FLÁVIO CELSO TRIGO

**FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN APLICADO À
TOMOGRAFIA POR IMPEDÂNCIA ELÉTRICA**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do título de
Mestre em Engenharia

São Paulo
2001

FLÁVIO CELSO TRIGO

**FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN APLICADO À
TOMOGRAFIA POR IMPEDÂNCIA ELÉTRICA**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do título de
Mestre em Engenharia

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

Orientador:
Prof. Dr. Raul González Lima

São Paulo
2001

*A meus pais,
Jair e Neide*

Agradecimentos

Ao amigo e Prof. Dr. Raúl González Lima, pela orientação segura e colaboração constante.

À Prof^a Dr^a Joyce S. Bevilacqua, ao Prof. Dr. Agenor T. Fleury e ao Prof. Dr. Marcelo B. P. Amato, cujas críticas, comentários e sugestões enriqueceram sobremaneira o conteúdo desta dissertação.

À minha esposa, Andrea, que me incentiva e encoraja constantemente.

Aos colegas do grupo de Tomografia por Impedância Elétrica, por seu indispensável apoio.

A todos os amigos que, de uma maneira ou de outra, contribuíram para a realização do trabalho.

Este projeto foi desenvolvido entre 1999 e 2001 no Departamento de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo e contou com apoio financeiro da CAPES.

Sumário

Lista de Figuras	iii
Lista de Símbolos	v
Resumo	vi
Abstract	vii
1 Introdução	1
2 Objetivos	7
3 Revisão da Literatura	8
3.1 EIT	8
3.2 Filtro de Kalman	14
4 Formulação Teórica	17
4.1 Modelos do Domínio e dos Eletrodos	17
4.2 Discretização Utilizando o Método dos Elementos Finitos	21
4.3 Solução do Problema Direto	29
4.4 Solução do Problema Inverso	30
4.4.1 Abordagem Clássica	30
4.4.1.1 Problema Relativo	34
4.4.2 Abordagem Dinâmica	36
4.4.2.1 Filtro Estendido de Kalman	38
5 Metodologia das Simulações Numéricas	44
5.1 Características das Malhas de Elementos Finitos	44
5.2 Métodos e Parâmetros de Simulação	48
6 Resultados e Discussão	54
6.1 Problema Relativo	55
6.2 Filtro Estendido de Kalman	71
7 Conclusões e Sugestões de Desenvolvimento	90

<i>SUMÁRIO</i>	ii
Apêndices	I
A Diagramas de blocos	I
B Filtro estendido de Kalman	IV

Lista de Figuras

1.1	Definição de <i>condutividades absolutas e variações de condutividades</i>	5
3.1	Diagrama de localização do filtro estendido de Kalman no universo dos procedimentos de estimação	15
4.1	Representação de um domínio bidimensional genérico Γ com distribuição estacionária de carga $q_1, \dots, q_n$ e condutividade $\sigma(x, y)$	17
4.2	Discretização de um domínio que representa o tórax humano em elementos finitos triangulares	21
4.3	Elemento triangular genérico	22
4.4	Diagrama de evolução temporal do filtro estendido de Kalman	43
5.1	Malha de elementos finitos com 96 elementos e 65 nós	45
5.2	Malha de elementos finitos com 32 elementos e 25 nós	46
6.1	Região em que foi provocada uma alteração de condutividade	55
6.2	Problema relativo: Simulação 1	56
6.3	Problema relativo: Simulação 2	59
6.4	Problema relativo: Simulação 4	59
6.5	Problema relativo: Simulação 5	60
6.6	Problema relativo: Simulação 6	60
6.7	Problema relativo: Simulação 7	61
6.8	Problema relativo: condutividade estimada - índice de erro	63
6.9	Diagrama de <i>aderência x suavidade</i> de soluções	70
6.10	Filtro estendido de Kalman - 5 ROIs - Simulação 1	73
6.11	Filtro estendido de Kalman - 5 ROIs - Simulação 2	73
6.12	Filtro estendido de Kalman - 5 ROIs - Simulação 3	74
6.13	Resíduos - 5 ROIs - Simulação 1	75
6.14	Resíduos - 5 ROIs - Simulação 2	75
6.15	Resíduos - 5 ROIs - Simulação 3	76
6.16	Filtro estendido de Kalman - 8 ROIs - Simulação 4	77
6.17	Filtro estendido de Kalman - 8 ROIs - Simulação 5	77
6.18	Filtro estendido de Kalman - 8 ROIs - Simulação 6	78
6.19	Resíduos - 8 ROIs - Simulação 4	78
6.20	Resíduos - 8 ROIs - Simulação 5	78
6.21	Resíduos - 8 ROIs - Simulação 6	79
6.22	Filtro estendido de Kalman - 16 ROIs - Simulação 7	81

6.23	Filtro estendido de Kalman - 16 ROIs - Simulação 8	81
6.24	Filtro estendido de Kalman - 16 ROIs - matrizes de ganho de Kalman	82
6.25	Resíduos - 16 ROIs - Simulação 7	82
6.26	Resíduos - 16 ROIs - Simulação 8	82
6.27	Representação gráfica esperada de alterações de condutividades em 2 ROIs	87
6.28	Representação gráfica estimada de alterações de condutividades em 2 ROIs	87
6.29	Bancada experimental	88
6.30	Avaliação do algoritmo com dados experimentais - figura projetada .	89
6.31	Bancada experimental	89
A.1	Algoritmos de montagem de matrizes de rigidez e derivadas, cálculo de voltagens teóricas e inclusão de ruído	II
A.2	Algoritmo do Filtro Estendido de Kalman	III

Lista de Símbolos

Γ :	domínio contínuo
$\sigma(x, y)$:	distribuição contínua de condutividade no domínio Γ
$E, \mathcal{B}$:	campo elétrico, indutância magnética
Ψ :	potencial elétrico
$\mathbf{J}$:	densidade de corrente no domínio
J_ℓ :	densidade de corrente no ℓ -ésimo eletrodo
$V(x, y)$:	distribuição de voltagens em um domínio discretizado
$v_e(x, y)$:	distribuição de voltagens em um elemento do domínio discretizado
v_{e1}, v_{e2}, v_{e3} :	voltagens nodais em um elemento triangular genérico
$\mathbf{v}_e^*$:	vetor de voltagens nodais de um elemento triangular genérico
π_e :	princípio variacional correspondente à equação de Poisson para o elemento e
Y_e :	matriz local de rigidez do elemento e
$Y_{e_{i,j}}$:	elemento da matriz local de rigidez do elemento e
$\bar{Y}_e$:	matriz local de rigidez do elemento e em coordenadas globais
Y :	matriz global de rigidez
m, s, ℓ :	números de elementos, nós e eletrodos do domínio discretizado
p :	número de padrões linearmente independentes de corrente
$\mathbf{c}_p$:	vetor de correntes aplicadas correspondente ao p -ésimo padrão de corrente
$\bar{\mathbf{v}}_p(\boldsymbol{\sigma})$:	vetor de voltagens calculadas correspondente ao p -ésimo padrão de corrente
T :	matriz que seleciona os ℓ nós contendo eletrodos, onde pode-se ler voltagens
C :	matriz contendo os p vetores de padrões de corrente
$V(\boldsymbol{\sigma})$:	matriz contendo os p vetores de voltagens medidas
$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_0$:	vetores de distribuição de condutividade no domínio discretizado
$\mathcal{H}(\boldsymbol{\sigma})$:	matriz de sensibilidade correspondente a todos os padrões de correntes
$\bar{H}_p(\boldsymbol{\sigma})$:	matriz de sensibilidade correspondente ao p -ésimo padrão de corrente
k :	representa a k -ésima iteração do filtro de Kalman
$\mathbf{v}_k$:	vetor contendo as ℓ voltagens medidas ($\mathbf{v}_k = T\bar{\mathbf{v}}_k$)
I_m :	matriz identidade de ordem m
Φ_{k-1} :	matriz de transição de estados discreta
H_k :	matriz de sensibilidade correspondente às ℓ voltagens medidas ($H_k = T\bar{H}_k$)
$\boldsymbol{\omega}_k, \boldsymbol{\nu}_k$:	vetores de ruídos no estado e nas medidas
Q_k, R_k :	matrizes de covariância de ruídos no estado e nas medidas
$P_k^{()}$:	matriz de covariância do erro de estimação
G_k :	matriz de ganho de Kalman
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_k^{()}$:	vetor de condutividades estimadas

Resumo

A Tomografia por Impedância Elétrica (EIT) é um método que utiliza estimativas da distribuição de condutividade ou impedância de tecidos orgânicos na obtenção de imagens médicas. O procedimento de obtenção das imagens baseia-se em medições de correntes ou voltagens no contorno da região sob análise e na estimação de parâmetros de um modelo desta região. No caso de pacientes submetidos à respiração artificial, o conhecimento da distribuição absoluta ou das variações de condutividades nos pulmões auxilia na detecção de fenômenos como colapso alveolar ou pneumotórax e permite o ajuste e controle da vazão e pressão do ar fornecido, de modo a evitar a ocorrência de tais anomalias.

Este trabalho apresenta algoritmos cujo objetivo é a solução do problema inverso e mal posto de estimar a distribuição absoluta e as variações de condutividades nos pulmões através da EIT para a geração de imagens em duas dimensões.

O algoritmo para a estimação da distribuição absoluta de condutividade utiliza o filtro estendido de Kalman. As simulações numéricas mostram que, com medidas incorporando ruído cujo desvio padrão atinge até 12% da máxima voltagem, as estimativas de condutividades convergem para a distribuição esperada com um desvio inferior a 7% do valor da máxima condutividade.

Quanto à detecção de variações de condutividades em relação a uma distribuição de condutividades tomada como referência, as simulações numéricas sugerem que a solução do problema depende da utilização de métodos de regularização.

Abstract

Electrical Impedance Tomography (EIT) is a method that uses estimates of conductivity or impedance distribution in living tissues to generate medical images. The estimation procedure is based on measurements of electrical currents or voltages at the boundary of the region under analysis, and on the processing of these data through a proper algorithm. In patients under artificial ventilation, knowledge of absolute or relative conductivity distribution in the lungs helps detecting the presence of alveolar collapse or pneumothorax, and allows setting and controlling air volume and pressure of the ventilation device.

This work presents algorithms that aim at solving the ill-posed inverse problem of estimating absolute and relative conductivity distribution in the lungs through EIT for cross-sectional image reconstruction.

The algorithm for absolute conductivity distribution estimation uses the extended Kalman filter. Numerical simulations show that, when the standard deviation of the measurement noise level raises up to 12% of the maximal measured voltage, the conductivity estimates converge to the expected vector within 7% accuracy of the maximal conductivity value.

Addressing the estimation of conductivity changes in relation to a conductivity distribution taken as reference, numerical simulations suggest that the problem may be properly solved using regularization methods.

Capítulo 1

Introdução

A Tomografia por Impedância Elétrica (EIT) é um processo pelo qual se procura estimar o campo de condutividades no interior do corpo humano.^[i] Tal processo de estimação pode ser efetuado de dois modos:

- através de eletrodos em pontos determinados da superfície da região em estudo, aplicam-se sucessivos padrões de correntes elétricas e efetuam-se medições dos potenciais (que doravante serão denominados “voltagens”) ou;
- através de eletrodos, aplicam-se voltagens e medem-se correntes em determinados pontos da superfície da região em estudo.

Verifica-se que tanto as correntes quanto as voltagens medidas são funções de uma distribuição interna desconhecida de condutividade, assim como das características geométricas da seção em análise. Além disso, sob o ponto de vista de Engenharia, o problema de estimação da distribuição de condutividade é:

^[i]Esta definição é restrita a aplicações na Medicina. A EIT também é utilizada na determinação da distribuição de condutividades ou de impedâncias em outros tipos de aplicações.

- i. inverso, pois deseja-se determinar qual a distribuição de condutividade que gera as correntes ou voltagens medidas na fronteira do domínio;
- ii. mal posto, pois dois elementos vizinhos do espaço de voltagens na fronteira do domínio não necessariamente levam a dois elementos vizinhos no espaço de distribuição de condutividade[22];
- iii. não-linear, pois a variação na distribuição de voltagem não é proporcional à variação na distribuição de condutividade, ou seja $\Delta v \neq \alpha \Delta \sigma$, $\alpha = \text{constante}$.

A resolução das imagens geradas através da EIT é baixa, se comparada àquelas que se obtém por outras técnicas de reconstrução tais como ressonância magnética, tomografia computadorizada ou ultrassom. Apesar disto, a EIT apresenta algumas vantagens. Em primeiro lugar, é inofensiva ao paciente pois, além de não ser invasiva, não utiliza qualquer forma de radiação. Outros pontos positivos são o baixo custo, devido a um hardware relativamente simples, e as dimensões reduzidas do equipamento, permitindo que seja facilmente transportado, evitando assim a necessidade de deslocamento do paciente para a realização do exame. Finalmente, este método apresenta resposta temporal rápida, o que permite a estimação praticamente instantânea de mudanças abruptas na condutividade dos tecidos em observação.

Diversos pesquisadores têm empreendido esforços na busca de algoritmos que sejam, ao mesmo tempo, rápidos e capazes de proporcionar imagens com boa resolução espacial. Para atingir tais objetivos, várias técnicas de regularização, escolha de padrões ótimos de corrente, discretização em elementos finitos em 3 dimensões ou utilização de malhas muito refinadas têm sido pesquisadas.

Por exemplo, foi demonstrado que, no método denominado *dinâmico*, no qual a estimativa da distribuição de impedância é efetuada por meio do filtro linearizado de Kalman[23] com base nas voltagens medidas correspondentes a cada padrão de corrente aplicado, as imagens são obtidas 31 vezes mais rapidamente que na abordagem dita *clássica*[23] (*One-step Newton-Raphson*), que utiliza as voltagens medidas resultantes da aplicação de padrões de corrente em número suficiente para gerar mais equações que incógnitas.

Sob o ponto de vista clínico, o foco do presente trabalho é centrado nas aplicações em que o médico esteja principalmente interessado no comportamento global dos processos fisiológicos cuja dinâmica dos fluidos no interior do organismo afeta o campo de condutividade, tal como ocorre em pacientes submetidos à ventilação artificial.

Amato *et al.*[1, 2, 3] demonstram que, em pacientes com sérios danos pulmonares, a tendência a desenvolver alterações profundas nos processos de aeração é maior e pode, inclusive, causar danos permanentes. Nessas circunstâncias, a detecção precoce e procedimentos que visem evitar tanto o colapso pulmonar (fechamento total e irreversível do alvéolo) ou o pneumotórax (distensão excessiva que pode provocar o rompimento do alvéolo) são os procedimentos empregados para melhorar as funções pulmonares comprometidas, com conseqüente diminuição do índice de mortalidade. A obtenção do equilíbrio entre os extremos acima mencionados representa um desafio no ambiente das Unidades de Terapia Intensiva (UTI), onde o ajuste dos parâmetros do sistema de ventilação é feito manualmente pelo médico. A dinâmica da respiração de pacientes sob tais condições sofre profundas alterações em um curto

período; sendo assim, a manutenção de um padrão de pressão de insuflamento inadequado, mesmo durante poucos ciclos respiratórios, é capaz de causar inflamação severa ou ruptura pulmonar. Ainda de acordo com Amato *et al.*[1, 2, 3], exames de raios X e métodos clínicos de diagnóstico não possuem a necessária sensibilidade na detecção de alterações pulmonares sérias.

Atualmente, a avaliação das condições do paciente pela análise de imagens obtidas por meio de tomografia computadorizada ainda é o procedimento mais confiável para a determinação de tais anormalidades. Entretanto, a necessidade de deslocamento do paciente até o tomógrafo e, portanto, de afastá-lo dos equipamentos de suporte de vida existentes na UTI, representa um risco muito grande; além disso, a natureza “estática” deste procedimento constitui um fator limitante, dada a dinâmica dos processos envolvidos. Em alguns casos, quando o médico considera necessária a realização de exames mais rigorosos, já é muito tarde para reverter o dano causado aos pulmões. Em face do exposto, a EIT pode ser considerada um método bem atrativo, haja vista que fornece resultados em tempo real e sem que seja necessário retirar o paciente de seu leito.

Um algoritmo para obtenção de imagens por meio da EIT cujo propósito seja ajustar e controlar os parâmetros que influenciam no processo de respiração artificial, ou seja, vazão e pressão do ar insuflado, deve prontamente fornecer estimativas da distribuição de condutividade no interior dos pulmões; além disso, tais estimativas devem apresentar pequena margem de erro em relação aos valores reais. O algoritmo também deve ser suficientemente sensível para acompanhar as grandes variações de condutividade decorrentes de fenômenos extremos, como o colapso pulmonar ou o

pneumotórax.

É necessário definir os significados dos termos *condutividade absoluta* e *variação de condutividade* utilizados ao longo do texto:

- *condutividade absoluta*: é o valor que toma como base um sistema de referência cujo ponto inicial é zero, ou seja, não há corrente elétrica;
- *variação de condutividade*: é a *diferença* entre dois valores de condutividades absolutas, ou seja, equivale a um valor absoluto em um sistema de referência cujo zero tenha sido transladado para um ponto σ_0 .

Tais definições estão representadas na Fig. 1.1.

Figura 1.1: Significados de *condutividades absolutas* e *variações de condutividades*

Para que o leitor possa se dirigir ao assunto de seu interesse, um esboço da dissertação é apresentado. O objetivo do trabalho e os critérios de verificação são declarados no Capítulo 2.

No Capítulo 3, o atual estágio no desenvolvimento da EIT é discutido. Além disso, é apresentado um breve histórico acerca de ferramentas de estimação, com ênfase no filtro de Kalman.

O Capítulo 4 refere-se à formulação teórica da EIT e consiste na definição e solução dos problemas direto e inverso, apresentação do Método dos Elementos Finitos aplicado a problemas de eletromagnetismo, abordagem *clássica* e *dinâmica* e na descrição e utilização do filtro estendido de Kalman.

No capítulo 5, a metodologia empregada nas simulações é apresentada.

O capítulo 6 refere-se aos resultados obtidos nas simulações. Com base na formulação teórica descrita no Capítulo 4, tais resultados e a influência dos diversos parâmetros que atuam sobre o comportamento do filtro de Kalman são discutidos.

O Capítulo 7 é dedicado às conclusões e sugestões de desenvolvimento futuro.

Os fluxogramas dos algoritmos desenvolvidos estão no Apêndice A; o Apêndice B apresenta uma dedução simplificada das equações do filtro estendido de Kalman.

Capítulo 2

Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver um algoritmo que utilize o filtro estendido de Kalman para solucionar, por meio de simulações, o problema inverso de estimar a distribuição de condutividade *absoluta* no interior de um domínio discretizado que representa uma seção transversal do tórax humano. Deve-se salientar que a preocupação não é *melhorar* a resolução espacial das imagens obtidas, mas sim *verificar a viabilidade de utilização do método para observar distribuições de condutividade em regiões selecionadas*. O critério para a avaliação da eficácia do procedimento é o desvio dos valores estimados da distribuição de condutividade em relação ao máximo valor esperado.

Um objetivo secundário é desenvolver um algoritmo para solucionar numericamente o problema em que, partindo também de uma discretização do domínio descrito acima, procura-se obter a distribuição de *variações* de condutividades em certas regiões deste domínio, caracterizando o que é aqui denominado *problema relativo*. Neste caso, a discrepância das estimativas em relação aos valores esperados será considerada como parâmetro para a avaliação da eficácia do algoritmo.

Capítulo 3

Revisão da Literatura

3.1 EIT

Diversos artigos versam sobre o tema do processamento de imagens médicas e, particularmente, sobre a Tomografia por Impedância Elétrica. Dentre estes artigos, os mencionados abaixo receberam atenção no que diz respeito à formulação do problema e ao modelo matemático que descreve o sistema físico.

Em *Applied Potential Tomography*, Barber; Brown[4] apresentam os preceitos básicos da EIT e modelam o problema físico, chegando à equação de Poisson para um campo de correntes estacionárias. A solução inversa da equação de Poisson é obtida através do método denominado *backprojection*, que deu origem aos poucos aparelhos de tomografia por impedância elétrica comercialmente disponíveis até o momento. Os autores também apresentam uma compilação de dados de resistividade de diversos tipos de tecidos e discutem as vantagens e desvantagens de se utilizar sistemas de dois ou quatro eletrodos para a aplicação de padrões de corrente e medição

de voltagens. O aparelho desenvolvido pela Universidade de Sheffield, Inglaterra, utiliza 16 eletrodos para a aplicação de padrões de corrente a uma frequência de $50kHz$ e é capaz de reconstruir imagens a uma taxa de 20 quadros por segundo, sendo esta sua grande vantagem. Entretanto, a qualidade das imagens reconstruídas é baixa. Outra desvantagem é a distorção das imagens geradas, fato este resultante de se considerar circular o contorno do tórax.

No artigo *Electrical Impedance Computed Tomography Based on a Finite Element Model*, Murai; Kagawa[17] descrevem a utilização do Método dos Elementos Finitos na discretização de um domínio circular que representa uma seção transversal do tórax humano. A formulação apresentada baseia-se em elementos triangulares de condutividade σ constante, funções de interpolação lineares e eletrodos pontuais posicionados nos nós do contorno. Um modelo semelhante de discretização do domínio que representa o tórax é utilizado no presente trabalho. Os resultados obtidos para a solução do problema inverso em simulações numéricas com diferentes malhas mostram que, à medida que o número de elementos aumenta, o problema torna-se mal condicionado; além disso, os autores concluem que a sensibilidade às variações de condutividade no interior do domínio é maior quando as alterações ocorrem em elementos próximos à fronteira, onde os eletrodos ficam posicionados. Observam também que, quando a malha é mais refinada, pequenas variações de condutividades em elementos internos ao domínio provocam alterações quase imperceptíveis nas voltagens medidas no contorno. Se as medidas de voltagens forem corrompidas por ruído, as alterações nas voltagens em decorrência de perturbações na distribuição de condutividade confundem-se com o ruído de medida.

Em *Comparing Reconstruction Algorithms for Electrical Impedance Tomography*, Yorkey *et al.*[26] traçam um paralelo entre os métodos existentes até aquele momento para a solução do problema da EIT. Os autores apresentam a formulação convencional do problema, ou seja, a reconstrução da imagem é feita somente após todos os padrões de corrente terem sido aplicados e as respectivas voltagens terem sido medidas. Yorkey *et al.* obtêm a solução da equação de Poisson, que descreve o sistema físico, através do método de Newton-Raphson; além disso, expõem dois métodos para o cálculo da *matriz de sensibilidade*, sendo que um deles, o *método direto*, está sendo aqui utilizado para a obtenção da equação de observações do filtro de Kalman. Argumentam os pesquisadores que, para malhas mais refinadas, o método direto apresenta maior carga computacional se comparado ao método que emprega o Teorema de Compensação, devido à necessidade de inversão da matriz de rigidez global obtida da discretização do domínio em elementos finitos. No caso do presente trabalho, não há este tipo de dificuldade, pois o número de elementos é pequeno. O problema de condicionamento da matriz de sensibilidade também é abordado. Segundo Yorkey *et al.*, o método de Marquardt é superior à decomposição em valores singulares (SVD) para o cálculo da pseudo-inversa da referida matriz pois, no caso do SVD, os valores singulares descartados implicam em ignorar informações por vezes relevantes, o que freqüentemente ocorre em sistemas mal condicionados.

No artigo *A Kalman Filter Approach to Track Fast Impedance Changes in Electrical Impedance Tomography*, Vauhkonen *et al.*[23] apresentam uma abordagem denominada *dinâmica*. Os pesquisadores formulam o problema de determinação da distribuição de impedância como um problema de *estimação de estado*, onde as im-

pedâncias de cada elemento finito de um modelo do domínio são consideradas como variáveis do estado a ser estimado; para solucionar tal problema, utilizam o filtro linearizado de Kalman. A principal motivação para este tipo de abordagem é a possibilidade de estimar a distribuição de impedância de forma recursiva, ou seja, após a aplicação de cada padrão de corrente e respectiva medição de voltagens. Segundo os autores, o conhecimento da evolução temporal do vetor de estado torna o procedimento ideal para detectar as bruscas mudanças de impedância que ocorrem entre os ciclos respiratórios quando o indivíduo é submetido à atividade física que leve à aceleração dos batimentos cardíacos. A aplicação do filtro de Kalman na EIT, inédita até então, apresenta as características descritas a seguir.

O modelo dinâmico do sistema incorpora ruído branco Gaussiano de média nula a um sistema considerado invariante no tempo e cuja matriz de transição de estados é a matriz identidade. A escolha de uma matriz identidade como matriz de transição deve-se à ausência de modelos dinâmicos mais fidedignos para representar as estruturas no interior do tórax.

Para a obtenção do modelo de observação, a matriz de rigidez da discretização em elementos finitos é diretamente utilizada no cálculo da matriz de sensibilidade^[i] por meio de uma aproximação por uma série de Taylor mantendo termos até a 1^a ordem, com a linearização sendo feita em torno de um estado de referência σ_0 . A esta linearização é adicionado ruído branco Gaussiano de média nula.

O segundo ponto a ser destacado é a necessidade de estabilização do problema, devido ao elevado número de parâmetros a ser estimado (496). A estabilização é

^[i]Vauhkonen *et al.*[23] utilizam o nome de “Jacobiano” para esta matriz.

obtida pré-integrando elementos em regiões de interesse. Dessa forma, o problema de estimação fica reduzido a poucas incógnitas, permitindo ao filtro linearizado de Kalman convergir rapidamente para o vetor esperado.

Argumentam ainda os pesquisadores que, embora a pré-integração de elementos forneça boas estimativas para as impedâncias das regiões selecionadas, em algumas ocasiões não se deseja utilizar nenhum tipo de informação *a priori* sobre a estrutura do objeto e, dessa forma, considerar as impedâncias de todos os elementos da malha como parâmetros a serem estimados. É demonstrada a possibilidade de escolha de alguns padrões de corrente de forma a maximizar a sensibilidade das medições à variação de impedância para uma determinada região.

No artigo *Tikhonov Regularization and Prior Information in Electrical Impedance Tomography*, Vauhkonen *et al.*[24] abordam o problema de condicionamento do sistema. A matriz de sensibilidade é regularizada de forma que o espaço de soluções fica restrito a um espaço plausível. Com isto, é possível a utilização de uma malha refinada na discretização do domínio sem incorrer no problema de ignorar informações quando a pseudo-inversa da matriz de sensibilidade é calculada, o que representa um ganho considerável quando se trata de métodos convencionais de estimação. Este tipo de regularização foi utilizado na implementação do filtro de Kalman com aliamento, descrita no artigo *State Estimation in Time-varying Electrical Impedance Tomography*, de Kaipio *et al.*[14]. Os resultados, segundo os autores, são superiores, em termos de resolução espacial, aos obtidos com o filtro linearizado de Kalman, porém demandam maior carga computacional; outro empecilho mencionado é a dificuldade na seleção dos parâmetros de regularização. Portanto, a utilização deste

procedimento em outras versões do filtro de Kalman justifica-se quando o objetivo for a obtenção de imagens de maior resolução espacial.

3.2 Filtro de Kalman

A teoria de filtragem de Kalman é conhecida desde a publicação dos trabalhos do referido autor em 1960 e 1961, e uma vasta literatura sobre o assunto é hoje disponível, dispensando portanto maiores comentários acerca do método em si. No entanto, é interessante considerar a evolução histórica dos procedimentos de estimação de parâmetros até o advento da teoria de Kalman e situar o filtro estendido de Kalman neste universo, conforme mostra a Fig. 3.1.

O artigo *Least-squares estimation: from Gauss to Kalman*, de Sorenson[21] discute a evolução histórica do conceito de estimação por meio de mínimos quadrados. De acordo com Sorenson, a teoria de estimação já existia desde o século *XVIII*, motivada pelos estudos astronômicos então incipientes. A invenção do Método dos Mínimos Quadrados por Gauss em 1795 e suas idéias inovadoras, como a de que é necessária a existência de dados redundantes com a finalidade de eliminar a influência das incertezas de medição, de que um número mínimo de observações é requerido para a determinação de parâmetros desconhecidos e de que a diferença entre os valores observados e os valores previstos deve ser mínima, são ainda centrais na abordagem de problemas de estimação. Sorenson afirma que, embora Gauss não tenha tratado o problema sob o ponto de vista probabilístico, suas considerações sobre a independência entre os erros nas medições são básicas no desenvolvimento do *método de máxima verossimilhança*, que Fischer, utilizando funções de densidade de probabilidade, propôs em 1912. O próximo passo foi dado por Wiener e Kolmogorov que, por volta de 1940, apresentaram uma formulação estatística para o método

dos mínimos quadrados na qual um sinal deve ser estimado a partir de dados de medições podendo, ambos, ser descritos por meio de funções de autocorrelação e de correlação cruzada.

Finalmente, Kalman abordou o problema de estimação ótima através do método dos mínimos quadrados sob o ponto de vista probabilístico e de forma *recursiva*, ou seja, o processamento dos dados é feito *seqüencialmente em lotes* e não utilizando um *conjunto completo de medidas*, como havia formulado Gauss. A diferença básica entre as abordagens determinística (Gauss) e probabilística (Kalman) é enfatizada na Fig. 3.1. Além disso, observa Sorenson, Kalman considera a existência de

Figura 3.1: Diagrama de localização do filtro estendido de Kalman no universo dos procedimentos de estimação.

erros na modelagem dinâmica do sistema, e não somente nas medições; Gauss, em contrapartida, demandava que a descrição do comportamento dinâmico do sistema

fosse exata. Sorenson afirma ainda que a contribuição de Kalman não se limita a um tratamento probabilístico e recursivo do problema de estimação de Gauss e chama a atenção para o fato de que Kalman desenvolveu um método cuja implementação em computadores é direta e exige pouco conhecimento teórico de quem se propuser a utilizá-lo, fato que é atualmente comprovado.

A teoria de filtragem de Kalman é, portanto, uma ferramenta poderosa na solução de problemas dos mais variados tipos, bastando para isso que o sistema seja estatisticamente modelado. Assim, o que se procura é, a partir de poucas e incertas medidas, estimar, de forma recursiva, parâmetros de um modelo que também apresenta erros. Tal problema é exatamente o encontrado na tomografia por impedância elétrica.

Capítulo 4

Formulação Teórica

4.1 Modelos do Domínio e dos Eletrodos

Em primeiro lugar, considera-se a seção transversal de um tórax humano como um domínio fechado Γ contendo uma distribuição estacionária de carga e distribuição de condutividade $\sigma(x, y)$, assumindo-se que o meio possua características puramente condutivas, conforme mostrado na Fig. 4.1. Sob estas circunstâncias, o campo

Figura 4.1: Representação de um domínio bidimensional genérico Γ com distribuição estacionária de carga $q_1, \dots, q_n$ e condutividade $\sigma(x, y)$.

eletrostático resultante obedece às equações de Maxwell quando as derivadas em

relação ao tempo são igualadas a zero. Assim, das

$$\text{equações de Maxwell} \begin{cases} \nabla \wedge E + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0 \\ \int_{\ell} E \cdot d\ell = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathcal{B} \cdot n dS, \end{cases} \quad (4.1)$$

(onde E é o campo elétrico e $\mathcal{B}$ é a indutância magnética) com

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0$$

resulta em

$$\nabla \wedge E = 0 \quad (4.2)$$

ou seja, o rotacional do campo elétrico é nulo.

Ainda conforme as equações de Maxwell com derivadas em relação ao tempo nulas, a integral de linha da intensidade do campo elétrico ao redor de qualquer trajetória fechada é zero e o campo é conservativo, isto é:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathcal{B} \cdot n dS = 0 \implies \int_{\ell} E \cdot d\ell = 0.$$

Sendo assim, existe um potencial escalar Ψ cujo gradiente é E da forma

$$E = -\nabla \Psi(\sigma). \quad (4.3)$$

Por outro lado, a equação da continuidade aplicada ao domínio Γ com uma distribuição estacionária de cargas garante que, em qualquer ponto no interior do domínio, o divergente da densidade de corrente seja nulo:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (4.4)$$

Sobre a fronteira tem-se

$$\int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (4.5)$$

onde $\mathbf{J}$ é o vetor densidade de corrente e $\mathbf{n}$ é um versor normal à superfície e orientado para fora. A eq. (4.4) mostra que não existe qualquer fonte interna de correntes, ao passo que a eq. (4.5) expressa o equilíbrio entre as correntes que atravessam a fronteira do domínio.

Assumindo que em qualquer ponto no interior de um líquido ou sólido a densidade de corrente seja uma função do campo elétrico E , $\mathbf{J} = \mathbf{J}(E)$ e, ainda, que esta relação seja linear (o que é válido para sólidos e soluções fracamente ionizadas)[20], tem-se

$$\mathbf{J} = \sigma E \quad (4.6)$$

Substituindo a eq. (4.3) e a eq. (4.6) na eq. (4.4) obtém-se

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Psi) = 0, \quad (4.7)$$

que é a Equação de Poisson.

Na fronteira do domínio, as correntes são aplicadas diretamente nos eletrodos; desta forma, são estabelecidas as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} \sigma \frac{\partial \Psi(\sigma)}{\partial n} = J_\ell & \text{no } \ell\text{-ésimo eletrodo;} \\ 0 & \text{nos demais pontos da fronteira,} \end{cases} \quad (4.8)$$

onde J_ℓ representa a densidade de corrente através do ℓ -ésimo eletrodo. A função potencial $\Psi(\sigma(x, y))$ é equivalente à distribuição de *voltagens* no domínio.

Na EIT, através dos eletrodos na fronteira, são impostas correntes $\mathbf{c} \in R^\ell$ e lidas voltagens $\mathbf{v} \in R^\ell$ ou vice-versa e, a partir destes dados, determina-se o que ocorre no interior do domínio Γ . Define-se como *inverso*[12] o problema no qual se

deseja determinar a distribuição de condutividade que gera uma particular leitura de corrente ou voltagem. Uma das maneiras de solucionar um problema inverso é resolver o problema *direto* a ele associado. Define-se problema direto[12] como aquele no qual, admitindo-se conhecida a distribuição de condutividade no interior do domínio e as correntes ou voltagens aplicadas na fronteira, determina-se respectivamente voltagens ou correntes nos eletrodos.

Para um domínio irregular e meio isotrópico, soluções analíticas para a equação de Poisson (4.7) com condições de contorno dadas por (4.8) não são facilmente encontradas; desta forma, o Método dos Elementos Finitos (MEF) será utilizado para discretizar o domínio e resolver numericamente os problemas direto e inverso mencionados acima.

4.2 Discretização Utilizando o Método dos Elementos Finitos

A discretização do domínio que representa uma seção do tórax é feita dividindo-se esta região em m elementos finitos planos triangulares de condutividade σ_m constante com função de interpolação linear[17, 26]; na fronteira do domínio, ℓ eletrodos pontuais são homogeneamente distribuídos. Sobre esses nós, p padrões de corrente são diretamente aplicados (vide Fig. 4.2). Um modelo de eletrodo como o descrito

Figura 4.2: Discretização de um domínio que representa o tórax humano em elementos finitos triangulares.

acima pode ser considerado satisfatório somente se sua área superficial for pequena quando comparada à área da fronteira externa do domínio pois, do ponto de vista do sistema físico real, a condutividade do eletrodo é consideravelmente maior que a condutividade dos tecidos orgânicos[11].

Conforme demonstrado por Sadiku[19], com o domínio já discretizado em elemen-

tos procura-se, em primeiro lugar, uma aproximação para a distribuição de voltagens v_e no interior de um elemento genérico e ; em seguida, deve-se obter a inter-relação entre a distribuição de voltagens nos diversos elementos do domínio discretizado de forma que a voltagem seja contínua através da interface entre os elementos. A solução aproximada que atenda a estas restrições para todo o domínio é

$$V(x, y) \simeq \sum_{e=1}^m v_e(x, y). \quad (4.9)$$

A função de interpolação linear selecionada para a aproximação da distribuição de voltagens no interior de um elemento triangular genérico conforme mostrado na Fig. 4.3 é dada por

$$v_e(x, y) = a + bx + cy, \quad (4.10)$$

onde a , b e c são constantes a determinar.

Figura 4.3: Elemento triangular genérico

Desta forma, as voltagens v_{e1} , v_{e2} e v_{e3} nos nós 1, 2 e 3 respectivamente são obtidas utilizando-se a eq. (4.10), resultando em:

$$\begin{bmatrix} v_{e1} \\ v_{e2} \\ v_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

As constantes a , b e c são determinadas resolvendo-se o sistema descrito pela eq. (4.11), ou seja

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} v_{e1} \\ v_{e2} \\ v_{e3} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Substituindo-se a eq. (4.12) na eq. (4.10) obtém-se, na forma matricial,

$$v_e = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{e1} \\ v_{e2} \\ v_{e3} \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

ou, de forma mais condensada,

$$v_e = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) v_{ei} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{e1} \\ v_{e2} \\ v_{e3} \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

onde v_e é a voltagem em um ponto genérico (x, y) e A é área do elemento.

As funções α_i , denominadas *funções de forma*, que dependem exclusivamente das características geométricas do elemento, são expressas por:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A}[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y], \quad (4.15)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A}[(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y], \quad (4.16)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y], \quad (4.17)$$

O valor de A será positivo se os nós forem numerados no sentido anti-horário, conforme mostrado na Fig. 4.3. A eq. (4.14) fornece a voltagem em qualquer ponto do elemento desde que as voltagens nodais sejam conhecidas.

O princípio variacional correspondente à equação diferencial de Poisson é dado por [15, 19]:

$$\pi = \frac{1}{2} \int \int \int \sigma |E|^2 d\mathcal{V}, \quad (4.18)$$

onde E representa o campo elétrico. Considerando a eq. $E = -\nabla\Psi(\sigma)$ (4.3) e lembrando que a função potencial Ψ neste caso é a *voltagem*, quando o princípio variacional acima é aplicado ao domínio de um único elemento e pode-se escrever

$$\pi_e = \frac{1}{2} \int \int \int \sigma |\nabla v_e|^2 d\mathcal{V}, \quad (4.19)$$

onde v_e é dado pela eq. (4.10).

A expansão do integrando na eq. (4.19) leva a

$$\pi_e = \frac{1}{2} \int \int \int \sigma \left[\left(\frac{\partial v_e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_e}{\partial y} \right)^2 \right] d\mathcal{V}. \quad (4.20)$$

Fazendo

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_e}{\partial x} \\ \frac{\partial v_e}{\partial y} \end{bmatrix} = \nabla v_e, \quad (4.21)$$

a eq. (4.20) pode ser escrita na forma matricial como

$$\pi_e = \frac{1}{2} \int \int \int \sigma \mathbf{g}^T \mathbf{g} \, d\mathcal{V}. \quad (4.22)$$

Substituindo a eq. (4.14) na eq. (4.21), a eq. (4.22) torna-se

$$\pi_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} v_{e1} & v_{e2} & v_{e3} \end{bmatrix} \left(\int \int \int \sigma \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \end{bmatrix} d\mathcal{V} \right) \begin{bmatrix} v_{e1} \\ v_{e2} \\ v_{e3} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

A eq. (4.23) pode ser escrita de forma compacta se a matriz mais à direita do termo entre parênteses for denominada B e o vetor contendo as voltagens nodais no elemento for denominado $\mathbf{v}_e^*$:

$$\pi_e = \frac{1}{2} \mathbf{v}_e^{*T} \left(\int \int \int \sigma B^T B \, d\mathcal{V} \right) \mathbf{v}_e^* = \frac{1}{2} \mathbf{v}_e^{*T} Y_e(\sigma) \mathbf{v}_e^* \quad (4.24)$$

Para achar um ponto estacionário da eq. (4.24) em relação ao vetor $\mathbf{v}_e^*$ faz-se

$$\frac{\partial \pi_e}{\partial \mathbf{v}_e^*} = Y_e(\sigma) \mathbf{v}_e^* = [0]. \quad (4.25)$$

A matriz $Y_e(\sigma)$ resultante da integração do produto $\sigma B^T B$ sobre o domínio é freqüentemente denominada *matriz local de rigidez* do elemento e . O termo “matriz de rigidez” é geralmente aceito pois, conforme Logan[15], trata-se de uma matriz de valores conhecidos multiplicada pelos graus de liberdade desconhecidos, como voltagens, temperaturas, deslocamentos etc. Entretanto, outros nomes como *matriz de coeficientes do elemento*[19], *matriz do elemento*[12], *matriz de condutividade local* ou simplesmente *matriz local*[26] também são utilizados.

Considerando que a área do elemento seja A e que sua espessura seja t , os componentes da matriz $Y_e(\sigma)$ são calculados conforme descrito a seguir:

$$Y_{e_{1,1}} = \frac{\sigma}{4A^2}[(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2] \int \int \int d\mathcal{V} = \frac{t}{4A}[(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2]. \quad (4.26)$$

De forma análoga:

$$Y_{e_{2,2}} = \frac{\sigma t}{4A}[(y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2]; \quad (4.27)$$

$$Y_{e_{3,3}} = \frac{\sigma t}{4A}[(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2]; \quad (4.28)$$

$$Y_{e_{1,2}} = \frac{\sigma t}{4A}[(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)]; \quad (4.29)$$

$$Y_{e_{1,3}} = \frac{\sigma t}{4A}[(y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)]; \quad (4.30)$$

$$Y_{e_{2,3}} = \frac{\sigma t}{4A}[(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1)]; \quad (4.31)$$

e, finalmente

$$Y_{e_{2,1}} = Y_{e_{1,2}}, \quad Y_{e_{3,1}} = Y_{e_{1,3}}, \quad Y_{e_{3,2}} = Y_{e_{2,3}}. \quad (4.32)$$

O próximo passo consiste em escrever a matriz local $Y_e(\sigma)$ em coordenadas globais $\bar{Y}_e(\sigma)$.

O princípio variacional π vale para o domínio completo e pode ser escrito como a soma de todos os π_e ,

$$\pi = \sum_{e=1}^m \pi_e \quad (4.33)$$

A matriz global de condutividade $Y(\sigma)$ resulta da minimização de π e portanto

$$\frac{\partial \pi}{\partial v_j} = Y v_j = [0] \quad , \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (4.34)$$

onde s representa o número total de nós da malha.

Analogamente, a minimização de π , considerando a eq. (4.33) implica

$$\frac{\partial \pi}{\partial v_j} = \frac{\partial(\sum \pi_e)}{\partial v_j} = (\sum \bar{Y}_e)v_j = [0] \quad , j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.35)$$

Comparando (4.34) e (4.35) conclui-se que $Y = \sum \bar{Y}_e$. Este é o procedimento de montagem da matriz global de condutividade.

A matriz global de condutividade é simétrica e singular. A indeterminação do sistema descrito pela eq. (4.35) é eliminada com a introdução das condições de contorno. Entre as condições de contorno, pode-se impor a voltagem de um dos eletrodos igual a zero (voltagem de referência ou terra).

Assim, após a montagem das matrizes locais de condutividade de cada elemento na matriz global de condutividade,^[i] tem-se s nós, m elementos e ℓ eletrodos.

O domínio será excitado aplicando-se p padrões de corrente linearmente independentes. Define-se uma matriz $C = [\mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_j \dots \mathbf{c}_p]$, $\mathbf{c}_j \in R^s$ constituída por colunas que representam os padrões de corrente. Neste trabalho, a matrix C adotada é

$$C = \begin{bmatrix} -I & -I & \dots & -I \\ +I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & +I & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & +I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{s \times p},$$

onde I denota a intensidade da corrente alternada injetada, e o eletrodo aterrado é sempre o eletrodo 1.

^[i]Yorkey *et al.*[26] denominam esta matriz como *matriz de admitância*, que é um termo mais apropriado para descrever os parâmetros inerentes a um problema de eletromagnetismo. Neste texto, entretanto, adota-se a nomenclatura mais geral, conforme mencionado anteriormente.

Nestas condições, vale a relação

$$YV = C, \quad (4.36)$$

onde $Y(\boldsymbol{\sigma}) \in R^{s \times s}$ é calculada em qualquer distribuição particular $\boldsymbol{\sigma} \in R^m$ de condutividades e $V(\boldsymbol{\sigma}) = [\bar{\boldsymbol{v}}_1 \dots \bar{\boldsymbol{v}}_j \dots \bar{\boldsymbol{v}}_p]$, $\bar{\boldsymbol{v}}_j \in R^s$ é uma matriz de voltagens correspondentes a cada padrão de corrente aplicado.

4.3 Solução do Problema Direto

A solução do problema direto é obtida admitindo-se conhecidas a distribuição de condutividade absoluta no domínio e as condições de contorno (padrões de corrente aplicados nos nós correspondentes aos eletrodos e voltagem de referência). Para que seja possível resolver a eq. (4.36) para V , é necessário eliminar a singularidade de Y . Um dos métodos consiste em eleger um nó arbitrário g como terra.

Sob o ponto de vista computacional, pode-se fazê-lo igualando a g -ésima linha e a g -ésima coluna de Y a zero, e atribuindo ao elemento da diagonal principal o valor unitário. De forma análoga, à g -ésima linha de C é atribuído o valor zero. Desta maneira, duas novas matrizes, Y_g e C_g , contendo o nó g como terra são formadas. Em seguida, o sistema pode ser resolvido para V , obtendo-se voltagens nodais absolutas. Yorkey *et al.*[26] descrevem este procedimento de forma pormenorizada. Nas equações subseqüentes, os índices g serão omitidos para simplificar a notação.

4.4 Solução do Problema Inverso

4.4.1 Abordagem Clássica

Um domínio Γ que apresenta uma distribuição não-uniforme de condutividade $\sigma(x, y)$ é discretizado, por meio do MEF, em um espaço de dimensão m utilizando-se elementos triangulares de condutividade constante. Pode-se, para cada $\bar{\mathbf{v}}_j(\boldsymbol{\sigma})$, $j = 1, \dots, p$, definir a transformação $\bar{\mathbf{h}}_j : \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \bar{\mathbf{v}}_j$,

$$\bar{\mathbf{v}}_j(\boldsymbol{\sigma}) = \bar{\mathbf{h}}_j(\boldsymbol{\sigma}) = [\mathbf{Y}(\boldsymbol{\sigma})]^{-1} \mathbf{c}_j, \quad (4.37)$$

ou seja, os vetores de voltagens nodais são funções não-lineares da distribuição de condutividade no domínio Γ . Aproximando a transformação $\bar{\mathbf{h}}_j(\boldsymbol{\sigma})$ por uma série de Taylor em torno de qualquer distribuição $\boldsymbol{\sigma}_0$ e mantendo os termos até a primeira ordem, obtém-se

$$\bar{\mathbf{v}}_j(\boldsymbol{\sigma}) \simeq \bar{\mathbf{v}}_j(\boldsymbol{\sigma}_0) + \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}_j|_{(\boldsymbol{\sigma}_0)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} [\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0]. \quad (4.38)$$

As derivadas da transformação $\bar{\mathbf{h}}_j(\boldsymbol{\sigma})$ com relação à condutividade de cada elemento são calculadas por

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}_j(\boldsymbol{\sigma}_0) &= \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}_j|_{(\boldsymbol{\sigma}_0)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -\mathbf{Y}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{c}_j \Rightarrow \\ \bar{\mathbf{H}}_j(\boldsymbol{\sigma}_0) &= \left[-\mathbf{Y}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \sigma_1} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{c}_j \quad -\mathbf{Y}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \sigma_2} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{c}_j \quad \dots \quad -\mathbf{Y}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \sigma_m} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{c}_j \right], \quad j = 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (4.39)$$

onde foi utilizado o resultado da álgebra matricial $\frac{\partial (\mathbf{A}^{-1})}{\partial \alpha} = -\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \alpha} \mathbf{A}^{-1}$ para uma matriz quadrada $\mathbf{A}$, genérica.

A matriz $\overline{H}_j(\boldsymbol{\sigma}_0) \in R^{s \times m}$ é denominada *matriz de sensibilidade* da transformação. Para que os nós com eletrodos (nos quais é efetivamente possível medir voltagens) possam ser selecionados, é necessário introduzir uma matriz $T \in R^{\ell \times s}$, explicitamente neste trabalho,

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0_{(1,\ell)} & \dots & 0_{(1,s)} \\ 0 & 1 & \dots & 0_{(2,\ell)} & \dots & 0_{(2,s)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1_{(\ell,\ell)} & \dots & 0_{(\ell,s)} \end{bmatrix}_{\ell \times s} \quad (4.40)$$

A substituição da eq. (4.39) na eq. (4.38) incorporando a matriz T fornece

$$T \overline{\mathbf{v}}_j(\boldsymbol{\sigma}) \simeq T \overline{\mathbf{v}}_j(\boldsymbol{\sigma}_0) + \left[-TY^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_1} Y^{-1} \mathbf{c}_j \quad -TY^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_2} Y^{-1} \mathbf{c}_j \quad \dots \quad -TY^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_m} Y^{-1} \mathbf{c}_j \right] [\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0], \quad (4.41)$$

para cada $j = 1, \dots, p$.

Tomando a eq. (4.36) como base, pode-se construir um vetor $\overline{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\sigma}) \in R^{sp}$ de voltagens nodais, com $\boldsymbol{\sigma} \in R^m$, a partir da vetorização da matriz V . Voltando à eq. (4.41) e fazendo $T \overline{\mathbf{v}}_j = \mathbf{v}_j$, o vetor $\mathbf{v}$, agora de dimensão ℓp , é expresso como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(\boldsymbol{\sigma}) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_j(\boldsymbol{\sigma}) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_p(\boldsymbol{\sigma}) \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(\boldsymbol{\sigma}_0) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_j(\boldsymbol{\sigma}_0) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_p(\boldsymbol{\sigma}_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -TY^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_1} Y^{-1} \mathbf{c}_1 & -TY^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_2} Y^{-1} \mathbf{c}_1 & \dots & -TY^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_m} Y^{-1} \mathbf{c}_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -TY^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_1} Y^{-1} \mathbf{c}_j & -TY^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_2} Y^{-1} \mathbf{c}_j & \dots & -TY^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_m} Y^{-1} \mathbf{c}_j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -TY^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_1} Y^{-1} \mathbf{c}_p & -TY^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_2} Y^{-1} \mathbf{c}_p & \dots & -TY^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_m} Y^{-1} \mathbf{c}_p \end{bmatrix} [\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0] \quad (4.42)$$

A eq. (4.42) resume o que Vauhkonen *et al.*[23] denominam *forma clássica* do problema inverso da EIT. A formulação resultante desta abordagem admite que não haja mudanças significativas na distribuição de condutividade do domínio Γ durante o tempo necessário para que *todos* os padrões de corrente sejam aplicados, as respectivas voltagens sejam medidas e cada imagem gerada. Nesse sentido, a abordagem pode ser considerada “estática” pois, se as condutividades variarem lentamente, mesmo com baixa frequência de imagens estimadas é possível detectar tais alterações.

As voltagens utilizadas na estimação da distribuição de condutividade podem ser medidas a uma taxa de 50 *kHz*, segundo Barber; Brown[4]. Portanto, a determinação da condição pulmonar em tempo real depende exclusivamente da capacidade de processamento do algoritmo utilizado. Na formulação “dinâmica” proposta por Vauhkonen *et al.*[23] e utilizada no presente trabalho, a velocidade de obtenção de imagens é maior que na formulação clássica pois *cada* estimativa da distribuição de condutividade é efetuada com base nas leituras de voltagens correspondentes à aplicação de *apenas um* padrão de corrente, o que diminui consideravelmente o número de dados a serem processados. Isso indica que a abordagem dinâmica é preferível quando o objetivo é a estimação em tempo real, como será discutido na seção 4.4.2.

No caso de pacientes sob respiração artificial, Amato *et al.*[1, 2, 3] demonstram que, para rastrear mudanças nas condutividades absolutas e detectar alterações na condição pulmonar, são necessárias estimativas em tempo real. No entanto, pesquisas recentes^[iii] indicam que também as *variações* $\Delta\sigma$ nas condutividades dos tecidos

^[iii]Comentários informais do Prof. Dr. Marcelo B.P. Amato (FMUSP).

internos dos pulmões são informações valiosas na avaliação da condição respiratória em tais pacientes.

A abordagem clássica fornece estimativas das variações de condutividades e será utilizada no estudo do que é aqui denominado *problema relativo*, conforme será visto na seção 4.4.1.1.

4.4.1.1 Problema Relativo

A solução do problema relativo baseia-se na formulação apresentada para a abordagem clássica, porém com a particularidade de que não se procura obter a distribuição de condutividade absoluta, e sim a *diferença* entre o vetor de condutividade em dado instante, σ_t , e um vetor de condutividade no instante inicial, σ_{t_0} . O procedimento para a obtenção do vetor $\Delta\sigma_{t-t_0}$ de *variação* de condutividade é descrito a seguir.

Partindo da eq. (4.42), omitindo os índices t e t_0 , lembrando que

$$T\overline{H}_j(\sigma_0) = \left[-TY^{-1}\frac{\partial Y}{\partial\sigma_1}Y^{-1}\mathbf{c}_j \quad -TY^{-1}\frac{\partial Y}{\partial\sigma_2}Y^{-1}\mathbf{c}_j \quad \dots \quad -TY^{-1}\frac{\partial Y}{\partial\sigma_m}Y^{-1}\mathbf{c}_j \right], \quad j = 1, \dots, p,$$

e fazendo $T\overline{H}_j = H_j$, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(\sigma) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_j(\sigma) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_p(\sigma) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(\sigma_0) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_j(\sigma_0) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_p(\sigma_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1(\sigma_0) \\ \vdots \\ H_j(\sigma_0) \\ \vdots \\ H_p(\sigma_0) \end{bmatrix} (\sigma - \sigma_0) \quad (4.43)$$

ou, ainda

$$\mathbf{v}(\sigma) - \mathbf{v}(\sigma_0) = \mathcal{H}(\sigma_0)\Delta\sigma. \quad (4.44)$$

De acordo com a eq. (4.44), para que variações de condutividade sejam determinadas é necessário “medir” $\mathbf{v}(\sigma)$, calcular $\mathbf{v}(\sigma_0)$ e resolver o sistema.

A distribuição inicial de condutividade pode ser obtida, por exemplo, a partir de estimativas efetuadas por algoritmos que forneçam valores absolutos ou utilizando

dados disponíveis na literatura, como os encontrados nas referências [4] e [7].

Examinando a matriz $\mathcal{H}(\boldsymbol{\sigma}_0)$ verifica-se que, normalmente, não será quadrada, o que torna necessário o cálculo de sua *pseudo-inversa*. Neste trabalho, a pseudo-inversa é obtida por meio do método de decomposição em valores singulares (SVD).

Demonstra-se[25] que qualquer matriz $A \in R^{m \times n}$ pode ser decomposta no produto de três matrizes, a saber

$$A = U W V^T, \quad (4.45)$$

onde $U \in R^{m \times n}$ é ortonormal, $W \in R^{n \times n}$ é diagonal contendo os *valores singulares* de A e $V \in R^{n \times n}$ é ortonormal. Com a matriz A assim decomposta, sua pseudo-inversa é dada por

$$A^\dagger = V W^{-1} U^T. \quad (4.46)$$

Pode-se, agora, identificar a matriz $\mathcal{H}(\boldsymbol{\sigma}_0)$ da eq. (4.44) com a matriz A e determinar o vetor $\Delta\boldsymbol{\sigma}$.

4.4.2 Abordagem Dinâmica

Nas duas seções anteriores, sobre a abordagem dita *clássica* ou *estática*, verifica-se que é necessário utilizar as voltagens medidas correspondentes à aplicação de diversos padrões de corrente para que cada imagem possa ser estimada.

Por exemplo, supondo que o sistema possua ℓ eletrodos nos quais aplicam-se correntes e medem-se voltagens e considerando que um destes eletrodos seja o terra, $\ell - 1$ padrões linearmente independentes de corrente distintos podem ser aplicados; na hipótese de que o número de elementos da malha exija a aplicação de todos estes padrões para que as respectivas condutividades possam ser estimadas, será necessário medir e processar $\ell \times (\ell - 1)$ voltagens para que uma única imagem seja obtida. Devido a esta característica, algoritmos que utilizam a forma clássica de solução do problema da EIT são lentos, fato que se agrava à medida que a malha de elementos finitos é refinada com o objetivo de melhorar a resolução espacial da imagem obtida, pois o número de parâmetros a ser estimado é maior.

A velocidade de obtenção de imagens e a capacidade de acompanhar alterações bruscas de condutividade em tempo real são características fundamentais em qualquer algoritmo que se proponha a solucionar o problema inverso em questão, dada a dinâmica dos processos fisiológicos em pacientes submetidos à respiração artificial. Conforme mencionado anteriormente, uma nova abordagem, denominada *dinâmica*[23], utilizando o filtro linearizado de Kalman com $\ell = 32$ eletrodos, é capaz de estimar mudanças bruscas de condutividade no interior de um domínio discretizado aproximadamente 31 vezes mais rápido do que seria possível com a

abordagem clássica. Esse fator é função da quantidade de eletrodos que se utiliza para injetar padrões de corrente e medir voltagens; no caso de $\ell = 16$ eletrodos, a velocidade de estimação seria 15 vezes maior.

A diminuição no tempo de estimação com o algoritmo baseado na abordagem dinâmica ocorre pois *apenas* as voltagens medidas correspondentes à aplicação de *cada* padrão de corrente são utilizadas na obtenção de uma imagem, ou seja, o número de dados a serem processados é $\ell - 1$ *vezes menor* que na abordagem clássica. Assim, durante o tempo em que, pela formulação clássica, uma única imagem é obtida, $\ell - 1$ imagens são geradas a partir da formulação dinâmica, desde que admitida a linearidade. Essa hipótese é teoricamente aceitável se a malha de elementos finitos e o número de eletrodos forem idênticos nas duas abordagens, muito embora o método de solução do problema seja diferente.

Neste trabalho, o *filtro estendido de Kalman* é utilizado para obter as estimativas da distribuição de condutividade de forma recursiva. Para a implementação do filtro, aproveita-se a idéia básica proposta por Vauhkonen *et al.*[23] de formular o problema inverso da EIT como um problema de estimação de estado e de obter soluções por meio do filtro linearizado de Kalman. A razão da mudança para o filtro estendido pode ser expressa como se segue.

Na versão linearizada, embora cada imagem seja obtida utilizando voltagens medidas correspondentes ao respectivo padrão de corrente, a linearização mostrada na eq. (4.41) é feita sempre em torno do mesmo vetor σ_0 (não necessariamente homogêneo) de condutividades, o que dificulta a estimação de parâmetros cuja faixa de variação seja elevada, por tornar a linearização muito imprecisa.

Por outro lado, no filtro estendido, a linearização por meio da eq. (4.41) é feita em torno de *cada nova estimativa* σ_k , ou seja, o vetor σ_0 é utilizado para a obtenção da matriz de sensibilidade da eq. (4.41) somente na primeira iteração do algoritmo. Com isso, é possível determinar a distribuição de condutividade em uma ampla faixa sem que seja necessário algum conhecimento prévio acerca da distribuição inicial de condutividade, pois as sucessivas distribuições estimadas ($\dots \sigma_{k-1}, \sigma_k$) provavelmente serão próximas, diminuindo os erros decorrentes da linearização.

Além disso, a possibilidade teórica de detecção rápida de amplas alterações de condutividade sugere que as estimativas fornecidas pelo filtro estendido de Kalman possam ser utilizadas no ajuste dos parâmetros de controle de dispositivos de ventilação.

4.4.2.1 Filtro Estendido de Kalman

A implementação do filtro de Kalman exige que tanto o modelo de observação quanto o modelo do sistema estejam na forma de *espaço de estados*.

Para iniciar a descrição do modelo de observação, deve-se retornar à eq. (4.41), na qual se verifica que a aplicação de cada vetor de padrão de corrente $\mathbf{c}_j \in R^s$, $j = 1 \dots p$, permite obter um vetor $\mathbf{v}_j \in R^\ell$ de voltagens nos nós correspondentes aos eletrodos. Na abordagem dinâmica, cada padrão de corrente aplicado corresponde a uma iteração do algoritmo. Então, quando qualquer um dos p padrões de corrente $\mathbf{c}_j$ no instante $t = k\Delta t$ é aplicado na k -ésima iteração, o vetor de voltagens nodais que se obtém é $\mathbf{v}_k \in R^\ell$, e não mais $\mathbf{v}_j$.

Sabe-se ainda que a presença de ruído em qualquer procedimento de medição

é fato normal e inevitável. Sendo assim, da eq. (4.41), pode-se obter o *modelo de observação*, cuja *equação de observações* no instante t é:

$$\mathbf{v}_k(\boldsymbol{\sigma}_k) = \mathbf{v}_k(\boldsymbol{\sigma}_{k-1}) + [H_k(\boldsymbol{\sigma}_{k-1})][\boldsymbol{\sigma}_k - \boldsymbol{\sigma}_{k-1}] + \boldsymbol{\nu}_k, \quad (4.47)$$

na qual $\boldsymbol{\sigma}_k \in R^m$ representa a distribuição de condutividade no instante t e $\boldsymbol{\nu}_k \in R^\ell$ é o vetor onde cada elemento procede de uma seqüência de ruído branco Gaussiano de média nula que corrompe as medidas e cuja matriz de covariância, simétrica, positiva e definida, é dada por $R_k \in R^{\ell \times \ell}$.

O *modelo do sistema discreto*^[iii] é expresso pela equação

$$\boldsymbol{\sigma}_k = \Phi_{k-1}\boldsymbol{\sigma}_{k-1} + \boldsymbol{\omega}_{k-1}, \quad (4.48)$$

conhecida como *equação de estado*, em que $\Phi_{k-1} \in R^{m \times m}$ é a matriz de transição de estados discreta e $\boldsymbol{\omega}_{k-1} \in R^m$ é o vetor onde cada elemento procede de uma seqüência de ruído branco Gaussiano de média nula que corrompe os estados e cuja matriz de covariância, simétrica, positiva e semi-definida, é dada por $Q_k \in R^{m \times m}$.

A hipótese de que o ruído seja branco, Gaussiano e de média nula com respectivas matrizes de covariância é fundamental na teoria de estimação ótima. Outras hipóteses prescindíveis foram utilizadas neste trabalho, a saber:

- tanto o ruído no estado quanto o ruído na medida não são correlacionados,

isto é, $E[\boldsymbol{\omega}_k \boldsymbol{\nu}_k^T] = 0$ para todos os k ;

^[iii]O termo “discreto” não foi utilizado para o modelo de observação pois o equipamento responsável por efetuar as leituras irá invariavelmente operar a uma determinada taxa de amostragem, sendo portanto discreto. No caso do sistema, ocorre uma discretização espacial do domínio, em um número finito de elementos, e do tempo, através do emprego da matriz de transição de estados.

- as matrizes de covariância do ruído no estado e do ruído na medida são ambas diagonais com elementos iguais e constantes, ou seja, $Q_k = \rho_\omega^2 I_m$ e $R_k = \rho_\nu^2 I_\ell$, onde ρ_ω^2 e ρ_ν^2 representam respectivamente as variâncias do ruído no estado e na medida.

Além disso, o sistema é considerado *invariante no tempo*, o que é representado por uma matriz de transição de estados constante.

A matriz de transição de estados procura reproduzir matematicamente a dinâmica real do sistema. Devido à complexidade das estruturas que compõem o tórax humano e à ausência de modelos fidedignos, optou-se por seguir a formulação proposta por Vauhkonen *et al.*[23], em que uma *matriz identidade de ordem m*, I_m , é escolhida como a matriz de transição. Quando a matriz de transição de estados é a matriz identidade, o sistema é denominado *estacionário*. Com o modelo adotado, a *dinâmica do sistema decorre da dinâmica do ruído no estado*.

Com as equações (4.47) e (4.48), a representação do sistema físico está completa e o filtro estendido de Kalman pode ser prontamente implementado.

Há diversas formas de deduzir as equações do filtro estendido de Kalman; uma delas, baseada em Gelb[10] e Sorenson[21] é apresentada no Apêndice B. As expressões resultantes, com as devidas alterações na nomenclatura de vetores e matrizes para manter a consistência com os modelos de observação e do sistema, são dadas a seguir:

$$\hat{\sigma}_k^{(-)} = \Phi_{k-1} \hat{\sigma}_{k-1}^{(+)} \quad (4.49)$$

$$P_k^{(-)} = \Phi_{k-1} P_{k-1}^{(+)} \Phi_{k-1}^T + Q_{k-1} \quad (4.50)$$

$$\hat{\sigma}_k^{(+)} = \hat{\sigma}_k^{(-)} + G_k [\mathbf{v}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\sigma}_k^{(-)})] \quad (\text{obs.: } \mathbf{h}_k = T \bar{\mathbf{h}}_k) \quad (4.51)$$

$$P_k^{(+)} = [I - G_k H_k(\hat{\sigma}_k^{(-)})] P_k^{(-)} \quad (4.52)$$

$$G_k = P_k^{(-)} H_k^T(\hat{\sigma}_k^{(-)}) [H_k(\hat{\sigma}_k^{(-)}) P_k^{(-)} H_k^T(\hat{\sigma}_k^{(-)}) + R_k]^{-1} \quad (4.53)$$

As equações (4.49) e (4.50) expressam respectivamente a *propagação das estimativas dos estados* e a *propagação da matriz de covariância do erro de estimação*, ao passo que as equações (4.51), (4.52) e (4.53) representam, respectivamente, a *atualização dos estados estimados*, a *atualização da matriz de covariância do erro de estimação* e a *matriz de ganho de Kalman*. O procedimento de estimação efetuado pelo filtro estendido de Kalman pode ser melhor entendido por meio do diagrama da Fig. 4.4.

O processo de estimação começa admitindo-se conhecida a condição inicial do vetor de condutividades, ou seja, $\sigma(t)$ em $t = 0$, e da matriz de covariância do erro de estimação, P_0 , que no diagrama da Fig. 4.4 corresponderiam a $\hat{\sigma}_{k-1}^{(+)}$ e $P_{k-1}^{(+)}$, com o símbolo “ $\wedge$ ” indicando que se trata de *estimativas* e o símbolo “ $(+)$ ” denotando que tais estimativas foram feitas *imediatamente após* o processamento de dados

já recebidos. A partir daí, inicia-se um período em que nenhum novo conjunto de dados estará disponível. Nesta fase, o filtro de Kalman irá *propagar* $\hat{\sigma}_{k-1}^{(+)}$ e $P_{k-1}^{(+)}$ até um instante imediatamente anterior ao recebimento de um novo conjunto de dados em $t = t_k$, por meio das equações (4.49) e (4.50), que têm como base as informações contidas nas matrizes de transição de estados Φ_{k-1} , de covariância do ruído no estado Q_{k-1} e os dados incorporados em $\hat{\sigma}_{k-1}^{(+)}$, fornecendo a melhor estimativa possível para o vetor de estado e para a matriz de covariância do erro de estimação até que um novo lote de medidas ($\equiv$ voltagens medidas correspondentes à aplicação de um único padrão de corrente) seja incorporado. Tais estimativas são representadas respectivamente por $\hat{\sigma}_k^{(-)}$ e $P_k^{(-)}$, onde o símbolo “ $(-)$ ” indica um instante imediatamente anterior à aquisição de novos dados. Esta etapa do processo é conhecida como *ciclo de propagação*.

No instante $t = t_k$ um novo lote de medidas é recebido; cabe agora ao filtro *atualizar*, por meio da incorporação das novas informações, as estimativas efetuadas durante a ausência de dados. A eq. (4.51) é utilizada para corrigir a estimativa efetuada pela eq. (4.49). A correção proporcionada pela eq. (4.51) é obtida com base no novo vetor de medidas $\mathbf{v}_k$ e na *matriz de ganho de Kalman* G_k , calculada a partir das informações disponíveis antes da nova aquisição de dados, conforme pode ser verificado na eq. (4.53). Finalmente, também a matriz de covariância do erro de estimação deve ser atualizada, o que é feito por meio da eq. (4.52). Esta fase do processo é conhecida como *ciclo de atualização*. De agora em diante, os ciclos de propagação e de atualização irão se suceder indefinidamente enquanto o fenômeno que estiver sendo avaliado (por exemplo, a condição pulmonar de um

paciente, os parâmetros de controle da órbita de um satélite, etc.) assim o exigir. Verifica-se ainda que, conforme as hipóteses de sistema invariante no tempo e valores constantes das variâncias do ruído no estado e na medida, as matrizes de transição de estados, de covariância do ruído no estado e de covariância do ruído na medida, respectivamente Φ_k , Q_k e R_k permanecem constantes. Portanto, o índice k referente às iterações será suprimido nestas matrizes daqui em diante.

A implementação do filtro estendido de Kalman em simulações numéricas será descrita no capítulo seguinte.

Figura 4.4: Diagrama de evolução temporal do filtro estendido de Kalman (reproduzido de Gelb[10]).

Capítulo 5

Metodologia das Simulações Numéricas

Todos os algoritmos foram escritos em linguagem **C** e compilados com **GNU C**, versão 2.0, em computadores do tipo **PC** operando com plataforma **Linux Red**

Hat 6.2. Algumas rotinas utilizadas foram obtidas de *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*[18].

5.1 Características das Malhas de Elementos Finitos

As duas malhas distintas de elementos planos triangulares que discretizam o domínio utilizadas na simulação numérica de solução dos problemas inversos relativo e dinâmico foram geradas automaticamente por meio do módulo **Corduroy**, pertencente ao software de elementos finitos **FEIt**.

No problema relativo, cuja solução é obtida de forma não iterativa a partir da equação $\mathbf{v}(\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\sigma}_0) = \mathcal{H}(\boldsymbol{\sigma}_0)\Delta\boldsymbol{\sigma}$ (4.44) e onde não existe preocupação com a velocidade de obtenção das imagens, procurou-se discretizar o domínio que representa uma seção transversal do tórax em um número de elementos que permita boa reso-

Figura 5.1: Malha de elementos finitos com $m = 96$ elementos e $s = 65$ nós para a simulação do problema relativo.

lução espacial das imagens obtidas, resultando em uma malha que possui $m = 96$ elementos e $s = 65$ nós, dos quais $\ell = 16$ dos nós do contorno correspondem aos eletrodos, conforme representado na Fig. 5.1. Um procedimento iterativo para a solução deste problema com base na eq. (4.44) também seria possível desde que, após cada nova estimativa σ obtida, a linearização fosse feita em torno deste vetor.

Já no caso do problema dinâmico, descrito pela equação de estado $\sigma_k = \Phi_{k-1}\sigma_{k-1} + \omega_{k-1}$ (4.48) e pela equação de observações $v_k(\sigma_k) = v_k(\sigma_{k-1}) + [H_k(\sigma_{k-1})][\sigma_k - \sigma_{k-1}] + \nu_k$ (4.47), a estimação via filtro estendido de Kalman é um processo iterativo. Como o objetivo é a verificação da viabilidade de utilização do método para rastrear mudanças bruscas e amplas nas condutividades de algumas regiões mais importantes, optou-se por uma malha me-

Figura 5.2: Malha de elementos finitos com $m = 32$ elementos e $s = 25$ nós utilizada nas simulações do problema inverso pela abordagem dinâmica.

nos refinada. Tal malha, conforme mostrado na Fig. 5.2, contém $m = 32$ elementos e $s = 25$ nós, dos quais os $\ell = 16$ localizados na fronteira correspondem aos eletrodos.

Do ponto de vista clínico, as regiões mais importantes, denominadas *regiões de interesse* (ROIs), correspondem, em uma situação real, aproximadamente às áreas ocupadas pelos pulmões direito e esquerdo, coração e outros tecidos, como pele e gordura que envolvem o tórax, ou estruturas como coluna vertebral e costelas. Para a utilização do algoritmo no ajuste e controle de pressão e vazão de ar em equipamentos de respiração artificial, as cinco regiões mencionadas fornecem informações suficientes para uma avaliação satisfatória das condições do paciente.^[i]

Do ponto de vista de Engenharia, qualquer redução na dimensão do problema

^[i]Comentários informais do Prof. Dr. Marcelo B.P. Amato (FMUSP).

de estimação como consequência do agrupamento de elementos em ROIs tende a aumentar a velocidade de processamento, pois a dimensão das matrizes envolvidas no cálculo também diminui. Outro benefício é a melhoria na estabilidade das soluções[23]. A estabilidade das soluções com respeito à dimensão do problema de estimação será abordada na seção 6.2.

Salienta-se também que, devido ao pequeno número de elementos e à estruturação da malha utilizada na abordagem dinâmica, as ROIs simuladas não guardam semelhança geométrica com os órgãos existentes no tórax. Esse fato, entretanto, não invalida as simulações, haja vista que, uma vez demonstrada a *eficácia do procedimento* (capacidade do algoritmo em estimar distribuições de condutividade absoluta em cada região desejada), sua extensão para uma malha mais refinada é, teoricamente, imediata, desde que mantido o agrupamento em ROIs para diminuir o número de parâmetros a ser estimado e melhorar a estabilidade das soluções.

Visando avaliar o desempenho e as limitações do algoritmo, as simulações foram efetuadas com os 32 elementos da malha da Fig. 5.2 agrupados em 5, 8 e 16 regiões de interesse. Na prática, o agrupamento pode ser efetuado somando, na matriz de sensibilidade, as colunas que correspondem aos elementos de cada região de interesse.

5.2 Métodos e Parâmetros de Simulação

Para o problema relativo, a metodologia utilizada nas simulações consiste em:

- i. discretizar o domínio em uma malha bidimensional por meio do MEF;
- ii. admitir conhecida uma determinada distribuição de condutividade $\sigma_0 \in R^m$;
- iii. aplicar p padrões linearmente independentes de corrente a eletrodos pontuais posicionados nos nós da fronteira do domínio discretizado;
- iv. solucionar o problema direto por meio do método dos elementos finitos. Para isso, parte-se da eq.

$$YV = C \quad (4.36)$$

e determinam-se as voltagens nodais na malha, incluindo as voltagens nos nós que representam os ℓ eletrodos, resolvendo o sistema para V ;

- v. alterar a distribuição de condutividade criando um novo vetor $\sigma \in R^m$ em que os valores correspondentes a alguns elementos ou regiões da malha são modificados para simular a ocorrência de uma anomalia pulmonar;
- vi. aplicar p padrões de correntes e solucionar o problema direto para V por meio da eq. (4.36), com os valores de condutividades de σ , para obter novas voltagens nodais na malha (inclusive nos eletrodos);
- vii. utilizar as voltagens calculadas nas etapas **iv** e **vi** como dados de entrada

(voltagens “medidas”)^[ii] no algoritmo de solução de $v(\sigma) - v(\sigma_0) = \mathcal{H}(\sigma_0)\Delta\sigma$,

^[ii]Para o problema relativo, as voltagens nos eletrodos calculadas através do método dos elementos finitos são diretamente utilizadas como voltagens medidas.

eq. (4.44), para tentar reproduzir a variação de condutividades provocada na etapa **v**.

Na abordagem dinâmica, após a discretização do domínio em uma malha bidimensional por meio do MEF, o processo de estimação é efetuado de forma recursiva. A metodologia empregada consiste em:

- i. aplicar p padrões linearmente independentes de corrente a eletrodos pontuais posicionados nos nós da fronteira do domínio discretizado, em que se admite conhecida uma distribuição de condutividade $\sigma \in R^m$ cujos valores correspondentes a alguns elementos ou regiões representam as anomalias pulmonares;
- ii. solucionar o problema direto por meio da eq. (4.36) para obter as voltagens nodais na malha;
- iii. adicionar ruído branco Gaussiano de média nula às voltagens nodais calculadas correspondentes aos ℓ eletrodos, visando a obtenção numérica de voltagens “medidas;”
- iv. partindo de uma distribuição inicial σ_0 escolhida no espaço clinicamente possível, utilizar recursivamente as voltagens “medidas” provenientes da aplicação de cada padrão p de corrente como dados de observação para o filtro estendido de Kalman, eqs. (4.49)-(4.53), e estimar a distribuição de condutividade σ que gerou as voltagens nodais, obtidas da solução do problema direto, antes da introdução de ruído.

As particularidades dos métodos e parâmetros para os problemas relativo e dinâmico são discutidas a seguir.

Abordagem clássica

- A abordagem clássica, em que se baseia o problema relativo, requer a aplicação de um número de padrões de corrente suficiente para que a dimensão do vetor de voltagens lidas nos eletrodos seja igual ou superior ao número m de elementos cuja condutividade se deseja estimar.
- Um dos eletrodos é tomado como referência; portanto há, no máximo, $p = \ell - 1$ padrões linearmente independentes de corrente e $\mathbf{v} \in R^{\ell p}$ voltagens medidas.
- No caso da malha simulada, que possui 96 elementos, são aplicados 7 padrões de corrente. São necessários 7 padrões em vez de 6 pois a primeira voltagem lida para cada padrão é *zero*, uma vez que o primeiro eletrodo é tomado como referência (terra). Os padrões de corrente são as colunas de uma matriz C na forma

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0_{(1,7)} \\ +I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & +I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & +I_{(14,7)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & & & 0_{(65,7)} \end{bmatrix} \quad (\text{eletrodo 1 = referência})$$

fazendo com que a dimensão da matriz de sensibilidade $\mathcal{H}(\sigma_0)$, composta agora pelas $H_j(\sigma_0)$, $j = 1, \dots, 7$ da eq. (4.43), pg. 34, seja 112×96 .

A nova distribuição de condutividade é obtida através da eq. (4.44). Neste trabalho, a pseudo-inversa da matriz $\mathcal{H}(\sigma_0)$ é calculada por meio da decomposição em valores singulares. Um dos conceitos mais importantes neste procedimento é o *número de condição* do sistema linear.

Press *et al.*[18] definem o número de condição como o quociente entre o maior e o menor valor singular obtidos na decomposição em valores singulares. Um número de condição muito elevado^[iii] indica que o sistema é mal condicionado e, conseqüentemente, de difícil identificação, isto é, grandes alterações nos parâmetros internos (condutividades) provocam pequenas variações na fronteira do sistema (voltagens medidas nos eletrodos). Quando isso ocorre, é necessário adotar procedimentos de regularização como, por exemplo, truncar alguns valores singulares ou impor restrições inexistentes no problema original. Esses dois métodos foram utilizados nas simulações, como será visto na seção 6.1.

Abordagem dinâmica

Na abordagem dinâmica, as matrizes de covariância dos ruídos no estado Q e na medida R são parâmetros que influenciam o desempenho do algoritmo.

As matrizes Q e R utilizadas nas simulações são diagonais pois admite-se que tanto o ruído no estado quanto o na medida não sejam internamente correlacionados, hipóteses geralmente empregadas embora não necessárias e cuja validade depende

^[iii]Watkins[25] enfatiza que o valor do número de condição que estabelece o limite entre sistemas bem ou mal condicionados varia de caso para caso. De maneira geral, um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ será mal condicionado se uma pequena perturbação $\delta\mathbf{b}$ adicionada ao vetor $\mathbf{b}$ fizer com que a solução $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ seja intoleravelmente discrepante da solução do sistema original. A medida dessa tolerância depende do erro que se considera aceitável em cada caso.

de diversos fatores. Por exemplo, a fidelidade do modelo do sistema à realidade física influencia os elementos da matriz Q .

Por outro lado, para que R seja diagonal, o equipamento de medição deve apresentar blindagem eletrostática perfeita.

O processo é considerado *quasi*-estático durante o tempo necessário para efetuar cada conjunto de medições. A hipótese é pertinente pois o tempo para a obtenção de cada estimativa do estado é de aproximadamente 0.1 segundos, enquanto o tempo de amostragem é da ordem de 1.6×10^{-3} segundos. ^[iv]

Às tensões nodais correspondentes aos eletrodos, obtidas pela solução do problema direto com o auxílio do método dos elementos finitos, foi adicionado ruído branco Gaussiano de média nula com desvio padrão variando de 3.5% a 12% da tensão máxima calculada em cada simulação.

O vetor inicial σ_0 reproduz uma distribuição uniforme de condutividade cujo valor foi escolhido na faixa entre 0.04 e 1.0 ($\Omega \cdot m$)⁻¹, representando características das principais estruturas e tecidos do tórax[4]. A matriz inicial de covariância do erro de estimação P_0 utilizada é diagonal com elementos iguais entre si. O valor da variância, elementos da diagonal principal da matriz P_0 , foi arbitrariamente selecionado para avaliar sua influência no comportamento do algoritmo na ausência de informações *a priori*. Além disso, também ao vetor σ_0 foi adicionado ruído branco Gaussiano de média nula com desvio padrão de até 20% do valor de condutividade. Isto significa que, partindo de uma condição arbitrária do sistema em um espaço clinicamente esperado (o que ocorrerá quando efetivamente o equipamento for utilizado

^[iv]Admitindo-se taxa de amostragem de 100 Ksps e 10 amostras de tensão em cada eletrodo.

em um paciente), o filtro deverá ser capaz, após k iterações, de gerar estimativas de condutividade cuja variância em relação a um vetor $\sigma \in R^m$ seja mínima.

A matriz de sensibilidade H_k do modelo de observação, eq. (4.47), é obtida de maneira idêntica à das partições H_j da matriz de sensibilidade do problema relativo. Na abordagem dinâmica o processo de estimação é iterativo. As estimativas dos componentes do vetor de estado são obtidas utilizando as $\ell = 16$ medidas de voltagens disponíveis a cada iteração. Como o número de padrões linearmente independentes de corrente é limitado em $p = \ell - 1 = 15$ padrões, deve-se aplicá-los diversas vezes, de modo a criar a redundância necessária para que o comportamento do algoritmo possa ser avaliado. Nas simulações efetuadas, cada padrão de corrente é representado por uma coluna na matriz de padrões

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0_{(1,15)} \\ +I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & +I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & +I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & +I_{(16,15)} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & & & 0_{(25,15)} \end{bmatrix} \quad (\text{eletrodo 1 = referência})$$

Cada padrão é aplicado 40 vezes, correspondendo a $k = 600$ iterações do algoritmo de estimação.

Capítulo 6

Resultados e Discussão

Nas seções deste capítulo e nas subseqüentes, os valores de condutividade têm unidade $(\Omega \cdot m)^{-1}$

Os gráficos tridimensionais foram gerados, com auxílio do software **Gnuplot**. O plano $x - y$ contém o domínio discretizado pela malha de elementos finitos. Ao baricentro de cada elemento finito atribui-se um valor de condutividade estimada. O algoritmo para formar um gráfico de contorno requer valores de condutividade nos nós de uma malha estruturada de elementos quadrangulares. Os valores de condutividade na malha estruturada são obtidos por interpolação dos valores de condutividade associados ao baricentro de cada elemento. A ordem do polinômio de interpolação adotada é 8. A malha estruturada contém 50 divisões em x e 50 divisões em y . Neste trabalho, o plano foi dividido em uma “grade” de 50×50 linhas e os pontos foram interpolados através de polinômios de grau 8. Para favorecer a visualização, em todas as figuras referentes a simulações do problema relativo os valores das variações de condutividades foram multiplicados por -1 .

6.1 Problema Relativo

A simulação do problema relativo, definido na seção 4.4.1.1, partiu da solução de um problema direto em que todos os componentes do vetor inicial de condutividades $\sigma_0 \in R^m$ receberam o valor $1.0 (\Omega \cdot m)^{-1}$ para gerar as voltagens de referência. Em seguida, as condutividades dos elementos 8, 16, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 31 e 39 do domínio discretizado, Fig. 5.1, pg. 45, foram alteradas para $0.9 (\Omega \cdot m)^{-1}$ e novas voltagens foram obtidas resolvendo-se o problema direto. Tais voltagens são diretamente utilizadas na eq. $v(\sigma) - v(\sigma_0) = \mathcal{H}(\sigma_0) \Delta \sigma$ (4.44), por meio da qual as variações de condutividade são obtidas. A distribuição esperada de condutividade resultante deste cálculo está representada na Figura 6.1.

Figura 6.1: Região em que foi provocada uma alteração de condutividade (elementos 8, 16, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 31 e 39 na Fig. 5.1, página 45).

A solução do sistema linear dado pela eq. (4.44) pode ser obtida através do

cálculo da pseudo-inversa da matriz $\mathcal{H}(\sigma_0)$, cujo número de condição é da ordem de 10^9 . Os resultados, conforme mostrado na Fig. 6.2, não correspondem aos esperados, sugerindo que a matriz de sensibilidade do sistema é mal condicionada. Em sistemas com esta característica, pequenas perturbações^[i] no vetor independente ou na própria matriz do sistema podem afetar intoleravelmente a solução[25]. Quando isso ocorre, procura-se regularizar o problema mal posto.

Figura 6.2: Simulação 1 - Problema relativo: resultado obtido com truncamento a partir de $tol = 10^{-15}$ nos valores singulares para a inversão de $\mathcal{H}(\sigma_0)$.

Com o intuito de melhorar o desempenho do algoritmo, nas demais simulações utilizaram-se três procedimentos de regularização:

- **A**: imposição de restrições às variações nos elementos mais externos do domínio;

^[i]Uma análise da influência de perturbações na solução do problema em estudo será efetuada mais adiante.

- **B**: restrições idênticas às anteriores e alteração no valor de truncamento da decomposição em valores singulares;
- **C**: alteração somente no valor de truncamento da decomposição em valores singulares, sem impor qualquer restrição aos elementos externos.

O critério de truncamento utilizado no cálculo da pseudo-inversa da matriz $\mathcal{H}(\sigma_0)$ é definido por:

$$\left[\begin{array}{l} w_{min} = w_{max} \times tol \\ \text{se } w_j \leq w_{min} \Rightarrow 1/w_j = 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{array} \right.$$

onde w_j representa um dos valores da matriz diagonal $W \in R^{n \times n}$ da decomposição em valores singulares (conforme pg. 35), w_{min} e w_{max} os valores singulares mínimo e máximo e tol a tolerância admitida. Os resultados das simulações aplicando tais procedimentos na seqüência descrita acima estão resumidos na Tabela 6.1. A simulação 1 é a referência inicial para todos os procedimentos, pois representa os resultados obtidos sem o auxílio de qualquer método de regularização.

Tabela 6.1: Resultados das simulações do problema relativo

Simulação (Figura)	procedimento	número de condição	truncamento na na decomposição em valores singulares	no. de valores singulares utilizados
1 (6.2)	referência	$5.7 \cdot 10^9$	10^{-15}	96
2 (6.3)	A	$2.4 \cdot 10^6$	10^{-15}	46
3 (6.3)	B		10^{-7}	46
4 (6.4)	B		10^{-5}	38
5 (6.5)	B		10^{-4}	27
6 (6.6)	C	$5.7 \cdot 10^9$	10^{-7}	84
7 (6.7)	C		10^{-4}	61

Procedimento “A” de regularização

A imposição de restrições às variações nas condutividades dos elementos mais externos do domínio (47 a 96 na malha da Figura 5.1) implica, sob o ponto de vista clínico, em desprezar alterações que, em situações reais, são pequenas, pois referem-se a tecidos como pele e gordura, ou às costelas que formam o tórax.^[ii] Dessa forma, pode-se *fixar* os valores de condutividade destes elementos. Em termos de simulação, isso implica em impor, na eq. (4.44), $\Delta\sigma[i] = \sigma[i] - \sigma_0[i] = 0$, $i = 47, \dots, 96$ e igualar a zero as respectivas linhas e colunas da matriz $\mathcal{H}(\sigma_0)$, com exceção dos elementos da diagonal principal, que assumem o valor unitário; ao mesmo tempo, os elementos correspondentes do vetor de variações de voltagem assumem o valor zero.

O processo acima descrito constitui um método direto de regularização em que informações *a priori* são introduzidas com o intuito de reduzir a dimensão do vetor a ser estimado e, conseqüentemente, o número de condição da matriz de sensibilidade. Verifica-se que a diminuição do número de condição, por si só, não é capaz de fornecer os resultados esperados, conforme atestam os dados da Tabela 6.1 e a Figura 6.3.

Procedimento “B” de regularização

A obtenção de melhores resultados somente foi conseguida quando, além das restrições impostas aos elementos externos, o critério de truncamento dos valores singulares no cálculo da pseudo-inversa da matriz $\mathcal{H}(\sigma_0)$ foi alterado para $tol = 10^{-5}$ e $tol = 10^{-4}$, conforme mostram respectivamente as Figuras 6.4 e 6.5.

^[ii]Comentários informais do Prof. Dr. Marcelo B.P. Amato (FMUSP).

Figura 6.3: Simulação 2 - Problema relativo: resultado obtido com truncamento a partir de $tol = 10^{-15}$ nos valores singulares para a inversão de $\mathcal{H}(\sigma_0)$ e restrição a variações de condutividades nos elementos 47 a 96.

Figura 6.4: Simulação 4 - Problema relativo: condições idênticas às descritas para a Fig. 6.3, porém com truncamento a partir de $tol = 10^{-5}$ nos valores singulares.

Figura 6.5: Simulação 5 - Problema relativo: condições idênticas às descritas para a Fig. 6.3, porém com truncamento a partir de $tol = 10^{-4}$ nos valores singulares.

Procedimento “C” de regularização

Os melhores resultados foram obtidos utilizando apenas o truncamento de valores singulares, conforme representado nas Figuras 6.6 e 6.7.

Figura 6.6: Simulação 6 - Problema relativo: condições idênticas às descritas para a Fig. 6.2, porém com truncamento a partir de $tol = 10^{-7}$.

Figura 6.7: Simulação 7 - Problema relativo: condições idênticas às descritas para a Fig. 6.2, porém com truncamento a partir de $tol = 10^{-4}$.

Análise comparativa dos resultados

Para facilitar a comparação dos resultados, os gráficos das simulações estão reproduzidos em conjunto. Os códigos *SR*, *CR*, *tol* e *VSU* significam respectivamente *sem ou com restrições* à variação de condutividade nos elementos 47 a 96, *tolerância no critério de truncamento* na decomposição em valores singulares e *número de valores singulares* utilizados na solução do sistema de equações lineares. A Tabela 6.2 apresenta uma avaliação quantitativa dos principais resultados. A Fig. 6.8 mostra a variação do índice de erro em função da tolerância no critério de truncamento na decomposição em valores singulares para o cálculo da pseudo-inversa da matriz do sistema para as simulações 1, 6 e 7.

Sim.1-Fig. 6.2: SR, $tol = 10^{-15}$, VSU = 96 Sim.2-Fig. 6.3: CR, $tol = 10^{-15}$, VSU = 46 Sim.4-Fig. 6.4: CR, $tol = 10^{-5}$, VSU = 38 Sim.5-Fig. 6.5: CR, $tol = 10^{-4}$, VSU = 27 Sim.6-Fig. 6.6: SR, $tol = 10^{-7}$, VSU = 84 Sim.7-Fig. 6.7: SR, $tol = 10^{-4}$, VSU = 61

Tabela 6.2: Valores estimados de variações de condutividade

	Simulação 1 Fig 6.2	Simulação 4 Fig 6.4	Simulação 5 Fig. 6.5	Simulação 6 Fig. 6.6	Simulação 7 Fig. 6.7
truncamento	10^{-15}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-7}	10^{-4}
proc. regular.	ref.	B	B	C	C
elementos	$ \Delta\hat{\sigma} ^a$				
8	81.753	0.096	0.055	0.086	0.059
16	68.038	0.147	0.068	0.095	0.063
17	104.782	0.085	0.107	0.105	0.119
18	15.449	0.134	0.099	0.127	0.114
19	125.330	0.080	0.098	0.097	0.118
20	8.958	0.080	0.062	0.096	0.061
27	29.032	0.073	0.076	0.103	0.063
28	60.282	0.100	0.109	0.113	0.121
29	66.948	0.137	0.102	0.106	0.117
30	161.690	0.115	0.107	0.102	0.118
31	83.877	0.124	0.069	0.124	0.059
39	36.471	0.096	0.059	0.088	0.062
índice de erro ^b	81.7×10^3	0.007	0.008	0.002	0.011

^anos elementos da região mostrada na Fig. 6.1.

^bcalculado conforme abaixo:

$$\text{índice de erro} = \sum_{el} (\Delta\sigma - \Delta\hat{\sigma})^2,$$

onde “el” refere-se aos elementos da 1ª coluna da tabela, $\Delta\sigma = 0.1$ é o valor esperado e $\Delta\hat{\sigma}$ são os valores estimados.

Figura 6.8: Índice de erro nas estimativas de variações de condutividade em função da tolerância no critério de truncamento nas simulações 1, 6 e 7.

Com relação às simulações nas quais não há restrições às variações das condutividades nos elementos 47 a 96, observando-se a Tabela 6.1 e as simulações 1 e 6, Figuras 6.2 e 6.6, percebe-se que quando o número de valores singulares truncados passa de *zero* para 12, os resultados melhoram. O mesmo não ocorre quando o número de valores truncados aumenta de 12 para 35 (simulação 7), como mostram as Figuras 6.6 e 6.7. Estas constatações são confirmadas pelos índices de erro na Tabela 6.2 e pela Fig. 6.8.

Analogamente, nas simulações 2, 4 e 5 (Figuras 6.3, 6.4 e 6.5), que apresentam restrições às variações de condutividades nos elementos citados, o melhor resultado é obtido na simulação 4 com 8 valores singulares descartados.

Uma maneira de tentar compreender o comportamento da solução do problema inverso com relação ao valor de truncamento dos valores singulares é por meio da análise da influência das *perturbações* $\delta\mathcal{H}$ e $\delta\Delta\mathbf{v}$, respectivamente na matriz de sensibilidade $\mathcal{H}$ e no vetor de voltagens $\Delta\mathbf{v}$, sobre a solução do sistema linear original

$$\mathcal{H}\Delta\boldsymbol{\sigma} = \Delta\mathbf{v} \quad (6.1)$$

obtido da eq. (4.44) que, após as perturbações passa a

$$[\mathcal{H} + \delta\mathcal{H}][\Delta\boldsymbol{\sigma} + \delta\Delta\boldsymbol{\sigma}] = \Delta\mathbf{v} + \delta\Delta\mathbf{v}, \quad (6.2)$$

com $\delta\Delta\boldsymbol{\sigma}$ definida como a *perturbação* no vetor solução. Na modelagem do problema relativo, a existência de ruído externo não é considerada; dessa forma, todas as perturbações são decorrentes de erros de arredondamento nas operações efetuadas pelo computador.

É necessário determinar a ordem de grandeza das perturbações na matriz de sensibilidade e no vetor de voltagens resultante da solução do problema direto, que será o vetor independente na solução do problema inverso.

Watkins[25] demonstra que as perturbações $\|\delta \mathbf{x}\|$ na solução de um sistema linear $(A + \delta A)(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{b}$, com A não singular, serão pequenas se for válida a seguinte relação:

$$\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < \frac{1}{\kappa(A)}, \quad (6.3)$$

onde δA são as perturbações em A , $\kappa(A)$ indica o *número de condição de A* e $\|\bullet\|$ representa uma norma vetorial genérica ou uma norma matricial induzida de ordem inespecífica. Nestas condições, Watkins[25] prova ainda que a matriz $(A + \delta A)$ é não singular e que a máxima perturbação $\delta \mathbf{x}$ no vetor solução é dada por

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1 - \kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}. \quad (6.4)$$

A ordem de grandeza das perturbações no vetor de voltagens pode ser estimada analisando o sistema linear $\mathbf{v}_j = T\bar{\mathbf{v}}_j = TY^{-1}\mathbf{c}_j$, para $j = 1, \dots, p$ padrões de corrente, utilizando a eq. (6.4),

$$\frac{\|\delta \Delta \mathbf{v}\|}{\|\Delta \mathbf{v}\|} \leq \frac{\kappa(Y^{-1}) \frac{\|\delta Y^{-1}\|}{\|Y^{-1}\|}}{1 - \kappa(Y^{-1}) \frac{\|\delta Y^{-1}\|}{\|Y^{-1}\|}}. \quad (6.5)$$

A ordem de grandeza das perturbações δY^{-1} na inversa da matriz de rigidez pode ser determinada como se segue:

$$YY^{-1} = I$$

$$Y(Y^{-1} + \delta Y^{-1}) = (I + \delta I)$$

Como $YY^{-1} = I$, pode-se escrever

$$\delta Y^{-1} = Y^{-1}(\delta I)$$

Aplicando a norma em ambos os lados fica

$$\|\delta Y^{-1}\| \leq \|Y^{-1}\| \|\delta I\|$$

Dividindo a equação por $\|Y^{-1}\|$ e considerando que a norma de uma matriz identidade é unitária chega-se a

$$\frac{\|\delta Y^{-1}\|}{\|Y^{-1}\|} \leq \frac{\|\delta I\|}{\|I\|}, \quad (6.6)$$

ou seja, as perturbações na inversa da matriz de rigidez podem ser calculadas conhecendo-se a ordem de grandeza das perturbações na matriz identidade resultante do produto YY^{-1} . No caso em análise, $\|\delta I\|/\|I\| \simeq 5 \cdot 10^{-7}$ e $\kappa(Y^{-1}) \simeq 3 \cdot 10^3$. A condição estabelecida pela eq. (6.3) é atendida; assim, pode-se utilizar a eq. (6.5) para obter $\|\delta \Delta \mathbf{v}\|/\|\Delta \mathbf{v}\| \simeq 1.5 \cdot 10^{-3}$.

Lembrando que cada partição H_j da matriz de sensibilidade é obtida a partir do produto $\left[-TY^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_1} Y^{-1} \mathbf{c}_j \quad -TY^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_2} Y^{-1} \mathbf{c}_j \quad \dots \quad -TY^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_m} Y^{-1} \mathbf{c}_j \right]$, $j = 1, \dots, p$, eq. (4.42), é de se esperar que a ordem de grandeza das perturbações $\|\delta \mathcal{H}\|/\|\mathcal{H}\|$ seja igual ou superior à de $\|\delta Y^{-1}\|/\|Y^{-1}\|$; supõe-se então $\|\delta \mathcal{H}\|/\|\mathcal{H}\| \simeq 5 \cdot 10^{-7}$.

Watkins[25] enfatiza que matrizes bem condicionadas obedecem à relação $\|\delta A\|/\|A\| \ll 1/\kappa(A)$. Como o número de condição da matriz de sensibilidade é $\kappa(\mathcal{H}) = 5.7 \cdot 10^9$, a ordem de grandeza das perturbações $\|\delta \mathcal{H}\|/\|\mathcal{H}\|$ é superior à do inverso do número de condição, comprovando o mal condicionamento desta matriz. Verifica-se também que a desigualdade da eq. (6.3) não é mais satisfeita; isso significa que $(\mathcal{H} + \delta \mathcal{H})$ é numericamente singular e, portanto, o sistema não possui solução

única. Assim, uma solução obtida com o sistema completo de equações (utilização de todos os valores singulares) poderá ser diferente da teoricamente esperada.

Dentre as simulações sem imposição de restrições às variações de condutividade nos elementos 47 a 96 (simulações 1, 6 e 7), somente na simulação 1 todos os valores singulares foram utilizados na determinação do vetor solução, que apresenta perturbações $\|\delta\Delta\sigma\|/\|\Delta\sigma\|$ da ordem de 10^3 . O resultado obtido é discrepante do esperado, como mostra a Figura 6.2, e consistente com o raciocínio acima. Devido à ordem de grandeza das perturbações na matriz de sensibilidade, é provável que, em algumas das equações, informações relativas a pequenas variações de condutividades se confundam com o ruído numérico, fazendo com que o espaço solução apresente pouca ou mesmo nenhuma semelhança com a realidade.

Quando o número de valores singulares a serem utilizados no cálculo do vetor de saída é diminuído devido ao truncamento, restringe-se o espaço solução; o sub-espaço eliminado possivelmente está associado ao espaço solução gerado por ruído, o que justifica a melhoria apresentada na simulação 6, na qual 12 valores singulares foram descartados (valor de truncamento = 10^{-7}).

Entretanto, uma redução excessiva no número de valores singulares empregados na solução do problema não implica necessariamente em resultados mais próximos dos esperados, como mostra a simulação 7 (35 valores singulares ignorados; valor de truncamento = 10^{-4}). Aparentemente, quando o número de valores truncados é elevado, o sub-espaço eliminado engloba também parte do espaço solução procurado. A dificuldade está justamente em determinar o número ótimo de valores singulares a serem suprimidos. Neste problema, os resultados da Tabela 6.2 sugerem que o

limite ótimo de truncamento de valores singulares nas simulações sem imposição de restrições é em torno de 10^{-7} .

No caso das simulações com imposição de restrições às variações nos elementos 47 a 96 do vetor solução (simulações 2, 3, 4 e 5), o raciocínio para explicar o limite ótimo de truncamento em 10^{-5} na simulação 4 é análogo. Uma outra interpretação acerca do efeito causado pelo truncamento de valores singulares sobre a solução de um sistema linear é apresentada a seguir.

Quando a matriz do sistema é mal condicionada, é provável que alguns dos valores singulares próximos de zero correspondam a equações em que informações sobre o comportamento do sistema e ruído numérico possuam a mesma ordem de grandeza. Press *et al.*[18] afirmam que a decomposição em valores singulares de uma matriz mal condicionada irá fornecer alguns valores suficientemente pequenos para que sejam considerados iguais a zero, indicando que a solução não é única.

De acordo com Watkins[25], a solução de um sistema linear que não possui solução única, empregando truncamento de valores singulares, fornece um vetor solução $\mathbf{x}$ que minimiza a norma Euclidiana $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2$. A principal dificuldade que surge, ainda segundo Watkins, é estabelecer a fronteira entre os valores singulares que serão considerados nulos ou não nulos, ou seja, definir quais deles correspondem a equações nas quais a informação efetiva se confunde com o ruído numérico. O problema se agrava quando as diferenças entre os valores singulares sucessivos não são acentuadas.

Ainda com relação ao problema do SVD para matrizes mal condicionadas conforme postulado acima, Press *et al.*[18] argumentam que o vetor solução será único

sempre que for obtido através da minimização de um funcional do tipo $\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \lambda \mathcal{B}(\mathbf{x})$, em que $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2^2$ e $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ represente alguma forma quadrática de $\mathbf{x}$ como, por exemplo $\|\mathbf{x}\|_2^2$. Além disso, prosseguem Press *et al.*, $\mathcal{B}$ exprime, de certa forma, alguma espécie de conhecimento *a priori* sobre a solução, ao passo que $\mathcal{A}$ está mais ligada ao conhecimento *a posteriori*, ou seja, à solução propriamente dita do sistema linear utilizando todos os valores singulares da decomposição.

O fator λ de ponderação, que pode variar de 0 a ∞ , representa uma medida de compromisso na procura de uma solução que minimize ao mesmo tempo $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. A utilização de todos os valores singulares ($\lambda = 0$) no cálculo do vetor de saída reflete a transformação linear que apresenta melhor aderência dos dados à solução, porém esta torna-se “instável ou irreal” [18] devido à propagação de ruído. Por outro lado, quanto maior o valor de λ , a solução encontrada será mais discrepante da solução do sistema original. Dependendo do λ escolhido, a solução poderá ser mais próxima da realidade. Assim, o fator λ é uma espécie de medida da “suavidade” da solução desejada, quando $\mathcal{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$. Press *et al.* resumem o raciocínio anterior na Figura 6.9, onde as melhores soluções apresentam um equilíbrio entre maior aderência dos dados à solução e maior suavidade.

No problema inverso em questão, a matriz $\mathcal{H}$ de sensibilidade é mal condicionada e as variações entre valores singulares consecutivos calculados não são acentuadas. Sob a perspectiva da argumentação acima, estes dois fatores justificam o procedimento empírico na escolha do limite de truncamento dos valores singulares (escolha do “melhor” λ) e ajudam a explicar o porquê da piora no índice de erro da Tabela 6.2 quando o valor de truncamento é excessivamente elevado.

Figura 6.9: Diagrama de *aderência* $\times$ *suavidade* da solução via SVD com relação ao número de valores singulares utilizados (reproduzido de Press *et al.*[18]).

Os resultados obtidos indicam a necessidade de implementar métodos de regularização, pré-condicionamento ou procedimentos que garantam maior precisão na solução de sistemas lineares, como, por exemplo, o refinamento iterativo da solução.

6.2 Filtro Estendido de Kalman

Nesta seção estão descritos resultados de simulações numéricas do emprego do filtro estendido de Kalman na Tomografia por Impedância Elétrica. Foram efetuadas diversas simulações variando-se a distribuição inicial de condutividade, o nível de ruído nas voltagens “medidas” e os parâmetros do filtro de Kalman, conforme mostrado na Tabela 6.3.

A influência qualitativa e quantitativa das matrizes de covariância sobre o comportamento global do filtro é discutida a seguir.

Tabela 6.3: Parâmetros e Resultados das Simulações

Sim.	1	2	3	4	5	6	7	8
ROIs	5			8			16	
Condut. esperada σ_k $(\Omega \bullet m)^{-1}$	$\left[\begin{array}{c} 0.14 \\ 0.07 \\ 0.04 \\ 0.13 \\ 0.05 \end{array} \right]$				0.10		$\left[\begin{array}{c} 0.20 \\ 0.80 \\ 1.40 \\ 0.60^a \end{array} \right]$	
					0.40			
					0.60			
					1.00			
					0.23			
					0.42			
					0.89			
					0.78			
Ruído de med. (%) ^b	5.0	12.0		3.5	10.5		7.5	
P_0	$5 \cdot 10^{-2} I_5$			$10 I_8$			$25 I_{16}$	$2 I_{16}$
Q	$5 \cdot 10^{-5} I_5$	$5 \cdot 10^{-7} I_5$	$5 \cdot 10^{-4} I_5$	$1.5 \cdot 10^{-3} I_8$		$2.7 \cdot 10^{-2} I_8$	$5.5 \cdot 10^{-6} I_{16}$	
R	$8 I_{16}$	$12 I_{16}$		$3 \cdot 10^{-2} I_{16}$	$3 I_{16}$		$4 \cdot 10^{-2} I_{16}$	
Conductiv. inicial σ_0	0.2 + ruído			0.7 + ruído			1.0 + ruído	
Erro de estim. (%) ^c	-3.35	-6.11	-5.71	3.37	12.4	-6.74	4.28	> 4.28

^acondutividade adotada para 13 elementos

^bdesvio-padrão do ruído branco Gaussiano de média nula em porcentagem da máxima voltagem calculada por meio do MEF

^cda máxima condutividade esperada (fundo de escala) na respectiva simulação

A matriz de covariância do erro de estimação P_k é diretamente afetada pelos parâmetros estatísticos do sistema dinâmico, indicados pelos valores dos componentes das matrizes de covariância dos ruídos no estado Q e na medida R , conforme equações (4.50), (4.52) e (4.53), pg. 41.

Maiores valores nos componentes de Q indicam que o sistema é fortemente afetado pelo ruído no estado ou que o modelo adotado não é capaz de representar com fidelidade a situação física real[10, 16]. Por exemplo, entre as simulações 1 e 2 (Figuras 6.10 e 6.11), a única diferença jaz no desvio-padrão do ruído nas voltagens “medidas”; no entanto, para que o algoritmo fosse capaz de se adaptar a esta modificação e convergir com pequena margem de erro para o vetor de condutividades esperado, as variâncias do ruído no estado, elementos da diagonal de Q , tiveram que ser diminuídas, e as variâncias do ruído na medida, elementos da diagonal de R , aumentadas. Isto ocorre pois um decréscimo nos componentes de Q implica em um decréscimo nos componentes da matriz P_k , de acordo com as equações $P_k^{(-)} = \Phi_{k-1}P_{k-1}^{(+)}\Phi_{k-1}^T + Q_{k-1}$ (4.50) e $P_k^{(+)} = [I - G_k H_k(\hat{\sigma}_k^{(-)})]P_k^{(-)}$ (4.52); por sua vez, um acréscimo nos elementos de R aliado aos menores valores dos componentes de P_k implicam em menores ganhos de Kalman, conforme eq. $G_k = P_k^{(-)}H_k^T(\hat{\sigma}_k^{(-)})[H_k(\hat{\sigma}_k^{(-)})P_k^{(-)}H_k^T(\hat{\sigma}_k^{(-)}) + R_k]^{-1}$ (4.53). Portanto, voltagens “medidas” cujos ruídos sejam maiores terão um peso menor na correção da trajetória.

Em contrapartida, na simulação 3, Fig. 6.12, com o aumento nas variâncias do ruído no estado, na matriz Q , ao mesmo tempo em que se mantém inalterados os outros parâmetros, os ganhos de Kalman são maiores; assim, a evolução temporal das

estimativas do estado apresenta maiores oscilações quando comparada à simulação 2, Fig. 6.11.

Figura 6.10: Simulação de alterações de condutividades absolutas em 5 ROIs; o desvio-padrão do ruído nas tensões “medidas” é 5% da tensão máxima calculada com o auxílio do MEF. O vetor de condutividades iniciais σ_0 assume o valor de $0.20 (\Omega \cdot m)^{-1} +$ ruído adicionado para todas as regiões; o vetor de condutividades que se deseja estimar é $\hat{\sigma}_k = [0.14 \ 0.07 \ 0.04 \ 0.13 \ 0.05]^T$, representando respectivamente os pulmões (durante a expiração), coluna vertebral, pulmões (durante a inspiração), músculo cardíaco (valor médio) e outros tecidos. O erro de estimação permanece $< 5\%$ do máximo valor de condutividade.

Figura 6.11: Condições simuladas idênticas às da Fig. 6.10, porém o desvio-padrão do ruído nas tensões “medidas” é 12% da tensão máxima calculada com o auxílio do MEF. O erro de estimação é $< 7\%$ do máximo valor de condutividade.

Figura 6.12: Condições simuladas idênticas às da Fig. 6.11, porém com aumento nos elementos da matriz de covariância do ruído no estado, Q , para mostrar sua influência sobre as estimativas de condutividades.

Em simulações numéricas, os valores esperados de condutividades são conhecidos, o que permite verificar se o comportamento da solução converge para o vetor desejado. Em situações reais, entretanto, o simples fato de as estimativas do estado não divergirem não implica em que estejam convergindo para a trajetória correta. Isso ocorre devido às discrepâncias entre a realidade física e o modelo que se adota para o sistema.

De acordo com Fleury[8], uma maneira de verificar se a convergência para a trajetória desejada está, de fato, ocorrendo, é a análise do *resíduo normalizado das observações*. O resíduo normalizado “é a diferença entre o valor efetivamente observado, ou seja, a medida real, e o valor calculado para a mesma observação usando o estado estimado pelo filtro.” [8]

O resíduo normalizado para a k -ésima iteração é dado por:

$$r_\nu = \left\{ \frac{1}{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} [v_k(\sigma_k) - \hat{v}_k(\hat{\sigma}_k)]_j \right\} / \rho_\nu, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6.7)$$

onde ℓ é o número de eletrodos e ρ_ν é o desvio padrão dos ruídos na medida.

A convergência é considerada satisfatória desde que $E[r_\nu] = 0$ durante todo o tempo de estimação, $-3\rho_\nu \leq r_\nu \leq 3\rho_\nu$ e que r_ν não apresente qualquer tendência.

Tais requisitos são satisfeitos para as três simulações referentes a 5 ROIs, conforme as Figuras 6.13, 6.14 e 6.15, nas quais as variâncias dos ruídos nas medidas são respectivamente $\rho_\nu = 2.83$, $\rho_\nu = 3.46$ e $\rho_\nu = 3.46$.

Figura 6.13: Resíduo normalizado - 5 ROIs - Simulação 1

Figura 6.14: Resíduo normalizado - 5 ROIs - Simulação 2

Figura 6.15: Resíduo normalizado - 5 ROIs - Simulação 3

O efeito de R sobre a matriz de covariância do erro de estimação P_k pode ser melhor avaliado por meio da equação

$$P_k^{-1}(+) = P_k^{-1}(-) + [H_k^T(\hat{\sigma}_k^{(-)})R^{-1}H_k(\hat{\sigma}_k^{(-)})], \quad (6.8)$$

obtida manipulando-se adequadamente a eq. (4.52).^[iii] A partir desta equação, percebe-se que maiores níveis esperados de ruído na medida, representados por maiores valores nos elementos da matriz R , fazem com que as matrizes de covariância do erro P_k e de ganho de Kalman G_k , eq. (4.53), diminuam. Este comportamento é observado quando os resultados das simulações 4 e 5 são comparados, conforme mostrado nas Figs. 6.16 e 6.17, onde se observa que a convergência para o vetor de condutividades esperadas é mais lenta na simulação 5 devido a menores ganhos do filtro.

Para diminuir o erro de estimação mantendo a convergência obtida na simulação 4 (Fig. 6.16), é necessário que o ganho de Kalman G_k volte a aumentar; este efeito é obtido na simulação 6 (Fig. 6.18) elevando os valores dos elementos da diagonal da matriz Q , variâncias do ruído no estado, em relação à simulação 5 (Fig. 6.17).

^[iii]A demonstração completa pode ser encontrada em Maybeck[16].

O resíduo normalizado nas três simulações para 8 ROIs é apresentado nas Figs. 6.19, 6.20 e 6.21. Os requisitos anteriormente mencionados para garantir a convergência são atendidos.

Figura 6.16: Variações simuladas de condutividades absolutas em 8 ROIs com o desvio-padrão do ruído nas tensões “medidas” atingindo 3.5% da tensão máxima calculada com o auxílio do MEF. O vetor de condutividades iniciais σ_0 recebe o valor $0.70 (\Omega \cdot m)^{-1} +$ ruído adicionado a todas as regiões, e o vetor de condutividades que se deseja estimar é $\hat{\sigma}_k = [0.10 \ 0.40 \ 0.60 \ 1.0 \ 0.23 \ 0.42 \ 0.89 \ 0.78]^T$. O erro de estimação é $< 4\%$ do máximo valor de condutividade.

Figura 6.17: Condições simuladas idênticas às da Fig. 6.16, porém o desvio-padrão do ruído nas tensões “medidas” é 10.5% da tensão máxima calculada com o auxílio do MEF. O erro de estimação é de $\simeq 12\%$ do máximo valor de condutividade.

Figura 6.18: Condições simuladas idênticas às das Fig. 6.17, porém os componentes da matriz Q foram alterados de forma a aumentar o ganho de Kalman e diminuir o erro de estimação até um valor $< 7\%$ do máximo valor de condutividade.

Figura 6.19: Resíduo normalizado - 8 ROIs - Simulação 4

Figura 6.20: Resíduo normalizado - 8 ROIs - Simulação 5

Figura 6.21: Resíduo normalizado - 8 ROIs - Simulação 6

A influência da matriz inicial de covariância do erro de estimação P_0 sobre o comportamento global do algoritmo não é decisiva, uma vez que P_0 pode ser estimada de forma iterativa aplicando o algoritmo de filtragem nos sentidos direto e inverso. Quando nenhuma informação *a priori* sobre os parâmetros a serem estimados está disponível e a matriz P_0 é arbitrada, como no caso das simulações 7 e 8 (Figs. 6.22 e 6.23), sua influência é relevante apenas durante as primeiras iterações. Após essas poucas iterações o filtro, com base nas primeiras medidas e estimativas realizadas, ajusta as matrizes P_k subseqüentes.

Nas simulações 7 e 8, as matrizes iniciais de covariância do erro de estimação foram arbitradas com variâncias (elementos da diagonal principal) iguais a 25.0 e 2.0 respectivamente, ao passo que as matrizes de covariância do ruído no estado Q e do ruído na medida R permaneceram inalteradas. As Figs. 6.22 e 6.23 indicam que, para o mesmo tempo de simulação, a discrepância entre os valores estimados e esperados é menor na simulação 7 que na simulação 8, ou seja, a convergência é mais lenta nesta última.

Tal comportamento pode ser explicado da seguinte maneira: nas simulações mencionadas acima, a relação entre os níveis de ruído nas medidas e nos estados, representados pelos valores dos elementos das matrizes R e Q , é da ordem de 10^4 . Como a influência de cada uma dessas matrizes sobre a matriz G_k de ganho do filtro é inversa, a matriz R irá predominar e, conseqüentemente, a cada iteração a correção imposta pelo filtro será pequena, fazendo com que sejam necessárias mais iterações até que o vetor de condutividades a ser estimado seja atingido.

Quando os valores dos elementos de P_0 são maiores, os ganhos do filtro e as correções impostas à trajetória durante as primeiras iterações também aumentam, apesar do elevado nível de ruído nas medidas. Entretanto, o efeito de P_0 é gradativamente suprimido pelo processo de auto-ajuste do filtro, que diminui os valores dos componentes de G_k devido aos valores elevados dos elementos de R , conforme mostra a Fig. 6.24, que apresenta a norma espectral^[iv] da matriz de ganho de Kalman nas duas situações mencionadas.

As Figs. 6.25 e 6.26 exibem o comportamento dos resíduos normalizados nas simulações com 16 ROIs. A convergência é garantida com base nos critérios adotados.

^[iv] Maior valor entre os obtidos na decomposição em valores singulares de uma matriz[25].

Figura 6.22: Variações simuladas de condutividades em 16 ROIs com o desvio-padrão do ruído nas voltagens “medidas” alcançando 7.5% da voltagem máxima calculada com o auxílio do MEF. O vetor de condutividades iniciais σ_0 recebe o valor $1.00 (\Omega \cdot m)^{-1} +$ ruído adicionado para todas as regiões, e o vetor de condutividades a ser estimado é $\hat{\sigma}_k = [0.20 \ 0.80 \ 1.40 \ 0.60 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.6]^T$. O erro de estimação é $< 5\%$ do máximo valor de condutividade.

Figura 6.23: Condições simuladas idênticas às da Fig. 6.22, porém com uma diminuição nos elementos da diagonal principal da matriz inicial de covariância do erro de estimação P_0 para mostrar sua influência sobre o comportamento do filtro. A convergência para o vetor de condutividades a ser estimado é mais lenta.

Figura 6.24: Comportamento da norma espectral das matrizes de ganho de Kalman devido à variação na matriz inicial de covariância do erro de estimação P_0 .

Figura 6.25: Resíduo normalizado - 16 ROIs - Simulação 7

Figura 6.26: Resíduo normalizado - 16 ROIs - Simulação 8

Avaliação qualitativa de estabilidade

De maneira geral, as simulações sugerem que, quando se deseja estimar as condutividades de um número maior de regiões de interesse, deve-se ter cuidado na escolha combinada dos parâmetros do filtro, pois pequenas variações tendem a apresentar grande influência sobre a estabilidade do algoritmo. É possível investigar qualitativamente os fatores que afetam a estabilidade do algoritmo, levando em conta a discussão efetuada na seção 6.1 sobre a influência da regularização no comportamento das soluções do problema relativo.

A matriz de sensibilidade $H_k(\sigma_{k-1})$ da equação de observações do filtro estendido de Kalman, eq. (4.47), pg. 39, é obtida basicamente da mesma forma que a eq. (4.44), pg. 34, do problema relativo; ambas resultam do produto $\left[-TY^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_1} Y^{-1} \mathbf{c}_j \quad -TY^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_2} Y^{-1} \mathbf{c}_j \quad \dots \quad -TY^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_m} Y^{-1} \mathbf{c}_j \right]$ para um padrão j , $1 \leq j \leq p$. A inversa Y^{-1} da matriz de rigidez da malha de 32 elementos finitos possui número de condição da ordem de 10^3 . A ordem de grandeza das perturbações $\|\delta Y\|^{-1} / \|Y\|^{-1}$ é de $5 \cdot 10^{-15}$, obtida a partir do produto YY^{-1} conforme descrito nas pgs. 65-66. Assim, é possível admitir que a ordem de grandeza das perturbações na matriz de sensibilidade H ,^[v] $\|\delta H\| / \|H\|$, seja igual ou superior a $5 \cdot 10^{-15}$. Além disso, verifica-se nas simulações que o número de condição de H é superior a 10^3 , número de condição da matriz de rigidez Y na abordagem dinâmica.

A matriz H é diretamente utilizada nos cálculos da matriz $P_k^{(+)}$ de covariância do erro de estimação atualizada, eq. (4.52), e da matriz Gk de ganho de Kalman, eq. (4.53), pg. 41, onde inclusive é um dos fatores em uma operação de inversão de

^[v]Suprimindo o índice e a representação de função implícita por simplicidade.

matrizes. Pela eq. (6.4), pg. 65, quando a matriz H participar do cálculo de uma inversa para a obtenção da matriz de ganho de Kalman na eq. (4.53), a tendência é de que as perturbações $\frac{\|\delta G_k\|}{\|G_k\|}$ sejam amplificadas pelo número de condição da matriz H , afetando também as perturbações na atualização de $P_k^{(+)}$ e no estado estimado $\hat{\sigma}_k^{(+)}$, eq. (4.51), pg. 41.

Enquanto a relação dada por $\frac{\|\delta H\|}{\|H\|} < \frac{1}{\kappa(H)}$, eq. (6.3), for válida, as perturbações decorrentes da inversão de H serão pequenas. Entretanto, como o problema inverso da EIT é mal posto, à medida que as dimensões das matrizes envolvidas nas equações do filtro de Kalman se tornam maiores, seus números de condição aumentam, amplificando as perturbações até o ponto em que o limite estabelecido pela eq. (6.3) não seja mais respeitado. Quando isso ocorre, o comportamento da solução é mais instável.

Por este raciocínio, é de se esperar que malhas mais refinadas de elementos finitos ou a utilização de um número maior de regiões de interesse, visando a obtenção de imagens com melhor resolução espacial, prejudiquem a estabilidade do algoritmo, pois as dimensões das matrizes de rigidez Y e de sensibilidade H , bem como seus respectivos números de condição, aumentam, fazendo com que as perturbações também sejam acentuadas. Nas simulações apresentadas, a instabilidade da solução aumenta na passagem de 5 para 16 ROIs e também à medida que mais ruído (que é uma perturbação imposta e direta) é adicionado às voltagem “medidas”.

A avaliação acima é apenas qualitativa; entretanto, ajuda a compreender o número limitado de ROIs utilizado tanto neste trabalho quanto, por exemplo, nas referências [14, 17, 23].

Comparação entre o filtro estendido e o filtro linearizado

A seguir é efetuada uma comparação entre os principais resultados aqui obtidos e os apresentados por Vauhkonen *et al.*[23], conforme mostra a Tabela 6.4.

Tabela 6.4: Avaliação comparativa de resultados: filtro linearizado e filtro estendido de Kalman

Item	Vauhkonen <i>et al.</i> [23] (filtro linearizado)	presente trabalho (filtro estendido)
relação máxima entre condutividades dos vetores inicial e esperado	15%	80%
nível máximo de ruído incorporado às medidas	3%	12%
discrepância máxima nas estimativas	80%	7%
tempo de convergência	imediatos	6-8 segundos

Em primeiro lugar, nota-se a limitação na faixa de variação de condutividades a serem estimadas quando se utiliza o filtro linearizado de Kalman. Nos resultados de Vauhkonen *et al.*, o vetor inicial de condutividades não é escolhido de forma arbitrária, mas sim próximo aos valores cuja variação se deseja quantificar, fato este explicado pela linearização da matriz de rigidez global do sistema sempre em torno de uma mesma trajetória de referência para a obtenção da matriz de sensibilidade. Por isso, em Vauhkonen *et al.*, os componentes do vetor de estado inicial nunca apresentam variação superior a 15% em relação aos valores a serem estimados. No presente trabalho, foi possível escolher vetores iniciais possuindo valores com até 80% de desvio em relação ao esperado.

Ressalta-se entretanto que, embora de abrangência limitada, o método que uti-

liza o filtro linearizado de Kalman é capaz de acompanhar praticamente de forma instantânea variações bruscas de condutividade, enquanto o tempo médio de convergência do algoritmo aqui proposto é em torno de 6 a 8 segundos. Quando se considera que a malha utilizada por Vauhkonen *et al.* contém 496 elementos, a vantagem de poder calcular a matriz de sensibilidade uma única vez, eventualmente em outro algoritmo, mantê-la armazenada e incorporá-la nos cálculos do filtro somente quando necessário, reflete-se na velocidade de obtenção das estimativas.

Uma diferença significativa a favor do filtro estendido é com relação ao ruído adicionado aos vetores de estado e medida. Vauhkonen *et al.* incorporam ruído branco Gaussiano de média nula com no máximo 3% da máxima voltagem calculada com o auxílio do MEF e obtêm resultados com até 80% de desvio em relação ao esperado ao passo que, na presente versão, a discrepância máxima na condutividade não ultrapassa 7% quando o desvio-padrão do ruído adicionado às voltagens é de 12% da máxima voltagem calculada por meio do MEF.

A necessidade de agrupamento dos elementos em regiões de interesse é constatada nas duas abordagens pelos motivos apresentados na seção anterior. Vauhkonen *et al.* apresentam resultados utilizando 5 regiões. No presente trabalho, o algoritmo converge utilizando 16 regiões.

O fato de a malha aqui utilizada possuir apenas 32 elementos não invalida as comparações com o trabalho de Vauhkonen *et al.*, que utiliza uma malha de 496 elementos pois, em ambos os casos, a dimensão do problema de estimação é diminuída com o agrupamento em ROIs. A extensão para uma malha mais refinada é teoricamente imediata, desde que efetuado o agrupamento de elementos para manter

o algoritmo estável.

Um exemplo da resolução espacial obtida com a malha de 32 elementos agrupados em 16 regiões de interesse é dado na Figura 6.28. Nesta simulação o vetor de condutividades a ser estimado apresenta valores 1.40 e 0.20 $(\Omega \cdot m)^{-1}$ respectivamente nas regiões 1 e 4, e 0.6 $(\Omega \cdot m)^{-1}$ nas 14 regiões restantes, conforme a Figura 6.27. A distribuição inicial é uniforme com $\sigma_0 = 1.00 + \text{ruído}$ e o desvio-padrão do ruído nas voltagens “medidas” é da ordem de 7.5% da máxima voltagem.

Figura 6.27: Representação gráfica ideal do vetor de condutividades a ser estimado com uma malha de 32 elementos agrupados em 16 ROIs.

Figura 6.28: Representação gráfica do vetor de condutividades estimado com uma malha de 32 elementos agrupados em 16 ROIs.

Diversos pesquisadores [5, 6, 12] demonstram que um modelo puntual de eletrodo, como o utilizado neste trabalho, não leva em conta efeitos como a elevada impedância de contato na interface da pele com a superfície metálica e as dimensões de cada eletrodo que, somados, chegam a ocupar cerca de 50% do perímetro do tórax[23]. O *modelo completo de eletrodo*[12] é o mais indicado em condições experimentais.

O comportamento do algoritmo foi avaliado com dados experimentais; para isso, a bancada mostrada na Figura 6.29 foi utilizada. O diâmetro maior representa uma cuba preenchida com uma solução de 0.3 g de $NaCl$ diluídos em 1300 ml de água destilada, cuja espessura da lâmina é 30 mm . O diâmetro menor representa um copo de vidro cujo contorno se deseja identificar. Os números 1 a 16 referem-se a eletrodos de bronze em que padrões de corrente são aplicados e voltagens medidas. Foram utilizados padrões *diametrais* (cuja característica é a escolha de um eletrodo de referência (terra) em posição diametralmente oposta à do eletrodo de excitação a cada padrão aplicado) de corrente alternada com frequência de 25 kHz e amplitude 2 mA pp . Os parâmetros utilizados no algoritmo foram os seguintes: malha de 32 elementos triangulares agrupados em 16 ROIs, modelo de eletrodo puntual, $P_0 = 10^{-1}$, $R = 10$, $Q = 5 \times 10^{-3}$ e $\sigma_0 = 0.15\text{ }(\Omega \cdot m)^{-1}$ para todos os componentes do vetor.

Figura 6.29: Representação da bancada experimental para avaliação do algoritmo do filtro estendido de Kalman

Conforme mostram as Figuras 6.30 e 6.31, o contorno do copo corresponde à região mais clara e saliente (maior impedância).

Na Fig. 6.31, a borda apresenta impedância maior que a solução. Isto se deve provavelmente à ausência de modelo de eletrodo no modelo de elementos finitos.

Figura 6.30: Filtro estendido de Kalman com dados experimentais. A área mais clara corresponde à impedância na região que contém o copo.

Figura 6.31: Filtro estendido de Kalman com dados experimentais. A maior protuberância corresponde à impedância na região que contém o copo.

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões de Desenvolvimento

Este trabalho propôs e desenvolveu uma abordagem dinâmica alternativa viabilizando a utilização do filtro estendido de Kalman para a estimação da distribuição de condutividade absoluta na tomografia por impedância elétrica, tendo como base a abordagem dinâmica proposta por Vauhkonen *et al.*[23]. Além disso, por meio da formulação clássica, o problema de estimar variações de condutividades (aqui denominado *problema relativo*) também foi abordado.

Nas simulações da abordagem dinâmica, foi incorporado, nas voltagens medidas, ruído cujo desvio-padrão varia entre 3,5 e 12% da máxima voltagem calculada por meio do MEF. Nestas condições, o filtro estendido de Kalman é capaz de fornecer estimativas com no máximo 7% de discrepância em relação ao valor da máxima condutividade esperada. Tais estimativas são obtidas em cerca de 6 a 8 segundos, possibilitando a geração de aproximadamente 30 imagens por segundo.

A comparação efetuada na seção 6.2 entre os resultados acima e os obtidos por Vauhkonen *et al.*[23] por meio do filtro linearizado de Kalman^[i] sugere que as limitações no modelo de observação foram minimizadas devido às características do filtro estendido de Kalman, no qual a linearização da matriz de rigidez global do sistema é realizada em torno de cada nova estimativa $\hat{\sigma}_k \in R^m$, permitindo o rastreamento das variações no vetor de condutividades em uma ampla faixa.

A obtenção rápida de imagens com maior precisão e melhor resolução espacial é o objetivo principal de qualquer método que se proponha a solucionar o problema da tomografia por impedância elétrica. No caso de algoritmos empregando as diversas versões do filtro de Kalman, algumas sugestões de futuros desenvolvimentos com o mesmo intuito incluem:

- incorporação do modelo completo de eletrodo ;
- aplicação de padrões ótimos de corrente com o objetivo de melhorar a identificabilidade de regiões de interesse específicas;
- renumeração da malha de elementos finitos que discretiza o sistema, visando obter uma matriz de rigidez global de banda e diminuir a propagação das perturbações no cálculo de sua inversa;
- melhoria nos modelos de sistema e de observação para incluir alterações geométricas no domínio durante o ciclo de respiração.

^[i]condutividades estimadas com discrepância de até 80% em relação ao máximo valor esperado; vetor inicial de condutividades cujos componentes apresentam no máximo 15% de desvio em relação aos componentes do vetor que se deseja estimar; voltagens com ruído branco Gaussiano de média nula menor ou igual a 3% da máxima voltagem calculada pelo MEF.

- implementação do *filtro estendido iterado de Kalman*;
- utilização seqüencial dos algoritmos propostos. Em primeiro lugar, são estimadas as condutividades para 5 regiões de interesse; o vetor resultante é utilizado como distribuição inicial para 8 regiões e assim sucessivamente para 16 e 32 regiões de interesse.

Quanto ao problema relativo, os resultados obtidos nas simulações afirmam a necessidade de regularizar e pré-condicionar a matriz de sensibilidade para contornar o problema de mal condicionamento quando o número de elementos finitos é elevado. O truncamento dos valores singulares no cálculo da pseudo-inversa mostrou-se eficaz, reduzindo a 40% o erro na estimativa do vetor de condutividades. A utilização de mais eletrodos deve melhorar o número de condição da matriz de sensibilidade.

Referências Bibliográficas

- [1] Amato, M.B.P.; Barbas, C.S.; Medeiros, D.M.; Magaldi, R.B.; Schettino, G.P.; Lorenzi-Filho, G.; Kairalla, R.A.; Deheinzelin, D.; Munoz, C.; Oliveira, R.; Takagaki, T.Y.; Carvalho C.R.R. *Effect of a protective-ventilation strategy on mortality in the acute respiratory distress syndrome [see comments]*, New England Journal of Medicine 1998;338(6):347-54.
- [2] Amato, M.B.P.; Marini, J.J. *Barotrauma, Volutrauma, and the Ventilation of Acute Lung Injury*. In : Marini JJ; Slutsky AS; editors. *Physiological Basis of Ventilatory Support*, 1 ed. New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1998:1187-1245.
- [3] Amato, M.B.P.; Barbas, C.S.; Medeiros, D.M.; Schettino, G.P.; Lorenzi-Filho, G.; Kairalla, R.A.; Deheinzelin, D.; Morais, C.; Fernandes, E.O.; Takagaki, T.Y.; Carvalho, C.R.R. *Beneficial effects of the "open lung approach" with low distending pressures in acute respiratory distress syndrome. A prospective randomized study on mechanical ventilation*, American Journal of Respiratory and Critical Care Medicine 1995;152(6 Pt 1):1835-46.
- [4] Barber, D.C.; Brown, B.H. *Applied Potential Tomography*, J. Phys. E: Sci. Instrum., vol. 17, pp.723-733, 1984.
- [5] Cheney, M.; Isaacson, D.; Newell, J.C. *Electrical Impedance Tomography*, SIAM J. Appl. Math. Review, pp. 85-101, 1999.
- [6] Cheng, K.; Isaacson, D.; Newell, J.C.; Gisser, D.G. *Electrode Models for Electric Current Computed Tomography*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 36, no. 9, pp. 918-924, September 1989.
- [7] Faes, T.J.C; Meij, H.A. van der; Munck, J.C. de; Heethaar, R.M. *The Electric Resistivity of Human Tissues (100 Hz – 10 MHz): a Meta-analysis of Review Studies*, Physiol. Meas. 20, pp. R1-R10, 1999.
- [8] Fleury, A.T. *Estimadores de Estado de Sistemas Dinâmicos Baseados no Conceito de Dualidade*. São Paulo: 1985. 161p. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

- [9] Fuks, L.F.; Cheney, M.; Isaacson, D.; Gisser, D.; Newell, J.C. *Detection and Imaging of Electrode Conductivity and Permittivity at Low Frequency*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 38, no. 11, pp. 1106-1110, November 1991.
- [10] Gelb, A. Ed. *Applied Optimal Estimation*. Cambridge, USA: MIT Press, 1979.
- [11] Hua,P.; Woo, E.J.; Webster, J.G.; Tompkins, W.J. *Using Compound Electrodes in Electrical Impedance Tomography*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 40, no. 1, pp. 29-34, January 1993.
- [12] Hua,P.; Woo, E.J.; Webster, J.G.; Tompkins, W.J. *Finite Element Modeling of Electrode-Skin Contact Impedance in Electrical Impedance Tomography*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 40, no. 4, pp. 335-343, April 1993.
- [13] Jazwinski, A.H. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. New York: Academic Press, 1970.
- [14] Kaipio, J.P.; Vadáz, D.; Karjalainen, P.A.; Somersalo, E.; Vauhkonen, M. *State Estimation in Time-varying Electrical Impedance Tomography*, Annals New York Aca. Sci. Vol 873:430-439, 1999.
- [15] Logan, D.L. *A First Course in the Finite Element Method*. Boston, USA: PWS-KENT Publishing Company, 1986.
- [16] Maybeck, P.S. *Stochastic Models, Estimation and Control*. New York: Academic Press, 1979.
- [17] Murai, T.; Kagawa, Y. *Electrical Impedance Computed Tomography Based on a Finite Element Model*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. BME-32, no. 3, pp. 177-184, March 1985.
- [18] Press, W.; Vetterling, W.T.; Teukolsky, S.A.; Flannery, B.P. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge [Cambridgeshire] ; New York : Cambridge University Press, 1992.
- [19] Sadiku, Matthew N.O. *Numerical Tehcniques in Elecromagnetis*. Boca Raton: CRC Press Inc., 1992.
- [20] Stratton, J.A. *Electromagnetic Theory*. New York: McGraw-Hill, 1941.
- [21] Sorenson, H.W. *Least-squares estimation: from Gaus to Kalman*. In: Sorenson, H.W., Ed. *Kalman Filtering: Theory and Application*. New York: IEEE Press, 1985.
- [22] Tikhonov, A.; Arsénine, V. (Trad. Vladimir Kotliar) *Méthodes de Résolution de Problèmes Mal Posés*, Éditions MIR-Moscou, 1976.

- [23] Vauhkonen, M.; Karjalainen P.A.; Kaipio, J.P. *A Kalman Filter Approach to Track Fast Impedance Changes in Electrical Impedance Tomography*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 45, no. 4, pp. 486-493, April 1995.
- [24] Vauhkonen, M. ; Vadáz, D.; Karjalainen, P.A.; Somersalo, E.; Kaipio, J.P. *Tikhonov Regularization and Prior Information in Electrical Impedance Tomography*, IEEE Transactions on Medical Imaging, vol. 17, no. 2, pp. 285-293, April 1998.
- [25] Watkins, D.S. *Fundamentals of Matrix Computations*. New York: John Wiley & Sons, 1991.
- [26] Yorkey, T.J.; Webster, J.G.; Tompkins, W.J. *Comparing Reconstruction Algorithms for Electrical Impedance Tomography*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. BME-34, no. 11, pp. 843-852, November 1987.

Apêndice A

Diagramas de blocos

Figura A.1: Algoritmos de montagem de matrizes de rigidez e derivadas, cálculo de voltagens teóricas e inclusão de ruído branco Gaussiano de média nula.

Figura A.2: Algoritmo do Filtro Estendido de Kalman.

Apêndice B

Filtro estendido de Kalman

[Dedução baseada em Gelb[10] e Sorenson[21] para um sistema dinâmico discretizado e medidas discretas]

Seja o sistema discreto dado por:

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k,k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \Gamma_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}, \quad (\text{B.1})$$

em que o vetor inicial de estado $\mathbf{x}_0$ é Gaussiano com estatística:

$$E[\mathbf{x}_0] = \hat{\mathbf{x}}_0, \quad E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T] = P_0$$

$$E[\mathbf{w}_k] = \mathbf{0}, \quad E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_\ell^T] = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \\ Q_k, & k = \ell \end{cases}$$

$$\text{e ainda} \quad E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_\ell^T)] = \mathbf{0}$$

A estimativa do estado deve ser tal que sua média seja igual ao vetor de estado. Assim, aplicando o operador *expectância* à eq.(B.1) fica:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}_k] &= E[\Phi_{k,k-1}\mathbf{x}_{k-1}] + \Gamma_{k-1}E[\mathbf{w}_{k-1}] \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \Phi_{k,k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Matriz de covariância do erro de estimação:

De (B.1) - (B.2):

$$(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) = \Phi_{k,k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - \Gamma_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}$$

Multiplicando ambos os lados por $(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T$ e aplicando o operador expectância chega-se à matriz de covariância:

$$P_k = \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T + \Gamma_{k-1} Q_{k-1} \Gamma_{k-1}^T \quad (\text{B.3})$$

O modelo de observação é dado por:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \boldsymbol{\nu}_k \quad (\text{B.4})$$

$\boldsymbol{\nu}_k$ com estatística:

$$E[\boldsymbol{\nu}_k] = 0 \quad E[\boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_l^T] = R_k \delta_{kl}$$

Define-se:

$$\text{erro de estimação:} \quad \mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k$$

$$\text{resíduo:} \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)$$

Dadas as propriedades *a priori* do sistema no instante t_k , $\hat{\mathbf{x}}_k^{(-)}$ (propagação do estado em t_{k-1} até t_k por meio da eq. (B.2) na ausência de novas informações) e $P_k^{(-)}$ (matriz de covariância propagada desde t_{k-1} até t_k pela eq. (B.3)), procura-se uma estimativa atualizada do estado $\hat{\mathbf{x}}_k^{(+)}$ baseada nas novas medidas $\mathbf{z}_k$ recebidas em t_k .

Para evitar um filtro de memória crescente, as estimativas devem ser procuradas na forma linear recursiva:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(+)} = \mathbf{a}_k + K_k \mathbf{z}_k. \quad (\text{B.5})$$

Definindo

$$\mathbf{e}_k^{(+)} = \hat{\mathbf{x}}_k^{(+)} - \mathbf{x}_k \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{e}_k^{(-)} = \hat{\mathbf{x}}_k^{(-)} - \mathbf{x}_k \quad (\text{B.7})$$

Com (B.6), (B.7) e (B.4) em (B.5) chega-se a:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^{(+)} &= \mathbf{a}_k + K_k [\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \boldsymbol{\nu}_k] \\ \mathbf{e}_k^{(+)} + \mathbf{x}_k &= \mathbf{a}_k + K_k \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + K_k \boldsymbol{\nu}_k \\ \mathbf{e}_k^{(+)} &= \mathbf{a}_k + \mathbf{e}_k^{(-)} - \hat{\mathbf{x}}_k^{(-)} + K_k \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + K_k \boldsymbol{\nu}_k \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Aplicando o operador expectância a ambos os lados da eq. (B.8) com $E[\boldsymbol{\nu}_k] = \mathbf{0}$ (por hipótese) e $E[\mathbf{e}_k^{(-)}] = \mathbf{0} \Rightarrow E[\mathbf{e}_k^{(+)}] = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{x}_k$ para que o estimador seja não-viciado, chega-se a:

$$\mathbf{a}_k + K_k \hat{\mathbf{h}}_k(\mathbf{x}_k) - \hat{\mathbf{x}}_k^{(-)} = \mathbf{0} \quad (\text{B.9})$$

Substituindo (B.9) em (B.5):

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(+)} = \hat{\mathbf{x}}_k^{(-)} + K_k[\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{h}}_k(\mathbf{x}_k)] \quad (\text{B.10})$$

Matriz de covariância do erro de estimação e matriz de ganho de Kalman

De (B.9):

$$\mathbf{a}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^{(-)} = -K_k \hat{\mathbf{h}}_k(\mathbf{x}_k)$$

em (B.8):

$$\mathbf{e}_k^{(+)} = \mathbf{e}_k^{(-)} + K_k[\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) - \hat{\mathbf{h}}_k(\mathbf{x}_k)] + K_k \boldsymbol{\nu}_k \quad (\text{B.11})$$

Atualização da matriz de cov. do erro de estimação $P_k^{(+)}$

Por definição:

$$\begin{aligned} P_k^{(+)} &= E[\mathbf{e}_k^{(+)} \mathbf{e}_k^{(+)^T}] \\ P_k^{(-)} &= E[\mathbf{e}_k^{(-)} \mathbf{e}_k^{(-)^T}] \end{aligned}$$

Por hipótese:

$$E[\boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_k^T] = R_k, P_k^{(+)} \text{ independente de } \mathbf{z}_k.$$

Utilizando (B.11) para o cálculo de $P_k^{(+)}$ fica:

$$\begin{aligned} P_k^{(+)} &= E\{\mathbf{e}_k^{(-)} \mathbf{e}_k^{(-)^T}\} + K_k E\{[\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) - \hat{\mathbf{h}}_k(\mathbf{x}_k)][\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) - \hat{\mathbf{h}}_k(\mathbf{x}_k)]^T\} K_k^T + \\ &\quad E\{\mathbf{e}_k^{(-)}[\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) - \hat{\mathbf{h}}_k(\mathbf{x}_k)]^T\} K_k^T + K_k E\{[\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) - \hat{\mathbf{h}}_k(\mathbf{x}_k)] \mathbf{e}_k^{(-)^T}\} + \\ &\quad E\{\mathbf{e}_k^{(-)} \boldsymbol{\nu}_k^T\} K_k^T + K_k E\{[\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) - \hat{\mathbf{h}}_k(\mathbf{x}_k)] \boldsymbol{\nu}_k^T\} K_k^T + K_k E\{\boldsymbol{\nu}_k \mathbf{e}_k^{(-)^T}\} + \\ &\quad K_k E\{\boldsymbol{\nu}_k[\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) - \hat{\mathbf{h}}_k(\mathbf{x}_k)]^T\} K_k^T + K_k E\{\boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_k^T\} K_k^T \end{aligned}$$

O resultado é:

$$\begin{aligned} P_k^{(+)} &= P_k^{(-)} + K_k E\{[\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) - \hat{\mathbf{h}}_k(\mathbf{x}_k)][\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) - \hat{\mathbf{h}}_k(\mathbf{x}_k)]^T\} K_k^T + \\ &\quad E\{\mathbf{e}_k^{(-)}[\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) - \hat{\mathbf{h}}_k(\mathbf{x}_k)]^T\} K_k^T + K_k E\{[\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) - \hat{\mathbf{h}}_k(\mathbf{x}_k)] \mathbf{e}_k^{(-)^T}\} + K_k R_k K_k^T \quad (\text{B.12}) \end{aligned}$$

A estimativa procurada é de mínima variância do erro, ou seja, deve minimizar uma função do tipo:

$$J_k = E\{\mathbf{e}_k^{(+)^T} \mathbf{e}_k^{(+)}\} = \text{tr}(P_k^{(+)})$$

Calculando o traço em (B.12) e fazendo $\frac{\partial J_k}{\partial K_k} = \mathbf{0}$ chega-se ao ganho de Kalman:

$$K_k = -E\{e_k^{(-)}[\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) - \hat{\mathbf{h}}_k(\mathbf{x}_k)]^T\} \times \\ E\{[\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) - \hat{\mathbf{h}}_k(\mathbf{x}_k)][\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) - \hat{\mathbf{h}}_k(\mathbf{x}_k)]^T + R_k\}^{-1} \quad (\text{B.13})$$

(B.13) em (B.12):

$$P_k^{(+)} = P_k^{(-)} + K_k E\{[\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) - \hat{\mathbf{h}}_k(\mathbf{x}_k)]e_k^{(-)T}\} \quad (\text{B.14})$$

As equações de atualização são difíceis de implementar nesta forma pois dependem da função de densidade de probabilidade de $\mathbf{x}_k$.

Para simplificá-las, aproxima-se $\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)$ por uma série de Taylor e mantém-se os termos até a 1^a ordem:

$$\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) = \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k) + \frac{\partial \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \Big|_{(\mathbf{x}_k)=\hat{\mathbf{x}}_k^{(-)}} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^{(-)}) \quad (\text{B.15})$$

Substituindo (B.15) em (B.10), (B.13) e (B.14), aplicando o operador expectativa onde necessário e definindo $H_k(\hat{\mathbf{x}}_k^{(-)}) = \frac{\partial \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \Big|_{(\mathbf{x}_k)=\hat{\mathbf{x}}_k^{(-)}} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^{(-)})$, chega-se às **equações de atualização** do filtro estendido de Kalman:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(+)} = \hat{\mathbf{x}}_k^{(-)} + K_k [\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^{(-)})]$$

$$K_k = P_k^{(-)} H_k^T(\hat{\mathbf{x}}_k^{(-)}) [H_k(\hat{\mathbf{x}}_k^{(-)}) P_k^{(-)} H_k^T(\hat{\mathbf{x}}_k^{(-)}) + R_k^{(-)}]^{-1}$$

$$P_k^{(+)} = [I - K_k H_k(\hat{\mathbf{x}}_k^{(-)})] P_k^{(-)}.$$

Em conjunto com as **equações de propagação**

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(-)} = \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(+)}$$

$$P_k^{(-)} = \Phi_{k,k-1} P_{k-1}^{(+)} \Phi_{k,k-1}^T + \Gamma_{k-1} Q_{k-1} \Gamma_{k-1}^T,$$

o filtro está pronto para ser implementado.