da taxa de refusão (BALLANTYNE; MITCHELL, 1979).

Figura 27 – Tempo local de solidificação (LST) em função da taxa de refusão para lingotes de dois diâmetros diferentes da liga INC 718 (ASTM B 637). A linha tracejada representa um limite mínimo desejado. (MITCHELL e SMAILER, 1979).

Com a finalidade de representar uma larga faixa de temperaturas *liquidus* e *solidus* e de propriedades físicas dos materiais, foram consideradas neste estudo as ligas: D2, L605, H13, AISI 304, AISI 403 e Hastelloy-X. Concluiu-se que, apesar das

diferenças nas propriedades das ligas, a taxa de refusão ótima, definida como sendo aquela que fornece o menor LST (e, portanto uma estrutura mais refinada) se mantém aproximadamente constante.

Diversos modelos mais recentes, como o de Ferng, Chieng e Pan (1989) e o de Choudhary e Szekely (1980), consideraram o escoamento do metal líquido afetado pelos campos elétrico e magnético. No entanto, como a zona pastosa foi desprezada, não foi possível calcular o LST.

Os modelos analisados mostram que os modelos matemáticos para a simulação térmica e do escoamento no processo ESR alcançaram um bom nível de confiabilidade, pois os principais efeitos físicos são levados em conta e as comparações entre modelos e experimentos mostram uma boa aderência. Um ponto passível de melhoria, entretanto, é o pobre rigor matemático com que foi tratada a adaptação da malha para simulação do aumento do comprimento do lingote. Como o topo do lingote é o local onde há a entrada de calor sensível com a chegada das gotas metálicas superaquecidas, o erro envolvido na incorreta adaptação da malha numérica neste local pode, por exemplo, violar as equações de conservação e representar um erro grosseiro.

O modelo de Ferng, Chieng e Pan (1989) pode ser considerado como um dos mais completos desenvolvidos até o momento para o processo ESR, pois considera a transferência de calor e o escoamento na escória e no metal líquido a partir de primeiros princípios. Entretanto, o regime térmico utilizado foi o estacionário e a zona pastosa foi desprezada, limitando a aplicação para a maior parte das ligas industriais. Os resultados apresentados para os modelos descritos podem ser utilizados para um conjunto muito restrito de materiais e de condições de processamento, que envolvem basicamente a capacidade de extração de calor pela lingoteira, os diâmetros do lingote e as taxas de refusão. Entretanto, é praticamente impossível a apresentação de resultados para qualquer combinação destas variáveis. Portanto, uma análise adimensional do problema poderia fornecer um conjunto mais abrangente de resultados.

4 METODOLOGIA

No presente trabalho foi construído um modelo matemático para simular a transferência de calor durante a solidificação no processo ESR. Duas análises do modelo implementado foram conduzidas com metodologias distintas. Na primeira análise, chamada de análise paramétrica, procurou-se estudar a solidificação em uma ampla faixa de condições de processamento e materiais, possibilitando um melhor entendimento de como as diversas variáveis afetam a transferência de calor no processo ESR. Na segunda análise, chamada de análise de um caso industrial, o modelo foi utilizado para simular a solidificação de um lingote obtido industrialmente através do processo ESR.

Nas seções 4.1 e 4.2 está apresentada a metodologia da modelagem matemática utilizada. Esta metodologia engloba principalmente as equações diferenciais e condições de contorno do modelo, mas também a técnica empregada para considerar o “crescimento” do lingote ao longo do tempo. No caso da análise paramétrica, as equações do modelo foram ainda adimensionalizadas como descrito na seção 4.3. A técnica numérica de solução das equações está apresentada na seção 4.4, enquanto as condições de simulação para os dois tipos de análise estão na seção 4.5. Na seção 4.6 está o procedimento de medida de temperaturas na parede da lingoteira durante a solidificação no processo ESR e, finalmente, na seção 4.7, está a técnica experimental para a obtenção da localização da poça de metal líquido do lingote.

4.1 Equações do Modelo Matemático

As equações do modelo matemático utilizado na análise paramétrica e na análise do caso industrial estão apresentadas neste item. As hipóteses simplificadoras adotadas são:

- (a) O domínio modelado, apresentado na Figura 28, compreende apenas a região do lingote, ou seja, a escória, o eletrodo, a base de cobre e a lingoteira não

fazem parte do domínio do modelo, mas afetam este domínio através das condições de contorno;

- (b) O lingote cresce continuamente através da movimentação de seu contorno superior (topo do lingote) com uma velocidade constante igual a V_m ;
- (c) O transporte de calor por convecção foi completamente desprezado na primeira análise (análise paramétrica), mas foi considerado de forma simplificada na análise do caso industrial utilizando-se uma condutividade térmica efetiva;
- (d) As variáveis de campo, como por exemplo, a temperatura e a fração de sólido são simétricas em relação ao eixo longitudinal (esta hipótese é utilizada em praticamente todos os modelos já construídos para o ESR);
- (e) A fração de sólido, ε_s , varia linearmente entre as temperaturas *liquidus* (T_L) e *solidus* (T_S), ou seja, $\varepsilon_s = (T_L - T)/(T_L - T_S)$;
- (f) A temperatura do contorno superior do lingote (interface metal-escória) foi assumida constante com o tempo;
- (g) Na análise paramétrica, a temperatura do contorno superior do lingote (interface metal-escória) foi assumida constante ao longo do raio, porém, para a análise do caso industrial, esta temperatura foi assumida variar segundo uma parábola de concavidade negativa e com ponto de máximo no centro do lingote;
- (h) Todas as propriedades termofísicas são constantes na análise paramétrica, porém variáveis com a temperatura na análise industrial;
- (i) O coeficiente de transferência de calor na interface entre a superfície lateral do lingote e da lingoteira é constante na análise paramétrica, porém variável ao longo da altura do lingote na análise industrial;
- (j) O coeficiente de transferência de calor na interface entre a superfície inferior do lingote e a base da lingoteira é constante nas duas análises.

Note que a análise paramétrica envolveu hipóteses mais restritivas, onde diversas propriedades foram assumidas constantes para possibilitar uma análise mais fundamental e revelar os mecanismos de transferência de calor importantes. Na análise do caso industrial consideraram-se propriedades variáveis com o objetivo de aproximar o modelo o máximo possível das condições reais.

Figura 28 - Desenho do domínio modelado juntamente com suas condições de contorno

A maior parte das hipóteses descritas foi utilizada na grande maioria dos modelos matemáticos de transferência de calor para o processo ESR. Joshi e Mellberg (1971) apud Ballantyne e Mitchell (1977), por exemplo, mostraram que o perfil de temperatura na interface metal-escória na direção radial poderia ser ajustado por uma parábola centrada no eixo longitudinal do lingote e com sua concavidade para baixo (hipótese (g)).

Considerando estas hipóteses e adotando um sistema de coordenadas cilíndricas fixado no contorno superior (em movimento) do lingote (Figura 28), a equação utilizada no presente trabalho torna-se semelhante à equação utilizada para a modelagem no lingotamento contínuo (HARDIN e BECKERMAN, 1997), como mostrado abaixo

$$\left(\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p V_m \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + L_f \rho \left(\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + V_m \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} \right) \quad [35]$$

onde T é a temperatura; r e z são as coordenadas espaciais ao longo do raio e da altura respectivamente; ρ é a densidade; k é a condutividade térmica; C_p é o calor específico a pressão constante; L_f é o calor latente de fusão e ε_s é a fração de sólido

O primeiro e o segundo termo ao lado direito da equação [35] representam a condução de calor nas direções axial e radial, respectivamente. O último termo à direita representa a liberação de calor latente devido à solidificação. Este termo e o segundo termo no lado esquerdo da equação dependem da velocidade de crescimento do lingote, V_m . Esta velocidade surge na equação, porque o sistema de referências foi fixado no contorno superior do lingote, que está em constante movimento ascendente com uma velocidade igual a V_m . O segundo termo no lado esquerdo da equação [35] representa o transporte de calor por convecção resultante da movimentação do lingote em relação ao sistema de coordenadas. Caso o sistema de referências tivesse sido fixado no contorno inferior (região sólida do lingote ou base refrigerada), os termos envolvendo V_m desapareceriam.

A condição inicial e as condições de contorno adotadas para a equação [35] foram:

Condição Inicial

$$T = T_T \quad 0 < r < R, 0 < z < L_0, t = 0 \quad [36]$$

Condições de Contorno

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = h_m (T - T_a) \quad r = R, 0 < z < L, t > 0 \quad [37]$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = 0, 0 < z < L, t > 0 \quad [38]$$

$$k \frac{\partial T}{\partial z} = h_b (T - T_a) \quad 0 < r < R, z = L, t > 0 \quad [39]$$

$$T = T_T \quad 0 < r < R, z = 0, t > 0 \quad [40]$$

onde T_T é a temperatura no topo do lingote; h_b e h_m são os coeficientes de transferência de calor na interface entre o metal e a base da lingoteira e na interface entre o metal e a parede lateral da lingoteira, respectivamente; T_a é a temperatura da água de refrigeração da lingoteira; R é o raio do lingote; $L = L_0 + V_m \cdot t$ é o comprimento instantâneo do lingote e L_0 é o comprimento inicial do lingote.

Note que, no contorno superior, localizado na interface metal-escória, foi considerada uma condição de temperatura prescrita, ou de Dirichlet (equação [40]), analogamente ao trabalho de Ballantyne e Mitchell (1973). Nos contornos laterais, em contato com a lingoteira, e no contorno inferior, em contato com a base, o fluxo

de calor foi modelado utilizando-se coeficientes de transferência de calor diferentes, iguais a h_m e h_b , respectivamente. A condição dada pela equação [38] representa a condição de simetria axial mencionada nas hipóteses fornecidas.

4.2 Mudança de Coordenadas (Transformação de Landau)

Conforme descrito na hipótese (a) do item 4.1, o domínio modelado neste trabalho restringe-se ao lingote em solidificação que, por sua vez, tem seu comprimento variável ao longo do tempo, ou seja, apresenta um “crescimento” durante a solidificação. Portanto, uma metodologia numérica especial deve ser utilizada para considerar este crescimento. Ballantyne e Mitchell (1977), Jeanfils, Chen e Klein (1979) e Takahama e Gammal (1979) utilizaram uma malha adaptativa onde uma linha de elementos de volume da malha era adicionada no topo do lingote decorrido certo intervalo de tempo. Estes elementos eram assumidos terem uma temperatura inicial igual ao das gotas originárias do eletrodo que chegavam à poça de metal líquido.

No presente trabalho, preferiu-se adotar a chamada transformação de Landau (CRANK, 1984), que foi utilizada na solução de diversos problemas envolvendo contornos móveis, como, por exemplo, o problema da microsegregação (VOLLER e SUNDARRAJ, 1993) e da oxidação (ENTCHEV, LAGOUDAS e ILIEV, 2000), mas nunca foi aplicada à modelagem do processo ESR. A transformação de Landau consiste na mudança de uma variável independente que transforma as equações diferenciais aplicadas ao domínio original, que cresce constantemente, em novas equações (transformadas) que simulam o mesmo fenômeno, porém em um domínio fixo. Neste caso, o efeito do crescimento está considerado em alguns termos que automaticamente surgem nas equações transformadas.

Neste trabalho a função escolhida para esta transformação é apresentada abaixo:

$$z^* = \frac{z}{L(t)} \quad [41]$$

onde z^* é a nova variável independente; z é a antiga variável independente, definida como a coordenada axial do sistema cilíndrico; L é o comprimento instantâneo do lingote em crescimento, definido anteriormente por $L = L_0 + V_m \cdot t$.

Escrevendo a equação [35] em função da nova variável independente, z^* , tem-se:

$$\left(\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \frac{V_m}{L(t)} \frac{\partial T}{\partial z^*} (1 - z^*) \right) = \frac{1}{L(t)^2} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(k \frac{\partial T}{\partial z^*} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right) + L_f \rho \left(\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + (1 - z^*) \frac{V_m}{L(t)} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z^*} \right) \quad [42]$$

Algumas condições de contorno também são afetadas pela transformação de Landau, resultando em:

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = h_m (T - T_a) \quad r = R, 0 < z^* < 1, t > 0 \quad [43]$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = 0, 0 < z^* < 1, t > 0 \quad [44]$$

$$k \frac{\partial T}{\partial z^*} = L(t) \cdot h_b (T - T_a) \quad 0 < r < R, z^* = 1, t > 0 \quad [45]$$

$$T = T_T \quad 0 < r < R, z^* = 0, t > 0 \quad [46]$$

Comparando-se as equações [35] e [42], nota-se que a transformação modificou principalmente o segundo termo à esquerda do sinal de igualdade e o último termo à direita. Esta transformação resultou em um domínio de cálculo cuja variável z^* varia de 0 no topo até 1 na base, para qualquer tamanho instantâneo do lingote, $L(t)$. Desta forma, eliminou-se a inconveniência de se utilizar uma malha de tamanho variável para resolver numericamente as equações.

4.3 Modelo Adimensional para a Análise Paramétrica

Na análise paramétrica, as equações [42] a [46] foram escritas na forma adimensional para permitir uma ampla análise do efeito de algumas variáveis na solidificação do processo ESR. Foram definidas as seguintes variáveis adimensionais:

$$T^* = \frac{T - T_s}{T_L - T_s} \quad [47]$$

$$t^* = \frac{t \cdot \alpha}{R^2} \quad [48]$$

$$r^* = \frac{r}{R} \quad [49]$$

$$L^* = \frac{L(t)}{R} = L_0^* + \frac{V_m \cdot t}{R} \quad [50]$$

onde α é a difusividade térmica, dada por $\alpha = k / (\rho \cdot c_p)$ e $L_0^* = \frac{L_0}{R}$.

A equação diferencial e as condições inicial e de contorno adimensionalizadas estão apresentadas abaixo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + Pe \cdot \frac{1}{L^*} \cdot \frac{\partial T^*}{\partial z^*} (1 - z^*) \right) &= \frac{1}{L^{*2}} \cdot \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \\ &+ \frac{1}{Ste} \left(\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t^*} - Pe \cdot (1 - z^*) \frac{1}{L^*} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z^*} \right) \end{aligned} \quad [51]$$

Condição Inicial

$$T = T_T^* \quad 0 < z^* < 1, \quad 0 < r^* < 1, \quad t^* = 0 \quad [52]$$

Condições de Contorno

$$-\frac{\partial T^*}{\partial r} = Bi_m \cdot (T^* - T_a^*) \quad r^* = 1, \quad 0 < z^* < 1, \quad t^* > 0 \quad [53]$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial r^*} = 0 \quad r^* = 0, \quad 0 < z^* < 1, \quad t^* > 0 \quad [54]$$

$$-\frac{\partial T^*}{\partial z^*} = Bi_b \cdot (T^* - T_a^*) \quad 0 < r^* < 1, \quad z^* = 1, \quad t^* > 0 \quad [55]$$

$$T = T_T^* \quad 0 < r^* < 1, \quad z^* = 0, \quad t^* > 0 \quad [56]$$

onde o número de Péclet foi definido como $Pe = V_m \cdot R / \alpha$, representando uma taxa de refusão adimensional; o número de Stefan foi definido como $Ste = c_p \cdot (T_L - T_s) / L_f$, representando uma forma adimensional para o recíproco do calor latente de fusão; os números de Biot para a base e molde foram definidos

como $Bi_b = h_b R / k$ e $Bi_m = h_m R / k$ e, finalmente, T_T^* e T_a^* são as temperaturas adimensionais no topo do lingote e da água de refrigeração, respectivamente.

4.4 Solução das Equações do Modelo

As equações [51] a [56] para a análise paramétrica e as equações [42] a [46] para a análise do caso industrial foram discretizadas através do método dos volumes finitos, na sua formulação implícita, utilizando uma malha de tamanho fixo contendo 400 volumes ao longo da direção axial e 20 volumes ao longo da direção radial. Na seção 5.2 será apresentado o critério utilizado para definição desta malha. O sistema de equações algébricas resultante da discretização foi solucionado utilizando-se o método de Gauss-Seidel (PATANKAR, 1980). O código computacional para execução destas tarefas foi construído na linguagem computacional ANSI C a partir de um compilador Borland® C++ e um computador pessoal com processador Intel Celeron® 1,10GHz.

4.5 Condições de Simulação

4.5.1 Condições da Análise Paramétrica

O objetivo da análise paramétrica é examinar o efeito, em uma ampla faixa de condições industriais, de algumas variáveis de processamento na solidificação no processo ESR. A seguir será apresentada a estratégia utilizada para definir estas faixas no presente trabalho.

A faixa de valores do número de Péclet (Pe) foi obtida utilizando-se as propriedades dos aços-ferramenta, aços inoxidáveis e ligas à base de níquel. Os intervalos de diâmetros dos lingotes e das taxas de refusão praticadas pela Villares

Metals S.A. foram também utilizadas, resultando no intervalo: $1 \text{ (Ni200)} \leq Pe \leq 7 \text{ (SAE 316)}$.

O número de Stefan (Ste), que está intimamente associado ao fenômeno de solidificação por depender do calor específico, do calor latente de fusão e do intervalo de solidificação, foi calculado para as ligas supracitadas, obtendo-se o intervalo $0,05 \text{ (SAE 316)} \leq Ste \leq 0,1 \text{ (H13)}$. Entretanto, considerando-se uma liga de alumínio com intervalo de solidificação de aproximadamente 100°C , Ste pode atingir 0,43.

Os dados termofísicos das ligas mencionadas, a faixa de coeficientes de transferência de calor entre $200 \text{ W m}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ e $900 \text{ W m}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ (valores utilizados na literatura) e a faixa de diâmetros de lingote entre 10 e 50 polegadas foram considerados, resultando no seguinte intervalo de número de Biot (Bi): $1 \text{ (H13)} \leq Bi \leq 35 \text{ (SAE 316)}$.

A partir das faixas de condições industriais analisadas acima, foram definidos os seguintes intervalos finais para a análise paramétrica do presente trabalho:

- $Pe \leq 10$
- $0,05 \leq Ste \leq 1$
- $0,5 \leq Bi \leq 50$

A temperatura adimensional do topo, $T_T^* = 4,57$, foi obtida através da equação [47] utilizando-se as temperaturas *liquidus* e *solidus* do aço SAE 316 (1399°C e 1427°C respectivamente) e assumindo-se uma temperatura de topo igual a 122°C acima da temperatura *liquidus* deste mesmo material.

A temperatura adimensional da água de refrigeração, $T_a^* = -47,53$, foi obtida através do mesmo critério usado para a definição da temperatura T_T^* , porém com uma temperatura da água igual a 40°C .

A Tabela 2 mostra os valores das três variáveis adimensionais estudadas que foram utilizadas pelos autores consultados durante a revisão bibliográfica. Pode-se observar que as faixas definidas acima abrangem toda a gama de valores apresentados na literatura, com exceção de $Bi = 53,68$ utilizado por Jeanfils, Chen and Klein (1979).

Tabela 2 – Valores de Péclet, Biot e Stefan encontrados na literatura

Autores	Material	Péclet	Biot	Stefan
Elliot e Maulvault (1973)	Aço médio carbono	4,31	0,12	1,82
Elliot e Maulvault (1973)	Aço médio carbono	1,44	0,12	0,61
Elliot e Maulvault (1973)	Aço médio carbono	4,31	0,12	1,82
Elliot e Maulvault (1973)	Aço médio carbono	1,44	0,12	0,61
Elliot e Maulvault (1973)	Aço médio carbono	4,31	0,12	3,64
Elliot e Maulvault (1973)	Aço médio carbono	4,31	0,12	1,82
Longbottom (1973)	Não Mencionado	1,33	0,10	-
Longbottom (1973)	Não Mencionado	4,19	0,10	-
Longbottom (1973)	Não Mencionado	4,65	0,10	-
Paton et al.(1973)	St20	5,80	0,10	-
Paton et al.(1973)	St20	7,90	0,10	-
Paton et al.(1973)	St20	11,00	0,10	-
Paton et al.(1973)	St20	13,70	0,10	-
Mellberg (1973)	1,03%C, 1,53%Cr, 0,35%Si	1,44	0,61	0,43
Mellberg (1973)	1,03%C, 1,53%Cr, 0,35%Si	1,83	0,61	0,43
Mellberg (1973)	1,03%C, 1,53%Cr, 0,35%Si	1,77	0,61	0,43
Mellberg (1973)	1,03%C, 1,53%Cr, 0,35%Si	1,48	0,61	0,43
Jeanfils, et al (1979)	Ni-27% Mo	7,30	0,06	53,68
Takahama e Gammal (1979)	Não Mencionado	3,36	-	-
Takahama e Gammal (1979)	Não Mencionado	4,20	-	-
Takahama e Gammal (1979)	Não Mencionado	5,60	-	-
Takahama e Gammal (1979)	Não Mencionado	8,40	-	-
Mellberg (1979)	1,03%C, 1,53%Cr, 0,35%Si	60,45	0,61	-
Mellberg (1979)	1,03%C, 1,53%Cr, 0,35%Si	112,27	0,61	-
Ballantyne e Mitchell (1977)	4340	2,11	0,09	3,70
Ballantyne e Mitchell (1977)	4340	2,11	0,09	5,55
Ballantyne e Mitchell (1977)	4340	2,11	0,09	7,40
Ballantyne e Mitchell (1977)	4340	1,69	0,09	7,40
Ballantyne e Mitchell (1977)	4340	2,53	0,09	7,40
Ballantyne e Mitchell (1977)	1020	4,30	0,10	10,31

Autores	Material	Péclet	Biot	Stefan
Ballantyne e Mitchell (1977)	4340 VAR	1,63	0,09	11,25
Ballantyne e Mitchell (1977)	M2	1,54	-	-
Ballantyne e Mitchell (1977)	M2	2,98	-	-
Ballantyne e Mitchell (1977)	Ni-Cr-Mo-V 4340	2,57	0,09	17,03
Ballantyne e Mitchell (1977)	Ni-Cr-Mo-V 4340	3,67	0,09	17,03
Ballantyne e Mitchell (1977)	A286	2,30	0,16	3,74
Ballantyne e Mitchell (1979)	H13	0,56	-	4,93
Ballantyne e Mitchell (1979)	H13	1,12	-	4,93
Ballantyne e Mitchell (1979)	H13	1,67	-	4,93
Ballantyne e Mitchell (1979)	H13	2,23	-	4,93
Ballantyne e Mitchell (1979)	H13	2,79	-	4,93
Ballantyne e Mitchell (1979)	H13	3,91	-	4,93
Ballantyne e Mitchell (1979)	H13	5,02	-	4,93
Ballantyne e Mitchell (1979)	Waspaloy	2,62	-	5,44
Ballantyne e Mitchell (1979)	Hastelloy-X	-	-	4,93
Ballantyne e Mitchell (1979)	SAE 403	1,90	-	5,24
Ballantyne e Mitchell (1979)	D2	1,15	-	6,15
Ballantyne e Mitchell (1979)	L605	1,10	-	4,56
Choudhary e Szekely (1981)	Não Mencionado	3,06	0,16	4,71
Ferng, Chieng e Pan(1989) e Szekely (1982)	Não Mencionado	20,58	0,00	3,57
Ferng, Chieng e Pan (1989) e Szekely (1982)	Não Mencionado	13,72	0,00	3,57
Ferng, Chieng e Pan (1989) e Szekely (1982)	Não Mencionado	6,86	0,00	3,57

4.5.2 Condições da Análise do Caso Industrial

O caso industrial estudado envolveu a produção de um lingote da liga ASTM F138 (V1138®) através do processo ESR utilizando o forno ESR-1 da Villares Metals S.A., localizada em Sumaré, São Paulo. A composição química do aço F138 está apresentada na Tabela 3. Um lingote, com diâmetro de 0,536 m e altura de 1,90 m, foi produzido utilizando uma taxa de refusão média de 6,85 kg. min⁻¹, durante um período total de 7 horas e 20 minutos.

Tabela 3 – Principais elementos de liga do aço ASTM F138 (V1138®).

Elemento	C	Cr	Cu	Fe	Mn	Mo	N	Ni	Si
Teor (% peso)	≤ 0,03	17 a 19	≤ 0,5	Bal.	≤ 2	2,25 a 3,5	≤ 0,1	13 a 15	≤ 0,75

Uma parte do conjunto de propriedades termofísicas utilizadas na simulação foi obtida especificamente para o aço ASTM F138. No entanto, algumas propriedades não foram encontradas e, portanto, foram substituídas pelas propriedades do aço inoxidável SAE 316, que possui composição química bastante semelhante à do ASTM F138.

As temperaturas *solidus* e *liquidus* do aço SAE 316 são respectivamente: $T_L=1644K$ e $T_S=1672K$ (PEHLKE, 1982). A condutividade térmica utilizada na simulação foi calculada como (PEHLKE, 1982):

$$k = 8,7082 + 0,015968.T \quad [W.m^{-1}] \quad T \leq 820K \quad [57]$$

$$k = 11,107 + 0,012994.T \quad [W.m^{-1}] \quad 820 < T \leq 1644K \quad [58]$$

$$k = 355,95 - 0,1968.T \quad [W.m^{-1}] \quad 1644K < T \leq 1672K \quad [59]$$

$$k = 6,597 + 0,01214.T \quad [W.m^{-1}] \quad T > 1672 \quad [60]$$

A condutividade térmica efetiva no estado líquido ($k_{ec} = \lambda k$) foi utilizado para simular o transporte por convecção no líquido, sendo que $\lambda = 2$ (valor utilizado por Ballantyne e Mitchell (1977)). O calor específico foi definido como (MILLS; SU; LI; BROOKS, 2004):

$$C_p = 472 + 0,136.T - 2,82.10^6.T^{-2} \quad [J.kg^{-1}.K^{-1}] \quad T \leq 1773K \quad [61]$$

$$C_p = 800 \quad [J.kg^{-1}.K^{-1}] \quad T > 1773K \quad [62]$$

As densidades do sólido e do líquido foram definidas segundo (MILLS; SU; LI; BROOKS, 2004):

$$\rho_L = 6809,2 - 0,86.(T - 1823) \quad [kg.m^{-3}] \quad [63]$$

$$\rho_S = 7920,3 - 0,5.(T - 298) \quad [kg.m^{-3}] \quad [64]$$

Na região pastosa, utilizou-se uma condutividade térmica ponderada pelas frações das fases sólida e líquida, ou seja:

$$\rho = \rho_S \cdot \varepsilon_S + \rho_L \cdot \varepsilon_L \quad [65]$$

O valor do calor latente de fusão utilizado foi de 33600 J.kg^{-1} (PEHLKE, 1982).

A temperatura do topo do lingote foi assumida parabólica ao longo do raio. Esta parábola apresenta concavidade negativa e está centrada no eixo axial segundo a equação abaixo:

$$T_T = T_L + 150 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad [66]$$

Na definição desta equação, a temperatura no eixo axial está a 150°C acima da *liquidus*, enquanto a temperatura no ponto de encontro com o contorno lateral é igual a *liquidus*. Esta aproximação para a temperatura no topo foi também utilizada por Ballantyne e Mitchell (1977).

Conforme descrito na seção 3.3.3 (condições de contorno no processo ESR), foi assumido que a transferência de calor entre a base do lingote e a base da lingoteira e entre a lateral do lingote e a lateral da lingoteira é governada pelos coeficientes globais de transferência de calor h_b e h_m respectivamente.

Na base de diversos lingotes produzidos, observou-se a existência de uma camada de escória de espessura variável e muitas vezes descontínua, dificultando o cálculo do coeficiente de transferência de calor na interface entre a superfície inferior do lingote e a superfície da base da lingoteira (h_b). Entretanto, Ballantyne e Mitchell (1977) analisaram o efeito do h_b no perfil de poça metálica no regime quase-estacionário e concluíram que valores de h_b entre 0 e $419 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ não afetavam a profundidade e o formato da poça de fusão para lingote de diâmetro de 1 m. O valor de $h_b=209,3 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ foi utilizado por estes autores e também no presente trabalho para simular o caso industrial.

O valor do coeficiente de transferência de calor na interface entre a superfície lateral do lingote h_b e a superfície lateral da lingoteira foi obtido assumindo-se condições quase-estacionárias, permitindo o cálculo de um coeficiente global a partir do conceito de resistências térmicas (GEIGER e POIRIER, 1973). A Figura 29 mostra esquematicamente a resistência térmica global entre a superfície do lingote e a água de refrigeração. A resistência térmica global é uma combinação das resistências resultantes: do filme de escória; do vão formado entre o filme de escória

e a lingoteira; da espessura da parede da lingoteira de cobre; dos depósitos de resíduos na superfície da parede lingoteira e da interface lingoteira-água. A Figura 29 apresenta os principais parâmetros que afetam estas resistências térmicas.

Figura 29 - Desenho esquemático dos parâmetros principais que afetam as resistências térmicas entre a superfície do lingote e a água de refrigeração.

Como o raio de curvatura da lingoteira é muito maior do que a distância entre a superfície do lingote e a superfície externa da lingoteira, o efeito deste raio no cálculo das resistências térmicas pode ser desprezado, ou seja, o sistema pode ser assumido como um conjunto de placas planas compostas. Neste caso, o coeficiente de transferência de calor global entre a superfície lateral do lingote e a água de refrigeração, h_m , pode ser calculado por: (YU, K-O, 1984)

$$h_m = \frac{1}{\frac{e_e}{k_e} + \frac{1}{h_r + \frac{k_g}{e_g}} + \frac{e_l}{k_l} + \frac{1}{h_s} + \frac{1}{h_a}} \quad [W.m^{-2}.K^{-1}] \quad [67]$$

onde e_e , e_l e e_g são as espessuras da película de escória, da lingoteira de cobre e do vão respectivamente, k_e , k_l e k_g são as condutividades térmicas da escória, da lingoteira e do ar no vão, h_d e h_a são coeficientes de transferência de calor no depósito e na água de refrigeração enquanto que h_r é o coeficiente de transferência de calor convectivo adaptado para levar em conta a transferência de calor por radiação entre as superfícies que formam o vão.

A espessura média da película de escória formada sobre o lingote industrial estudado foi de $e_e = 2$ mm. A espessura da parede da lingoteira de cobre foi de $e_l = 28,55$ mm. A espessura do vão formado, e_g , é um importante parâmetro para obtenção do h_m , pois representa uma das maiores resistências à transferência de calor. Ela foi calculada prevendo-se a contração do raio do lingote durante o resfriamento a partir da temperatura *solidus* através das seguintes equações:

$$e_g = R \cdot \alpha_L \cdot (T_s - T_{sup}) \quad [m] \quad T_s < T_s \quad [68]$$

$$e_g = 0 \quad [m] \quad T_s \geq T_s \quad [69]$$

onde $\alpha_L = 18,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ (CVERNA, F. 2002) é o coeficiente de expansão linear e T_{sup} é a temperatura da superfície do lingote, obtida através do modelo.

Os valores de condutividade térmica para a escória, para o cobre da parede da lingoteira e para o ar foram, respectivamente: $17,3 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ (YU, K-O, 1984), $383 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ (GEIGER e POIRIER, 1973) e $0,04 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ (GEIGER e POIRIER, 1973)

A lingoteira utilizada para o experimento possuía um depósito de resíduos na sua superfície, representando uma resistência térmica. A água de refrigeração não é desmineralizada, sendo provida por uma torre de resfriamento, o que resulta em um valor de $h_d = 5680 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ (YU, K-O, 1984).

O valor do coeficiente de transferência de calor na interface entre a superfície interna da lingoteira e a água de refrigeração (h_a) foi obtido utilizando-se a seguinte correlação para convecção forçada em tubos (GEIGER e POIRIER, 1973):

$$h_a = k_a \frac{0,026 \cdot \frac{(2 \cdot e_a \cdot \rho \cdot v)^{0,8}}{u} \cdot \frac{(C_p \cdot u)^{\frac{1}{3}}}{k_a} \left(\frac{u}{u_0} \right)^{0,14}}{2 \cdot e_a} \quad [J.m^{-2}.K^{-1}] \quad [70]$$

onde: k_a é a condutividade térmica da água; e_a é a espessura da passagem de água de refrigeração (Figura 29); ρ é a densidade da água; v é a velocidade média da água de refrigeração; u é a viscosidade da água calculada na sua temperatura média ($40 \text{ } ^\circ\text{C}$); C_p é o calor específico da água e u_0 é a viscosidade da água na temperatura da superfície da lingoteira ($\sim 100 \text{ } ^\circ\text{C}$).

Os dados termofísicos considerados para a água foram: $k_a = 0,63 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $\rho = 999,07 \text{ kg.m}^{-3}$, $u = 1,24 \cdot 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ e $C_p = 4186,8 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ (GEIGER e POIRIER, 1973). A espessura e_a no equipamento utilizado é de $22,22 \text{ mm}$, enquanto a velocidade média da água de refrigeração é $1,198 \text{ m.s}^{-1}$.

O valor do coeficiente de transferência de calor devido à radiação no vão foi calculado por (GEIGER e POIRIER, 1973):

$$h_r = \varepsilon \left[\frac{\sigma (T_{esc}^4 - T_{ling}^4)}{T_{esc} - T_{ling}} \right] \quad [J.m^{-2}.K^{-1}] \quad [71]$$

onde ε é a emissividade da película de escória, σ é a constante de Stefan-Boltzman ($5,67.10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$) e T_{esc} e T_{ling} são as temperaturas da superfície externa da camada de escória e interna da lingoteira (Figura 29).

A emissividade da escória foi de $\varepsilon = 0,78$ (GEIGER e POIRIER, 1973) para temperatura de 1600 K e composição de 61% Al_2O_3 , 35% de SiO_2 e 3% de Fe_2O_3 . Esta composição química foi a mais próxima encontrada para a escória utilizada no experimento.

4.6 Medida das Temperaturas na Parede Lateral da Lingoteira e Cálculo do Fluxo de Calor na Interface Lingote-Lingoteira

Na análise do caso industrial, alguns dados foram coletados durante a produção do lingote descrito no item 4.5.2, Condições da Análise do Caso Industrial. No presente item, será apresentada a técnica empregada para a medida de curvas de temperatura em função do tempo em alguns pontos da parede lateral da lingoteira, durante a solidificação do lingote. Estas medidas de temperatura serão utilizadas para calcular o fluxo de calor que atravessa a parede lateral da lingoteira e compará-lo com o fluxo obtido pelo modelo de resistências térmicas (interface 2 na Figura 14).

A lingoteira de 2,5 metros de altura teve sua parede instrumentada com seis termopares do tipo J dispostos conforme Figura 30. Os termopares foram conectados a um sistema de aquisição de dados que consistiu de um registrador gráfico microprocessado de marca Ero Eletronic, com 16 canais, resolução de $0,1^\circ\text{C}$ e frequência de aquisição de 10 s^{-1} . Os termopares utilizados, que possuíam uma bainha de 3 mm de diâmetro, foram calibrados por comparação contra um sensor padrão de temperatura, imerso em um meio termostático homogêneo, apresentando uma incerteza de medição máxima de $\pm 0,7^\circ\text{C}$.

Figura 30 - Posicionamento dos termopares na lingoteira ESR 20 polegadas. As setas azuis e vermelhas representam o fluxo de água fria e quente (dimensões em milímetros).

Duas tentativas de medição da curva de temperatura ao longo do tempo no interior da escória e da poça metálica foram realizadas. Na primeira tentativa, foram utilizados tubos de proteção de alumina e na segunda, tubos de carbetto de silício. O primeiro tubo dissolveu-se na escória, enquanto o segundo, no contato com o metal líquido. Desta forma, decidiu-se medir apenas as temperaturas na parede da lingoteira.

Em uma primeira análise, foram utilizados o conjunto de termopares que estavam à 1,229 m a partir da base do lingote, ou seja, os termopares 1, 2 e 3. O gráfico apresentado na Figura 31 mostra o perfil de temperaturas obtido para o instante 4 horas e 41 minutos. Na parede de uma lingoteira de cobre relativamente fina (28,55mm), de alta condutividade térmica ($383 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$) (GEIGER e POIRIER, 1973) e refrigerada por água a alta velocidade ($1,198 \text{ m.s}^{-1}$). , pode-se assumir um regime quase-estacionário (HO, K.; PEHLKE, R.D). Neste regime, o perfil de temperaturas através da parede deveria ser linear, uma vez que a espessura desta parede é muito menor do que o raio de curvatura da lingoteira. Entretanto, um perfil linear não é observado na Figura 31.

Figura 31 – Perfil de temperatura determinados pelos termopares 1, 2 e 3 no instante $t=4\text{h}$ e 41 minutos.

Conclui-se, então, que algum dos termopares não mediu corretamente a temperatura esperada. O termopar 3 é aquele localizado mais próximo da água de refrigeração e, portanto, sua temperatura é aquela que pode sofrer maior distorção devido à condução de calor ao longo de seu comprimento⁶. Além disso, a água de refrigeração tem maior probabilidade de atingir a junta de medida do termopar 3 através do pequeno vão entre o termopar e a lingoteira.

Desta forma, os dados coletados pelo termopar 3 foram desprezados. O fluxo de calor que atravessa a parede da lingoteira de cobre refrigerada foi calculado a partir dos dados coletados pelos termopares 1 e 2. Foi construída uma reta para aproximar a temperatura ao longo da parede da lingoteira e a inclinação desta reta, utilizada

para calcular o fluxo de calor utilizando a lei de Fourier, $q = -k_l \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0}$. Neste

cálculo, foi assumido que o momento em que o termopar 1, que está a apenas a 0,5 mm da interface lingote-lingoteira, atinge a temperatura máxima, tem-se o instante em que a escória está na altura do grupo de termopares 1, 2 e 3.

Considerando que a espessura do disco de escória foi de 135 mm e que o tempo de lingotamento e a distância ao longo do lingote estão relacionados através da velocidade de crescimento do lingote ($V_m = 6,26 \times 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$), foi possível obter o fluxo de calor para cada posição ao longo da altura do lingote.

4.7 Observação da Poça de Fusão e Medição do Espaçamento Dendrítico Secundário

No item anterior foi descrita uma técnica para medida de temperaturas na parede da lingoteira durante a solidificação do lingote no processo ESR. Ao final do processo de refusão deste mesmo lingote, tungstênio britado na forma granular e classificado granulometricamente entre 3 e 5 mm foi adicionado à superfície da escória. Como mostrado por Jeanfils, Chen e Klein (1979) este procedimento tem o objetivo de definir o formato da poça de fusão, pois o tungstênio não funde nas temperaturas do processo, já que seu ponto de fusão é de 3370°C. Além disso, ele é

---

⁶ Manual on the use of thermocouples in temperature measurement. Philadelphia, ASTM, 1981. (ASTM Special Technical Publication, 470B).

mais denso que o aço, apresentando uma densidade de $19,3 \text{ g.cm}^{-3}$ e, portanto, sofre decantação até a zona pastosa do lingote. O tungstênio em grãos foi adicionado uniformemente sobre a escória utilizando o dispositivo mostrado na Figura 32. Este dispositivo possui diâmetro ligeiramente menor que o diâmetro interno da lingoteira e foi produzido com lâmina de aço (lateral) e tela de alumínio (fundo). O fundo do dispositivo também possui vários fios de aço que atravessam o seu diâmetro com a finalidade de evitar o acúmulo dos grãos de tungstênio metálico no seu centro, o que prejudicaria a definição da poça metálica líquida nas regiões periféricas.

Figura 32 – Foto de um funcionário da Villares Metals mostrando o dispositivo criado para adição de tungstênio metálico.

Apesar das várias vantagens do uso do tungstênio metálico para a definição da poça de metal líquido, este dificultou o corte longitudinal do lingote refundido para a obtenção da macrografia.

Algumas tentativas para o corte foram realizadas empregando-se serras com lâminas metálicas convencionais com dentes de aço rápido. No entanto, os dentes das lâminas desgastaram-se rapidamente quando entraram em contato com as partículas de tungstênio. Portanto, um corte inicial para separar a parte de interesse (cabeça do lingote) do restante do lingote foi feito onde não havia partículas de tungstênio e o restante do material adjacente ao objetivado para macrografia foi removido através de um esmeril de grande porte. A Figura 33 mostra esquematicamente a seqüência de procedimentos para obtenção da amostra para a realização da macrografia.

Figura 33 – Seqüência de preparação da amostra para macrografia retirada da cabeça do lingote.

A superfície da amostra esmerilhada foi retificada e atacada quimicamente para revelar a estrutura de grãos. O procedimento utilizado para o ataque químico da amostra iniciou-se com a preparação de uma solução de 2 partes de água para 1 parte de HCl 37% em volume e aquecimento da mesma até 60°C. Em seguida a amostra foi imersa na solução, permanecendo nesta por 50 minutos. Foram adicionados, na seqüência, 500 ml de HNO₃ 65% em volume e aguardou-se por mais 10 minutos. A amostra foi então retirada, lavada inicialmente com água e sabão e posteriormente com álcool, e finalmente seca.

Duas amostras para obtenção do espaçamento dendrítico secundário foram retiradas sendo uma da região central e outra da região de meio raio (Figura 34). As amostras foram polidas e atacadas com o reagente composto por 20ml HCl, 10 ml HNO₃ e 8 gotas de glicerina.

O procedimento de medição foi realizado através da traçagem de uma linha paralela e bastante próxima ao tronco do braço primário das dendritas e em seguida, da contagem do número de braços dendríticos secundários que cruzam esta linha. O

espaçamento dendrítico secundário foi obtido dividindo-se o comprimento da linha traçada pelo número de braços dendríticos secundários encontrados. (JERNKONTORET, 1977)

Este mesmo procedimento foi realizado em 8 campos de cada amostra (centro e meio raio) e finalmente foi calculada a média do espaçamento dendrítico secundário para as duas regiões.

Figura 34 – Desenho esquemático mostrando o posicionamento das amostras retiradas para medição do espaçamento dendrítico secundário.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados obtidos no presente trabalho serão apresentados e discutidos neste item. No item 5.1, estão os resultados do modelo matemático ajustado para simular alguns problemas para os quais existem soluções analíticas, objetivando a validação do código computacional. No item 5.2, será apresentado um estudo empregando o modelo desenvolvido para definir o tamanho da malha de volumes finitos utilizada na resolução numérica das equações diferenciais. No item 5.3, vários resultados da análise paramétrica selecionados a partir de uma série de 200 simulações serão mostrados e discutidos. Estes resultados englobam a geometria da poça de fusão, o tempo local de solidificação (LST) e o tempo para se atingir o estado quase-estacionário. Na seção 5.4 serão apresentados os resultados obtidos a partir da produção do lingote industrial, descrito nas seções 4.6 e 4.7. Finalmente, na seção 5.5 serão comparados e discutidos os resultados da simulação e os resultados do lingote industrial.

5.1 Validação do Modelo Matemático

Após a implementação do modelo matemático, para verificar a capacidade do programa em simular corretamente a solidificação no processo ESR, foram realizados vários testes comparativos entre os seus resultados e as soluções analíticas para três diferentes problemas, a saber: (a) a condução de calor transiente em um cilindro; (b) a fusão de um cilindro de comprimento infinito com aplicação de uma fonte térmica na linha do eixo longitudinal e (c) a condução de calor (sem mudança de fase) unidimensional em um domínio de comprimento crescente com o tempo. Os resultados são mostrados a seguir.

5.1.1 Condução de Calor Transiente e Bidimensional

Primeiramente os resultados do modelo implementado foram comparados com a solução analítica para o problema de condução de calor em regime transiente em um cilindro esquematicamente mostrado na Figura 35. Este problema consiste no resfriamento de um cilindro completamente sólido em um meio convectivo.

Figura 35 – Desenho mostrando o domínio e as condições de contorno para um problema de condução de calor bidimensional em um cilindro de comprimento L e raio R . h_b e h_m são os coeficientes de transferência de calor convectivos na base e na lateral do cilindro, respectivamente, enquanto T_a é a temperatura do ambiente que envolve o cilindro.

A equação diferencial de condução de calor que rege o problema é:

$$\left(\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad [72]$$

A condição inicial e as de contorno adotadas neste problema foram:

Condição Inicial

$$T = T_i \quad 0 < r < R, 0 < z < L, t = 0 \quad [73]$$

Condições de Contorno

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} = h_b (T - T_a) \quad 0 < r < R, z = 0, t > 0 \quad [74]$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} = h_b (T - T_a) \quad 0 < r < R, z = L, t > 0 \quad [75]$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = h_m (T - T_a) \quad r = R, 0 < z < L, t > 0 \quad [76]$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = 0, 0 < z < L, t > 0 \quad [77]$$

A simulação foi conduzida para os seguintes parâmetros: $C_p = 400 \text{ J.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}$; $\rho = 8800 \text{ kg.m}^{-3}$; $k = 150 \text{ W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$, $R = 0,5\text{m}$, $L = 1\text{m}$; $h_m = h_b = 1000\text{W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$; temperatura inicial de 500°C e $T_a = 40\text{°C}$.

As curvas de resfriamento calculadas pelo modelo implementado na posição de coordenadas $r = 0,9875\text{m}$ e $z = 0,49375\text{m}$ estão comparadas com a solução analítica (Özisik, 1993) na Figura 36. Pode-se concluir que a aderência é muito boa e que o modelo está simulando corretamente a condução de calor pura (sem solidificação).

Figura 36 - Comparação entre os resultados do modelo implementado e a solução exata (Özisik, 1993) para a posição $r = 0,9875$ m e $z = 0,49375$ m de um cilindro resfriado em um meio convectivo.

5.1.2 Solidificação Radial de um Cilindro

A solidificação radial de um cilindro de comprimento infinito a partir de um líquido semi-infinito foi simulada através do modelo desenvolvido com o objetivo de verificar a correta simulação do processo de solidificação. Os resultados desta simulação foram comparados com a solução analítica apresentada por Paterson (1952) para o problema ilustrado na Figura 37.

Figura 37 – Desenho esquemático mostrando o domínio para a solidificação de um cilindro de comprimento infinito pela remoção de energia por um sorvedouro filiforme localizado em seu eixo longitudinal.

O problema pode ser descrito matematicamente pela seguinte equação diferencial aplicada ao sólido e ao líquido:

$$\left(\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad [78]$$

Como condição inicial adotou-se a presença de uma fase líquida mantida em uma temperatura uniforme (T_{inf}) acima da temperatura de fusão:

$$T = T_{\text{inf}} \quad 0 < r < \infty, \quad t = 0 \quad [79]$$

Como condição de contorno na interface sólido-líquido, utilizou-se a igualdade de temperaturas entre o sólido e o líquido (equação [80]) e a condição de Stefan (equação [81])

$$|T|_{\text{sólido}} = |T|_{\text{líquido}} = T_f \quad 0 < r < \infty, \quad t = 0 \quad [80]$$

$$\left| k \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{\text{sólido}} - \left| k \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{\text{líquido}} = -\rho L_f \left| \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{\text{líquido}} \quad r = S(t) \quad [81]$$

Na linha de centro do cilindro existe um sorvedouro de calor filiforme que é representado pela seguinte condição de contorno:

$$k \frac{\partial T}{\partial r} = Q \quad r = 0, \quad t > 0 \quad [82]$$

onde Q representa o fluxo de calor filiforme consumido pelo sorvedouro.

Nas regiões distantes da interface sólido-líquido em movimento, a temperatura permanece inalterada e, portanto:

$$T \rightarrow T_{\text{inf}} \quad r \rightarrow \infty, \quad t > 0 \quad [83]$$

A Figura 38 mostra a curva de resfriamento calculada pelo modelo implementado comparada ao resultado da solução analítica para os seguintes parâmetros: $C_p = 400 \text{ J.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}$; $\rho = 8800 \text{ kg.m}^{-3}$; $k = 150 \text{ W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$; $r = 0,05625\text{m}$; $L_f = 400 \text{ kJ.kg}^{-1}$; $Q = 100 \text{ kW.m}^{-1}$; $T_{\text{inf}} = 677\text{°C}$; $T_L = 657\text{°C}$ e propriedades térmicas iguais da fase sólida e líquida.

Pode-se observar que os resultados do modelo estão muito próximos aos da solução analítica apesar da formação de “degraus” em temperaturas próximas da temperatura de fusão.

Figura 38 - Comparação entre as curvas de resfriamento calculadas pelo modelo implementado e pela solução analítica para uma posição de coordenada $r = 0,05625\text{m}$ durante a solidificação radial de um cilindro de comprimento infinito.

Estes degraus foram também observados por Voller e Cross (1981) e são inerentes à metodologia de solução numérica aplicada a metais puros, que não apresentam um intervalo de solidificação finito. Durante o processo de solução numérica, a temperatura do nó de um volume finito da malha é mantida igual à temperatura de fusão enquanto a interface sólido-líquido estiver no seu interior. Este processo gera um patamar de temperatura, cujos efeitos são transmitidos por condução para todos os volumes da malha. Como um patamar análogo é gerado para cada volume finito através do qual a interface passa, obtém-se então um conjunto de patamares, ou degraus, como aqueles observados na Figura 38. A partir do resultado apresentado, pode-se concluir que o modelo é capaz de simular a solidificação em coordenadas cilíndricas.

5.1.3 Condução de Calor Unidimensional em Domínio Crescente

Um teste de condução de calor pura (sem solidificação) unidimensional em um domínio de comprimento crescente com o tempo foi realizado para verificar a capacidade deste modelo em simular um domínio de comprimento variável, como é o caso do processo ESR. Os dois contornos do domínio unidimensional foram mantidos a temperaturas constantes e, conforme o domínio aumentava, o perfil de temperatura ajustava-se continuamente.

Figura 39 – Desenho esquemático do domínio de comprimento variável, indicando as condições de contorno de temperatura prescrita.

A equação diferencial e as condições de contorno e inicial que regem o problema são:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad 0 < z < L(t) \quad [84]$$

Condição Inicial

$$T = T_{B1} \quad z = L = 0, t = 0 \quad [85]$$

Condições de Contorno

$$T = T_{B2} \quad z = 0, t > 0 \quad [86]$$

$$T = T_{B1} \quad z = L(t), t > 0 \quad [87]$$

onde T_{B1} e T_{B2} são as temperaturas dos contornos e $L(t)$ é o comprimento instantâneo do domínio, que foi assumido variar com o tempo segundo a relação $L = \gamma \cdot \sqrt{t}$, sendo que γ é uma constante de velocidade fornecida. As equações [84] a [87] possuem a seguinte solução analítica

$$\frac{T - T_{B1}}{T_{B2} - T_{B1}} = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{\gamma}{2\sqrt{\alpha t}}\right)} \quad [88]$$

onde $\operatorname{erf}(z)$ representa a função erro de Gauss e $\alpha = \frac{k}{\rho \cdot c_p}$.

O gráfico da Figura 40 mostra a comparação entre os resultados de temperatura ao longo do domínio obtidos através do modelo implementado e através da solução analítica. Os parâmetros utilizados foram: $\alpha = 6,25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$; $L = 1 \text{ m}$; $\gamma = 0,02 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1/2}$; $T_{B2} = 100^\circ\text{C}$ e $T_{B1} = 1700^\circ\text{C}$. Pode-se observar que os resultados do modelo implementado estão muito próximos aos da solução analítica, mostrando que a técnica para a simulação do domínio variável através da transformação de Landau foi implementada corretamente.

Figura 40 – Resultados do teste de condução de calor unidimensional em domínio crescente (a) Comparação entre o perfil de temperatura calculado pelo modelo implementado e calculado pela solução analítica para o instante $t=2500$ s (b) Evolução do comprimento do cilindro ao longo do tempo.

5.2 Teste de Convergência da Solução

Antes do início das simulações da solidificação no processo ESR, realizou-se um teste de convergência da solução numérica das equações diferencial do modelo matemático. Este teste teve o objetivo de definir o tamanho da malha bidimensional de volumes finitos necessária para a solução numérica. Para cada simulação, o número de volumes finitos ao longo da coordenada radial (r^*) foi mantido fixo, igual a 20, e o número de volumes ao longo da coordenada axial (z^*) foi alterado de 100 até 600. Em cada simulação analisou-se a evolução com o tempo da posição da isoterma *solidus* adimensional, Z_s^* , no eixo longitudinal do lingote (vide Figura 41). A Figura 42 mostra esta evolução, indicando o momento em que o estado quase-estacionário foi atingido, no qual a profundidade da isoterma permanece inalterada com o tempo. Nota-se que a curva de evolução altera-se significativamente quando se aumenta o número de volumes da malha de 100 para 200. No entanto, de 400 para 600 volumes, a profundidade no estado quase-estacionário sofre uma alteração menor do que 0,18%.

Figura 41 – Ilustração mostrando a posição da isoterma solidus no eixo axial do cilindro, utilizada para o teste de convergência da solução numérica.

Além disso, na maioria das simulações, observou-se que uma malha de 400 volumes sempre garantia a presença de pelo menos quatro volumes no interior da

zona pastosa na região central do lingote durante o regime quase-estacionário. Uma malha de 20 volumes finitos ao longo da direção radial e 400 volumes ao longo da direção longitudinal foi finalmente adotada em todas as simulações apresentadas nos próximos itens. É importante ressaltar que com exceção de Jeanfils, Chen e Klein (1979) nenhum trabalho estudado onde um modelo matemático para o processo ESR foi desenvolvido realizou este teste de convergência, apesar do efeito significativo do tamanho da malha mostrado na Figura 42.

Figura 42 - Profundidade da isoterma *solidus* em função do comprimento do lingote para diferentes números de volumes da malha definidos ao longo da direção axial do cilindro:

5.3 Análise Paramétrica

Entre os objetivos do presente trabalho está o exame dos efeitos de uma extensa gama de condições de resfriamento, tipos de materiais, diâmetros de lingotes e taxas de refusão nas características de solidificação dos lingotes. Para tanto, utilizando-se a abordagem adimensional apresentada na seção 4.3 e as

condições de simulação apresentadas na seção 4.5.1, foram realizadas cerca de 200 simulações. Os principais resultados destas simulações, que serão apresentados nesta seção, são: o formato da poça de metal líquido (poça de fusão), o tempo local de solidificação (LST) e o comprimento de lingote necessário para se atingir o regime quase-estacionário.

5.3.1 Geometria da Poça e LST no Estado Quase-estacionário

O modelo matemático desenvolvido neste trabalho foi utilizado para calcular o campo de temperaturas durante a solidificação de lingotes obtidos no processo ESR sob diferentes condições de transferência de calor, materiais e velocidades de refusão. Estas condições foram alteradas, respectivamente, através da variação dos seguintes parâmetros adimensionais: Bi , Ste e Pe , apresentados no item 4.5.1.

O mesmo valor de Bi foi utilizado para as interfaces metal-base da lingoteira e metal-lateral da lingoteira. Além do campo de temperaturas, os seguintes parâmetros foram obtidos a partir das simulações: profundidade da isoterma liquidus (Z_L^*), profundidade da isoterma solidus (Z_S^*) e espessura da zona pastosa (Z_p^*) calculadas no eixo axial do lingote (Figura 43).

Figura 43 – Desenho esquemático dos principais parâmetros adimensionais associadas ao perfil da poça de metal líquido obtidos a partir do campo de temperaturas calculado pelo modelo.

Como descrito anteriormente, a solução numérica é baseada no método dos volumes finitos. Tal procedimento permite que sejam conhecidas as temperaturas apenas em pontos discretos do domínio (nós localizados no centro dos volumes finitos) e, portanto, uma interpolação de segundo grau foi utilizada para a definição das distâncias das isothermas em relação ao topo do lingote.

A análise será conduzida através do monitoramento da posição das isothermas *solidus* e *liquidus* no eixo axial do lingote em função de seu comprimento instantâneo. Um exemplo de cálculo da profundidade da isoterma *liquidus* e *solidus* em função do comprimento do lingote está mostrado na Figura 44, onde se observa que o regime quase-estacionário é atingido quando o lingote apresenta um comprimento adimensional instantâneo, $L^* \sim 3$.

Observa-se que a isoterma *liquidus* atinge uma profundidade constante antes da isoterma *solidus*, o que está consistente com a idéia do estado quase-estacionário mencionado na introdução. Portanto, uma vez que a profundidade da isoterma *solidus* deixa de variar, a espessura da zona pastosa (diferença entre as posições das isothermas *solidus* e *liquidus*) também passa a ser constante. Desta forma, o critério final utilizado para definir o momento em que o processo atingiu o regime quase-estacionário foi o de profundidade constante da isoterma *solidus*. Todas as análises que serão apresentadas adiante se referem ao período de regime quase-estacionário.

Figura 44 – Evolução da profundidade das isothermas solidus e liquidus em função do comprimento instantâneo do lingote.

A profundidade adimensional da poça de fusão é definida como sendo a profundidade adimensional da isoterma solidus (z_s^*) em relação ao topo do lingote, ao longo do seu eixo longitudinal (Figura 43). Esta profundidade está apresentada na Figura 45 em função de Pe para valores de Bi iguais a 5,4 e 50.

Figura 45 - Profundidade adimensional da isoterma *solidus*, z_s^* , no eixo longitudinal do lingote no regime quase-estacionário em função de Pe para diferentes Ste e Bi .

Observa-se que a profundidade da poça, indicada por z_s^* , aumenta linearmente quando a taxa de refusão adimensional, Pe , aumenta acima de 3. O aumento da profundidade foi observado por outros autores (KAJIOKA E YAMAGUCHI, 1973; TAKAHAMA E GAMMAL, 1979 e BALLANTYNE e MITCHELL, 1977) e ocorre, porque, quando a taxa de refusão aumenta, existe uma maior quantidade de calor sendo transportada a partir da escória para o lingote por convecção (ou seja, movimentação relativo de translação do lingote), aumentando também a quantidade de líquido e, conseqüentemente, a profundidade da poça de fusão.

Observa-se que os resultados apresentados por Ballantyne e Mitchell (1977) apresentam certa discrepância em relação aos dados obtidos. Tal diferença pode estar associada à condição de contorno do topo, pois enquanto no presente trabalho foi considerada uma temperatura linear ao longo do raio, Ballantyne e Mitchell (1977) utilizaram um perfil de temperatura parabólico, sendo que no centro do lingote a temperatura foi fixada entre 150°C e 250°C acima da temperatura *liquidus*.

Os valores de temperaturas adimensionais para o topo T_T^* , e para a água de refrigeração, T_a^* , também influem no resultado do campo adimensional e podem explicar tal discrepância, mas os dados do artigo não permitem que tais valores sejam calculados.

Quando $Pe < 3$, observa-se que as curvas tendem assintoticamente a uma mesma reta horizontal, ilustrando que o efeito de Pe torna-se cada vez menor. Desta forma conclui-se que a profundidade da poça passa a ser definida principalmente pelos mecanismos de condução radial e axial, ou seja, a convecção que resulta da movimentação do lingote passa a ser desprezível.

Nota-se que uma diminuição do calor latente adimensional, ou seja, um aumento de Ste , também resulta na diminuição da profundidade da poça de fusão. No entanto, este efeito é cada vez menor conforme Ste aumenta. Quando $Ste > 0.5$, o seu aumento praticamente não causa mais variação na profundidade da poça. Note que um aumento de Ste representa uma diminuição do calor latente de solidificação. Portanto, este calor latente torna-se cada vez menos importante para definir a geometria da poça de fusão conforme diminui. Em uma situação limite, quando $Ste \rightarrow \infty$, tem-se um problema de condução pura. Este aspecto pode também ser entendido ao se observar a diminuição da importância do termo fonte localizado à direita da equação [51], recobrando-se a equação de condução pura, sem solidificação.

A Figura 45 indica ainda que, quanto menor o valor de Pe , menor é o efeito de Ste na variação da profundidade da poça. Tal comportamento também pode ser observado na equação diferencial, ou seja, quanto menor a velocidade de crescimento do lingote, menor a importância do calor latente (último termo à direita da equação [51]). No limite, quando a velocidade é igual à zero, a poça está imóvel, ou seja, a interface sólido-líquido não se movimenta, portanto não há solidificação e nem a liberação de calor latente. Note que, durante o estado quase-estacionário, a velocidade de solidificação é aproximadamente igual à velocidade de crescimento do lingote, que está diretamente relacionado com o valor de Pe . Se a velocidade de solidificação é nula, não há liberação de calor latente.

O efeito de Bi nos valores z_s^* representa o efeito da severidade da extração de calor pela lingoteira na profundidade da poça de fusão. Observa-se na Figura 45, que quanto maior a extração de calor pela lingoteira, menos profunda é a poça de

fusão, pois tem-se uma maior quantidade de sólido na região central, como esperado.

O tempo local de solidificação adimensional pode ser calculado através da relação $LST^* = z_p^* / Pe$, onde z_p^* é a espessura da zona pastosa, definida como a diferença entre as profundidades das isothermas *liquidus* e *solidus*, ou seja, $z_p^* = z_s^* - z_L^*$. O LST^* foi calculado na posição central do lingote durante o regime transiente e está apresentado na Figura 46 em função de Pe para valores de Bi iguais a 5,4 e 50. Observa-se claramente a existência de um ponto de mínimo no LST^* em função de Pe , ou seja, da taxa de refusão adimensional, quando $Ste \leq 0.1$. Este ponto de mínimo também foi observado nos resultados de Ballantyne e Mitchell (1979) (Figura 26 e Figura 27) Nota-se que a diminuição da importância do calor latente, ou seja, um aumento de Ste , causa um deslocamento do mínimo LST^* para valores cada vez maiores de taxa de refusão. Para $Ste \geq 0.5$, por exemplo, não parece existir um mínimo LST^* nas condições industrialmente utilizadas. O desaparecimento deste ponto de mínimo para determinadas condições nunca foi apresentado na literatura e somente foi possível no presente trabalho com a utilização de variáveis adimensionais, que permitem um estudo de uma faixa mais ampla de variáveis de processamento. Como observado no comportamento de z_s^* , os valores de LST^* também passam a ser pouco afetados pelo calor latente de solidificação quando $Ste > 0.5$.

Figura 46 – Evolução do tempo local de solidificação adimensional (LST^*) em função da taxa de refusão adimensional (Pe) para vários números de Stefan (Ste) e Biot (Bi).

A Figura 47 mostra a razão entre as profundidades adimensionais da isoterma solidus na linha central do lingote e a meio-raio em função de Pe , para Bi igual a 5,4 e 50. Esta razão, que representa um fator de forma, possibilita uma quantificação do formato da poça de metal líquido. Observa-se que uma diminuição da taxa de refusão, ou seja, de Pe , resulta em uma poça cada vez mais rasa, contendo uma menor quantidade de metal líquido. Este formato de poça, que representa aproximadamente uma solidificação unidirecional, é desejável ao final da solidificação no processo ESR para minimizar o rechupe causado pela contração do topo do lingote durante a sua solidificação. Observa-se que o fator de forma da poça de fusão aumenta com o aumento da taxa de refusão, ou seja, ela torna-se cada vez menos rasa e mais côncava, atingindo assintoticamente um valor limite. Esta observação está relacionada ao aumento da profundidade da poça em função do aumento da taxa de refusão discutido anteriormente.

A concavidade máxima limite atingida pela poça com o aumento da taxa de refusão é tanto maior quanto mais severa for a extração de calor através da lingoteira, representada por Bi. Desta forma, ações que aumentem o coeficiente de transferência de calor entre a superfície do lingote e a lingoteira, tornarão a poça de fusão mais côncava. Este efeito não era esperado, pois, como mostrado na Figura 45, a profundidade da poça na região central diminui com o aumento da extração de calor pela lingoteira. No entanto, a profundidade no meio raio diminui mais, aumentando o fator de forma e tornando a poça mais côncava.

Figura 47 – Fator de forma ϕ (razão entre as profundidades z_s^* no centro e a meio raio do lingote em função de Pe para vários Ste e Bi). Na região inferior são apresentados dois formatos de poça mostrando o campo térmico e as isoterma *solidus* e *liquidus* para diferentes Pe . Também é mostrada a escala de temperatura adimensional T^* correspondentes as cores sobrepostas ao campo de temperaturas.

5.3.2 Regime Transiente no ESR

O comprimento adimensional e instantâneo do lingote, $L^* = L/R$, no momento aproximado em que a poça de fusão atingiu o regime quase-estacionário foi denominado L_s^* e está apresentado na Figura 48 em função de Pe, para Bi igual a 5,4 e 50. Observa-se claramente que L_s^* aumenta com o aumento da taxa de refusão adimensional (Pe) e diminui na medida em que a extração de calor pelo molde torna-se mais severa, ou seja, com o aumento de Bi.

Estes resultados mostram que a regra normalmente adotada, sugerida por Mitchell e Smaller (1979), de que o lingote deve ter um comprimento maior do que $3R$ para atingir o estado quase-estacionário não pode ser aplicada em qualquer condição. Na Figura 48 observa-se que este comprimento pode variar na faixa de aproximadamente 1,5 até 4,5, dependendo do material (Ste), da taxa de refusão (Pe) e das condições de extração de calor (Bi). Por exemplo, o aumento da taxa de refusão resulta em um aumento aproximadamente linear do comprimento para se atingir o estado quase-estacionário quando $Pe > 5$.

Cabe ressaltar que os gráficos das Figuras 46, 47 e 48 são resultados de extrema utilidade prática, pois auxiliam o metalurgista no processo de definição de parâmetros de refusão durante o desenvolvimento de novas ligas e de novos diâmetros de lingoteiras. Baseando-se no gráfico da Figura 46, pode-se determinar a taxa de refusão com a qual se obtém o menor LST possível. A partir da Figura 47 pode-se obter informações acerca do formato da poça de metal líquido e, finalmente, através Figura 48 é possível a determinação da altura de lingote no qual o regime quase-estacionário é atingido e, por conseguinte, a região onde a microestrutura passa a ser homogênea .

Figura 48 - Comprimento adimensional do lingote no momento em que a poça de fusão atinge o regime quase-estacionário, L_s^* , em função de Pe , para vários Ste e Bi . Os dados obtidos por Takahama e Gammal (1979) e ainda Paton (1973) também são apresentados.

5.4 Resultados do Experimento Industrial

Neste item serão apresentados os resultados industriais obtidos a partir da solidificação de um lingote através do processo ESR. Como mencionado no início do item Metodologia, estes resultados serão utilizados para a segunda análise realizada no presente trabalho e consistem na medida das curvas de temperatura em função do tempo na parede da lingoteira industrial e na medida da geometria da poça de fusão, obtida pela adição de tungstênio metálico.

O gráfico da Figura 49 mostra a evolução térmica para os 6 termopares posicionados de acordo com a Figura 30.

Figura 49 - Evolução térmica no interior da parede da lingoteira de cobre.

Observa-se um pico inicial que está associado ao aquecimento devido ao contato da lingoteira com a escória líquida no momento que esta é vertida na lingoteira. Em seguida, observa-se a formação de dois picos mais “largos”. Os termopares 4, 5 e 6, localizados na região inferior da lingoteira, mostram o primeiro pico e o segundo pico é mostrado pelos termopares 1, 2 e 3. Estes picos indicam a passagem da região mais quente do sistema, que é a escória, próximo dos termopares.

Existe um sistema de controle da temperatura da água de refrigeração da lingoteira que adiciona água a temperatura ambiente quando a temperatura média da água de refrigeração atinge 45°C. Tal mudança de temperatura da água resulta em um resfriamento momentâneo da parede da lingoteira. Como este processo é realizado várias vezes durante uma corrida, observam-se sucessivos resfriamentos e posteriores aquecimentos da parede da lingoteira, causando o serrilhado observado nas curvas de temperatura mostradas na Figura 49.

A Figura 50 apresenta um gráfico com o fluxo de calor que atravessa a lingoteira de cobre ao longo da altura da mesma, calculado conforme metodologia apresentada na seção 4.6. Observa-se que, conforme esperado, os maiores valores de fluxo de calor estão na região de contato entre lingoteira e escória (região de distâncias negativas), pois o contato inicial com a lingoteira é praticamente perfeito pela ausência do vão resultante da solidificação.

Na região de contato entre lingote e lingoteira (região de distância positivas), observa-se que o fluxo cai dramaticamente e, em seguida, obedece a um perfil que pode ser representado por uma função $T = 1/x$. A queda brusca de temperatura está associada diretamente à formação do vão entre o lingote e a lingoteira devido à contração de solidificação.

Figura 50 - Fluxo de calor calculado em função da do topo do lingote.

A Figura 51 mostra a macrografia da seção longitudinal do lingote obtida a partir da técnica descrita no item 4.5. Observa-se claramente um pontilhado indicando a posição onde o tungstênio adicionado parou após a sua adição pelo topo. Este pontilhado deve indicar aproximadamente a profundidade da poça de fusão. Apesar dos esforços para que não houvesse uma maior aglomeração de tungstênio na região central, esta não foi evitada causando uma melhor delimitação do centro da poça em detrimento da periferia. Este formato será comparado com o formato calculado através do modelo matemático.

A macrografia mostra também a presença de grãos colunares abaixo da poça, como observado por outros autores (MELLBERG; 1973, NIIMI; 1973, LONGBOTTOM et. al, 1973 e REITER; 2005)

Figura 51 - Macrografia obtida a partir da seção longitudinal da cabeça de um lingote de 20 polegadas de diâmetro da liga VI138 (ASTM F138)

5.5 Simulação do Experimento Industrial

A Figura 52 mostra as isothermas *liquidus* e *solidus* resultantes da simulação do lingote refundido, sobrepostas à macrografia obtida. Observa-se que aderência entre o perfil de poça real e calculado é satisfatória. Nota-se que, na região do meio raio, a aderência não foi tão boa quanto no centro e periferia. Conforme apresentado na introdução, a relação entre a área do lingote e a área do eletrodo, chamado *fill ratio*, influencia a geometria da poça metálica (DUCKWORTH e HOYLE, 1969) e a condição de contorno adotada no topo do lingote não leva em conta esta relação, sendo, portanto, uma possível explicação para a diferença encontrada entre o perfil calculado e o perfil real nesta região.

A Figura 52 mostra também que o perfil da poça de metal líquido definida pelo tungstênio não é simétrica em relação ao eixo do lingote diferindo, portanto da hipótese de simetria adotada no modelo.

Figura 52 – Isotermas *solidus* e *liquidus* calculadas pelo modelo implementado sobrepostas à macrografia da poça metálica obtida a partir do lingote industrial.

Os campos térmicos para o domínio simulado em vários instantes, ou seja, vários comprimentos de lingote durante a refusão, são apresentados na Figura 53.

A Figura 54 mostra a evolução da profundidade das isotermas *solidus* e *liquidus*, da espessura da zona pastosa e do tempo local de solidificação (LST) na linha central do lingote ao longo do tempo ou do seu comprimento instantâneo.

Observa-se que, a partir aproximadamente 1,3 m, as profundidades das isotermas *solidus* e *liquidus* permanecem praticamente constantes e por conseqüência a espessura da zona pastosa e o tempo local de solidificação também passam a ser constantes. No regime quase-estacionário, a profundidade da isoterma *solidus* é de 19,8 cm, a profundidade da isoterma *liquidus* é de 16,4 cm resultando em uma espessura da zona pastosa de 3,4 cm e em um tempo local de solidificação de 9 minutos.

Figura 53 – Campos térmicos para todo o lingote para 5 comprimentos de lingote (0,38m; 0,76m; 1,14m; 1,52m e 1,9m)

Figura 54 – Evolução da profundidade das isotermas solidus e liquidus, da espessura da zona pastosa e do tempo local de solidificação (LST) ao longo do comprimento do lingote.

Através do modelo de resistências térmicas associadas apresentado nas seções 4.5.2 e 4.6 foi possível determinar-se o valor do fluxo de calor que atravessa a lingoteira de cobre para várias alturas a partir do topo do lingote. A Figura 55 apresenta um gráfico contendo o fluxo calculado através do modelo implementado juntamente com o fluxo de calor obtido através das temperaturas medidas pelos termopares 1 e 2.

Observa-se que, de forma geral, os valores de fluxo calculados pelo modelo de resistências associadas e os valores calculados a partir das temperaturas obtidas no experimento são razoavelmente aderentes. Entre as possíveis causas para as diferenças observadas está o fato de que o modelo não prevê a alteração da temperatura da água de refrigeração, enquanto que no sistema real a temperatura da água oscila ao longo do tempo, conforme discutido anteriormente. Tal oscilação está possivelmente associada aos “degraus” observados nas distâncias de aproximadamente 30 mm e 150 mm no fluxo de calor derivado das temperaturas dos termopares.

Figura 55 – Comparação da evolução do fluxo de calor ao longo da altura da lingoteira a partir do topo do lingote calculado através do modelo de resistências térmicas e calculado a partir das temperaturas obtidas no experimento industrial.

Utilizando-se resultados do tempo local de solidificação e do espaçamento dendrítico secundário para o aço SAE 316 (JERNKONTORET, 1977) em 3 diferentes velocidades de solidificação foi possível obter, através de uma regressão não linear, a equação que descreve o espaçamento entre os braços dendríticos secundários S_{II} em função do tempo local de solidificação (LST).

Os resultados utilizados e a curva obtida na regressão são apresentados na Figura 56 juntamente com sua equação.

Figura 56 – Gráfico e equação do espaçamento dendrítico secundário em função do tempo local de solidificação (LST) obtidos por regressão não linear a partir de resultados experimentais (JERNKONTORET,1977)

A Tabela 4 mostra a comparação entre os resultados de S_{II} médios medidos nas amostras do centro e periferia (conforme descrito na seção 4.7) e os valores calculados pela equação obtida utilizando-se os resultados de tempo local de solidificação (resultante da simulação) para o centro e periferia do lingote.

Observa-se que a aderência entre os valores de espaçamento interdendrítico calculados e medidos foi razoavelmente boa para a região central ao passo em que para a região de meio raio tal aderência não foi obtida.

Este fato provavelmente está associado à menor precisão do modelo na obtenção das isotermas *solidus* e *liquidus* nesta região conforme discutido anteriormente.

Tabela 4 – Comparação entre os espaçamentos dendríticos secundários (S_{II}) calculados e medidos.

Região do Lingote	Tempo local de solidificação (s)	S_{II} calculado(μm)	S_{II} medido(μm)
Meio raio	506	123	96
Centro	556	129	114

A Figura 57 mostra uma micrografia utilizada em uma das medições do espaçamento dendrítico secundário na região central do lingote.

Figura 57 – Micrografia da região central do lingote utilizada para medição do espaçamento dendrítico secundário

6 CONCLUSÕES

As seguintes conclusões foram obtidas a partir dos resultados do presente trabalho:

- 1) Os resultados apresentados permitem que seja determinado, sob o ponto de vista microestrutural (espaçamento entre braços dendríticos), o valor ótimo da taxa de refusão e o momento em que o processo atinge o estado quase-estacionário para uma ampla faixa de materiais refundidos, diâmetros de lingote e condições de transferência de calor em condições industriais.
- 2) Com a utilização da transformação de Landau é possível modelar corretamente o domínio do lingote em crescimento durante o processo ESR, evitando-se a utilização de técnicas *ad-hoc* de malhas adaptativas.
- 3) A profundidade da poça de fusão aumenta linearmente com o aumento da taxa de refusão (Pe) para $Pe > 3$, porém é muito pouco sensível às variações Desta taxa quando $Pe < 2$.
- 4) O tempo local de solidificação (LST^*) é praticamente constante para $Ste > 0,5$ e $Pe > 6$.
- 5) Na faixa de valores de Pe simulados, o LST^* apresenta um ponto de mínimo em função de Pe apenas em condições onde $Ste \leq 0,1$.
- 6) A razão entre o comprimento do lingote e o seu raio no momento em que a poça de fusão atinge o regime quase-estacionário aumenta com o aumento de Pe e com a diminuição de Bi , não sendo possível definir um único valor para todas as condições industriais, como sugerido na literatura.
- 7) Através da adição de tungstênio metálico durante a refusão no processo ESR é possível determinar o perfil da poça metálica com nível de clareza excelente no aço ASTM F138.
- 8) O perfil geométrico calculado da poça metálica mostrou uma boa aderência ao perfil medido no lingote industrial principalmente na região da periferia e no centro do lingote.
- 9) A utilização de termopares posicionados na parede da lingoteira de cobre possibilitou o cálculo do fluxo de calor que atravessa a interface lateral lingote-lingoteira.

- 10) O modelo de associação de resistências térmicas foi considerado bom, pois forneceu um fluxo de calor na interface lateral lingote-lingoteira e uma geometria de poça de fusão em boa concordância com os dados medidos.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, J. D. **Computational fluid dynamics: the basics with applications**. New York: McGraw-Hill, 1995. 547 p.

BALLANTYNE, A.S.; KENNEDY, R.J.; MITCHELL, A. Solidification processes and properties of castings. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON VACUUM METALLURGY AND ELECTROSLAG REMELTING PROCESSES, 5., October 11-15, 1976 Munich. **Proceedings...** Hanau: Wahlter, M. and Leybold-Heraeus GmbH, 1976. p. 181-185.

BALLANTYNE, A.S.; MITCHELL, A. Modelling of ingot thermal fields in consumable electrode remelting processes. A. **Ironmaking and Steelmaking**, n. 4, p. 222-239, 1977.

BALLANTYNE, A. S. ; MITCHELL, A. Factors Affecting Solidification and Ingot Temperatures in ESR. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPECIAL MELTING, 6., 1979 San Diego, USA. **Proceedings...** San Diego, California: Bhat, K. G. ; Schlatter, R. , Apr. 1979. p. 569-593.

CHOUDHARY, M.; SZEKELY, J. The Modelling of Pool Profiles, Temperature Profiles and Velocity Fields in ESR Systems. **Metallurgical Transactions B** vol. 11B, p. 439-453, Sep. 1980.

CHOUDHARY, M.; SZEKELY, J. Modelling of fluid flow and heat transfer in industrial-scale ESR system. **Ironmaking and Steelmaking**, n. 5, 225-232, 1981.

CRANK, J. **Free and moving boundary problems**. Oxford: Clarendon Press, 1984. 245 p.

CVERNA, F.. **ASM ready reference. Thermal properties of metals**. Materials Park, Ohio: ASM International, 2002, 560 p.

DILAWARI, A.H.; SZEKELY, J. A Mathematical Model of Slag and Metal Flow in ESR Process. **Metallurgical Transactions B**, vol. 8B, p. 222-236, June, 1977.

DILAWARI, A.H.; SZEKELY, J. Heat Transfer and Fluid Flow Phenomena in Electroslag Refining. **Metallurgical Transactions B** vol. 9B, p. 77-86, mar. 1978.

DUCKWORTH, W. E.; HOYLE, G. **Electro-slag Refining**. London: Chapman and Hall LTD, 1969. 178 p.

ELLIOTT, J.F.; MAULTVAULT, M. Steady-State Modeling of the ESR System In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON ELECTROSLAG REMELTING PROCESS, 4., 7-8 June : Tokyo, Japan. **Proceedings...** Tokyo: Iron and Steel Institute of Japan, 1973 . p. 69-80.

ENTCHEV, P.B. ; LAGOUDAS, D. C. ; ILIEV, O. P. Domain Transformation Problems in 2D Oxidation. **Journal of the Mechanical Behavior of Materials**, vol. 11, n. 4, p. 275-293, 2000.

FERNG, Y.M. ; CHIENG, C.C.; Pan, C. Numerical Simulations of Electro-slag Remelting Process. **Numerical Heat Transfer A**, vol. 16, n.4, p. 429-449, 1989.

FORTUNA, A. O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos e Aplicações**. São Paulo: Edusp, 2000. 426 p.

GARTLING, D.K.; SACKINGER, P.A. Finite Element Simulation of Vacuum Arc Remelting. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 24, p. 1271-1289, 1997.

GEIGER, G. H.; POIRIER, D.R. **Transport Phenomena in Metallurgy**. New York: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1973. 616 p.

HARDIN, R.A.; BECKERMANN, C., Transfer and Solidification Modelling in the Continuous Casting of Multi-Component Steels. In: **Proceedings of the ASME 1997 National Heat Transfer Conference**, Vol. 9, ASME, New York, HTD-Vol. 347, 1997, p. 9-20.

HERNANDEZ-MORALES, B.; MITCHELL, A. Review of mathematical models of fluid flow, heat transfer, and mass transfer in electroslag remelting process. Ironmaking and steelmaking, 1999 vol 26 n°6.p. 423-438.

HO, K.; PEHLKE, R.D. Mechanisms of heat transfer at a metal-mold interface. Transactions of The American Foundrymen's Society (AFS), p.587-598, 1984.

JARDY, A. ; ABLITZER, D. ; WADIER, J. F. Magnetohydrodynamic and Thermal Behavior of Electroslag Remelting Slag. **Metallurgical Transactions B**, vol. 22B, p. 111-120, Feb. 1991.

JEANFILS, C.L. , CHEN, J. H. ; KLEIN, H.J. Temperature Distribution in an Electroslag Remelted Ingot During Transient Conditions. In: VACUUM METALLURGY CONFERENCE ON SPECIAL MELTING, 6., 1979 San Diego. **Proceedings...** San Diego, California: American Vacuum Society, 1979. p. 543-555.

JERNKONTORET. **A guide to the solidification of steels.** Stockholm: Jernkontoret, 1977. 162 p.

KURZ, W. Solidification processes and properties of castings. In: FIFTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON VACUUM METALLURGY AND ELECTROSLAG REMELTING PROCESSES, 5., October 11-15, 1976 Munich. **Proceedings...** Hanau: Wahlter, M. and Leybold-Heraeus GmbH, 1976. p. 5-14.

KURZ, W; FISHER, D.J. **Fundamentals of solidification.** 4. ed. rev. Uetikon-Zuerich: Trans Tech Publications, 1998. 305p.

Longbottom, D. M. et al. The effect of melting parameters on ESR process. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON ELECTROSLAG REMELTING PROCESS, 4., 7-8 June : Tokyo, Japan. **Proceedings...** Tokyo: Iron and Steel Institute of Japan, 1973 . p. 127-136.

McKeen, W.A.; Joseph, L.G.; Spehar, D.M. Melting Alloys by the Hopkins Process. **Metal Progress**, p. 86-123.

Mellberg, P. O. Temperature Distributions in Slag and Metal during Electroslag Remelting of Ball-Bearing Steel. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON ELECTROSLAG REMELTING PROCESS, 4., 7-8 June : Tokyo, Japan. **Proceedings...** Tokyo: Iron and Steel Institute of Japan, 1973. p. 13-25.

Mellberg, P.O. Thermal Conditions in ESR Process. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPECIAL MELTING, 6., 1979 San Diego, USA. **Proceedings...** San Diego, California: Bhat, K. G. ; Schlatter, R., Apr. 1979. p. 535-542.

Mills, K.C.; Su, Y.; Li, Z.; Brooks, R.F. Equations for the Calculation of the Thermophysical Properties of Stainless Steel. **ISIJ International**, vol. 44, N.10, p. 1661-1668, 2004.

Mitchell, A.; Joshi, S.; Cameron, J. Electrode Temperature Gradients in the Electroslag Process. **Metallurgical Transactions**, vol. 2, p. 561-567, Feb. 1971.

MITCHELL, A. ; SAMILER, R. M. Pratical aspects of electroslag remelging technology. **International Materials Reviews**, n. 5/6, p. 231-264, 1979.

MITCHELL, A. Electroslag and Vacuum Arc Remelting Processes. In: **Electric Furnace Steelmaking**. Chelsea, MI: BookCrafters, 1985. p. 191-236.

NI, J. ; BECKERMANN, C. A Volume-Averaged Two-Phase Model for Transport Phenomena during Solidification. *Metallurgical Transactions B*, volume 22B, June 1991, p. 349-360

NIIMI, t. et al. An Evaluation of the Electroslag Remelted Large Ingot (II). In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON ELECTROSLAG REMELTING PROCESS, 4., 7-8 June : Tokyo, Japan. **Proceedings...** Tokyo: Iron and Steel Institute of Japan, 1973. p. 13-25.

ÖZISIK, K.M.N. **Heat conduction**. 2. ed. New York: Wiley, 1993. 692 p.

PATANKAR, S.V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**, S.L.: Hemisphere Publishing, 1980. 197 p.

PATON, B.E. et al. Mathematical Simulation and Prediction of electroslag refining of Large Forging Ingots. In: ELECTROSLAG REFINING. **Proceedings...** London: The Iron and Steel Institute, 1973. p.16-20.

PEHLKE,R.D. **Summary of Thermal Properties for Casting Alloys and Mold Materials.**; Springfield, NTIS, 1982. 166 p.

PETERSON, S. Propagation of a boundary of fusion. In: Glasgow Mathematical Society. **Proceedings...** vol. 1, p.42-47

PLÖCLINGER, E. Electroslag Remelting: a Modern Tool in Metallurgy. **Journal of the Iron and Steel Institute**. London, p. 533-541, 1973.

RAPPAZ, M. Modelling of microstructure formation in solidification process. **International Materials Reviews**, volume 34, n. 3, p. 93-123, 1989.

REITER, G. et al. Optimization and Detailed Validation of a VAR model. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON LIQUID METAL PROCESSING AND

CASTING, 18-21 Sep., Santa Fe, New Mexico. **Proceedings...** Materials Park, Ohio: ASM International, 2005. p.7-12.

RIDDER, S. D. et al. Steady State Segregation and Heat Flow in ESR. **Metallurgical Transactions B**, vol. 9B, p. 415-424, Sep. 1978.

SZEKELY, J. **Fluid flow phenomena in metals processing**. New York : Academic Press, 1979. 437 p.

TAKAHAMA, K.; GAMMAL, T.E. An Instationary Mathematical Model for the Determination of the Metal Pool characteristics in the ESR Process. VACUUM METALLURGY CONFERENCE ON SPECIAL MELTING, 6., 1979 San Diego. **Proceedings...** San Diego, California: American Vacuum Society, 1979. p. 556-568.

VOLLER, V. R. ; SUNDARRAJ, S. Modelling of microsegregation. **Materials Science and Technology**, vol. 9, p. 474-480, June 1993.

VOLLER, V. R. ; CROSS, M. Estimating the Solidification/Melting Times of Cilindrically Symmetric Regions. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Great Britain, vol. 24, n. 9, p. 1457-1462, 1981

XU, X.; ZHANG, W.; LEE, P.D. Tree-ring Formation during Vacuum Arc Remelting of INCONEL 718: Part II. Mathematical Modelling. **Metallurgical and Materials Transactions A**, vol. 33A, p. 1805-1815, June 2002.

YU, K-O. Comparison of ESR-VAR Processes. I. Heat Transfer Characteristics of Crucible. VACUUM METALLURGY CONFERENCE, 1984 Pittsburgh. **Proceedings...** Pittsburgh, Pennsylvania: Iron and Steel Society/AIME, 1985. p. 83-92.