EDSON GOMES

CONFORMABILIDADE PLÁSTICA DOS METAIS
PELA MECÂNICA DA FRATURA NÃO-LINEAR

TESE APRESENTADA À ESCOLA
POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO, PARA OBTENÇÃO
DO TÍTULO DE DOUTOR EM
ENGENHARIA.

SÃO PAULO, 1990

CONSULTA
FT-580

PC
FT-580

EDSON GOMES

Engenheiro Mecânico, Universidade Estadual de Campinas, 1975
Mestre em Reatores Nucleares, Instituto de Pesquisas Energéticas
e Nucleares-Universidade de São Paulo, 1978

CONFORMABILIDADE PLÁSTICA DOS METAIS
PELA MECÂNICA DA FRATURA NÃO-LINEAR

Tese apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo, para
obtenção do título de Doutor em
Engenharia.

Orientador: Prof.Dr. ETTORE BRESCIANI FILHO
Professor Credenciado na Pós-Graduação, Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo
Professor Titular, Faculdade de Engenharia Mecânica da
Universidade Estadual de Campinas

São Paulo, 1990

. À Maíra, minha filha....

AGRADECIMENTOS

Quero registrar o meu especial agradecimento ao Professor Doutor Ettore Bresciani Filho, orientador desta tese de doutorado e amigo. Também quero agradecer à Professora Doutora Cecília Amélia de Carvalho Zavaglia que contribuiu de modo decisivo para a conclusão desta tese e ao eterno amigo Professor Fernando Antonio da Costa Nery pelo apoio e paciência durante este longo período de convivência mútua na EPUSP.

Agradeço também às seguintes pessoas e instituições que de algum modo contribuíram para a realização deste trabalho: ao Professor Doutor Valter Francisco Arruda Alves da EPUSP; ao Professor Doutor Carlos C. Tu, da EPUSP; ao Professor Doutor Giorgio E.O. Giacaglia, da EPUSP; ao Professor Doutor Roberto Y. Hukai, do IEE-USP; ao Professor Doutor José Maria S. Jarbado, da EESC-USP; ao Professor Assistente Gilmar Ferreira Batalha, da EPUSP; ao Professor Doutor Francisco Emílio Baccaro Nigro, da EPUSP e do IPT; ao Professor Doutor Itamar Ferreira, da UNICAMP; ao Professor Doutor Célio Tanigushi, da EPUSP; ao Professor Assistente Emílio Del Moral Hernandez, da EPUSP; ao Professor Assistente Antonio Carlos Seabra, da EPUSP; ao Professor Doutor Normonds Allen, da EPUSP; às Srtas. Cecília Maria da Costa Souza e Maria Lúcia Salata, da BICENGE; à Srta. Thelma Lúcia Guedes Camelo, da ABLA; à Srta. Ivan Rocha da Silva, da EPUSP; ao Sr. Donato João Binelli, da EPUSP; à Srta. Anita Leocádia Mokrejs, da UNESP; à Srta. Leila Funk Abraão, do IME da USP; aos engenheiros Mamiro Yoshizawa, e Cláudio Antonio Scarpinella, especialistas da CESP; ao Sr. Ayrton Roberto Mazzucato Leal da , EPUSP; ao Sr.

Nelson Gomes de Moraes, da EPUSP; ao Professor Doutor Rubens Murillo Marques, Presidente da Fundação Carlos Chagas; ao Professor Doutor Hélio Mitio, da EPUSP; ao Professor Doutor Marco Antonio Brinati, da EPUSP; ao Professor Doutor Eugênio da Motta Singer, da UNICAMP; ao especialista em energia Antonio Carlos Daniek, da CESP; à analista de computação Rosemary Nowak, do CCE da USP; ao analista de computação Francisco Marcos Dias, da ITAUTEC; ao analista de computação Lucas da Costa Manso, da EMLASA; à Sra. Neide de Souza Goes, às Srtas. Cristiane Alves de Souza e Silvana Bentley Murbak, aos técnicos Álvaro Mercatelli e Oswaldo Sanches Jr, todos do IPT; ao especialista em energia Elio Takashi Kumoto, da CESP; à Srta. Elizabeth Noto, da Secretaria de Defesa do Consumidor do Estado de São Paulo; ao Comandante Luiz Victor Seize, Professor do Colégio Naval; às bibliotecárias Silvia Lúcia Ribeiro e Ademir do Carmo Merlin Barroso, da EPUSP; e ao Prof. Dr. Luiz Novaes Ferreira, da EPUSP.

Registro o meu especial agradecimento à FAPESP, à FINEP, à CAPES, ao IPEN (antigo IEA), à Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP, ao Departamento de Engenharia Mecânica da EPUSP, ao IPT, à Sra. Elizabete Pessine, do IPEN, ao Especialista da CESP Roberto Pessine e à Comissão de Pós-Graduação da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

As minhas homenagens póstumas são para o Professor Doutor Rômulo Ribeiro Pieroni, do IEA, e ao engenheiro pesquisador Paulo Evaristo da Silva Chaves, do IPT.

RESUMO

Este trabalho visa modelar e estabelecer procedimentos experimentais para permitir a construção de mapas de conformabilidade plástica dos metais fundamentados na mecânica da fratura não-linear elasto-plástica. Um critério de conformabilidade plástica foi desenvolvido pela utilização de uma integral invariante generalizada baseada no teorema de NOETHER das integrais invariantes. Discute-se também as limitações da teoria da plasticidade que impossibilitam a obtenção de critérios de conformabilidade por seu intermédio. É um importante objetivo proporcionar o surgimento de uma metodologia de ensaio contendo alto rigor técnico mas sendo de baixo custo e de fácil implementação em simples instalações industriais. O procedimento foi aplicado no estudo do caso do forjamento a frio em matriz aberta, simulado por ensaio de compressão em prensa hidráulica.

ABSTRACT

The present study is aimed to the development of a low cost, to be implemented with ease, and technicality satisfactory industrial type testing for metal forming workability analysis. It is concerned with the development of an experimental procedures to permit the building up the metal forming workability maps, based on the nonlinear elastic-plastic fracture mechanics. A generalized nonlinear fracture mechanics invariant integral was applied to the case problem of the cold forging in flat open die of a ductile metallic material. At end a fracture criterion was developed in order to be possible the construction of the fracture deformation maps of the case study.

INDICE

SIMBOLOGIA	1
1. INTRODUÇÃO	5
1.1. Teoria da Plasticidade dos Metais	5
1.2. Mecânica da Fratura Linear e Não-Linear	19
1.3. Conformação Plástica dos Metais	31
1.4. Conformabilidade Plástica dos Metais	36
Referências Bibliográficas	40
2. ESTABELECIMENTO DO PROBLEMA	53
2.1. Definições	53
2.2. O Problema	54
2.3. Objetivos do Presente Trabalho	54
2.4. Justificativa	55
Referências Bibliográficas	57
3. MECÂNICA DA CONFORMAÇÃO PLÁSTICA DOS METAIS	54
3.1. Conceitos Fundamentais	58
3.1.1. Comportamento dos Metais na Conformação	63
3.1.2. Relações da Plasticidade dos Metais na	65
3.1.3. Relações Experimentais de Tensões versus Deformações: LUDWICK, HOLLOMON, VOCE, SWIFT, RAMBERG-OSGOOD e PRAGER	69
3.1.4. A questão da anisotropia na Plasticidade	71
3.2. Teoria Geral da Plasticidade na Conformação Plástica dos Metais	73
3.2.1. Sistemas de Coordenadas Generalizadas Sistema de LAGRANGE e de EULER, Tensões de CAUCHY, LAGRANGE e de KIRCHHOFF	73

3.2.2. Sistemas de Equações para Problemas de Conformação Plástica dos Metais	85
3.3. Métodos de Resoluções de Problemas Elasto-Plásticos	94
3.4. Método Variacional na Elasticidade e na Plasticidade	95
3.4.1. Teoremas Gerais da Formulação Variacional	96
3.4.2. Método de HILL do Trabalho Plástico	100
3.4.3. Método dos Limites de PRAGER	104
3.4.4. Aplicações dos Teoremas dos Valores Extremos na Conformação Plástica dos Metais	109
3.5. Mecânica da Interação entre Superfícies em Contato na Conformação Plástica: fenômeno do atrito	112
Referências Bibliográficas	127
4. MECÂNICA DA FRATURA NÃO-LINEAR E AS INTEGRAIS INVARIANTES	128
4.1. Fundamentos da Mecânica da Fratura Linear e Não-Linear	128
4.2. Teorema de NOETHER para as Integrais Invariantes	140
4.3. Integrais Invariantes e a Mecânica da Fratura Não-Linear	141
Referências Bibliográficas	158
5. CONFORMABILIDADE PLÁSTICA DOS METAIS PELA MECÂNICA DA FRATURA NÃO-LINEAR	162
5.1. Conceitos de Conformabilidade Plástica dos Metais	162

5.1.1. Conformabilidade Baseada no Conceito	
Microscópico de Fratura Dúctil	162
5.1.2. Conformabilidade Baseada no' Conceito	
Macroscópico de Deformação Plástica	164
5.1.3. Desvantagens e Vantagens dos Critérios de	
Conformabilidade Variantes: baseados na	
fratura dúctil e na deformação plástica	
dos metais	165
5.2. Campos da Elasto-Plasticidade Gerados por	
Integrais Invariantes da Mecânica da Fratura	
Não-Linear	167
5.3. Conformabilidade Plástica dos Metais pela	
Mecânica da Fratura Não-Linear	181
Referências Bibliográficas	188
6. DESENVOLVIMENTO EXPERIMENTAL	191
6.1 Considerações Iniciais	191
6.2 Material para os Ensaios.....	194
6.3 Determinação das expressões da Relação Tensão vs	
Deformação.....	195
6.4 Determinação do Coeficiente de Atrito e das Cargas de	
Compressão	198
6.5 Ensaios de Conformabilidade	203
Referências Bibliográficas.....	209
7. RESULTADOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS	211
Referências Bibliográficas.....	224
8. CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS	225
8.1 Conclusões	225
8.2 Sugestões de Trabalhos	225

LISTAS DE FIGURAS E TABELAS	227
APÊNDICE	230
Referência Bibliográfica	236

SIMBOLOGIA

a ; semi comprimento de trinca
 a, b, n ; parâmetros na fórmula de VOCE
 a, c, n ; parâmetros na fórmula de SWIFT
 A, α, n ; constantes materiais ajustáveis
 A_0, A_f ; áreas inicial e final
 $\underline{b}, \underline{B}$; vetores binormais
 $\underline{b}_j$; vetor força central unitário
 d_n ; parâmetro relacionado à abertura de trincas
 $d\underline{\epsilon}^P$; vetor incremental de deformação
 $d\underline{\epsilon}_{ij}$; deformação incremental total
 $d\underline{\epsilon}_{ij}^e$; deformação incremental elástica
 $d\underline{\epsilon}_{ij}^P$; deformação incremental plástica
 D_0 ; fator de frequência relacionado ao coeficiente de difusão
 D ; região externa a uma trinca de RICE
 $\frac{D}{Dt} \{ \dots \}$; derivada material em coordenadas materiais
 $\frac{\partial}{\partial t} \{ \dots \}$; derivada parcial
 $d\lambda$; fator de escala na teoria do escoamento plástico
 E ; energia total transferida para uma região de fratura
 E ; módulo de YOUNG para material elástico
 e_{ijk}, e_{lmn} ; símbolos permutadores alternantes
 e ; densidade de energia interna
 $f_{MH}(\sigma_{ij})$; função superfície de escoamento de HENCKY-VON MISES
 $f(\sigma_{ij}, k^2)$; superfície de escoamento
 $f(s)$; função de parâmetros microestruturais
 f_i ; força de campo por unidade de volume
 $\underline{\text{grad}}(\phi)$; vetor função gradiente da função $\phi(x)$

g^{ij} ; tensor métrico Euclidiano no sistema X_i
 g_{ij} ; tensor métrico Euclidiano no sistema x_i
 G ; módulo de KIRCHHOFF para o cisalhamento
 $g(\sigma_{ij}, K^2)$; potencial plástico generalizado
 H ; constante de encruamento na expressão de LUDWICK
 h ; espessura da película lubrificante
 $I_2(S_{ij})$; segundo invariante do tensor das tensões reduzidas
 I_n ; expressão integral constante para determinação da integral-J
 J ; integral-J de RICE
 $\hat{J}_k$; generalização da integral-J translacional
 K ; na expressão $F(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, W^p, T, K^2)=0$, é o critério de plasticidade
 k ; constante de BOLTZMANN na expressão de energia de ativação
 K ; coeficiente da expressão de HOLLONON para resistência plástica
 K, N, p ou n ; parâmetros de RAMBERG-OSGOOD
 K ; fator de intensidade de tensão perto da ponta de uma trinca
 k ; energia cinética por unidade de massa
 l ; comprimento de arco numa curva envolvendo a trinca
 $\hat{L}_k$; generalização da integral-L rotacional
 m ; fator de atrito constante
 m ; sensibilidade à taxa de deformação
 $\hat{M}_k$; generalização da integral-M de expansão auto-similar
 n ; expoente de encruamento nas expressões de HOLLONON e LUDWICK
 n_k, n_j ; vetores normais unitários
 $\underline{n}, \underline{N}$; vetores normais
 p ; pressão externa aplicada ao sistema material
 p ; expoente na expressão de RAMBERG-OSGOOD
 Q ; energia de ativação
 R ; constante universal dos gases
 RA ; fator de redução de área

r ; distância radial de um ponto afastado da ponta da trinca
 S_{ij} ; tensor de tensão de KIRCHHOFF
 S_{ij} , σ'_{ij} ; tensores das tensões reduzidas
 $T_{\text{fusão}}$; temperatura de fusão
 T_{ij} ; tensor de tensão de LAGRANGE
 T ; temperatura absoluta
 $\underline{t}$, $\underline{T}$; vetores tangenciais
 t_i ; vetor de tração
 U ; energia potencial elástica
 $\dot{u}$; taxa de deslocamento relativo, velocidade de evolução
 $\ddot{u}$; aceleração
 u_i ; deslocamento relativo no sistema x_i
 U_i ; deslocamento relativo no sistema X_i
 V ; volume do material envolto por uma superfície S
 $\underline{v}$; vetor velocidade
 v_i ; campo de velocidades
 X_i ; sistema de coordenadas materiais de LAGRANGE
 x_i ; sistema de coordenadas geométricas de EULER
 z_k ; parâmetro de ZENNER-HOLLOMON
 W^p ; densidade da energia de deformação
 w_j , Δv ; velocidade relativa
 W ; trabalho fornecido para um sistema
 $W(\epsilon_{ij})$; densidade de energia de deformação
 α , n ; parâmetros da expressão de RAMBERG-OSGOOD
 $\delta \{ \dots \}$; primeira variação
 $\hat{\delta}$; abertura da trinca relacionada à integral- $\hat{J}$
 δ_{ij} ; função delta de KRONECKER
 δ_t ; deslocamento da abertura da trinca
 ΔH_k ; energia de ativação verdadeira

ϵ_{eq} ; deformação equivalente
 ϵ_{ij}^p ; tensor das deformações plásticas
 $\underline{\epsilon}^p$; vetor de deformação plástica
 $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{d}{dt} \epsilon_{ij}$; taxa de deformação
 ${}^E\epsilon_{ij}$; tensor de deformação de ALMANSI-EULER
 ${}^L\epsilon_{ij}$; tensor de deformação de GREEN-LAGRANGE
 γ_s ; energia específica de formação de superfície livre
 γ_e ; densidade de energia potencial elástica
 γ_p ; densidade de energia potencial plástica
 Γ_{ij} ; tensor métrico de transformação
 $\lambda, d\lambda$; parâmetros de proporcionalidades na plasticidade
 μ ; coeficiente de atrito de COULOMB
 ν ; razão de POISSON
 ρ ; densidade do material
 $\bar{\sigma}_0$; tensão limite de escoamento
 σ_m ; tensão média
 σ_0 ; tensão de referência para a expressão de LUDWICK
 σ_{ij} ; tensor de tensões
 $\sigma, \bar{\sigma}$; tensões efetivas
 σ_{11} ; tensor de tensão de CAUCHY
 Σ, S ; superfície envolvendo um volume V
 τ ; tensão de cisalhamento
 φ ; função de proporcionalidade entre o tensor das deformações incrementais e o tensor das tensões reduzidas na formulação de HENCKY-ILYUSHIN-NADAI
 $\emptyset$; termo de descontinuidade material
 ω_j, ν_j ; vetor normal unitário

1. INTRODUÇÃO

Dentre os processos de conformação dos metais envolvendo as transformações mecânicas, o da conformação plástica dos metais é um processo mecânico bastante desenvolvido industrialmente para a produção de peças e componentes para sistemas mecânicos, ALTAN¹. Esse processo é classificado como sendo de não remoção de material, e, ainda, podendo ser realizado tanto a frio como a quente. Além do mais, a conformação plástica envolve conhecimentos das áreas da mecânica dos meios contínuos dentro do campo da elasticidade e da plasticidade dos metais, as ciências térmicas, a mecânica dos fluidos, a metalurgia e a tribologia na conformação plástica, juntamente com as áreas da matemática aplicada com seus métodos analíticos e numéricos.

1.1. Teoria da plasticidade dos metais

O desenvolvimento da conformação plástica tem englobado os progressos alcançados nas áreas citadas, mas a teoria da plasticidade é a que mais tem contribuído com importantes avanços para o presente estado da tecnologia.

O trabalho de HILL², até o ano de 1950, consolida a maioria das contribuições, tanto as experimentais como as teóricas, desenvolvidas e aplicadas na plasticidade dos metais, principalmente nas suas formulações matemáticas.

Mas a preocupação teórica com a plasticidade iniciou-se com COULOMB³, que propôs um critério para o limite de escoamento plástico dos sólidos, posteriormente aplicado na mecânica dos solos por PONCELET⁴ e RANKINE⁵. O início dos estudos sistemáticos da teoria da plasticidade dos metais se deveu a

TRESCA^{2,5-6}, que, desenvolvendo a idéia de COULOMB, estabeleceu que o metal iniciava a deformação plástica quando a tensão máxima de cisalhamento atingisse um valor crítico, sendo este uma propriedade mecânica do metal obtida experimentalmente por ensaios padronizados. O trabalho de TRESCA, se baseou em resultados experimentais a partir de ensaios de puncionamento e de extrusão.

Uma primeira contribuição à teoria matemática da plasticidade foi proporcionada por SAINT-VENANT⁸, que aplicando o critério do início do escoamento plástico de TRESCA, determinou as tensões num tubo parcialmente plastificado, submetido a esforços de torção e de flexão. Também, SAINT-VENANT determinou as tensões em um tubo totalmente plastificado sujeito a uma pressão interna onde se estabeleceu um sistema de cinco equações, relacionando tensões e deformações para um estado plano de deformações. LEVY⁹, seguindo as idéias de TRESCA, propôs as relações tridimensionais para as tensões e deformações plásticas. Originou-se, portanto o conhecido critério de escoamento plástico de TRESCA - SAINT-VENANT, da máxima tensão de cisalhamento.

Quase quatro décadas após LEVY, HAAR e VON KÁRMÁN¹⁰ desenvolveram as equações da plasticidade a partir do princípio variacional e tendo como objetivo derivá-las com base no princípio generalizado de CASTIGLIANO, o qual estabelece que as tensões reais minimizam a energia elástica de um corpo isotrópico, usando uma combinação com o critério de TRESCA.

A grande contribuição, que satisfaz a maioria dos metais com relação ao comportamento plástico, foi a proposta por VON MISES¹¹, que baseando-se em argumentos puramente matemáticos, estabeleceu que o material metálico iniciava o escoamento plástico quando uma certa soma de desvios

das tensões normais e das tensões de cisalhamento quadráticas atingissem um valor crítico. Este critério de VON MISES foi posteriormente interpretado por HENCKY¹² como sendo o da máxima energia da distorção, ou seja, o escoamento plástico de um metal ocorre quando a densidade de energia de deformação cisalhante elástica atinge um valor crítico relacionado com a propriedade mecânica do material. Essa propriedade é obtida através de ensaios de tração, torção ou de compressão simples. A esse critério de escoamento plástico se denominou de critério de HUBER-HENCKY-VON MISES da máxima energia de distorção. o mesmo proposto por HUBER⁷.

PRANDTL¹³ mostrou que o problema da plasticidade dos metais, no estado plano de deformação era matematicamente de natureza hiperbólica, o que permitiu o cálculo de cargas no caso da deformação plástica por compressão de superfícies planas por matrizes também planas. A generalização do método de PRANDTL foi realizada por HENCKY¹², que estabeleceu as propriedades geométricas do campo das linhas de deslizamento no estado plano de deformação. As equações, que governam as variações de velocidade de escoamento ao longo das linhas, foram obtidas por GEIRINGER¹⁵.

O método das linhas de deslizamento é o conhecido método das características, muito utilizado na busca de soluções analíticas de problemas formulados em sistemas diferenciais parciais do tipo hiperbólicos¹⁹. As condições de existência das linhas de deslizamento são discutidas em HILL² e KACHANOV²⁰, onde o método é aplicado em vários problemas de plasticidade metálica na condição de deformação plana. As aplicações da teoria da plasticidade nos processos tecnológicos começaram com VON KÁRMÁN¹⁶, que analisou o problema da determinação do estado de

tensão na laminação de tiras metálicas. SACHS¹⁷ e SIEBEL¹⁸ desenvolveram aplicações para a análise de problemas da trefilação de fios.

O estabelecimento das relações entre tensões e deformações também tem sido uma área de intensa pesquisa. Do lado experimental, uma relação simples foi a proposta por LUDWICK²¹ para os metais sob condição de deformação plástica a frio. Essa relação de LUDWICK considera o encruamento como um fator importante na caracterização do escoamento plástico. A complexidade dessa relação, para a época, não permitiu a sua utilização de modo sistemático. A maioria das análises foram desenvolvidas para modelos simplificados de comportamento idealmente plástico.

Os esforços de pesquisas realizadas durante a década de quarenta, levou ao estabelecimento de outras relações experimentais que permitiram a construção de curvas de relações tensões versus deformações por métodos gráficos. A relação de HOLLOMON²², seguindo a fornecida por LUDWICK, gerou a relação parabólica ou da potência, de fácil manipulação gráfica e algébrica. Mas apenas alguns metais com baixos valores em seus expoentes de encruamento e com elevada ductilidade obedecem essa relação de HOLLOMON. As restrições às relações de HOLLOMON e LUDWICK levaram à proposição de outras que serão discutidas ao longo deste trabalho, e que são as relações de: VOCE²³, SWIFT²⁴ e de RAMBERG-OSGOOD²⁵.

Para um metal de elevada ductilidade, a relação de VOCE tem sido ótima na obtenção de ajustes a dados experimentais numa grande faixa de significância estatística, mas apresenta uma alta dificuldade na sua manipulação algébrica, principalmente quando

inserida nas expressões da teoria da plasticidade.

Alguns metais dúcteis, como as ligas de alumínio, obedecem melhor a relação proposta por SWIFT.

Recentemente, KLEEMOLA²⁶ verificou numericamente as relações propostas por VOCE e HOLLLOMON, mas não foi possível extrair conclusões com alto nível de significância desses cálculos devido à natureza não-linear da deformação plástica.

Uma outra relação utilizada, principalmente em análises elasto-plásticas é a de RAMBERG-OSGOOD, também de natureza experimental. Mas apesar de sua grande complexidade algébrica, tem sido utilizada com sucesso nas aplicações estruturais em aeronáutica. A relação de RAMBERG-OSGOOD é uma fórmula que considera o ajuste aos dados experimentais, segundo uma forma normalizada.

Uma relação prática é a devida a PRAGER²⁷, que tenta ajustar dados experimentais dentro de uma faixa infinita de deformações e conhecida como lei da tangente hiperbólica.

As relações de VOCE, SWIFT, RAMBERG-OSGOOD e de LUDWICK são conhecidas como fórmula dos três parâmetros e a de Hollomon, como a fórmula dos dois parâmetros. As relações citadas não são constitutivas e, portanto, não são obtidas de leis de comportamento plástico dos metais. Assim sendo, quaisquer relações matemáticas poderão ser propostas como de ajustes, desde que satisfaçam um critério estatístico de minimização de desvios quadráticos dos erros e permaneçam concordantes com os resultados experimentais. Se for possível concentrar-se nas dificuldades algébricas, as relações tornam-se extremamente complexas quando inseridas nos modelos relacionais de tensão versus deformação do fenômeno físico.

Uma entre as várias complexidades é a caracterização do efeito Bauschinger, observado primeiramente por BAUSCHINGER²⁸. Nesse efeito, o início do escoamento plástico de um metal, em um processo de carregamento reverso, ocorre antes que no processo sob carregamento original e direto. O efeito Bauschinger é também conhecido por ZYCKOWSKI²⁹ como efeito ideal. O ponto de reversão é, por sua vez, dependente do valor da tensão limite de escoamento, que por sua vez, depende da definição convencional de deformação plástica permanente para a maioria de metais e ligas, principalmente para os dúcteis de interesse para a conformação plástica.

Não é possível a realização de uma fórmula matemática do tipo "fechada" para o efeito Bauschinger, mas seguindo as discussões pioneiras desenvolvidas por MASING³⁰, o fenômeno pode ser explicado dentro de um modelo físico-teórico, tal que a micro-heterogeneidade, seja ligada à orientação anisotrópica de cristais policristalinos. A discussão de Masing explica apenas o efeito ideal. ABEL³¹, após realizações de estudos teóricos e experimentais seus e de outros, descreve o efeito Bauschinger por meio de variáveis, como: deformação plástica, energia de deformação plástica e o parâmetro nominado de β -Bauschinger.

A possível inclusão do fator que representa o efeito Bauschinger nas formulações da teoria da plasticidade, tornariam os problemas extremamente complexos.

Outras dificuldades, existentes na teoria da plasticidade, são as relacionadas com a construção de expressões tensão versus deformação, válidas para a deformação ou escoamento plástico per si.

Duas grandes divisões surgiram para o trato desses

problemas: a teoria do escoamento plástico e a teoria da deformação plástica.

Na teoria do escoamento plástico, dois métodos têm sido amplamente utilizados até o presente. O primeiro que abordaremos é o da teoria incremental da plasticidade devido a LEVY³² e VON MISES³³, e o segundo é a teoria incremental da plasticidade desenvolvida por PRANDTL³⁴ e REUSS³⁵, incluindo a deformação incremental elástica.

Os complexos estados de tensão e deformação existentes num sólido metálico elástico sob condição de plastificação, exigiu o desenvolvimento de métodos de análises também com grandes complexidades. A primeira questão foi a da grandeza da deformação plástica, que provocou o surgimento de aproximações de deformações dentro de um modelo de escoamento atribuído a LEVY e VON MISES, análogo ao desenvolvimento matemático do escoamento de um fluido altamente viscoso. Esse modelo de escoamento plástico seguiu uma base incremental, de modo que o mesmo é também denominado de teoria incremental do escoamento plástico. Na teoria de LEVY-VON MISES, as deformações elásticas são desprezíveis ao serem comparadas às deformações plásticas, sendo o modelo denominado de rígido-elástico plástico. Nessa teoria, de LEVY-VON MISES, o tensor das tensões reduzidas é proporcional ao tensor das taxas de deformações no regime plástico. Existem também identidades de direções e similaridades entre as tensões reduzidas e as taxas de deformações. Os parâmetros de LODE³⁸ das deformações e os das tensões são rigorosamente iguais. Essas propriedades levam à ocorrência de normalidade na superfície de escoamento, caso se admita a existência de um potencial plástico associado.

A constante de proporcionalidade, existente entre os

tensores das tensões reduzidas e os das deformações incrementais, é um parâmetro a ser determinado e seu valor é geralmente obtido pela imposição de um critério de escoamento plástico, podendo ser o de TRESCA-SAINT-VENANT como proposto originalmente por LEVY ou o critério de VON MISES-HENCKY, proposto por VON MISES..

Na construção operacional do modelo de escoamento plástico de LEVY-VON MISES, é necessário considerar os invariantes dos tensores de tensões e de deformações incrementais, como já discutidos em HILL², SLATER⁶, JOHNSON e MELLOR⁷, KACHANOV²⁰, ZYCZKOWSKI²⁹, DIETER³⁶ e NADAI³⁷, onde são definidos os primeiros, segundos e terceiros invariantes tensoriais das tensões e das deformações incrementais. Os primeiros invariantes são, respectivamente, relacionados com a pressão hidrostática e com a nulidade incremental volumétrica devido às deformações incrementais normais. Os segundos invariantes são os quadráticos das intensidades ou dos equivalentes de tensões e de deformações. Já os terceiros não recebem definições físicas, mas estão relacionados com as determinações angulares dos tipos de estados de tensões e de deformações; esses ângulos são caracterizados pelo parâmetro de Lode, que depende em última instância dos segundos e terceiros invariantes.

O conceito de potencial plástico proposto por VON MISES³⁹ em 1928, procura definir os componentes de um tensor de deformação de segunda ordem, em função de uma função escalar do tensor de tensões, a partir desta, é sempre possível estabelecer as equações de escoamento plástico de LEVY-VON MISES.

A teoria do escoamento plástico de PRANDTL-REUSS é a generalização dessa teoria de LEVY-VON MISES, onde agora se

considera na formulação, os incrementos das deformações elásticas.

A teoria da deformação plástica, devido a HENCKY¹² [1924] é um modelo não linear de deformação elástica e a mesma despreza as irreversibilidades e dependências de trajetórias, tão importantes nos modelos incrementais. A mesma é válida para pequenas deformações elasto-plásticas. Essa teoria estabelece a proporcionalidade entre os tensores das tensões reduzidas e das deformações incrementais.

A formulação proposta por HENCKY¹² para a teoria da plasticidade e aplicada por NADAI⁴⁰ [1923] no problema específico de torção de uma barra, recebeu uma grande contribuição com os trabalhos de ILYUSHIN⁴¹⁻⁴⁴ [1943-1947], que a transformou de um modelo de deformação plástica infinitesimal, para um de elasticidade não-linear, onde o estado de deformação final, num processo de plastificação, é independente da trajetória seguida após um estado inicial de partida elástico, por um processo de deformação plástica.

No processo de deformação plástica, uma outra equação deve ser introduzida nas equações de mudança de forma, cujo objetivo é o da equalização entre os números de equações e de variáveis. De acordo com ZYCZKOWSKI²⁹, na teoria das deformações elasto-plástica de HENCKY-ILYUSHIN-NADAI, essa variável é o coeficiente de proporcionalidade existente entre o tensor das tensões reduzidas e o tensor das deformações, sendo ela denominada de função de desenvolvimento das deformações plásticas. São também postulados, nesse modelo de deformação plástica, a identidade dos tensores das direções e a similaridade entre as tensões e as deformações, bem como a igualdade dos parâmetros de LODE.

A condição de incompressibilidade leva à condição de

constância de volume, válida até para altos valores de pressão hidrostática, mostrada experimentalmente por BRIDGMAN⁴⁵ [1923], quando foi estabelecido que a mudança de volume ocorria de modo linear e puramente elástica, desviando-se dessas condições, apenas quando ocorria a não-linearidade entre a pressão hidrostática e a variação de volume ocasionada pela contribuição das grandes deformações plásticas.

A teoria da deformação plástica de HENCKY-ILYUSHIN-NADAI é bastante restrita, segundo ZYCZKOWSKI²⁹, mas é aplicável onde outras teorias mais exatas apresentam, muitas complicações teóricas.

É de comprovação experimental, como é discutido em KACHANOV²⁰, que cerca de 95% do trabalho de deformação plástica é dissipado na forma de energia térmica, levando, portanto, a uma irreversibilidade no processo e contrariando, então, o postulado do modelo de HENCKY. A irreversibilidade leva à condição da dependência da trajetória de deformação plástica entre os estados inicial e final do processo. Nessa teoria, não se considera o alto grau de anisotropia no processo, fato que foi estudado por HILL^{2,45}, que propôs uma função de escoamento plástico, formulada de modo que a mesma fôsse uma superfície de escoamento plástico quadrática análoga à de VON MISES-HENCKY. Finalmente, não é incorporado nessa teoria o efeito BAUSCHINGER.

Dentro da mecânica dos meios contínuos, certas expressões existentes foram reformuladas e outras construídas, para permitir uma análise mais completa dos processos de deformação plástica. O critério físico da energia de distorção, devido a VON MISES¹¹ deu origem à respectiva formulação matemática do mesmo critério, por HENCKY¹², onde se postulou que

os escoamento plástico se iniciava quando a energia de distorção elástica era igual ou maior que um valor crítico pré-estabelecido e possível de ser obtido experimentalmente, através de ensaios padronizados. Na atualidade, não é satisfatória a aplicação desse critério de escoamento nos materiais metálicos disponíveis, mas a reformulação do critério foi sugerida por VON MISES³⁹ [1928], que propôs uma relação constitutiva fundamental, baseada no princípio da normalidade, onde o incremento de deformação plástica é definido em relação à superfície de escoamento. GOL'DENBLAT⁴⁶ [1962] demonstrou, por teorema do potencial termodinâmico, que existia um potencial plástico, em função do segundo invariante do tensor das tensões reduzidas. Se ocorrer de a superfície de escoamento ser idêntica ao potencial plástico, então a plasticidade é associada.

Essa conclusão, devido aos trabalhos de VON MISES³⁹, GOL'DENBLAT⁴⁶, ZYCZKOWSKI²⁹ é importante para a teoria da plasticidade e é também a base para a construção de um possível modelo variacional elasto-plástico para a busca de soluções de problemas de conformação plástica, pelos métodos dos elementos finitos ZIENKIEWICZ⁴⁶ [1977] ou pelo método do limite superior HILL² [1950], PRAGER e HODGE⁴⁸ [1951] e AVITZUR⁴⁹ [1968].

A superfície de escoamento plástico deve satisfazer o postulado da elasticidade de DRUCKER^{50,51} [1956,1959], onde, para um processo de deformação isotérmico, o excesso de trabalho plástico, devido a um incremento de deformação tensorial, num estado tensorial de tensão, produzido por um incremento tensorial de tensão, causado por um agente externo, é não-negativo.

A condição de DRUCKER garante a convexidade da superfície de neutralidade, onde temos a separação entre regiões

elástica e plástica. A sua possível violação por amolecimento plástico ou pela presença de trincas, permite a construção de um critério de conformabilidade.

A validade do postulado de DRUCKER tem sido garantida pelo argumento heurístico de KOITER⁵² [1953], onde é afirmado que, mesmo no caso da presença de cantos na superfície de escoamento, a continuidade do material metálico, que exige a compatibilidade entre as deformações, necessita de uma combinação linear dos campos de deformações posicionados em lados opostos do canto, a fim de se evitar valores contraditórios ou casos de descarregamentos. Os coeficientes dessas combinações lineares deverão ser não-negativos.

Na teoria geral da plasticidade, é de fundamental importância a verificação das possíveis definições de deformações no regime plástico. Tais definições, matemáticas por natureza, devem ser adequadas para o tratamento das expressões de tensões versus deformações existentes nos corpos sólidos.

As seis possíveis deformações presentes num problema tridimensional não são porém arbitrárias, mas devem satisfazer as condições de compatibilidade entre si de modo a ser possível suas definições em termos de três funções de deslocamento.

A mais comum das definições de deformações encontrada no campo da plasticidade é a de HENCKY⁵³ [1928], introduzida por LUDWICK²¹ [1909], a qual NADAI⁵⁴ [1937] denominou de deformação natural.

Outras definições de deformações são a de LAGRANGE ou deformação material e a de EULER ou deformação geométrica.

ZYCZKOWSKI²⁹, estabelece as expressões existentes entre as três definições de deformações e que é de fundamental

importância para a interpretação e análise de resultados analíticos, numéricos e experimentais.

As deformações apresentam em suas formulações as arbitrariedades geométricas de suas definições mas são idênticas para pequenos valores. No entanto, na plasticidade dos metais podemos esperar grandes valores nas deformações e qualquer método de cálculo tem que ser especificado para qual modelo de deformação o mesmo é válido.

A maioria dos resultados possíveis de serem obtidos através de métodos fundamentados na mecânica dos meios contínuos foram apresentados até este ponto; mas, analisando-se as modificações que provocaram reformulações na teoria da plasticidade, observa-se que determinadas condições são consideradas matematicamente "fortes" e serão discutidas a seguir.

A primeira violação do contínuo ocorreu com o próprio significado físico da plasticidade e a sua superação ocorreu na década de trinta com a introdução do conceito de discordância que por sua vez permitiu a compreensão e a modelagem do comportamento plástico dos metais. Fenômenos, tais como: encruamento, efeito BAUSCHINGER, limite de escoamento, anisotropia e outros passaram a ser estudados, segundo esse micromecanismo de deformação plástica, em HIRTH e LOTHE⁵⁵ [1968]. A teoria das discordâncias foi, na época de sua introdução, um conceito fundamentado na observação experimental de MUGGE⁵⁶, onde a deformação plástica era procedida da formação de bandas de deslizamentos, mas baseada num modelo de elasticidade para um meio homogêneo e isotrópico e que cuja configuração geométrica era a de um cilindro seccionado longitudinalmente. LOVE⁵⁷ [1927] propôs um método de avaliação do campo de tensões em torno dessas discordâncias.

Os fundamentos da teoria moderna das discordâncias foram estabelecidos simultanea e independentemente, de acordo com NABARRO⁵⁸ [1967], por TAYLOR⁵⁹, OROWAN⁶⁰ e POLANYI⁶² em 1934, para explicar a discrepância que existia entre os valores das tensões de cisalhamento teórica e experimentais de materiais metálicos. Os valores teóricos das tensões de cisalhamento foram obtidos por meio de um modelo proposto por FRENKEL⁶² [1926]. O valor obtido pelo modelo de FRENKEL era muito elevado, e MACKENZIE⁶³ [1949] propôs um outro mais reduzido, após uma análise por forças centrais para um caso de rede cristalina do tipo pacote fechado. Os dois resultados são consolidados na inequação:

$$3 \times 10^{-2} G < \tau_{\text{teórico}} < 2 \times 10^{-1} G$$

válida para a temperatura ambiente. G é o módulo de cisalhamento do material.

O modelo de MACKENZIE foi uma sub-avaliação da tensão de cisalhamento máxima teórica, possível de ser obtida somente próxima do ponto de fusão de metais cristalinos.

A discrepância entre os modelos de discordâncias de FRENKEL e MACKENZIE pode ser explicada pela postulação da presença de defeitos de linhas, que foram denominadas de "discordâncias".

BRENNER⁶⁴ [1958] verificou que para monocristais metálicos filamentosos, com baixa densidade de discordâncias, os "whiskers", os valores das tensões de cisalhamento máximo eram da ordem de:

$$\tau_{\text{teórico}} \approx 6 \times 10^{-2} G$$

Já os trabalhos experimentais de TINDER⁶⁵ com cobre e

zinco, indicaram que a deformação plástica iniciava-se para tensões de cisalhamento da ordem de:

$$\tau_{\text{teórico}} \approx 10^{-9} \text{ G}$$

valores estes, extremamente inferiores aos obtidos para os "whiskers". A conclusão foi de que os metais apresentaram altas densidades de defeitos lineares em suas formas cristalinas.

Nas suas formas mais simples, consolidou-se os conceitos de discordâncias de TAYLOR⁵⁹ [1934] e as de BURGERS⁶⁵ [1939], denominadas de cunha e em hélice respectivamente. Outras formas existem, tais como as de VOLTERRA⁶⁷ e as SOMIGLIANA⁶⁸, que são os os campos de discordâncias para os análogos contínuos das discordâncias de TAYLOR e BURGERS, mas envolvendo, neste casos, malhas cristalinas maiores.

1.2. Mecânica da Fratura Linear e Não-linear

A revisão dos trabalhos, relacionados com o estudo da mecânica da fratura, seguirá um ponto de vista diferente dos normalmente encontrados na literatura técnica. A principal razão é a de proporcionar uma melhor visualização da importância do estudo das discordâncias e o conseqüente desenvolvimento das integrais invariantes na análise de trincas e outros defeitos nos materiais metálicos. Os experimentos controlados, desenvolvidos por GRIFFITH em 1920, deram origem à teoria clássica da Mecânica da fratura linear elástica. As discrepâncias encontradas nos resultados dos experimentos onde a tensão de tração para a ruptura de um corpo de prova de vidro era da ordem de

$$\tau_{\text{aplicada}} = E/400$$

enquanto que a resistência teórica de um sólido deveria ser da ordem de

$$\tau_{\text{teórico}} = E/6$$

onde E é o modulo de elasticidade.

A essa discrepância, GRIFFITH postulou a existência de microtrincas.

O critério de fratura de GRIFFITH é a aplicação direta da segunda lei da termodinâmica, isto é: Se uma trinca está se propagando, então a energia liberada, que é a diferença entre a variação do trabalho das cargas externas e a variação da energia de deformação do corpo, durante um aumento da extensão da trinca, deve ser equivalente à energia de superfície necessária para criar pequenos incrementos de trincas superficiais. É esse o conceito clássico da mecânica da fratura linear, fundamentado totalmente na teoria da elasticidade dos sólidos.

A mecânica da fratura não-linear elasto-plástica tem como seu modo operador a presença de um campo de tensões gerado por acúmulo de discordâncias. Essas por sua vez dão origem aos campos contínuos de discordâncias denominadas de discordâncias de VOLTERRA e de discordâncias SOMIGLIANA, associadas às singularidades nos meios contínuos oriundas de defeitos e falhas internas nos sólidos.

ESHELBY⁶⁶ [1956], introduziu o conceito de força em torno de singularidades num material elástico, como sendo o gradiente negativo da energia total do corpo, em função da mudança de posição de um defeito no sólido. Segundo ESHELBY, tais singularidades elásticas poderiam ser discordâncias, inclusões, vacâncias e/ou outros defeitos. O estímulo para essas análises, foi o interesse das imperfeições numa rede metálica cristalina dentro da teoria física do estado sólido e o surgimento da

modelagem de imperfeições, pela teoria clássica da elasticidade. Também ESHELBY mostrou que a força elástica é dada por uma integral de uma superfície, envolvendo um volume contendo o defeito e, ainda, por uma modelagem num meio contínuo.

É de se notar que o desenvolvimento da teoria da plasticidade levou ao surgimento da teoria das discordâncias, como sendo o seu micromecanismo operante a nível cristalino. Da teoria das discordâncias básicas de TAYLOR e BURGERS e, por proposta de ESHELBY, surgiram para o análogo contínuo, as discordâncias de VOLTERRA e SOMGLIANA⁶⁹. Estas, por sua vez, permitiram a análise de defeitos em meios elasticamente contínuos, por meio da construção de uma integral variante de superfície.

Do exposto até este ponto, ao melhor resultado a que se chegou foi com ESHELBY em 1956, adicionando-se ainda a conclusão de que, se o volume contido no interior de uma superfície não possuir nenhum defeito, a integral invariante de superfície deve ser nula.

A passagem, da análise de uma rede cristalina, contendo defeitos de linhas de TAYLOR e BURGERS, para a correspondente análise de um problema análogo elástico deve ser associada a cada tipo de defeito, num estado de tensão interna, defeito este conhecido como singularidade.

As principais singularidades de interesse físico, de acordo com ESHELBY, são casos particulares do modelo de distribuição contínua de discordâncias do tipo SOMIGLIANA⁶⁸. Ainda, as discordâncias de VOLTERRA^{67,70} são casos particulares do modelo SOMIGLIANA.

As discordâncias de VOLTERRA representam as fronteiras de grãos torcidos e com pequenos ângulos; já as discordâncias

SOMIGLIANA representa o modelo contínuo de empilhamento de discordâncias em torno de obstáculos, criando, portanto, um campo de discordâncias contínuas.

O campos de tensões internas gerado pelas discordâncias SOMIGLIANA, devido a defeitos ou falhas no interior de um sólido elástico, não é do mesmo tipo do das tensões residuais geradas por solicitações externas. A analogia de ESHELBY, para a determinação de forças em materiais contendo defeitos internos, é originária da teoria eletrostática, onde se estabelece o campo elétrico num meio infinito, devido à presença de cargas elétricas no seu interior.

A força do campo elétrico é de curto alcance, assim como o são as forças originadas pelas singularidades materiais.

As singularidades materiais poderão ser: discordâncias, inclusões e vancâncias, para citar algumas. ELSHELBY mostrou que as forças internas poderiam ser dadas por uma integral de superfície, envolvendo os defeitos. Na ausência de defeitos internos, essa integral se reduz a zero e pode-se obter, portanto, uma lei conservativa. Essa lei conservativa, de fato existe, e é geral, tendo a aplicabilidade numa classe muito grande de problemas. Tem esse lei origem e base num teorema variacional, devido a NOETHER⁷¹⁻⁷² [1918]. O acúmulo de defeitos em torno das singularidades dão origem à nucleação de microtrincas, segundo micromecanismos de fratura a serem discutidos a posteriori. A mecânica da fratura originou-se de outro ponto de vista, ou seja, dos estudos de estados de tensão e deformação em torno de singularidades.

Pesquisas de fratura mecânica nos estados de deformação e tensão planas levaram, independentemente, RICE⁷³ [1968] e

CHEREPAOV⁷⁴ [1967] a representarem a força de extensão de uma trinca ou a denominada taxa de liberação de energia de GRIFFITH-IRWIN⁷⁵ como sendo uma integral de caminho de integração, que passou a ser chamada de Integral-J de RICE. BEGLEY e LANDES⁷⁶ [1972] provou ser essa integral, de grande utilidade prática para a análise de fraturas nos sólidos.

As análises de RICE⁷³ e CHEREPAOV⁷⁴ foram desenvolvidas para campos e elastostáticos planos, sob formulação de deformação infinitesimal, mas com a possibilidade da existência de expressões de tensão versus deformação de natureza não-linear elástica. Nessa condições, é possível aplicar a integral-J de RICE na análise de trincas nos sólidos sob estado plano de plastificação, desde que obedeça as relações da teoria da deformação plástica de HENCKY¹². A natureza do trabalho de RICE é de primordial importância nas análises diretas das concentrações de tensões singulares, induzidas geometricamente por trincas e entalhes.

A maioria das aplicações da Integral-J é dentro do campo de comportamento inelástico dos materiais metálicos, e é onde HUTCHINSON⁷⁷⁻⁷⁸ [1968] e também RICE e ROSENGREN⁷⁹ [1968], usando a teoria da deformação plástica de HENCKY, num campo tensão e deformação plana, estabeleceram a distribuição de tensões em torno de uma trinca, usando a integral-J de RICE, fator amplificador de campo. Esse modelo foi denominado HRR, em homenagem a HUTCHINSON, RICE e ROSENGREN, e é a base para a análise da fratura mecânica na engenharia em campo elasto-plástico.

KNOWLES e STERNBERG⁸⁰ [1972] estabeleceram dois adicionais tipos de leis conservativas, denominados de integral-L e integral-M, e que juntamente com a integral-J de RICE formam as integrais invariantes básicas para os casos de deformação e tensão

planas.

As integrais-J, L e M foram dadas interpretações físicas por BUDIANSKY e RICE⁸¹ [1973] pela generalização das integrais invariantes para os casos tridimensionais. A natureza invariante dessas integrais foi mostrada por KNOWLES e STERNBERG, seguindo as bases do teorema de NOETHER.

RICE⁷⁹ e AOKI et alii...⁸² [1984] mostraram que essas integrais generalizadas podem ser interpretadas, como sendo taxas de liberação de energia para fora da região de formação das trincas.

No caso de a cavidade ou ponta da trinca ser transladada de sua posição relativa para o interior do corpo material ter-se-á a integral- J_k . No caso de ocorrer uma rotação da cavidade ou trinca, ocorrerá a integral- L_k e, finalmente, na ocorrência de expansão auto-similar translacional, produzir-se-á a integral-M.

FUNG⁸³ [1965] mostra que a plasticidade dos metais, dentro da mecânica dos meios contínuos, em suas expressões tensoriais, deve satisfazer os teoremas das condições de equilíbrio de forças, do balanço de energia e da continuidade material, e tudo isso deve estar acoplado por expressões constitutivas de natureza, hoje absolutamente experimentais.

É importante, situar o problema gerado pela introdução da teoria das discordâncias cristalinas na terceira década deste século de 1900.

A ligação da teoria das discordâncias com a plasticidade dos metais, foi realizada com a introdução do conceito de discordâncias contínuas ou infinitesimais, com a adoção das discordâncias SOMIGLIANA. Agora, a passagem para o conceito de taxa de liberação de energia da região de trincas por abordagem

termodinâmica e da dinâmica ou pelas integrais invariantes, baseadas no teorema de NOETHER, permite a análise de defeitos, trincas e falhas internas no campo da teoria da elasto-plasticidade, no que se denomina na atualidade, de Mecânica da Fratura Não-linear ou Mecânica da Fratura Elasto-plástica.

O estudo da mecânica da fratura teve origem nos trabalhos experimentais de GRIFFITHS⁸⁴ [1920], que analisou a propagação de trincas em materiais frágeis e é conhecida como Mecânica da Fratura Linear.

A unificação dos estudos da mecânica da fratura frágil com a da fratura dúctil se devem muito a RICE⁷³ e foi o resultado do desenvolvimento, iniciado pelas análises de ESHELBY⁶⁶.

A primeira preocupação com os problemas de concentrações de tensões em torno de trincas e cantos em meios metálicos deveu-se aos trabalhos de INGLIS⁸⁶ [1913], seguindo as aproximações da teoria da elasticidade. PARTON e MOROZOV⁸⁵ [1974] admitem que a fundação da mecânica da fratura se deve à afirmação de GALILEO GALILEI, que a carga de quebra de um sólido é independente do comprimento de uma barra sob tração e é diretamente proporcional a sua secção normal.

Já GRIFFITH⁸⁴, após um número elevado de testes com vidros, tratou a questão da fratura frágil, através de argumentação energética, onde estabeleceu que estabilidade do corpo sólido elástico, deformando por forças de contornos especificados, deve-se a um armazenamento de energia potencial mínima. Constatou também, que, para materiais contendo microtrincas, a tensão, na qual ocorria a ruptura, era menor que a tensão de escoamento do material. GRIFFITHS⁸⁴ propôs um critério

pela adição do conceito de que a posição de equilíbrio era aquela, na qual ocorria a ruptura do material sólido. A idéia era a de que a energia potencial elástica diminuía pela liberação de energia com a respectiva formação de superfícies livres.

O cálculo da concentração de tensão para análise de GRIFFITHS⁸⁴ foi baseado no modelo de INGLIS⁸⁶. Uma generalização para o caso tridimensional do modelo, foi realizado por SACK⁸⁷ [1946], que modelou a trinca, como sendo uma esferóide achatada nos polos.

O modelo de fratura de INGLIS-GRIFFITH e SACK é válido apenas para materiais frágeis. O conceito de fratura frágil é o de que se na vizinhança da ponta da trinca houver uma tensão resolvida menor que a tensão limite convencional de escoamento do material, a trinca propaga-se com uma velocidade de cerca de 38% da velocidade longitudinal do som, no meio material (MOTT⁸⁸, 1948) desde que este mesmo material admita apenas um baixo valor de absorção de energia elástica.

Em engenharia, poucos materiais metálicos são verdadeiramente frágeis e, sob esta condição, o modelo proposto por GRIFFITH é não realístico. OROWAN⁸⁹ [1955] propôs uma correção para sanar essa contradição, acrescentando uma parcela de deformação plástica, responsável por uma absorção de energia maior que a permitida no modelo de GRIFFITH. Essa correção de OROWAN é a responsável pelas altas tenacidades à fratura, passíveis de se encontrar nos principais materiais metálicos.

O modelo de fratura de INGLIS-GRIFFITH-SACK e agora OROWAN foi complementado na mecânica da fratura com os trabalhos de WILLIAMS⁹⁰ [1957] e IRWIN⁹¹ [1957], ambos baseados no trabalho inicial de SNEDDON⁹² [1946], que formularam os campos de

distribuição de tensões na vizinhança de trincas em sólidos metálicos.

A Mecânica da Fratura Linear Elástica, dentro de sua faixa de validade, é restrita a valores de tensões aplicadas da ordem de 37% da tensão limite de escoamento. Isto porque a propriedade material de tenacidade à fratura linear elástica K_{IC} é obtida por meio de um ensaio padronizado, estabelecido pela ASTM⁹³ [1989]. Esse valor é menor que a faixa estabelecida para validade da teoria da elasticidade, onde a tensão efetiva deve estar compreendida numa faixa de até 80% da tensão de limite de escoamento. O tratamento de PARKER⁹³ [1981] para a fratura linear é restrita aos valores acima citados.

Os materiais metálicos utilizados na engenharia permitem valores de tensões mais elevados que o citados anteriormente para a inicialização e propagação de trincas e, ao mesmo tempo, a velocidade de propagação da mesma é bem menor que o valor de 38% da velocidade de propagação do som nos metais.

SHAW⁹⁵ [1984] propôs, para superar as restrições já apresentadas, que parâmetros tais como, instabilidade plástica, grandes deformações plásticas e fratura dúctil, devem ser incorporados em um melhor modelo de mecânica da fratura.

SANDERS⁷⁵ [1960] propôs uma nova formulação para o modelo de propagação de trinca de GRIFFITH-IRWIN, baseada numa integral de linha independente do caminho de integração. Mas apenas CHEREPANOV⁷⁴ [1967] e RICE⁷³ [1968] formalizaram a proposta de SANDERS para materiais elasto-plásticos, segundo a teoria da deformação plástica de HENCKY, que deu origem à Mecânica da Fratura Não-linear Elasto-plástica.

Para os metais de interesse à conformação plástica, a

possível inicialização e propagação de trincas é do tipo fratura dúctil e o modelo elasto-plástico é o mais indicado nas aplicações.

As integrais invariantes: J_K , L_K e M , aplicáveis nas mecânicas da fratura linear e não-linear, são parâmetros de campo solidamente construídas, de acordo com o teorema invariante de NOETHER e segundo a concepção da teoria contínua das discordâncias. Essas integrais serão consideradas nas aplicações, envolvendo regiões elasto-plásticas, trincas e defeitos. Já no caso da mecânica da fratura linear elástica, aplicada em problemas elasto-plásticos, o fator de importância é o parâmetro K , denominado de fator de intensidade de tensão. O mesmo é um parâmetro pontual, sendo também de difícil avaliação, mesmo com o auxílio de métodos numéricos computacionais.

McMEEKING⁹⁶ [1977] estabeleceu algumas expressões para análise do campo de deformação na vizinhança de trincas, em materiais elasto-plásticos, através do modelo de deformações finitas, válidas para regiões plastificadas em pequena escala.

BEGLEY e LANDES⁹⁷ [1972] propuseram a existência de uma relação entre os valores críticos de K e J , desde que a plastificação na região de uma trinca seja de pequena escala.

A proposta de BEGLEY e LANDES tem sua importância nas aplicações porque, quando os parâmetros K e J atingem os respectivos valores críticos K_{IC} e J_{IC} , serão, na realidade, valores de propriedades materiais relacionados à tenacidade à fratura. Essa proposta permite, também, uma direta extrapolação do conceito de fratura linear elástica para os casos elasto-plásticos, em uma condição de plasticidade generalizada em torno da ponta da trinca, mas, ainda assim, em pequena escala.

Um terceiro método de tratamento dos problemas de fratura em materiais dúcteis é apresentado por RITCHIE⁹⁸ [1983], no qual é afirmado que, uma grande vantagem da análise pela mecânica da fratura, é que a mesma correlaciona os aspectos macroscópicos da nucleação e crescimento de trincas sem recorrer a modelos microscópicos para processos de fraturas localizadas, que, por sua vez, dependem da natureza da microestrutura e das histórias da tensão e da deformação na ponta da trinca.

WILSDORF⁹⁹ [1983], entretanto, mostra que para sólido cristalino, a fratura dúctil é precedida pela deformação plástica, dando como resultado um número grande de problemas complexos. Confirma ainda que, enquanto a análise macroscópica pode ser realizada a partir das condições de um experimento (tais como: dados de tensão-deformação, geometria do corpo de prova e observações óticas) para o estudo da nucleação e propagação de trincas necessita-se de informações dos processos, que ocorrem dentro do sólido, mas numa escala que exceda a resolução de um microscópio ótico. Se certas hipóteses forem postuladas, então, a mecânica da fratura trata o sólido de acordo com a concepção de um meio contínuo. Esse tipo de modelagem da fratura macroscópica recebeu contribuição decisiva de MCCLINTOCK¹⁰⁰. [1968], que construiu um modelo contínuo de fratura, segundo um critério de crescimento e coalescência de cavidades dentro do sólido. KNOTT¹⁰¹ [1980], por sua vez, modelou o mecanismo de fratura através de micromecanismo de nucleação, crescimento e propagação de trincas, pela interferência de partículas de segunda fase presentes no sólido.

IRWIN¹⁰² [1985] mostra que as fraturas, que ocorrem em um material sólido, são do tipo progressivas pelo espalhamento da

trinca no material

Um quarto tipo de abordagem dos problemas de fratura está relacionado com métodos numéricos, principalmente, o dos Elementos Finitos. KEIM e MÜLLER¹⁰³ [1989] discutem a respectiva modelagem para a aplicação do método. Apesar de afirmarem que o mesmo é o adequado para a análise quantitativa dos problemas de mecânica da fratura não-linear, sabe-se que, ainda, existem dificuldades na própria modelagem física das fraturas.

BROBERG¹⁰⁴ [1971] confirmou que existia uma região do processo de fratura perto da ponta da trinca, tal que ocorria a coalescência de micratrencas. de modo que não era possível a aplicação de teoremas da mecânica dos meios contínuos.

Apesar da mecânica dos meios contínuos não funcionar nas regiões de ocorrência de processos microestruturais, AOKI¹⁰⁵ et alii [1981] confirmou que no balanço do sistema em termos de energia, este tem que ser satisfeito pela imposição de uma taxa de liberação de energia devido a propagação de trincas. Os mesmos pesquisadores, neste trabalho, propuseram a existência de novas integrais invariantes L, M e I, associadas com processos de fraturas rotacional, auto-similar e distorcional, respectivamente. Elas são definidas na presença de deformação plástica, deformações térmicas, forças centrais e forças inerciais. Incluem, como casos especiais, as integrais invariantes de J, L e M definidas por KNOWLES e STERNBERG⁸⁰, apresentadas por BUDIANSKY e RICE.⁸¹, como sendo a taxa de liberação de energia, devido à existência de cavitação ou trincas em materiais elástico-plásticos,

KISHIMOTO¹⁰⁶ [1980] e colaboradores formularam o conceito de uma integral invariante translacional $\hat{J}$ generalizada, permitindo a existência, dentro da região de processo de fratura,

dos efeitos da deformação plástica, forças centrais, deformações térmicas e forças inerciais. Nesse mesmo trabalho foi proposta a generalização dessa integral-J para o caso tridimensional, que é a base deste trabalho de pesquisa.

BRUST¹⁰⁷ [1984] generalizou ainda mais o conceito de integrais invariantes pela introdução da integral invariante T^* , na forma incremental válida para sólidos experimentando qualquer tipo de comportamento não linear, incluindo: plasticidade, fluência e viscoplasticidade. A restrição ao trabalho de BRUST para as aplicações é que este foi apenas validado por simulação computacional pelo método dos Elementos Finitos, mesmo tendo sido bem fundamentado no seu tratamento analítico. Essa restrição pode ser eliminada pela experimentação laboratorial da integral invariante generalizada T^* .

1.3. Conformação Plástica dos Metais

A conformação plástica dos metais, de acordo com THOMSEN, YANG e KOBAYASHI¹⁰⁸ [1965], é um dos mais importantes processos de fabricação mecânica e é na prática, muito empregado, de tal modo que 80% dos produtos metálicos passam por esse processo, segundo BRESCIANI¹⁰⁹ et alii [1984].

A conformação plástica consiste no processo de alteração da forma de um sólido metálico, pela sua deformação plástica, causada pela imposição de um sistema de solicitação de cargas externas, sendo o sólido envolvido por contornos elasticamente rígidos. Estes contornos formam a matriz de conformação. O processo de deformação ocorre sem a remoção de material do corpo sólido.

A conformação plástica pode ser realizada a frio ou a

quente. Seu limite é imposto se a temperatura de trabalho (temperatura do sólido a ser conformado), for menor que aproximadamente 40% a 50% da temperatura de recristalização do metal base de uma liga metálica. A conformação é, então, denominada conformação a frio e a deformação a quente é o caso contrário, em JOHNSON e MELLOR¹¹⁰ [1983]. A natureza dessa divisão deve-se ao processo de ativação do movimento de discordâncias, que no caso do trabalho a frio, permanecem imobilizadas em grande porcentagem, ocasionando, como consequência⁷, o encruamento do material. (POLUKHIN et alii¹¹¹ [1983]).

Ao mesmo tempo que ocorre uma alteração de forma pela conformação plástica no material metálico, ocorrem mudanças em suas propriedades mecânicas, tais como: diminuição da ductilidade pela redução da reserva plástica; aumento da resistência mecânica ocasionada pelo encruamento, se o trabalho for realizado a frio; variação no acabamento superficial, que pode ser de fundamental importância para a definição do uso final ou para posterior trabalho de usinagem.

As variações apresentadas são de tão grande importância tecnológica e, também, influem em tão alto grau nos processos de conformação, que foi necessário introduzir uma nova área de pesquisa, denominada conformabilidade plástica dos metais. A conformabilidade foi, inicialmente, baseada em experiências laboratoriais com corpos de provas de dimensões reduzidas, objetivando unicamente realizar o estudo sistemático de valores limites para as propriedades mecânicas.

Na prática, essas limitações traduzem-se pelo aparecimento de trincas de superfícies, defeitos internos e fraturas.

Preocupações com as distribuições de tensões e de deformações nos processos de conformação plástica, têm sido o centro das atividades para a aplicação da teoria da plasticidade dos metais. Deve-se sua importância às complexas formas de distribuição dessas tensões e deformações. Existem, também, preocupações para a determinação das forças de conformação, necessárias à obtenção de uma determinada forma intermediária ou final para um produto. Com o constante desenvolvimento de materiais metálicos, cada vez mais resistentes e, geralmente, de menor ductilidade, tornaram-se, também, mais importantes as preocupações com os estudos das distribuições de tensões e deformações na plasticidade (KACHANOV¹¹² [1974]).

Durante o processo de conformação plástica, observa-se um aumento da resistência à deformação do metal, ao mesmo tempo que ocorre a diminuição da sua reserva plástica. As forças aplicadas crescem e, simultaneamente, a ductilidade disponível diminui. Aliados a essas complexidades, tem-se o atrito na interface entre a matriz de conformação e a peça, e a variação geométrica da peça conformada.

Os métodos de análise da conformação plástica estão intimamente ligados aos métodos de determinação da distribuição de tensões e de deformações na plasticidade, com a respectiva imposição de condições de contorno ditadas pelas solicitações externas.

O conhecimento dessas distribuições de tensões e de deformações, tem sido necessário para os estudos e análise da conformabilidade.

Nem tudo tem sido fácil na análise dos processos de conformação plástica. Primeiramente porque o próprio

desenvolvimento da teoria da plasticidade mostra que ela não está unificada. Tem-se várias teorias e modelos, cujas aplicações dependem dos tipos de problemas a serem analisados. Além disso, outras dificuldades existem: a existência de vários tipos de processos de conformação, em que suas respectivas classificações variam de pesquisador para pesquisador (THOMSEN¹⁰⁸ e BRESCIANI¹⁰⁹); e o difícil problema de modelagem do atrito na interface peça-matriz, que provoca, com sua presença, distorções nas respectivas distribuições de tensões e de deformações.

Entre os vários métodos de análise das mencionadas variáveis de conformação plástica dos metais, dois têm se destacado como promissores. O primeiro é o método do limite superior (AVTIZUR¹¹³ [1980]), adequado para o cálculo das forças e pressões necessárias à conformação plástica. Esse método consiste na aplicação do princípio variacional de PRAGER e HODGE¹¹⁴ [1951], em que se postula um campo de velocidades de deformação admissível e pelo emprego da equação de continuidade obtém-se expressões para o cálculo das deformações. Acrescenta-se a isso a expressão que estabelece o critério de escoamento plástico e tem-se, como consequência, as expressões entre as tensões e deformações. Isso fornece a potência interna de deformação. Finalmente, uma expressão variacional é estabelecida pela adição da potência externa fornecida e pela subtração da potência de atrito na interface. O método é analítico por natureza. O segundo método, o dos Elementos Finitos, é, também, baseado na aplicação do princípio variacional, mas no caso, ele é de natureza basicamente numérica. Foi popularizado nas aplicações da teoria da elasticidade e na da análise estrutural. Já a sua aplicação na plasticidade dos metais sofre grandes restrições, ditadas,

principalmente, pelas dificuldades matemáticas; ou seja, devido à natureza dissipativa da plasticidade, não existe, ainda, uma formulação variacional completa para os problemas hiperbólicos dos tipos existentes no escoamento de plástico nos sólidos (GOMES e BRESCIANI¹¹⁵ [1990]). Também no caso do método dos elementos finitos, é ainda difícil modelar as expressões da plasticidade dos metais, pois os mesmos, quando no estado plástico, apresentam, no comportamento plástico, fortes dependências de suas microestruturas constituintes. Mesmo com essas restrições, ZIENKIEWICZ¹¹⁶ [1977], discute teoricamente a aplicação do método dos Elementos Finitos na plasticidade. O método dos Elementos Finitos opera de modo inverso ao do limite superior, ou seja, é imposto ao sólido uma possível função de deslocamento, que deve satisfazer a continuidade e ser compatível dentro de cada elemento. A seguir, são aplicadas as solicitações externas e as condições de contorno, uma modelagem para as expressões constitutivas elasto-plásticas é formulado e, então, após o processamento computacional, obtém-se os resultados das distribuições de tensões e formulações.

Outros métodos existem e são bastante utilizados, como: método da energia de deformação plástica uniforme, método da divisão em elementos, método da visio plasticidade e método das linhas de deslizamentos.

Apesar das limitações dos métodos do Limite Superior e dos Elementos Finitos, ambos são bastante difundidos e sofrem constantemente importantes reformulações. AVITZUR e VANTYNE¹¹⁷ [1982] discutem uma completa análise pelo método do Limite Superior e OH, PARK, KOBAYASHI e ALTAN¹¹⁸ [1983] apresentam uma aplicação do método dos Elementos Finitos, para simular o

escoamento plástico de metal no forjamento de uma liga de titânio.

CARTER Jr e LEE¹¹⁹ [1985] apresentam uma análise do uso do método dos Elementos Finitos na conformação por compressão de um cilindro e um anel, através do programa ADINA.

Acrescente-se que, de todos os métodos existentes, o dos Elementos Finitos é o mais indicado para a análise de fratura na conformação plástica, segundo uma linha de simulação. Mas, no presente, o mesmo deve ser comparado com os valores possíveis de serem obtidos através de experimentos.

1.4. Conformabilidade Plástica dos Metais

DIETER¹²⁰ [1984] afirmou que o termo "conformabilidade" é, dentro da metalurgia mecânica, de ampla conotação descritiva, mas de definição científica vaga. Outros termos na metalurgia também apresentam essa característica de imprecisão, tais como: dureza, maleabilidade, ductilidade e outros.

A conformabilidade está intrinsecamente ligada à ductilidade e aquela ainda apresenta um conceito mais amplo do que esta, pois está diretamente relacionada com o processo de conformação plástica.

A ductilidade não é adequada para os estudos de conformabilidade, porque a mesma é oriunda de um conceito qualitativo, baseado numa definição ampla, dada por DIETER¹²¹ [1968] como sendo: "A ductilidade é basicamente a capacidade de um metal se deformar plasticamente, sem a ocorrência de fratura, num ensaio de tração com corpo de prova normalizado". Essa definição de ductilidade é subjetiva porque depende de vários fatores, que deverão ser pré-fixados, de acordo com ROGERS¹²² [1968], que são: tipo de material metálico, dimensões do corpo de

prova, taxa de deformação imposta no ensaio, temperatura de corpo de prova no ensaio, microestrutura metalúrgica e também do estado de tensão imposto no ensaio, devido à geometria do corpo.

O estudo da conformabilidade seguiu após os estudos de ductilidade pela análise e observação dos mecanismos de fraturas dúcteis. Foi intensificado, principalmente, por McCLINTOCK¹⁰⁸ [1968] partindo da análise que após a nucleação de trincas, formavam-se no corpo cavidades cilíndricas, que entre suas paredes davam origem a micro corpos de prova de tração, inseridos em uma matriz plastificada de metal. Foi construído um mecanismo de crescimento e coalescência desses vazios, que resultavam como consequência a propagação de trincas, levando à fratura do material. Foram pesquisadas por BATES¹²³ [1981], McCLINTOCK¹²⁴ [1971], KNOTT¹²⁵ [1980] e VAN STONE¹²⁶ et alii [1985], questões relativas sobre como esses vazios são nucleados e seus respectivos mecanismos.

As variáveis importantes na conformabilidade são: critério de escoamento plástico e respectiva tensão limite de escoamento, taxas de deformações, condições de atrito nas interfaces, temperatura de conformação plástica, tipo de fratura a se observar, dúctil ou frágil e, também, a característica das microestruturas, das quais as fraturas dúcteis são altamente dependentes.

Dentro desta revisão, um dos conceitos de conformabilidade a ser adotado será o proposto por DIETER,¹²⁰ que define a conformabilidade como sendo o grau de conformação a ser alcançado num processo de conformação plástica, sem que haja a criação de condições indesejáveis no material conformado como: trincas, fraturas, péssimo acabamento superficial, vazios internos

e falta de enchimento na matriz.

Essa definição de DIETER é muito qualitativa e uma mais específica a ser adotada será a de KUHN¹²⁷ [1978], na qual a conformabilidade é a quantidade de deformação plástica que pode ser atingida num processo específico de conformação plástica de um metal, sem a correspondente propagação de possíveis trincas existentes no material.

As duas definições de conformabilidade originam dois pontos de vistas diferentes de análise, mas ambos baseados em conceitos de ductilidade. O primeiro ponto de vista é o da definição de conformabilidade dada por DIETER¹²⁰, que é baseado nos estudos dos mecanismos de fratura. Destes o mais importante é o proposto por McCLINTOCK¹⁰⁰, para o qual a fratura ocorre pelo crescimento e colapso de vazios dentro de uma matriz plastificada do metal. Um critério independente de conformabilidade foi proposto por COCKCROFT e LATHAN¹²⁸ [1968], analogamente à energia de deformação plástica do material, após ser solicitado externamente. Essa analogia ocorre porque o critério é baseado numa tensão de tração secundária.

Em 1979, OH, CHEN e KOBAYASHI¹²⁹ propuseram um critério de conformabilidade baseado na unificação do critério de fratura dúctil de McCLINTOCK e no de conformabilidade de COCKCROFT e LATHAM. Em 1988, ZAVAGLIA¹³¹ ampliou a aplicação do critério de conformabilidade pela modificação dos critérios de OH, CHEN e KOBAYASHI e de COCKCROFT e LATHAM, pela sistematização de um procedimento que permitiu a incorporação de outros mecanismos de fraturas dúcteis e de outras expressões de tensão versus deformação, que a tradicionalmente utilizada relação de HOLLOMON.

O segundo ponto de vista para a análise da

conformabilidade, é baseado em modelos macroscópicos, pela construção de curvas limites de conformabilidade, cujos ensaios sejam semelhantes aos próprios processos de conformação plástica em estudo.

Esse segundo critério é um mapeamento de estados de deformações, combinando processos e materiais.

KUHN¹²⁷ propõe ainda uma expressão generalizada para análise da conformabilidade da forma:

$$\text{Conformabilidade} = W_1 (\text{material}) - W_2 (\text{processo})$$

W_1 = função ductilidade básica do material

W_2 = função do sistema de tensão e deformação imposta no processo de conformação plástica

A função W_1 pode ser um critério de fratura e isso permite a introdução de um terceiro ponto de vista, mas agora baseado na mecânica da fratura não-linear elasto-plástica.

Uma modificação na definição de KUHN da conformabilidade faz-se necessária para introduzir formalmente esse terceiro ponto de vista:

A conformabilidade é a quantidade de deformação plástica expressa em função de uma integral invariante, que pode ser atingida num processo específico de conformação plástica de um metal, sem a correspondente propagação de trincas existentes.

A determinação da conformabilidade passa agora a ser procedimento complexo, pois envolve na análise da conformação plástica a avaliação da ductilidade e a aplicação da mecânica da fratura no processo com o objetivo de possibilitar a construção de diagramas de conformabilidade para as aplicações industriais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS - Capítulo 1

1. ALTAN, T.; OH, Soo-Ik; GEGEL, H.L. *Metal Forming: fundamentals and applications.* Metals Park, American Society for Metals, 1983.
2. HILL, R. *The Mathematical Theory of Plasticity.* Oxford, Clarendon, 1950. p.128-160
3. COULOMB, C.A. *Mémoires Mathematics et Physics*, 7 (343), 1773.
In: HILL, R. op. cit., ref. (2) - capítulo 1, p.1-13.
4. PONCELET, J.V. [1840] & RANKINE, W.J.M. [1856]. In: HILL, R. op. cit., ref. (2) - capítulo 1, p. 1-13
5. TRESCA, H. Sur l'encoulement des corps solides soumis à de forte pression. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Academie des Sciences*, Paris, 59:754, 1864.
6. SLATER, R.A.C. *Engineering Plasticity: theory and application to metal forming processes.* London, McMillan, 1977.
7. HUBER, M.T. *Czasopismo techniczne*, 22(81), 1904. apud JOHNSON, W. & MELLOR, P.B. *Engineering Plasticity.* Chichester, Ellis Horwood, 1983.
8. SAINT-VENANT, B Mémoire sur l'établissement intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites ou l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Academie des Sciences*, Paris, 70:473, 1870.
9. LEVY, M. Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites ou l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Academie des Sciences*, Paris, 70:1323, 1870.
10. HAAR, A. & VON KARMAN, T. Zur theorie der spannungszustände

in plastischen und sandartigen medien. *Göttinger Nachrichten Mathematisch - Physikalische Klasse*. Göttinger, 2:204-218, 1909.

11. VON MISES, R. Mechanik der festen körper. In: *Plastisch Deformablen Zustand*. Göttinger Nachrichten, Mathematisch - Physikalische Klasse, Göttingen, 582, 1913. Apud: SLATER, R.A.C., *Op. cit.*, ref. (7) - capítulo 1.
12. HENCKY, H.Z. Zur theorie plastischer deformationen und der hierdurch im material hervorgerufenen nebenspannungen. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Berlin, 4:323, 1924. In: SLATER, R.A.C. *Op. cit.*, ref. (7) e HILL, R. *op. cit.* ref. (2).
13. PRANDTL, L. Über die harte plastischer körper im plastisch deformablem zustand. *Göttinger Nachrichten, Mathematisch - Physikalische Klasse*, Göttingen, 74, 1920. In: HILL, R. *op. cit.*, ref. (2)
14. ———. Über einige statisch bestimmte fälle des gleichgewichts in plastischen Körpern. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Berlin, 3:241, 1923. In: SLATER, R.A.C. *op. cit.*, ref. (7)
15. GERINGER, H. Beitrag zum vollständigen ebenen plastizitäts problem. *Proceedings. 3rd International Congress of Applied Mechanics*. Stockholm, 1930. vol. 2. p.185.
16. VON KÁRMÁN, T. Beitrag zur theorie des wälzvorganges. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Berlin, 5:130, 1925.
17. SACHS, G. Beitrag zur theorie des ziehvorganges; *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Berlin, 7:235, 1927.

18. SIEBEL, E. The plastic forming of metals. Translated by HITCHCOCK. *Steel*, Oct.16, 1933/May 7, 1934.
19. CARRIER, G. F. and PEARSON, C. E. *Partial Differential Equations: theory and technique*. New York, Academic Press, 1976. pp.75-39 e 227-256
20. KACHANOV, L.M. *Fundamentals of the Theory of Plasticity*. Moscow, Mir, 1974. pp.148-342
21. LUDWICK, P. *Elemente der Technologischen Mechanik*, Berlin, Verlag Julius Springer, 1909. In: KACHANOV, L.M. *Op. cit.* ref. (20)
22. HOLLOMON, J.H. Tensile deformation. *Transactions of AIME*, 162:268-290, 1945.
23. VOCE, E. The relationship between stress and strain for homogeneous deformation. *The Journal of the Institute of Metals*, 74:537-562, 1948.
24. SWIFT, H.W. Plastic instability under plane stress. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1(1):1-18, 1952.
25. RAMBERG, W. and OSGOOD, W. Description of stress-strain curves by three parameters. *NACA TN 902*, Jul.1943.
26. KLEEMOLA, H.J. and NIEMINEN, M.A. On the strain-hardening parameters of metals. *Metallurgical Transactions*, 5:1863-1866, Aug.1984.
27. PRAGER, W. On isotropic materials with continuous transition from elastic to plastic state. *5th International Congress of Applied Mechanics*, Cambridge, MA, 1938. pp.234-237
28. BAUSCHINGER, J. Über die Veränderung der Elastizitätsgrenze und des Elastizitätsmoduls Verrschiedener Metalle, *Civilingineur*, 1881. pp.289-348. In: ZYCZKWOSKI, M. *Op. cit.* ref.(29)

29. ZYCZKOWSKI, M. *Combined Loadings in the Theory of Plasticity*.
Varsovia, PWN-Polish Scientific Publishers, 1981.
30. MASSING, G. Zur Heyn'schen Theory der Verfestigung der Metalle
durch Verborgenen Elastischer Spannungen. *Wissenschaftliche
Veröffentlichungen Siemens Konzern*. 3(1), 1923.
31. ABEL, A. and MUIR, H. The Bauschinger and stacking fault
energy. *Philosophic Magazine*, 27(3):585-594, 1973.
32. LEVY, M. Mémoire sur les équations générales. *Comptes Rendus
Hebdomadaires des Seances de l'Academie des Sciences*, Paris,
70:1323-1325, 1870.
33. VON MISES, R. Mechanik der festen Körper im plastisch
deformablem Zustand. *Göttinger Nachrichten, Mathematisch -
Physikalische Klasse*, 1(4):582-592, 1913.
34. PRANDTL, L. Spannungsverteilung in plastischen Körpern.
Proceedings of 1st International Congress of Mechanics.
Delft, 1924. pp.43-54. *Op. cit.* Ref. (20)
35. REUSS, A. Berücksichtigung der Elastischen Formänderungen in der
Plastizitätstheorie. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik
und Mechanik*, Berlin, 10(3):266-274, 1930.
36. DIETER, G.E. *Mechanical Metallurgy*. 2.ed. New York, McGraw-
Hill, 1976.
37. NADAI, A. *Theory of Flow and Fracture of Solids*. New York,
McGraw-Hill, 1950. vol.1
38. LODE, W. Versuche über den Einfluss der mittleren
Hauptspannung für Angewandte Mathematik und Mechanik,
Berlin, vol.5, 1925. *Op.cit.* in Zyczkowski. Ref.29.
39. VON MISES, R. Mechanik der Plastischen Formänderung von
Kristallen. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und
Mechanik*, Berlin, 8(3):161-185, 1928.

40. NADAI, A. Der Beginn des Fliessvorganges in einem tordiertem stab. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Berlin, 3(6):442-444, 1923.
41. ILYUSHIN, A.A. Some problems of plastic deformations, (in Russian), *PM M-Prikladnaya Matematika i Mechanika*, Moscow, 7(4):245-272, 1943.
42. ———. Relation between the Saint Venant-Levy-Mises theory and the theory of small-elastic-plastic deformations. (in Russian). *PMM-Priladnaya Matematika i Mechanika*. Moscow, 9(3):207-218.
43. ———. Theory of plasticity at simple loading of the bodies exhibiting ,plastic hardening (in Russian), *PMM-Prikladnaya Matematika i Mechanika*, Moscow, 11(2):291-296, 1947.
44. ———. On the theory of small elastic-plastic deformations (in Russian), *PMM-Prikladnaya Matematik i Mechanica*. Moscow, 10(3):347-356, 1946.
45. HILL, R. Theoretical plasticity of tectured aggregates, *Mathematical Proceedings of Cambridge Phylosofical Society*. 85:179-191, 1978.
46. GOL'DENBLATT, I. I. Some problems of the mechanics of deformable media. Holland, Noordhoff, 1962.
47. ZIENKIEWICZ, O.C. *The finite element method*. 3. ed. London, McGraw-Hill, 1977.
48. PRAGER, W. and HODGE, P.G. *Theory of Perfectly Plastic Solids*. London, Chapman Hall, 1951.
49. AVITZUR, B. *Metal Forming: processes and analysis*. New York, McGraw-Hill, 1968.
50. DRUCKER, D.C. Stress-strain relations in the plastic range of metals - experiments and basic concepts. EIRICH, F.R.

- (editor). Rheology-theory and applications, Academic Press, vol.1, 1956. pp. 217-226
51. ———. D.C. A definition of stable inelastic material. *Journal of Applied Mechanics*, 26(1):101-106, 1959.
 52. KOITER, W. T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic plastic materials with singular yield surface. *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, 3(3):350-354, 1953.
 53. HENCKY, H. Über die form des Elastizitätsgesetzes bei Ideal Elastischen Stoffen. *Zeitschrift für Technische Physik*. 9:214-223, 1928.
 54. NADAI, A, Plastic behavior of metals in the strain-hardening range. Part I, *Journal of Applied Physics*, 8:205-217, 1937.
 55. HIRTH, J.P. and LOTHE, J. *Theory of dislocations*. New York, McGraw-Hill, 1968. pp.1-57.
 56. MÜGGE, O. Op.cit. in HIRTH, J.P. and LOTHE, J., Ref.55, p.3.
 57. LOVE, A.E.H. *The Mathematical theory of elasticity*. Cambridge University. Cambridge, 1927, article 156A. pp.150-235.
 58. NABARRO, F.R.N. *Theory of crystal dislocation*. Oxford, Clarendon Press, 1967. pp.1-52
 59. TAYLOR, G.I. Mechanism of plastic deformation of crystals. *Proceedings of Royal Society A* 145. (362), 1934. Op.Cit. in NABARRO, F.R.N., Ref.58. pp.5-7.
 60. OROWAN, E. *Zeitschrift für Physik*. Berlin, vol.89, p.634, 1934. Op.Cit. in NABARRO, F.R.N. Ref.58, pp.5-7.
 61. POLANY, M. *Zeitschrift für Physik*, Berlin, vol.89, 1934, p.660. Op.Cit. in NABARRO, F.R.N., Ref.58, pp.5-7.
 62. FRENKEL, J. *Zeitschrift für Physik*, Berlin, vol.37, 1926, p.572. Op.Cit. in HIRTH, J.P. and LOTHE, J. Ref.55,

pp.6-7.

63. MACKENZIE, J.K. Tese de Doutorado não publicada, Universidade de Bristol, Inglaterra, 1949. *Op.Cit.* in HIRTH, J.P. and LOTHE, J., Ref.55, p.7.
64. BRENNER, S.S., in DOREMUS, R.H. et alii... (editors), *Growth and Perfection of Crystals*. New York, John Wiley, 1958. p.3.
65. BURGERS, J. M. Proceedings Kon. Ned. Akad. Wetenschap, vol.42, 1939, n.378, *Op.Cit.* in NABARRO, F.R.N., Ref.58, pp.1-16.
66. ESHELBY, J.D. The coninum theory of lattice defects in SEITZ, F. and TURNBULL, D. *Solid Physics*. New York, Academic Press, 1956. vol.III, pp.79-144.
67. VOLTERRA, V. Ann. Éc. Norm. Sup. vol.24, 1907, pp.400. *Op.Cit.* i ESHELBY, J.D. Ref 66, pp.90.
68. SOMIGLIANA, C. Atti Accad. Nozl. Lincei Rend. Classe Sci. Fis. Mat. e Nat. 23(1), 1914. *Op.Cit.* in ESHELBY, J.D. Ref. 66, 1956. pp.89-91
69. Id. *Ibid.* Ref.58, pp.20-21.
70. ————. pp.53-119
71. NOETHER, R. Invariante Variations Probleme Göttinger Nachrichten, Mathematisch. Physikalische Klasse, vol.2, 1918, p.235, *Op.Cit.* in KNOWLES, J.K. and STERNBERG, E.; On a classe of conservation lows in linearized and finite elastostatics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 44(3):187-211, 1972.
72. CUSHING, J.T. *Applied Analytical Mathematics for Physical Scientists*. New York, John Wiley, 1975. pp.251-257
73. RICE, J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration of the ASME. *Journal of Applied Mechanics*, 35(2):379-386, 1968.

74. CHEREPANOV, G.P. Crack propagation in continuous media. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* (English translation of Soviet Journal PMM), 31(3):504-512, 1967.
75. SANDERS, J.L. On the Griffith - Irwin fracture theory. *Translation of Applied Mechanics*, 27(2):352-353, 1960.
76. BEGLEY, J.A. and LANDES, J.D. The J-integral as a fracture criterion. In: ASTM Fracture Toughness, Proceedings of the 1971, National Symposium on Fracture Mechanics, Part II. ASTM-STP-514, American Society for Testing and Materials, 1972. pp.1-20
77. HUTCHINSON, J.W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16(1):13-31, 1968.
78. ————. Plastic stress and strain. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16(1):337-347, 1968.
79. RICE, J.R. and ROSENGREN, G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16(1):1-12, 1968.
80. KNOWLES, J.K. and STERNBERG, E. On a class of conservation law in linearized and finite elastostatics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 44(3):187-211, 1972.
81. BUDIANSKY, B. and RICE, J.R. Conservation laws and energy-release rates. *Translations of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, 40:201-203, 1973.
82. AOKI, S.; KISHIMOTO, K. and SAKATA, M. energy flux into process region in elastic-plastic fracture problems. *Engineering Fracture Mechanics*, 19(5):827-836, 1984.
83. FUNG, Y.C. *Foundations of solid mechanics*. New Jersey, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965. pp.31-182.

84. GRIFFITHS, A.A. The phenomenon of rupture and flow of solids. *Philosophical Transactions of Royal Society, London*, 221A: 163-198, 1920.
85. INGLIS, C.E. Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. *Translations of the Institute of Naval Architects*, 60:219-230, 1913.
86. PARTON, V.Z. and MOROZOV, E.M. *Elastic-Plastic Fracture Mechanics*, Moscow, Mir, 1974. pp.15-36
87. SACK, R.A. *Proceedings of Physical Society of London*, 58:729, 1946.
88. MOTT, N.F. *Engineering*, 165:16, 1948.
89. OROWAN, E. Energy criteria of fracture. *Welding Research Supplement*, 20:1575-1605, 1955.
90. WILLIAMS, M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Translations of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, 24:109-114, 1957.
91. IRWIN, G.C. Analysis of stresses and strains near the end of a crack tranversing a plate. *Translations of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, 24:361-364, 1957.
92. SNEDDON, I.N. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid. *Proceedings of Royal Society A, London*, 1946. pp.229-260
93. ASTM Standard test methos for J_{IC} , a measure of fracture toughness. 1989 *Annual Book of ASTM Standard*. vol.03.01, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1989.
94. PARKER, A.P. *The Mechanics of Fracture and Fatigue*. London, Spon, 1981. pp.28-39

95. SHAW, M.C. A critical review of mechanical failure criteria. *Transactions of the ASME, Journal of Engineering Materials and Technology*, 106:219-226, 1984.
96. McMEEKING, R.M. Finite deformation analysis of crack tip opening elastic-plastic materials and implications for fracture. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 25:357-381, 1977.
97. BEGLEY, J.A. and LANDES, J.D. The J-integral as a fracture criterion in ASTM, Fracture Toughness. Proceedings of the National Symposium on Fracture Mechanics, part II, 1971. ASTM STP 514, American Society for Testing and Material, 1972. pp.1-20
98. RITCHIE, R.O. Why ductile fracture Mechanics. *Transactions of the ASME Journal of Engineering Materials and Technology*. 105:1-7, Jan.1983.
99. WILSDORF, H. G. F. The ductile fracture of metals: a microstructural view point. *Materials Science and Engineering*, 59:1-39, 1983.
100. McCLINTOCK, F.A. A criterion for ductile by the growth of holes. *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, 90:363-371, Jun.1968.
101. KNOTT, J.F. Micromechanisms of fibrous crack extension in engineering alloys. *Metal Science*, Aug-Sep. 1980. pp.327-336.
102. IRWIN, G. R. Fracture Mechanics. *Metals Handbook*. 9. ed., vol.8. *Mechanical Properties*, 1985. pp.440-464
103. KEIM, E and MÜLLER, G. Nonlinear analysis of fracture mechanics problems. *Computer and Structures*. 32(3/4):737-743, 1989.

104. BROBERG, K.B. Crack growth criteria and nonline fracture mechanics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 19:407-418, 1971.
105. AOKI, S.; KISHIMOTO, K and SAKATA, M. Energy realise rate in elastic-plastic fracture problems. *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, 48:825-829, Dec. 1981.
106. KISHIMOTO, K; AOKI, S. and SAKATA, M. On the path independent integral J. *Engineering Fracture Mechanics*, 13:841-850, 1980.
107. BRUST JR, F.W. The use of new path independent integrals in elastic-plastic and creep fracture. PhD Thesis, Georgia Institute of Technology, Nov. 1984.
108. THOMSEN, E. G.; YANG, C. T. and KOBAYASHI, S. *Plastic Deformation in Metal Processing*. New York, MacMillan, 1965. pp. 158-216
109. BRESCIANI FILHO, E. (coord.) *Conformação Plástica dos Metais*. Campinas, SP, Editora da UNICAMP, 1986. pp.86-101
110. JOHNSON, W and MELLOR, P. B. *Engineering Plasticity*. Chichester, England, Ellis Horwood, 1983. pp.23-27
111. POLUKHIN, P.; GORELIK, S. and VORONTSOV, V. *Physical Principles of Plastic Deformation*. AFANASYEV, V. (tradutor), Moscow, Mir, 1983. pp.180-218
112. KACHANOV, L.M. *Fundamentals of the Theory fo Plasticity*. Moscow, Mir, 1974. pp.48-105
113. AVITZUR, B. *Metal Forming: the application of limit analysis*. New York, Marcel Dekker, 1980.
114. PRAGER, W. and HODGE, P.G. *Theory of Perfectly Plastic Solids*. New York, John Wiley, 1951.
115. GOMES, E. e BRESCIANI FILHO, E. *Projeto e análise da*

conformação plástica dos metais pelo método dos elementos finitos não-lineares. Trabalho a ser apresentado no IV Simpósio de Conformação Plástica dos Metais, a ser realizado de 26 a 28 de novembro de 1990, na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, SP.

116. ZIENKIEWICZ, O.C. *The Finite Element Method - Chapter three: Generalization of the Finite Element Concepts - Weighted Residual and Variational Approaches*. London, McGraw-Hill, 1977. pp.42-92
117. AVITZUR, B. and VAN TYNE, C.J. Ring forming an upper bound approach. Part 1: Flowpattern and calculation of power; Part 2: Process analysis and characteristics; Part 3: Constrained forging and deep drawing applications. *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry*, 104:231-252, 1982.
118. OH, S.I.; PARK, J.J.; KOBAYASHI, S. and ALTAN, T. Application of FEM modeling to simulate metal flow in forging a titanium alloy engine disk. *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry*, 105:251, 1983.
119. CARTER JR., W.T. and LEE, D. A finite element analysis of cylinder and ring compression and its experimental verification. *Computer and Structures*, 21(1/2):1-19, 1985.
120. DIETER, G. Chapter 1 - Overview of workability. In: DIETER, G. (ed.) *Workability Testing Techniques*. Metals Park, American Society for Metals, 1984. p.1-20
121. DIETER, G. Introduction to Ductility. In: PAXTON, H.W. *Ductility*. Metals Park, Ohio, American Society for Metals, 1968. pp.1-30
122. ROGER, H.C. The effect of material variables on ductility.

- In: PAXTON, H. W. *Ductility*. Metals Park, Ohio, American Society for Metals, 1968. pp.31-61
123. BATES, R.C. Mechanics and mechanisms of fracture. In: TIEN, J.K. and ELLIOTT, J.F. (eds.) *The Metallurgical Treatise. Presentations at the USA-China Bilateral Conference sponsored by the Metallurgical Society of the AIME the American Society for Metals and Chinese Society of Metals*, AIME, New York, 1981. pp.551-570
124. MCCLINTOCK, F.A. Plasticity aspects of fracture. In: LIEBOWITZ, H.(ed.) *Fracture: an advanced treatise*. Academic Press, 1971. vol. 3. pp.47-158
125. KNOTT, J.F. Micromechanisms of fibrous crack extension in engineering alloys. *Metal Science*, Aug/Sep.1980. pp.327-336
126. VAN STONE, R.H.; COX, T.B.; LOW JR., J. and PSIODA, J.A. Microstructural aspects of fracture by dimpled rupture. *International Metals Review*, 30(4):157-179, 1985.
127. KUHN, H.A. Workability testing and analysis for bulk forming processes. In: NIEMEIER, B. A.; SCHMIEDER, A.K. and NEWBY, J.R. (eds.) *Formability Topics-metallic materials*. ASTM STP 647, American Society for Testing and Materials, 1978. pp. 206-219
128. COCKCROFT, M.G. and LATHAN, D.J. Ductility and Workability of Metals. *Journal Institute of Metals*, 96:33, 1968.
129. OH, S.I.; CHEN, C.C. and KOBAYASHI, S. Ductility fracture in axisymmetric extrusion and drawing, part 2: workability in extrusion and drawing. *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry*, 101:36-40, 1979.

2. ESTABELECIMENTO DO PROBLEMA

2.1. Definições

Não se passou muito tempo desde que TEGART¹ [1968] caracterizou as propriedades da conformação plástica de um material metálico, como sendo constituído de duas partes: a resistência ao escoamento plástico e a ductilidade. A resistência do escoamento plástico determina a capacidade do equipamento necessário para a operação de conformação; e a ductilidade estabelece a máxima deformação plástica permitida, sem que haja ocorrência de fraturas ou trincas.

COCKCROFT² [1968] definiu da seguinte forma o conceito de conformabilidade plástica: é a máxima deformação imposta a um material metálico, por um processo de conformação, sem que ocorra o surgimento de trincas visíveis. Esta definição relaciona a deformação plástica com a distribuição de tensões devido às solicitações externas, impostas pelo processo de conformação.

Segundo NIEMEIER e NEWBY³ [1978], essas definições não passam de conhecimentos intuitivos sobre a conformabilidade plástica, no sentido de que conformar um metal para uma nova forma, consistia na transição da conformação de uma forma obtida anteriormente.

Um bom método de determinação da conformabilidade deve considerar os mecanismos de propagação de trincas para se evitar o máximo possível, os de tentativas e erros. Os métodos de determinação e avaliação da conformabilidade, baseados nas definições de TEGART¹ e COCKCROFT² não consideram os mecanismos de fratura de VAN STONE⁴ e colaboradores [1985].

DIETER⁵ [1985] redefine a conformabilidade como sendo uma

propriedade complexa, que tenta avaliar a ductilidade básica de um material, submetido a um estado de sollicitação externa imposta por um processo, tal que o objetivo seja o desenvolvimento de um critério de fratura.

A definição de DIETER⁵, elimina o empirismo no estudo da conformabilidade e estabelece uma base tecnológica para, principalmente, permitir a construção do critério de conformabilidade por analogia energética proposto por COCKCROFT e LATHAN⁶ [1968].

2.2. O Problema

Na generalização da definição de conformabilidade, sem a violação da definição proposta por DIETER, surge o problema objeto deste trabalho.

A conformabilidade é uma propriedade complexa, que medindo a ductilidade básica do material metálico, em um processo de conformação plástica, pode ser avaliada pela aplicação das propriedades invariantes do material, de modo que, após a nucleação de trincas, estas propagam-se provocando uma variação de energia no processo, associada a uma taxa de liberação de energia, pela formação de superfícies livres no material.

2.3. Objetivos do presente trabalho

É objetivo deste trabalho modelar e estabelecer procedimentos experimentais para permitir a construção de mapas de conformabilidade plástica dos metais, através da mecânica da fratura não-linear elasto-plástica, e por meio de ensaios de compressão de corpos cilíndricos padronizados.

É objetivo também, avaliar analiticamente as limitações da teoria geral da plasticidade e as razões da impossibilidade de obter-se curvas de conformabilidade, através dela, mesmo com a aplicação dos métodos variacionais disponíveis.

Este trabalho deve, ainda, proporcionar o surgimento de uma metodologia de ensaio, apresentando um elevado grau de rigor técnico, e sendo de baixo custo e simples para ser realizado com os equipamentos comuns de pequenas instalações industriais.

2.4. Justificativa

O processo de conformação plástica dos metais é hoje um dos mais difundidos processos de fabricação mecânica. Empreendimentos industriais de grande ou pequeno porte, dele se utilizam para a fabricação de peças e produtos acabados ou semi-acabados, com os mais variados tipos de materiais metálicos, que apresentem uma ductilidade aceitável, algumas vezes estabelecida para valores de redução de área no ensaio de tração, acima de 20%.

A possibilidade do processamento do material metálico pela conformação plástica é garantida pelos valores de propriedades mecânicas, obtidas em ensaios de tração, compressão e torção padronizados. Mas, a melhoria nas propriedades mecânicas, na qualidade, no acabamento, além de um alto grau de conformação a ser obtido, depende da propriedade da conformabilidade plástica.

Essa propriedade da conformabilidade, para ser realista, deve ser obtida através de mapas construídos a partir de valores obtidos em ensaios representativos dos processos, mesmo em escala laboratorial.

Uma condição extremamente severa de conformação plástica e possível de ser analisada, tanto analítica, quanto experimentalmente, é o ensaio de compressão de corpos de provas cilíndricos padronizados, representativo para simular o forjamento de farugo cilíndrico em matriz aberta e plana, sob as mais variadas condições de carregamento, atrito e temperatura.

Como a mecânica da fratura trata dos problemas de propagação de trincas e não de sua nucleação, como utilizada neste trabalho; e, considerando que os limites de conformabilidade, construídos através de ensaios, são baseados no surgimento de trincas ou na fratura dos espécimens, é um tanto previsível que as "duas" estejam de algum modo acopladas. Esse acoplamento, como observar-se-á, estará diretamente vinculado às integrais invariantes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS - Capítulo 2

1. TEGART, W.J. The role of ductility in hot working. In: PAXTON, H.W. (coord.) *Ductility*. Metals Park, Ohio, American Society for Metals, 1968. pp.133-177
2. COCKCROFT, M.G. Ductile fracture in cold working operations. In: PAXTON, H.W. (coord.) *Idem*. Ref. (1). pp.199-225
3. NIEMEIER, B.A. and NEWBY, J.R. Introduction. In: NIEMEIER, B.A.; SCHMIEDER, A.K. and NEWBY, J.R. *Formability Topics - metallic materials*. Metals Park, Ohio, American Society for Metals, 1978. pp.1-3
4. VAN STONE, R.H.; COX, T.B.; LOW, J.R. and PSIODA, J.A. Microstructural aspects of fracture by dimple rupture. *International Metals Review*, 30(4):157-179, 1985.
5. DIETER, G.E. (ed.). *Workability Testing Techniques*. Metals Park, Ohio, American Society for Metals, 1984. pp.1-2
6. COCKCROFT, M.G. and LATHAN, D.J. Ductility and the workability of metals. *Journal of Institute of Metals*, 96:33-39, 1968.

3. MECÂNICA DA CONFORMAÇÃO PLÁSTICA DOS METAIS

3.1. Conceitos Fundamentais

Na análise da conformação plástica, segundo JOHNSON e MELLOR¹, convencionou-se que o processo é considerado como trabalho a frio se a temperatura do sólido for inferior a 30% da temperatura de fusão do metal base, o constituinte em maior porcentagem em peso na liga; portanto, essa temperatura deve ser abaixo da temperatura de recristalização dessa liga.

No processo a quente, acima da temperatura de recristalização, os mecanismos de deformações serão termicamente ativados, tornando muito mais complexas as avaliações analíticas e experimentais. Contudo, é necessário estabelecer relações constitutivas entre tensões e deformações na plasticidade dos metais que devem ser válidas tanto para o trabalho a frio como a quente.

A expressão mais geral já proposta por ORLANDER², que estabeleceu as influências da variação da entropia na ativação térmica por difusão; POLUKHIN³, que incluiu os mecanismos de deformação por modificações nas estruturas granulares; e por GAROFOLO¹⁶, que incluiu a taxa de deformação, segundo os mecanismos de fluência, é da forma:

$$\frac{d}{dt} \epsilon_{ij}^k = \sum_k Z_k (D, T, S) \dot{\sigma}_{ij}^k (T, S) \exp \left\{ \frac{-\Delta H_k (T, S)}{RT} \right\} \quad 3.1$$

t, variável de evolução

K representa o K-ésimo mecanismo de deformação

ϵ_{ij}^k : tensor de deformações

Z_k : parâmetro microestrutural caracterizando as influências de tamanho de grão, dispersão e ou precipitação de uma ou

mais fases constituintes; densidade, distribuição e dimensões das discordâncias.

σ_{ij}^k : tensor das tensões verdadeiras.

ΔH_k : energia de ativação verdadeira.

T: temperatura absoluta.

R: constante universal dos gases.

As representações gráficas da expressão (3.1) propostas por ASHBY⁵, são denominadas de mapas dos mecanismos de deformações e são de grande utilidade na prática.

GAROFALO⁴ indicou como limite para um processo ser ativado termicamente como sendo dado pela energia de auto-difusão,

$$\Delta H_2 \approx 338 T_{\text{fusão metal base}}$$

válida para:

$$T/T_{\text{fusão metal base}} \geq 0,46$$

O processo de conformação é considerado a frio, de acordo com GANDHI e ASHBY⁶ [1979], se:

$$T < (0,3 \text{ a } 0,5) T_{\text{fusão}}$$

A construção dos mapas dos mecanismos de deformações, segue o sugerido por ASHBY⁷ et alii, para metais e ligas. As relações de tensão versus deformação válidas para a análise dos processos de conformação a quente são obtidas através dos mapas dos mecanismos de deformações. Esses mapas foram propostos por

ASHBY⁵ em 1972.

MILLER e LANGDON generalizaram a construção desses mapas de deformações, apresentando as duas seguintes expressões, obtidas da equação 3.1

$$\dot{\epsilon}_{AT} = A_1 D_{o(1)} \exp \left\{ \frac{-Q_1}{RT} \right\} \left(\frac{Gb}{KT} \right) \left(\frac{T}{G} \right)^n \quad 3.2$$

e

$$\dot{\epsilon}_{BT} = 50 A_1 D_{o(gb)} \exp \left\{ - \frac{Q_{gb}}{RT} \right\} \left(\frac{Gb}{KT} \right) \left(\frac{\sigma}{G} \right)^{n+2} \quad 3.3$$

sendo:

n: constante do material relacionada com a sensibilidade à taxa de deformação

D_o : fator de frequência relacionado ao coeficiente de difusão

Q: energia de ativação

R: constante universal dos gases

T: temperatura absoluta

G: módulo de cisalhamento

K: constante de Boltzmann

A: constante adimensional

Os subscritos l e gb, referem-se aos parâmetros de difusão de rede e de contornos de grãos, respectivamente, e os subscritos AT e BT indicam que os processos estão ocorrendo em altas temperaturas e baixas temperaturas, respectivamente.

Na tentativa de correlacionar dados experimentais em diferentes temperaturas e taxas de deformações, levaram ZENER e HOLLOMON⁹ a proporem, desconsiderando a influência da microestrutura, o seguinte:

$$\sigma_{\dot{\epsilon}=\text{constante}} = f(Z) = f \left\{ \dot{\epsilon} \exp \left(\frac{Q}{RT} \right) \right\} \quad 3.4a$$

Z: parâmetro de ZENER-HOLLOMAN

DADRAS¹⁰ procurou uma relação funcional mais ampla, segundo o modelo proposto por SELLARS e TEGARD¹¹, onde:

$$Z = A [\sin(h\alpha_s)] n' \quad 3.4b$$

A, α e n' são constantes materiais ajustáveis, após valores obtidos experimentalmente.

A expressão de DADRAS, em função do parâmetro de ZENER e HOLLOMON, é do tipo:

$$\dot{\epsilon}^P = KZ^B \quad 3.4c$$

para K e B: ser também obtidos por experimentos. As relações das equações 3.4a, 3.4b e 3.4c, apesar de simples, não consideram a influência da temperatura, principalmente para processos a quente.

As relações de MILLER e LANGDON, equações 3.2 e 3.3, correspondem em termos genéricos, às expressões de superplasticidade dos metais, formuladas por SHERBY e WADSWORTH¹¹, como sendo:

$$\sigma = \left[\dot{\epsilon} \exp \left(\frac{Q}{RT} \right) \right]^m G f(s) \quad 3.5$$

σ : tensão efetiva

$\dot{\epsilon}$: taxa de deformação efetiva

G: módulo de cisalhamento

R: constante universal dos gases

$f(s)$: função da microestrutura, representando as influências do tamanho de grão, tamanho do subgrão e densidade de discordâncias.

m: parâmetro de sensibilidade à taxa de deformação,

$m \approx 0,1$ para baixa taxa de deformação

$m \approx 0,5$ para alta taxa de deformação

A influência da temperatura na deformação plástica é

considerada como sendo um fator acessório, caso o processo seja isotérmico. As modificações observáveis no comportamento dos materiais metálico levam a um processo com ativação térmica. Caso haja a ocorrência de variações significativas na temperatura, a mesma deve ser considerada como uma variável independente.

PRAGER¹² propôs um método de análise para deformação plástica, com a seguinte superfície de escoamento:

$$F(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^P, W^P, T) = 0 \quad 3.6$$

σ_{ij} : tensor de tensões

ϵ_{ij}^P : tensor de deformações plásticas

W^P : densidade da energia de deformação

T : temperatura

sendo:

$$W^P = \int_0^{\epsilon} \sigma'_{ij} d\epsilon_{ij}^P \quad 3.7$$

Na superfície de escoamento não ocorre variação no trabalho plástico e na deformação plástica, tal que:

$$d\epsilon_{ij}^P = 0 \quad 3.8$$

então:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial T} dT = 0 \quad 3.9$$

O potencial plástico de VON MISES foi estabelecido como

sendo:

$$g = g(\sigma_{ij}, K) \quad 3.10$$

onde:

K : critério de escoamento

A plasticidade associada dos metais é definida de tal

modo que:

$$F \equiv g \quad 3.11$$

Então, obtém-se após agrupamento de 3.8 e 3.9:

$$d \varepsilon_{ij}^P = d \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d \sigma_{kl} + \frac{\partial F}{\partial T} dT \right) \quad 3.12$$

Em uma superfície de plasticidade F , em expansão, a variação é nula, então:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d \sigma_{kl} + \frac{\partial F}{\partial T} dT + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^P} d \varepsilon_{ij}^P + \frac{\partial F}{\partial W^P} d \sigma'_{ij} d \varepsilon_{ij}^P = 0 \quad 3.13$$

então, de 3.11 e 3.12:

$$\left(1 + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^P} + \frac{\partial F}{\partial W^P} \sigma'_{ij} \right) d \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \quad 3.14$$

Então, o valor de $d\lambda$ em 3.13, quando substituído na equação 3.11, fornece a representativa variação da influência da temperatura no incremento de deformação plástica:

$$d \varepsilon_{ij}^P = \frac{\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d \sigma_{kl} + \frac{\partial F}{\partial T} dT \right)}{\frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{mn}^P} + \frac{\partial F}{\partial W^P} \sigma_{mn} \right)} \quad 3.15a$$

É aparente a dificuldade que existe na manipulação algébrica dos problemas de incrementos de deformações plásticas, dados pela equação 3.14, quando se tenta considerar os efeitos na deformação plástica, devido à influência da temperatura.

3.1.1. Comportamento dos Metais na Conformação a Frio

No caso do trabalho de plastificação a frio, o conceito de potencial plástico de VON MISES, discutido por HILL¹³ e

KACHANOV¹⁴, é representado por equações de escoamento plástico da forma:

$$d \varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g(\sigma_{ij}, k^2)}{\partial \sigma_{ij}} \quad 3.15b$$

Por outro lado, em um meio metálico plastificado, existe uma superfície de escoamento, construída por um critério de escoamento construído de tal forma que:

$$f(\sigma_{ij}, k^2) = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \quad 3.16$$

usa-se k^2 , para evitar a imposição da condição $K > 0$.

sendo:

$$K = \bar{\sigma}_0 / 3^{1/2}$$

$\bar{\sigma}_0$ = tensão limite de escoamento, obtida por ensaios.

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad 3.17$$

e

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

δ_{ij} é o delta de KRONECKER.

Na condição da plasticidade associada, a equação 3.11, é modificada para a forma:

$$g(\sigma_{ij}, K) \equiv f(\sigma_{ij}, K) \quad 3.11$$

a plasticidade é do tipo:

$$d \varepsilon_{ip}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}(\sigma_{ij}, K) = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}(\sigma_{ij}, K) \quad 3.15$$

No caso da existência de cantos na superfície de escoamento, a seguinte condição se impõe:

$$d \varepsilon_{ij}^P = d\lambda_1 \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij}, K) + d\lambda_2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij}, K) \quad 3.18$$

3.1.2. Relações da Plasticidade dos Metais

As relações da plasticidade são dadas, na teoria incremental, pelas formulações da elasto-plasticidade na forma:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^P \quad 3.19$$

onde:

$d\varepsilon_{ij}$: deformação incremental total

$d\varepsilon_{ij}^e$: deformação incremental elástica

$d\varepsilon_{ij}^P$: deformação incremental plástica

A forma mais geral segue a fornecida pela relação proposta por PRANDTL¹⁵ e REUSS¹⁶:

$$d\varepsilon_{ij} = \lambda S_{ij} + \frac{1}{2G} dS_{ij} \quad 3.20$$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$: é o módulo de KIRCHHOFF

E : é o módulo de YOUNG

ν : é a razão de POISSON

A equação 3.20 é uma generalização da relação da deformação plástica incremental proposta por LEVY¹⁷ e VON MISES¹⁸, baseada no conceito de potencial plástico introduzido pelo próprio VON MISES, onde é afirmado que: um potencial plástico existe se for possível definir os componentes de um tensor de tensão de segunda ordem, como sendo as derivadas parciais de uma certa fun-

ção escalar $g(\sigma_{ij})$, de tal modo que:

$$g(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} I_2(S_{ij}) \quad 3.21$$

As equações do escoamento plástico incremental de LEVY-VON MISES são, então, da forma:

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{\lambda}{2} \frac{\partial}{\partial S_{ij}} I_2(S_{ij}) = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}(\sigma_{ij}) \quad 3.22$$

A função $g(\sigma_{ij})$ é o potencial plástico e é definida de modo a satisfazer a condição

$$\frac{\partial d\varepsilon_{ij}^P}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial d\varepsilon_{kl}^P}{\partial \sigma_{ij}} \quad 3.23$$

A equação 3.22 define um espaço nono-dimensional pela forma vetorial seguinte:

$$d\underline{\varepsilon}^P = \lambda \underline{\text{grad}} g(\sigma_{ij}) \quad 3.24$$

Se ocorrer de $g(\sigma_{ij}) = f_{MH}(\sigma_{ij}) = \text{constante}$, então, a expressão 3.24 mostra uma condição de normalidade de $d\underline{\varepsilon}^P$, num ponto dado pelo tensor de tensão $\underline{T}_\sigma$. A função $f_{MH}(\sigma_{ij})$ é na realidade o critério de escoamento plástico de VON MISES¹⁸ e HENCKY.¹⁹

Contrapondo à teoria incremental do escoamento plástico, existe a teoria da deformação plástica devido a HENCKY¹⁹. É um

modelo de deformação elástica não linear, em que são desprezadas as irreversibilidades e trajetórias de carregamentos. É, também, a teoria da deformação plástica, válida para pequenas deformações elasto-plásticas, de tal modo que existe uma proporcionalidade entre os tensores das tensões reduzidas e do das deformações, tal que:

$$d\epsilon_{ij} = \varphi S_{ij} \quad 3.25$$

Em sua formulação mais geral, o modelo da deformação plástica considera o efeito da compressibilidade, formando uma expressão generalizada na forma:

$$\epsilon_{ij} = \varphi \sigma_{ij} + \left(\frac{1}{3K} - \varphi \right) \sigma_m \delta_{ij} \quad 3.26$$

A formulação de HENCKY, foi aplicada por NADAI [1923] no caso específico do problema de torção.

Os trabalhos de ILYUSHIN⁴¹⁻⁴⁴ contribuíram definitivamente para a transformação do modelo de HENCKY, de um de deformação plástica infinitesimal, para um modelo de elasticidade não-linear, estabelecendo uma independência entre os estados de deformações final e inicial.

ZYCZKOWSKI²¹ denominou esse modelo de teoria das pequenas deformações elasto-plásticas de HENCKY-ILYUSHIN-NADAI.

Como no processo de deformação plástica surge uma nova equação condicional, uma nova variável deve ser introduzida para a medida das mudanças de configuração ou forma do corpo metálico e, ao mesmo tempo, permitir a quantificação da distorção do

material.

A variável desconhecida, até agora, é um coeficiente de proporcionalidade existente entre os tensores das tensões reduzidas S_{ij} e o das deformações. A multiplicação da equação 3.26 pelos componentes de si mesmo, no caso de incompressibilidade, tem-se:

$$\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = \varphi^2 S_{ij} S_{ij} \quad 3.27$$

A deformação equivalente é definida como sendo:

$$\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = 4/9 \varepsilon_{eq}^2 \quad 3.28$$

Por outro lado, a utilização do critério da distorção plástica de VON MISES - HENCKY, fornece:

$$S_{ij} S_{ij} = \sigma_{escoamento}^2 \quad 3.29$$

Substituindo os valores de 3.28 e 3.29 em 3.27, obtém-se:

$$\varphi = 3/2 \frac{\varepsilon_{eq}}{\sigma_{escoamento}} \quad 3.30$$

Os valores de S_{ij} e σ'_{ij} são intercambiáveis.

3.1.3. Relações Experimentais de Tensões versus Deformações:

LUDWICK, HOLLOMAN, VOCE, SWIFT, RAMBERG-OSGOOD e de PRAGER

A tentativa de obter-se uma teoria geral e unificada da plasticidade dos metais, sempre esteve limitada às dificuldades encontradas na formulação e construção de relações experimentais entre as tensões e deformações.

No trabalho a quente, ou seja, para temperaturas acima das necessárias para a existência do fenômeno da recristalização, os mapas dos mecanismos de deformações, introduzidos por ASHBY⁷ e generalizados por MILLER e LANGDON²⁰, mostram que a busca de expressões gerais é de extrema dificuldade, exigindo um tratamento do tipo caso a caso.

No trabalho a frio, entretanto, apesar de complexas, existe a disponibilidade de várias expressões e cada uma delas descrevendo casos específicos de deformações.

LUDWICK²² propôs em 1909, uma expressão de ajuste de curvas a dados experimentais, constituída de dois parâmetros:

$$\sigma = \sigma_0 + H \epsilon^n \quad 3.31$$

para:

σ_0 : tensão limite de referência

H: parâmetro constante de encruamento

n: índice de encruamento

A expressão de LUDWICK²² ajusta curvas a dados experimentais de metais trabalhado a frio.

Se se tiver $\sigma_0 \approx 0$, na relação de LUDWICK transforma-se na relação de HOLLOMAN,²³ conhecida como lei da potência e

utilizada na fórmula parabólica de dois parâmetros:

$$\sigma = K \varepsilon^n \quad 3.32$$

sendo:

K: coeficiente de resistência plástica

n: expoente de encruamento e é tal que, na condição de carga máxima n tem o valor da deformação uniforme.

Apesar da complexidade algébrica, VOCE²⁴ em 1948, propôs a fórmula de três parâmetros para metais, apresentando elevada ductilidade a frio:

$$\sigma = a + (b-a) \{1 - \exp(-n\varepsilon)\} \quad 3.33$$

nesta fórmula, a, b e n são parâmetros ajustáveis aos dados experimentais por meio de regressão não-linear, na atualidade.

SWIFT²⁵, em 1952, propôs uma fórmula ideal para metais e ligas, apresentando média ductilidade, cerca de 15a 40% de redução de área, na forma de:

$$\sigma = c(a + \varepsilon)^n \quad 3.34$$

é, também, uma fórmula de três parâmetros.

No caso geral de comportamento elasto-plástico, a relação proposta por RAMBERG e OSGOOD²⁶, em 1943, é de grande utilidade na prática da engenharia:

$$\varepsilon = (\sigma/E) + K \left(\frac{\sigma}{E} \right)^p \quad 3.35$$

podendo a mesma ser normalizada pela relação: $\sigma_0 = E \varepsilon_0$ da lei de HOOKE.²⁷ K e p são parâmetros de ajuste.

A relação proposta por PRAGER²⁸, em 1938, é

freqüentemente utilizada na análise elasto-plástica de materiais isotrópicos:

$$\sigma = \sigma_0 \tanh \left(\frac{E \varepsilon}{\sigma_0} \right) \quad 3.36$$

onde:

σ_0 é a tensão limite de escoamento

Nessa expressão de PRAGER, a deformação é definida no intervalo

$$-\infty \leq \varepsilon \leq \infty$$

3.1.4. A Questão da Anisotropia na Plasticidade

O critério de escoamento plástico para os metais e suas ligas é de fundamental importância no trabalho a frio. E a fórmula generalizada de HUBER-VON MISES e HENCKY²⁹ é a mais adequada para a incorporação do efeito da anisotropia nos processos de confirmação plástica e é função, apenas, do segundo invariante das tensões reduzidas.

A forma do critério de escoamento plástico de TRESCA, apresenta cantos na superfície de escoamento, que poderão ser removidos pela introdução do terceiro invariante do tensor das tensões reduzidas. Porém, apresenta uma grande dificuldade na introdução do efeito de anisotropia.

HILL³⁰ introduziu a forma mais geral para o critério de escoamento plástico de HUBER-VON MISES e HENCKY, válida para um material ortotrópico, como sendo:

$$\begin{aligned} & \{ F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \\ & + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{12}^2 \} = \sigma_{eq}^2 \end{aligned} \quad 3.37$$

A forma mais geral possível, foi dada por HILL³¹ em 1979, para possibilitar o estudo do efeito da anisotropia em agregados metálicos, mas em função das tensões principais e obedecendo o critério de escoamento plástico de VON MISES:

$$F|\sigma_2 - \sigma_3|^m + G|\sigma_3 - \sigma_1|^m + H|\sigma_1 - \sigma_2|^m + A|2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3|^m + \\ + B|2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1|^m + C|2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2|^m = \sigma_{eq}^m \quad 3.38$$

A equação 3.38 se reduz à 3.37, quando:

$$m = 2$$

e ainda:

F for substituído por $F+2(B+C)-A$.

Para um material isotrópico, a relação de HUBER-VON MISES-HENCKY é dada por:

$$1/2 \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = K^2 = \sigma_0^2 / 3 \quad 3.39a$$

E, de acordo com PRAGER³², o critério de TRESKA, na forma da superfície de escoamento é, em termos das tensões principais, da forma:

$$[(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 - 4K^2][(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 - 4K^2][(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 - 4K^2] = 0 \quad 3.39b$$

e expressa o critério de TRESKA, em função da tensão de cisalhamento máxima, sem considerar o efeito da anisotropia para o

escoamento plástico - equação 3.39 Também pode ser expresso em função do segundo e do terceiro invariantes do tensor das tensões reduzidas:

$$4J_2^3 - 27J_3^2 - 36K^2J_2^2 + 96K^4J_2 - 64K^6 = 0 \quad 3.40$$

Os invariantes podem ser substituídos em função das tensões reduzidas principais:

$$J_1 = \sigma'_{kk} = 0 \quad 3.41a$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \sigma'_{kk}{}^2 \quad 3.41b$$

$$J_3 = \frac{1}{3} \sigma'_{kk}{}^3 \quad 3.41c$$

3.2. Teoria Geral da Plasticidade na Conformação Plástica dos Metais

3.2.1. Sistemas de Coordenadas Generalizadas: Sistemas de LAGRANGE e EULER, Tensões de CAUCHY, LAGRANGE e KIRCHHOFF

a) Sistemas de Coordenadas Generalizadas

São descritos matematicamente por modelos tais que seus pontos geométricos coincidam com as suas partículas materiais. Quando um corpo sólido sofre mudança em sua configuração por ação de um agente físico externo, as continuidades materiais e geométricas requerem que pontos inicialmente vizinhos, assim permaneçam após a transformação, a menos que surjam descontinuidades, devido ao surgimento de fraturas ou trincas no sólido.

Seja o sistema coordenado $(X_1 X_2 X_3)$, tal que um ponto A do corpo, em um determinado instante de tempo evolutivo t seja descrito pelas coordenadas X_i . Em um instante posterior $t+\Delta t$, o ponto A deforma para a posição A' , com coordenadas x_i no novo sistema $(x_1 x_2 x_3)$, figura 3.1.

Os sistemas coordenados $(X_1 X_2 X_3)$ e $(x_1 x_2 x_3)$ são curvilíneos e descrevem um espaço Euclidiano.

A transformação da mudança de configuração na figura 3.1, dos pontos ABCD para a figura $A'B'C'D'$, é realizada pelo mapeamento dado pelas expressões apresentadas por FUNG³², na forma:

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3) \quad 3.43$$

e sua respectiva transformação inversa:

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3) \quad 3.44$$

sendo as funções x_i e X_i são contínuas e diferenciáveis.

Um elemento de linha, infinitesimal, conectando o ponto $A(X_1 X_2 X_3)$ e ponto $B(X_1 + dX_1, X_2 + dX_2, X_3 + dX_3)$, sendo AB de comprimento dS , na configuração original é expressa matematicamente por:

$$dS = g^{ij} dX_i dX_j \quad 3.45$$

g^{ij} : são os componentes do tensor métrico Euclidiano no sistema coordenado X_i .

Figura 3.1. - Deformação de um corpo em função de suas coordenadas generalizadas curvilíneas:

(a) sistema $(X_1 X_2 X_3)$, representando estado inicial

(b) sistema $(x_1 x_2 x_3)$, representando estado final

Os pontos A e B deformam-se para os pontos $A'(x_1, x_2, x_3)$ e B $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$, formando uma linha A'B' de comprimento ds, expressa na forma:

$$ds = g_{ij} dx_i dx_j \quad 3.46$$

onde, g_{ij} é tensor métrico Euclidiano no sistema x_i .

As transformações 3.45 e 3.46 formam os seguintes quadrados de comprimentos:

$$ds^2 = g^{ij} \frac{\partial X_i}{\partial x_1} \frac{\partial X_j}{\partial x_m} dx_1 dx_m \quad 3.47$$

e

$$ds^2 = g_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \frac{\partial x_j}{\partial X_m} dX_1 dX_m \quad 3.48$$

A diferença entre os quadrados de comprimento, após uma mudança de índices, são da forma:

$$ds^2 - ds^2 = \left(g_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial X_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial X_j} - g^{ij} \right) dx_i dx_j \quad 3.49$$

$$ds^2 - ds^2 = \left(g_{ij} - g^{\alpha\beta} \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial X_\beta}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j \quad 3.50$$

Em analogia à hidrodinâmica, define-se os seguintes tensores de deformações finitas:

- a) Componentes do tensor de deformação de GREEN nas coordenadas materiais de LAGRANGE, denominados componentes do tensor de deformação de GREEN-LAGRANGE:

$${}^L\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(g_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial X_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial X_j} - g^{ij} \right) \quad 3.51$$

- b) Componentes do tensor de deformação de ALMANZI, em coordenadas geométricas de EULER, ou denominados de componentes de deformação de ALMANZI-EULER:

$${}^E\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(g_{ij} - g^{\alpha\beta} \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial X_\beta}{\partial x_j} \right) \quad 3.52$$

Os tensores ${}^E\varepsilon_{ij}$ e ${}^L\varepsilon_{ij}$ são simétricos, provados por verificação direta que:

$${}^E\varepsilon_{ij} = {}^E\varepsilon_{ji} \quad 3.53$$

e

$${}^L\varepsilon_{ij} = {}^L\varepsilon_{ji} \quad 3.54$$

No caso de deformação infinitesimal, o tensor de deformação de ALMANZI-EULER, transforma-se no tensor de deformação de CAUCHY.

O sistema coordenado (X_1, X_2, X_3) é utilizado para descrever posições das partículas em qualquer instante $t+\Delta t$, baseado na configuração original. Já o sistema coordenado (x_1, x_2, x_3) é utilizado para descrever posições das partículas em um instante $t+\Delta t$ da configuração deformada.

No caso de sistemas coordenados retangulares, existem duas escolhas:

$$g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij} \quad 3.55$$

ou

$${}^L \epsilon_{ij} = {}^E \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(g_{ij} - g^{ij} \right) \quad 3.56$$

Na primeira escolha, a equação 3.55, o uso do mesmo sistema de coordenadas retangulares pode ser utilizado para descrever, tanto situações nas configurações original ou deformada.

Na segunda escolha, a equação 3.56, o sistema de referência retangular fica distorcido na configuração deformada, de tal modo que as coordenadas das partículas nos sistemas X_i e x_i , possuam os mesmos valores numéricos.

Neste trabalho, optar-se-á pela escolha dada pela equação 3.55, onde:

$$g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i=j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad 3.57$$

O vetor deslocamento $\underline{u}$ apresenta seus componentes na forma:

$$u_i = x_i - X_i \quad 3.58$$

c) Tensores de Tensão e Deformação

Define-se os componentes físicos do tensor de tensão τ^{ij} , como sendo os componentes do vetor de tensão $\underline{\tau}$ resolvidos nas direções dos vetores unitários, paralelos aos vetores-base de um sistema ortogonal de coordenadas, na forma:

$$\sigma_{ij} = \sqrt{\frac{g_{jj}}{g^{ii}}} \tau_{ij} \quad 3.59$$

onde σ_{ij} são os componentes físicos de τ_{ij}

Quando $\underline{T}$ for resolvido no vetor recíproco, os componentes físicos são da forma:

$$\sigma_j^i = \sqrt{\frac{g^{jj}}{g^{ii}}} \tau_j^i \quad 3.60$$

Os componentes da deformação física são da forma:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}} \varepsilon_{ij}^E \quad 3.61$$

Nos sistemas curvilíneos:

$$g_{ij} = g^{ij} = 0, \text{ se } i \neq j$$

$$g^{ii} = (g_{ii})^{-1}$$

Para o sistema de coordenadas generalizadas, em sistema curvilíneo ortogonal, os componentes físicos tensoriais são:

$$\sigma_{ij} = \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} \tau_{ij} \quad 3.62$$

$$\sigma_j^i = \sqrt{g^{jj}} \sqrt{g_{ii}} \sigma_j^i \quad 3.63$$

$$\varepsilon_{ij} = \sqrt{g^{ii}} \sqrt{g^{jj}} \varepsilon_{ij}^E \quad 3.64$$

São essas expressões: 3.62, 3.63 e 3.64 que permitem escrever as equações de equilíbrio de forças, relações de tensões versus deformações, as condições de compatibilidade em qualquer

sistema coordenado, e são também principalmente importantes na conformação plástica de metais, porque a mesma envolve grandes deformações.

ZYCZKOWSKI²¹ e FUNG³² apresentam os resultados das transformações para os sistemas em coordenadas cilíndricas e esféricas. VLASOV³² em 1944, deduziu as transformações para as equações de compatibilidade.

Para um sólido contínuo em estado deformado, sem considerar-se as transformações de coordenadas, as equações de equilíbrio para os componentes físicos de tensões, são da forma:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j} + b_j \quad 3.65$$

Um tensor de tensão no estado deformado é um conceito físico natural, mas os componentes do tensor de tensão estão relacionados aos componentes do tensor de deformação. Se as deformações se referirem ao estado original das posições das partículas, então é necessário definir as tensões também no estado original.

No estado original, tem-se as trações relacionadas à regra de LAGRANGE, enquanto que no estado deformado a de KIRCHHOFF.

A condição de LAGRANGE, figura 3.2, leva à definição da transformação, na forma:

$$d {}^L T_{0_i} = d T_i \quad 3.66$$

A condição de KIRCHHOFF, na mesma figura 3.2, define a transformação na forma:

$$d {}^K X_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} d T_j \quad 3.67$$

em similaridade à transformação:

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j \quad 3.68$$

A relação de CAUCHY, com os respectivos componentes das tensões no estado deformado, denotando um vetor força dT_i , e atuando numa superfície elementar dS , cujo vetor unitário tenha componentes v_j é da forma:

$$dT_i = \sigma_{ij} v_j dS \quad 3.69$$

Figura 3.2. - Incrementos de tração nos estados original e deformado.

A transformação de LAGRANGE forma-se, então, do seguinte modo:

$$d {}^L T_{0_i} = T_{ij} \nu_{0_j} dS_0 = dT_i \quad 3.70$$

Já a transformação de KIRCHHOFF, é do tipo:

$$d {}^K T_{0_i} = S_{ij} \nu_{0_j} dS_0 = \frac{\partial X_i}{\partial x_\alpha} dT_\alpha \quad 3.71$$

sendo:

- σ_{ij} : componentes do tensor de tensão de CAUCHY
- T_{ij} : componentes do tensor de tensão de LAGRANGE
- S_{ij} : componentes do tensor de tensão de KIRCHHOF
- σ_{ij} : componentes do tensor de tensão de EULER

Se ρ_0 e ρ são as densidades materiais nas configurações original e deformada, então:

$$T_{ji} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \sigma_{mi} \quad 3.72$$

$$S_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial X_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial X_j}{\partial x_\beta} \sigma_{\beta\alpha} \quad 3.73$$

Os tensores de EULER e de KIRCHHOFF são simétricos, mas o de LAGRANGE não o é.

Até aqui, percebe-se que o grande problema é o esforço feito foi e o é de esclarecer que o tensor de tensão de LAGRANGE é, de acordo com FUNG³², inconveniente para se utilizar na conformação plástica dos metais envolvendo deformações finitas.

Neste caso é comum o uso do denominado segundo tensor de tensão de PIOLA-KIRCHHOFF : S_{ij}

As relações entre os componentes tensoriais S_{ij} e T_{ij} , são:

$$S_{ji} = \frac{\partial X_i}{\partial x_\alpha} T_{j\alpha} \quad 3.74$$

A utilização da identidade:

$$S_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial X_j} \quad 3.75$$

tem-se:

$$\sigma_{ji} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial X_p} T_{pj} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial X_\beta} S_{\beta\alpha} \quad 3.76$$

sendo que:

$$T_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial X_p} S_{ip} \quad 3.77$$

As equações de equilíbrio, em função das tensões Lagrangeanas, são:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} + \rho_0 b_{0i} = 0 \quad 3.78$$

que, em termos das tensões de KIRCHHOFF, ficam na forma:

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left[S_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \right] + \rho_0 b_{0i} = 0 \quad 3.79$$

As expressões apresentadas, de 3.45 a 3.79, são as que

permitem o tratamento de qualquer problema, por métodos, tais como: os variacionais e os dos Elementos Finitos.

3.2.2. Sistemas de Equações para Problemas de Conformação Plástica dos Metais

O sistema de equações a ser resolvido, dentro da teoria da plasticidade, consiste, no caso mais geral, em um sistema com dezesseis equações. Dessas, nove equações - das quais três são de equilíbrio e seis de relações de deformações versus deslocamentos - são comuns a todos os ramos da mecânica dos sólidos contínuos.

As equações de equilíbrio são, para a forma cartesiana, do tipo:

$$\sigma_{ij,j} + b_j = 0 \quad 3.80$$

onde:

b_j : componentes de forças de campo

As seis equações, relacionando deformações com deslocamentos, formam-se para as deformações finitas de GREEN-LAGRANGE, do seguinte modo:

$${}^L\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(U_{i,j} + U_{j,i} + U_{k,i} \cdot U_{k,j} \right) \quad 3.81$$

e para as deformações de EULER-ALMANSI, como:

$${}^E\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j} \right) \quad 3.82$$

Na forma infinitesimal, as relações 3.81 e 3.82 tornam-se, respectivamente:

$${}^L \epsilon_{ij} \approx \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad 3.83$$

e

$${}^E \epsilon_{ij} \approx \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad 3.84$$

Os componentes do tensor de deformação de EULER-ALMANZI tornam-se, na forma infinitesimal, nos componentes tensoriais da CAUCHY.

As equações 3.83 e 3.84, quando expressas nas formas de taxas de deformações, dão origem às seguintes equações, em termos de derivadas materiais:

$$d {}^L \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (d u_{k,i} + d u_{i,k}) X_{k,i} X_{1,j} \quad 3.85$$

e

$$d {}^E \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (du_{i,j} + du_{j,i}) - {}^E \epsilon_{ik} du_{k,j} + {}^E \epsilon_{jl} du_{l,i} \quad 3.86$$

No caso uniaxial, as correspondentes deformações são da forma geral:

$${}^{(n)} \epsilon_x = \frac{1}{n} \left[1 - \left(\frac{\ell_0}{\ell_1} \right)^n \right] \quad 3.87$$

sendo que para cada valor de n , temos as seguintes convenções:

$n = -1$: deformação convencional

$n = -2$: deformação de LAGRANGE

$n = +2$: deformação de EULER

Se n tender para o infinito, as deformações são as conhecidas deformações logarítmicas ou de HENCKY.

No caso de pequenas deformações, referenciadas aos componentes diagonais, ZYCZKOWSKI²¹, mostra que existe a seguinte relação entre as deformações de HENCKY, EULER e LAGRANGE:

$$^H\varepsilon_i = \frac{1}{2} \ln (1 + 2^L\varepsilon_i) = -\frac{1}{2} \ln (1 - 2^E\varepsilon_i) \quad 3.88$$

As equações de 3.81 a 3.88 poderão ser substituídas pelas seis equações de compatibilidades de SAINT-VENANT, existentes entre as deformações e os deslocamentos:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad 3.89$$

que descrevem, dessa forma, oitenta e uma equações, quando na realidade necessitamos apenas de seis.

Uma forma mais compacta de descrever as condições de SAINT-VENANT das compatibilidades, é expressá-las apenas com dois índices livres:

$$e_{ikm} e_{jln} \varepsilon_{kl,mn} = 0 \quad 3.90$$

e_{ijk} é o símbolo permutador alternante, e possui os seguintes valores:

$e_{ijk} = 0$, para quaisquer dois índices entre i, j, k iguais

$e_{ijk} = 1$, se i, j, k são permutações pares de x_1, x_2 e x_3

$e_{ijk} = -1$, se i, j, k são permutações ímpares de x_1, x_2 e x_3

No caso de coordenadas generalizadas, as equações de compatibilidades foram desenvolvidas por VLASOV³³.

A equação da variação de volume da teoria da elasticidade:

$$\varepsilon_{kk} = \frac{(1 - 2\nu)}{E} \sigma_{kk} \quad 3.91$$

constitui-se na décima equação da teoria da plasticidade e a mesma, de acordo com os trabalhos de BRIDGMAN, discutidos em NADAI³⁴, é invariante dentro de uma faixa ampla de pressão hidrostática, utilizada na conformação plástica dos metais.

As diferenças entre as equações da plasticidade e da elasticidade repousam nas cinco leis de variações de formas, relacionando tensões e deformações, que, na plasticidade, introduzem novas funções desconhecidas φ e $d\lambda$, formando as seguintes teorias de deformações plásticas:

a) teoria do escoamento plástico incremental de LEVY-VON MISES:

$$d \varepsilon_{ij}^P = d\lambda \sigma'_{ij} \quad 3.92$$

b) teoria do escoamento plástico incremental de PRANDTL-REUSS:

$$d \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} d \sigma'_{ij} + d\lambda \sigma'_{ij} \quad 3.93$$

c) teoria da deformação plástica de HENCKY

$$\varepsilon_{ij} = \varphi \sigma'_{ij} \quad 3.94$$

As equações 3.92, 3.93 e 3.94, dão cinco equações que juntamente com um dos dois critérios de escoamento plástico o de HUBER-VON MISES- HENCKY ou o de TRESCA fornecem as dezesseis equações mencionadas anteriormente.

Das dezesseis equações apresentadas, apenas as de equilíbrio e as das relações versus deslocamentos são passíveis de mudanças para outros sistemas de coordenadas, pela utilização da métrica Euclidiana do cálculo tensorial, enquanto que para as equações

remanescentes, em um sistema localmente ortogonal, é suficiente a mudança formal dos índices.

As condições de contorno na superfície S , determinam três componentes de tensões, formando o vetor de carga para a condição de contorno natural numa superfície S_T de S , e três componentes de deslocamentos ou velocidades impostas no contorno S_u de S , conhecida como condição de contorno geométrico.

No caso de se ter um problema elasto-plástico, pode-se determinar na zona plastificada, onde $d\lambda > 0$ ou $\varphi > \frac{1}{2G}$, todas as dezesseis variáveis desconhecidas. Já, na zona elástica, onde $\varphi = \frac{1}{2G}$ ou $d\lambda = 0$, o número de variáveis desconhecidas se resume a quinze.

Devido ao grande número de incógnitas e equações, é importante o estudo dos métodos de redução das equações e variáveis, de modo que se possa aplicar métodos analíticos para a busca de soluções dos problemas de conformação plástica. Tais técnicas de redução de equações e variáveis são de importância fundamental nas aplicações dos métodos numéricos.

As expressões para os vários sistemas de coordenadas ortogonais, são da forma seguinte; após consideração da transformação:

$$x_i = X_i + u_i \quad 3.95$$

que mapeia a localização de uma partícula no ponto X_i de um espaço tridimensional, para um ponto x_i no mesmo espaço.

Os componentes do tensor de deformação infinitesimal, em relação ao sistema X_i :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad 3.96a$$

Já para deformação infinitesimal, o tensor é, em relação a x_i :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad 3.96b$$

mas para deformações finitas, em relação a X_i , tem-se o tensor de deformação de GREEN-LAGRANGE:

$${}^L\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right] \quad 3.97$$

e para as deformações finitas, em relação ao sistema x_i , o tensor de deformação é o de ALMANSI-EULER:

$${}^E\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] \quad 3.98$$

A equação de equilíbrio, em relação ao conceito físico natural é:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad 3.99$$

onde os tensores de tensão natural σ_{ij} e o de KIRCHHOFF S_{ij} , estão relacionados, de forma tal que:

$$S_{ji} = \rho_0/\rho \left[\sigma_{ji} - \left(\delta_{j\beta} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \delta_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\beta} - \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\beta} \right) \sigma_{\alpha\beta} \right] \quad 3.100$$

e

$$\sigma_{j1} = \rho_0 / \rho \left[s_{j1} + \left(\delta_{j\beta} \frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha} + \delta_{1\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\beta} \right) s_{\alpha\beta} \right] \quad 3.101$$

Já as equações de equilíbrio em termos dos componentes do tensor não-simétrico de LAGRANGE, é:

$$\frac{\partial T_{j1}}{\partial x_j} + \rho_0 b_{01} = 0 \quad 3.102$$

e a equação de equilíbrio, em termos dos componentes do tensor simétrico de KIRCHHOFF é, tal que:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[s_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right] + \rho_0 b_{01} = 0 \quad 3.103$$

Em termos de coordenadas curvilíneas ortogonais, é possível a obtenção das equações apresentadas de 3.94 a 3.103, se for realizada a seguinte identificação para os componentes do tensor métrico Euclidiano para pequenas deformações:

a) Coordenadas cilíndricas em termos físicos: ϵ_{ij} e σ_{ij}

$$x_1 = r ; x_2 = \theta \quad e \quad x_3 = z \quad 3.104a$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \quad 3.104b$$

$$g_{11} = 1 ; g_{22} = r^2 ; g_{33} = 1 ; \text{outros } g_{ij} = 0 \quad 3.104c$$

$$g^{11} = 1 ; g^{22} = \frac{1}{r^2} ; g^{33} = 1 ; \text{outros } g^{ij} = 0 \quad 3.104d$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r ; \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} ; \text{outros } \Gamma_{jk}^i = 0 \quad 3.104e$$

como:

$$\epsilon_{ij} = \sqrt{g^{11}} \sqrt{g^{jj}} e_{ij} \quad 3.105a$$

então, obtem-se:

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad 3.105b$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad 3.105c$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad 3.105d$$

$$\epsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad 3.105e$$

$$\epsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \quad 3.105f$$

$$\epsilon_{r\theta} = 1/2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad 3.105g$$

As equações de equilíbrio em coordenadas cilíndricas,

são:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + b_r = 0 \quad 3.106a$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + b_\theta = 0 \quad 3.106b$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + b_z = 0 \quad 3.106c$$

b) Coordenadas esféricas em termos físicos:

$$x_1 = r ; x_2 = \phi ; x_3 = \theta$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + r^2 \sin^2 \phi d\theta^2$$

então:

$$g_{11} = 1 ; g_{22} = r^2 ; g_{33} = r^2 \sin^2 \phi ; \text{outros } g_{ij} = 0$$

$$g^{11} = 1 ; g^{22} = \frac{1}{r^2} ; g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} ; \text{outros } g^{ij} = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r ; \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \phi ;$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} ; \Gamma_{33}^2 = -\sin \phi \cos \phi ;$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} ; \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \phi ; \text{outros } \Gamma_{\alpha k}^\sigma = 0 \quad 3.107$$

A forma mais geral para as equações das relações deformações versus deslocamentos é do seguinte tipo para pequenas deformações:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \Gamma_{ij}^\sigma u_\sigma \quad 3.108$$

O uso de expressões válidas para pequenas deformações, permite a aplicação direta das relações de taxas de deformações $d\epsilon_{ij}$, nas relações paramétricas de velocidades, do tipo:

$$\frac{D}{D_t} \left\{ \dots \right\} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \dots \right\} + \frac{\partial X_k}{\partial t} \left(\frac{\partial \{ \dots \}}{\partial X_k} \right) \quad 3.109$$

que é na realidade uma derivada material, em termos de coordenadas espaciais, que é genericamente expressa por:

$$\frac{D}{D_t} \{ \dots \} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \{ \dots \} \quad 3.110$$

Os incrementos ou taxas de deformações de GREEN-LAGRANGE e de ALMANZI-EULER, ficam expressos nas formas seguintes:

$${}^L\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{d}{dt} {}^L\epsilon_{ij} = \frac{D}{D_t} {}^L\epsilon_{ij} = \frac{\partial {}^L\epsilon_{ij}}{\partial t} \quad 3.111$$

e

$${}^E\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{d}{dt} {}^E\epsilon_{ij} = \frac{D}{D_t} {}^E\epsilon_{ij} = \frac{\partial {}^E\epsilon_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial {}^E\epsilon_{ij}}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial t} \quad 3.112$$

3.3. Métodos de Resoluções de Problemas Elasto-Plásticos

A dependência da história do processo de conformação é originada pela natureza dissipativa de energia na plasticidade dos metais.

Vários métodos analíticos e semi-analíticos têm sido propostos para a análise de problemas de conformação plástica como é apresentado em BRESCIANI FILHO³⁵. Os vários métodos apresentam vantagens e desvantagens de acordo com a análise dos mesmos realizada por THOMSEN³⁶ e colaboradores.

Neste trabalho, a preocupação é com a utilização de um método que seja o mais geral possível, e seja também capaz de conter, em sua formulação, os mais variados fenômenos possíveis de serem observáveis na conformação plástica. O método deve ainda considerar os efeitos oriundos das condições de contorno e das solicitações externas no processo.

O desafio é também construir, através do método a ser escolhido, um critério de conformação através da mecânica da fratura não-linear.

3.4. Método Variacional na Elasticidade e na Plasticidade

O método variacional é, segundo alguns pesquisadores, o mais atualizado para a análise de problemas em suas formulações matemáticas em HILDEBRAND³⁷; na mecânica dos meios contínuos de acordo com SOKOLNIKOFF³⁹; na análise de tensões e de deformações por métodos energéticos segundo RICHARD³⁸; e na aplicação do método dos elementos finitos por ZIENKIEWICZ⁴⁰.

O método consiste na determinação de um vetor-função $u_i(r_j)$ desconhecido, de classe C^1 , satisfazendo um sistema de equações diferenciais parciais dentro de um domínio do espaço e as respectivas condições de contorno impostas pelo problema. Essa função é tal que, quando o vetor-função e suas respectivas derivadas forem substituídas, numa relação integral volumétrica limitada por uma superfície, forma-se uma relação funcional, cuja respectiva variação da origem a uma condição estacionária para o problema. Nessas condições, o vetor-função será um extremo para o problema.

A aplicação do princípio do trabalho virtual é a formulação fraca do problema variacional e surge da transformação do problema de resolver um sistema de equações diferenciais parciais para uma formulação integral, de modo que o vetor-função do deslocamento virtual de uma classe, que exige a continuidade das derivadas parciais de ordem n , passa a ser um vetor-função da classe de continuidade de ordem $n-1$.

A prova do princípio de trabalho virtual, na sua forma mais geral, é apresentada em ZIENKIEWICZ⁴, para os casos que envolvam materiais elásticos lineares e não-lineares. As formulações mais elegantes estão nas provas realizadas por LOVE⁴¹,

RICHARDS³⁸ e SOLKONIKOFF³⁹. O princípio variacional e sua respectiva generalização, introduzido por HILL¹³ em 1948, para aplicações na plasticidade dos metais será objeto de estudo neste trabalho.

3.4.1. Teoremas Gerais da Formulação Variacional

Seja o problema definido na região de domínio V , limitada pela superfície de contorno S , como mostra a figura 3.3.

A equação:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad 3.113$$

é satisfeita em V , bem como a condição de contorno:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad 3.114$$

é satisfeita na superfície S .

onde:

σ_{ij} : é o tensor de tensão

f_i : é o vetor força de campo por unidade de volume

n_j : é o vetor unitário normal à superfície

A formulação fraca é introduzida através de um vetor-função deslocamento arbitrário virtual δu_i e é dada pela definição de trabalho virtual:

$$\int_{\text{Volume}} \delta u_i \left(\sigma_{ij,j} + f_i \right) dV = 0 \quad 3.114$$

A equação 3.114 fornece, após integração por partes, pela utilização do teorema integral de GREEN, de acordo com WYLIE⁴³, a seguinte formulação:

Figura 3.3. - Problema a ser resolvido pelo método variacional num volume V , limitado pelo contorno da superfície S .

$$\int_{vol} (\sigma_{ij} \delta u_{i,j} - \delta u_i f_i) dV + \int_{S_{area}} \delta u_i \sigma_{ij} n_j dS = 0 \quad 3.115$$

No primeiro termo em 3.115, o fator $\delta u_{i,j}$ representa o tensor de deformação virtual. Já o segundo termo $\sigma_{ij} n_j$ é o vetor de tensão t_i .

A equação 3.115, na sua forma compacta, é representada por:

$$\int_{vol} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV - \int_{vol} f_i \delta u_i dV - \int_{S_{area}} t_i \delta u_i dS = 0 \quad 3.116$$

A resolução da equação integral 3.116, pelo método variacional, consiste na utilização de métodos diretos, como os de RAYLEIGH-RITZ, de KANTOROVITCH ou de GALERKIN, todos descritos em RICHARDS³⁸. Já um método indireto é o dos Elementos Finitos, em ZIENKIEWICZ¹¹⁰.

O método de RAYLEIGH-RITZ, consiste em substituir na equação integral 3.116, a função tentativa:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^n C_{ik} \cdot \phi_k(x_1, x_2, x_3) \quad 3.117$$

onde n: é a n-ésima aproximação

As funções $\phi_k(x_1, x_2, x_3)$ devem satisfazer as condições de contornos especificadas pelo problema. A minimização da integral funcional 3.116, fornece um sistema de equações lineares a ser solucionado pela determinação dos coeficientes C_{ik} .

O método de KANTOTOVITCH consiste na separação das funções, de tal modo que:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0}^n \psi_k(x_1) \phi_k(x_2) X_k(x_3) \quad 3.118$$

e para quaisquer duas funções, satisfazendo as condições de contorno, a terceira função será determinada pela resolução da equação de EULER-LAGRANGE, através do método variacional.^{37,38}

O método de GALERKIN é o da resolução da equação diferencial parcial, pela expansão em série de uma função tentativa:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \phi_k(x_1, x_2, x_3) \quad 3.119$$

onde as funções $\phi_k(x_1, x_2, x_3)$ devem satisfazer as condições de ortogonalidades para a determinação das constantes C_k .

Já o método indireto dos elementos finitos é um procedimento numérico para a solução de problemas estruturais e de problemas da mecânica dos meios contínuos, dentro de um determinado grau de precisão especificado. Consiste o mesmo em resolver o funcional da formulação integral, equação 3.115, dentro de uma malha de elementos finitos, através de funções tentativas de configuração do deslocamento de pontos nodais em cada elemento, de modo que haja continuidades das deformações. É um método apropriado a trabalhos com geometrias complexas, COOK⁴⁴.

Um sistema é uma estrutura do meio contínuo sólido e os respectivos carregamentos agindo sobre o mesmo. Um sistema é considerado conservativo se quando o mesmo for deslocado de uma

para outra configuração, ao retornar à situação prévia, as forças que agem sobre o mesmo realizam trabalho nulo, para qualquer que seja o caminho percorrido pela trajetória de carga.

Um campo de deslocamento é admissível se o mesmo não violar as condições internas de compatibilidade ou as condições forçadas de solicitações impostas ao sistema.

Agora, é conveniente definir o conceito do princípio da energia potencial mínima, COOK⁴⁴:

Entre todas as configurações possíveis de um sistema conservativo, aquelas que satisfizerem as equações de equilíbrio do sistema, fazem a energia potencial estacionária em relação às pequenas variações de deslocamentos. Se a condição estacionária for um mínimo, então o equilíbrio do sistema será estável.

3.4.2. Método de HILL do Trabalho Plástico

Se o princípio variacional de trabalho plástico, introduzido simultaneamente por MARKOV⁴⁵ e HILL³⁰, for válido para um material, que obedeça o critério de escoamento de HUBER-VON MISES-HENCKY, satisfaça as relações entre tensões e deformações de PRANDTL-REUSS ou de LEVY-VON MISES, na forma válida para o sistema σ_{ij} , para as seguintes condições:

a) as condições de equilíbrio:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0$$

b) o critério de HUBER-VON MISES-HENCKY

$$\frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = K^2$$

c) as relações de LEVY-VON MISES

$$d \varepsilon_{ij}^P = \sigma'_{ij} d\lambda$$

Então, a taxa com que as forças superficiais agindo no sistema realizam trabalho, é maior que qualquer outra para um outro sistema de tensão σ'_{ij} , numa mesma velocidade de superfície, desde que σ'_{ij} satisfaça as equações de equilíbrio e o critério de escoamento impostos.

HILL⁴⁶ propôs, em 1963, um método geral para a análise de processo de conformação plástica dos metais combinando rigor matemático e flexibilidade, estabelecendo que um bom método de aproximação deve ser capaz de reproduzir e prever os principais fenômenos envolvidos na análise, fornecer informações a respeito das cargas e solicitações mecânicas e ainda ser capaz de avaliar as principais variações dimensionais.

Na análise do método de HILL, é vantajoso estabelecer um vetor unitário normal e externo à superfície de contorno de um volume do metal, sob condição de estar escoando plasticamente.

Se os tensores forem representados como vetores auxiliares num espaço nono-dimensional, sendo ainda o potencial plástico definido por $g(\sigma_{ij})$, então os incrementos de deformações plásticas são dados pelo vetor incremental:

$$d \underline{\varepsilon}^P = \underline{n}_g d\lambda \quad 3.120$$

De acordo com WYLIE⁴³, o vetor $\underline{n}_g$ unitário e normal à superfície potencial :

$$g(\sigma_{ij}, K^2) = 0$$

é definido por:

$$n_g = \frac{\underline{\nabla} g(\sigma_{ij}, K^2)}{|\underline{\nabla} g(\sigma_{ij}, K^2)|} = \frac{\frac{\partial g(\sigma_{ij}, K^2)}{\partial \sigma_{ij}}}{\left| \frac{\partial g(\sigma_{kl}, K^2)}{\partial \sigma_{kl}} \right|} \quad 3.121$$

que na condição de plasticidade, associada fornece a condição:

$$\underline{n}_f \equiv \underline{n}_g$$

HILL propôs uma formulação similar ao do atual teorema do limite superior, como sendo um critério aproximado, mas baseado no procedimento de GALERKIN e KANTOROVICH do método variacional, na seguinte forma:

A condição suficiente para que uma considerada distribuição de tensões tenha propriedades estáticas que satisfaçam as equações de equilíbrio, dentro de um volume V , e também as condições de contornos impostas na superfície S , é que os divergentes tenham taxas líquidas de trabalho nulas na classe estabelecida pelo movimento virtual.

Na linguagem das funções especiais, isso quer dizer que os divergentes devem ser ortogonais aos movimentos virtuais.

A expressão para o enunciado de HILL é dada por:

$$\int_{Vol} \sigma_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial X_i} dV = \int_{S_I} \sigma_j w_j dS - P \int_{S_F} n_j w_j dS + \gamma + \phi$$

sendo o valor de γ , dado por uma das expressões seguintes:

$$\gamma = \int_{S_c} \{ (n_i \sigma_i) n_j + K_{1j} \} w_j dS \quad 3.122b$$

que representa a parcela do trabalho de atrito relacionada com a total aderência na interface material-matriz.

ou

$$\gamma = \int_{S_c} (n_i \sigma_i) (n_j - \mu l_j) w_j dS \quad 3.122c$$

representando a parcela do trabalho relacionada com a presença de atrito na interface material metálico-matriz.

e ainda tem-se:

w_j : é o vetor velocidade ortogonalizante virtual

μ : coeficiente de atrito de Coulumb

Vol: volume da zona de deformação

S_I : superfície de junção das zonas elástica e plásticas

S_F : superfície livre exposta à pressão hidrostática p

S_c : superfície de contato entre matriz e corpo deformante

ϕ é o termo correspondente à descontinuidade de uma superfície Σ . Nessa superfície de descontinuidade, o vetor tração τ_j é tangente à superfície e tem-se:

$$\phi = \int_{\Sigma} \tau_j [w_j] d\Sigma \quad 3.123$$

sendo que $[w_j]$ é a componente tangencial de descontinuidade da velocidade virtual.

O método de HILL foi aplicado por LAHOTI e KOBAYASHI⁴⁷ em problemas de conformação plástica, onde se obteve bons resultados, mas, quando comparado com outros métodos, percebeu-se melhoramentos.

3.4.3. Método dos Limites de PRAGER

O método dos limites, baseados nos enunciados de PRAGER⁴⁸, para análise dos valores extremos, tem sua formulação fundamentada nas condições básicas para a existência de descontinuidades no campo de velocidades. Essas condições básicas são as mesmas elaboradas por HILL⁴⁹ e KACHANOV⁵⁰ na análise de problemas de plasticidade pelo método das linhas de deslizamentos para o caso do estado plano de tensão.

Para um material de LEVY-VON MISES, as partículas sobre uma parte da superfície do contorno S_v , que contém o volume V , movem com uma dada velocidade v_i , enquanto outra porção da superfície S_T do contorno S está sujeita aos vetores de tração T_i . Se o corpo inteiro estiver sob estado de escoamento plástico, é então o objetivo, determinar as componentes do tensor de tensão σ_{ij} e as taxas de deformação $d\epsilon_{ij}$.

Se $S_v \equiv S$, ou seja, envolver toda a superfície, então, as velocidades superficiais devem satisfazer as condições globais de incompressibilidade, de modo que a integral de superfície dos componentes normais seja nula.

Se ao contrário for S_T a superfície S , tal que $S_T \equiv S$, então os componentes dos vetores de tensão devem satisfazer as condições globais de equilíbrio.

Um campo de tensão σ_{ij}^a , definido no corpo de volume V envolvido por uma superfície S , será denominado estaticamente admissível se o mesmo satisfizer as condições de equilíbrio:

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

um critério de escoamento plástico como:

$$\sigma_{ij}' \sigma_{ij}' - 2 k^2 = 0$$

e as condições de contorno sobre S_T , do tipo :

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

Um campo de taxa de deformações $\dot{\epsilon}_{ij}^b$ definido dentro de um corpo de volume V , envolvido por uma superfície S , será considerado cinematicamente admissível, se o mesmo, quando derivado de um campo de velocidade v_i^b , satisfaça: as condições de incompressibilidade:

$$v_{i,i}^b = 0$$

em todo o volume V ,

e ao mesmo tempo, as condições de velocidades na fronteira S_V .

Teorema 1: Entre todos os campos de tensão estaticamente admissíveis, o verdadeiro maximiza a expressão:

$$I = \int_{S_V} \sigma_{ij}^a v_i n_j dS \quad 3.124$$

Teorema 2: Entre todos os campos de deformação cinematicamente admissíveis, o verdadeiro minimiza a expressão:

$$J = \int_V 2^{1/2} K \left[d\epsilon_{ij}^b d\epsilon_{ij}^b \right]^{1/2} dV - \int_{S_T} T_i v_i^b dS \quad 3.125$$

O princípio dos valores extremos para um material, obedecendo as relações de PRANDTL-REUSS, segue as condições postuladas no caso de LEVY-VON MISES, com as condições adicionais seguintes:

$$\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} - 2K^2 = 0 \quad 3.126$$

e

$$\sigma'_{ij} d\sigma'_{ij} = 0 \quad 3.127$$

As taxas de deformações dadas pela relação de PRANDTL-REUSS:

$$d\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma'_{ij} + \frac{d\lambda'}{2G} \sigma'_{ij} \quad 3.128$$

multiplicando 3.126 por σ'_{ij} , usando as condições 3.126 e 3.127, temos:

$$2G d\epsilon_{ij} = \sigma'_{ij} d\sigma'_{ij} + d\lambda' \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = 2K^2 d\lambda'$$

$$d\lambda' = 0$$

$$\text{se } \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} < 2K^2 \text{ ou } \sigma'_{ij} d\sigma'_{ij} = 0$$

e

$$d\lambda' = \frac{G}{K^2} \sigma'_{ij} d\epsilon_{ij}$$

$$\text{se } \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = 2K^2 \text{ ou } \sigma'_{ij} d\sigma'_{ij} = 0$$

Como $d\lambda'$ não pode ser negativo, então a equação seguinte deve ser satisfeita:

$$d\lambda' = \frac{G}{K^2} \sigma'_{ij} d\epsilon_{ij} > 0 \quad 3.129$$

então:

$$\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} > 0$$

$$\text{se ocorrer de } \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = 2K^2 \text{ ou } \sigma'_{ij} d\sigma'_{ij} = 0$$

As relações de PRANDTL-REUSS são finalmente da forma:

$$d\sigma'_{ij} = 2 G d\epsilon_{ij}$$

$$\text{se } \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} < 2K^2$$

ou

$$d\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = 2K^2$$

e

$$\sigma'_{ij} d\epsilon_{ij} \leq 0 \quad 3.130a$$

ou

$$d\sigma'_{ij} = 2G \left(d\epsilon_{ij} - \frac{\sigma'_{kl} d\epsilon_{kl}}{2K^2} \sigma'_{ij} \right) \quad 3.130b$$

$$\text{se } \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = 2K^2 \text{ e } \sigma'_{ij} d\epsilon_{ij} > 0$$

Agora, o campo das taxas de tensões $d\sigma_{ij}^c$, definido em todo o volume do corpo, será estaticamente admissível se ocorrer simultaneamente o equilíbrio em todo o volume V:

$$d\sigma_{ij,j}^c = 0$$

se a restrição for satisfeita:

$$\sigma'_{ij} d\sigma'_{ij} \leq 0 ; \text{ para } \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = 2K^2$$

e se as condições de contorno sobre S_T for:

$$d\sigma_{ij}^c n_j = dT_i ; \text{ sobre } S_T$$

O campo das taxas de deformações $d\varepsilon_{ij}^d$, será cinematicamente admissível se for derivado de um campo de velocidade v_i^d , que satisfaça as condições de incompressibilidade:

$$v_{i,i}^d = 0$$

e, simultaneamente, as condições de velocidades no contorno S_v .

Nas condições estabelecidas para a teoria de PRANDTL-REUSS, tem-se os teoremas seguintes:

Teorema 3: Entre os corpos de tensões estaticamente admissíveis, o verdadeiro minimiza a expressão:

$$K^c = \frac{1}{4G} \int_V d\sigma_{ij}^c d\sigma_{ij}' dV - \int_S d\sigma_{ij}^c v_i n_j ds \quad 3.131$$

Teorema 4: Entre todos os campos de taxas de deformações admissíveis, o verdadeiro minimiza a expressão:

$$L^d = \frac{1}{2} \int_V d\sigma_{ij}^d d\varepsilon_{ij} dV - \int_S dT v_i^d ds \quad 3.132$$

3.4.4. Aplicações dos Teoremas dos Valores Extremos na Conformação Plástica dos Metais

TARNOVSKY⁵² e colaboradores, e KUDO⁵²⁻⁵⁵ foram os primeiros pesquisadores a aplicarem os teoremas dos limites na plasticidade dos metais.

Uma forma de solução de problemas pela aplicação do teorema do limite superior, numa forma expandida, foi realizada por AVITZUR⁵⁶ e simultaneamente por KOBAYASHI^{57,58} que estudaram os problemas de axissimetrias pelo limite superior.

AVITZUR⁵⁹ apresentou soluções para vários tipos de problemas de conformação plástica, através da utilização do método expandido, que consiste em adotar um campo de velocidade possível satisfazendo a constância de volume e as condições de velocidades na superfície do corpo e, ao mesmo tempo, as tensões devem satisfazer o critério de HUBER-VON MISES-HENCKY e as condições de atrito nas interfaces para as componentes tangenciais do vetor de tensão aplicado.

O problema fundamental da presença de descontinuidade nos campos das velocidades cinematicamente admissíveis é o que

permitirá a introdução de um critério de conformabilidade baseado na mecânica da fratura não-linear elasto-plástica.

Se um corpo deformado plasticamente for dividido em várias zonas de deformação plástica, como mostra a figura 3.4, segundo a proposta de AVITZUR⁵⁹, os respectivos vetores de velocidades v_1 e v_2 não serão idênticos, mas a condição de constância de volume exige que suas componentes normais o sejam, então:

Figura 3.4. Fronteiras de descontinuidades no campo de velocidades.

$$v_{n1} = v_{n2} \quad 3.133a$$

As componentes tangenciais são, então, admitidas serem descontínuas na interface entre as zonas I e II, de modo a satisfazer a inequação vetorial e permitir a deformação plástica no interior do corpo por movimentação relativa entre as superfícies em contato:

$$v_1 \neq v_2 \quad 3.134$$

que de acordo com as condições admissíveis, requer que a seguinte condição exista:

$$\Delta v = v_{t1} - v_{t2} \quad 3.135$$

Se ocorrer de se ter na expressão 3.133a, a condição:

$$v_{n1} \neq v_{n2} \quad 3.133b$$

ocorre então uma violação da constância de volume imposta pela mecânica dos meios contínuos e neste caso existe uma liberação de energia para a formação de superfície livre no interior do corpo sólido ou o surgimento de uma trinca.

A utilização da taxa de energia liberada, pelo uso da mecânica da fratura não-linear, através de integrais invariantes, recompõe a parcela de energia perdida na formulação do método do limite superior.

Essas integrais invariantes serão, então, incorporadas nas formulações variacionais para os estudos de conformabilidade plástica dos metais.

3.5. Mecânica da Interação entre Superfícies em Contato na Conformação Plástica: fenômeno do atrito

O problema que ainda permanece insolúvel na busca dos verdadeiros campos de tensões e de deformações é a obtenção de um campo genérico de velocidades verdadeiras.

HILL⁴⁶ propôs que os possíveis campos seriam os ortogonalizáveis, por outro lado AVITZUR⁵⁹ propôs os chamados campos genéricos expandíveis através de um método proposto por KUDO⁵².

A formulação do atrito nas interfaces é dada pela imposição de descontinuidades nas componentes tangenciais de velocidades, e a parcela de potência perdida na formulação do limite superior é suprida pela expressão:

$$\frac{d}{dt} W_s = \int_S \tau |\Delta v| dS \quad 3.136$$

interface

onde:

$\frac{d}{dt} W_s$: é a potência de cisalhamento dissipada

e

$$|\Delta v| = \left| \begin{array}{c} v_{\text{tangencial}} \\ \text{da ferramenta} \end{array} - \begin{array}{c} v_{\text{tangencial}} \\ \text{do metal} \end{array} \right|$$

Dois modelos de atritos serão considerados; o primeiro, apesar de já compreendido por LEONARDO DA VINCI, teve seu enunciado em bases físicas, formulado por AMONTONS⁶², e teve uma contribuição importante de COULOMB⁶¹ que separou o atrito dinâmico do atrito estático, não especificando entretanto os seus mecanismos.

A lei de AMONTONS-COULOMB do atrito se anuncia, como:

$$\tau = \mu p \quad 3.137$$

sendo:

τ : tensão de atrito operando nas interfaces entre duas superfícies em contato, cuja ação da força correspondente obedece a terceira lei de Newton.

p : pressão ou componente normal do vetor de tração atuando nas interfaces.

μ : é o coeficiente de atrito de COULOMB.

Essa lei de COULOMB é válida para baixos valores de pressão, obedecendo às respostas elásticas das camadas próximas às superfícies das interfaces, cuja avaliação macroscópica se dá pela aproximação dos meios contínuos. A figura 3.5 mostra os mecanismos atuantes, segundo AVITZUR⁶².

Na lei de AMONTONS-COULOMB, o coeficiente de atrito é considerado, por simplicidade, independente da pressão, mas é função da natureza das superfícies de contato, do tipo de lubrificante existente entre as superfícies e é influenciado pela temperatura das superfícies. A dificuldade existente na determinação experimental do coeficiente μ , para uso na conformação plástica, pode ser removida pela aplicação do ensaio do anel, proposto por MALE e COCKROFT⁶³, cuja análise do ensaio foi realizada por métodos numéricos através dos estudos de LEE e ALTAN⁶⁴.

A questão dos lubrificantes, que influenciam de modo significativo as condições de atritos nos processos de conformação, têm sido objeto de intensivo estudo por SCHEY⁶⁵;

assim como o estudo do efeito das camadas de revestimentos na estampagem de chapas recebeu contribuição dos trabalhos de BRESCIANI FILHO⁶⁶.

Figura 3.5. - Variação da tensão de cisalhamento em função da tensão de contato AVITZUR⁶².

Nos trabalhos de conformação plástica, as pressões normais nas interfaces são bastante elevadas e, nestas condições, um segundo modelo de atrito tem sido muito utilizado: o chamado modelo proporcional, de camada ou de cisalhamento máximo, onde a tensão de atrito não é proporcional na interface, mas sim à tensão limite de escoamento do material.

Para um material que obedeça o critério de escoamento plástico de HUBER-VON MISES-HENCKY, tem-se:

$$\tau = m \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \quad 3.138$$

sendo:

m : denominado de fator de atrito, é também dependente da natureza das superfícies em contato, da presença ou não de lubrificantes e da temperatura entre outros

Ambas as leis de atrito citadas são fundamentalmente dependentes da velocidade relativa tangencial entre as superfícies.

Se houver caso de lubrificação hidrodinâmica, um terceiro modelo, discutido por AVITZUR⁵⁹, é proposto, de modo tal que:

$$\tau = \eta \frac{\Delta v}{h} \quad 3.139$$

η : coeficiente de viscosidade do fluido

Δv : velocidade relativa tangencial entre duas superfícies separadas por uma dimensão característica h .

h : espessura da película lubrificante.

Os dois primeiros modelos estão relacionados, de modo que seja possível suas conversões recíprocas. Essas conversões, dadas por OROWAN e SHAW, caracterizam o fenômeno de transição existente nos estudos de atritos e suas interações com os materiais. Os modelos OROWAN e SHAW foram estudados por WANHEIM e BAY⁶⁷, e são mostrados nas figuras 3.6. e 3.7.

THOMSEN³⁶ e colaboradores mostram que, no limite da aderência, pela lei de atrito de COULOMB, o estado de tensão é uniaxial em sistema cilindro-metálico-matriz em contato por pressão normal, na forma:

$$-\sigma_z = p = \sigma_o \quad 3.139$$

e pelo critério de HUBER-VON MISES-HENCKY, tem-se:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \quad 3.140$$

Figura 3.6 - Modelo de atrito de OROWAN. Separação do atrito em dois mecanismos independentes. Região I - modelo elástico. Região II - modelo plástico in: WANHEIM e BAY⁶⁹.

Figura 3.7 - Modelo de atrito de SHAW. Mecanismo de atrito apresentando transição.

Região I - modelo elástico

Região III - modelo plástico

Região II - região de transição

em : WANHEIM e BAY⁶⁹

O modelo de OROWAN, discutido em WANHEIM e BAY⁶⁹, mostra que, na condição limite:

$$\tau_{\max} = \mu p \quad 3.141$$

Substituindo 3.141 por 3.140, obtem-se:

$$\mu = \frac{\tau_{\max}}{p} = \frac{\sigma_o / \sqrt{3}}{\sigma_o} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 3.142$$

No modelo de atrito de camada:

$$\tau_{\max} = m \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \quad 3.143$$

e atinge um máximo quando m for a unidade.

Relacionando 3.142 e 3.143, obtém-se a conversão:

$$\mu \approx \frac{m}{\sqrt{3}} \quad 3.144$$

As equações 3.141, 3.143 e 3.144 são adequadas ao estudo proposto neste trabalho, mas são, na realidade simplificações de uma situação prática bastante complexa, como atestam os trabalhos de SHIMA⁶⁸ e colaboradores, de HALLING⁶⁹ e de NAGARAJ⁷⁰.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS - Capítulo 3

1. JOHNSON, W and MELLOR, P.B. *Engineering Plasticity*. Ellis Horwood, Chichester, England, 1983, pp.23-27.
2. ORLANDER, R. *Fundamental Aspects of Nuclear Reactor Fuel Elements*. Chapter 1 - Mechanical Properties of UO_2 , Technical Information Center of US Department of Energy, Washington, DC, 1976, pp.333-372
3. POLUKHIN, P.; GORELIK, S. and VORONTSOV, V. *Physical Principles of Plastic Deformation*. Chapter 13 - Ductility and Deformation of Metals and Alloys. AFANASYEV, V. (tradutor), Mir, Moscow, 1983. pp.373-437.
4. GAROFALO, F. *Fundamental of Creep and Creep Rupture in Metals*. Chapters 2,3,4,5 e 6, MacMillan, New York, 1965, pp.27-175.
5. ASHBY, M.F. A first report on deformation mechanism maps. *Acta Metallurgica*, 20:887-897, Jul.1972.
6. GANDHI, C. and ASHBY, M.F. Fracture mechanism maps for materials which cleave: FCC and HCP metals and ceramics. *Acta Metallurgica*, 27(10):1565-1602, 1979.
7. ASHBY, M.F.; GANDHI, C. and TAPLIN, D.M.R. Fracture mechanism maps and their construction for FCC metals and alloys. *Acta Metallurgica*, 27(5):669-729, 1979.
8. MILLER, D.A. and LAGNDON, T.G. Creepfracture maps for 316 stainless steel. *Metallurgical Transactions A*, 10A:1635-1641, Nov.1979.
9. ZENER, C. and HOLLOMON, J.H. Effect of strain rate upon plastic flow of steel. *Journal of Applied Physics*, 15:22-32, 1944.
10. DADRAS, P. Flow stress equations for type 304 stainless and AISI 1055 steels. *Transactions of the ASME Journal of*

Engineering Materials and Technology, 107(2):97-100, 1985.

11. SHERBY, O.D. and WADSWORTH, J. Superplasticity and superpasticity forming processes. *Material Science and Technology*, 1(11):925-936, 1985.
12. PRAGER, W. Non-isothermal plastic deformation. *Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie von Wetenschappen*, Amsterdam, 61:176-182, 1958; Op.Cit. in: ZYCZKOWSKI, M. Combined Loadings in the Theory of Plasticity. PMN - Polish Scientific Publisher. Warszawa, 1981, pp.193-195.
13. HILL, R. A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity. *Quartely Journal of Mechanics and Apllied Mathematics*, 1:18-28, 1948.
14. KACHANOV, L.M. *Fundamentals of the Theory of Plasticity*. Chapter II - Equations of plastic state. Moscow, Mir, 1974. pp.48-105.
15. PRANDTL, L. Spannungsverteilung in plastischen Körpern. *Proceedings of 1st International Congress of Mechanics*. Delft, 1924. pp.43-54. Op. cit. Ref. (20) do capítulo 1.
16. REUSS, A. Berücksichtigung der Elastischen Formänderungen in der Plastizitätstheorie. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Berlin, 10(3):266-274, 1930.
17. LEVY, M. Mémoire sur les équations générales. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Academie des Sciences*, Paris, 70:1323-1325; 1870.
18. VON MISES, R. Mechanik der festen körper. In: *Plastich Deformablen Zustant*. Göttinger Hachrichten, Mathematisch - Physikalishe Klasse, 1(4):1913, 1913.
19. HENCKY, H.Z. Zur theorie plastischer deformationen und der

- hierdurch im material hervorgerufenem nebenspannungen.
Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Berlin,
4:323, 1924. In: SLATER, R.A.C. Op. cit., ref. (7) do
capítulo 1, e HILL, R. op. cit. ref. (2) do capítulo 1.
20. NADAI, A. Der Beginn des Fließvorganges in einem tordiertem
stab, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik
Berlin, 3(3):442-444, 1923.
 21. ZYCKOWSKI, M. *Combined Loadings in the Theory of Plasticity*.
PWN - Polish Scientific Publishers, Varsóvia, 1982.
 22. LUDWICK, P. Elemente der Technologischen Mechanik, Berlin,
Springer, 1909, in: JOHNSON, W and MELLOR, P.B. *Engineering
Plasticity*. Ellis Horwood, Chichester, England, 1983, pp.15.
 23. HOLLOMON, J.H. Tensile Deformation. *Transactions of AIME*,
162:268-290, 1945.
 24. VOCE, E. The relationship between stress and strain for
homogeneous deformation. *The Journal of the Institute of
Metals*, 74:537-562, 1948.
 25. SWIFT, H.W. Plastic instability under plane stress. *Journal of
Mechanics and Physics of Solids*, 1(1):1-18, 1952.
 26. RAMBERG, W. and OSGOOD, W. Description of stress-strain curves
by three parameters. NACA TN 902, Jul.1943. Op.Cit. in:
SLATER, R.A.C. *Engineering Plasticity*. Mac Millan, London,
1977, pp.131.
 27. LOVE, A.E.H. *A Treatise on the Mathematical Theory of
Elasticity*. Chapter VII - General theorems. Cambridge
University, 1934, pp.97-108.
 28. PRAGER, W. On isotropic materials with continuous transition
from elastic to plastic state. *5th International Congress*

of *Applied Mechanics*, Cambridge, MA, 1938. pp.234-237.

29. Op.Cit. Ref.21, pp.199-205.
30. HILL, R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings of the Royal Society. London. Series A*, nº 193, 1948, pp.281-297.
31. ----- . Theoretical plasticity of textured aggregates. *Mathematical Proceedings of Cambridge Phylosophical Society*. 85:179-191, 1979.
32. FUNG, Y.C. *Foundations of solid mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965, pp.31-153.
33. VLASOV, V.Z. The Compatibility Equations in Curvilinear Coordinates. *PMM - Prikladnaya Matematika e Mekhanika*. 8(4):301-306, 1944.
34. NADAI, A. *Theory of Flow and Fracture of Solids*. Chapter 4 - Behavior of Matter under High Pressure, New York, McGraw-Hill, 1950, pp. 33-37.
35. BRESCIANI FILHO, E. (coordenador). *Conformação Plástica dos Metais*. Volumes 1 e 2. Editora da UNICAMP, Campinas-SP, 1986. pp.86-101.
36. THOMSEN, E.G.; YANG, C.T. and KOBAYASHI, S. *Plastic Deformation in Metal Processing*. Chapter 10 - Some methods of solution of forming problems. Mac Millan, New York, 1965, pp. 158-216.
37. HIDELEBRAND, F.B. *Methods of Applied Mathematics*. Chapter two: Calculus of variations and applications. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965, pp.119-121.
38. RICHARDS, T.H. *Methods in stress analysis*. Chapter six: Variational principles in solid continuum mechanics. Elli

Horwood, Chichester, England, 1977, pp.211-270.

39. SOKOLNIKOFF, I.S. *Tensor Analysis - theory and applications to geometry and mechanics of continua*. Second edition, chapter six - Mechanics as Continuous Media. John Wiley, New York, 1964, pp.313-352.
40. ZIENKIEWICZ, O.C. *The finite element method*. Chapter three: Generalization of the Finite Element Concepts - Weighted Residual and Variational Approaches. 3rd edition, Mc-Graw-Hill, London, 1977, pp.42-92.
41. LOVE, A.E.H. *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Chapter VII - General Theorems. Cambridge University, London, 1934, pp.166-175.
42. HILL, R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Clarendon, Oxford, 1950. Chapter III - General Theorems, pp.50-69.
43. WYLIE, C.R. *Advanced Engineering Mathematics*. McGraw-Hill, New York, 1975. pp.650-658.
44. COOK, R.D. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Chapter 3 - Potential Energy and the Rayleigh - Ritz Method. John Wiley, New York, 1981, pp.56-76.
45. MARKOV, A.A. On variational principles in the theory of plasticity. *PMM - Prikladnaya Matematika i Mekhanika (Soviet Journal)*. 11:339-350, 1947.
46. HILL, R. General Method of analysis for metal-working processes. *International Journal of Mechanical Science*. 16:521-540, 1974.
47. LAHOTI, G.D. and KOBAYASHI, S. On Hill's General Method of Analysis for Metal-working Processes. *International Journal of Mechanical Science*. 16:521-540, 1974.

48. PRAGER, W. and HODGE, P.G. *Theory of Perfectly Plastic Solids*, John Wiley, New York, 1951, pp. 123-168 e pp. 231-257.
49. HILL, R. *Op. Cit.* Referência 42, pp.128-160.
50. KACHANOV. *Op.Cit.* Referência 14, pp.148-242.
51. TARNOVSKI, I, Ya.; POZDEEV, A.A. and GANAGO, O.A. *Deformation and Forces in Metal Forming*. National Science and Technology Co.; Machine Building Literature, Moscow, 1959, (Russian), *Op.Cit.* in AVITZUR, B. and VAN TYNE, C.J. Ring Forming: An upper bound approach. Part 1: flow pattern and calculation of power. *Transaction of the ASME Journal of Engineering for Industry*. 104:231-236, 1982.
52. KUDO, H. Some analytical and experimental studies of axisymmetric - cold forging and extrusion. Part I. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2:102-127, 1960.
53. -----. Some analytical and experimental studies of axisymmetric - cold forging and extrusion. Part II. *International Journal of Mechanics Sciences*. 3:91-117, 1961.
54. -----.An upper-bound approach to plane strain forging and extrusion. Part I. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1:57-83, 1960.
55. -----.An upper-bound approach to plane strain forging and extrusion. Part II. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1:229-252, 1960.
56. AVITZUR, B. Forging of hollow disk. *Israel Journal of Technology*. 2:295-304.
57. KOBAYASHI, S. Upper-bound solutions of axisymmetric forming problems - I, *Transactions of the Journal of Engineering for Industry*, May, 1964, pp.122-126.

58. ----- . Upper-bound solutions of axisymmetric forming problems - II, *Transactions of the Journal of Engineering for Industry*, May, 1964, pp.326-332.
59. AVITZUR, B. *Metal Forming: processes and analysis*. McGraw-Hill, New York, 1968, pp.77-491.
60. AMONTONS, G. *De la Resistance Cousue dans les Machines, Histoire de L'Academie Royale des Sciences avec les Mmoires de Mathematique et de Physique*, 1699. pp.206.
61. COULOMB, C.A. *Memoires de Mathematique et de Physics de L'Academie Royale des Sciences*. 1781, p. 161. Op.Cit. in: THOMSEN, E.G. et alii..., Referência 36, pp.217-229.
62. AVITZUR, B. *Handbook of Metal Forming*, pp. 945-971.
63. MALE, A.T. and COCKCROFT, M.G. A method for determination of the coefficient of friction of metals under conditions of bulk plastic deformation. *Journal of the Institute of Metals*. 63:38-46, 1964.
64. LEE, C.H. and ALTAN, T. Influence of flow stress and friction upon metal flow in upset forging of rings and cylinders. *Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry*. Aug.1972, pp.775-782.
65. SCHEY, J. (editor). *Metal Deformation Processes: friction and lubrication*. Dekker, New York, 1970.
66. BRESCIANI FILHO, E. *Conformação Plástica de Chapas de Aço Galvanizadas*. Tese de Livre-Docência, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1980.
67. WANHEIM, T. and BAY, A model for friction in metal forming processes. *Annals of the CIRP*. 26(1):189-194, 1978.
68. SHIMA, S.; WATANABE, Y. and OYANE, M. Effect of tool-workpiece

contact length on lubrication in metal forming. *Transactions of the ASME Journal of Tribology*. 107(2):211-215, 1985.

69. HALLING, J. A contribution to the theory of friction. *Wear*, 37(1):169-184. 1976.
70. NAGARAJ, H.S. Elastoplastic contact of bodies with friction under normal and tangential loading. *Transactions of the ASME Journal of Tribology*. 106(4):519-526, 1984

4. MECÂNICA DA FRATURA NÃO-LINEAR E AS INTEGRAIS INVARIANTES

4.1 Fundamentos da Mecânica da Fratura Linear e Não-Linear

A fratura mecânica é definida como uma disciplina que estuda a possibilidade da ocorrência de falhas e rupturas numa estrutura, causada pela propagação de um defeito presente e predominantemente do tipo trinca, BRUST¹. Apesar de haver um grau elevado de complexidade nos mecanismos microestruturais que ocasionam a fratura dúctil, segundo JENNER e DODD², tem havido um número grande de tentativas para descrever os processos de fraturas. Algumas teorias são de natureza fenomenológica, ou seja, não consideram os efeitos das mudanças microestruturais, pelo contrário, são resultados de análises teóricas, baseadas em observações do comportamento microestrutural, onde o trabalho de BATES³ descreve as principais teorias desses tipos.

Com o objetivo de construir um critério de conformabilidade, fundamentado na mecânica da fratura, este trabalho será orientado pela concepção fenomenológica.

A mecânica da fratura linear elástica é limitada às condições de escoamento plástico em uma zona que contendo a ponta da trinca, é ao mesmo tempo de pequena dimensão. É virtualmente impossível satisfazer as condições da presença de trincas em zonas plásticas de pequenas dimensões para materiais que possuam alta tenacidade à fratura, baixa resistência mecânica, sofra de extensiva deformação plástica e que tenha a ponta da trinca sofrendo um arredondamento antes do início da sua propagação. A necessidade de se incluir a influência da deformação plástica, que acompanha a iniciação e o subsequente crescimento estável da trinca, é o que tem sido o principal fator para o

desenvolvimento da mecânica da fratura não-linear, KANNINEN⁴.

Uma antiga tentativa de modelar o comportamento de uma trinca dentro de uma matriz plástica se deveu a DUGDALE⁵, que considerou a dimensão da zona plástica muito maior que a espessura da chapa, o qual modelou esta zona como sendo uma faixa escoada à frente da ponta da trinca, considerando o material elástico - perfeitamente plástico. O mesmo pesquisador postulou que o efeito do escoamento era aumentar a dimensão da trinca pela extensão da zona plástica, dentro de um meio infinito, submetido a uma tensão remota e uniforme, como mostra a figura 4.1.

O modelo da figura 4.1 é representado pela fórmula:

$$u_2(a, 0^+) - u_2(a, 0^-) \equiv \delta_t = \frac{8}{\pi} \frac{\sigma}{E} a \ln \left[\sec \frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_2} \right] \quad 4.1$$

É possível observar ser δ_t uma medida da deformação que ocorre na zona plástica. Dentro deste conceito, um critério de fratura elasto-plástica, pode ser expresso, em função de um valor crítico, onde no início do crescimento da trinca, tem-se:

$$\delta_t = \delta_{tc}$$

onde δ_{tc} é um valor crítico, considerado como uma propriedade material e δ_t é o deslocamento de abertura da trinca.

BROEK⁶ mostra uma revisão extensa desse critério de fratura e alguns métodos para a medida de δ_t .

Posteriormente, ter-se-á $J = \sigma_0 \delta_t$ e, portanto:

$$J = \frac{8}{\pi} \frac{\sigma_0^2}{E} a \ln \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_0} \right) \right] \quad 4.2$$

onde a é a distância de propagação da trinca

Figura 4.1 - Modelo de DUGDALE para fratura não-linear

A definição de fratura dúctil em sólidos cristalinos envolve a quebra de ligações atômicas, onde a deformação plástica precede a formação de trincas criando, conseqüentemente, um número elevado de problemas complexos. Esses problemas estão relacionados com os defeitos de redes cristalinas. Os defeitos respondem por si só às forças impostas no sólido. As forças de tração, compressão, cisalhamento e hidrostática podem agir nos defeitos através das várias de suas combinações, provocando o surgimento de campos de tensões e de deformações.

Os campos de tensões e de deformações, então criados, deverão ser conhecidos em todo o corpo sólido, principalmente nas regiões onde as trincas se iniciam e eventualmente se propagam, para possibilitar o desenvolvimento do estudo dos mecanismos microscópicos de fraturas.

Já a análise macroscópica pode ser realizada a partir do conhecimento das condições experimentais, como: dados de tensões e de deformações, geometria da peça de ensaio e observações óticas. Por exemplo, a iniciação e a propagação de trincas requerem o conhecimento das informações sobre os processos que ocorrem dentro do corpo de teste, em uma escala que exceda a resolução ótica do microscópio em uso, WISDORF⁷.

A caracterização macroscópica da fratura fornece parâmetros importantes para descrever os processos de fraturas, de modo que medidas laboratoriais possam ser utilizadas para predição das falhas nas aplicações estruturais de uma peça.

Como a mecânica da fratura linear considera o conceito que relaciona tensões e condições de tensões nas trincas e especialmente nas suas pontas como seu objeto de estudo, então a

introdução do fator de intensidade de tensão tem sido provado na prática ser bastante providencial, de acordo com ZHUANG⁸, e o mesmo é da seguinte forma:

$$K = \sigma(2\pi r)^{1/2} \quad 4.3$$

sendo:

σ : tensão nominal

r : distância radial do ponto longe da ponta da trinca

Quando o valor de r tender para zero, na expressão 4.3, o valor de K atinge um valor crítico K_c e neste caso a tensão σ tende para valores infinitos. Mas o material deve, localmente, escoar plasticamente para um valor de tensão σ igual à tensão de escoamento σ_0 , consequentemente uma zona plástica de raio r_p se forma na ponta da trinca:

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{K}{\sigma_0} \right]^2, \text{ para estado plano de tensão} \quad 4.4a$$

$$r_p = \frac{1}{6\pi} \left[\frac{K}{\sigma_0} \right]^2, \text{ para estado de deformação plana} \quad 4.4b$$

Três modos de desenvolvimento de trincas existem na mecânica da fratura linear elástica: modo de abertura, modo de cisalhamento e modo de rasgamento, em KANNINEN⁹, com as seguintes respectivas intensidades de tensão: K_I , K_{II} , K_{III} .

A mecânica da fratura linear teve todo seu desenvolvimento derivado dos trabalhos de GRIFFITH¹⁰ que propôs

um critério de ruptura pela propagação da trinca, baseado na idéia de diminuição da energia potencial elástica no corpo sólido, provocada pela liberação de energia para a formação de superfícies livres.

A energia potencial elástica armazenada na trinca é:

$$U_{\text{elastica}} = - \frac{\pi a^2 \sigma^2}{E} \quad 4.5$$

e a energia de formação de duas superfícies livres é dada por:

$$U_{2\Delta} = 2 (2 a \gamma_{\Delta}) \quad 4.6$$

γ_{Δ} : é energia específica de formação de superfície livre

a : semi-comprimento de trinca

A variação de energia no sistema, devido à propagação da trinca, é dada pela condição de instabilidade:

$$\frac{\partial U_{\text{total}}}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left\{ U_{\text{elastica}} + U_{\text{superfície livre}} \right\} = 0$$

ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left\{ - \frac{\pi a^2 \sigma^2}{E} + 4a \gamma_{\Delta} \right\} = 4\gamma_{\Delta} - \left(\frac{2\pi \sigma^2 a}{E} \right) = 0$$

onde finalmente a tensão crítica é dada por:

$$\sigma = \left\{ \frac{2E \gamma_{\Delta}}{\pi a} \right\}^{1/2} \quad 4.7$$

válida para o estado plano de tensão.

No caso do estado plano de deformação, substituir E por:

$$E/(1-\nu)^2$$

O caso tridimensional é modelado segundo uma esferóide achatada nos polos e possui uma expressão similar à de GRIFFITH, e a mesma foi proposta por SACK¹¹ em 1947.

O cálculo da concentração de tensão na região perto da ponta da trinca é baseado no modelo elástico de INGLIS¹².

O modelo de fratura de INGLIS-GRIFFITH-SACK é válida apenas para materiais frágeis, nos quais uma trinca se propaga com uma velocidade de cerca de 38% da velocidade de propagação do som no meio material, para uma tensão resolvida menor que a tensão de escoamento do material como foi previsto por MOTT¹³.

O modelo de GRIFFITH é irrealístico para a maioria dos metais, porque os mesmos não são verdadeiramente frágeis. Uma correção, devida a OROWAN¹⁴, acrescenta ao modelo anterior uma parcela de energia correspondente àquela dissipada pela deformação plástica. Essa correção explica a alta tenacidade à fratura presentes nos materiais metálicos, e é dada na forma:

$$\gamma_e = \gamma_d + \gamma_p \quad 4.8$$

WILLIAMS¹⁵ e IRWIN¹⁶ complementaram o modelo de INGLIS-GRIFFITH-SACK, corrigido por OROWAN, apresentando as seguintes formulações, segundo as notações algébricas de ERDOGAN¹⁷, figura 4.2:

a) Modo I ou da abertura da trinca no estado plano de deformação:

$$\sigma_{ij} = f_I(r) g_{ij}(\theta) \quad 4.9a$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad e \quad \sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad 4.9b$$

b) Modo II ou do cisalhamento (arrastamento) da trinca no estado plano de deformação:

$$\sigma_{ij} = f_{II}(r) g_{II}^{ij}(\theta) \quad 4.10a$$

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad e \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad 4.10b$$

c) Modo III ou estado do rasgamento da trinca no estado plano de deformação:

$$\sigma_{ij} = f_{III}(r) g_{III}^{ij}(\theta) \quad 4.11a$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0 \quad 4.11b$$

para as seguintes condições e fatores de intensidade de tensão, K_I, K_{II} e K_{III} :

$$f_{I_1}(r) = K_I (2\pi r)^{1/2} \quad 4.11c$$

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r)^{1/2} \sigma_{xy} \quad 4.12$$

$$g_{I_{xx}}(\theta) = \cos(\theta/2) \left[1 - \sin(\theta/2) \sin\left(-\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad 4.13a$$

$$g_{I_{yy}}(\theta) = \cos(\theta/2) \left[1 + \sin(\theta/2) \sin\left(-\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad 4.13b$$

$$g_{I_{xy}}(\theta) = \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos\left(-\frac{3\theta}{2}\right) \quad 4.13c$$

$$f_{II}(r) = - (2\pi r)^{1/2} K_{II} \quad 4.14$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r)^{1/2} \sigma_{xy} \quad 4.15$$

$$g_{II}^{xx}(\theta) = \text{sen } (\theta/2) \left[2 \cos (\theta/2) \cos \left(-\frac{3\theta}{2} \right) \right] \quad 4.16a$$

$$g_{II}^{yy}(\theta) = \text{sen } (\theta/2) \cos(\theta/2) \cos \left(-\frac{3\theta}{2} \right) \quad 4.16b$$

$$f_{III}(r) = -K_{III} (2\pi r)^{1/2} \quad 4.17$$

$$g_{III}^{xz} = \text{sen } (\theta/2) \quad 4.18a$$

$$g_{III}^{yz} = \cos (\theta/2) \quad 4.18b$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r)^{1/2} \sigma_{zy} \quad 4.19$$

Figura 4.2 Representação geométrica do campo de tensões numa frente de trinca

Para converter os casos para o estado plano de tensão fixar a tensão $\sigma_{zz}=0$ e substituir ν por $\frac{\nu}{1+\nu}$.

As taxas de liberação de energia, associadas a uma extensão incremental de trinca são da forma:

$$G_I = K_I^2/E ; \text{ estado plano de tensão}$$

$$G_I = (1 - \nu^2) G_I ; \text{ estado plano de deformação}$$

$$G_{II} = K_{II}^2/E ; \text{ estado plano de tensão}$$

$$G_{II} = (1 - \nu^2) G_{II} ; \text{ estado plano de deformação}$$

$$G_{III} = (1 + \nu) K_{III}^2/E$$

No caso de extensão da trinca sob condição de carregamento combinado, obtém-se o seguinte:

$$G_{\text{total}} = G_I + G_{II} + G_{III} \quad 4.20$$

As limitações da mecânica da fratura linear elástica levou SANDERS¹⁸ a propôr , em 1960, um novo critério de propagação de trinca baseado em uma formulação dada por uma integral da linha , de modo que a mesma fosse independente da trajetória de integração. Essa proposta de SANDERS foi desenvolvida seguindo os trabalhos de ESHELBY¹⁹ que estudou defeitos em sólidos cristalinos modelados dentro da teoria dos meios contínuos, e o mesmo sugeriu a integração de linha em torno de região contendo

defeitos em analogia à teoria eletrostática.

Em 1967 e 1966, CHEREPANOV²⁰ e RICE²¹, independentemente, formalizaram essa proposta de SANDERS para os materiais elasto-plásticos, apoiadas na teoria da deformação plástica de HENCKY.

Para os materiais metálicos de interesse para os processos de conformação plástica, o modo de fratura dúctil é o mais importante a ser considerado nos estudos da mecânica da fratura e o mesmo ocorre segundo um comportamento não-linear, de acordo com DIETER²².

A natureza altamente experimental dos estudos da fratura dúctil, considerando a sua iniciação e propagação, levou ao desenvolvimento de um método de ensaio cuja tentativa era a de relacionar as grandezas de propriedades mecânicas e o estado de tensão na região perto da ponta da trinca com o denominado deslocamento de abertura da trinca δ_T .

McMEEKING²³ propôs a seguinte expressão, válida para alguns metais ensaiados no estado plano de deformação:

$$\delta_T = 0,55 \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{(1+\nu)(1+n)}{nE} \right\}^n (1-\nu^2) \frac{K^2}{E} \quad 4.21$$

onde:

δ_T : COD deslocamento da abertura da trinca

n : expoente de encruamento na fórmula de HOLLLOMON

K : fator de intensidade de tensão

σ_0 : tensão de escoamento do material

ν : razão de POISSON

E : módulo de elasticidade ou de YOUNG

O modelo experimental de McMEEKING tenta relacionar a propagação da fratura dúctil com a abertura da trinca e mostra, do modo geral, a forte não-linearidade do processo com a dependência funcional de δ_T :

$$\delta_T = f(K^2) \quad 4.22$$

sendo: K, de acordo com as equações 4.12, 4.15 e 4.19, do tipo:

$$K = f(\sigma_{ij}) \quad 4.23$$

O fator de intensidade de tensão K, é um parâmetro pontual e o mesmo é de difícil avaliação, mesmo com o auxílio de avançados métodos computacionais.

4.2. Teorema de NOETHER para as Integrais Invariantes

As integrais invariantes são parâmetros de campos e como tal são solidamente construídas dentro da mecânica dos meios contínuos e dentro de concepções da teoria contínua das discordâncias. Nessas integrais serão sempre considerados volumes e regiões envolvendo trincas e defeitos.

A contribuição de EMMY NOETHER²³ [1918] para o cálculo de variações consistiu em dois teoremas para as soluções das equações de EULER-LAGRANGE, ambos objetivando resolver problemas de integrais simples e múltiplas. NOETHER mostrou que se a integral for invariante sob um grupo de mapeamento de funções para outro grupo de funções, as funções estacionárias devem então

satisfazer as correspondentes condições restritivas que no caso de problemas de integração simples, a solução toma a forma da primeira das integrais das equações de EULER-LAGRANGE. A primeira das integrais inclui as leis de conservação da física e da mecânica dos meios contínuos.

O teorema de NOETHER é mostrado a seguir como sendo:
para um grupo de transformações:

$$x_{\mu} \longrightarrow x'_{\mu} = x_{\mu} + \delta x_{\mu} \quad 4.24a$$

$$\phi^{\alpha}(x) \longrightarrow \phi'^{\alpha}(x') \equiv \phi^{\alpha}(x) + \delta \phi^{\alpha}(x) \quad 4.24b$$

for tal que:

$$\int_{V'} \mathcal{L}[\phi'^{\alpha}(x'), \phi'^{\alpha},{}_{,\nu'}(x')] d^4x \quad 4.24c$$

para todo o volume V' ,

então:

$$\frac{\partial \ell_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0 \quad 4.24d$$

onde:

$$\ell_{\mu} = \left(\mathcal{L} \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{\alpha},{}_{,\mu}} \phi^{\alpha},{}_{,\nu} \right) \delta x_{\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{\alpha},{}_{,\mu}} \delta \phi^{\alpha} \quad 4.24e$$

A equação 4.24e é a expressão da quantidade conservada.

O teorema de NOETHER está demonstrado em CUSHING²⁴.

4.3. Integrais Invariantes e a Mecânica da Fratura Não-Linear

(Leis da Conservação da Mecânica dos Meios Contínuos)

As leis de conservação da mecânica dos meios contínuos são baseadas no teorema de NOETHER, que estimulou ESHELBY¹⁹ a

introduzir o conceito de força sobre uma singularidade elástica. E isso foi devido ao grande interesse nos estudos das imperfeições em redes cristalinas da física do estado sólido de um lado, e ao desejo de se modelar tais imperfeições microestruturais dentro do campo da elasticidade clássica com a introdução do conceito de forças sobre uma singularidade elástica.

A força, nesse tipo de singularidade, foi definida como sendo o gradiente negativo da energia total do corpo em consideração em relação à mudança da posição do defeito no corpo. Uma singularidade elástica pode ser uma discordância, uma inclusão, uma vacância ou outros defeitos. ESHELBY mostrou que a força em tal defeito seria o resultado da integração sobre qualquer superfície incluindo o defeito. Na ausência de defeitos, concluiu ele, a integral de superfície seria nula e então uma lei de conservação poderia ser estabelecida.

As pesquisas sobre mecânica da fratura plana realizadas por RICE²¹ sem o conhecimento dos trabalhos anteriores, conforme HERRMANN²⁵, levou-o a representar a força de extensão de uma trinca de IRWIN¹⁶, como sendo uma integral independente do caminho de integração, denominada de integral-J de RICE e a mesma mostrou ser de grande utilidade prática.

As pesquisas de RICE estão intimamente relacionadas às investigações de SANDERS¹⁸ e CHEREPANOV²⁰.

KNOWLES e STERNBERG²⁶, baseados no trabalho de ESHELBY e no teorema de NOETHER, descobriram outras integrais invariantes denominadas por BUDIANSKY e RICE²⁷ de integral-L e integral-M.

Essas leis de conservação foram estabelecidas para os problemas do tipo deformação bidimensional, mostrados na figura

4.3, onde o vetor deslocamento relativo u_i depende apenas das coordenadas x_1 e x_2 são as seguintes:

a) Integral-J

$$J = \oint_C \left(W(\epsilon_{ij}) dx_2 - T_i u_{i,1} \right) dl \quad 4.25$$

para C: contorno fechado no plano definido pelos eixos x_1 e x_2

e $W(\epsilon_{ij})$ é a densidade de energia de deformação

T_i : vetor de tensão atuando externo à curva C

Na realidade, a integral-J é o primeiro componente de um vetor cujos componentes são definidos por:

$$J_k = \oint_C \left(W n_k - T_i u_{i,k} \right) dl \quad 4.26$$

onde n_k é a normal externa à curva C, mas contida no mesmo plano.

Figura 4.3 Geometria para aplicação das integrais J e M

A densidade de energia de deformação $W(\varepsilon_{ij})$ é dependente da deformação:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad 4.27$$

e as tensões relacionadas ao vetor de tensão T_i na curva C são dadas por:

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad 4.28$$

onde as tensões σ_{ij} satisfazem a relação:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ji}} \right) \quad 4.29$$

e

$$\sigma_{ij,i} = 0 \quad 4.30$$

As novas integrais de KNOWLES-STERBERG são para o caso didimensional:

$$L = \oint_C \epsilon_{3ij} \left(W x_j n_i + T_i u_{j,i} - T_k u_{k,i} x_j \right) dl \quad 4.31$$

e

$$M = \oint_C \left(W x_i n_i - T_k u_{k,i} x_i \right) dl \quad 4.32$$

sendo: ϵ_{ijk} o tensor alternante

No caso tridimensional as integrais invariantes generalizam-se para:

$$J_k = \int_S \left(W n_k - T_i u_{i,k} \right) dS \quad 4.33$$

$$L_k = \int_S \epsilon_{kij} \left(W x_j n_i + T_i u_{j,i} - T_l u_{l,i} x_j \right) dS \quad 4.34$$

$$M = \int_S \left(W x_i n_i - T_{j,i} u_{j,i} x_i - \frac{1}{2} T_i u_i \right) dS \quad 4.35$$

sendo, nesses casos:

S uma superfície fechada cuja normal externa é n_i .

Através de cinco teoremas, KNOWLES e STERNBERG²⁶ provaram que as fórmulas dadas por 4.25 a 4.35 são leis de conservação:

ESHELBY¹⁹ e RICE²¹ mostraram que a integral- J_k pode ser interpretada como taxa de liberação de energia quando uma cavidade ou ponta de uma trinca transladar relativamente de uma posição para outra no corpo material. BUDIANSKY e RICE²⁷ provam que as integrais $-L_k$ e $-M$ também possuem interpretações similares, sendo também válidas para análises de problemas da elasticidade não-linear.

A integral- J_k , a integral- L_k e a integral- M são conhecidas como taxas de liberação de energia para translação, rotação e expansão auto-similar, respectivamente.

Em 1980, KISHIMOTO, AOKI e SAKATA²⁸ apresentaram a integral- $\hat{J}$ como sendo a taxa do fluxo de energia para uma região de processo envolvendo a propagação e extensão de trincas. Essa integral é uma extensão da integral- J de RICE e inclui a existência de uma região de processo de fratura em conjunto com os efeitos das deformações plásticas, forças centrais de corpo, deformações térmicas e inércia material.

A formulação de KISHIMOTO²⁸ e colaboradores é a que segue:

(a) Equação do balanço de energia

A equação de movimento de um sólido é dada por:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad 4.36$$

multiplicando ambos os lados da equação 4.36 pela velocidade u_i e integrando no elemento de volume, obtém-se:

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + F_i) \dot{u}_i dV = \int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i dV \quad 4.37$$

A transformação da integral da esquerda leva à formulação:

$$\begin{aligned} \int_V (\sigma_{ij,j} \dot{u}_i) dV &= \int_V (\sigma_{ij} \dot{u}_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} dV = \\ &= \int_S T_i \dot{u}_i dS - \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV \end{aligned} \quad 4.38$$

então:

$$\int_S T_i \dot{u}_i dS + \int_V F_i \dot{u}_i dV = \int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i dV + \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV \quad 4.39$$

(b) Balanço de energia durante a extensão de uma trinca

Considere uma placa contendo uma trinca como mostra a figura 4.4, então tem-se a seguinte expressão:

$$\int_{\Gamma+\Gamma_s} T_i \frac{du_i}{dl} d\Gamma + \iint_A F_i \frac{du_i}{dl} dA = \iint_A \rho \ddot{u}_i \frac{du_i}{dl} dA +$$

$$+ \iint \sigma_{ij} \frac{d \varepsilon_{ij}}{d_1} dA + \hat{J} \quad 4.40$$

Figura 4.4 Representação geométrica da região de processo de fratura

A taxa de variação de energia do material na região do processo de fratura é representada pela integral- $\hat{J}$, porque a fratura não pode ser caracterizada ainda dentro teoria da mecânica dos meios contínuos.

Usando o teorema de Gauss e a equação de movimento 4.36, a equação 4.40 reduz-se a:

$$\hat{J} = \iint_A \left[\left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial l} \right)_{,j} + (F_i - \rho \ddot{u}_i) \frac{du_i}{dl} - \sigma_{ij} \frac{d\epsilon_{ij}}{dl} \right] dA + \int_{\Gamma_{final}} T_i \frac{du_i}{dl} d\Gamma \quad 4.41$$

A transformação na figura 4.4, entre os sistemas de referências fixo e móvel é da forma:

$$x_1 = X_1 \cos \theta_0 + X_2 \sin \theta_2 - l \quad 4.42a$$

$$x_2 = -X_1 \sin \theta_0 + X_2 \cos \theta_0 \quad 4.42b$$

e os deslocamentos relativos, em termos da referência fixa 0 - X_1 , X_2 , são da forma:

$$U_i(x_1, x_2, x_3, l) = u_i(X_1 \cos \theta_0 + X_2 \sin \theta_2 - l, -X_1 \sin \theta_0 + X_2 \cos \theta_0, l) \quad 4.43$$

e obtemos a seguinte relação:

$$\frac{d U_1}{d l} = \frac{\partial u_1}{\partial l} + \frac{\partial u_1}{\partial l} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial l} = \frac{\partial u_1}{\partial l} - \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \quad 4.44$$

A equação 4.44, substituída em 4.41, resulta:

$$\hat{J} = \int_{\Gamma_{final}} T_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial l} - \frac{\partial u_1}{\partial X} \right) d\Gamma \quad 4.45$$

Na equação 4.45, nenhuma restrição foi imposta na relação tensão versus deformação do material, logo a integral- $\hat{J}$ pode ser a representação da taxa de liberação de energia de um material arbitrário durante a extensão de trincas.

De grande interesse neste trabalho é o tratamento do problema da extensão de trincas em configurações tridimensionais é o caso apresentado na figura 4.5.

KISHIMOTO²⁹ demonstra que:

$$\begin{aligned} \hat{J}_K = & \int_{\Gamma+\Gamma-\Gamma} W_e n_K d\Gamma - \int_{\Gamma+\Gamma} T_1 \frac{\partial u_1}{\partial X_K} d\Gamma + \iint_A \left\{ \sigma_{1j} \frac{\partial \varepsilon_{1j}^*}{\partial X_K} + \right. \\ & \left. + (\rho \ddot{u}_1 - F_1) \frac{\partial u_1}{\partial X_K} + \frac{\partial W_e}{\partial X_1} p_1 p_K - \frac{\partial}{\partial X_1} \left(\sigma_{1j} p_j \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) p_1 \right\} dA \quad 4.46 \end{aligned}$$

onde, p_1 representa o vetor normal à superfície de um elemento de placa, sendo p_j o componente de X_j .

AOKI, KISHIMOTO e SAKATA²⁹ generalizaram a integral- $\hat{J}$ para os casos, além de translacional, os casos de rotacionalidade, de expansão auto-similar e distorcional, formando as integral- $\hat{L}$,

integral- $\hat{M}$ e a integral- $\hat{I}$ respectivamente. As mesmas incluem os agora denominados casos especiais: integral-J de RICE e a integral-L e integral-M de KNOWLES e STERNBERG.

O critério de fratura é constituído de tal forma que se $\hat{J}_c$ for a taxa de energia dissipada na região de processo da fratura, correspondente ao crescimento de trincas por unidade de área, o critério de fratura em função do balanço de energia é dado por:

$$\hat{J} = \hat{J}_c \quad 4.47$$

Postulando, de acordo com BROBERG³⁰, que a região de processo da fratura é autônoma, no sentido de não depender da geometria do corpo ou das condições da trinca ou do carregamento, a região de processo é considerada de dimensões constantes movendo-se com a mesma velocidade que a ponta da trinca, de tal modo que a relação:

$$\frac{\partial u_1}{\partial l} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_{\text{final}}$$

e a equação final, obtida da equação 4.45 é dada por:

$$\hat{J} = - \int_{\Gamma_{\text{final}}} T_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} d\Gamma \quad 4.48$$

(a)

(b)

Figura 4.5 Representação esquemática de trinca 3D ,KISHIMOTO²⁸

a) definição da velocidade $\underline{v}$ da frente da trinca Γ_{final}

b) representação da frente da trinca

AOKI, KISHIMOTO e SAKATA³² formalizaram, em 1984, as expressões gerais do fluxo de energia para o interior de uma região de processo de ocorrência de problemas de fratura elasto-plástica, considerando nas análises os mais generalizados casos tridimensionais.

A figura 4.6 mostra a configuração tridimensional para o problema de trinca em 3-D. A curva sólida representa o contorno da frente da trinca no estado inicial, a tracejada é sua frente atual após uma extensão infinitesimal. Seja $O-X_1X_2X_3$ o sistema de referência com a origem em O , sendo O um ponto arbitrário na curva da frente da trinca; sejam $\underline{N}$, $\underline{B}$ e $\underline{T}$ os vetores normal, binormal e tangencial respectivamente, e todos localizados no ponto O ; a intersecção da curva tracejada com o plano determinado por $\underline{N}$ e $\underline{B}$, define o ponto o . Assim, os vetores $\underline{n}$, $\underline{b}$ e $\underline{t}$ são respectivamente, normal, binormal e tangencial da nova frente da trinca representada pela curva tracejada. Os vetores $\underline{n}$, $\underline{b}$ e $\underline{t}$ são obtidos por translação e rotação dos vetores unitários $\underline{N}$, $\underline{B}$ e $\underline{T}$ com a frente da trinca movimentando-se a uma velocidade linear $\underline{v}$ e angular ω .

Considerando-se um disco fino que inclua o ponto O e ao mesmo corta a região do processo de fratura por planos paralelos ao plano determinado pelos vetores $\underline{N}$ e $\underline{B}$. A espessura, o volume e o contorno do disco são representados por $\Delta\lambda$, ΔV_{final} e Γ_{final} respectivamente. Considera-se também o volume do material que envolve a frente da trinca na forma de um toróide de revolução. S é a superfície externa de V como mostra a figura 4.7.

Figura 4.6 - Representação tridimensional de um problema de extensão de trinca. AOKI³¹ e colaboradores.

região de processo

Figura 4.7 - Configuração da frente de uma trinca e o volume para integração. AOKI³¹ e colaboradores.

Considerando o balanço de energia no material de volume V e fazendo $\Delta\lambda \rightarrow 0$, obtém-se o fluxo local da energia total por unidades de comprimento de $\Delta\lambda$ e de espessura, na forma de:

$$\Phi = v_k \hat{J}_k + \omega_k \hat{L}_k + a \hat{M} + \hat{I} \quad 4.49$$

sendo $\hat{J}_k$, $\hat{L}_k$, $\hat{M}$ e $\hat{I}$, dados em AOKI²⁹ e colaboradores nas seguintes formas:

$$\begin{aligned} \hat{J}_k = & \int_{\Gamma_{final}} \rho (K + e) n_k d\Gamma - \iint_{S_e + S_s} T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_k} dS + \\ & + \iiint_V \left\{ \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial X_k} dS + \left(\rho \ddot{u}_i - F_i \right) \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right\} dV \end{aligned} \quad 4.50$$

$$\begin{aligned} \hat{L} = & \int_{\Gamma_{final}} \epsilon_{i\alpha 1} \rho (K + e) X_1 n_i d\Gamma - \iint_{S_e + S_s} \epsilon_{ik1} X_1 T_j \frac{\partial u_j}{\partial u_i} dS + \\ & + \iiint_V \epsilon_{i\alpha 1} \left\{ \sigma_{j1} \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + X_1 (\rho \ddot{u}_j - F_j) \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \right. \\ & \left. + X_1 \sigma_{jk} \frac{\partial \epsilon_{jk}}{\partial X_i} \right\} dV \end{aligned} \quad 4.51$$

$$\begin{aligned} \hat{M} = & \int_{\Gamma_{final}} \left\{ \rho (K + e) n_i X_i d\Gamma - \iint_{S_e + S_s} \left(X_j T_j - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) dS + \right. \\ & \left. + \iiint_V \left\{ \sigma_{ij} \epsilon_{ij} + \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial X_i} X_i + \left(\rho \ddot{u}_j - F_j \right) \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right\} dv \right. \end{aligned} \quad 4.52$$

onde:

K: energia cinética por unidade de massa

e: energia interna por unidade de massa

Seja ΔE a taxa da energia total transferida no tempo, então:

$$E = \int_0^\lambda \Phi^* d\lambda \quad 4.53$$

para:

$$\Phi^* = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta \lambda} = \frac{dE}{d\lambda} \quad 4.54$$

Na expressão 4.54, os valores de Φ^* são dados pela equação 4.49, por unidade de espessura.

Uma analogia poderá ser feita para o caso bidimensional da integral-J de RICE, onde FREUND³² mostra que:

$$J = G = \frac{1 - \nu^2}{E} \left[K_I^2 + K_{II}^2 \right] \quad 4.55$$

G é a taxa de liberação de energia de IRWIN para trinca crescendo coplanarmente. A fórmula 4.55 é válida apenas para o caso elástico, podendo incluir uma pequena contribuição de plasticidade na ponta da trinca.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS - Capítulo 4

1. BRUST JR, F.W. *The use of new path independent integrals in elastic-plastic and creep fracture*. PhD Thesis, Georgia Institute of Technology, Nov. 1984.
2. JENNER, A. and DODD, B. Cold upsetting and free surface ductility. *Journal of Mechanical Working Technology*, 5:31-43, 1981.
3. BATES, R.C. Mechanics and mechanisms of fracture. In: TIEN, J.K. and ELLIOTT, J.F. (eds.) *The Metallurgical Treatise. Presentations at the USA-China Bilateral Conference sponsored by the Metallurgical Society of the AIME The American Society for Metals and Chinese Society of Metals, AIME, New York, 1981. pp.551-570*
4. KANNINEN, M.F. and POPELAR, C.H. *Advanced Fracture Mechanics*. Clarendon, Oxford University, 1985. pp.281-391
5. DUGDALE, D.S. Yielding zones in cracked sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8:100-108, 1960.
6. BROEK, D. *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. 3.ed. The Hague, Martinus Nighhoff, 1982.
7. WILSDORF, H. G. -F. The ductile fracture of metals: a microstructural view point. *Materials Science and Engineering*. 59:1-39, 1983.
8. ZHUANG, T. *On Elastic-plastic Fracture Criterion*, PhD dissertation, Syracuse University, Aug.1984. pp.8-41.
9. *Op. cit.*, Referência 4, chapter 3 - Linear Elastic Fracture Mechanics, pp. 138-191.
10. GRIFFITH, A.A. The phenomenon of rupture and flow of solids.

Philosophical Transactions of Royal Society, London, 221A:
163-198, 1920.

11. SACK, R.A. *Proceedings of Physical Society of London.* 58:729, 1946.
12. INGLIS, C.E. Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. *Transactions of the Institute of Naval Architects.* 60:219-230, 1913.
13. MOTT, N.F. *Engineering.* 165:16, 1948.
14. OROWAN, E. Energy criteria of fracture. *Welding Research Supplement,* 20:1575-1605, 1955.
15. WILLIAMS, M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Transactions of the ASME Journal of Applied Mechanics,* 24:109-114, 1957.
16. IRWIN, G.C. Analysis of stresses and strains near the end of a crack tranversing a plate. *Transactions of the ASME - Journal of Applied Mechanics.* 24:361-364, 1957.
17. ERDOGAN, F. Stress intensity factor. *Transactions of the ASME - Journal of Applied Mechanics,* 50:992-1002, 1983.
18. SANDERS, J.L. On the Griffith - Irwin fracture theory. *Transactions of the ASME - Journal of Applied Mechanics,* 27 (2):352-353, 1960.
19. ESHELBY, J.D. The coninum theory of lattice defects In: SEITZ, F. and TURNBULL, D. *Solid State Physics.* New York, Academic Press, 1956. vol.III, pp.79-144.
20. CHEREPANOV, G.P. Crack propagation in continuous media. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* English translation of the Soviet Journal PMM, 31(3):504-512, 1967.
21. RICE, J.R. A path independent integral and the approximated

- analysis of strain concentration by notches and cracks. *Transactions of the ASME - Journal of Applied Mechanics*, 35(2):379-386, 1968.
22. DIETER, G. E. *Mechanical Metallurgy*. 2.ed. New York, McGraw-Hill, 1976. pp.277-280
 23. NOETHER, R. Invariante Variations Probleme Göttinger Nachrichten, Mathematisch. Physikalische Klasse, 2:235-257, 1918.
 24. CUSHING, J.T. *Applied Analytical Mathematics for Physical Scientists*. New York, John Wiley, 1975. pp.251-257
 25. HERRMANN, A.G. On the conservation laws of continuum mechanics. *International Journal of Solids and Structures*. 17(8):1-9, 1981.
 26. KNOWLES, J.K. and STERNBERG, E. On a classe of conservation laws in linearized and finite elastostatics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 44(3):187-211, 1972.
 27. BUDIANSKY, B and RICE, J.R. Conservation laws and energy-release rates. *Transactions of the ASME - Journal of Applied Mechanics*, 40:201-203, Mar.1973.
 28. KISHIMOTO, K; AOKI, S. and SAKATA, M. On the path independent integral $-\hat{J}$. *Engineering Fracture Mechanics*, 13:841-850, 1980.
 29. AOKI, S.; KISHIMOTO, K. and SAKATA, M. Energy-release rate in elastic-plastic fracture problems. *Transactions of the ASME - Journal of Applied Mechanics*, 48:825-828, 1981.
 30. BROBERG, K.B. Energy methods in statics and dynamics of fracture. *Journal of Japan Society for Strength, Fracture and Materials*, 10(2):33-45, 1975.

31. AOKI, S.; KISHIMOTO, K. and SAKATA, M. Energy flux into process region in elastic-plastic fracture problems. *Engineering Fracture Mechanics*, 19(5):827-836, 1984.
32. FREUND, L.B. Stress intensity factor calculations based on a conservative integral. *International Journal of Solids and Structures*, 14:241-250, 1976.

5. CONFORMABILIDADE PLÁSTICA DOS METAIS PELA MECÂNICA DA FRATURA NÃO-LINEAR

5.1. Conceitos de Conformabilidade Plástica dos Metais

A conformabilidade plástica dos metais é definida no "Metals Handbook", segundo DIETER¹, como sendo a facilidade relativa com que um material metálico possa ser conformado de deformação plástica. Essa definição, mesmo sendo ampla, é de natureza qualitativa. DIETER propôs um outro conceito de conformabilidade: é o grau de deformação que possa ser alcançado em um processo específico de conformação plástica sem a criação de condições indesejáveis, como o surgimento de trincas ou fraturas, o péssimo acabamento superficial da peça, a formação de ondulações ou rugas, a falta de enchimento na matriz de conformação e outras.

A conformabilidade é, por sua vez, dependente das condições locais das distribuições de tensão, de deformação, de taxas de deformação e de temperaturas. Todas essas distribuições que combinadas com a resistência básica dos materiais metálicos, podem levar à ocorrência de fratura dúctil.

5.1.1. Conformabilidade Baseada no Conceito Microscópico da Fratura Dúctil

A idéia amplamente aceitável do conceito de fratura dúctil, em OSAKADA e MORI², é aquela que observada por técnicas metalográficas ocorre fortemente dependente da microestrutura do material metálico e observando a seguinte sequência:

- a) formação do núcleo de uma trinca pelo crescimento de cavidades ou vazios em torno de inclusões ou partículas de segunda fase, após uma determinada quantidade de deformação plástica;
- b) Crescimento do núcleo da trinca, pela continuidade da deformação plástica;
- c) Coalescência ou crescimento rápido do núcleo da trinca para a formação de uma fratura macroscópica provocada por uma excessiva concentração de tensão em uma pequena região do material metálico;

Diversos pesquisadores desenvolveram critérios de fratura dúctil baseados nos mais diversos mecanismos, entre os quais ZAVAGLIA³ que baseada no trabalho de VINH⁴ relacionou os seguintes:

- a) modelo do crescimento e coalescência de vazios de McCLINTOCK⁵, THOMASON⁶, e RICE-TRACEY⁷;
- b) modelo do crescimento de vazios em torno de partículas de ARGON-IN-SAFLOGU⁸;
- c) modelo probabilístico e microestrutural da deformação dúctil de HADDAD-SOWERBY⁹;
- d) modelo do potencial plástico de RICE¹⁰ e GURSON¹²;
- e) modelo da aproximação estatística de SEAMAN-CURRAN-SHOCKEY¹².

A ductilidade de um material metálico é expressa como sendo a máxima deformação alcançada em um corpo de prova

padronizado antes da ocorrência da fratura e é definida em função da redução de área desse corpo de prova, na forma:

$$\epsilon_0 = \frac{RA}{1 - RA} \quad 5.1$$

para

$$RA = \frac{A_0 - A_f}{A_0} \quad 5.2$$

A_0 e A_f são respectivamente as áreas inicial e final do corpo de prova.

A ductilidade assim definida refere-se apenas à capacidade do material sofrer grande deformação plástica, e a mesma é útil na escolha do material a ser processado. Já a conformabilidade diz respeito ao grau de severidade com que o material sofre conformação plástica sem a ocorrência de defeitos.

5.1.2. Conformabilidade Baseada no Conceito Macroscópico de Deformação Plástica

A necessidade da quantificação da conformabilidade levou vários pesquisadores a proporem diversos critérios e a maioria desses baseados em experiências laboratoriais, cujo objetivo maior era o de construir modelos macroscópicos ou fenomenológicos. Os principais critérios de conformabilidade são descritos por ZAVAGLIA³, entre os quais citaremos os seguintes:

- a) modelo das curvas limite de conformação de KEELER¹³;
- b) critério de VON MISES da plasticidade dos metais, limitado por uma tensão efetiva máxima de resistência, em ALTAN¹⁴ e colaboradores;

- c) critério de TRESCA do escoamento plástico, limitado por uma tensão efetiva máxima de cisalhamento, em ALTAN¹⁴ e colaboradores;
- d) critérios análogos à máxima energia de deformação de: COCKCRFT e LATHAN¹⁵, GILLEMOT¹⁶, OH-CHEN e KOBAYASHI¹⁷ e critério modificado de ZAVAGLIA³;
- e) critério da tensão hidrostática e da porcentagem de vazios de SEKIGUSHI-OSAKADA-HAYASHI¹⁸.

5.1.3. Desvantagens e Vantagens dos Critérios de Conformabilidade

Variantes: baseados na fratura dúctil e na deformação plástica dos metais

A construção dos critérios de conformabilidade variantes, os que não são baseados no teorema de NOETHER das integrais invariantes, é bastante dependente de várias variáveis que deverão ser, de alguma forma, controladas durante e após a realização dos ensaios. Essas principais variáveis são a natureza e composição das ligas metálicas, impurezas presentes na forma de inclusões e partículas de segunda fase (tamanho, forma e porcentagem), estado de tensão a que foi submetido o corpo de prova, temperatura da realização do ensaio, características microestruturais de tamanho de grãos, efeitos dos tratamentos térmicos, e outros. Nessas condições, ter-se-á que realizar um número elevado de ensaios sob condições controladas para se obter um critério válido.

As três principais vantagens neste critério de conformabilidade são:

- a) a possibilidade do estudo sistemático dos mecanismos de fratura dúctil;
- b) é possibilidade, após o conhecimento dos mecanismos de fratura dúctil, da elaboração de fórmulas analíticas do tipo fechada;
- c) é consequência da primeira e consiste no tratamento numérico do problema modelado em computadores ou calculadoras.

As desvantagens dos critérios baseados na deformação plástica estão estritamente ligadas às limitações da teoria geral da plasticidade que é utilizada através de várias técnicas, principalmente a numérica pelo método dos elementos finitos, para a obtenção da distribuição de tensões e de deformações no corpo sólido. Além do mais, deve-se conhecer as condições de atrito nas interfaces peça-ferramenta que, por sua vez, necessita de uma boa modelagem. Alguns problemas de tensão uniforme têm sido bem analisados por esse critério, como exemplo a trefilação de fios, a estampagem de chapas, o dobramento de chapas e perfis, a extrusão e alguns casos de forjamento em matriz plana. Os resultados dos ensaios, obtidos por esses critérios de conformabilidade são de natureza tecnológica, ou seja, os valores numéricos obtidos estão relacionados à processos de conformação, que cujos valores quando postos num diagrama fornecem um mapa de conformabilidade.

Uma variante do critério é a construção experimental de mapas de deformações de fratura, em que podem ser inscritos vários

processos limitados a uma curva limite de conformabilidade. Esse diagrama é denominado de Curva Limite de Conformabilidade.

As vantagens são, obviamente, o uso tecnológico desses diagramas de Curva Limite de Conformabilidade na prática industrial.

5.2. Campos de Elasto-Plasticidade Gerados por Integrais Invariantes da Mecânica da Fratura Não-Linear

Quando o comportamento plástico de um material metálico, representado pela deformação plástica de encruamento, for caracterizado pela lei de potência de HOLLLOMON¹⁹, a singularidade dominante será denominada de modelo HRR, em homenagem aos pesquisadores HUTCHINSON²⁰, RICE e ROSENGREN²¹. Enquanto que se a singularidade for caracterizada por pequenas deformações, a não-linearidade entra no estudo através de relações elasto-plásticas.

A curva do estado uniaxial de tensão versus deformação experimental é modelada pela relação de RAMBERG-OSGOOD²²:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad 5.3$$

onde:

ϵ_0 : é a deformação de escoamento plástico

σ : é a tensão limite de escoamento plástico

$n > 1$: é o expoente de encurvamento

α : é uma constante material

Quando n tender para o infinito, o comportamento do

material metálico é o de um elástico- perfeitamente plástico.

A equação 5.3 é aplicável para uma tensão monotônica crescente a qual não acomoda um descarregamento elástico.

Na zona plástica envolvendo a ponta da trinca aplica-se a teoria da deformação plástica de HENCKY-ILYUSHIN-NADAI²³ e as condições da teoria da plasticidade, para um processo independente da pressão hidrostática:

$$P_H = \sigma_{kk}/3 \quad 5.4$$

são dadas pelas relação tensão versus deformação da forma:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} S_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3\bar{\epsilon}^P}{2\bar{\sigma}} S_{ij} \quad 5.4$$

onde os componentes das tensões reduzidas são dados por:

$$S_{ij} = \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad 5.5$$

A tensão e deformação efetivas, baseadas no critério de VON MISES, são dadas por:

$$\bar{\sigma} = (3J_2)^{1/2} = (3/2 S_{ij} S_{ij})^{1/2} \quad 5.5$$

e

$$\bar{\epsilon}^P = \frac{2}{3} \epsilon_{ij}^P \epsilon_{ij}^P \quad 5.6$$

sendo J_2 , o segundo invariante do tensor das tensões reduzidas.

A tensão e a deformação efetivas estão relacionadas pela forma de RAMBERG-OSGOOD:

$$\bar{\epsilon}_0^p = \alpha \epsilon \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} \right)^n \quad 5.7$$

A relação generalizada entre tensões e deformações é então da forma:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+D}{E} S_{ij} + \frac{1-2D}{3E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \alpha \epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{n-1} \times \frac{S_{ij}}{\sigma_0} \quad 5.8$$

Como é esperada uma singularidade na ponta da trinca, as deformações plásticas serão muito maiores que as respectivas elásticas estas serão desprezadas nas análises e dentro da região na vizinhança da ponta da trinca, figura 5.1; a equação 5.8 fica na forma:

$$\epsilon_{ij} = \frac{3}{2} \alpha \epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{S_{ij}}{\sigma_0} \quad 5.9$$

De acordo com o trabalho de RICE, para apenas uma singularidade existente na região associada com a ponta da trinca, existe um caminho circular Γ , de raio r menor que D , envolvendo a trinca, figura 5.1, representada pela fórmula da integral-J de RICE por:

$$J = r \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ W[\epsilon(r, \theta)] \cos \theta - T_1(r, \theta) \frac{\partial u_1(r, \theta)}{\partial x_1} \right\} d\theta \quad 5.10$$

A teoria da deformação da plasticidade é vista como uma teoria não-linear da elasticidade, logo, a equação 5.10 da integral-J é independente do caminho e é também invariante.

Como os termos na integração são basicamente produtos de componentes do tipo deformação e tensão, então a expressão seguinte é representativa dos fenômenos que ocorrem na região de processo, representada pela parte interna do círculo de raio r menor que D da figura 5.1:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \rightarrow \frac{f(\theta)}{r} \quad 5.11$$

ou seja, as variáveis podem ser separadas em funções de θ e r apenas.

Figura 5.1 Sistema de coordenadas na ponta de uma trinca em 2D

KANINEN²⁴ apresenta as seguintes equações representativas para o modelo HRR, de HUTCHINSON²⁰, RICE e ROSENGREN²¹:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = Kr^{\frac{-1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \quad , \quad 5.12a$$

$$\bar{\sigma}(r, \theta)' = Kr^{\frac{-1}{n+1}} \tilde{\sigma}(\theta) \quad 5.12b$$

$$\varepsilon_{ij}(r, \theta) = \alpha \varepsilon_0 K^n r^{\frac{-n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta) \quad 5.12c$$

$$u_{ij}(r, \theta) = \alpha \varepsilon_0 K^n r^{\frac{1}{n+1}} \tilde{u}_i \quad 5.12d$$

onde K é uma constante a ser determinada analiticamente.

Para o modo I de fratura, figura 4.3, as equações 5.12 fornecem as formas das singularidades na ponta da trinca e a dependência de θ deve ser determinada com o objetivo de estabelecer a estrutura dos campos de tensão e de deformação na ponta da trinca. Isso resolve-se pela introdução da função de AIRY ψ na sua forma assintótica:

$$\psi = Kr^{\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)} \tilde{\psi}(\theta) \quad 5.13$$

devendo satisfazer as condições de equilíbrio:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0 \quad 5.14a$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + f_r \quad 5.14b$$

e também satisfazer a condição de compatibilidade:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \epsilon_{\theta\theta}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \epsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon_{rr}}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \epsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = 0 \quad 5.15$$

sendo as tensões perto da trinca da forma:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = K s (s-1) r^{\frac{-1}{n+1}} \tilde{\psi}'(\theta)$$

$$\sigma_{r\theta} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = K (1-s) r^{\frac{-1}{n+1}} \tilde{\psi}'(\theta)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = K r^{\frac{-1}{n+1}} [s \tilde{\psi}(\theta) + \tilde{\psi}''(\theta)]$$

Na deformação plana $\sigma_{33} = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2}$ e a tensão efetiva na ponta da trinca é:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \left[\frac{3}{4} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 3\sigma_{r\theta}^2 \right]^{1/2} = \\ &= K r^{\frac{-1}{n+1}} \left\{ \frac{3}{4} [\tilde{\psi}'' - s^2 \tilde{\psi}]^2 + 3[(1-s)\tilde{\psi}']^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad 5.17$$

para $s = \left(\frac{2n+1}{n+1} \right)$.

Substituindo as equações 5.16 e 5.17 em 5.12, para a obtenção dos componentes de deformação na equação 5.15, o seguinte resultado é

obtido para o caso de deformação plana:

$$\left[\frac{d^2}{d\theta^2} + \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \right] \left[\tilde{\sigma}^{n-1} \left(\tilde{\psi}'' + \frac{2n+1}{(n+1)^2} \tilde{\psi} \right) \right] + \frac{4n}{(n+1)^2} \left(\tilde{\sigma}^{n-1} \tilde{\psi}' \right) = 0 \quad 5.18$$

Um tratamento similar para o estado plano de tensão fornece:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{n}{n+1} \right] \left[\tilde{\sigma}^{n-1} \left(2\tilde{\psi}'' + \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \left(\frac{2n+1}{n+1} \right) \tilde{\psi} \right) \right] + \\ & + \frac{n}{(n+1)^2} \tilde{\sigma}^{n-1} \left[\tilde{\psi}'' + \left(\frac{n-1}{n+1} \right) \left(\frac{2n+1}{n+1} \right) \tilde{\psi} \right] + \\ & + \frac{6n}{(n+1)^2} \left(\tilde{\sigma}^{n-1} \tilde{\psi}' \right)' = 0 \end{aligned} \quad 5.19$$

Para o estado plano de tensão:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(\theta) &= \left\{ \tilde{\sigma}_{rr}^2 + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^2 - \tilde{\sigma}_{rr} \tilde{\sigma}_{\theta\theta} + 3 \tilde{\sigma}_{r\theta}^2 \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ \left[\tilde{\psi}'' + s\tilde{\psi} \right]^2 + \left[s(s-1)\tilde{\psi} \right]^2 - s(s-1) \left[\tilde{\psi}'' + s\tilde{\psi} \right] \tilde{\psi} + \right. \\ & \quad \left. + 3 \left[(1-s)\tilde{\psi}' \right]^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad 5.20$$

na equação 5.16~, a condição $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta}$ para $\theta = \pm\pi$, requer:

$$\tilde{\psi}(\pm\pi) = \tilde{\psi}'(\pm\pi) = 0 \quad 5.21$$

Para o modo da abertura da trinca, ψ é simétrica em relação a

$\theta = 0$ e $\theta = -\pi$, e nesse caso tem-se:

$$\tilde{\psi}'(\theta) = \tilde{\psi}''' = 0 \quad 5.22$$

Em 5.18 e 5.19 tem-se as equações diferenciais ordinárias homogêneas, com condições homogêneas e as equações 5.21 e 5.22 definem o problema de dois valores de fronteiras. É na realidade um problema de autovalor não linear, no qual o expoente de r é o autovalor.

É grande a dificuldade de resolver as equações 5.19 e 5.20 por integração analítica, mas as mesmas foram resolvidas numericamente, considerando o problema do tipo de valor inicial.

Considerando um valor específico para $\tilde{\psi}'''(0)$, a integração numérica é desenvolvida usando o método de RUNGE-KUTTA, descrito em BLUM²⁵.

A função característica é normalizada pela seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\max} &= \sigma_0 \\ \varepsilon_{\max} &= \varepsilon_0 \end{aligned} \quad 5.22$$

As curvas de variações das componentes de tensões e de deformações são apresentadas na figura 5.2 para vários valores de n .

Tendo-se estabelecido as distribuições de tensão e de deformação por resolução numérica das equações 5.18 e 5.19, pelo método de RUNGE-KUTTA, pode-se agora avaliar a integral-J pela introdução da equação 5.9 na equação da energia específica de

deformação:

$$W = \frac{n}{n+1} \sigma_{1j} \varepsilon_{1j} \quad 5.23$$

obtem-se:

$$W = \alpha \varepsilon_0 \sigma_0 \cdot \frac{n}{n+1} \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_0} \right)^{n+1} \quad 5.24$$

Combinando as equações 5.10, 5.16 e 5.22, obtém-se o seguinte resultado:

$$J = \alpha \varepsilon_0 \sigma_0 K^{n+1} I_n \quad 5.25$$

onde:

$$\begin{aligned} I_n = \int_{-\pi}^{\pi} & \left\{ \frac{n}{n+1} \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_0} \right)^{n+1} \cos \theta - \left[\frac{\tilde{\sigma}_{rr}}{\sigma_0} (\tilde{u}_0 - \tilde{u}_r') + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\tilde{\sigma}_{r\theta}}{\sigma_0} (\tilde{u}_r + \tilde{u}_0) \right] \sin \theta + \right. \\ & \left. - \frac{1}{n+1} \left[\frac{\tilde{\sigma}_{rr}}{\sigma_0} \tilde{u}_r + \frac{\tilde{\sigma}_{r\theta}}{\sigma_0} \tilde{u}_0 \right] \cos \theta \right\} d\theta \quad 5.26 \end{aligned}$$

As quantidades $\tilde{u}_r$ e $\tilde{u}_\theta$ são obtidas de:

$$\tilde{u}_r = (n+1) \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_0} \right)^{n-1} \left[\tilde{\psi}'' + s(3-s) \tilde{\psi}/2 \right] \quad 5.27a$$

$$\tilde{u}_\theta' = \frac{-1}{2} \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_0} \right)^{n-1} \left[\tilde{\psi}'' - s(2s-3) \tilde{\psi} \right] - \tilde{u}_r \quad 5.27b$$

Usando a equação 5.25 para substituir K na equação 5.12, obtém-se, finalmente:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \left(\frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(\theta) \quad 5.28a$$

$$\sigma_{\alpha 3} = 0$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \alpha \varepsilon_0 \left(\frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\theta) \quad 5.28b$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = 0$$

$$u_{\alpha} = \alpha \varepsilon_0 \left(\frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{\frac{1}{n+1}} \tilde{u}_{\alpha}(\theta) \quad 5.28c$$

Uma boa aproximação seria uma interpolação entre valores de $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_{\alpha}, \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ e $\tilde{u}_{\alpha}$, em função do expoente de encruamento da fórmula de RAMBERG-OSGOOD, nas curvas 5.2a e 5.2b.

Figura 5.2a - Estruturas do modo I de trinca na deformação plana, diagramas das soluções da equação 5.18, substituídas em 5.16 e 5.17 e, finalmente, em 5.12, para vários valores do expoente de RAMBERG-OSGOOD e KANINEN²⁴.

a) material encruado

b) material perfeitamente plástico

Figura 5.2b - Estruturas do modo I de trinca na tensão plana, diagramas das soluções da equação 5.19, substituídas, também, em 5.16 e 5.13. E, finalmente, em 5.12, para vários valores do expoente de RAMBERG, OSGOOD e KANINEN²⁴.

a) material encruado

b) material perfeitamente plástico

Figura 5.3 - Variação de I_n , com n para tensão plana e deformação plana, segundo KANINEN²⁴.

A dificuldade em se calcular I_n pela equação 5.26 pode ser removida pelo método de integração numérica de funções periódicas de FILON, conforme demonstrado em BLUM²⁵, ou então por interpolação numérica na figura 5.3.

5.3. Conformabilidade Plástica dos Metais pela Mecânica da Fratura Não-Linear

Considerando o caso da compressão quasi-estática de um corpo de prova cilíndrico em uma prensa hidráulica, a hipótese a ser adotada neste trabalho, é que na região frontal da trinca no equador o campo de tensão é o máximo possível e o problema passa a ser do tipo estado plano de deformação. Nessa condição, serão adotados os parâmetros a serem obtidos das curvas segundo esse tipo de problema, com excessão do valor de J , que neste caso foi formulado através da relação 5.25, e é portanto independente das condições impostas na solução analítica.

A integral- J de RICE será substituída pela integral invariante generalizada $\hat{J}$, expressa pela equação:

$$\hat{J}_k = \int_{\Gamma_{\text{final}}} \rho(K+e)n_k d\Gamma - \iint_{S_r + S_s} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_l} ds + \iiint \left\{ \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} + \left(\rho \ddot{u}_i - F_i \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\} dv \quad 4.50$$

O critério de fratura para uma região D , figura 5.1, onde existe o domínio da integral- J é dado por:

$$J(\sigma, a) = J_c \quad 5.29$$

O crescimento da trinca, no interior dessa região D, é controlado pelo valor crítico da integral-J que é J_c , e é uma propriedade do material válida para solicitações externas aplicadas numa região bem afastada da ponta da trinca, onde "a" é tamanho da trinca.

A equação 5.28 mostra que as intensidades dos campos de tensão e de deformação na ponta da trinca são dependentes do parâmetro integral-J.

A equação do deslocamento relativo u_α , representada na equação 5.28c, quando expressa na forma planar, figura 5.4, é do tipo:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \alpha \varepsilon_0 \left(\frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot r^{\frac{1}{n+1}} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_1(\pi) \\ \tilde{u}_2(\pi) \end{Bmatrix} \quad 5.30$$

A definição do deslocamento relativo de abertura da trinca COD é dado por:

$$\delta = 2u_2(r, \pi) \quad 5.31a$$

TRACY, usando a ilustração da figura 5.4, definiu o deslocamento relativo da abertura da trinca, para uma interseção de duas linhas simétricas inclinadas de $\pi/4$, ambas partindo da ponta da trinca, como sendo:

$$r-u_1(\pi) = \delta_{t/2} = u_2(\pi) \quad 5.31b$$

Figura 5.4 - Definição do deslocamento de abertura da trinca COD, KANINEN²⁴.

Das equações 5.30 e 5.31, obtém-se:

$$r = (\alpha \varepsilon_0)^{1/n} \left[\tilde{u}_1(\pi) + \tilde{u}_2(\pi) \right]^{\frac{n+1}{n}} \frac{J}{\sigma_0 I_n} \quad 5.32$$

que substituída na equação 5.30 novamente, fornece a equação:

$$\delta_t = d_n J / \sigma_0 \quad 5.33$$

onde:

$$d_n = 2(\alpha \varepsilon_0)^{1/n} \left[\tilde{u}_1(\pi) + \tilde{u}_2(\pi) \right]^{1/n} \tilde{u}_2(\pi) / I_n \quad 5.34$$

SHIH²⁸ determinou a dependência de d_n em função de n e σ_0/E para os casos planos de deformação e de tensão, cujos resultados são mostrados na figura 5.5. Novamente, pode-se obter valores por interpolação gráfica para outros casos do expoente n de RAMBERG-OSGOOD.

A equação 5.33, segundo KANINEN²⁴, estabelece uma equivalência entre os valores de J e δ_t de tal modo que qualquer critério de fratura, baseado num valor crítico δ_t , é também equivalente a um outro baseado no valor crítico J e vice-versa.

Figura 5.5 - Dependência de d_n função de n e σ_0/E para os estados planos de (a) tensão e (b) deformação.

Uma generalização do procedimento anterior seria estabelecer-se as relações para o caso das integrais invariantes do tipo $\hat{J}$, propostas por AOKI²⁶, formando a expressão:

$$\hat{\delta} = d_n \hat{J} / \sigma_0 \quad 5.35$$

Uma expansão da definição da integral-J seria interpretá-la não como uma taxa de liberação de energia, mas sim como uma medida da intensidade dos campos HRR formados, criando-se assim uma base para análise pela mecânica da fratura.

A equação 4.49 aqui reproduzida:

$$\Phi = v_k \hat{J}_k + w_k + \hat{L}_k + a\hat{M} + I \quad 4.49$$

pode ser reduzida à forma:

$$\Phi = v\hat{J} \quad 5.36$$

quando se desprezam os efeitos da rotacionalidade, de expansão auto-similar, de inércia e térmico, dando como resultado os seguintes valores:

$$\hat{L}_k = \hat{M} = \hat{I} = 0$$

A expressão dada por 5.36, quando substituída para o termo Φ da equação 3.123, restabelece na equação 3.122, o enunciado de HILL, porém na seguinte forma:

$$\int_{\text{volume}} \sigma_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dv = \int_S \sigma_j w_j ds - P \int_S n_j w_j ds + \gamma + v \hat{J} \quad 5.38$$

O valor de γ é expresso por 3.122.

A equação 5.38 representa a forma unificada entre a teoria da plasticidade dos metais e a mecânica da fratura não-linear elasto-plástica.

Experimentalmente, a determinação de $\hat{J}$ pode também ser obtida através da expressão de Φ^* , dada pela equação 4.54, onde:

$$\Phi^* = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta\lambda} = \frac{dE}{d\lambda} \quad 4.54$$

sendo que:

ΔE é a taxa de energia total transferida por unidade de espessura e λ é a medida de comprimento de arco do longo da frente da trinca, a partir de um ponto arbitrário.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS - Capítulo 5

1. DIETER, G. Chapter 1 - Overview of workability. In: DIETER, G. (ed.) *Workability Testing Techniques*. Metals Park, American Society for Metals, 1984. p.1-20
2. OSKADA, K. and MORI, K. Prediction of ductile fracture in cold forming. *Annals of the CIRP*; 27(1):135-139, 1978.
3. ZAVAGLIA, C.A.C. *Conformabilidade Plástica de Fios Capilares de Ouro na Trefilação*, tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1988. pp.103-106.
4. VINH, T. Sur les critères de rupture ductile - applications à quelques problèmes de formage. *Sciences et Techniques de l'Armement*, 56(2):387-420, 1982.
5. MCCLINTOCK, F.A. A criterion for ductile fracture by growth of holes. *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*. 35(6):363-371, 1968.
6. THOMASON, P.F. A theory for ductile fracture by internal necking of cavities. *Journal of Institute of Metals*, 96:360-365, 1968.
7. RICE, J.R. On the ductile enlargement of voids. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 17(3):201-217, 1969.
8. ARGON, A.S.; IM, J. and SAFOGLU, R. Cavity formation from inclusions in ductile fracture. *Metallurgical Transactions A*, 6:825-837, 1975.
9. HADDAD, Y.M. and SOWERBY, R. A micro probabilistic approach to the ductile deformation and fracture of metals. *Advances in Research on the Strength and Fracture of Materials*, vol. 2A, London, Pergamon Press, 1977. pp.457-465.
10. RICE, J. R. Mathematical analysis in the mechanics fracture. In: LIEBOWITZ, H. (ed.) *Fracture: an advanced treatise*. New York, Academic Press, 1968. pp.51-58.
11. GURSON, A.L. Porous rigid-plastic materials containing rigid inclusions - yield function, plastic potential and void nucleation. In: *Advances in Research on the Strength and Fracture of Materials*. London, Pergamon Press, 1977. vol.2A, pp.357-364.

12. SEAMAN, L; CURRAN, D.R. and SHOCKEY, D.A. Computational model for ductile and brittle fracture. *Journal of Applied Physics*, 41(11):4814-4826, 1976.
13. GHOSH, A.K.; HECKER, S.S. and KEELER, S.P. Sheet metal forming and testing. In: DIETER, G.E. Op. cit., referência 1. pp.135-193.
14. ALTAN, T.; OH, Soo-Ik and GEGEL, H. L. *Metal Forming - fundamentals and applications*. Metals Park, American Society for Metals, 1983. pp.45-82.
15. COCKCROFT, M.M. and LATHAN, D.J. Ductility and workability of metals. *Journal of Institute of Metals*, 96:33, 1968.
16. GILLEMOT, L.F. Criterion of crack initiation and spreading. *Engineering Fracture Mechanics*, 8:239-253, 1976.
17. OH, S.I.; CHEN, C.C. and KOBAYASHI, S. Ductile fracture in axisymmetric extrusion and drawing, part 2: workability in extrusion and drawing. *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry*, 101:36-44, 1984.
18. SEKIGUSHI, H.; OSAKADA, K. and HAYASHI, H. A criterion for ductile fracture strain in tensile test carried out under high hydrostatic pressures. *Journal of Institute of Metals*, 101:167, 1973.
19. HOLLOMON, J.H. Tensile deformation. *Transactions of AIME*, 162:268-290, 1945.
20. HUTCHINSON, J.W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journal of the Mechanical and Physics of Solids*. 16:13-31, 1968.
21. RICE, J.R. and ROSENGREN, G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 15:1-12, 1968.
22. RAMBERG, W. and OSGOOD, W. Description of stress-strain curves by three parameters. NACA TN 902, Jul.1943.
23. ŻYCZKOWSKI, M. *Combined Loadings in the Theory of Plasticity*. Warszawa, PWN-Polish Scientific Publishers, 1981. pp.172-205.
24. KANINEN, M.F. and POPELAR, C.H. *Advanced Fracture Mechanics*. Oxford/New York, University Press, 1985. Chapter 5, Elastic-Plastic Fracture Mechanics, pp.138-191, 281-391.
25. BLUM, E.K. *Numerical Analysis and Computation: theory and*

- practice. Reading, MA, Addison-Wesley, 1972. pp.380-513.
26. AOKI, S.; KISHIMOTO, K. and SAKATA, M. Energy flux into process region in elastic-plastic fracture problems. *Engineering Fracture Mechanics*, 19(5):827-836, 1984.
27. TRACY, D.M. Finite element solutions for crack - tip behaviour in small scale yielding. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 98:146-151, 1976.
28. SHIH, C.F. Relationship between the J- integral and the crack opening displacement for stationary and extending cracks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 29:305-326.

6. DESENVOLVIMENTO EXPERIMENTAL

6.1 Considerações Iniciais

É utilizado neste trabalho o ensaio de compressão para corpos metálicos cilíndricos, com dimensões padronizadas H_0 e D_0 , respectivamente altura e diâmetros iniciais. Para assegurar a ausência de flambagem, de acordo com a norma ASTM¹ a seguinte limitação foi obedecida para os valores de H_0 e D_0 : $H_0/D_0 \leq 2,0$, com valores típicos definidos no intervalo $0,75 \leq H_0/D_0 \leq 1,75$, de acordo com LEE² e colaboradores. O ensaio de compressão de corpos metálicos cilíndricos tem sido utilizado por vários pesquisadores: KUDO e AOI³, THOMASON⁴, KOBAYASHI⁵, KHUN⁶ e colaboradores para o estudo da fratura sob as mais complexas combinações de tensões.

Durante o processo de compressão, a superfície lateral de um cilindro reto sofre um abaulamento como é mostrado na figura 6.1, o que possibilita portanto o surgimento de trincas do tipo quasi-axiais próximas ao seu equador. Essas trincas superficiais também ocorrem nos processos de conformação plástica por dobramento e por laminação. Contudo trincas internas do tipo bifurcante ocorrem principalmente nos processos de extrusão e de trefilação. Essas trincas, que ocorrem por mecanismos de fratura dúctil, foram objeto de intensivos estudos segundo JENNER e DODD⁷.

Figura 6.1 - Diagrama esquemático do ensaio de compressão

deformação axial $\epsilon_{zz} = \ln (h/h_0)$

deformação circunferencial $\epsilon_{\theta\theta} = \ln (w/w_0)$

a) situação inicial: H_0, D_0, h_0, w_0 e h'

b) situação deformada: H, D, h, w, w' e h'

Figura 6.2 - Ilustração dos estados superficiais de deformações para os ensaios: a) compressão, b) laminação e c) dobramento

No caso do ensaio de compressão, o abaulamento resulta no desenvolvimento de tensão de tração na direção tangente à curva

circunferencial e também provoca uma diminuição na magnitude da tensão axial compressiva para um valor abaixo da tensão compressiva média no material. Caso haja a ocorrência de um severo abaulamento, até mesmo a tensão axial passa a ser do tipo de tração.

Através de variações na razão entre a altura e diâmetro do cilindro e também nas condições de atrito nas superfícies em contatos entre esse cilindro e a matriz, é possível controlar a severidade da curvatura de abaulamento do cilindro. A variedade de estados de tensão e de deformação que pode ser gerada na região equatorial dos cilindros sob processo de compressão, fornece um modo conveniente de ensaios para os estudos de fratura dúctil na conformação plástica de metais e consequentemente para o estudo da conformabilidade.

Para avaliar a possibilidade de ocorrência de fratura em material sob condições específicas de um processo de conformação, é necessário combinar os ensaios de conformabilidade com um critério de fratura, como foi demonstrado no capítulo 5 para os critérios de fraturas baseados em integrais invariantes.

6.2 Material para os Ensaios

O material metálico utilizado nos experimentos para a simulação do forjamento a frio em matriz aberta através do ensaio de compressão, sob duas diferentes condições de atrito, foi uma liga de alumínio-cobre trefilada, cuja composição, mostrada na tabela 6.1, foi determinada através de um espectrofotômetro de fluorescência por raio-X de energia dispersiva do tipo analisador químico semi-quantitativo modelo EG&G ORTEC, pertencente ao Centro de Pesquisa e Desenvolvimento da Telebras, localizado em

Campinas-SP. A essa liga foi dada a denominação de UNS A92014, modificada pela presença de Pb em teor elevado.

Para garantir o aparecimento de trincas nas superfícies dos corpos de provas e ao mesmo tempo devido ao desconhecimento dos tratamentos mecânicos e térmicos prévios, foi realizado o tratamento T6, com o objetivo de obter-se uma propriedade de redução de área, num corpo de prova de tração, da ordem de $R=15\%$.

O tratamento T6 consistiu na solubilização da liga por 2 horas a uma temperatura de 500°C , seguido de envelhecimento por precipitação por 4 horas a uma temperatura de 182°C , tratamento esse realizado no laboratório do Departamento de Engenharia Metalúrgica da EPUSP.

6.3 Determinação das Expressões da Relação Tensão versus Deformação

Após esse tratamento, os corpos de prova de tração foram ensaiados no laboratório de Ensaios Mecânicos do IPT, obtendo-se como resultados as expressões mostradas na tabela 6.2, obtidas através de regressão não-linear dos dados experimentais pelo uso do programa BMDP-P3R, desenvolvido segundo o modelo proposto por JENNRICH¹².

Tabela 6.1 - Composição e microestrutura da liga UNS A92014-T6

elemento	composição em peso
Al	93,36%
Cu	4,23%
Si	0,70%
Fe	0,61%
(*) Pb	0,45%
Zn	0,24%
Mn	0,19%
Mg	0,18%
Ni	223,50 ppm
Cr	150,76 ppm

* traço de Pb não presente na liga comercial UNS A92014-T6

Microestrutura observada no microscópio:

tamanho de grão médio = ;

precipitados : partículas de compostos intermetálicos de Al e Cu e
de partículas de Pb;

Tabela 6.2. - Expressões do ensaio de tração da liga
UNS A92014-T6 (*)

tipo de expressão	RAMBERG-OSGOOD ¹³	HOLLOMON ¹⁴
numero de parâmetros	2	2
parâmetros	n, α	N, K
expressão	$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n$	$\sigma = K \epsilon^N$
valores experimentais	$\sigma_0 = \sigma_{0,01\%} = 282,70 \text{ MPa}$	$K = 253,12 \text{ MPa}$
	$\epsilon_0 = 38,33 \times 10^{-4}$	$N = 0,09$
	$n = 18$	$\sigma_{res} = 388,70 \text{ MPa}$
	$\alpha = 0,0011$	

* Observação: Os parâmetros foram obtidos por regressão não-linear através do programa BMDP - P3R

6.4 Determinação do Coeficiente de atrito e das Cargas de Compressão

As condições de atrito, para utilização no problema proposto, foram estabelecidas através da aplicação do ensaio do anel sugerido por MALE e COCKROFT⁸. As determinações dos coeficientes de atrito μ de COULOMB foram obtidas através da figura 6.3, em MALE⁹, segundo a proporcionalidade entre as dimensões iniciais da forma: $D_{0\text{externo}} : D_{0\text{interno}} : H_0 = 48,10 \text{ mm} : 20,00 \text{ mm} : 16,00 \text{ mm}$. Os resultados dos coeficientes de atrito estão apresentados na tabela 6.3 .

O cálculo da carga de recalque ou compressão de cilindros seguiu a formulação proposta por RICHARDSON¹⁰ e colaboradores, na forma:

$$P = \pi D_0^2 \frac{H_0}{H} K \epsilon^N \dot{\epsilon}^M \left\{ 1 + \frac{2m D_0}{3 \sqrt{3} H_0} \left[\frac{H_0}{H} \right]^{3/2} \right\} \quad 6.1$$

onde:

P : carga externa a ser avaliada em kN

D_0 e D : diâmetros inicial e final do corpo de prova

H_0 e H: alturas inicial e final nos ensaios

m: fator de atrito constante, obtido pela relação dada por 3.144

$\dot{\epsilon}$: é a taxa de deformação

N: é o expoente de encruamento de HOLLÖMON

M: expoente de sensibilidade à taxa de deformação e $M=0$ para ensaios quasi-estáticos

K: é o fator de resistência na expressão de HOLLÖMON.

A expressão 6.1 foi utilizada para a determinação da capacidade de carga para seleção do equipamento de ensaio.

Tabela 6.3 - Determinação do coeficiente de Atrito

μ pelo ensaio de anel.

Condição de lubrificação nas interfaces do anel	óleo lubrificante SAE 20W-40 Classificação API-SF	ausência de lubrificante (a seco)
Variação do diâmetro interno $\left(\frac{\Delta D}{D_{0 \text{ interno}}} \right)_{\text{medio}}$	-2,25 $\pm$ 0,51%	20,98 $\pm$ 5,23%
porcentagem de redução da altura $\left(\Delta H / H_0 \right)_{\text{medio}}$	15,73 $\pm$ 3,04%	31,88% $\pm$ 5,05%
valor do coeficiente de atrito μ	0,033 $\pm$ 0,005	0,319 $\pm$ 0,050

Os valores de atrito para as condições de ensaios foram obtidos por interpolação gráfica na figura 6.3, por meio do ensaio de anel MALE^{8,6}, baseados nos ensaios de três anéis para cada tipo de condição de lubrificação na interface, em temperatura ambiente. Os erros foram estimados de acordo com a metodologia apresentada em HOLMAN¹¹.

As figuras 6.4 e 6.5 mostram as respectivas cargas avaliadas através da equação 6.1. e as aplicadas experimentalmente nos ensaios.

Figura 6.3 - Diagrama para determinação do Coeficiente de atrito μ , pelo ensaio de anel. MALE^{8,9}.

Figura 6.4 - Cargas para $\mu = 0,319 \pm 0,050$
 a seco, superfícies como
 torneadas por faceamento
 de desbaste.

Figura 6.5 - Cargas para $\mu = 0,033 \pm 0,005$
 óleo lubrificante automotivo
 SAE 20W-40
 Classificação API-SF

6.5 Ensaaios de Conformabilidade

Os ensaios de conformabilidade estabelecem a ductilidade do material sob condições padronizadas. E como na maioria dos processos de conformação plástica observa-se a ocorrência de deformações compressivas então, o ensaio de compressão será sempre o mais apropriado a ser aplicado na prática.

Os ensaios de conformabilidade, como serão denominados, foram realizados segundo os procedimentos relevantes especificados pela norma ASTM¹⁵ E 813-87, referente a ensaios para a determinação experimental da tenacidade à fratura J_{Ic} .

O caso da compressão quasi-estática de corpos de provas cilíndricos representa a simulação do forjamento em matriz plana de tarugos cilíndrico com velocidade de avanço do êmbolo constante. O mesmo caso difere em muitos aspectos do ensaio para a determinação de J_{Ic} , mas ainda é de fundamental importância para a quantificação e elaboração dos diagramas de conformabilidade.

Uma máquina de ensaio de compressão com capacidade para 2000 kN, pertencente ao Laboratório de Ensaaios Mecânicos do IPT, foi utilizada para a realização dos ensaios deste trabalho.

Um microscópio ótico com equipamento fotomicrográfico da marca Jenavert, modelo mf-AKS 24x36 automatic-2, fabricado pela Carl Zeiss, pertencente à Divisão de Mecânica e Eletricidade do IPT, foi utilizado para o registro e medição das fraturas que ocorreram nas superfícies dos corpos de provas.

O procedimento experimental, de acordo com o proposto pela ASTM⁵, consistiu na compressão independente de no mínimo seis corpos de provas de dimensões padronizadas, como mostra a figura 6.4, sob uma especificada condição de atrito na interface material metálico-matriz.

Cada corpo de prova foi levado, em uma primeira fase e na medida do possível, a uma condição de carregamento extremo, cujo objetivo foi o de provocar o surgimento de trincas superficiais possíveis de serem visíveis a olho nu.

Foram realizados os registros das condições de atrito, das reduções de alturas, das medições das grelhas gravadas nas superfícies para avaliação das deformações locais, dos registros das cargas externas e das medições das aberturas máximas das trincas, com referência básica no equador dos corpos de provas.

Figura 6.6 - Dimensões dos corpos de provas, padronizadas para a realização do ensaio de conformabilidade.

Em uma segunda fase, os ensaios consistiram em registrar os aumentos nas dimensões das trincas após respectivos aumentos nas cargas, possibilitando a o registro dos valores incrementais de abertura das novas e as das já existentes trincas.

Os resultados obtidos nos ensaios são apresentados nas figuras 6.7 e 6.8, para os casos iniciais de aparecimento ou não de trincas superficiais e também para os casos finais nas condições de ensaios especificadas.

Figura 6.7 Mapa de deformações para o caso de ausência de lubrificação na interface êmbolo-corpo de prova
coeficiente de atrito $\mu = 0,319$

mapa de deformações
 × experimental * redução

Figura 6.8 Mapa de deformações para o caso da presença de lubrificação na interface êmbolo-corpo de prova com óleo lubrificante SAE 20W-40, classe SF
 coeficiente de atrito $\mu = 0,033$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS - Capítulo 6

1. ASTM-E9-81 Standard methods of compression testing of metallic materials at room temperature, 1983. *Annual Book of ASTM Standards*, part 10, 1983. pp.140-152
2. LEE, P.W. & KHUN, H.A. Cold upset testing. In: DIETER, G.E. (ed.) *Workability Testing Techniques*. Metals Park, OH, American Society for Metals, 1984. pp.37-50
3. KUDO, H. and AOI, K. Effect of compression test condition upon fracturing of a medium carbon steel - study on cold-forgability test: part II. *Journal of the Japan Society of Technical Plasticity*, 8:17-27, 1967.
4. THOMASON, P.F. Tensile plastic instability and ductile fracture criteria in uniaxial compression tests. *International Journal of Mechanical Science*, 11:187-198, 1969.
5. KOBAYASHI, S. Deformation characteristics and ductile fracture of 1040 steel in simple upsetting of solid cylinders and rings. *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry*, 92(2):391-399, May 1970.
6. KHUN, H.A.; LEE, P.W. and ERTURK, T. A fracture criterion for cold forming. *Transactions of the ASME, Journal of Engineering Materials and Technology*, Oct. 1973. pp.213-218
7. JENNER, A. and DODD, B. Cold upsetting and free surface ductility. *Journal of Mechanical Working Technology*, 5:31-43, 1981.
8. MALE, A.T. and COCKCROFT, M.G. A method for the determination of the coefficient of friction of metals under conditions of bulk plastic deformation. *Journal of the Institute of Metals*. 93:38-46, 1964/1965.

9. MALE, A.T. The friction of metals undergoing plastic deformation at elevated temperatures. Doctor of Philosophy Thesis, University of Birmingham, Oct. 1962. pp.38a.
10. RICHARDSON, G.J.; HAWKINS, D.N. and SELLARS, C.M. Worked examples in metalworking. The Institute of Metals, London, 1985.
11. HOLMAN, J. P. and GADJA JR, W.J. Experimental methods for engineers. Third Edition, McGraw-Hill, New York, 1978.
12. JENNRICH, R.I. Nonlinear regression in: BMDP statistical software 1981. University of California, Berkeley, 1981. pp.290-343.
13. RAMBERG, W. and OSGOOD, W. Description of stress-strain curves by three parameters, NACA TN 902, Jul, 1943.
14. HOLLOMON, J.H. Tensile deformation. Transactions of AIME, 162, 1945, pp.268-290.
15. ASTM, E813-81, Standard Test Method for J_{Ic} , a Measure of Fracture Toughness, 1988. Annual Book of ASTM Standards. Section 3, volume 03.01. Metals Test Methods and Analytical Procedures, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, PA, 1988.

7. RESULTADOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para a aplicação do modelo de ensaio da conformabilidade pela mecânica da fratura não-linear, os seguintes procedimentos foram observados:

- a) análise da composição e da microestrutura do material de ensaio com a finalidade de sua caracterização para os estudos da fratura dúctil, tabela 6.1;
- b) determinação experimental dos parâmetros necessários para as expressões de HOLLLOMON e de RAMBERG-OSGOOD¹, cujos valores foram determinados pelo programa computacional BMDP-3PR, desenvolvido por JENNRICH² na Universidade da Califórnia e processado no computador UNISYS B-7900 da Universidade de São Paulo, cujos resultados são mostrados na tabela 6.2;
- c) determinação dos coeficientes de atrito de COULOMB, obtidos pelo ensaio do anel proposto por MALE e COCKCROFT³, cujo diagrama é mostrado na figura 6.3 e valores obtidos estão tabulados na tabela 6.3;

As figuras 6.4 e 6.5 mostram os valores da carga teórica obtida pela equação 6.1 e da carga experimental lida no mostrador da máquina de ensaio de compressão. Ambas as cargas estão representadas em função do deslocamento do êmbolo e da porcentagem de redução de altura do cilindro de teste. A utilização da equação 6.1 visou a determinação da capacidade de carga necessária para a seleção da máquina de ensaio para a realização dos experimentos.

As dimensões do corpo de prova são mostradas na figura 6.6,

sendo que as deformações localizadas foram obtidas por medições diretas das grelhas gravadas nas superfícies dos corpos de provas, como é mostrado na figura 6.1.

O corpo de prova utilizado é o do tipo representado pela figura 6.2a e o mesmo é pertencente à família de corpos de provas idealizados para os ensaios de conformabilidade plástica de processos do tipo compressivo. Essa família de ensaios é também mostrada na figura 6.2.

As figuras 6.7 e 6.8 apresentam os mapas experimentais das deformações em função da porcentagem de redução de altura dos corpos de provas. Esses tipos de mapas representam os resultados muito utilizados na literatura técnica e sua importância é discutida em DIETER⁴.

Para as duas condições de atritos ensaiadas, observa-se que existe uma grande dispersão nos resultados dos ensaios. A razão principal é a extrema dependência do modo de fratura dúctil da microestrutura constituinte dominante no material de ensaio. As fraturas típicas encontradas nos ensaios, cujos corpos de provas estão representados em seus estágios típicos de deformação pela figura 7.1, são mostradas nas figuras 7.2 e 7.3 que apresentam as fraturas superficiais para os típicos corpos de provas identificados como sendo: CP5i, CP14i, CP6i e CP6f.

a

b

Figura 7.1 Corpo de prova típico mostrando os estágios de deformações inicial, intermediários e final do ensaio de compressão em matriz aberta:

a) vista lateral

b) vista de topo

a .

b

Figura 7.2 Fotomicrografia de corpos de provas típicos mostrando as aberturas de trincas superficiais :

- a) corpo de prova CP5i, abertura máxima
- b) corpo de prova CP14i, região de estreitamento

a

b

Figura 7.3 Fotomicrografia de corpos de provas típicos mostrando as aberturas de trincas superficiais :

- a) corpo de prova CP6i, região de abertura máxima
- b) corpo de prova CP6f, região de abertura máxima

As tabelas 7.1 e 7.2 mostram os valores necessários para construção das figuras 7.4, 7.5 e 7.7 pelo uso das integrais invariantes da mecânica da fratura não-linear elasto-plástica. Os mapas de conformabilidade plástica representados pelas figuras 7.5 e 7.6 mostram que os menores valores da integral- $\hat{J}$ são os críticos e convergem para um único par de valores de deformações que formam um critério fortemente discriminador nos diagramas. O valor crítico da integral- $\hat{J}$ é o fornecido pelo processo mais severo de conformação plástica, representado pelo ensaio de compressão com ausência de lubrificante na interface matriz-obra. A integral- $\hat{J}$ nessa condição de severidade de processo de compressão plástica pode ser considerada como um parâmetro característico do processo de conformação plástica.

Os valores da integral- $\hat{J}$, definida pela equação 4.50, foram obtidos pela expressão 4.54 baseado na expressão variacional 3.122a e pela equação geral 3.38.

Tabela 7.1 Valores experimentais para o caso de ausência de lubrificante coeficiente de atrito $\mu=0.319$

corpo de prova i= inicial f= final	deslocamento do êmbolo [mm]	altura do cilindro [mm]	% de redução de altura	força [kN]	abertura da trinca [mm]	deformação circunferencial	deformação longitudinal
CP1i	0,00	37,70	0,00	0,0	0,000	0,000	0,000
CP1f	0,00	37,70	0,00	0,0	0,000	0,000	0,000
CP6i	14,85	22,85	39,39	480,0	0,180	0,392	-0,256
CP3i	16,60	21,10	44,03	410,0	0,000	0,345	-0,406
CP4i	18,45	19,25	48,94	450,0	0,210	0,386	-0,268
CP3f	19,85	17,85	52,85	510,0	0,000	0,412	-0,482
CP4f	20,15	17,45	53,71	500,0	4,300	0,352	-0,348
CP5i	20,75	16,95	55,04	550,0	0,225	0,366	-0,377
CP7i	21,45	16,25	56,90	530,0	5,030	0,392	-0,362
CP6f	21,55	16,15	57,16	530,0	4,508	0,392	-0,435
CP2i	22,50	15,20	59,68	560,0	0,510	0,463	-0,482
CP7f	22,75	14,95	60,34	560,0	5,630	0,317	-0,451
CP5f	22,85	14,84	60,61	610,0	6,030	0,288	-0,482
CP2f	23,90	13,80	63,40	610,0	0,540	0,505	-0,514

Observação: CP4i significa corpo de prova número 4 na condição de primeiro estágio de redução

CP6f significa corpo de prova número 6 na condição de segundo estágio de redução

Tabela 7.2 Valores experimentais para o caso de lubrificante

SAE 20W-40 classe SF $\mu=0.033$

corpo de prova i=inicial f=final	deslocamento do êmbolo [mm]	altura do cilindro [mm]	% de redução de altura	força [kN]	abertura da trinca [mm]	deformação circunferencial	deformação longitudinal
CP8i	0,00	37,70	0,00	0,0	0,000	0,000	0,000
CP8f	0,00	37,70	0,00	0,0	0,000	0,000	0,000
CP9i	3,20	34,50	8,49	250,0	0,000	0,000	-0,125
CP10i	11,35	26,35	30,11	300,0	0,000	0,111	-0,231
CP9f	12,40	25,30	32,89	350,0	0,000	0,295	-0,243
CP11i	15,30	22,40	40,58	400,0	0,000	0,412	-0,482
CP10f	17,00	20,70	45,09	400,0	0,000	0,203	-0,348
CP13i	18,15	19,55	48,14	450,0	0,000	0,392	-0,435
CP11f	19,30	18,40	51,19	500,0	0,000	0,000	0,000
CP13f	21,10	16,60	55,97	550,0	0,000	0,386	-0,615
CP12i	23,20	14,50	61,54	610,0	0,060	0,258	-0,435
CP12f	25,40	12,30	67,37	710,0	0,090	0,338	-0,600
CP14i	25,80	11,90	68,44	800,0	0,180	0,317	-0,377
CP14f	26,95	10,75	71,49	850,0	0,600	0,372	-0,565

Observação: CP13i significa corpo de prova número 4 na condição de primeiro estágio de redução

CP14f significa corpo de prova número 6 na condição de segundo estágio de redução

As deformações correspondentes aos valores críticos da integral- $\hat{J}$ foram obtidas através das relações 5.28b, considerando a maior severidade possível de deformação plástica que é o estado de deformação plana, com o auxílio das figuras 5.2a e 5.3, sendo que o valor radial r foi relacionado à condição de abertura de trinca expressa pelas equações 5.30, 5.31a e 5.32.

Figura 7.4 Mapa da variação de energia e da integral- $\hat{J}$ na condição de atrito a seco $\mu=0,319$ em função da variação da abertura da trinca

Figura 7.5 Mapa de conformabilidade plástica na condição de atrito a seco $\mu=0,319$, relacionando deformações e porcentagem de redução de altura. Os símbolos se referem à presença de trincas

Figura 7.6 Mapa de conformabilidade plástica na condição de atrito lubrificado SAE 20W-40 classe SF $\mu=0,033$ relacionando deformações e porcentagem de redução de altura. Os símbolos se referem à presença de trincas.

variação abertura trinca

var.abert.trinca

× variação energia integral-J / 3D

Figura 7.7 Mapa da variação de energia e da integral- $\hat{J}$ na condição de atrito com lubrificante $\mu=0,033$ em função da variação da abertura da trinca

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS - Capítulo 7

1. RAMBERG, W. and OSGOOD, W. Description of stress-strain curves by three parameters, *NACA TN 902* , July 1943.
2. JENNRICH, R.I. Nonlinear regression in: *BMDP Statistical Software 1981*. University of California, Berkeley, 1981. pp.290-343.
3. MALE, A.T. and COCKCROFT, M.G. A method for the determination of the coefficient of friction of metals under conditions of bulk plastic deformation. *Journal of the Institute of Metals*. 93:38-46, 1964/1965.
4. DIETER, G.E. (editor). Workability testing techniques. *American Society for Metals*. Metals Park, Ohio. 1984.

8. CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS

8.1 Conclusões

1) O método de ensaio de conformabilidade plástica, desenvolvido neste trabalho, resultou na construção de um mapa de conformabilidade baseado em uma integral invariante da mecânica da fratura não-linear elasto-plástica denominada de integral- $\hat{J}$, com a vantagem de que não apresenta pontos dispersos de deformações.

2) O método mostrou-se adequado para a análise das condições severas de conformabilidade representada pela ausência de lubrificação na interface matriz-obra.

3) O trabalho foi realizado por simulação experimental, através de ensaios de compressão em matriz aberta, do forjamento a frio de um material apresentando propriedade de média ductilidade; essa propriedade permitiu a obtenção de fraturas superficiais macroscópicas de fácil detecção por meios de instrumentação óptica de baixo custo.

8.2 Sugestões de trabalhos

O desenvolvimento desta pesquisa contribui para o estudo de importantes problemas de conformabilidade plástica, e para tanto é importante padronização do método de ensaio proposto. Essa possível padronização permitirá a construção de mapas de conformabilidade plástica para a maioria dos materiais metálicos em uso na indústria. Cita-se como exemplo os aços carbonos comuns.

Uma pesquisa importante a ser realizada pode ser o estudo dos

efeitos das mais variadas condições de atritos na interface matriz-corpo de prova.

Os efeitos da temperatura de conformação no mapa de conformabilidade, construído pela mecânica da fratura não-linear, principalmente a influência do trabalho a quente no mesmo mapa é uma importante sugestão de trabalho, juntamente com os possíveis efeitos nos mapas da variação das taxas de deformações impostas nos processos de conformação.

O desenvolvimento desta pesquisa permitiu elaborar as seguintes sugestões de trabalhos futuros:

- 1) Estudo da padronização do ensaio proposto;
- 2) Construção de mapas de conformabilidade plástica dos materiais metálicos e estudos da influência de diversas variáveis microestruturais na conformabilidade desses materiais;
- 3) Estudos da influência das condições de atrito na interface ferramenta-peça na conformabilidade plástica ;
- 4) Estudos da influência da temperatura e das velocidades de deformações na conformabilidade dos materiais.
- 5) Estudo da propagação de fraturas internas caso seja possível relacionar as deformações externas mensuráveis com as propriedades invariantes das integrais- $\hat{J}$.

LISTAS DE FIGURAS E TABELAS

Figuras

Figura 3.1. - Deformação de um corpo em função de suas coordenadas generalizadas curvilíneas:

Figura 3.2. - Incrementos de Tração nos estados original e deformado.

Figura 3.3. - Problema a ser resolvido pelo método variacional num volume V , limitado pelo contorno da superfície S .

Figura 3.4. - Fronteiras de descontinuidades no campo de velocidades.

Figura 3.5. - Variação da tensão de cisalhamento em função da tensão de contato, AVITZUR⁶².

Figura 3.6 - Modelo de atrito de OROWAN. Separação do atrito em dois mecanismos independentes.

Figura 3.7 - Modelo de atrito de SHAW.

Figura 4.1 - Modelo de DUGDALE para fratura não-linear

Figura 4.2 Representação geométrica do campo de tensões numa frente de trinca

Figura 4.3 Geometria para aplicação das integrais J e M

Figura 4.4 Representação geométrica da região de processo de fratura

Figura 4.5 Representação esquemática de uma trinca em 3D

Figura 4.6 - Representação tridimensional de um problema de extensão de trinca.

Figura 4.7 - Configuração da frente de uma trinca e o volume para integração.

Figura 5.1 Sistema de coordenadas na ponta de uma trinca em 2D

Figura 5.2a - Estruturas do modo I de trinca na deformação plana.

Figura 5.2b - Estruturas do modo I de trinca na tensão plana.

Figura 5.3 - Variação de I_n com n para tensão plana e deformação plana.

Figura 5.4 - Definição do deslocamento de abertura da trinca COD.

Figura 5.5 - Dependência de d_n função de n e σ_0/E .

Figura 6.1 - Diagrama esquemático do ensaio de compressão.

Figura 6.2 - Ilustração dos estados superficiais de deformações para os ensaios (a)recalque, (b)laminação, (c)flexão.

Figura 6.3 - Diagrama para determinação do Coeficiente de atrito μ , pelo ensaio de anel.

Figura 6.4 - Cargas para $\mu = 0,319 \pm 0,050$ a seco, superfícies como torneadas por faceamento de desbaste.

Figura 6.5 - Cargas para $\mu = 0,033 \pm 0,005$, óleo lubrificante automotivo SAE 20W-40, Classificação API-SF.

Figura 6.6 - Dimensões dos corpos de provas, padronizadas para a realização do ensaio de conformabilidade, utilizada neste trabalho.

Figura 6.7 Mapa de deformações para o caso de ausência de lubrificante.

Figura 6.8 Mapa de deformações para o caso da presença de lubrificante.

Figura 7.1 Corpo de prova típico mostrando os estágios de deformações inicial, intermediários e final do ensaio de compressão em matriz aberta.

Figura 7.2 Fotomicrografia de corpos de provas típicos mostrando as aberturas de trincas superficiais.

Figura 7.3 Fotomicrografia de corpos de provas típicos mostrando as aberturas de trincas superficiais .

Figura 7.4 Mapa da variação de energia e da integral- $\hat{J}$ na condição de atrito a seco $\mu=0,319$ em função da variação da abertura da trinca.

Figura 7.5 Mapa de conformabilidade plástica na condição de atrito a seco $\mu=0,319$, relacionando deformações e porcentagem de redução de altura. Os símbolos se referem à presença de trincas.

Figura 7.6 Mapa de conformabilidade plástica na condição de atrito lubrificado SAE 20W-40 classe SF $\mu=0,033$ relacionando deformações e porcentagem de redução de altura. Os símbolos se referem à presença de trincas.

Figura 7.7 Mapa da variação de energia e da integral- $\hat{J}$ na condição de atrito com lubrificante $\mu=0,033$ em função da variação da abertura da trinca.

Tabelas

Tabela 6.1 Composição da liga UNS A92014-T6.

Tabela 6.2. Expressões do ensaio de tração da liga UNS A92014-T6.

Tabela 6.3 - Determinação do coeficiente de Atrito μ pelo ensaio de anel.

Tabela 7.1 Valores experimentais para o caso de ausência de lubrificante coeficiente de atrito $\mu=0.319$.

Tabela 7.2 Valores experimentais para o caso de lubrificante SAE 20W-40 classe SF $\mu=0.033$.

APÊNDICE
FLUXO DE ENERGIA PARA O INTERIOR DE UMA
REGIÃO DE PROCESSO DE FRATURA

Este apêndice descreve o método de análise do fluxo de energia para o interior de uma região de processo de fratura, baseado no trabalho de AOKI¹ e colaboradores.

Seja um problema de propagação de uma trinca no estado tridimensional, como mostra a figura A.1, onde:

Γ_{final} é a fronteira da região de processo A_{final} , Γ é uma curva arbitrária, que envolve a curva Γ_{final} , Γ_s são curvas ao longo das superfícies de trincas, A é a região regular envolvida pelas curvas Γ , Γ_s e Γ_{final} . O sistema de referência é retangular fixo, com origem em 0 e centrado na ponta da trinca no instante inicial $t=t_0$ e com os eixos definidos em X_1 e X_2 .

Na região A são válidas as relações da mecânica dos meios contínuos definidas pelas equação de movimento, relação de formação e deslocamento da frente da trinca, primeira e segunda lei da termodinâmica, definição de energia cinética K e relação entre tensão e tração superficial, respectivamente, descritas a seguir pelas relações válidas para a região A :

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad A.1a$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad A.1b$$

$$\rho \dot{e} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - q_{i,i} + \rho \gamma \quad A.1c$$

$$\rho \dot{n} = - \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} + \rho \frac{\gamma}{T} + \rho \nu \quad A.1d$$

$$\rho \dot{K} = \rho \ddot{u}_i \ddot{u}_i$$

A.1e

sendo que:

$$T_{ij} = \sigma_{ij} \tilde{n}_j, \quad \text{sobre } \Gamma, \Gamma_s \text{ e } \Gamma_{\text{final}}$$

e:

F_i : força de corpo

ρ : densidade

q_i : fluxo de calor

γ : calor produzido por fontes internas

e : energia interna

n : entropia

$\nu \geq 0$: produção de entropia

T : temperatura

n_i : norma unitária sobre as curvas Γ , Γ_s e Γ_{final}

$$\dot{f} = \frac{d}{dt} f$$

$$f_{,i} = \frac{\partial}{\partial X_i} f$$

Considerando, agora, uma extensão infinitesimal de uma trinca, a fronteira da região do processo é pode mover com a ponta da trinca, como na figura A.1.

Figura A.1 - Trinca em um material elasto-plástico no caso de um problema bidimensional. AOKI¹

E as equações dos balanços de energia e de entropia são representadas por:

$$\int_{\Gamma+\Gamma_s} (T_1 \dot{u}_1 - q_1 n_1) d\Gamma + \int_A (F_1 \dot{u}_1 + \rho \gamma) dA = \frac{d}{dt} \int_A \rho (K + e) dA + \Phi \quad A.2$$

$$\left[\Gamma + \Gamma_s \left(\frac{-q_1 n_1}{T} d\Gamma + \right) \right] \int_A \rho \left(\frac{\gamma}{T} + \nu \right) dA = \frac{d}{dt} \left[\int_A \rho \eta dA + S \right] \quad A.3$$

onde:

Φ é o fluxo total de energia na região de processo

S é a entropia na região de processo

ou seja, S e ϕ são as taxas que a entropia e a energia total são absorvidas na região de processo de fratura.

Usando o teorema de Gauss e para V_1 representando a velocidade da curva Γ_{final} , obtém-se:

$$\Phi = \int_{\Gamma_{final}} \phi \, d\Gamma \quad A.4$$

$$S = \int_{\Gamma_{final}} s \, d\Gamma \quad A.5$$

onde:

$$\phi = \rho(K + e)V_1 n_1 + T_1 \dot{u}_1 - q_1 n_1$$

$$s = \rho \eta v_1 - n_1 - \frac{q_1 n_1}{T}$$

O fluxo de energia livre F , a taxa na qual a energia é livre é absorvida na região de processo, é representada por:

$$F = \int_{\Gamma_{final}} (\phi - T_s) \, d\Gamma \quad A.6$$

A combinação de A.4, A.5 e A.6 fornece a expressão:

$$F = \int_{\Gamma_{final}} \left\{ \rho(K + f) V n + T \dot{u} \right\} \, d\Gamma \quad A.7$$

f é a energia livre de HELMHOLTZ.

A velocidade de Γ_{final} , pode ser decomposta nos componentes de translação, tendo a trinca uma velocidade v_1 , de rotação com velocidade angular da trinca sendo ω_3 e expansão auto-similar a X_1 e distorção h_1 :

$$V_1 = v_1 + e_{121} \omega_3 X_1 + a X_1 + h_1 \quad A.8$$

válido para quando $t = t_0$,

sendo e_{121} o tensor alternante.

A velocidade de uma partícula na curva Γ_{final} $\dot{u}_1$ é escrita como sendo:

$$\dot{u}_1 = \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{\Gamma_{final}} - \frac{\partial u_1}{\partial X_j} V_j \quad A.9$$

Das equações A.4, A.5, A.8 e A.9, obtém-se

$$\Phi = v_\alpha \hat{J}_\alpha + \omega_3 \hat{L}_3 + a\hat{M} + I \quad A.10$$

para $\alpha=1,2$

onde:

$$\begin{aligned} \hat{J}_\alpha &= \int_{\Gamma_{final}} \left\{ \rho(K + e)u_\alpha - T_i \frac{\partial u_1}{\partial X_\alpha} \right\} d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma_{final}} e_{i3l} X_l \left\{ \rho(K + e)n_i - T_j \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad A.11$$

$$\hat{M} = \int_{\Gamma_{final}} X_l \left\{ (K + e)n_l - T_j \frac{\partial u_j}{\partial X_l} \right\} d\Gamma \quad A.12$$

$$\hat{I} = \int_{\Gamma_{final}} \left\{ (K + e)h_i n_i + T_i \left(\left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{\Gamma_{final}} - \frac{\partial u_1}{\partial X_i} h_j \right) - q_i n_i \right\} d\Gamma \quad A.13$$

$\hat{J}_\alpha$, $\hat{L}_3$, $\hat{M}$ e $\hat{I}$ poderão ser interpretados como os componentes do fluxo de energia total associados, respectivamente, com: translação, rotação, expansão auto-similar e distorção, sendo que $\hat{I}$ envolve, também, o termo associado com o fluxo de calor.

A aplicação do teorema de Gauss na equação A.11, fornece a expressão:

$$\hat{J}_\alpha = \int_{\Gamma+\Gamma_s} \left(W^e n_\alpha - T_i \frac{\partial u_1}{\partial X_\alpha} \right) d\Gamma + \iiint_A \left\{ \left(\ddot{u}_1 - F_1 \right) \frac{\partial u_1}{\partial X_\alpha} + \right.$$

$$+ \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^*}{\partial X_\alpha} \} d\Gamma + \int_{\Gamma_{final}} \{ \rho(K + e) - W^e \} n_\alpha d\Gamma \quad A.14$$

onde a deformação foi decomposta na forma:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^* \quad A.15$$

para os seguintes parâmetros:

ε_{ij} é a deformação inelástica (deformação térmica ou deformação plástica)

ε_{ij}^e é a deformação elástica, relacionada com a tensão elástica σ_{ij} e a densidade de energia elástica, na forma:

$$\frac{\partial W^e}{\partial \varepsilon_{ij}^e} (\varepsilon_{ij}^e) = \sigma_{ij} \quad A.16$$

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA. - Apêndice

1. AOKI, S.; KISHIMOTO, K. and SAKATA, M. Energy flux into process region in elastic-plastic fracture problems. *Engineering Fracture Mechanics*, 19(5):827-836, 1984.