BRUNO SOUZA CARMO

**ESTUDO NUMÉRICO DO
ESCOAMENTO AO REDOR DE
CILINDROS ALINHADOS**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para a obtenção do
Título de Mestre em Engenharia.

São Paulo
2005

BRUNO SOUZA CARMO

**ESTUDO NUMÉRICO DO
ESCOAMENTO AO REDOR DE
CILINDROS ALINHADOS**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para a obtenção do Título de
Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica.

Orientador:
Prof. Dr. Julio R. Meneghini

São Paulo
2005

FICHA CATALOGRÁFICA

Carmo, Bruno Souza

Estudo numérico do escoamento ao redor de cilindros alinhados / B.S. Carmo. -- São Paulo, 2005.

133 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Vórtices dos fluidos 2.Hidromecânica 3.Mecânica dos fluidos computacional I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

Dedico este trabalho a todos aqueles que acreditam no poder transformador do conhecimento, e o aplicam no sentido de tornar o mundo um lugar melhor.

“O mais incompreensível do Universo é o fato dele ser compreensível.” – Albert Einstein

“Se conhecemos o inimigo e a nós mesmos, não precisamos temer o resultado de uma centena de combates. Se nos conhecemos, mas não ao inimigo, para cada vitória sofreremos uma derrota. Se não nos conhecemos nem ao inimigo, sucumbiremos em todas as batalhas.” – Sun Tzu

“A cada mil lágrimas sai um milagre.” – Alice Ruiz e Itamar Assumpção

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Julio Romano Meneghini, pela orientação deste trabalho, pela confiança que sempre depositou no meu potencial e por disponibilizar uma excelente estrutura para a realização deste projeto de pesquisa.

À Fapesp, pela bolsa de mestrado concedida para a realização deste projeto.

Aos professores José A. P. Aranha, Clóvis A. Martins, Güenther C. K. Filho e Ernani V. Volpe pelos ensinamentos passados durante os trabalhos conjuntos em projetos “extra-dissertação” neste período de dois anos.

Aos camaradas do NDF: Lauro, Raupp, Roque, Gioria, Tanaka, Rosi, Fernanda, Guto, Ricardo, Pepe, Prof. Fabio Saltara, Pedro, Zink, Herval, Iago, Gabriel, Leandro, Carlos, Karl, Prof. Jorge Baliño, Prof. Roberto Ramos, Paulo Jabardo, Eduardo Makoto, Alfredo e mais todo mundo que eu eventualmente tenha esquecido, pelo agradabilíssimo convívio nestes últimos tempos, recheado de discussões profissionais e não-profissionais (principalmente), colaborações em trabalhos e muitos momentos de alegria.

À secretária-mais-eficiente-que-eu-conheço Ivone e sua fiel escudeira Zuleide, pelos inúmeros galhos quebrados e pela ajuda de incomensurável valor em questões burocráticas.

Aos meus pais, Luís e Edna, pelo constante apoio que vêm me dando desde que eu nasci, me fazendo acreditar nos meus sonhos e oferecendo todo o suporte que um ser humano pode precisar.

À minha irmã Talita, que no último ano veio se juntar a mim na minha jornada paulistana, pelo seu companheirismo, afeto e dotes culinários.

À minha namorada Michelle, por todo o amor, carinho e compreensão demonstrados ao longo da nossa história.

RESUMO

Este trabalho lida com o escoamento incompressível ao redor de pares de cilindros rígidos e imóveis, posicionados de forma alinhada em relação a uma corrente uniforme. São dois os objetivos desta pesquisa: o primeiro é estabelecer relações de causalidade entre características físicas do escoamento e as mudanças observadas nas forças e no campo fluido com as variações do número de Reynolds (Re) e do espaçamento entre os corpos; e o segundo consiste em compreender a influência mútua entre tridimensionalidades e interferência no escoamento. Utilizou-se o método de elementos espectrais para realizar simulações bi e tridimensionais do escoamento. Os espaçamentos entre centros (l_{cc}) analisados vão de 1,5 a 8 diâmetros (D), e eles são comparados com o caso de um cilindro isolado. A faixa de Re vai de 160 a 320, compreendendo a transição na esteira. O foco foi dado nas instabilidades de pequena escala (modos A e B). Dados referentes ao número de Strouhal, coeficiente de arrasto médio, flutuação do coeficiente de sustentação e correlação axial são apresentados. Com auxílio de visualizações do escoamento, são propostos mecanismos que explicam o fenômeno de interferência, refletido no comportamento das curvas. Os resultados mostraram que simulações bidimensionais são insuficientes para se prever a combinação (Re , l_{cc}) de inversão do arrasto. Verificou-se também que, quando o espaçamento é menor do que o crítico, o processo de transição na esteira se dá de forma diferente do observado para um cilindro isolado.

ABSTRACT

This work deals with the incompressible flow around pairs of rigid and immovable circular cylinders in tandem arrangements. There are two goals in this research: the first one is to find causality relationships between physical characteristics of the flow and the changes that are observed in the forces and in the flow field with the variation of the Reynolds number and the distance between the bodies; and the second one is to comprehend the mutual influence between three-dimensional structures and interference. The spectral element method was employed to carry out two- and three-dimensional simulations of the flow. The centre-to-centre distance (l_{cc}) of the investigated configurations varies between 1.5 and 8 diameters (D), and they are compared to the isolated cylinder case. The Re range goes from 160 to 320, covering the transition in the wake. We focused in the small scale instabilities (modes A and B). Data of Strouhal number, mean drag coefficient, RMS of the lift coefficient and axial correlation are presented. With aid of flow visualizations, we propose mechanisms to explain the interference phenomenon, which is reflected in the behaviour of the graphics. The results show that two-dimensional simulations are not sufficient to predict the (Re, l_{cc}) pair correspondent to the drag inversion point. We also verified that, in the cases where l_{cc} is lower than the critical spacing, the transition in the wake happens in a way different from the one observed in the flow around a single cylinder.

SUMÁRIO

RESUMO

ABSTRACT

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

1	INTRODUÇÃO	1
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	5
2.1	O ESCOAMENTO AO REDOR DE UM CILINDRO ISOLADO	5
2.2	O FENÔMENO DE INTERFERÊNCIA NO ESCOAMENTO AO REDOR DE CILINDROS ALINHADOS	15
2.3	O MÉTODO DE ELEMENTOS ESPECTRAIS	21
3	O FENÔMENO DE EMISSÃO E DESPRENDIMENTO DE VÓRTICES EM CORPOS CILÍNDRICOS	25
3.1	CARACTERÍSTICAS GERAIS DO ESCOAMENTO AO REDOR DE UM CILINDRO.....	25
3.1.1	<i>Regiões de escoamento perturbado</i>	<i>25</i>
3.1.2	<i>Regimes de escoamento e transições</i>	<i>27</i>
3.1.3	<i>Variação das forças fluido-dinâmicas</i>	<i>34</i>
3.1.4	<i>Variação do número de Strouhal e do coeficiente de pressão de base.....</i>	<i>35</i>
3.2	A ESTEIRA BIDIMENSIONAL LAMINAR.....	37
3.3	A TRANSIÇÃO NA ESTEIRA.....	43
3.4	O ESCOAMENTO AO REDOR DE PARES DE CILINDROS ALINHADOS E O FENÔMENO DE INTERFERÊNCIA	53
4	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	63
4.1	NÚMERO DE STROUHAL	67

4.1.1	<i>Simulações bidimensionais</i>	68
4.1.2	<i>Simulações tridimensionais</i>	76
4.2	TRANSIÇÃO NA ESTEIRA	82
4.3	COEFICIENTE DE ARRASTO MÉDIO	88
4.3.1	<i>Simulações bidimensionais</i>	88
4.3.2	<i>Simulações tridimensionais</i>	104
4.4	FLUTUAÇÃO DO COEFICIENTE DE SUSTENTAÇÃO	109
4.4.1	<i>Resultados bidimensionais</i>	109
4.4.2	<i>Simulações tridimensionais</i>	113
4.5	COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO AXIAL	114
5	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	120
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	126
	BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA	133

APÊNDICE A – O MÉTODO DE ELEMENTOS ESPECTRAIS

APÊNDICE B – APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS ESPECTRAIS ÀS EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL

APÊNDICE C – POLINÔMIOS DE JACOBI

APÊNDICE D – QUADRATURA DE GAUSS

APÊNDICE E – DIFERENCIAÇÃO DE LAGRANGE

APÊNDICE F – TESTES DE CONVERGÊNCIA E VALIDAÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO

APÊNDICE G – RESULTADOS TABELADOS

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Plataforma tipo “Tension Leg”. Observa-se a estrutura dos componentes cilíndricos tais como os tubos flexíveis (“risers”) que levam a produção do poço petrolífero para a superfície.	3
Figura 3.1 – Regiões do escoamento perturbado.	26
Figura 3.2 – Transições nas regiões perturbadas: (a) TrW, (b) TrSL, (c) TrBL (BL = camada limite, L = laminar, T = turbulento, Tr = Transição, S = separação). Extraído de Zdravkovich (1997).	28
Figura 3.3 – Escoamento ao redor de cilindro sem separação. Extraído de van Dyke (1982).	29
Figura 3.4 – Escoamento ao redor de um cilindro, $Re=26$. Extraída de van Dyke (1982).	30
Figura 3.5 – Regime laminar periódico – (a) $Re=54$ (b) $Re=65$ (c) $Re=102$. Extraído e adaptado de Zdravkovich (1997).	30
Figura 3.6 – Transição na esteira. (a) $Re=190$ (b) $Re=340$. Extraído e adaptado de Zdravkovich (1997).	31
Figura 3.7 – Transição nas camadas cisalhantes (a) $Re=2000$ (b) $Re=8000$ (c) $Re=1,1 \times 10^5$. Extraído e adaptado de Zdravkovich (1997).	32
Figura 3.8 – Variação dos coeficientes de força em relação a Re . Extraído de Zdravkovich (1997).	35
Figura 3.9 – Curva do número de Strouhal em função de $Re^{-1/2}$. Reproduzido de Fey; König; Eckelmann (1998).	36
Figura 3.10 – Gráfico do coeficiente de pressão de base em função de $\log_{10} Re$. Reproduzido de Williamson (1996a).	37
Figura 3.11 – Esteira laminar, $Re=100$. Extraído e adaptado de van Dyke (1982).	38
Figura 3.12 – Esteira laminar, $Re=105$. Extraído e adaptado de van Dyke (1982).	38
Figura 3.13 – Modelo do mecanismo de formação da esteira de vórtices, segundo Gerrard (1966). Extraído de Meneghini (2002).	39
Figura 3.14 – Visualização da esteira com colocação do emissor de fumaça em várias posições da esteira, $Re=90$. Reproduzido de Cimbala; Nagib; Roshko (1988).	40

Figura 3.15 - Comprimento da esteira em função de Reynolds. Reproduzido de Honji (1986).....	41
Figura 3.16 – Entrada de fluido pela lateral da esteira laminar, $Re=100$. Extraído e adaptado de van Dyke (1982).	41
Figura 3.17 – Vista das estruturas tridimensionais do escoamento laminar (a) Emissão oblíqua, do tipo “chevron”, $Re=85$; (b) Emissão paralela, $Re=110$. Reproduzido de Williamson (1989).....	42
Figura 3.18 – Visualização da esteira secundária no plano xy (parte superior) e no plano yz (parte inferior), $Re=140$. A graduação presente no gráfico se refere à posição x/D . Extraído e adaptado de Cimbala; Nagib; Roshko (1988).	43
Figura 3.19 – Curva $St \times Re$ para os regimes laminares e faixa de transição na esteira. Reproduzido e adaptado de Williamson (1996a).....	43
Figura 3.20 – Curva $C_{pb} \times Re$ para os regimes laminares e faixa de transição na esteira. Reproduzido e adaptado de Williamson (1996a).....	44
Figura 3.21 – Visualizações do escoamento, modos A (esquerda) e B (direita). Reproduzido de Williamson (1996a).	45
Figura 3.22 – Espectro de velocidade para $Re=172,8$, mostrando o comportamento histerético do modo A. Reproduzido de Williamson (1996a).....	45
Figura 3.23 – Visualização do processo de formação dos laços de vórtices característicos do modo A. As fotografias são sequenciais e o laço marcado com o círculo preto é observado em diversos instantes de tempo. Reproduzido de Williamson (1996c).....	46
Figura 3.24 – Espectros de velocidade na faixa de transição entre os modos A e B. Reproduzido de Williamson (1996a).	47
Figura 3.25 – Curvas de estabilidade neutra dos modos A e B. Reproduzido de Henderson (1997).....	48
Figura 3.26 – Diferentes simetrias dos modos A e B. Reproduzido e adaptado de Williamson (1996c).....	48
Figura 3.27 – Deslocamentos de vórtices: forçado (esquerda) e natural (direita). Reproduzido de Williamson (1992).....	49

Figura 3.28 – Visualização e medição de velocidade com anemômetro de fio quente simultâneas do escoamento ao redor de um cilindro com deslocamento de vórtices. Reproduzido e adaptado de Williamson (1992).	50
Figura 3.29 – Fases da transição na esteira. Reproduzido de Williamson (1996a). ..	51
Figura 3.30 – Estados instáveis e estáveis na transição da esteira no escoamento ao redor de um cilindro. Reproduzido de Williamson (1996c).	52
Figura 3.31 – Esquema do escoamento ao redor de cilindros alinhados.	53
Figura 3.32 – Esteiras observadas para o escoamento ao redor de um cilindro isolado (A) e pares de cilindros alinhados com espaçamentos $16D$ (B), $10,4D$ (C), $8,5D$ (D e E), $6,6D$ (F) e $3,6D$ (G). Extraído e adaptado de Thomas; Kraus (1964)..	54
Figura 3.33 – Variação de St com o espaçamento para $Re=6,5\times 10^4$. Extraído e adaptado de Mahbub Alam et al. (2003).	55
Figura 3.34 – Regimes de interferência no escoamento ao redor de pares de cilindros alinhados. Reproduzido de Igarashi (1981).	56
Figura 3.35 – Variação do coeficiente de arrasto médio dos dois cilindros com o espaçamento, $Re=3,55\times 10^4$. Extraído e adaptado de Igarashi (1981).	58
Figura 3.36 – Distribuição do coeficiente de pressão na superfície dos cilindros, $Re=6,5\times 10^4$. Extraído e adaptado de Mahbub Alam et al. (2003).	59
Figura 3.37 – Variação da flutuação (RMS) do coeficiente de sustentação com o espaçamento, $Re=6,5\times 10^4$. Extraído e adaptado de Mahbub Alam et al. (2003).	60
Figura 3.38 – Coerência ao longo do eixo na frequência de Strouhal, para vários espaçamentos – (a) $Re=42.000$ e (b) $Re=17.000$. As ilustrações nos gráficos superiores demonstram as localizações dos anemômetros de fio quente (círculos pretos). Reproduzido de Wu et al. (1994).	61
Figura 4.1 – Malha utilizada para simulação do escoamento ao redor de cilindro isolado, $Re=320$. Compare o refinamento na região de esteira próxima (a) com a malha utilizada para os outros casos (b).	64
Figura 4.2 – Detalhes das regiões entre cilindros das malhas referentes aos casos de pares de cilindros alinhados.	65
Figura 4.3 – Gráfico do número de Strouhal em função do número de Reynolds. Simulações bidimensionais.	68

Figura 4.4 – Comprimento de formação para as simulações do escoamento ao redor de um cilindro isolado – Simulações bidimensionais.	69
Figura 4.5 – Detalhes dos contornos de vorticidade adimensional para simulações bidimensionais do escoamento ao redor de cilindros alinhados com espaçamento 3D para diversos Re	70
Figura 4.6 – Espectro de potência dos sinais do coeficiente de sustentação para espaçamento 3D, Re indicado. Simulações bidimensionais.....	71
Figura 4.7 – Série temporal de C_D e contornos de vorticidade em diferentes instantes de tempo. Espaçamento $t3,5d$, $Re=240$, simulações bidimensionais.	72
Figura 4.8 – Esquemas do comportamento do espaçamento crítico em relação ao comprimento de formação no escoamento ao redor de um cilindro isolado.....	74
Figura 4.9 – Contornos de vorticidade e linhas de emissão instantâneos, $Re=200$, simulações bidimensionais.....	74
Figura 4.10 – Valores de velocidade e pressão ao longo da linha $y=0$ de campos médios oriundos simulações bidimensionais a $Re=300$	76
Figura 4.11 – Gráfico do número de Strouhal em função do número de Reynolds. Simulações tridimensionais.....	77
Figura 4.12 – Comparação dos St 's obtidos através de simulações bidimensionais (2d) e tridimensionais (3d).	78
Figura 4.13 – Comprimento de formação para os casos $1cil$ e $t1,5d$, simulações bi e tridimensionais. Este comprimento é tomado a partir do centro do cilindro mais a jusante.....	79
Figura 4.14 – Séries temporais da velocidade w para os casos Re 240, 270 e 300, casos $t1,5d$ (ponto (12,92; -0,63; 2,42)) e $t5d$ (ponto (16,42; -0,63; 2,42)), simulações tridimensionais.	80
Figura 4.15 – Iso-superfícies de vorticidade em x (ω_x) e z (ω_z), simulações tridimensionais a $Re=270$. As superfícies azul-escuras correspondem a $\omega_x = -1,0$, as vermelhas a $\omega_x=1,0$, as amarelas com transparência a $\omega_z=1,0$ e as azul-claras com transparência a $\omega_z = -1,0$	81
Figura 4.16 – Contornos de vorticidade adimensional na direção x , no plano $y=0$, para Re 240, 270 e 300, casos $t1,5d$ e $t5d$, simulações tridimensionais.....	83

Figura 4.17 – Curva de estabilidade neutra para a esteira bidimensional de von-Kármán com respeito a perturbações na direção do eixo. Retirado de Henderson (1997) e adaptado.....	84
Figura 4.18 – Contornos de vorticidade adimensional na direção x , no plano $y=0$, para Re 200, 240 e 270, casos $t3d$ e $t3,5d$, simulações tridimensionais.....	85
Figura 4.19 – Contornos de vorticidade na direção x , em planos normais aos eixos dos cilindros, $Re=270$	86
Figura 4.20 – Iso-superfícies de vorticidade em x (ω_x) e z (ω_z), simulações tridimensionais, configuração $t1,5d$. As superfícies azul-escuras correspondem a $\omega_x = -0,3$, as vermelhas a $\omega_x=0,3$, as amarelas com transparência a $\omega_z=1,0$ e as azul-claras com transparência a $\omega_z = -1,0$	88
Figura 4.21 – Gráfico do coeficiente de arrasto médio em função de Re . Cilindro a montante, simulações bidimensionais.....	89
Figura 4.22 – Componentes de pressão e viscosa do coeficiente de arrasto médio do cilindro a montante, simulações bidimensionais, configurações $t1,5d$ e $t8d$. A letra p indica componente devida a pressão e a letra v indica componente devida à tensão de cisalhamento.....	90
Figura 4.23 – Gráficos polares da vorticidade (cima) e tensão de cisalhamento (baixo) na parede do cilindro a montante. Espaçamento $1,5D$, simulações bidimensionais.	92
Figura 4.24 – Contornos de vorticidade para os espaçamentos $1,5D$ e $8D$, $Re=270$. Simulações bidimensionais.....	93
Figura 4.25 – Contornos de pressão instantânea para os espaçamentos $1,5D$ e $8D$. Simulações bidimensionais.....	93
Figura 4.26 – Gráficos polares da pressão média num ciclo, na parede do cilindro a montante. Espaçamentos $1,5D$ e $8D$, simulações bidimensionais.	94
Figura 4.27 – Componentes de pressão e viscosa do coeficiente de arrasto médio do cilindro a montante, simulações bidimensionais, configurações $1cil$, $t5d$ e $t8d$	95
Figura 4.28 – Componentes de pressão e viscosa do coeficiente de arrasto médio do cilindro a montante, simulações bidimensionais, configurações $t1,5d$, $t3d$ e $t3,5d$	96

Figura 4.29 – Pressão média na região entre os cilindros, em casos de espaçamento menor do que o crítico. Simulações bidimensionais, $Re=200$	97
Figura 4.30 – Gráfico do coeficiente de arrasto médio em função de Re . Cilindro a jusante, simulações bidimensionais.	97
Figura 4.31 – Componentes de pressão e viscosa do coeficiente de arrasto médio do cilindro a jusante, simulações bidimensionais, configurações $t1,5d$ e $t8d$. A letra p indica componente devida a pressão e a letra ν indica componente devida à tensão de cisalhamento.....	98
Figura 4.32 – Distribuição da pressão média na superfície do cilindro a jusante, caso $t8d$, simulações bidimensionais.....	99
Figura 4.33 – Visualização da esteira secundária através de contornos de vorticidade. Caso $t8d$, simulações bidimensionais.....	100
Figura 4.34 – Gráfico polar da pressão média em um ciclo no cilindro a jusante da configuração $t1,5d$ para diversos Re , simulações bidimensionais.	101
Figura 4.35 – Contornos de vorticidade do campo médio em um ciclo e linhas de emissão. Espaçamento $1,5D$, simulações bidimensionais, $Re=160$ e $Re=320$	102
Figura 4.36 – Distribuição de pressão na superfície do cilindro a jusante, $Re=200$, simulações bidimensionais.....	103
Figura 4.37 – Gráfico do coeficiente de arrasto médio em função de Re . Cilindro a montante, simulações tridimensionais.	104
Figura 4.38 – Gráfico do coeficiente de arrasto médio em função de Re . Cilindro a jusante, simulações tridimensionais.....	104
Figura 4.39 – Componentes de pressão e viscosa do coeficiente de arrasto médio do cilindro a montante, simulações tridimensionais. A letra p indica componente devida a pressão e a letra ν indica componente devida à tensão de cisalhamento.	106
Figura 4.40 – Componentes de pressão e viscosa do coeficiente de arrasto médio do cilindro a jusante, simulações tridimensionais. A letra p indica componente devida a pressão e a letra ν indica componente devida à tensão de cisalhamento.	106
Figura 4.41 – Contornos de vorticidade instantânea no plano $z=2,5$. Caso $t5d$, $Re=270$, simulações tridimensionais.....	107

Figura 4.42 – Pressão média na superfície do cilindro a jusante, $t5d$, simulações tridimensionais.	108
Figura 4.43 – Iso-superfícies de vorticidade em x (ω_x) e z (ω_z), configuração $t1,5d$, $Re=200$, simulações tridimensionais. As superfícies azul-escuras correspondem a $\omega_x = -0,3$, as vermelhas a $\omega_x=0,3$, as beges com transparência a $\omega_z=1,0$ e as azul-claras com transparência a $\omega_z = -1,0$	108
Figura 4.44 – Gráfico da flutuação do coeficiente de sustentação do cilindro a montante em função do número de Reynolds. Simulações bidimensionais. ...	109
Figura 4.45 – Vorticidade média na parede do cilindro a montante, $Re=300$, simulações bidimensionais.....	110
Figura 4.46 – Contornos de vorticidade média e linhas de emissão do campo médio próximo ao cilindro a montante, $Re=300$, simulações bidimensionais.....	111
Figura 4.47 – Gráfico da flutuação do coeficiente de sustentação do cilindro a jusante em função do número de Reynolds. Simulações bidimensionais.	111
Figura 4.48 – Contornos de pressão instantânea, com iso-linhas de vorticidade ($t1,5d$ e $t3,5d$) ou linhas de emissão instantâneas ($t5d$). $Re=200$, simulações bidimensionais.	112
Figura 4.49 – Gráfico da flutuação do coeficiente de sustentação do cilindro a montante em função do número de Reynolds. Simulações tridimensionais....	113
Figura 4.50 – Gráfico da flutuação do coeficiente de sustentação do cilindro a jusante em função do número de Reynolds. Simulações tridimensionais.....	114
Figura 4.51 – Coeficiente de correlação axial. Números de Reynolds: 195, 200 e 240.	115
Figura 4.52 – Coeficiente de correlação axial. Números de Reynolds: 270, 300 e 320.	116
Figura 4.53 – Contornos de vorticidade na direção x no plano $y=0$ (a) e contornos de vorticidade na direção z no plano $z=2,5$ (b), ambos com linhas de emissão desprendidas da linha que se estende na direção z e passa pelo ponto $(x,y) = (-3;-0,1)$. Caso $t3d$, $Re=320$	117
Figura 4.54 – Contornos de vorticidade na direção x no plano $y=0$ (a), com linhas de corrente desprendidas da linha que se estende na direção z e passa pelo ponto $(x,y) = (-3;-0,1)$, e contornos de pressão no plano $z=2,5$ (b), com linhas de	

emissão desprendidas do segmento que liga os pontos $(-3; -1; 2,5)$ e $(-3; 1; 2,5)$. Caso $t5d$, $Re=320$	118
--	-----

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Número de elementos das malhas utilizadas.....	65
Tabela 4.2 – Parâmetros utilizados nas simulações em função de Re	67
Tabela 4.3 – Tipos de simetria e comprimentos de onda dos padrões tridimensionais encontrados nas simulações onde l_{cc} é menor que o espaçamento crítico.	87
Tabela 4.4 – Componentes de pressão e viscosa da média aritmética e média quadrática do coeficiente de arrasto do cilindro a montante – simulações bidimensionais.	90
Tabela 4.5 – Componentes de pressão e viscosa da média aritmética e média quadrática do coeficiente de arrasto do cilindro a jusante – simulações bidimensionais.	98

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CFD	– Dinâmica dos fluidos computacional
DNS	– Simulação numérica direta
EPUSP	– Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
FEM	– Método de elementos finitos
L	– Regime de escoamento laminar
LIFE	– Laboratório de interação fluido-estrutura
NDF	– Núcleo de dinâmica e fluidos
RMS	– Raiz da média quadrática
SEM	– Método de elementos espectrais
SM	– Método espectral
T	– Regime de escoamento completamente turbulento
TLP	– Plataforma do tipo “tension-leg”
TrW	– Transição na esteira
TrSL	– Transição nas camadas cisalhantes
TrBL	– Transição nas camadas limite
VIE	– Vibração induzida pelo escoamento
VIV	– Vibração induzida por emissão de vórtices
<i>1cil</i>	– escoamento ao redor de um cilindro isolado
<i>t1,5d</i>	– escoamento ao redor de cilindros alinhados com $l_{cc}=1,5D$
<i>t3d</i>	– escoamento ao redor de cilindros alinhados com $l_{cc}=3D$
<i>t3,5d</i>	– escoamento ao redor de cilindros alinhados com $l_{cc}=3,5D$
<i>t5d</i>	– escoamento ao redor de cilindros alinhados com $l_{cc}=5D$
<i>t8d</i>	– escoamento ao redor de cilindros alinhados com $l_{cc}=8D$

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{A}$	Matriz de montagem das contribuições locais na matriz global
C_D	Coeficiente de arrasto
C_D'	Flutuação do coeficiente de arrasto (valor RMS)
$\overline{C_D}$	Coeficiente de arrasto médio
C_{Df}	Coeficiente de arrasto viscoso
C_{Dp}	Coeficiente de arrasto de forma
C_F	Coeficiente de força
C_L	Coeficiente de sustentação
C_L'	Flutuação do coeficiente de sustentação (valor RMS)
$\overline{C_L}$	Coeficiente de sustentação médio
coh	Coerência
C_{pb}	Coeficiente de pressão de base
D	Diâmetro do cilindro
F	Força
f	Frequência dimensional de emissão de vórtices
L	Comprimento do cilindro
L_f	Comprimento de formação no escoamento ao redor de um cilindro isolado
l_{cc}	Distância entre os centros dos cilindros, espaçamento
l_{cc}^C	Espaçamento crítico
L_{ξ_3}	Comprimento do domínio na direção periódica
N_{el}	Número de elementos
N_{gl}	Número de graus de liberdade
N_m^e	Número de modos de expansão num elemento
p	Pressão
p_b	Pressão de base
p_∞	Pressão ao longe
$\mathcal{Q}^2$	Região padrão bidimensional

r	Coeficiente de correlação linear axial
Re	Número de Reynolds
St	Número de Strouhal
U_{∞}	Velocidade do escoamento ao longe
$\mathbf{u}$	vetor velocidade
u	Componente da velocidade na direção x
v	Componente da velocidade na direção y
$v_j(x)$	Função de peso
w	Componente da velocidade na direção z
x	Direção da corrente livre
y	Direção perpendicular à corrente livre e perpendicular ao eixo do cilindro
z	Direção do eixo do cilindro
β_q	Número de onda escalado
χ^e	Transformação da coordenada local para global
Φ_i	Funções de base
ϕ_p	Base polinomial local unidimensional
ϕ_{pq}	Base polinomial local bidimensional
ϕ_{pqr}	Base polinomial local tridimensional
λ	Comprimento de onda da instabilidade tridimensional
μ	Viscosidade dinâmica
ν	Viscosidade cinemática
ρ	Densidade do fluido
ξ	Coordenada local
Ω	Domínio fluido considerado
Ω^e	Domínio do elemento
Ω_{st}	Elemento padrão
ω_x	Vorticidade na direção x
ω_y	Vorticidade na direção y
ω_z	Vorticidade na direção z

1 INTRODUÇÃO

O objeto de estudo desta dissertação é o escoamento incompressível ao redor de pares de cilindros rígidos e imóveis, posicionados de forma alinhada em relação a uma corrente uniforme. Nos últimos trinta anos muitos artigos que lidam com o escoamento ao redor de corpos cilíndricos, utilizando tanto metodologias computacionais quanto experimentais, têm sido publicados sistematicamente em periódicos de grande relevância. Ao longo deste período esses estudos evoluíram bastante e hoje os pesquisadores envolvidos com este tema utilizam aparatos experimentais e computacionais bastante sofisticados, a fim de analisar em detalhe todas as peculiaridades presentes neste escoamento. Entretanto, a grande maioria destes trabalhos considera somente o caso de um cilindro isolado e pouco se tem publicado sobre o escoamento ao redor de agrupamentos de cilindros.

A interferência provocada pela presença de mais de um corpo no domínio do escoamento é responsável por mudanças tanto nas características das forças impostas nos corpos pelo fluido quanto no campo de velocidades resultante. Investigações do escoamento ao redor de pares de cilindros podem proporcionar um melhor entendimento da dinâmica dos vórtices, distribuição de pressão e forças fluidas em casos que envolvam arranjos mais complexos. Ao se fazer uma revisão bibliográfica do assunto, verifica-se que há uma carência de trabalhos que tratem especialmente dos aspectos tridimensionais do escoamento ao redor de pares de cilindros. Uma das aspirações desta pesquisa de mestrado é ajudar a preencher esta lacuna.

São dois os objetivos deste trabalho. O primeiro deles é estabelecer relações de causalidade entre características físicas do escoamento e as mudanças observadas nas forças e no campo fluido com as variações do número de Reynolds (Re) e do espaçamento entre os corpos. O segundo consiste em compreender a influência mútua entre tridimensionalidades e interferência no escoamento, ou seja, como o aparecimento de velocidade na direção do eixo dos cilindros altera a resposta do sistema estudado à presença do segundo cilindro e, ao mesmo tempo, como a existência de um outro cilindro imerso na corrente fluida modifica as estruturas tridimensionais observadas e o processo de transição na esteira.

Para cumprir estes objetivos, a abordagem utilizada aqui é a realização de simulações numéricas do escoamento. Para isso, um método computacional de alta resolução espacial e alta estabilidade temporal, denominado método de elementos espectrais (SEM), foi empregado. A vantagem da aplicação de métodos numéricos em problemas como este reside no fato de que o escoamento pode ser estudado com maior detalhamento, pois se tem acesso a todas as variáveis envolvidas no fenômeno. Desse modo, conhecimento fundamental pode ser adquirido investigando detalhadamente os resultados numéricos das variáveis de interesse e através de análises paramétricas.

São apresentados resultados de simulações bidimensionais e tridimensionais. Especificamente nas simulações tridimensionais, foi escolhido um comprimento periódico para o cilindro de modo a restringir o foco às instabilidades de pequena escala, os chamados modos A e B (Williamson, 1988b). A faixa de Re estudada vai de 160 a 320, compreendendo o intervalo onde acontece a transição para a turbulência na esteira no escoamento ao redor de um cilindro isolado. Além do caso do cilindro isolado, configurações com espaçamento entre centros variando de 1,5 diâmetro (D) a $8D$ foram simuladas. Assim, procurou-se formar um conjunto de resultados que possibilitasse fazer análises paramétricas consistentes, fundamentando conclusões que se propõem a atender os objetivos postos.

O presente projeto de pesquisa se integra no Projeto Temático 2001/0054-6 patrocinado pela Fapesp. Este projeto temático lida com vibrações induzidas pelo escoamento (VIE), que é um tópico importante no estudo da fadiga de componentes de sistemas oceânicos, como oleodutos, “risers”, linhas de amarração, etc. O objetivo fundamental deste projeto temático está concentrado na procura de uma melhor compreensão do fenômeno de acoplamento vibração/escoamento, com a conseqüente diminuição da incerteza na determinação das forças hidrodinâmicas que atuam nos elementos cilíndricos de plataformas “offshore” de produção de petróleo.

Na presença de correntes marítimas, os elementos estruturais flexíveis de sistemas oceânicos vibram devido à excitação causada pela formação e desprendimento alternado de vórtices (“vortex shedding”), que conduz a grandes flutuações das forças de pressão no sentido transversal do escoamento, causando

oscilações significativas. Essa vibração causa tensões cíclicas que podem, eventualmente, romper por fadiga a estrutura.

VIE também ocorrem em configurações onde corpos rombudos estão agrupados, e nesses casos as forças resultantes podem ser completamente diferentes daquelas observadas no escoamento ao redor de um cilindro isolado. Como exemplo de sistema onde podem ser encontrados elementos cilíndricos agrupados, pode-se citar uma plataforma do tipo *tension leg* (vide Figura 1.1, fornecida por Nishimoto (1997)^{*}). Problemas associados com VIE em “risers”^{**} e agrupamentos dos mesmos são potencialmente complexos, particularmente quando a exploração de óleo acontece em águas profundas, dado que existem poucas referências para definição dos parâmetros de projeto. Tendo isso em mente, a contribuição desta dissertação de mestrado a esse projeto temático é proporcionar um melhor entendimento dos mecanismos envolvidos no fenômeno de interferência no escoamento ao redor de agrupamentos de cilindros.

Figura 1.1 – Plataforma tipo “Tension Leg”. Observa-se a estrutura dos componentes cilíndricos tais como os tubos flexíveis (“risers”) que levam a produção do poço petrolífero para a superfície.

^{*} NISHIMOTO, K. Comunicação pessoal. 1997.

^{**} Risers são elementos que ligam a plataforma ao leito do oceano. Podem ter diversas funções, tais como: extração de petróleo, ancoragem e perfuração.

O texto está organizado da seguinte forma: no capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica dos fenômenos estudados e das metodologias utilizadas. Em seguida, no capítulo 3 são explicados alguns tópicos do fenômeno de geração e desprendimento de vórtices no escoamento ao redor de cilindros, que são de interesse deste trabalho. No capítulo 4, por sua vez, estão os resultados obtidos no curso deste projeto de pesquisa, com respectivas análises e discussões. Por fim, no capítulo 5 as conclusões deste trabalho estão delineadas e algumas sugestões para trabalhos futuros são colocadas.

Constam também neste texto alguns apêndices que, embora não sejam essenciais para a compreensão das discussões feitas aqui, servem de referência para o leitor que quiser se aprofundar em aspectos específicos do trabalho. O apêndice A versa sobre o método de elementos espectrais e o apêndice B trata da sua aplicação na simulação de escoamentos incompressíveis. Os apêndices C, D e E abordam alguns pontos ainda relativos ao SEM: polinômios de Jacobi, quadratura de Gauss e diferenciação de Lagrange, respectivamente. O apêndice F traz em detalhe os testes de convergência e validação do método numérico e das malhas utilizadas. Finalmente, o apêndice G traz os resultados tabelados, a fim de facilitar a comparação com outros trabalhos.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo são apresentadas publicações que abordam, ao menos em parte, tópicos de interesse a este projeto de pesquisa. O objetivo dessa revisão bibliográfica é fornecer um panorama histórico da evolução do conhecimento científico acerca do objeto de estudo deste trabalho, assim como da metodologia utilizada. Além disso, os conteúdos desses artigos são analisados de forma sucinta, de modo que o leitor seja capaz de entender os pontos que são tratados nesses trabalhos e de saber onde achar maiores informações caso queira se aprofundar em alguma matéria específica.

Para melhor organizar o presente texto, a revisão bibliográfica foi dividida em três partes, duas delas lidam com os fenômenos físicos estudados e a outra diz respeito à metodologia utilizada. A primeira parte trata do fenômeno de emissão de vórtices no escoamento ao redor de um cilindro isolado, compreendendo estudos analíticos, experimentais e computacionais de aspectos bidimensionais e, principalmente, tridimensionais. A segunda analisa publicações referentes ao fenômeno de interferência no escoamento ao redor de cilindros alinhados, trazendo citações de estudos experimentais e computacionais. A terceira trata da evolução do método de elementos espectrais aplicado à dinâmica dos fluidos computacional.

Nas análises críticas dos artigos apresentadas, faz-se o uso de vocabulário específico relativo às áreas de conhecimento abordadas. Caso o leitor sinta alguma dificuldade nesse aspecto, recomenda-se que ele faça uma leitura prévia do capítulo teórico ou do apêndice referente à parte em questão, onde esses conceitos específicos são elucidados.

2.1 O escoamento ao redor de um cilindro isolado

O escoamento ao redor de um cilindro isolado é um assunto que recebeu e ainda recebe grande atenção da comunidade científica, resultando num número infindável de publicações sobre o assunto. Procurou-se selecionar da melhor forma possível uma quantidade significativa de trabalhos que tratam de tópicos relevantes para os objetivos desta dissertação. Assim, maior atenção é dada aos aspectos

tridimensionais da transição na esteira do cilindro, pois esses são os pontos de principal interesse deste projeto de pesquisa.

Williamson (1988a, 1989) faz um estudo de duas características fundamentais da esteira no escoamento ao redor de cilindro para baixos Re : a primeira é a existência de descontinuidades na relação $St \times Re$ e a segunda é o fenômeno de emissão oblíqua de vórtices. Ele demonstra através de cuidadosas medições que a existência de uma descontinuidade encontrada em experimentos anteriores na curva $St \times Re$ para valores pequenos de Re ($Re < 100$), onde o regime de emissão de vórtices ainda é laminar, é causada por uma mudança no modo de emissão oblíqua de vórtices, com relação ao eixo do cilindro. Em outras palavras, as duas características em questão estão relacionadas. O autor induz a emissão de vórtices paralela ao eixo do cilindro, através da manipulação das condições nas extremidades, utilizando discos cujos eixos podem ser colocados em posição oblíqua com relação ao eixo do cilindro. Para inclinações maiores que 12° não ocorrem descontinuidades, e uma curva $St \times Re$ contínua é obtida. Ela concorda com os dados adquiridos no experimento com emissão oblíqua, desde que estes sejam transformados pela relação $St_0 = St_0 / \cos \theta$. O experimento foi repetido em um equipamento totalmente diferente e resultados equivalentes foram obtidos. Com a publicação deste trabalho, então, fica evidenciado a existência de uma curva $St \times Re$ universal e contínua para um cilindro circular, na faixa $40 < Re < 180$. Além disso, essas referências trazem descrições detalhadas do aparato experimental utilizado e dos procedimentos realizados, demonstrando como os vários fatores que influenciam o fenômeno são monitorados ou isolados. O autor traça também conclusões sobre os mecanismos físicos atuantes e apresenta os dados obtidos de forma tabulada.

Eisenlohr; Eckelmann (1989) e König; Eisenlohr; Eckelmann (1990) mostram uma investigação das consequências da divisão* de vórtices que acontece na esteira laminar de placas planas (no caso, discos) colocadas paralelamente ao escoamento, na região da esteira de von Kármán que se forma atrás de corpos cilíndricos. Concluiu-se que, se esta divisão ocorrer em uma certa região próxima ao cilindro, é possível desacoplar o escoamento na esteira de von Kármán das perturbações vindas

* “Vortex splitting” na literatura em língua inglesa.

das extremidades, que estão sempre presentes. Este desacoplamento resulta na emissão paralela de vórtices. Naquele trabalho, a emissão paralela foi conseguida através do uso de cilindros de diâmetro maior, entre 1,8 e 2,2 vezes o diâmetro do cilindro original, na extremidade do cilindro original, constituindo um degrau, e depois deles discos nos moldes daqueles utilizados por Williamson (1988a, 1989). Com isso, os autores procuraram melhorar a compreensão do fenômeno físico e ilustrar que diversos métodos poderiam ser utilizados para se obter emissão paralela de vórtices. O primeiro dos artigos, Eisenlohr; Eckelmann (1989) trata mais da explicação do fenômeno físico envolvido, enquanto que o segundo, König; Eisenlohr; Eckelmann (1990), traz detalhes dos experimentos com os cilindros de maior diâmetro na ponta, juntamente com os resultados dos mesmos e comparações com dados então disponíveis na literatura.

Hammache; Gharib (1989,1991) apresentam um método alternativo de induzir emissão paralela no escoamento ao redor de um cilindro isolado, de razão de aspecto finita. O método consiste em posicionar dois cilindros de diâmetro maior, denominados cilindros de controle, a montante e transversalmente ao cilindro principal, separados por uma certa distância, e foi empregado em túnel de vento e túnel de água. Estes trabalhos trazem detalhes sobre o posicionamento dos cilindros de controle e os seus diâmetros, e descrevem os padrões que são obtidos quando esses parâmetros são variados. Os experimentos mostram que a emissão oblíqua de vórtices se deve a um gradiente de pressão na porção do cilindro a jusante, chamada região de base, podendo ser associada com um escoamento na direção do eixo nesta região. Por isso, os autores afirmam que a função de tais cilindros de controle é prover condições de contorno de pressão simétricas, impedindo assim a propagação de perturbações tridimensionais vindas das extremidades. Assim como nos outros trabalhos que apresentam técnicas para se obter emissão paralela, Hammache; Gharib (1989,1991) também obtêm uma curva contínua $St \times Re$ para Re entre 50 e 163.

Williamson (1988b) traz um estudo sobre a existência de dois estágios na transição para tridimensionalidade na esteira de um cilindro. O autor afirma que essas transições correspondem a descontinuidades encontradas nas curvas $St \times Re$. A primeira descontinuidade acontece entre Re 170 e 180, está associada com o desenvolvimento de laços de vórtices e apresenta histerese. Esta transição faz a ponte

entre um estado onde o fenômeno de emissão e desprendimento de vórtices é fundamentalmente bidimensional e outro, denominado neste trabalho de modo A, onde aparecem as primeiras tridimensionalidades, com comprimento característico da ordem de 3 diâmetros. O autor afirma que a deformação dos vórtices primários de Von Kármán é que cria os laços tridimensionais e a vorticidade na direção do escoamento. O processo de geração desses laços é auto-sustentável, pois há uma realimentação de um laço para o próximo, e o trabalho traz figuras que comprovam esta afirmação de forma bastante interessante. A segunda descontinuidade acontece no intervalo $230 < Re < 260$ e corresponde a uma mudança na estrutura dos vórtices que se formam na direção do escoamento para uma escala menor, tipicamente da ordem de 1 diâmetro. Esta transição não apresenta histerese e envolve a existência de dois picos no espectro simultaneamente, com a observação de uma mudança gradual do nível de energia do pico de frequência mais baixa e o pico de frequência mais alta. Esta transição é a ponte entre o modo A e um outro modo, que perdura ainda para Re mais elevados, chamado de modo B. Este trabalho tem elevada importância na área, na medida em que se tornou a referência primeira para o estudo do início da transição para escoamento tridimensional, inclusive nomeando os modos tridimensionais de emissão de vórtices.

Karniadakis; Triantafyllou (1989) investigam os estados assintóticos de esteiras laminares em escoamentos ao redor de cilindros para $200 < Re < 500$ através de simulação numérica direta utilizando o método de elementos espectrais. São consideradas esteiras naturalmente produzidas e esteiras submetidas a uma forçante periódica, o que pode ser entendido como simulação do escoamento ao redor de um cilindro submetido a uma oscilação forçada. Atender-se-á apenas ao primeiro caso, que é o de interesse deste trabalho. Os autores detalham o processo da quebra de simetria do escoamento que leva à formação da esteira. Com a esteira completamente desenvolvida, o campo de velocidades médio é obtido e um resultado bastante interessante é que o tamanho da bolha de recirculação deste campo é significativamente diferente daquele obtido por cálculos de campos estacionários, para o mesmo Re (Fornberg, 1985). Isto mostra que o campo médio é influenciado fortemente pelo desenvolvimento da esteira. Com este resultado de campo médio, cálculos de estabilidade linear são feitos e chega-se à conclusão que este campo é

absolutamente instável numa região de aproximadamente 2,5 diâmetros atrás do cilindro, e no resto da esteira a instabilidade é do tipo convectiva. Portanto, a esteira é basicamente sustentada pela instabilidade nas proximidades do corpo. Com esta análise de estabilidade, chega-se a um número de Strouhal exatamente igual àquele obtido através das simulações numéricas da equação de Navier-Stokes. Ao realizar a mesma análise no campo estacionário o St encontrado é menor, reforçando a afirmação de que os dois escoamentos são significativamente diferentes.

Karniadakis; Triantafyllou (1992) investigam a transição da esteira no escoamento ao redor de um cilindro isolado utilizando simulações computacionais com o método de elementos espectrais tridimensional. Para Re próximo de 200, os resultados deste trabalho mostram que a esteira torna-se tridimensional devido a uma instabilidade secundária. Subindo um pouco mais o Re , um estado harmônico é desenvolvido, e o escoamento oscila na frequência de Strouhal, sendo que há uma modulação ao longo da envergadura. Para Re ainda maiores, acontece uma bifurcação e o escoamento fica alternando entre dois estados diferentes. Aumentando-se ainda mais o Re , acontece uma cascata de bifurcações, que acaba criando um estado caótico no que diz respeito ao caráter tridimensional da esteira para Re por volta de 500. Neste estado, o escoamento é caracterizado por um espectro de banda larga e pelo aparecimento de fenômenos intermitentes. A principal conclusão do artigo é que a transição da esteira segue uma rota de bifurcações.

Williamson (1992) mostra que, além dos modos A e B, a transição na esteira envolve também o aparecimento do que ele chamou ‘deslocamentos de vórtices’. Estes são irregularidades que começam de pequenas perturbações no escoamento tridimensional, mas evoluem para estruturas de grande escala, que vão crescendo a jusante e atingem tamanhos da ordem de 10 a 20 comprimentos de onda primários, sendo os principais responsáveis por distorções de larga escala e conseqüente evolução para turbulência na esteira. Estas estruturas são geradas entre células de desprendimento de vórtices com frequência diferente, quando os vórtices primários da esteira de von Kármán de cada célula se movem fora de fase em relação ao outro. O deslocamento de vórtices pode ser provocado na esteira laminar através do posicionamento de anéis de diâmetro maior do que o do cilindro no meio dele. Nessa situação, o desprendimento de tais estruturas se dá de forma periódica e sempre no

mesmo local. Já na transição natural para a turbulência na esteira, o mesmo fenômeno ocorre, só que de forma aleatória, tanto no tempo quanto no espaço. O deslocamento de vórtices já tinha sido observado em Williamson (1989), no entanto, quando as condições da extremidade são manipuladas, o deslocamento observado é do tipo unilateral, e dá origem a uma estrutura assimétrica. Já no caso do anel e da transição na esteira, o deslocamento é do tipo bilateral, e a estrutura resultante é simétrica. Esse fenômeno é responsável pelo aparecimento de pequenas anomalias presentes nas séries temporais de velocidade em escoamentos próximos ao limite de estabelecimento do modo A ($Re \simeq 180$), podendo ser evidenciado também em perfis de velocidade média e de flutuação, traçados nas zonas afetadas, e também nos espectros da flutuação. Uma conclusão importante apresentada no artigo é o fato da rota para a turbulência num escoamento ao redor de cilindro apresentar três determinantes físicos, todos eles tendo sua origem na região de esteira próxima, onde os vórtices são formados: o primeiro é o aparecimento de vorticidade em direções perpendiculares ao eixo do cilindro, o que é causado pela deformação dos vórtices primários, e dá origem aos modos A e B; o segundo é o deslocamento de vórtices em grande escala, que distorce a esteira no sentido axial; e o terceiro são vórtices que aparecem em instabilidades da camada cisalhante para $Re \simeq 1000$, e introduzem turbulência tridimensional de pequena escala na região da esteira próxima. Ao observar fenômenos similares em outros tipos de escoamento, o autor sugere que o mecanismo de deslocamento de vórtices ou de fase possa ser uma característica geral da transição em todos os escoamentos com separação.

Miller; Williamson (1994) desenvolveram mais um método de controle das condições das extremidades do cilindro e, por consequência, dos padrões tridimensionais de emissão de vórtices, desta vez através de sucção na região da extremidade. Este método de controle trouxe novos resultados de relevância, pois admite um controle contínuo e transiente da condição de velocidade nas extremidades, além de ser menos invasivo. Uma primeira conclusão tirada dos experimentos realizados neste trabalho é que para um escoamento que acontece a um dado Re , uma faixa contínua de ângulos de emissão entre 0° e 24° pode ser conseguida através da regulação da intensidade de sucção, e não valores discretos,

como se supunha em trabalhos anteriores (Williamson, 1989), (Hammache e Gharib, 1991) e (Eisenlohr e Eckelmann, 1989). Com essa condição de contorno, os autores afirmam evitar os deslocamentos de vórtices, descritos em Williamson (1992), que acontecem quando placas inclinadas são utilizadas para promover a emissão paralela. Com isso, conseguem estender o Re de transição, onde acontece a primeira descontinuidade da curva $St \times Re$, até $Re = 205$. Conclui-se então que a grande disparidade encontrada na literatura para este valor de Re de transição deve-se às condições na extremidade utilizadas, pois mesmo com emissão paralela, se o método que é utilizado provoca deslocamento de vórtices, a transição é antecipada.

Wu et. al (1996) realizaram um estudo das estruturas tridimensionais que aparecem num escoamento ao redor de um cilindro isolado utilizando a técnica de PIV de alta densidade de partículas. A faixa de Reynolds abordada é de $140 < Re < 550$, pois os autores se propunham a analisar tais estruturas na faixa de transição entre emissão bidimensional e tridimensional, passando pelos Modos A e B descritos por Williamson (1988b). O plano de velocidades estudado é aquele que contem o eixo do cilindro e a direção principal do escoamento e neste plano contornos de vorticidade e linhas de emissão são calculados. Há um esforço no sentido de relacionar os vórtices que aparecem na direção do escoamento com os vórtices da esteira de Von Kármán e com isso explicar o aparecimento das estruturas tridimensionais. Além de visualizações, levantamentos quantitativos corroboram as conclusões do trabalho, como localização da transição e mecanismo de formação dos vórtices no sentido do escoamento. Algumas destas hipóteses seriam exploradas em artigos posteriores de outros autores, como Williamson (1996c).

Henderson; Barkley (1996) exploram a instabilidade secundária na esteira bidimensional do cilindro. Eles utilizam uma combinação de cálculos lineares e não lineares para obter dados quantitativos da bifurcação, bem como detalhes qualitativos da natureza da transição. Os métodos utilizados são simulações do escoamento bi e tridimensionais utilizando o método de elementos espectrais e cálculos de estabilidade linear utilizando a teoria de Floquet, para analisar a resposta da esteira bidimensional estabelecida a perturbações tridimensionais. Com estas ferramentas, os autores traçam uma curva de estabilidade neutra em relação a esta instabilidade secundária, que é a transição para o chamado modo A, e encontram o valor de Re

crítico de 188,5, sendo que a instabilidade para este valor de Re tem comprimento de onda próximo de 4 diâmetros. Além disso, também é analisado o caráter não linear da instabilidade e chega-se à conclusão de que esta bifurcação é do tipo subcrítica e, portanto, descontínua e histerética.

Williamson (1996b) foca-se na primeira descontinuidade encontrada na curva $St \times Re$. Neste trabalho, afirma-se que os deslocamentos são originados nos sítios de formação dos laços de vórtices característicos do modo A, e representam uma quebra natural da periodicidade deste modo. Este é um fenômeno intrínseco da transição, mas pode antecipado em termos de Re de acordo com a condição de extremidade utilizada. Quando a instabilidade do modo A aparece simultaneamente com deslocamentos de vórtices de grande escala, acontece uma redução na sucção de base, uma redução no nível das tensões de Reynolds bidimensionais, um crescimento da região de formação e conseqüentemente uma queda na frequência de Strouhal. Somando as conclusões deste trabalho aos resultados obtidos em Leweke; Provansal (1995) e Prasad; Williamson (1997), depreendeu-se a existência de duas curvas $St \times Re$ durante a transição: uma, com maiores valores de St , correspondente ao efeito das instabilidades de pequena escala isolado e outra, com menores valores de St , correspondente à combinação dos efeitos das instabilidades de pequena escala e deslocamentos de grande escala. Tendo isso em mente, uma nova seqüência de estados através da transição é proposta: $2D \rightarrow A \rightarrow A^* \rightarrow B$, onde 2D é a esteira laminar, bidimensional, A e B são os modos A e B respectivamente e A^* é um estado onde o modo A e deslocamentos de vórtices estão presentes simultaneamente.

Barkley; Henderson (1996) publicaram uma análise de estabilidade de alta precisão numérica da esteira periódica de um cilindro para Re variando entre 140 e 300. Para executar tal tarefa, foi utilizado o método de elementos espectrais bidimensional para o cálculo dos campos base e a teoria de Floquet para os cálculos de estabilidade tridimensionais. A análise feita mostra que a esteira bidimensional se torna (absolutamente) linearmente instável a perturbações tridimensionais num Re crítico igual a $188,5 \pm 1,0$. O comprimento de onda na direção da envergadura crítico encontrado foi de $3,96 \pm 0,02$ diâmetros e o modo crítico de Floquet corresponde à instabilidade relacionada ao chamado ‘Modo A’, observado por Williamson (1988b). Quando se chega a Re igual a 259 a esteira bidimensional torna-se linearmente

instável apresentado um segundo ramo de modos com comprimento de onda 0,822 imediatamente após a transição. Este é o ramo referente ao modo B.

Questões referentes às origens físicas das deformações dos vórtices que resultam no aparecimento dos modos A e B e seus efeitos na região da esteira próxima, são abordados em Williamson (1996c). Neste trabalho, o autor conclui que as deformações que dão origem a cada um desses modos têm origens diferentes, o que se reflete no comprimento de onda resultante. O modo A aparece na forma de uma deformação dos tubos de vórtice, periódica na direção do eixo, com comprimento de onda entre 3 e 4 diâmetros e tem origem no núcleo dos vórtices primários. Este comprimento de onda é resultado de uma instabilidade elíptica nos núcleos dos vórtices na esteira próxima. O crescimento não-linear subsequente é resultado de uma realimentação de um vórtice para outro. Já o modo B tem comprimento típico de 1 diâmetro e resulta de uma instabilidade nas camadas cisalhantes separadas do cilindro, tendo natureza hiperbólica.

Henderson (1997) conduziu cálculos que quantificaram a resposta não-linear do sistema a perturbações tridimensionais próximo aos Re críticos para as duas instabilidades da esteira, modos A e B, assim como para a esteira turbulenta em $Re=1000$. Ele utilizou um método numérico similar àquele utilizado nesta dissertação, embora a implementação dele lidasse com malhas não-conformes. Neste artigo, os resultados de uma análise de estabilidade linear produzidos por Barkley; Henderson (1996) são postos à prova em simulações tridimensionais das equações de Navier-Stokes completas. Ele classificou a forma não-linear da bifurcação do modo A e B, sendo a primeira uma bifurcação subcrítica e a segunda supercrítica. Além disso, o autor identificou as condições sob as quais a esteira evolui para estados periódicos, quase-periódicos ou caóticos de acordo com o comprimento periódico do cilindro e número de Reynolds. Um resultado importante contido neste trabalho é que, ao menos na faixa de Re estudada, não há evidência de nenhuma outra bifurcação do escoamento bidimensional senão aquela que ocorre quando a esteira de von Kármán começa a ser formada, em Re por volta de 40, assim como não foram encontradas instabilidades ou fenômenos tridimensionais que não possam ser explicados em termos das instabilidades dos modos A e B. Isto implica em dizer que não há evidência de que os resultados obtidos para esta faixa de Re não possam ser

utilizados para explicar o fenômeno para uma faixa muito maior de Re , provavelmente até a transição na camada limite, que se dá para $Re \simeq 10^5$.

Fey; König; Eckelmann (1998) baseiam-se em resultados experimentais para propor leis que relacionam St com Re da forma $St = A + m/\sqrt{Re}$. A faixa de Re coberta no artigo vai de $Re=47$ até $Re=2 \times 10^5$, quando ocorre a transição para a turbulência na camada limite e a chamada crise do arrasto. Os vários regimes de emissão de vórtices que ocorrem nesta faixa são descritos por diferentes coeficientes A e m . Os experimentos foram realizados em três diferentes instalações e o método empregado para se obter emissão paralela foi o descrito em Eisenlohr; Eckelmann (1989). As curvas obtidas com esta formulação têm melhor aderência com os dados experimentais quando comparadas com os ajustes polinomiais apresentados em artigos anteriores.

Williamson (1998) segue a proposta de Fey; König; Eckelmann (1998) e justifica o uso de séries do tipo

$$St = \left(A + \frac{B}{\sqrt{Re}} + \frac{C}{Re} + \dots \right)$$

pela relação de St com uma largura efetiva da esteira, que por sua vez depende do diâmetro do corpo, que está diretamente ligado à constante A , e também de uma largura característica das camadas cisalhantes que se separam da parede do corpo, que está ligada aos termos seguintes da série. Assim como Fey; König; Eckelmann (1998), o artigo apresenta diferentes coeficientes de acordo com o regime de emissão de vórtices, mas o autor se restringe a uma faixa $49 < Re < 1200$ para ajuste de dados experimentais, e $47 < Re < 1000$ para ajuste de dados numéricos, obtidos por Henderson (1997). São apresentadas curvas truncadas até no terceiro termo (C/Re) com valores de erro decrescente na medida em que são aumentados os termos na série.

Norberg (2003) apresenta uma revisão de investigações anteriores relacionadas à componente flutuante da sustentação em um cilindro estacionário colocado numa corrente fluida, além de trazer novos resultados experimentais. A faixa de Re coberta vai de $Re \simeq 47$ até 2×10^5 , e os regimes de emissão de vórtices que aparecem nela são citados e descritos. Além da componente flutuante da sustentação,

são apresentados também resultados de comprimento de correlação axial e número de Strouhal. O artigo faz ainda uma revisão dos métodos experimentais empregados para a obtenção das flutuações da sustentação. Por fim, são apresentadas correlações empíricas para os valores de St , valor RMS do coeficiente de sustentação e comprimento de correlação axial, todas elas em função de Re . Todavia, o artigo não traz dados para a faixa de transição na esteira, pois nessa faixa há uma grande discrepância nos resultados disponíveis na literatura.

2.2 O fenômeno de interferência no escoamento ao redor de cilindros alinhados

Os primeiros estudos científicos sobre interferência no escoamento ao redor de corpos rombudos remontam da primeira metade do século XX, motivados principalmente pela avaliação do arrasto em componentes de aviões biplanos, sendo por isso realizados com números de Reynolds altos. Um exemplo desses estudos é o trabalho de Bierrmann; Herrnstein Jr. (1933) onde ensaios em túnel de vento são realizados a fim de determinar o arrasto de interferência em vários arranjos de suportes de asa (“struts”) afilados e cilíndricos, com números de Reynolds da ordem de 10^4 . Em meio aos arranjos testados está o de interesse no presente trabalho, que é o arranjo alinhado. Dentre as conclusões tiradas pelos autores para essa configuração está o fato do arrasto do cilindro a jusante diminuir com a presença do cilindro a montante. Este último, por sua vez, não tem o arrasto significativamente afetado pelo segundo cilindro. Uma outra observação importante foi a identificação de diferentes regimes de acordo com o espaçamento. Para espaçamentos maiores do que 4 diâmetros, os autores afirmam que a magnitude do arrasto de interferência não sofre grandes mudanças. Já para espaçamentos menores do que 4 diâmetros, o arrasto do cilindro a jusante decresce rapidamente com a diminuição do espaçamento, tornando-se negativo para espaçamentos menores do que 3 diâmetros.

Em meados da década de 60, os primeiros estudos visando o entendimento da física do fenômeno de interferência foram realizados. Estes estudos foram constituídos basicamente de ensaios em túneis de vento para Re baixos, com visualização através de técnicas que utilizam fumaça. Um dos mais importantes trabalhos desta época é a investigação realizada por Thomas; Kraus (1964) onde o

escoamento ao redor de cilindros lado a lado e alinhados é visualizado em túnel de vento. O principal resultado apresentado pelos autores é a comparação de visualizações do escoamento ao redor de cilindros alinhados em diferentes espaçamentos para $Re=62$. Focando-se principalmente na esteira formada depois do cilindro a jusante, propõe-se que, de acordo com o espaçamento, os vórtices sofrem contração, expansão, cancelamento ou coalescência.

Zdravkovich (1972) traz uma investigação do escoamento ao redor de pares de cilindros alinhados e escalonados, para $40 < Re < 250$. São realizados ensaios em túnel de vento com visualizações através do uso de filamentos emissores de fumaça, e com esses dados inferências sobre a transição para a turbulência na esteira são delineadas. Ele traça comparações diretas com o caso de um cilindro e conclui que para espaçamentos entre 8 e 12 diâmetros a transição para a turbulência é antecipada. Para espaçamentos entre 4 e 8 diâmetros a transição acontece para aproximadamente o mesmo Re que no caso de cilindro isolado, porém a esteira se forma a uma distância maior no escoamento ao redor do par de cilindros. Já para espaçamentos menores do que 4 diâmetros, a transição para a turbulência é adiada em termos de Re , e este adiamento é tanto maior quanto menor for o espaçamento. Este trabalho evidencia o fato de que a presença do segundo corpo muda completamente as características do escoamento, não só nas proximidades dos corpos, como também na esteira produzida.

Zdravkovich (1977) apresentou um levantamento crítico das pesquisas relacionadas à análise do escoamento ao redor de pares de cilindros em diversas configurações publicadas até então. Segundo o autor, a interferência entre dois cilindros próximos muda drasticamente o escoamento ao redor deles e produz distribuições de pressão substancialmente diferentes do caso de cilindro isolado, intensificando ou suprimindo a emissão de vórtices. No que tange a configuração de cilindros alinhados, esta revisão foca-se principalmente na descontinuidade do fenômeno de emissão de vórtices que aparece para um espaçamento que o autor denomina espaçamento crítico. Esta descontinuidade manifesta-se nas medições de coeficiente de arrasto em ambos os cilindros, assim como nas pressões de base (medida no ponto mais a jusante dos cilindros) e na pressão de *gap* (medida no ponto mais a montante do cilindro a jusante). Ela é causada por uma mudança abrupta de

um padrão estável de escoamento para outro, a partir de um dado espaçamento. Os efeitos do número de Reynolds e rugosidade superficial também são abordados.

Igarashi (1981) apresenta resultados de ensaios realizados em túnel de vento com o intuito de investigar o escoamento ao redor de cilindros alinhados. Motivado principalmente pela aplicação em trocadores de calor do tipo banco de tubos, os Re ensaiados variaram entre $8,7 \cdot 10^3$ e $5,2 \cdot 10^4$, e os espaçamentos l_{cc} (distância entre os centros dos cilindros) variaram entre 1,03 e 5,00. Os resultados são apresentados de forma bastante detalhada, com a medição de diversas grandezas, tais como coeficiente de arrasto, distribuição do coeficiente de pressão médio pela superfície dos corpos, número de Strouhal, flutuação de velocidade na esteira e flutuação de pressão nas paredes dos corpos, além da utilização de técnicas de visualização. Com esses dados, o autor avalia atributos interessantes, tais como o ponto de adesão da camada cisalhante advinda do cilindro a montante no cilindro a jusante, a dependência em relação a Re para certos espaçamentos e a existência de diversos padrões de escoamento de acordo com o espaçamento, dado um Re .

Arie et al. (1983) apresentam medições da flutuação da pressão na superfície de cilindros dispostos em arranjos alinhados para Re pré-crítico de valor $1,57 \cdot 10^5$. Grandezas como valores RMS da sustentação e arrasto e correlações longitudinais e circunferenciais são apresentados. Dentre as principais conclusões está o fato da flutuação das grandezas no cilindro a jusante ser muito maior do que a flutuação no cilindro a montante até um espaçamento de 7 diâmetros. Após este espaçamento, os valores para ambos os corpos diferem minimamente daqueles encontrados para cilindro isolado. Uma outra observação importante é o salto da correlação longitudinal do RMS do sinal de pressão no espaçamento crítico. Para espaçamentos maiores do que esse, o valor de correlação de cilindro isolado é recuperado. Alguns resultados dispostos neste trabalho diferem dos apresentados em Igarashi (1981) principalmente por se tratar de um regime pré-crítico de Reynolds, enquanto que no trabalho anterior os Re eram mais baixos.

Zdravkovich (1987) publicou artigo abordando os efeitos de interferência entre cilindros imersos em uma corrente fluida. Neste artigo, ele categoriza os arranjos em *clusters* de cilindros, classifica os regimes de interferência em escoamentos ao redor de pares de cilindros e analisa resultados experimentais de

escoamento em *clusters*. O arranjo geométrico alinhado, objeto de estudo deste projeto de pesquisa, é classificado dentro da categoria de interferência de esteira, e para esta configuração o autor rotula os diversos regimes de escoamento de acordo com os padrões observados, que variam de acordo com o espaçamento e com Re .

Slaouti; Stansby (1992) apresentam resultados computacionais de simulações bidimensionais para pares de cilindros alinhados e lado a lado. O método utilizado é o método de vórtices discretos e as simulações são feitas para diversos espaçamentos com $Re=200$. Para os casos de cilindros alinhados, o principal foco é na observação dos diferentes padrões de escoamento de acordo com a variação do espaçamento, conforme observado em Zdravkovich (1987). Adicionalmente, os autores traçam uma hipótese para o mecanismo de sincronização dos números de Strouhal e intensificação da sustentação para o cilindro a jusante quando o espaçamento é maior do que o crítico. Apesar de qualitativamente os resultados serem comparáveis a dados experimentais, quantitativamente eles diferem significativamente, principalmente porque para o Re testado já há a presença de tridimensionalidades importantes no escoamento.

Um estudo focado na relação da coerência tridimensional com a presença de um segundo cilindro alinhado está presente em Wu et al. (1994). Neste trabalho, ensaios em túneis de vento e de água foram realizados para $Re=4,2.10^4$ e $Re=1,7.10^4$, utilizando-se técnicas de visualização e anemometria de fio quente para inferir conclusões sobre aspectos tridimensionais do fenômeno. Os resultados mostram que a coerência num certo ponto o plano x - y tende a decrescer com o aumento da distância longitudinal entre os pontos. Analisando-se diferentes espaçamentos, mostra-se que para espaçamentos menores do que o crítico a coerência é maior do que no caso de cilindro isolado, tanto na região entre os cilindros quanto na região a jusante do segundo cilindro. Para espaçamentos maiores que o crítico, há a formação de estruturas tridimensionais na região entre os corpos e a coerência nesse local se aproxima daquela encontrada no caso de cilindro isolado, enquanto que na esteira a jusante do segundo corpo ela é menor do que o caso de cilindro isolado. Estas hipóteses são suportadas tanto pelas medições quantitativas realizadas com os anemômetros quanto qualitativamente pelas visualizações realizadas no túnel de água com bolhas de hidrogênio.

Mittal; Kumar; Raghuvanshi (1997) empregaram o método de elementos finitos bidimensional para estudar o escoamento ao redor de cilindros alinhados com espaçamentos 2,5 e 5,5 diâmetros para $Re=100$ e $Re=1000$. Para o valor mais alto de Re , eles encontram discrepâncias com resultados experimentais, no entanto os valores das grandezas medidas se assemelham aos fornecidos por simulações bidimensionais em outros trabalhos, evidenciando que esta diferença se deve à presença de tridimensionalidades importantes no escoamento. Dentre as conclusões interessantes deste trabalho, estão o fato de que para $Re=100$ e espaçamento $2,5D$ não há emissão de vórtices e a solução encontrada é estacionária. Isto denota a forte influência da presença de um corpo adicional na região da esteira próxima, até mesmo no que se refere à primeira instabilidade, bidimensional, do escoamento. Para todos os outros casos a emissão de vórtices acontece, com notável maior desorganização nos casos com $Re=1000$.

Meneghini et al. (2001) realizaram um estudo numérico do fenômeno de interferência no escoamento ao redor de pares de cilindros posicionados alinhados com a corrente e lado a lado. As simulações neste trabalho foram bidimensionais e utilizaram o método de elementos finitos, com avanço no tempo feito através de um método de passos parciais que, através da divisão do avanço no tempo em passos nos quais cada um dos termos das equações de Navier-Stokes é considerado separadamente, desacopla a pressão da velocidade. As simulações foram feitas para diversos espaçamentos e para números de Reynolds 100 e 200. No que tange às simulações com cilindros alinhados, que compreendem as situações de interesse deste trabalho, os cálculos conseguiram reproduzir em boa medida as observações feitas por Zdravkovich (1987), principalmente no que se refere ao fenômeno de inversão de arrasto. Os contornos de vorticidade e pressão fornecidos pelos cálculos computacionais são de grande valia para uma melhor compreensão dos fenômenos físicos envolvidos. Outras observações interessantes também são feitas no trabalho, como a diferença significativa do comprimento de formação entre os casos de pequeno espaçamento e o caso de cilindro isolado, e também a diferença existente entre os números de Strouhal observados para o cilindro isolado e para pares de cilindros. Entretanto, o fato das simulações serem bidimensionais limitou

consideravelmente a possibilidade de que uma análise quantitativa ou mesmo qualitativa mais acurada fosse feita.

Lin; Yang; Rockwell (2002) empregam a técnica de PIV de alta densidade de partículas para caracterizar padrões instantâneos e médios do campo de velocidades, vorticidade e tensão de Reynolds no escoamento ao redor de dois cilindros alinhados. Os espaçamentos analisados são 1,15; 1,5; 2,0 e 5,1 diâmetros e o número de Reynolds é 10.000. O estudo é focado na região entre os cilindros e na esteira próxima do cilindro a jusante, e os campos de velocidade medidos estão no plano x - y , perpendicular ao eixo dos cilindros. Para os espaçamentos $1,5D$ e $2,0D$, concentrações de vorticidade de pequena escala estão presentes nas camadas cisalhantes vindas no primeiro cilindro. Estas concentrações atingem o segundo corpo e influenciam diretamente a esteira deste último. Na região entre os cilindros, há regiões de recirculação cuja configuração alterna entre simétrica e assimétrica. Na esteira próxima, a forma de emissão de vórtices, bem como as estruturas do escoamento médio, são bastante distintas do caso de cilindro isolado. A largura da esteira é substancialmente menor e as magnitudes de pico das tensões de Reynolds são significativamente atenuadas. Para o espaçamento $5,1D$ há a formação completa de vórtices de von Kármán na região entre os corpos. A esteira neste caso é mais larga e as tensões de Reynolds são maiores, quando comparado ao escoamento ao redor de um só cilindro. É um estudo bastante interessante, na medida em que analisa detalhadamente aspectos abordados apenas superficialmente em publicações anteriores.

Mahbub Alam et al. (2003) realizaram ensaios em túnel de vento para medir características aerodinâmicas do escoamento ao redor de cilindros alinhados com $Re=6,5 \times 10^4$. As características investigadas foram: número de Strouhal, flutuação e diferença de fase da sustentação, média e flutuação do arrasto, média e flutuação da distribuição de pressão, ponto de aderência da camada cisalhante no cilindro a jusante e pressão média neste ponto. Para isso, utilizaram células de carga, transdutores de pressão e técnicas de filme de óleo da superfície. O estudo confirmou a forte dependência do arrasto no cilindro a jusante em relação ao espaçamento, principalmente antes do espaçamento crítico, cujo valor encontrado no estudo foi $3,0D$. Os autores também demonstram existir uma relação clara entre as forças

atuantes no cilindro a jusante e o ponto de aderência da camada cisalhante. Por fim, conclui-se também que, para espaçamentos maiores que o crítico, a flutuação da sustentação atuando no cilindro a montante é estritamente influenciada pela fase de emissão de vórtices no cilindro a jusante. Este trabalho veio contribuir com dados e análises extras ao problema abordado, através do uso de técnicas não largamente utilizadas nos trabalhos disponíveis na literatura até então.

2.3 O método de elementos espectrais

Este item se refere à metodologia computacional utilizada neste trabalho. Desse modo, as publicações aqui colocadas foram selecionadas por abordarem aspectos referentes à teoria e implementação do método. Trabalhos referentes à aplicação do mesmo ao escoamento ao redor de cilindros podem ser encontrados na seção 2.1.

Patera (1984) apresenta pela primeira vez o método de elementos espectrais aplicado à dinâmica dos fluidos computacional em uma forma similar à utilizada neste trabalho. Esta publicação serve como base para a monografia de Karniadakis; Sherwin (1999), que traz os conceitos que são utilizados na implementação computacional do método de elementos espectrais que gerou os resultados presentes neste texto. Patera (1984) propõe um método numérico que combina a generalidade do método de elementos finitos com a precisão das técnicas espectrais, e o utiliza na solução numérica das equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível. O autor denomina o método utilizado de método de elementos espectrais (SEM). É apresentada uma análise do comportamento do método quando aplicado a uma equação do tipo Helmholtz (difusiva), uma equação de onda (convectiva) e uma equação de advecção-difusão, de forma similar àquela da equação de Navier-Stokes. Para ilustrar a viabilidade do método, o problema de um escoamento bidimensional laminar em um canal com expansão é resolvido, comparando-se os resultados com dados experimentais. O esquema de avanço no tempo e o tratamento do termo convectivo não-linear são detalhados. A idéia geral desses esquemas é mantida em diversos artigos posteriores e é utilizada inclusive no presente trabalho. Demonstra-se que o método tem uma precisão bastante satisfatória, bem como convergência global espectral. Este primeiro trabalho constitui uma primeira demonstração da

viabilidade e das características gerais do método, deixando claro que se tratava de uma abordagem promissora.

Em Korczak; Patera (1986) o desenvolvimento do método é continuado. São introduzidos elementos isoparamétricos, que permitem a solução das equações de Navier-Stokes em geometrias curvas. A eficiência da técnica é assegurada através do tratamento explícito do operador convectivo não-linear e do uso da técnica de condensação estática para resolver as equações elípticas que resultam do tratamento implícito dos termos do problema de Stokes. O esquema de avanço no tempo é aprimorado, mantendo as idéias básicas introduzidas em Patera (1984). Para ilustrar a utilização do método, são relatados os resultados obtidos em simulações do escoamento bidimensional entre cilindros excêntricos com rotação relativa não nula.

Karniadakis; Bullister; Patera (1986) apresentam mais aplicações do SEM em simulações de escoamentos incompressíveis. Utilizando os conceitos apresentados em Korczak; Patera (1986), resolvem escoamentos axissimétricos, escoamento ao redor de um cilindro e escoamentos tridimensionais. Um outro conceito fundamental para a eficiência do método é delineado, a chamada soma fatorada. Este trabalho constituiu na época da sua publicação mais uma evidência da viabilidade do uso do SEM em dinâmica dos fluidos computacional.

Karniadakis (1990) propõe um método misto – elementos espectrais e espectral puro (Fourier) – para simular escoamentos turbulentos em domínios com uma direção homogênea, ou seja, domínios tridimensionais que possuem uma direção na qual não há um comprimento característico. Problemas com essa particularidade são tipicamente aqueles cuja geometria tridimensional pode ser gerada através da extrusão de uma geometria bidimensional. Assumindo que a direção homogênea seja a direção z , a idéia é empregar uma discretização do tipo elementos espectrais em diversos planos x - y e usar uma expansão espectral do tipo Fourier ao longo de z . Uma característica interessante dessa abordagem é que ela oferece naturalmente a base para implementações paralelas, já que as equações de continuidade e difusão podem ser resolvidas separadamente em cada plano, enquanto que o acoplamento entre as diferentes seções fica restrita ao tratamento do termo não-linear, que é feito de maneira explícita. Um outro avanço descrito neste trabalho é a definição das bases utilizadas na discretização de elementos espectrais em termos

de polinômios de Legendre, de forma que eficientes quadraturas do tipo Gauss associadas com operações de integração podem ser empregadas. Além disso, procedimentos iterativos de inversão de matrizes (gradiente conjugado e *multigrid*) são utilizados. As equações governantes são postas numa forma apropriada tanto para simulação direta (DNS) quanto para simulação com filtros LES, permitindo, portanto, uma implementação unificada. Por fim, escoamentos em canal com cavidade e escoamentos em superfícies com nervuras são apresentados como exemplos da aplicação do método a casos turbulentos.

Karniadakis; Israeli; Orszag (1991) descrevem uma nova formulação para a pressão em métodos de avanço no tempo utilizados para a resolução da equação de Navier-Stokes. Nela, condições de contorno para a pressão de alta ordem no tempo são introduzidas, de forma que o efeito de camadas limites numéricas produzidas por estes métodos fica minimizado. Com este esquema, consegue-se uma resolução temporal de alta ordem sem problemas de estabilidade. O método introduzido neste artigo é utilizado neste trabalho e sua descrição pode ser encontrada no apêndice B.1.

Henderson; Karniadakis (1995) apresentam um algoritmo para a resolução de escoamentos tridimensionais utilizando o método de elementos espectrais aplicado a malhas de elementos quadriláteros não-conformes. A decomposição modal na direção do eixo também é utilizada aqui. Um dos casos de simulação apresentados é o escoamento ao redor de um cilindro isolado para número de Reynolds igual a 1000. Os autores detalham sua estratégia de refinamento da malha, que consiste em inicialmente refinar a malha bidimensional, e depois estudar a sensibilidade quanto ao comprimento periódico simulado e ao número de modos utilizado na direção do eixo. Os resultados apresentados mostram que apenas o refinamento bidimensional não é capaz de produzir resultados concordantes com dados experimentais. No entanto, cabe salientar que o comprimento então simulado, 2π diâmetros, e o número de modos utilizados, 16, são pequenos para capturar características importantes neste escoamento, onde fisicamente já se tem uma intensidade grande de turbulência na esteira. Ao refinar o domínio na direção do eixo, os autores concluem que, para o caso estudado, um comprimento de no mínimo 8π diâmetros é necessário para que os resultados computacionais se aproximem qualitativamente de visualizações experimentais. Contudo, quando os resultados quantitativos são comparados,

observa-se que apesar do número de Strouhal ter boa aderência, os coeficientes de força apresentam diferença da ordem de 20%. Mais uma vez, acredita-se que o uso de poucos modos na direção do eixo possa ser a principal causa desta discrepância. A discretização mais fina utilizada foi de 128 modos para um comprimento de 8π . O próprio Henderson escreveria mais tarde num artigo (Henderson, 1997) que o número de modos que deve ser utilizado para capturar as estruturas significativas de um escoamento turbulento é da ordem de $L.Re^{1/2}$, o que para número de Reynolds igual a 1000 e um comprimento de 8π resulta em cerca de 795 modos.

Warburton; Sherwin; Karniadakis (1999) apresentam uma descrição de novas bases adequadas para discretizações do tipo elementos espectrais em malhas bidimensionais híbridas, consistindo de triângulos e quadriláteros. Todas as bases apresentadas são do tipo C^0 e são utilizadas tanto expansões modais como expansões mistas modais/nodais. Além disso, o conceito de decomposição contorno-interior é introduzido. Polinômios gerais de Jacobi de diversos pesos são empregados com o fim de acomodar quadraturas numéricas exatas automaticamente, produtos tensoriais generalizados e ordens de expansão variáveis em cada elemento. As propriedades de aproximação das bases são analisadas no contexto dos operadores de projeção, convecção linear e difusão. Por fim, é feita uma comparação entre as bases apresentadas. Esta é a publicação que introduz as bases utilizadas nas simulações presentes neste trabalho.

Em uma monografia, Karniadakis; Sherwin (1999) apresentam em detalhes todos os aspectos matemáticos e computacionais do método de elementos espectrais aplicado à dinâmica de fluidos computacional. Esta monografia serve como base para a implementação computacional utilizada neste trabalho, e a descrição do método que consta no apêndice A também é fundamentada nela.

3 O FENÔMENO DE EMISSÃO E DESPRENDIMENTO DE VÓRTICES EM CORPOS CILÍNDRICOS

Neste capítulo serão abordados aspectos do escoamento ao redor de cilindros que concernem a este trabalho. Usando como guias gerais a monografia de Zdravkovich (1997) e a revisão de Williamson (1996a), serão dispostas idéias gerais sobre regiões, transições e regimes do escoamento, bem como as forças dele decorrentes e grandezas adimensionais de interesse. Em seguida serão vistos com mais detalhes o regime periódico laminar e a transição na esteira, estados estes que são foco principal do presente trabalho. Por fim, serão expostos conceitos sobre o escoamento ao redor de cilindros alinhados e o fenômeno de interferência que aparece neste escoamento.

3.1 Características gerais do escoamento ao redor de um cilindro

Nesta seção serão introduzidos conceitos relevantes para o estudo do escoamento ao redor de cilindros. Primeiramente serão detalhadas as diferentes regiões de escoamento perturbado. Em seguida, os regimes de escoamento e transições que ocorrem com a variação do número de Reynolds serão descritos. Logo após serão apresentados dados relativos às forças impostas ao corpo pelo escoamento e por fim números adimensionais relevantes serão introduzidos.

3.1.1 Regiões de escoamento perturbado

As regiões de escoamento perturbado compreendem as partes do domínio fluido que são afetadas pela presença do corpo. Essas regiões são caracterizadas pela variação da velocidade local, em módulo e/ou magnitude, em regime permanente e/ou transitório. A média temporal desta velocidade local pode ser maior, igual ou menor do que a velocidade da corrente incidente. A Figura 3.1 mostra a divisão do campo perturbado em quatro regiões:

- (i) Uma região estreita de escoamento retardado;

- (ii) Duas camadas limite na superfície do cilindro;
- (iii) Duas regiões laterais de fluido deslocado e acelerado;
- (iv) Uma região a jusante, com escoamento separado, denominada região de esteira.

A região de escoamento retardado não foi muito explorada na literatura até agora, embora aí aconteçam grandes flutuações de velocidade.

As camadas limite ao redor do cilindro na sua parte inicial são sujeitas a um gradiente de pressão favorável e em seguida há uma pequena região onde o gradiente de pressão é adverso, o que acaba provocando a separação destas camadas. As camadas limite separadas continuam a se desenvolver a jusante como camadas cisalhantes livres e são elas que delimitam inicialmente a região de esteira próxima.

As regiões laterais de fluido deslocado também não foram bastante exploradas ainda. O fluido presente nesta região adentra vigorosamente na região de esteira, devido à baixa pressão nesta última. A extensão desta região de escoamento acelerado é fortemente afetada pela proximidade das paredes dos aparatos experimentais, tais como túneis de vento e canais de água, resultando num efeito conhecido como bloqueio.

Figura 3.1 – Regiões do escoamento perturbado.

Finalmente, a região de esteira é a parte do escoamento perturbado que recebeu até hoje a maior parcela da atenção devotada pelos pesquisadores. Grandes

estruturas são formadas na porção desta região mais próxima ao corpo, denominada de região de esteira próxima, e são convectadas ao longo da esteira, ao mesmo tempo em que decaem de intensidade por efeitos de difusão. A forma e o decaimento de tais estruturas dependem do estado do escoamento nesta região, que pode ser laminar, transicional ou turbulento.

3.1.2 Regimes de escoamento e transições

O parâmetro governante do escoamento incompressível ao redor de um corpo cilíndrico é o número de Reynolds, Re , definido pela razão:

$$Re = \frac{\rho U_{\infty} D}{\mu}$$

onde ρ é a densidade do fluido, U_{∞} é a velocidade do escoamento incidente ao longe, D é o diâmetro do cilindro e μ é a viscosidade dinâmica do fluido. Com o aumento de Re , o escoamento passa por sucessivas transições em diferentes regiões do escoamento perturbado. A Figura 3.2 mostra esquematicamente as transições que ocorrem em três regiões: esteira (TrW), camadas cisalhantes (TrSL) e camadas limite (TrBL).

Cada transição é sensível a pequenas perturbações de várias espécies. Estas perturbações podem fazer com que as transições se iniciem em um Re menor e muitas vezes podem modificar significativamente as estruturas resultantes. Isto significa que Re é o único parâmetro governante apenas se as perturbações forem inexistentes ou realmente desprezíveis.

A primeira transição TrW esboçada na Figura 3.2 (a) ocorre na esteira para $Re \simeq 2 \cdot 10^2$. A turbulência gradualmente se desenvolve na região próxima ao cilindro e se espalha ao longo da esteira, mas as camadas cisalhantes que limitam a região de esteira próxima permanecem laminares.

A segunda transição TrSL na Figura 3.2 (b) acontece nas camadas cisalhantes. O foco de transição se move ao longo dessas camadas na direção do ponto de separação, afetando o comprimento e a largura da esteira próxima.

Figura 3.2 – Transições nas regiões perturbadas: (a) TrW, (b) TrSL, (c) TrBL (BL = camada limite, L = laminar, T = turbulento, Tr = Transição, S = separação). Extraído de Zdravkovich (1997).

A terceira transição atinge as camadas limite no ponto de separação, como ilustrado na Figura 3.2 (c). É esta a transição responsável pela crise do arrasto, que é uma diminuição súbita do arrasto que acontece no escoamento ao redor de cilindros com $Re \simeq 10^5$. A transição prossegue até que a camada limite seja completamente turbulenta antes do ponto de separação.

Os focos de transição nas camadas limite continuam a se mover em direção ao ponto de estagnação com o aumento de Re , conforme esquematizado na Figura 3.2 (d). No limite superior da TrBL, a transição atingiria a região retardada e este é o final da terceira e última transição, dado que todas as regiões do escoamento são completamente turbulentas.

Discorrer-se-á agora sobre os regimes de escoamento delimitados pelas transições acima mencionadas. Tendo em mente que é impossível isolar totalmente um experimento de perturbações, ao se verificar os Re críticos reportados na literatura encontra-se uma variação significativa, pois os experimentos realizados são diferentes em cada caso. Assim, as fronteiras de cada regime serão dadas em faixas de Re .

O estado do escoamento pode ser completamente laminar L, qualquer uma das três transições TrW, TrSL, e TrBL, ou completamente turbulento T. E cada estado deste pode ser novamente dividido em subclasses de acordo com variações na estrutura do escoamento. Cada um desses estados será analisado agora:

a) Escoamento completamente laminar L

Este regime pode ser subdividido em outros três estados:

L1: escoamento altamente viscoso sem separação (creeping flow):

$$0 < Re < 4 \text{ a } 5$$

L2: separação com recirculação estacionária: $4 \text{ a } 5 < Re < 30 \text{ a } 48$

L3: regime laminar periódico: $30 \text{ a } 48 < Re < 180 \text{ a } 200$

No escoamento altamente viscoso as camadas limite não se separam da superfície do cilindro em nenhum ponto, como pode-se observar na Figura 3.3. O regime é estacionário e não há a formação de uma esteira visível.

Figura 3.3 – Escoamento ao redor de cilindro sem separação. Extraído de van Dyke (1982).

A separação se inicia em $Re = 4 \text{ a } 5$, quando bolhas de recirculação estacionárias e simétricas são formadas, como se pode observar na Figura 3.4. As camadas cisalhantes livres se encontram na extremidade jusante desta bolha, no chamado ponto de confluência. A velocidade reversa ao longo do eixo de simetria é usualmente uma ordem de magnitude menor do que a velocidade ao longe U_∞ .

As bolhas de recirculação se alongam com o aumento de Re e a esteira acaba por ficar instável para $Re=30 \text{ a } 48$. A partir daí, uma oscilação harmônica pode ser observada ao longe, conforme observado na Figura 3.5 (a). A amplitude dessa oscilação aumenta com Re e para valores maiores que 45-65 as camadas cisalhantes se enrolam formando cristas e vales como visto na Figura 3.5 (b). Ao final deste

estado, uma carreira de vórtices laminares pode ser observada (Figura 3.5 (c)). Esta esteira de vórtices é chamada esteira de von Kármán ou esteira de Kármán-Bénard.

Figura 3.4 – Escoamento ao redor de um cilindro, $Re=26$. Extraída de van Dyke (1982).

(a)

(b)

(c)

Figura 3.5 – Regime laminar periódico – (a) $Re=54$ (b) $Re=65$ (c) $Re=102$. Extraído e adaptado de Zdravkovich (1997).

b) Transição na esteira TrW

Elevando-se Re até aproximadamente 180, a esteira deixa de ser bidimensional e começa a apresentar sinais de turbulência. Este é o regime mais profundamente investigado neste trabalho. Fenômenos como deslocamentos de vórtices e as transições para os chamados modos tridimensionais A e B acontecem,

afetando também a organização da esteira bidimensional. Esses fenômenos e transições, responsáveis por uma descontinuidade observada na curva $St \times Re$, são detalhados na seção 3.3. Na Figura 3.6, podem ser observadas imagens de esteiras transicionais. Note que para Re mais baixos a posição onde ocorre a transição está localizada mais a jusante e com o aumento de Re este ponto se aproxima do cilindro.

Figura 3.6 – Transição na esteira. (a) $Re=190$ (b) $Re=340$. Extraído e adaptado de Zdravkovich (1997).

c) Transição nas camadas cisalhantes TrSL

A segunda transição acontece ao longo das camadas cisalhantes livres enquanto as camadas limite permanecem totalmente laminares. Este regime é freqüentemente chamado na literatura de regime subcrítico, sendo o regime mais comumente investigado em trabalhos experimentais. Esta transição pode ser dividida em três fases:

TrSL1: desenvolvimento de ondas de transição: $350-400 < Re < 10^3-2 \cdot 10^3$

TrSL2: formação de turbilhões de transição: $10^3-2 \cdot 10^3 < Re < 2 \cdot 10^4-4 \cdot 10^4$

TrSL3: mudança rápida para turbulência: $2 \cdot 10^4-4 \cdot 10^4 < Re < 1 \cdot 10^5-2 \cdot 10^5$

As ondas de turbulência aparecem como flutuações das camadas cisalhantes na Figura 3.7 (a). Com o aumento de Re essas ondas se enrolam em turbilhões, como observado na Figura 3.7 (b). Finalmente uma mudança repentina para a turbulência ocorre nas camadas cisalhantes próximo à superfície do cilindro e a formação dos turbilhões acaba por acontecer perto da face jusante do cilindro, Figura 3.7 (c).

**Figura 3.7 – Transição nas camadas cisalhantes (a) $Re=2000$ (b) $Re=8000$ (c) $Re=1,1 \times 10^5$.
Extraído e adaptado de Zdravkovich (1997).**

d) Transição nas camadas limite TrBL

Esta transição já foi objeto de investigação de muitos estudos, principalmente porque é nela que ocorre uma repentina redução do arrasto, conhecida por crise do arrasto. A TrBL pode ser dividida em cinco fases:

TrBL0: regime pré-crítico: $1.10^5 - 2.10^5 < Re < 3.10^5 - 3,4.10^5$

TrBL1: regime de uma bolha: $3.10^5 - 3,4.10^5 < Re < 3,8.10^5 - 4.10^5$

TrBL2: regime de duas bolhas: $3,8.10^5 - 4.10^5 < Re < 5.10^5 - 1.10^6$

TrBL3: regime supercrítico: $5.10^5 - 1.10^6 < Re < 3,5.10^6 - 6.10^6$

TrBL4: regime pós-crítico: $3,5.10^6 - 6.10^6 < Re < \text{não conhecido}$

O regime pré-crítico é caracterizado por focos de turbulência nas linhas de separação, advindos das camadas cisalhantes. A tridimensionalidade inerente do início da transição perturba fortemente a esteira próxima e faz com que os vórtices se formem numa região mais distante do cilindro. Isto resulta numa diminuição inicial do arrasto, enquanto que a emissão de vórtices continua clara.

O regime TrBL0 termina abruptamente em um certo Re com uma queda descontínua do arrasto e um salto no número de Strouhal (para a definição de número

de Strouhal ver seção 3.1.4). Neste estado, se observa uma distribuição assimétrica de pressão na superfície do cilindro, pois a camada cisalhante de um lado do cilindro tem energia cinética turbulenta suficiente para aderir novamente na superfície do corpo. Esta fina e fechada região separada é chamada de bolha. A separação turbulenta é consideravelmente adiada, tornando a esteira mais fina.

O regime assimétrico de uma bolha, TrBL1, se encerra em um Re maior, quando uma outra queda descontínua no arrasto e um outro salto em St são observados, devido à formação de uma outra bolha, no outro lado do cilindro. O regime simétrico de duas bolhas, TrBL2, representa uma combinação intrincada de separação laminar, transição, re-aderência e separação turbulenta das camadas limite em ambos os lados do cilindro. Os regimes TrBL1 e TrBL2 são bastante sensíveis a perturbações e podem ser eliminados por rugosidade e/ou turbulência na corrente livre suficientemente elevados.

Um aumento subsequente de Re causa a transição na linha de separação laminar primária de uma maneira irregular. Desse modo, as bolhas ficam fragmentadas ao longo do eixo do cilindro e a emissão periódica de vórtices desaparece. É o chamado regime supercrítico.

Os vórtices periódicos reaparecem para um Re ainda mais alto, quando as camadas limite são turbulentas antes da separação. Este regime é chamado de pós-crítico (ou transcrito) e é caracterizado pelo fato da transição nas camadas limite estar localizada em algum ponto entre as linhas de estagnação e separação. Com o aumento de Re , este ponto avança assintoticamente em direção à linha de estagnação e por isso o limite superior de TrBL4 é difícil de definir.

e) Escoamento completamente turbulento T

Este estado é atingido quanto todas as regiões de escoamento perturbado são turbulentas. O Re de início deste regime não é conhecido e o seu final teórico é $Re \rightarrow \infty$, sendo este regime o último estado de escoamento. Espera-se que, com o escoamento no regime T, o arrasto e o número de Strouhal associados sejam invariantes, dado que os parâmetros de influência sejam mantidos suficientemente pequenos. No entanto, isto é difícil de se conseguir, porque efeitos de

compressibilidade no ar e cavitação na água passam a serem importantes num escoamento de Re tão alto.

3.1.3 Variação das forças fluido-dinâmicas

Os regimes de escoamento descritos na seção anterior determinam a magnitude, direção e variação temporal das forças fluido-dinâmicas que atuam sobre o cilindro. Estas forças dependem da pressão dinâmica $\frac{1}{2}\rho U_\infty^2$ e da área projetada do cilindro exposta à corrente livre. As forças são adimensionalizadas da seguinte forma:

$$C_F = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 LD} \quad (3.1)$$

onde F é a força em questão e L o comprimento do cilindro. Usualmente a força resultante no plano x - y é decomposta em duas parcelas, o arrasto, que é a força na direção da corrente livre, e a sustentação, que é a força perpendicular à corrente livre e ao eixo do cilindro. Estas forças têm seus coeficientes atinentes: C_D é o coeficiente de arrasto e C_L é o coeficiente de sustentação e são calculados substituindo respectivamente as forças de arrasto e sustentação na eq. (3.1).

Para efeitos de análise, estes coeficientes de força são decompostos ainda em uma componente média ($\overline{C_D}$, $\overline{C_L}$) mais uma flutuação (C_D' , C_L'). Além disso, a parcela do arrasto produzida por tensões viscosas na parede tem como coeficiente C_{Df} e a parcela do arrasto produzida por efeitos de pressão tem como coeficiente C_{Dp} . Assim:

$$C_D = C_{Df} + C_{Dp}$$

A Figura 3.8 mostra a variação dos coeficientes de força com relação a Re . Nesta figura a barra foi omitida dos símbolos referentes à média dos coeficientes e as barras verticais representam a variação esperada destes coeficientes medidas experimentalmente.

Note que o arrasto viscoso é significativo no estado laminar L , mas torna-se desprezível a partir do final do estado $TrSL$. A variação de C_{Dp} está relacionada diretamente aos regimes de escoamento. Os três mínimos desta grandeza presentes no gráfico correspondem:

- (i) à presença de uma esteira próxima alongada, permanente e fechada no final de L2;
- (ii) ao maior comprimento de formação de vórtices observado entre TrSL1 e TrSL2;
- (iii) às bolhas de separação em ambos os lados do cilindro em TrBL2.

Figura 3.8 – Variação dos coeficientes de força em relação a Re . Extraído de Zdravkovich (1997).

A queda descontínua em $\overline{C_D}$ e ao aparecimento de um valor não nulo de $\overline{C_L}$ ocorrem no começo do regime TrBL1, de bolha única. Em seguida ocorrem quedas descontínuas de $\overline{C_D}$ e $\overline{C_L}$, dado o início do regime de duas bolhas TrBL2. Há uma considerável variação do $\overline{C_D}$ local ao longo do eixo no regime supercrítico. A parte inferior da curva de $\overline{C_D}$ corresponde à parte do eixo onde as bolhas estão preservadas, e a parte superior está relacionada à máxima fragmentação de bolhas. Os valores de dois coeficientes de arrasto médio locais podem diferir em até 50% ao longo do eixo.

3.1.4 Variação do número de Strouhal e do coeficiente de pressão de base

Duas outras grandezas adimensionais de suma importância no estudo do escoamento ao redor de cilindros são o número de Strouhal (St) e o coeficiente de

pressão de base (C_{pb}). A primeira é a frequência adimensional de emissão de vórtices, dada por:

$$St = \frac{fD}{U_\infty}$$

onde f é a frequência de emissão de vórtices dimensional, em Hz. A variação de St com Re está representada em forma de gráfico na Figura 3.9. Nela vê-se que boa parte das transições podem ser identificadas por descontinuidades na curva ou na derivada da curva. O número de Strouhal tem elevada importância prática por estar ligado diretamente ao carregamento dinâmico sofrido pela estrutura, que pode levar à falha por fadiga.

Figura 3.9 – Curva do número de Strouhal em função de $Re^{-1/2}$. Reproduzido de Fey; König; Eckelmann (1998).

Já C_{pb} é definido por:

$$C_{pb} = \frac{p_b - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2}$$

onde p_b é a pressão no ponto da superfície do cilindro a 180° do ponto de estagnação primário, ou seja, é o ponto localizado na extremidade jusante do cilindro, e p_∞ é a pressão ao longe. A curva $C_{pb} \times Re$ está delineada na Figura 3.10. Do mesmo modo que na curva $St \times Re$, as transições podem ser identificadas por descontinuidades da curva ou da sua derivada. O coeficiente de pressão de base é importante principalmente porque, além de ser uma grandeza de fácil medição, está intimamente

relacionada com a força de arrasto exercida sobre o cilindro e com a física do que acontece na esteira próxima.

Figura 3.10 – Gráfico do coeficiente de pressão de base em função de $\log_{10} Re$. Reproduzido de Williamson (1996a).

3.2 A esteira bidimensional laminar

Como já descrito na seção anterior, o escoamento incompressível ao redor de um cilindro é simétrico e atinge um regime estacionário até $Re \simeq 49$ (regimes L1 e L2). Após esse limiar, a região de recirculação experimenta uma instabilidade e em seguida nota-se que vórtices passam a serem emitidos da esteira próxima do corpo. Estes vórtices são originados nas camadas cisalhantes superior e inferior do cilindro e são emitidos de forma alternada. Passado um dado espaço de tempo, observa-se uma esteira de vórtices alternados, chamada de esteira de von Kármán. Após esta instabilidade o sistema não atinge mais um regime estacionário. Um exemplo de esteira de von Kármán para $Re=100$ está mostrado na Figura 3.11.

Figura 3.11 – Esteira laminar, $Re=100$. Extraído e adaptado de van Dyke (1982).

Podem-se observar três características marcantes:

- a) Os vórtices não são emitidos do cilindro, mas se iniciam no final na esteira próxima;

Esta característica pode ser observada na Figura 3.11 e ainda mais claramente na Figura 3.12. A região de esteira próxima é também chamada de *região de formação* e a distância entre o centro do cilindro e o final desta região é denominada *comprimento de formação*. O fim da região de formação é onde fluido vindo de fora da esteira cruza o eixo da mesma e pode ser identificado por um máximo no valor RMS da velocidade na direção x , quando essas velocidades em diversos pontos ao longo da linha central da esteira são aferidas.

Figura 3.12 – Esteira laminar, $Re=105$. Extraído e adaptado de van Dyke (1982).

Um modelo bastante aceito para explicar o mecanismo conforme o qual os vórtices são emitidos é o proposto por Gerrard (1966). Segundo ele, fluido vindo de um dos lados da esteira cruza seu eixo pela ação da velocidade induzida pelo vórtice em crescimento do outro lado da esteira. A Figura 3.13 ilustra esquematicamente este mecanismo através da representação das camadas cisalhantes e dos caminhos possíveis para o fluido vindo da parte inferior da esteira. Um vórtice cresce devido à circulação fornecida pela camada cisalhante à qual ele está conectado. Em certo instante, o vórtice que está crescendo torna-se suficientemente intenso para atrair a

camada cisalhante oposta. Parte do fluido vinda dessa camada se junta ao vórtice em crescimento (*a*), outra parte se dirige à camada cisalhante (*b*) e uma última porção adentra novamente na região de formação (*c*).

Figura 3.13 – Modelo do mecanismo de formação da esteira de vórtices, segundo Gerrard (1966). Extraído de Meneghini (2002).

A parcela do escoamento que segue o caminho *a* possui vorticidade de sinal contrário àquela do vórtice em crescimento, colaborando assim para a diminuição da circulação deste último. A parcela que segue o caminho *b* atinge a camada cisalhante oposta, que também tem circulação contrária, rompendo-a e desprendendo o vórtice. Por fim, a porção de fluido que segue a trajetória *c* contribui para a formação do vórtice seguinte.

Seguindo o modelo apresentado, conclui-se que o comprimento de formação é determinado pelo balanço entre as porções de fluido que seguem os caminhos *b* e *c*. O escoamento no caminho *b* é governado principalmente pela energia cinética da camada cisalhante. Com o aumento de Re , aumenta a energia e a circulação carregada pelo escoamento *b* que, dessa forma, rompe mais facilmente a camada cisalhante oposta. Com essa ruptura acontecendo mais rapidamente, a circulação total carregada pelo escoamento *c* num ciclo diminui e como resultado final, a região de formação é reduzida na medida em que se aumenta o Re .

De acordo com o mecanismo de formação e desprendimento dos vórtices descrito, podem ser identificados dois fatores determinantes da frequência de emissão. O primeiro deles diz respeito à proximidade das camadas cisalhantes com circulações opostas. Quanto mais próximas, mais fácil a interação e, portanto, o período de emissão é encurtado. O segundo é a intensidade da circulação na camada

cisalhante quando se dá esta interação. Quanto maior a circulação, mais facilmente a camada oposta será rompida, resultando numa maior frequência de St .

b) Os vórtices sofrem difusão à medida que são convectados para jusante;

Em visualizações do escoamento, costuma-se verificar que, depois de desprendidos, os vórtices continuam a se enrolar até atingirem um certo padrão que permanece congelado. Esta observação pode levar a uma conclusão errada, de que não há difusão da vorticidade ao longo da esteira. Esse fenômeno foi analisado em detalhe por Cimbala; Nagib; Roshko (1988), onde se conclui que a fumaça representa um padrão integrado ao longo do caminho percorrido, pois a difusão da fumaça é muito menor do que a difusão de vorticidade. Este argumento é suportado por medições com anemômetros de fio quente e por visualizações com o emissor de fumaça colocado em diferentes posições da esteira, como ilustrado na Figura 3.14. A Figura 3.15 traz o comprimento do centro do até o ponto onde a presença da esteira pode ser percebida, em função de Re .

Figura 3.14 – Visualização da esteira com colocação do emissor de fumaça em várias posições da esteira, $Re=90$. Reproduzido de Cimbala; Nagib; Roshko (1988).

Figura 3.15 - Comprimento da esteira em função de Reynolds. Reproduzido de Honji (1986).

- c) O alargamento da esteira acontece pela entrada de fluido pelas laterais, onde o escoamento é irrotacional.

Este fluxo pode ser observado na Figura 3.16. Nela, vê-se uma linha de emissão fumaça deslocada lateralmente do cilindro. Observa-se que parte do fluido encontrado nessa região adentra a esteira, devido à baixa pressão induzida pelos vórtices.

Figura 3.16 – Entrada de fluido pela lateral da esteira laminar, $Re=100$. Extraído e adaptado de van Dyke (1982).

O escoamento no regime L3 para um cilindro de comprimento infinito é fundamentalmente laminar e bidimensional. Entretanto, de acordo com as condições nas extremidades de um cilindro finito, acontece a emissão oblíqua de vórtices, onde se observa uma inclinação do tubo de vórtices emitido em relação ao eixo do cilindro. A emissão paralela é conseguida através de diversos métodos, como o uso de placas inclinadas nas extremidades (Williamson, 1989), uso de cilindros com diâmetro maior nas extremidades (Eisenlohr; Eckelmann, 1989), uso de cilindros colocados transversalmente próximos à extremidade (Hammache; Gharib, 1989) ou introdução de sucção (Miller; Williamson, 1994). Na Figura 3.17, observa-se a

comparação entre casos de emissão paralela e oblíqua, para o mesmo Re . O escoamento é de baixo para cima e o eixo do cilindro é paralelo ao plano da imagem. Note a presença de placas planas inclinadas na extremidade do cilindro no caso de emissão paralela.

Figura 3.17 – Vista das estruturas tridimensionais do escoamento laminar (a) Emissão oblíqua, do tipo “chevron”, $Re=85$; (b) Emissão paralela, $Re=110$. Reproduzido de Williamson (1989).

Um outro fenômeno interessante que acontece no regime L3 é a formação de uma esteira secundária numa região distante do cilindro. Ela aparece somente quando a emissão de vórtices é do tipo oblíqua, surgindo numa região onde a esteira primária já está praticamente inteiramente difundida e dando origem a uma curiosa estrutura tridimensional, como observado na Figura 3.18. A causa do aparecimento desta estrutura é uma instabilidade hidrodinâmica, resultante da interação entre as ondas de emissão oblíquas vindas de montante e ondas bidimensionais de grande escala na esteira distante (Williamson; Prasad, 1993a). Estas ondas bidimensionais são disparadas por perturbações da corrente livre (Williamson; Prasad, 1993b,c).

Figura 3.18 – Visualização da esteira secundária no plano xy (parte superior) e no plano yz (parte inferior), $Re=140$. A graduação presente no gráfico se refere à posição x/D . Extraído e adaptado de Cimbala; Nagib; Roshko (1988).

3.3 A transição na esteira

A transição na esteira está associada com duas discontinuidades no processo de geração e emissão dos vórtices à medida que Re é aumentado. Estas discontinuidades manifestam-se nas curvas $St \times Re$ (Figura 3.19) e na curva $C_{pb} \times Re$ (Figura 3.20).

Figura 3.19 – Curva $St \times Re$ para os regimes laminares e faixa de transição na esteira. Reproduzido e adaptado de Williamson (1996a).

Figura 3.20 – Curva $C_{pb} \times Re$ para os regimes laminares e faixa de transição na esteira.

Reproduzido e adaptado de Williamson (1996a).

Após a primeira descontinuidade, que acontece para $Re=180$ a 194 , dependendo das condições experimentais, percebe-se que os tubos de vórtices primários se deformam formando laços, levando à formação de pares de vórtices com vorticidade no plano x - y , na direção do escoamento principal. Esses pares de vórtices podem ser observados na Figura 3.21, e tem comprimento de periodicidade na direção do eixo entre 3 e 4 diâmetros. O processo de geração desses laços é auto-sustentável, devido à indução do tipo Biot-Savart de um laço para o próximo, e ocasiona uma sequência de laços numa mesma altura em relação ao eixo do cilindro (Williamson, 1996c). Esta primeira descontinuidade apresenta histerese o modo de emissão resultante é conhecido na literatura como modo A (Williamson, 1988b). O comportamento histerético pode ser observado na Figura 3.22, onde dois espectros de velocidade são possíveis de serem obtidos, dependendo se o Re em questão é alcançado aumentando-se ou diminuindo-se a velocidade. Tanto este comportamento histerético quanto o fato da curva $St \times Re$ passar para um nível mais baixo não se devem puramente à mudança de regime de escoamento para o modo A, mas sim para a coexistência desse modo de emissão com os *deslocamentos de vórtices*. Esta

afirmação será detalhada mais adiante, nesta mesma seção, após uma explanação do que vêm a ser deslocamentos de vórtices.

O modo A se origina de uma instabilidade elíptica nos núcleos dos vórtices primários da esteira próxima. O crescimento não-linear subsequente de um laço de vórtice acontece por ação do laço anterior, envolvendo portanto uma deformação periódica na direção do eixo do tubo de vorticidade principal. Essa interação entre um laço e outro pode ser observada na Figura 3.23.

Figura 3.21 – Visualizações do escoamento, modos A (esquerda) e B (direita). Reproduzido de Williamson (1996a).

Figura 3.22 – Espectro de velocidade para $Re=172,8$, mostrando o comportamento histerético do modo A. Reproduzido de Williamson (1996a).

Figura 3.23 – Visualização do processo de formação dos laços de vórtices característicos do modo A. As fotografias são sequenciais e o laço marcado com o círculo preto é observado em diversos instantes de tempo. Reproduzido de Williamson (1996c).

Por sua vez, o regime posterior à segunda descontinuidade na curva $St \times Re$ denota a transferência gradual de energia do modo A para o chamado modo B, na faixa de Re que vai de 230 a 250. Esta transferência pode ser notada na Figura 3.24, onde aparecem espectros com dois picos. O pico de frequência menor corresponde ao modo A e gradualmente diminui de intensidade, dando lugar a um pico de frequência mais alta, correspondente ao modo B, à medida que Re aumenta. A existência desses dois picos é devido a um revezamento intermitente entre os dois modos, e não à existência simultânea deles (Williamson, 1996c). O modo B consiste em pares de vórtices de menor escala alinhados com a corrente, com comprimento periódico na direção do eixo igual a aproximadamente 1 diâmetro e notavelmente mais uniformes ao longo do eixo do que as estruturas características do modo A. Uma visualização do escoamento neste modo pode ser encontrada na Figura 3.21. Esta segunda

descontinuidade não apresenta histerese. O modo B tem sua origem nas camadas cisalhantes livres e é uma manifestação de instabilidade em uma região de escoamento hiperbólico.

Figura 3.24 – Espectros de velocidade na faixa de transição entre os modos A e B. Reproduzido de Williamson (1996a).

Estudos da estabilidade do escoamento ao redor de um cilindro (Henderson, 1997 e Barkley; Henderson, 1996) mostram que as transições para os modos A e B podem ser entendidos como bifurcações subcrítica e supercrítica respectivamente. A Figura 3.25 traz as curvas de estabilidade neutra produzidas por estes estudos, relacionando o número de Reynolds com o comprimento de onda das instabilidades calculado (λ). Esses trabalhos também resultaram no cálculo dos Re críticos para a transição de ambos os modos, com o respectivo comprimento de onda da instabilidade inicial. Para o modo A, a transição ocorre para $Re=188,5\pm1,0$ e o comprimento de onda relacionado λ é de $3,96\pm0,02D$. Já para o modo B, esses valores são $Re=259$ e $\lambda=0,822$. As curvas de estabilidade neutra podem ser utilizadas em simulações numéricas para a escolha de um comprimento para o cilindro

simulado. Conjugadas com condições de contorno periódicas, os cálculos computacionais feitos com os comprimentos dados pelas curvas isolam a instabilidade de interesse, viabilizando um estudo mais focado do fenômeno físico.

Figura 3.25 – Curvas de estabilidade neutra dos modos A e B. Reproduzido de Henderson (1997).

São observados tipos de simetrias distintas para os modos A e B. Dada uma certa seção perpendicular ao eixo do cilindro, no modo A as camadas cisalhantes opostas têm vorticidades na direção do escoamento com sinais opostos. Já no modo B, as camadas cisalhantes opostas têm vorticidades na direção do escoamento com sinais iguais. A disposição dos vórtices em cada modo pode ser observada na Figura 3.26.

Figura 3.26 – Diferentes simetrias dos modos A e B. Reproduzido e adaptado de Williamson (1996c).

Além desses dois modos de emissão, durante a transição na esteira são observadas grandes flutuações nos sinais de velocidade, intermitentes e de baixa frequência. Essas flutuações acontecem devido à presença do que se costuma chamar na literatura de *deslocamentos de vórtices* (Williamson, 1992), os quais são elementos fundamentais na transição natural de uma esteira num escoamento com separação. Esses deslocamentos são formados entre células vizinhas na direção do eixo, de frequências distintas, quando os vórtices primários movem-se com uma diferença de fase relativa. Essa diferença é causada por defeitos locais que aparecem naturalmente de forma intermitente em determinados tubos de vórtices. Esses defeitos também podem ser induzidos, utilizando-se, por exemplo, anéis no meio do cilindro. Naturalmente, os deslocamentos são gerados em alguns sítios de formação de laços de vórtices, típicos do modo A. Esses pequenos defeitos são amplificados, levando à formação de grandes estruturas na esteira que são convectadas para jusante, gerando grandes distorções nas visualizações da esteira distante e contribuindo para o aparecimento de focos de turbulência nessa região. A Figura 3.27 traz visualizações de escoamentos onde ocorrem deslocamentos forçados e naturais. Nela podem ser observadas características importantes deste fenômeno, tais como escala e evolução a jusante. Os deslocamentos de vórtices também podem ser identificados através de séries temporais de velocidade num dado ponto da esteira. A passagem dessas estruturas faz com que apareçam falhas no sinal harmônico normalmente observado, como ilustra a Figura 3.28.

Figura 3.27 – Deslocamentos de vórtices: forçado (esquerda) e natural (direita). Reproduzido de Williamson (1992).

Figura 3.28 – Visualização e medição de velocidade com anemômetro de fio quente simultâneas do escoamento ao redor de um cilindro com deslocamento de vórtices. Reproduzido e adaptado de Williamson (1992).

Os modos de pequena escala e os deslocamentos de grande escala são mostrados juntos no diagrama esquemático da Figura 3.29, que mostra as instabilidades envolvidas na rota para a turbulência na esteira. As tendências de St e C_{pb} em relação ao aumento de Re continuam a ser crescentes, mas seguem curvas num nível mais baixo do que se fossem extrapoladas das curvas do regime de emissão laminar, como se pode notar na Figura 3.19 e na Figura 3.20.

Estando comentados os modos de pequena escala e os deslocamentos, falta elucidar melhor a questão da sequência de modos seguida na transição da esteira. De acordo com o exposto na Figura 3.30, vê-se que existem modos instáveis ou transientes, representados pelas linhas tracejadas. Esses estados podem ocorrer no início de simulações ou experimentos, mas tendem a evoluir com um tempo para estados mais estáveis, representados por linhas cheias. Quando o número de Reynolds ultrapassa o primeiro ponto crítico para tridimensionalidades, o escoamento pode seguir uma transição suave, que corresponde ao aparecimento do modo A somente, sem a presença de deslocamentos. Após certo tempo, com o desenvolvimento dos deslocamentos em alguns sítios de enlaçamento de vórtices intrínsecos do modo A, o escoamento reverte para o estado chamado de A*, que

corresponde a uma combinação de estruturas do modo A e deslocamentos de vórtices. Por volta de $Re=230-250$, há períodos intermitentes onde estruturas características do modo B predominam ao longo do eixo, fazendo com que a curva de St se desloque para um patamar mais alto (B), e períodos onde predominam estruturas do modo A com deslocamentos, levando o St a valores mais baixos (A^*). Acima de $Re=250$, o escoamento permanece no modo B, sem deslocamentos, a não ser que estes sejam artificialmente introduzidos (Prasad; Williamson, 1997a), caso este em que a curva encontrada para St é aquela chamada B^* . Esta curva é uma extensão contínua da curva A^* .

Figura 3.29 – Fases da transição na esteira. Reproduzido de Williamson (1996a).

Figura 3.30 – Estados instáveis e estáveis na transição da esteira no escoamento ao redor de um cilindro. Reproduzido de Williamson (1996c).

Em suma, há duas curvas distintas de St em função de Re na Figura 3.30: a superior corresponde à presença de instabilidades de pequena escala exclusivamente e a inferior corresponde à combinação dessas instabilidades de pequena escala com deslocamentos de vórtices. O caminho natural para a transição na esteira de um cilindro infinito passa de um estado para outro, na sequência $2D \rightarrow A \rightarrow A^* \rightarrow B$. Este caminho pode ser reproduzido em experimentos com cilindros finitos se métodos não mecânicos forem utilizados para induzir emissão paralela de vórtices, como por exemplo o descrito em Miller; Williamson (1994). Os métodos mecânicos, como por exemplo o uso de placas inclinadas, criam por si só deslocamentos de vórtices e dessa forma o escoamento não se estabiliza no modo A puro, mudando diretamente para o modo A^* .

3.4 O escoamento ao redor de pares de cilindros alinhados e o fenômeno de interferência

Esta seção lida especificamente com as características do escoamento ao redor de pares de cilindros alinhados, que é o tipo de agrupamento de interesse do presente trabalho. Alguns conceitos já sedimentados na literatura especializada são apresentados, de forma a familiarizar o leitor com terminologias que serão vastamente utilizadas no capítulo de resultados.

A Figura 3.31 traz um esquema do que vem a ser um escoamento ao redor de cilindros alinhados. Neste trabalho, somente serão estudados pares de cilindros com diâmetros iguais, chamados de D . O cilindro marcado com o número 1 na figura é o cilindro mais a montante no escoamento e no decorrer deste texto ele será chamado de primeiro cilindro, cilindro a montante ou cilindro 1. Por sua vez, o outro cilindro será chamado de segundo cilindro, cilindro a jusante ou cilindro 2. A distância entre os centros dos cilindros é representada por l_{cc} e ao longo do texto a palavra espaçamento será também utilizada com este significado. Este comprimento será sempre expresso em unidades de diâmetro, salvo indicação em contrário.

Figura 3.31 – Esquema do escoamento ao redor de cilindros alinhados.

Ao se comparar o escoamento de um cilindro isolado com o escoamento ao redor de um par de cilindros, percebe-se que a presença do segundo corpo na corrente fluida modifica substancialmente características importantes do escoamento, dentre elas as estruturas da esteira, limiares de transição, esforços nos cilindros, St e distribuição de pressão. Ao fenômeno que causa essas variações dá-se o nome de *interferência*.

A interferência num escoamento pode ser de dois tipos: de proximidade ou de esteira. O primeiro acontece basicamente porque as regiões de escoamento perturbado de cada corpo se interceptam, sem que um corpo esteja na região de esteira do outro. É esse o tipo de interferência observada em escoamentos ao redor de pares de cilindros dispostos lado a lado. Já a interferência de esteira se dá quando um corpo está imerso na esteira de outro corpo, que é o caso específico de pares de cilindros alinhados. Há ainda a possibilidade da coexistência dos dois tipos de interferência, como no caso de arranjos oblíquos.

Figura 3.32 – Esteiras observadas para o escoamento ao redor de um cilindro isolado (A) e pares de cilindros alinhados com espaçamentos $16D$ (B), $10,4D$ (C), $8,5D$ (D e E), $6,6D$ (F) e $3,6D$ (G).

Extraído e adaptado de Thomas; Kraus (1964).

Serão analisados agora alguns aspectos particulares da interferência no escoamento ao redor de pares de cilindros alinhados. A Figura 3.32 mostra a mudança das estruturas observadas na esteira para um escoamento ao redor de um par de cilindros alinhados, com $Re=62$ e diferentes espaçamentos. Nela pode-se perceber que a presença do segundo cilindro na região de formação pode até mesmo retardar o início do regime laminar periódico (esteira G). Outro ponto interessante é a presença de um regime bi-estável, no caso $l_{cc}=8,5$, onde duas esteiras diferentes podem ser observadas.

Observando a variação de St com o espaçamento, disposta na Figura 3.33, vê-se que este adimensional é bastante sensível à interferência. Um aspecto interessante na curva apresentada é o salto descontínuo que existe para $l_{cc} \simeq 3,1$. Para espaçamentos menores do que este, o St medido é muito menor do que o observado para o cilindro isolado. Para espaçamentos maiores do que 3,1 as curvas para ambos os cilindros começam a se aproximar do valor encontrado para o cilindro isolado. Um outro ponto importante é que os valores de St dos dois cilindros são bastante próximos e seguem a mesma tendência, evidenciando uma sincronização de frequências nas emissões de vórtices. As curvas observadas para outros Re apresentam o mesmo comportamento, sendo que o valor de l_{cc} da descontinuidade muda.

Figura 3.33 – Variação de St com o espaçamento para $Re=6,5 \times 10^4$. Extraído e adaptado de Mahbub Alam et al. (2003).

Observando visualizações do escoamento vê-se que o comportamento da curva $St \times l_{cc}$ está intimamente ligado a diferentes *regimes de interferência*. Esses regimes foram classificados em vários trabalhos publicados na literatura especializada (Igarashi, 1981; Zdravkovich, 1987), sendo que as classificações são bastante semelhantes. Será adotada aqui a classificação apresentada em Igarashi (1981). São identificados seis diferentes regimes de interferência:

Figura 3.34 – Regimes de interferência no escoamento ao redor de pares de cilindros alinhados. Reproduzido de Igarashi (1981).

- A) As camadas cisalhantes livres vindas da separação do cilindro a montante não re-aderem à superfície do segundo cilindro. Apenas uma esteira é formada.
- B) As camadas cisalhantes do primeiro cilindro são capturadas pelo segundo, mas não há a formação de vórtices no espaço entre os corpos. Também aqui apenas uma esteira pode ser identificada.
- C) Vórtices simétricos são formados entre os cilindros.
- D) Os vórtices simétricos tornam-se instáveis, passando a crescer e diminuir de forma alternada nas proximidades do segundo cilindro.

- E) A camada cisalhante do cilindro a montante se enrola bem próximo do segundo cilindro. Este regime é um estado bi-estável na transição entre os regimes D e F.
- F) A região da esteira próxima do primeiro cilindro termina antes do segundo corpo e vórtices passam a serem formados nesta região de maneira regular. A esteira formada após o segundo cilindro é chamada binária, porque cada vórtice é formado pela combinação de um vórtice emitido pelo cilindro a montante e um outro pelo cilindro a jusante.

Do regime A ao D, o coeficiente de arrasto no cilindro a jusante é consideravelmente menor que o do outro corpo. Isto pode ser entendido ao se notar que para estes casos o cilindro a jusante está dentro da esteira próxima formada pelo outro corpo, isto é, está imerso numa região de baixa pressão. O arrasto do segundo cilindro nestes casos normalmente é negativo, ou seja, o segundo cilindro experimenta uma resultante cuja projeção na direção do escoamento tem sentido contrário ao da corrente livre. A Figura 3.35 mostra a variação do coeficiente de arrasto médio com o espaçamento, para $Re=3,55 \times 10^4$. Perceba que, como na curva a $St \times l_{cc}$, também há um salto descontínuo neste gráfico. Neste salto, o arrasto do cilindro a jusante deixa de ser negativo e passa a ser positivo. Por esse motivo, o espaçamento para o qual ocorre esta descontinuidade nas curvas apresentadas é chamado de espaçamento de *inversão do arrasto* ou *espaçamento crítico*. Como já foi exposto anteriormente, este valor varia com Re .

Outro parâmetro que varia de acordo com o regime de interferência é a distribuição de pressão nas superfícies dos cilindros. A Figura 3.36 traz essas distribuições medidas para diversos espaçamentos, com um escoamento a $Re=6,5 \times 10^4$. Observando a distribuição do cilindro a montante, vê-se que, para espaçamentos onde as camadas cisalhantes não se enrolam no espaço entre os corpos, a pressão é praticamente constante após o ponto de separação. Para os regimes onde já há a presença de recirculação antes do segundo cilindro, as distribuições começam a se aproximar do caso de cilindro isolado, mas os valores de pressão observados ainda são maiores. Finalmente, para o regime F, quando a região de formação não é

interceptada pelo segundo cilindro, a distribuição observada é bastante similar ao caso de cilindro isolado.

Figura 3.35 – Variação do coeficiente de arrasto médio dos dois cilindros com o espaçamento, $Re=3,55 \times 10^4$. Extraído e adaptado de Igarashi (1981).

Analisando agora as distribuições de pressão do cilindro a jusante, vê-se que para o espaçamento menor a curva não apresenta grandes oscilações, denotando o fato que a camada cisalhante do primeiro cilindro não re-adere na superfície do cilindro 2. Aumentando-se o espaçamento, nota-se a presença de um pico pronunciado entre 50° e 70° , que é a região onde a camada cisalhante do cilindro 1 atinge o segundo cilindro. A pressão de *gap*, que é a pressão medida no ponto mais a montante do cilindro a jusante, é consideravelmente baixa, significando que o segundo cilindro está imerso numa zona de baixa pressão – a região de formação do primeiro cilindro. Por fim, a partir de $l_{cc}=4,50$, a distribuição observada é qualitativamente semelhante ao caso de cilindro isolado, e a pressão de *gap* é a máxima observada na curva. Daí conclui-se que o segundo cilindro se encontra fora da região de formação do primeiro.

Figura 3.36 – Distribuição do coeficiente de pressão na superfície dos cilindros, $Re = 6,5 \times 10^4$.

Extraído e adaptado de Mahbub Alam et al. (2003).

Na Figura 3.37 encontram-se os gráficos do valor RMS do coeficiente de sustentação para ambos os cilindros. Analisando-se essas curvas, percebe-se que as flutuações de sustentação no segundo cilindro são significativamente maiores do que no primeiro. Antes da inversão do arrasto, só há formação de esteira de von Kármán depois do cilindro a jusante, por isso os valores RMS de sustentação do primeiro cilindro são baixos. Nessa região, é verificado que o valor de C_L' do cilindro a jusante é bastante sensível à variação do espaçamento, apresentando um pico destacado. Essa variação pode ser explicada pela diferença de fase entre as oscilações

de pressão que ocorrem na região entre os corpos e a emissão de vórtices no segundo cilindro (Mahbub Alam et al.; 2003). À medida que o espaçamento varia, essa diferença de fase também muda, e o pico corresponde à situação onde as oscilações de pressão na região entre os corpos e a emissão de vórtices estão em fase. Depois da inversão do arrasto, passa a existir esteira de vórtices alternados também no espaço entre os cilindros, por isso há um salto na curva da Figura 3.37 referente ao primeiro cilindro. Além disso, os vórtices da esteira do primeiro cilindro atingem o segundo cilindro, contribuindo para um aumento na flutuação observada na sustentação deste último, por isso um salto é igualmente observado na curva relativa a este corpo. Após esse salto, a curva apresenta tendência decrescente, pois com o aumento de l_{cc} os vórtices que atingem o segundo cilindro sofrem maior dissipação no espaço entre os cilindros e chegam ao corpo a jusante tendo menor vorticidade.

Figura 3.37 – Variação da flutuação (RMS) do coeficiente de sustentação com o espaçamento, $Re=6,5.10^4$. Extraído e adaptado de Mahbub Alam et al. (2003).

Como já foi mencionado no capítulo referente à motivação deste trabalho, existem na literatura poucos trabalhos que lidam com os aspectos tridimensionais do fenômeno de interferência no escoamento ao redor de cilindros alinhados. Um exemplo é a publicação de Wu et al. (1994), que traz resultados da coerência na direção do eixo dos sinais de velocidade em certos pontos da esteira. A coerência

entre dois sinais depende da separação entre os pontos na direção do eixo ΔZ e da frequência ω , sendo definida por:

$$\text{coh}(\Delta Z, \omega) = \frac{|G_Z(\omega)G_{Z+\Delta Z}^*(\omega)|}{[G_Z(\omega)G_Z^*(\omega)G_{Z+\Delta Z}(\omega)G_{Z+\Delta Z}^*(\omega)]^{1/2}}$$

onde Z é a coordenada na direção do eixo, G_Z e $G_{Z+\Delta Z}$ são as transformadas de Fourier dos sinais de velocidade em Z e ΔZ e o asterisco denota o complexo conjugado. A coerência é uma medida de quanto dois sinais distintos estão correlacionados.

Figura 3.38 – Coerência ao longo do eixo na frequência de Strouhal, para vários espaçamentos – (a) $Re=42.000$ e (b) $Re=17.000$. As ilustrações nos gráficos superiores demonstram as localizações dos anemômetros de fio quente (círculos pretos). Reproduzido de Wu et al. (1994).

A Figura 3.38 traz os resultados deste trabalho, sendo que a frequência ω utilizada foi a frequência de Strouhal. Analisando estes dados, nota-se que a

interferência também influencia nas tridimensionalidades do escoamento. Para espaçamentos menores do que o crítico, os sinais apresentam coerência maior do que no caso de cilindro isolado, tanto na região entre os corpos quanto na esteira do segundo cilindro. Já para espaçamentos maiores, na região entre os cilindros a coerência varia muito pouco com a variação de l_{cc} e a curva é próxima da que representa o caso de cilindro isolado. Entretanto, na zona da esteira do segundo cilindro a coerência tende a diminuir com o aumento de l_{cc} , mas há de se ressaltar que para espaçamentos um pouco maiores do que o crítico a coerência ainda é maior do que a observada no escoamento ao redor de um cilindro isolado.

4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção serão reportados e analisados os resultados obtidos nas simulações computacionais realizadas, tanto as bidimensionais quanto as tridimensionais. Foram testados casos com cilindro isolado e dois cilindros de diâmetros idênticos alinhados, com valores de espaçamento entre centros de $1,5D$, $3D$, $3,5D$, $5D$ e $8D$, onde D é o diâmetro do cilindro. Os números de Reynolds experimentados em todos os espaçamentos foram 160, 195, 200, 240, 270, 300 e 320. Daqui para diante, será utilizada uma nomenclatura específica com o intuito de simplificar a notação dos casos, principalmente nas tabelas, gráficos e figuras. O caso de cilindro isolado será indicado pelo código *1cil*, e os casos de cilindros alinhados com espaçamento entre centros de $1,5D$, $3D$, $3,5D$, $5D$ e $8D$ serão indicados respectivamente por *t1,5d*, *t3d*, *t3,5d*, *t5d* e *t8d*.

O método computacional utilizado foi o método de elementos espectrais (SEM), que é uma junção do método espectral puro com o método de elementos finitos. Basicamente o que se faz é empregar funções de base espectrais em uma formulação de resíduos ponderados, mais especificamente a formulação de Galerkin, típica de elementos finitos. Desse modo, o algoritmo resultante herda dos métodos espectrais puros convergência exponencial e alta resolução espacial, além de possuir a possibilidade de refinamento local e a flexibilidade geométrica, características do método de elementos finitos. O leitor interessado em se aprofundar nesta metodologia pode consultar os apêndices deste texto, onde estão descritos em detalhe a formulação, a aplicação às equações de Navier-Stokes, condições de contorno e método de avanço no tempo.

Os códigos computacionais que implementam este método e que foram utilizados neste trabalho se chamam *Νεκταρ* (bidimensional) e *ΝεκταρF* (tridimensional), e foram fornecidos gentilmente pelo Dr. Spencer J. Sherwin, do Imperial College, Londres. Algumas pequenas modificações foram feitas nestes programas, com o intuito de obter as forças em corpos distintos no domínio.

As malhas utilizadas seguem os padrões da malha final obtida nos procedimentos de validação e testes de convergência, descritos no apêndice F. Esta malha tem o cilindro centrado na origem e o domínio se estende de -36 a 45 na

direção do escoamento e de -50 a 50 na direção transversal, sendo todas as medidas em unidades de diâmetros. O número total de elementos é de 336 e o número de nós é de 379. Como função de base, foi utilizado um polinômio de Jacobi da grau 8. Na região de entrada do fluido ($x = -36$) e nos limites $y = \pm 50$, foi especificada condição de contorno essencial, com a velocidade na direção x unitária e velocidade na direção y nula. Na superfície do cilindro, foi colocada condição de contorno do tipo parede, ou seja, velocidade nula, e na região de saída, na extrema direita do domínio, a condição é do tipo natural, isto é, a derivada das velocidades na direção normal à fronteira é assumida nula.

Figura 4.1 – Malha utilizada para simulação do escoamento ao redor de cilindro isolado, $Re=320$. Compare o refinamento na região de esteira próxima (a) com a malha utilizada para os outros casos (b).

Precisamente, a malha utilizada para a simulação de cilindro isolado com $Re=320$ tem algumas modificações. Neste caso, foram mantidas as dimensões, mas efetuou-se um maior refinamento na região da esteira, principalmente nas proximidades do cilindro. Isto foi necessário devido a problemas de convergência

nas simulações tridimensionais. Esta malha está ilustrada na Figura 4.1. É interessante ressaltar que o único caso que apresentou este tipo de problema foi o de cilindro isolado; nos demais casos, as mesmas malhas foram utilizadas para todos os valores de Re sem nenhum problema adicional.

No que se refere aos casos de escoamento ao redor de pares de cilindros, a única mudança diz respeito à porção do domínio entre os dois corpos. No mais, as malhas seguem os mesmos padrões do caso de cilindro único, ou seja, os comprimentos da região de entrada e saída foram mantidos, bem como o grau do polinômio da função de base e largura da malha. As discretizações empregadas na região entre os cilindros constam na Figura 4.2, e a Tabela 4.1 traz o número de elementos para cada malha bidimensional utilizada.

Figura 4.2 – Detalhes das regiões entre cilindros das malhas referentes aos casos de pares de cilindros alinhados.

Tabela 4.1 – Número de elementos das malhas utilizadas.

Caso	$1cil$	$1cil (Re=320)$	$t1,5d$	$t3d$	$t3,5d$	$t5d$	$t8d$
Nº de elementos	336	435	453	464	464	438	468

Para os casos tridimensionais, a formulação utilizada emprega uma decomposição modal na direção do eixo (ver apêndice B.2), que no sistema de coordenadas utilizado corresponde à direção z . O comprimento nesta direção foi de $5D$ para todos os casos simulados, e foram empregados 64 modos de Fourier na

expansão nesta direção, também em todos os casos. Desse modo, visou-se analisar a evolução das instabilidades tridimensionais de pequena escala como função do espaçamento e de Re . As malhas utilizadas no plano xy foram as mesmas dos casos bidimensionais e a condição de contorno nas faces superior e inferior do domínio ($z=0$ e $z=5$) foi do tipo periódica.

As equações simuladas já foram tomadas na sua forma adimensional, ou seja, o diâmetro dos cilindros têm valor unitário, bem como a densidade do fluido e o módulo da velocidade na seção de entrada. Assim, para variar o valor de Re , variou-se somente o valor da viscosidade cinemática, que assumiu o valor de $1/Re$.

As simulações foram todas iniciadas a partir de resultados bidimensionais, onde foram simulados 1000 unidades de tempo adimensionais com a finalidade de superar o transitório inicial da primeira instabilidade, que é bidimensional e se refere à esteira de vórtices de von Kármán. Com os dados do instante de tempo final de cada um dos casos, procedeu-se às simulações bidimensionais e tridimensionais, por mais 1000 unidades de tempo adimensionais. Especificamente para o caso tridimensional foi introduzido um ruído branco na equação de quantidade de movimento na direção z nas 17 unidades de tempo iniciais, com o intuito de perturbar o escoamento. O comportamento do sistema frente a estas perturbações, que são inevitáveis numa situação real, é um indicativo da estabilidade do sistema. Na Tabela 4.2 estão indicados os valores dos passos de tempo utilizados (Δt), a taxa de aquisição dos valores de força nos cilindros e dos valores das variáveis primitivas nas provas espalhadas pelo escoamento ($n\Delta t_{\text{his}}$) e o número de passos de tempo para o qual foi introduzido ruído randômico no início das simulações tridimensionais ($n\Delta t_{\text{Ruído}}$), tudo em função de Re . Os valores desses parâmetros foram mantidos constantes para as diversas configurações utilizadas, não importando se as simulações são bi ou tridimensionais.

Os dados retirados das simulações foram séries temporais de força nos cilindros e vetor velocidade e pressão estática em pontos selecionados no domínio, dispostos num plano próximo do plano médio do cilindro. Esses dados são analisados através de processamento numérico e gráfico, e discussões sobre os resultados são traçadas nas seções subseqüentes deste capítulo. Além deste tipo de informação, também são traçados contornos de variáveis como pressão e vorticidade em planos

determinados do escoamento num certo instante de tempo, bem como iso-superfícies dessas mesmas grandezas. Estas figuras possibilitam a visualização das estruturas bidimensionais e tridimensionais do escoamento, que servem de material para análises que serão feitas também no decorrer deste capítulo.

Tabela 4.2 – Parâmetros utilizados nas simulações em função de Re .

Re	Δt	$n\Delta t_{\text{his}}$	$n\Delta t_{\text{Ruído}}$
160	0,0085	32	2000
195	0,0070	36	2400
200	0,0070	36	2400
240	0,0060	40	2800
270	0,0050	48	3400
300	0,0045	52	3800
320	0,0040	58	4250

O restante deste capítulo está organizado em cinco seções. A primeira refere-se à análise dos resultados de número de Strouhal. A segunda lida especificamente com as mudanças no processo de transição na esteira quando se inclui no domínio fluido um segundo cilindro em configuração alinhada com a corrente. A terceira trata dos resultados de coeficiente de arrasto médio e a quarta foca nos resultados da flutuação da sustentação. Por fim, na quinta seção são discutidos os resultados de correlação na direção axial da força de sustentação.

Em todas essas seções, os resultados são apresentados na forma de gráficos, onde os pontos estão ligados por linhas retas. Todavia, vale ressaltar que essas linhas não são interpolações de valores, mas sim de uma forma de facilitar a visualização do conjunto de dados e a observação de tendências. Estes mesmos valores estão tabulados no apêndice G, de forma a facilitar a comparação com outros trabalhos.

4.1 Número de Strouhal

Como já foi descrito na seção 3.1.4, o número de Strouhal (St) é a frequência dominante na emissão de vórtices, tomada na forma adimensional, calculada da seguinte forma:

$$St = \frac{fD}{U_{\infty}}$$

onde f é a frequência dimensional, em hertz (Hz), U_∞ é a velocidade ao longe e D é o comprimento característico do corpo, no caso, o diâmetro do cilindro. Na prática, St é dado pela frequência de pico do espectro do sinal de força de sustentação nos cilindros. Foram extraídas séries temporais de força grandes o suficiente para uma incerteza no número de Strouhal menor ou igual a 0,001.

4.1.1 Simulações bidimensionais

Figura 4.3 – Gráfico do número de Strouhal em função do número de Reynolds. Simulações bidimensionais.

A representação gráfica dos valores de número de Strouhal obtidos com as simulações bidimensionais encontra-se na Figura 4.3. Analisando estes resultados, nota-se que, enquanto as curvas dos outros espaçamentos apresentam sempre tendência positiva, o caso $t3d$ descreve uma queda entre $Re=240$ e $Re=270$, seguido de um salto para um valor de St bem mais alto no ponto seguinte, $Re=300$, e o caso $t3,5d$ apresenta um salto entre $Re=200$ e $Re=240$. Estes saltos acontecem para estes espaçamentos porque, nesta faixa de Re , para estas configurações específicas, ocorre o fenômeno de *inversão do arrasto*. Este fenômeno pode ser evidenciado também verificando-se os dados referentes ao arrasto médio nas simulações, que são tratados na seção 4.3. A inversão do arrasto ocorre devido à dependência do comprimento de formação do vórtice que se forma a partir do cilindro a montante com o número de

Reynolds. Na faixa de Re que está sendo estudada neste trabalho, para simulações bidimensionais, quanto maior o valor de Re mais próximo do cilindro o primeiro vórtice é formado, como pode ser verificado na Figura 4.4*. Em seguida, serão analisadas as implicações deste fenômeno na frequência de Strouhal observada.

Figura 4.4 – Comprimento de formação para as simulações do escoamento ao redor de um cilindro isolado – Simulações bidimensionais.

Para ilustrar a análise da inversão do arrasto, será utilizada a Figura 4.5, que traz contornos instantâneos de vorticidade para a configuração $t3d$ em Re de interesse. Nela, vê-se que para $Re=240$ as camadas cisalhantes emanantes do cilindro a montante começam a se enrolar, mas não são capazes de formar a esteira de vórtices antes do corpo a jusante. Ao invés disso, as camadas aderem à superfície do segundo cilindro, sendo estiradas e formando a esteira de vórtices somente depois deste. Este é o regime de interferência D, conforme classificação apresentada na seção 3.4.

* Neste trabalho, o comprimento de formação é calculado de uma forma diferente da usual. Aqui, toma-se o campo médio em um ciclo e calculando-se o ponto na linha $y=0$ onde a velocidade passa de negativa a positiva, após o cilindro. Nos casos tridimensionais, é feita uma média ao longo do comprimento z do domínio.

Figura 4.5 – Detalhes dos contornos de vorticidade adimensional para simulações bidimensionais do escoamento ao redor de cilindros alinhados com espaçamento 3D para diversos Re .

Já para $Re=270$, o sistema está na iminência de formar a esteira antes do corpo à jusante. Entretanto, o primeiro vórtice em formação atinge o corpo antes de estar desprendido das camadas cisalhantes. Ao entrar em contato com este corpo, ele se deforma, dando origem a mais uma camada cisalhante que mais a jusante dará origem finalmente à esteira de vórtices. Como parte da circulação fica retida antes do cilindro 2, as camadas cisalhantes desprendidas deste cilindro tem uma circulação menor, o que resulta num St menor. Além disso, todo esse rearranjo faz com que as camadas cisalhantes do segundo cilindro sejam emitidas também de forma mais desorganizada que no caso anterior. Esta desorganização pode ser notada também através do exame da Figura 4.6, que traz os espectros do coeficiente de sustentação. Nesta figura, vê-se que, ao contrário dos casos com $Re=240$ e $Re=300$, o caso com $Re=270$ mostra um espectro com vários picos próximos. Além disso, os picos não ocorrem de forma isolada, mas em torno de deles uma faixa de frequências é

excitada. O fato dos vórtices estarem na iminência de se formar antes do segundo cilindro e sofrerem deformações, assim como a característica da camada cisalhante emitida pelo corpo a jusante ter irregularidades, faz com que as zonas de pressão baixa apareçam com frequência e localização não tão certas, dando origem ao regime E, representando uma transição entre os regimes D e F.

Figura 4.6 – Espectro de potência dos sinais do coeficiente de sustentação para espaçamento $3D$, Re indicado. Simulações bidimensionais.

Este regime também foi observado para $l_{cc}=3,5D$, $Re=240$. No resultado dessa simulação em especial, ficou claro o caráter biestável da transição. A Figura 4.7

mostra uma parte da série temporal de C_D , ilustrando o momento da inversão do arrasto, e dois contornos de vorticidade instantânea, um para cada estado. Cabe observar que os dados relativos a essa configuração e Re , colocados nas curvas de resultados apresentados, são referentes ao regime onde o vórtice do primeiro cilindro se desprende antes de chegar ao segundo. Para o outro regime, o St fornecido é de 0,121, o que configura uma queda em relação ao Re anterior (200), que vale 0,123. Esta é o mesmo comportamento observado para $t3d$ e $Re=270$, que foi analisado no parágrafo anterior.

Figura 4.7 – Série temporal de C_D e contornos de vorticidade em diferentes instantes de tempo. Espaçamento $t3,5d$, $Re=240$, simulações bidimensionais.

Por fim, voltando para a configuração $t3d$, no caso de $Re=300$ nota-se que os vórtices emitidos pelo primeiro cilindro já conseguem se formar completamente antes de atingir o segundo corpo e o número de Strouhal aumenta abruptamente. Do mesmo modo, como o escoamento se torna mais regular, obtêm-se novamente um espectro sem a presença de oscilações. Um outro ponto ainda que é digno de menção é que o segundo cilindro nesse caso não tem uma região de formação verdadeira, pois não é a interação entre as camadas cisalhantes que faz com que os vórtices

sejam desprendidos. A esteira que se encontra a jusante do segundo corpo é notavelmente mais larga do que nos casos anteriores e é formada pelos vórtices do primeiro cilindro mais um acréscimo de vorticidade originária da parede do cilindro 2, sendo por isso chamada de esteira binária.

É interessante notar que, dado um certo Re , o espaçamento crítico (l_{cc}^C) é maior do que o comprimento de formação no escoamento ao redor de um cilindro isolado (L_f), para o mesmo Re . Por exemplo, tomando $Re=200$, temos $L_f=1,35$ e $l_{cc}^C>3,5$. Esse fato leva a concluir que não somente a presença do corpo na região de formação impede que uma esteira se forme na região entre os cilindros, mas também a influência desse segundo corpo a jusante, na forma de uma alteração no campo de pressão, é capaz de coibir o desprendimento de vórtices, sem que necessariamente o cilindro a jusante esteja imerso na região de formação.

A diferença entre l_{cc}^C e L_f será chamada de d_i , conforme ilustrado na Figura 4.8. Observa-se que para diferentes Re , d_i não se mantém constante. Por exemplo, tomando o caso de $Re=300$, sabe-se que $l_{cc}^C \leq 3D$. Seguindo a curva do comprimento de formação, Figura 4.4, se d_i fosse constante, a inversão para $l_{cc}=3,5D$ aconteceria para um $Re < 160$. Todavia, não é isso que se observa, com a inversão ocorrendo para $Re \simeq 240$ nesta configuração. Disso, conclui-se que d_i tende a diminuir com o aumento de Re , como mostra a Figura 4.8. Este comportamento ocorre porque o que determina d_i é a interação entre a região de formação e a perturbação no campo de pressão provocada pela presença do segundo cilindro. A intensidade dessa perturbação depende da velocidade incidente no cilindro a jusante, que por sua vez depende do que acontece na região de formação do cilindro 1. Já a região de formação é perturbada pelo campo de pressão alterado. Dessa forma, esses dois fatos estão acoplados sendo que, de modo geral, com o aumento de Re aumenta a circulação das camadas cisalhantes e elas se tornam menos sensíveis às perturbações de pressão e, conseqüentemente, d_i diminui.

Figura 4.8 – Esquemas do comportamento do espaçamento crítico em relação ao comprimento de formação no escoamento ao redor de um cilindro isolado.

Figura 4.9 – Contornos de vorticidade e linhas de emissão instantâneos, $Re=200$, simulações bidimensionais.

Um outro aspecto que vale ser observado, é a diferença nas inclinações das curvas para as combinações de configuração e Re onde $l_{cc} < l_{cc}^C$. Para $t1,5d$ a derivada da curva é maior do que nos casos $t3d$ e $t3,5d$, sendo que essas duas últimas são praticamente paralelas. Isso acontece porque se tratam de dois regimes

diferentes, como se pode observar na Figura 4.9. As simulações com o espaçamento $t1,5d$ resultam no regime C, onde vórtices simétricos são formados na região entre cilindros, enquanto que nas simulações com as configurações $t3d$ e $t3,5d$ onde $l_{cc} < l_{cc}^C$ o regime resultante é o D. Nestes últimos casos, dado um certo Re , o St da configuração $t3,5d$ é menor do que o da $t3d$ porque a emissão funciona como se só houvesse uma única região de formação. Como para $l_{cc}=3,5D$ o segundo cilindro está colocado numa posição onde acaba por reter maior circulação na região entre os cilindros, a camada cisalhante que se desprende do cilindro a jusante tem menor circulação e, portanto, este escoamento resulta num St menor.

Um outro ponto que merece atenção é que, apesar das curvas de St referentes às configurações $1cil$, $t5d$ e $t8d$, apresentadas na Figura 4.3, apresentarem o mesmo comportamento, observa-se uma diferença quantitativa sistemática entre os casos ao longo de toda a faixa de Re analisada. Isto ocorre porque há uma espécie de interferência de proximidade do segundo cilindro sobre o primeiro, ou seja, mesmo depois da inversão do arrasto, o corpo a jusante continua a influir nas forças resultantes no corpo a montante. A Figura 4.10 traz os valores de velocidade e pressão na linha central ($y=0$) dos campos médios de simulações a $Re=300$. Nela, pode-se notar que o campo de pressões na região de formação do primeiro cilindro é alterado pela presença do segundo corpo e, mais ainda, observa-se que, de modo geral, quanto mais próximos os cilindros, maior a pressão nessa região. Quanto mais elevada a pressão na esteira próxima, mais difícil é o desprendimento dos vórtices do cilindro a montante, diminuindo St . Por isso é que na Figura 4.3 vê-se que, fixado um Re , por exemplo 300, e analisando os casos de regime F, o número de Strouhal diminui com a diminuição de l_{cc} .

Todavia, é interessante notar analisando a Figura 4.10 que a região de formação aumenta com o aumento do espaçamento. Assim, o que se tem quando se fixa um Re e se varia o espaçamento é que, quanto maior o St , maior a região de formação. Esta é uma tendência oposta à que se observa quando tomamos o escoamento ao redor de um cilindro isolado e variamos o Re . Isto acontece pelo seguinte: no caso $1cil$, quando se aumenta Re , o que acontece é que aumenta a circulação nas camadas cisalhantes, o que facilita a interação entre elas e conseqüentemente diminui a região de formação. Por outro lado, quando fixamos Re

e diminuimos o espaçamento, a pressão na região de formação aumenta e também o campo de velocidades é alterado, desacelerando o escoamento. Portanto, a presença de um corpo mais próximo ao primeiro cilindro tem dois efeitos: ela dificulta o desprendimento dos vórtices e força um encurtamento da região de formação. Desta forma, são observadas tendências diferentes nas duas situações em questão porque se tratam de fenômenos diferentes agindo sobre o escoamento.

Figura 4.10 – Valores de velocidade e pressão ao longo da linha $y=0$ de campos médios oriundos simulações bidimensionais a $Re=300$.

Um último tópico ainda referente às simulações bidimensionais concerne à sincronização de St que acontece para escoamentos no regime F. Como já foi dito anteriormente, para esse regime não se pode identificar uma região de formação depois do cilindro a jusante, e os vórtices são emitidos diretamente da superfície deste corpo. Sendo assim, o que determina a frequência de emissão do segundo cilindro não é a dinâmica de uma região de formação correspondente, mas sim o escoamento incidente. A chegada de vórtices alternados força a emissão nesse segundo corpo a acontecer na mesma frequência.

4.1.2 Simulações tridimensionais

A Figura 4.11 traz os resultados obtidos nos testes tridimensionais. Nestas simulações, a frequência é calculada utilizando-se a série temporal do valor médio do coeficiente de sustentação das 64 seções. Nos casos simulados, observou-se a mesma

freqüência de emissão nos dois cilindros. Olhando para esta figura, observam-se três tipos de comportamentos. O primeiro é representado pelas configurações $1cil$, $t5d$ e $t8d$, o segundo por $t1,5d$ e o último pelos casos $t3d$ e $t3,5d$. Cada um desses casos será analisado a seguir. Para ajudar a ilustrar essas análises, a Figura 4.12 traz os gráficos de casos típicos de cada comportamento, juntamente com os resultados das simulações bidimensionais para os mesmos casos.

Figura 4.11 – Gráfico do número de Strouhal em função do número de Reynolds. Simulações tridimensionais.

No primeiro tipo de comportamento, representado pelo caso de cilindro isolado e também observado para os casos com espaçamento $5D$ e $8D$, a curva dos casos bidimensionais mantém-se com tendência sempre positiva, formando uma curva suave. Já os resultados advindos de cálculos tridimensionais apresentam valores de St mais baixos a partir de um certo valor de Re , configurando uma mudança de tendência da curva para Re por volta de 200. Este fenômeno também é verificado em resultados experimentais para um cilindro e é explicado pelo aparecimento do modo A (Williamson, 1996c). O aparecimento de tridimensionalidades leva ao aumento da região de formação, como observado na

Figura 4.13*, e diminuindo St . Uma conclusão importante que pode ser tirada da semelhança entre os comportamentos dos casos $1cil$, $t5d$ e $t8d$ é que o espaçamento de $5D$ já é grande o suficiente para que a transição na esteira se dê de forma similar àquela observada no caso de cilindro isolado. As conclusões que dizem respeito à sincronização de St e à diferença sistemática nas curvas em questão, feitas quando da análise dos resultados bidimensionais, também valem aqui.

Figura 4.12 – Comparação dos St 's obtidos através de simulações bidimensionais (2d) e tridimensionais (3d).

* Nesta figura, aparece um pico para os resultados de simulações tridimensionais referentes a cilindro isolado que será abordado na seção 4.2.

Figura 4.13 – Comprimento de formação para os casos *1cil* e *t1,5d*, simulações bi e tridimensionais. Este comprimento é tomado a partir do centro do cilindro mais a jusante.

Já no segundo tipo de comportamento, observado para o espaçamento $1,5D$, os resultados tridimensionais mantêm a tendência crescente para toda a faixa de Re analisada. Mais ainda, os gráficos das simulações bi e tridimensionais praticamente coincidem. Com o intuito de verificar a existência de tridimensionalidades no escoamento, foram traçadas séries temporais da componente da velocidade na direção z , chamada de w , em certos pontos do escoamento. Estas séries estão postas em forma de gráfico na Figura 4.14, para $Re=240$, 270 e 300 . Para fins de comparação, além do caso *t1,5d*, também são expostos os resultados para os mesmos Re da configuração *t5d*. Os pontos analisados estão a uma mesma distância x do cilindro jusante de cada uma das configurações. Observa-se que em ambos os casos, o escoamento é de fato tridimensional, mas as amplitudes de w observadas nas simulações para espaçamento $1,5D$ são consideravelmente menores do que as observadas para $5D$.

Figura 4.14 – Séries temporais da velocidade w para os casos Re 240, 270 e 300, casos $t1,5d$ (ponto (12,92; -0,63; 2,42)) e $t5d$ (ponto (16,42; -0,63; 2,42)), simulações tridimensionais.

Na Figura 4.15 estão desenhadas iso-superfícies de vorticidade instantâneas para as configurações $t1,5d$, $t3d$ e $t5d$, a $Re=270$. Observando essa figura nota-se que no caso $t1,5d$ as tridimensionalidades, nesse caso representadas por iso-superfícies de vorticidade em x , formam-se em uma região relativamente distante do segundo cilindro, não havendo escoamento tridimensional no espaço entre os corpos. Nos outros dois casos percebe-se que há a presença de estruturas tridimensionais entre os corpos, e elas atingem o segundo cilindro. Sabe-se que a primeira instabilidade tridimensional, o modo A, origina-se no núcleo dos vórtices primários. Observando a Figura 4.13, vê-se que o comprimento de formação no caso $t1,5d$ é consideravelmente maior do que aquele observado para $1cil$. Assim, no caso $t1,5d$,

quando os vórtices primários são formados e as tridimensionalidades começam a aparecer, as camadas cisalhantes já estão mais difundidas e portanto essas estruturas são menos intensas e influem menos nas características bidimensionais do escoamento.

Figura 4.15 – Iso-superfícies de vorticidade em x (ω_x) e z (ω_z), simulações tridimensionais a $Re=270$. As superfícies azul-escuras correspondem a $\omega_x=-1,0$, as vermelhas a $\omega_x=1,0$, as amarelas com transparência a $\omega_z=1,0$ e as azul-claras com transparência a $\omega_z=-1,0$.

Como exemplo do terceiro tipo de comportamento, observam-se as curvas para o espaçamento $3D$ e $3,5D$. Neste caso, a simulação bidimensional apresenta uma descontinuidade cuja causa já foi atribuída anteriormente neste texto ao fenômeno da

inversão de arrasto. Já na curva gerada pelos resultados tridimensionais esse salto não aparece na faixa de Re analisada, e a curva segue com a suave inclinação que ela apresenta para os Re mais baixos deste estudo.

Na Figura 4.15 vê-se que para o caso $t3d$ há a presença de tridimensionalidades na região entre os corpos. Apesar dos vórtices não serem desprezados nessa região, eles começam a se formar aí e, conseqüentemente, também as estruturas tridimensionais. Sendo assim, o comprimento de formação aumenta devido à presença dessas estruturas e, por conseguinte, não ocorre a inversão do arrasto. Disso, pode-se traçar a seguinte conclusão: a de que simulações bidimensionais são insuficientes para prever o Re de inversão de arrasto para um dado espaçamento e, analogamente, o espaçamento crítico para um dado Re .

4.2 Transição na esteira

Nesta seção, serão abordados alguns aspectos relativos à transição na esteira. Através de visualizações do escoamento, as mudanças no processo de transição devido à presença do segundo corpo são evidenciadas. Estas visualizações foram feitas tendo como guia as curvas de St , que também são indicativas de diferenças na transição quando o espaçamento é mudado.

Uma configuração de cada tipo de comportamento identificado na seção 4.1.2 será tomada como exemplo para a investigação. Primeiramente, será comparado o caso $t1,5d$ com o caso $t5d$. Com o intuito de melhor caracterizar o fenômeno, na Figura 4.16 estão desenhados contornos de vorticidade na direção x para estes casos em escoamentos a $Re=240$, 270 e 300, no plano $y=0$. Nela pode-se observar que, para o espaçamento $1,5D$, há a formação de estruturas tridimensionais regulares e periódicas para todos os Re estudados. Para $Re=240$ e $Re=270$ observa-se que as estruturas aparecem duas vezes ao longo do comprimento simulado, que é de $5D$. Logo, o comprimento de onda das estruturas na direção do eixo é de cerca de $2,5D$. Já para $Re=300$, as estruturas aparecem três vezes e, portanto, o comprimento de onda aproximado é de $1,667D$. Este mesmo comprimento de onda é observado para $Re=320$.

Figura 4.16 – Contornos de vorticidade adimensional na direção x , no plano $y=0$, para Re 240, 270 e 300, casos $t1,5d$ e $t5d$, simulações tridimensionais.

Já para o espaçamento de $5D$, nas simulações com $Re=240$ e $Re=300$, verifica-se que a tridimensionalidade está espalhada no campo de escoamento de maneira irregular, não havendo a caracterização de nenhuma estrutura específica. Já para $Re=270$, aparece uma estrutura tridimensional bem organizada que se repete 7 vezes ao longo do eixo do domínio, resultando num comprimento de onda de cerca de $0,714D$. Este fato, apesar de aparentemente intrigante, pode ser explicado estudando os resultados obtidos por Barkley; Henderson (1996), que resultaram na curva de estabilidade neutra mostrada na Figura 4.17. Esta curva foi utilizada por Henderson (1997) para determinar os comprimentos com os quais foram feitas

simulações que tinham como objetivo filtrar as demais perturbações fora os modos A ou B. Isso é possível devido à condição de contorno do tipo periódica que é utilizada nas extremidades do domínio na direção z . O mesmo aconteceu aqui, só que sem haver intenção. Examinando a Figura 4.17, onde está marcado em vermelho o ponto referente a $Re=270$ na curva de estabilidade neutra do modo B, vê-se que o valor do comprimento de onda correspondente está entre $0,68D$ e $0,73D$. Assim, o comprimento periódico do cilindro usado nas simulações corresponde a 7 vezes o comprimento de onda do modo B para $Re=270$ e o que se observa nos contornos de vorticidade é a manifestação deste modo. Este mesmo comportamento é observado para o espaçamento $8D$ e para o cilindro isolado, inclusive com o mesmo comprimento de onda. Este fato reforça a tese proposta quando da análise das curvas de St , feita na seção 4.1, onde foi afirmado que para espaçamentos maiores ou iguais a $5D$ o processo de transição na esteira não é significativamente alterado em relação ao que acontece no escoamento ao redor de um cilindro isolado. É também essa coincidência entre Re e comprimento periódico simulado que faz com que se observe um pico do comprimento de formação no caso I_{cil} em $Re=270$, como mostrado na Figura 4.13.

Figura 4.17 – Curva de estabilidade neutra para a esteira bidimensional de von-Kármán com respeito a perturbações na direção do eixo. Retirado de Henderson (1997) e adaptado.

Para suportar a justificativa posta para o aparecimento dessas estruturas regulares, foi testado um caso de cilindro isolado, com $Re=270$ e comprimento periódico (L_c) ligeiramente diferente, igual a 5,3. Neste caso, não se observam estruturas regulares, mas o St calculado foi o mesmo das simulações com $L_c=5$. Este fato corrobora a análise feita aqui e confirma a validade dos resultados expostos até agora. Entretanto, esta mesma justificativa para o aparecimento de padrões não se aplica ao caso $t1,5d$, já que a regularidade das estruturas persiste para toda a faixa de Re simulada e especificamente para $Re=270$ o comprimento de onda não é o mesmo.

Figura 4.18 – Contornos de vorticidade adimensional na direção x , no plano $y=0$, para Re 200, 240 e 270, casos $t3d$ e $t3,5d$, simulações tridimensionais.

A Figura 4.18 traz contornos de vorticidade adimensional na direção x , no plano $y=0$, para $l_{cc}=3D$ e $l_{cc}=3,5D$. Nelas pode-se notar que os padrões apresentados

tem comprimento de onda diferentes daqueles encontrados para $t1,5d$. Para os Re expostos na figura, os comprimentos de onda assumem os valores de $5D$ ou $2,5D$. Para Re maiores a regularidade desaparece nas duas configurações.

Para melhor caracterizar as instabilidades periódicas observadas, são delineados na Figura 4.19 contornos de vorticidade na direção x em planos normais ao eixo, para $Re=270$. Percebe-se que o tipo de simetria observado varia de acordo com o espaçamento entre os cilindros. Para os casos $t1,5d$ e $t3d$ os contornos observados são característicos do modo A, onde as camadas cisalhantes tem sinais diferentes de vorticidade em x dependendo de que lado da esteira estão (ver Figura 3.26). Nota-se também que os contornos para o espaçamento $1,5D$ são mais regulares que os observados para o espaçamento $3D$. Já o espaçamento $5D$ produz um padrão de vorticidade em x característica do modo B, onde o sinal da vorticidade em x das camadas cisalhantes é o mesmo para os dois lados da esteira numa dada cota em z .

Figura 4.19 – Contornos de vorticidade na direção x , em planos normais aos eixos dos cilindros, $Re=270$.

A Tabela 4.3 sumariza os dados de tipo de simetria (modo A ou B) e comprimento de onda (λ) encontrados para os casos onde l_{cc} é menor que o espaçamento crítico e se pode identificar padrões tridimensionais com alguma regularidade. Nessa tabela, observa-se que o espaçamento $t1,5d$, que está no regime C de interferência, a ordem em que os modos aparecem com o aumento de Re não se altera em relação ao que é observado num cilindro isolado. Entretanto, tanto os Re de transição quanto os comprimentos de onda são diferentes. Além disso, o fato dos padrões permanecerem regulares em toda essa faixa de Re pode ser uma consequência da baixa intensidade dessas tridimensionalidades, que acabam por não disparar instabilidades de grande escala.

Tabela 4.3 – Tipos de simetria e comprimentos de onda dos padrões tridimensionais encontrados nas simulações onde l_{cc} é menor que o espaçamento crítico.

Re	$t1,5d$		$t3d$		$t3,5d$	
	simetria	λ	simetria	λ	simetria	λ
200	A	2,5	B	5	B	2,5
240	A	2,5	A	2,5	A	5
270	A	2,5	A	5	A	5
300	B	1,667	Sem padrões regulares			
320	B	1,667				

Já quando o regime de interferência é o D, verificou-se uma mudança na ordem do aparecimento dos modos, com a ressalva de que quando o modo B aparece em $Re=200$, as tridimensionalidades são bastante fracas. Também aqui os comprimentos de onda diferem daqueles encontrados no caso de cilindro isolado. O desaparecimento dos padrões para $Re=300$ indica que as estruturas tridimensionais já são fortes o suficiente para disparar outras instabilidades que acabam por desorganizar o campo de escoamento.

Um outro aspecto interessante que pode ser observado nos resultados referentes a $t1,5d$ é que, para Re elevados, onde a simetria dos vórtices paralelos a x é típica do modo B, as estruturas tridimensionais aparecem primeiramente na região de formação, ficam menos intensas na medida em que são convectadas, mas tornam-se novamente mais claras a uma distância relativamente grande dos corpos, onde os vórtices principais, paralelos a z , já estão praticamente difundidos. Para os Re mais baixos, onde a simetria observada é do tipo do modo A e os vórtices paralelos a x são

mais intensos próximos à região de formação, difundindo-se ao longo da esteira, assim como os vórtices paralelos a z , e não reaparecem mais. A Figura 4.20 traz iso-superfícies que ilustram essa observação.

Figura 4.20 – Iso-superfícies de vorticidade em x (ω_x) e z (ω_z), simulações tridimensionais, configuração $t1,5d$. As superfícies azul-escuras correspondem a $\omega_x = -0,3$, as vermelhas a $\omega_x = 0,3$, as amarelas com transparência a $\omega_z = 1,0$ e as azul-claras com transparência a $\omega_z = -1,0$.

4.3 Coeficiente de arrasto médio

Um outro parâmetro de grande interesse prático é o coeficiente de arrasto médio observado em cada um dos cilindros. Este coeficiente de força, assim como o número de Strouhal, depende tanto do espaçamento entre os cilindros quanto do número de Reynolds. Como na seção 4.1, referente a St , serão analisados primeiramente os dados referentes às simulações bidimensionais e em seguida os resultados tridimensionais.

4.3.1 Simulações bidimensionais

A Figura 4.21 traz os resultados das simulações bidimensionais para o cilindro a montante. Analisando esta figura, verifica-se que existem dois tipos de comportamento distintos do coeficiente de arrasto em relação à variação de Re . O primeiro, observado para o espaçamento $1,5D$, para os primeiros cinco pontos do espaçamento $3D$ e para os primeiros três pontos do espaçamento $3,5D$ é um comportamento praticamente linear, com tendência decrescente em relação ao aumento de Re . Por outro lado, os espaçamentos $5D$, $8D$, os dois últimos pontos de

$3D$, os quatro últimos pontos de $3,5D$ e o cilindro isolado apresentam um comportamento contrário, com tendência de arrasto crescente com o aumento de Re . Esta diferença está diretamente ligada com o fenômeno da inversão do arrasto no segundo cilindro, que pode ser notado na Figura 4.30. Todas as seqüências com tendência crescente no cilindro a montante têm o coeficiente de arrasto do cilindro a jusante positivo, enquanto a tendência decrescente do arrasto do cilindro a montante é sinal de arrasto negativo no cilindro a jusante.

Figura 4.21 – Gráfico do coeficiente de arrasto médio em função de Re . Cilindro a montante, simulações bidimensionais.

Para entender a razão física deste comportamento, é necessário dividir o coeficiente de arrasto em duas componentes, uma devida à pressão e outra devida às tensões de cisalhamento. Para ilustrar, será tomado um espaçamento típico de cada comportamento, $1,5D$ e $8D$, e serão analisados os resultados para os valores 160, 200, 270 e 320 de Re . Os valores médios e da média quadrática das componentes do coeficiente de arrasto estão dispostos na Tabela 4.4 e os resultados da média das componentes do coeficiente de arrasto também estão colocados na forma de gráfico na Figura 4.22.

Figura 4.22 – Componentes de pressão e viscosa do coeficiente de arrasto médio do cilindro a montante, simulações bidimensionais, configurações $t1,5d$ e $t8d$. A letra p indica componente devida a pressão e a letra v indica componente devida à tensão de cisalhamento.

Tabela 4.4 – Componentes de pressão e viscosa da média aritmética e média quadrática do coeficiente de arrasto do cilindro a montante – simulações bidimensionais.

Re	$t1,5d$				$t8d$			
	$\overline{C_D^p}$	$C_D^{p'}$	$\overline{C_D^v}$	$C_D^{v'}$	$\overline{C_D^p}$	$C_D^{p'}$	$\overline{C_D^v}$	$C_D^{v'}$
160	0,8503	$3,7 \cdot 10^{-5}$	0,2394	$4 \cdot 10^{-6}$	0,9999	$1,95 \cdot 10^{-2}$	0,2696	$1,89 \cdot 10^{-3}$
200	0,8476	$5,5 \cdot 10^{-5}$	0,2125	$6 \cdot 10^{-6}$	1,0406	$2,92 \cdot 10^{-2}$	0,2467	$2,56 \cdot 10^{-3}$
270	0,8509	$9,2 \cdot 10^{-5}$	0,1815	$7 \cdot 10^{-6}$	1,0981	$4,63 \cdot 10^{-2}$	0,2182	$3,52 \cdot 10^{-3}$
320	0,8537	$1,1 \cdot 10^{-4}$	0,1659	$7 \cdot 10^{-6}$	1,1273	$5,76 \cdot 10^{-2}$	0,2026	$4,04 \cdot 10^{-3}$

Olhando estes resultados, verifica-se que a componente devido às tensões viscosas tem valores e comportamentos semelhantes para ambos os espaçamentos. Este comportamento é de uma tendência negativa, ou seja, o arrasto devido às tensões viscosas tende a diminuir com o aumento de Re . É interessante observar que o gradiente normal da velocidade tangencial na parede, que pode ser obtido calculando-se a vorticidade na parede (na camada limite a velocidade normal é praticamente nula), cresce com o aumento de Re . No entanto, a viscosidade, que nas equações adimensionais é igual ao inverso de Re , decresce mais rapidamente que este gradiente e o balanço é que a tensão de cisalhamento, que é o produto da viscosidade pelo gradiente normal da velocidade, acaba por decrescer. A Figura 4.23 ilustra esse

fato, com gráficos polares da vorticidade e da tensão de cisalhamento na parede do cilindro a montante, para o espaçamento de $1,5D$ e os Re analisados, num dado instante de tempo. O mesmo é observado para o espaçamento $8D$.

Por outro lado, a componente devida à pressão mantém-se quase que constante para o espaçamento $1,5D$, mas apresenta uma tendência crescente para o espaçamento $8D$. No espaçamento $1,5D$ a inversão de arrasto não ocorre na faixa de Re analisada, ou seja, o segundo corpo está colocado numa posição tal que o primeiro vórtice emitido do primeiro corpo não é formado, pois a camada cisalhante encontra a parede do segundo cilindro antes de se enovelar. Este comportamento está ilustrado na Figura 4.24. Assim, na região entre os cilindros a pressão diminui pouco com o aumento de Re , como ilustrado na Figura 4.25, e o efeito é apenas contrabalançar o aumento de pressão na parte anterior do cilindro 1, como mostrado na Figura 4.26.

Já para o espaçamento $8D$ o mesmo não acontece. Os vórtices do primeiro cilindro são formados antes do segundo cilindro, como está mostrado na Figura 4.24, gerando zonas de baixa pressão de forma alternada, como ilustrado na Figura 4.25. O aumento de Re faz com que a vorticidade nas camadas cisalhantes também aumente e esse efeito faz com que vórtices mais intensos sejam gerados, e por consequência zonas de pressão mais baixas apareçam. Isto justifica o fato da variação mais significativa do arrasto médio de pressão para o espaçamento $8D$. Na Figura 4.26 pode-se confirmar isso ao notar que a diferença nos arrastos de pressão entre os casos em questão se deve essencialmente à maior sucção na parte posterior do cilindro no caso $t8d$. Como estas zonas de baixa pressão na parte posterior aparecem de forma alternada, isto justifica também o fato da flutuação do arrasto de pressão, representada aqui pela média quadrática, ser ordens de grandeza maior no espaçamento $8D$ quando comparada ao espaçamento $1,5D$ (ver Tabela 4.4). Além disso, o enovelamento das camadas cisalhantes faz como que a porção da parede do cilindro envolvida por cada uma das camadas varie no tempo, pois há uma movimentação dessas camadas para a formação dos vórtices da esteira. Por conseguinte, a flutuação do arrasto viscoso também é ordens de grandeza maior no caso $t8d$.

Figura 4.23 – Gráficos polares da vorticidade (cima) e tensão de cisalhamento (baixo) na parede do cilindro a montante. Espaçamento $1,5D$, simulações bidimensionais.

Figura 4.24 – Contornos de vorticidade para os espaçamentos $1,5D$ e $8D$, $Re=270$. Simulações bidimensionais.

Figura 4.25 – Contornos de pressão instantânea para os espaçamentos $1,5D$ e $8D$. Simulações bidimensionais.

Figura 4.26 – Gráficos polares da pressão média num ciclo, na parede do cilindro a montante.
Espaçamentos $1,5D$ e $8D$, simulações bidimensionais.

Em suma, a diferença entre os comportamentos das curvas de arrasto do cilindro a montante nas simulações bidimensionais ocorre porque, enquanto o arrasto no cilindro a jusante é negativo, a variação do arrasto viscoso predomina e, portanto, o arrasto tende a diminuir com o aumento de Re . Em contraposição, para os casos onde os vórtices do primeiro cilindro são formados antes do segundo, o arrasto de pressão varia significativamente, dominando o comportamento da curva de arrasto total. Como a tendência do arrasto de pressão é aumentar com o aumento de Re , a curva de arrasto total também apresenta esta tendência positiva.

Figura 4.27 – Componentes de pressão e viscosa do coeficiente de arrasto médio do cilindro a montante, simulações bidimensionais, configurações 1cil, t5d e t8d.

Serão analisados agora as variações que o $\overline{C_D}$ sofre dentro de cada um dos dois casos de comportamento, de acordo com o espaçamento. A Figura 4.27 traz novamente as componentes viscosa e de forma do arrasto médio, só que dessa vez os dados são relativos às configurações 1cil, t5d e t8d, que são do grupo que apresentam o arrasto total crescente. Nessa figura, pode-se visualizar que a diferença no arrasto entre os supra-citados casos deve-se a uma diferença na componente de pressão. Assim como nos gráficos de St da seção 4.1, existe uma diferença quantitativa sistemática ao longo de toda a curva, e quanto maior o espaçamento, maior o valor do parâmetro. Naquela seção, foi argumentado que há uma espécie de interferência

de proximidade do segundo cilindro no primeiro, devido à perturbação no campo de pressão na região de formação do cilindro 1. Os resultados postos na Figura 4.27 corroboram este argumento. O fato da componente viscosa praticamente não se alterar reforça a tese de que a presença do segundo corpo pouco influi na formação das camadas cisalhantes. A diferença sistemática se concentra no arrasto de forma, e ela se deve à mudanças na região de formação, já que o campo a montante do cilindro 1 permanece praticamente inalterado com a variação de l_{cc} . Destarte, os resultados de arrasto médio obtidos são consistentes com a análise feita quando da apresentação dos resultados de St .

A Figura 4.28 traz os resultados nas componentes de arrasto para as configurações que apresentam arrasto total decrescente. Assim como no gráfico anterior, a diferença entre os casos concentra-se no arrasto de pressão. Todavia, ao contrário do gráfico anterior, aqui quanto maior o espaçamento, menor é o valor de $\overline{C_D}$. Isto acontece porque, para l_{cc} menor do que o crítico, a pressão nas proximidades da região posterior do primeiro cilindro tende a aumentar com o espaçamento, conforme se pode observar na Figura 4.29. A forma diferente da curva de $t1,5d$ nesta mesma figura indica que se trata de um regime diferente, no caso o regime C, do observado nos espaçamentos $3D$ e $3,5D$, que é o regime D.

Figura 4.28 – Componentes de pressão e viscosa do coeficiente de arrasto médio do cilindro a montante, simulações bidimensionais, configurações $t1,5d$, $t3d$ e $t3,5d$.

Figura 4.29 – Pressão média na região entre os cilindros, em casos de espaçamento menor do que o crítico. Simulações bidimensionais, $Re=200$.

Figura 4.30 – Gráfico do coeficiente de arrasto médio em função de Re . Cilindro a jusante, simulações bidimensionais.

Passando para a análise do comportamento do arrasto no cilindro a jusante, olhando a Figura 4.30 nota-se que a tendência é negativa para todos os casos, com a ressalva do intervalo de inversão de arrasto observada para os espaçamentos $3D$ e $3,5D$. O caso de cilindro isolado, por outro lado, apresenta uma curva crescente, o que evidencia a influência do corpo a montante no arrasto do segundo cilindro. Para analisar este fenômeno, o arrasto será mais uma vez dividido nas suas componentes

de pressão e viscosa. Os casos tomados para ilustração são os mesmos que foram utilizados na análise do cilindro a montante. Os valores das componentes do valor médio e da média quadrática do coeficiente de arrasto estão dispostos na Tabela 4.5 e os resultados do coeficiente de arrasto médio estão colocados na forma de gráfico na Figura 4.31.

Tabela 4.5 – Componentes de pressão e viscosa da média aritmética e média quadrática do coeficiente de arrasto do cilindro a jusante – simulações bidimensionais.

Re	$t1,5d$				$t8d$			
	$\overline{C_D^p}$	$C_D^{p'}$	$\overline{C_D^v}$	$C_D^{v'}$	$\overline{C_D^p}$	$C_D^{p'}$	$\overline{C_D^v}$	$C_D^{v'}$
160	-0,1703	$2,12 \cdot 10^{-4}$	$8,65 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-5}$	0,3192	$8,15 \cdot 10^{-2}$	0,1198	$6,89 \cdot 10^{-3}$
200	-0,1939	$2,89 \cdot 10^{-4}$	$1,20 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-5}$	0,2658	$1,06 \cdot 10^{-1}$	$9,84 \cdot 10^{-2}$	$8,58 \cdot 10^{-3}$
270	-0,2224	$6,84 \cdot 10^{-4}$	$-5,32 \cdot 10^{-3}$	$5,3 \cdot 10^{-5}$	0,2188	$1,55 \cdot 10^{-1}$	$8,01 \cdot 10^{-2}$	$1,07 \cdot 10^{-2}$
320	-0,2380	$1,17 \cdot 10^{-3}$	$-8,10 \cdot 10^{-3}$	$8,3 \cdot 10^{-5}$	0,1987	$1,72 \cdot 10^{-1}$	$7,02 \cdot 10^{-2}$	$1,06 \cdot 10^{-2}$

Figura 4.31 – Componentes de pressão e viscosa do coeficiente de arrasto médio do cilindro a jusante, simulações bidimensionais, configurações $t1,5d$ e $t8d$. A letra p indica componente devida a pressão e a letra v indica componente devida à tensão de cisalhamento.

Para os casos onde a esteira do primeiro cilindro é formada antes do segundo, por exemplo no caso $t8d$, a variação do arrasto médio total é determinada principalmente pela variação no arrasto de forma. Nestas configurações, a tendência

negativa é provocada principalmente pelas zonas de sucção formadas no espaço entre os cilindros, que aparecem por causa da presença da esteira de vórtices neste local. Como a pressão no núcleo dos vórtices diminui com o aumento de Re , se observa um aumento da sucção média na porção anterior do segundo cilindro, o que acaba por diminuir o arrasto. A chegada dessas zonas de baixa pressão à porção anterior do segundo cilindro também é evidenciada pela maior flutuação no arrasto de pressão quando comparado com o cilindro a montante. A Figura 4.32 traz a distribuição de pressão média na superfície do segundo cilindro para a configuração $t8d$, e nela pode ser evidenciada a diminuição progressiva da pressão na porção anterior do cilindro a medida que Re é aumentado. Contudo, cabe ressaltar que na porção posterior do cilindro observa-se um comportamento diferente de todos os demais já vistos até aqui. A pressão inicialmente tem uma tendência de diminuir, mas no último Re , ela apresenta um salto positivo. Isso acontece porque, como já foi dito, não há uma região de formação nesse cilindro e, além disso, uma *esteira secundária* é formada mais a jusante dos corpos. Esta esteira resulta da interação entre as carreiras de vórtices da esteira binária desprendida do segundo cilindro.

Figura 4.32 – Distribuição da pressão média na superfície do cilindro a jusante, caso $t8d$, simulações bidimensionais.

A Figura 4.33 traz visualizações dos campos de vorticidade de escoamentos ao redor da configuração *t8d*. Para $Re=200$, vê-se que a interação entre as carreiras se dá aproximadamente para $x=14,5$. Para $Re=270$, essa interação acontece em $x \simeq 12,5$ e para $Re=320$ em $x \simeq 13$. Nesse texto, não nos aprofundaremos em questões concernentes à esteira secundária.

Figura 4.33 – Visualização da esteira secundária através de contornos de vorticidade. Caso *t8d*, simulações bidimensionais.

O arrasto viscoso segue tendência negativa, o que seria esperado com o aumento de Re . Entretanto, os valores estão num patamar mais baixo quando comparados com o cilindro a montante. Isso acontece porque com a presença da esteira, o escoamento que incide no cilindro a jusante já está desacelerado e, portanto o gradiente de velocidade é menor, o que diminui a tensão de cisalhamento. Da mesma forma que no arrasto de pressão, a chegada dos vórtices também é evidenciada por maiores valores de flutuação do arrasto viscoso.

Já para os casos onde ainda não ocorreu a inversão do arrasto, a diminuição do arrasto tem motivação diferente da proposta para o caso do cilindro a montante. Aqui se observa que a diminuição do arrasto de forma com o aumento de Re se deve principalmente à diminuição da pressão na região entre os cilindros. A Figura 4.34 ilustra essa diminuição e nela pode-se perceber que também há uma diminuição na pressão média na parte posterior do segundo cilindro, devida ao encurtamento da região de formação, mas a uma taxa menor. A pressão na região entre os cilindros diminui com o aumento de Re porque aumenta a vorticidade das camadas cisalhantes que a delimitam, intensificando a recirculação de fluido, como pode ser visto na Figura 4.35, onde contornos de vorticidade e linhas de emissão do campo médio são desenhados para os casos de Re extremos. Também nessa figura pode-se observar o encurtamento da região de formação com o aumento de Re .

Figura 4.34 – Gráfico polar da pressão média em um ciclo no cilindro a jusante da configuração $t1,5d$ para diversos Re , simulações bidimensionais.

Figura 4.35 – Contornos de vorticidade do campo médio em um ciclo e linhas de emissão. Espaçamento $1,5D$, simulações bidimensionais, $Re=160$ e $Re=320$.

Ainda na Tabela 4.5, nota-se que para $t1,5d$ há um crescimento da flutuação no arrasto de forma com o aumento de Re , que se deve à intensificação dos vórtices na esteira e ao menor comprimento de formação. Por outro lado a flutuação do arrasto viscoso aumenta principalmente pelo encurtamento da região de formação e conseqüente maior variação dos pontos de separação.

Outro fenômeno interessante que aparece nas simulações com a configuração $t1,5d$ é a inversão do arrasto viscoso médio. Ele acontece porque a presença de recirculação na região entre os cilindros faz com que uma parcela da superfície anterior do segundo corpo esteja submetida a uma tensão de cisalhamento que age no sentido contrário ao da corrente livre, como pode ser notado pelos contornos de vorticidade na Figura 4.35. Com o aumento de Re , a recirculação em questão se intensifica e tem o foco deslocado em direção à superfície a jusante, analogamente ao que se observa no escoamento em uma cavidade. Com isso, o esforço resultante desta tensão aumenta e acaba por superar em módulo aquele devido ao cisalhamento provocado pelo contato das camadas cisalhantes na superfície lateral do cilindro a jusante. Isso só é possível porque, para esse espaçamento, as camadas cisalhantes originadas do primeiro cilindro interagem somente com uma pequena porção da

superfície do segundo cilindro, resultando em uma pequena força de arrasto viscosa no sentido da corrente incidente.

Comparando agora os casos de espaçamento menor do que o crítico, vê-se na Figura 4.36 e na Figura 4.29 que na parte anterior do cilindro, fixado um Re , a pressão média aumenta junto com l_{cc} . Já o comportamento da curva na parte posterior do cilindro pode ser justificada pela diferença de regimes. Para $t1,5d$ (regime C), toda a dinâmica de formação e desprendimento se dá depois do segundo cilindro, e há o desenvolvimento de uma região de formação consistente. O mesmo não acontece para os casos $t3d$ e $t3,5d$ (regime D), onde parte da formação de vórtices se dá na região entre os corpos. Assim, a queda de pressão desenvolvida a jusante acaba sendo menor do que no caso $t1,5d$. Na Figura 4.36, vê-se que a variação da distribuição de pressão na parte anterior prepondera sobre a variação na parte posterior e por isso se verifica que, para l_{cc} menor do que o espaçamento crítico quanto maior o espaçamento, maior o arrasto.

Figura 4.36 – Distribuição de pressão na superfície do cilindro a jusante, $Re=200$, simulações bidimensionais.

4.3.2 Simulações tridimensionais

Passando agora para as simulações tridimensionais, a Figura 4.37 e a Figura 4.38 trazem os resultados fornecidos por estes cálculos, para o cilindro a montante e a jusante respectivamente.

Figura 4.37 – Gráfico do coeficiente de arrasto médio em função de Re . Cilindro a montante, simulações tridimensionais.

Figura 4.38 – Gráfico do coeficiente de arrasto médio em função de Re . Cilindro a jusante, simulações tridimensionais.

Tanto para o primeiro quanto para o segundo cilindro, a configuração $t1,5d$ apresenta comportamento praticamente equivalente ao apresentado em simulações bidimensionais, o que indica que as tridimensionalidades presentes não influenciam significativamente o arrasto nos corpos. Na seção 4.1, onde o número de Strouhal estava sendo analisado, verificou-se igualmente que, para o espaçamento $1,5D$, os resultados bi e tridimensionais foram muito próximos. A mesma análise feita quando da apresentação dos resultados de St aplica-se aqui.

Também semelhantemente ao observado nos resultados de St , os gráficos relativos aos espaçamentos $3D$ e $3,5D$ são similares aos obtidos nos cálculos bidimensionais até o ponto da inversão do arrasto. Neste ponto, enquanto os gráficos bidimensionais (Figura 4.21 e Figura 4.30) apresentam um salto, os gráficos tridimensionais continuam com a mesma tendência apresentada para Re menores. Do mesmo modo que na seção 4.1.2, conclui-se que a presença de tridimensionalidades tem influência crucial na inversão do arrasto e a mesma discussão feita naquela seção aplica-se aqui também. Olhando para a Figura 4.38, vê-se claramente que o arrasto médio no segundo cilindro, calculado com simulações tridimensionais, permanece negativo para as configurações $t1,5d$, $t3d$ e $t3,5d$ em toda a faixa Re estudada.

Para analisar as configurações $t5d$ e $t8d$ foram separadas as componentes viscosas e de pressão do arrasto. Esses dados estão dispostos na Figura 4.39 para o cilindro a montante e na Figura 4.40 para o cilindro a jusante, juntamente com os mesmos dados obtidos no escoamento ao redor de um cilindro isolado. Considerando primeiramente o cilindro a montante, percebe-se que o arrasto viscoso é praticamente o mesmo para o cilindro isolado e os espaçamentos $5D$ e $8D$. As curvas do arrasto de forma têm o mesmo comportamento para os três casos, donde se pode coligir que as tridimensionalidades afetam as configurações com cilindros alinhados em questão da mesma forma que agem no escoamento ao redor de um cilindro isolado. Do mesmo modo que nas simulações bidimensionais, também aqui aparece uma diferença quantitativa sistemática ao longo da faixa de Re . A análise feita na seção anterior, referente aos resultados bidimensionais, em relação a este comportamento também se aplica aqui.

Figura 4.39 – Componentes de pressão e viscosa do coeficiente de arrasto médio do cilindro a montante, simulações tridimensionais. A letra *p* indica componente devida a pressão e a letra *v* indica componente devida à tensão de cisalhamento.

Figura 4.40 – Componentes de pressão e viscosa do coeficiente de arrasto médio do cilindro a jusante, simulações tridimensionais. A letra *p* indica componente devida a pressão e a letra *v* indica componente devida à tensão de cisalhamento.

Voltando a atenção agora para o cilindro a jusante, observando a Figura 4.40 vê-se que neste caso há diferença no arrasto viscoso entre o caso *1cil* e os casos *t5d* e

$t8d$, embora os comportamentos das curvas sejam similares. Essa diferença aparece porque a esteira incide diretamente sobre o segundo cilindro, ou seja, o fluido chega com uma velocidade em média menor do que a da corrente livre. Dessa forma, é de se esperar que a tensão de cisalhamento na parede do cilindro a jusante seja menor, e portanto resulte num arrasto viscoso de magnitude inferior. Vale notar que a diferença entre os valores é maior para Re baixos, onde o escoamento é predominantemente bidimensional. Isso pode ser explicado pela maior difusão de vorticidade na esteira quando estruturas tridimensionais aparecem no escoamento.

É também a difusão da vorticidade na esteira que faz acontecer um outro fenômeno interessante. Ao contrário do que é observado nas simulações bidimensionais, nos cálculos tridimensionais não se observa a formação da esteira secundária para Re a partir de 240, como mostra a Figura 4.41. Os vórtices que chegam ao segundo cilindro são fracos o suficiente para que sofram um desvio significativo em direção à linha $y=0$, tornando a esteira resultante mais estreita e ordenada e, conseqüentemente, fazendo com que a esteira secundária não apareça. O estreitamento da esteira faz com que uma região de mais baixa pressão apareça a jusante do segundo cilindro, conforme mostrado na Figura 4.42, o que provoca um aumento do arrasto. Apesar das camadas cisalhantes opostas do segundo cilindro terem uma interação mais forte, continua não havendo uma região de formação verdadeira.

Figura 4.41 – Contornos de vorticidade instantânea no plano $z=2,5$. Caso $t5d$, $Re=270$, simulações tridimensionais.

Figura 4.42 – Pressão média na superfície do cilindro a jusante, $t5d$, simulações tridimensionais.

Por outro lado, nas simulações com $Re=160$, 195 e 200 , a esteira secundária é observada também nos resultados tridimensionais. Um fato interessante é que para $Re=195$ e 200 observa-se a formação de estruturas 3d na região onde a esteira secundária é iniciada, como se pode notar na Figura 4.43. A topologia observada é relativa ao modo B.

Figura 4.43 – Iso-superfícies de vorticidade em x (ω_x) e z (ω_z), configuração $t1,5d$, $Re=200$, simulações tridimensionais. As superfícies azul-escuras correspondem a $\omega_x = -0,3$, as vermelhas a $\omega_x = 0,3$, as bege com transparência a $\omega_z = 1,0$ e as azul-claras com transparência a $\omega_z = -1,0$.

4.4 Flutuação do coeficiente de sustentação

Um outro parâmetro de interesse no escoamento ao redor de corpos rombudos é a flutuação da força de sustentação. Nesta seção, a média quadrática (valor RMS), representada por C_L' , será tomada como grandeza representativa da amplitude desta flutuação. Da mesma forma que nas seções relativas a St e $\overline{C_D}$, serão analisados em seqüência os resultados bi e tridimensionais.

4.4.1 Resultados bidimensionais

A Figura 4.44 traz os resultados das simulações bidimensionais para a flutuação da sustentação no cilindro a montante. Assim como nos gráficos de St e $\overline{C_D}$, as curvas têm comportamento diferente dependendo se ocorreu ou não a inversão do arrasto. A principal causa da flutuação de sustentação no cilindro a montante é a presença da esteira de von Kármán. Sendo assim, C_L' é menor para os casos de espaçamento menor do que o crítico, e ele aumenta vagarosamente com Re , pois a esteira só se forma depois do segundo corpo. Já nos casos de espaçamento maior do que o crítico a esteira se faz presente na região entre os corpos e as curvas se aproximam daquela encontrada no escoamento ao redor de um cilindro isolado.

Figura 4.44 – Gráfico da flutuação do coeficiente de sustentação do cilindro a montante em função do número de Reynolds. Simulações bidimensionais.

Um ponto curioso se refere a como C_L' se comporta em relação a l_{cc} quando este é maior do que o crítico. Observando o gráfico da Figura 4.44, pontos referentes a $Re=300$ e 320 , vê-se que C_L' é máximo para o espaçamento $3D$, atinge um mínimo em $5D$ e tem um valor intermediário em $1cil$. Com o intuito de explicar este comportamento, a Figura 4.45 traz gráficos polares da vorticidade média na parede em um ciclo, dos casos com l_{cc} maior que o crítico em $Re=300$. Olhando o detalhe em destaque, pode-se perceber que na face posterior do cilindro há uma porção da superfície que está submetida a uma maior vorticidade média nos espaçamentos $t3d$ e $t3,5d$. Isto é um indicativo da presença de vórtices mais intensos nessa região. Na Figura 4.46, vê-se que estes pequenos vórtices que se formam próximo à parede são realmente em média mais intensos no caso $t3d$. Como se trata de um fenômeno alternante, é de se esperar que as flutuações de pressão sejam também maiores nessa região. Desse modo, conclui-se que a maior compactação da região de formação quando l_{cc} está mais próximo do espaçamento crítico dá origem a uma maior flutuação de pressão nas proximidades do extremo jusante do cilindro 1. Com o aumento do espaçamento, a região de formação também se expande e a contribuição dessas zonas à flutuação total passa a ser comparável à observada no escoamento ao redor de um cilindro isolado.

Figura 4.45 – Vorticidade média na parede do cilindro a montante, $Re=300$, simulações bidimensionais.

Figura 4.46 – Contornos de vorticidade média e linhas de emissão do campo médio próximo ao cilindro a montante, $Re=300$, simulações bidimensionais.

Os dados referentes ao cilindro a jusante estão expostos na Figura 4.47. A Figura 4.48 traz contornos instantâneos de pressão para os casos $t1,5d$, $t3,5d$ e $t5d$, com o fim de ilustrar a análise destes resultados.

Figura 4.47 – Gráfico da flutuação do coeficiente de sustentação do cilindro a jusante em função do número de Reynolds. Simulações bidimensionais.

Observa-se que em todos os casos os valores de C_L' são maiores no cilindro a jusante do que no cilindro a montante. Para o espaçamento $t1,5d$ (regime C), a diferença se deve basicamente porque o corpo a jusante está mais próximo da esteira.

Para os espaçamentos $t3d$ e $t3,5d$ antes da inversão do arrasto, além de haver a proximidade da esteira, zonas de recirculação provenientes do processo de formação dos vórtices alternam-se na região anterior do cilindro a jusante, contribuindo também para o aumento de C_L' . Quanto maior o espaçamento, mais forte são as zonas de recirculação nesta região, e mais alto é C_L' . Por fim, nos casos de espaçamento maior do que o crítico, uma das causas da diferença em relação ao cilindro a montante está nos vórtices que atingem o segundo cilindro. Além disso, outra causa importante é o desvio do escoamento que chega ao segundo cilindro, devido à presença de vórtices no espaço entre os corpos. Este desvio faz oscilar também o ponto de estagnação frontal, que é um ponto de alta pressão. Para estes casos, fixado um Re , quanto menor o espaçamento maior o C_L' , pois os vórtices que chegam ao segundo cilindro estão menos difundidos.

Figura 4.48 – Contornos de pressão instantânea, com iso-linhas de vorticidade ($t1,5d$ e $t3,5d$) ou linhas de emissão instantâneas ($t5d$). $Re=200$, simulações bidimensionais.

4.4.2 Simulações tridimensionais

Passando agora aos resultados tridimensionais, a Figura 4.49 traz os resultados para o cilindro a montante. Os casos onde l_{cc} é maior que o espaçamento crítico tem comportamento semelhante entre si. Isso denota que a influência das tridimensionalidades se dá de forma semelhante ao que acontece no caso $1cil$. A queda em C_L' para $Re > 200$ deve-se basicamente por um enfraquecimento nos vórtices provocado pelo aparecimento das tridimensionalidades. Nos casos onde l_{cc} é menor que o crítico, C_L' varia muito pouco, pois o cilindro está distante da esteira.

Figura 4.49 – Gráfico da flutuação do coeficiente de sustentação do cilindro a montante em função do número de Reynolds. Simulações tridimensionais.

Analisando agora os resultados referentes ao cilindro de jusante, dispostos na Figura 4.50, vê-se que quando o espaçamento é maior do que o crítico, as curvas apresentadas têm forma semelhante à do caso $1cil$. Assim como nos resultados bidimensionais, existe uma diferença sistemática ao longo da faixa de Re , diferença esta que é menor quanto maior for o espaçamento e que aparece por causa dos vórtices que atingem o segundo corpo, provenientes do primeiro cilindro. Quanto maior o espaçamento, mais difundidos eles chegam ao cilindro a jusante e, portanto, menor a diferença em relação ao caso $1cil$, onde incide uma corrente uniforme. As

configurações com os outros espaçamentos (menores que o crítico) comportam-se de forma semelhante à observada nas simulações bidimensionais.

Figura 4.50 – Gráfico da flutuação do coeficiente de sustentação do cilindro a jusante em função do número de Reynolds. Simulações tridimensionais.

4.5 Coeficiente de correlação axial

Nesta seção serão expostos e analisados os resultados referentes ao coeficiente de correlação axial das forças de sustentação calculadas ao longo dos cilindros nas simulações tridimensionais. O coeficiente de correlação linear entre dois sinais de sustentação $C_L^a = C_L(z_a)$ e $C_L^b = C_L(z_b)$, onde z_a e z_b são seções do cilindro, é dado pela seguinte fórmula:

$$r_{ab} = \frac{\sum_{i=1}^n (C_{Li}^a - \overline{C_L^a})(C_{Li}^b - \overline{C_L^b})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (C_{Li}^a - \overline{C_L^a})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (C_{Li}^b - \overline{C_L^b})^2}} \quad (4.1)$$

Como foram utilizados 64 modos na discretização na direção z , dispõe-se de 64 séries temporais de C_L , distribuídas de maneira uniforme ao longo do cilindro. Os resultados de correlação foram calculados em função de uma distância $L = z_b - z_a$. Para cada valor de L , a fórmula (4.1) é calculada para todas as seções do cilindro, e é feita uma média dos resultados. Como a condição de contorno nas extremidades do

cilindro é do tipo periódica, temos que $r(L) = r(L_c - L)$, sendo L_c o comprimento periódico do cilindro. Sendo assim, é necessário somente calcular os coeficientes de correlação para $0 \leq L \leq L_c/2$.

Os resultados para todos os espaçamentos e para os $Re \geq 195$ estão dispostos em gráficos na Figura 4.51 e na Figura 4.52. Os resultados para $Re=160$ fornecem um valor constante e igual a 1 para todas as configurações, uma vez que o escoamento é ainda bidimensional para este Re .

Figura 4.51 – Coeficiente de correlação axial. Números de Reynolds: 195, 200 e 240.

Figura 4.52 – Coeficiente de correlação axial. Números de Reynolds: 270, 300 e 320.

Olhando primeiramente para os resultados do cilindro a montante, verifica-se à medida que o Re é aumentado e, conseqüentemente, as tridimensionalidades se intensificam, as configurações com $l_{cc}=3D$ e $l_{cc}=3,5D$ apresentam correlação notavelmente mais baixa do que os outros casos. Podemos inferir a causa deste comportamento olhando para a Figura 4.53, mais especificamente para o detalhe (b). Percebe-se que o fato do primeiro vórtice em formação da esteira do cilindro a montante colidir com o cilindro a jusante faz com que parte das linhas de emissão ao longo do eixo seja desviada em direção ao primeiro cilindro, formando uma região de recirculação, enquanto as linhas de emissão restantes aderem à superfície do segundo cilindro e continuam seguindo na direção de jusante. A porção de fluido

recirculada pode eventualmente encontrar uma zona com vorticidade no plano xy , já que há a formação de estruturas tridimensionais na região entre os cilindros, o que desloca as linhas de corrente na direção z . Este fenômeno pode ser observado no detalhe (a) da Figura 4.53. Sendo assim, ocorre uma distribuição irregular da recirculação na direção do eixo, e estas bolhas de recirculação ficam bastante próximas do primeiro cilindro, interferindo diretamente com as camadas cisalhantes que se desprendem deste. Seria de se esperar também que o caso $t3,5d$ tivesse uma correlação menor do que o $t3d$, uma vez que o primeiro está mais próximo do espaçamento crítico, portanto, retém uma parte maior da circulação dos vórtices na região entre os cilindros. Em suma, a presença de recirculação na região entre os cilindros aliada à presença de tridimensionalidades nessa mesma região justifica a perda de correlação ao longo do eixo no sinal de sustentação para o cilindro a montante, nos casos $t3d$ e $t3,5d$.

Figura 4.53 – Contornos de vorticidade na direção x no plano $y=0$ (a) e contornos de vorticidade na direção z no plano $z=2,5$ (b), ambos com linhas de emissão desprendidas da linha que se estende na direção z e passa pelo ponto $(x,y) = (-3;-0,1)$. Caso $t3d$, $Re=320$.

Figura 4.54 – Contornos de vorticidade na direção x no plano $y=0$ (a), com linhas de corrente desprendidas da linha que se estende na direção z e passa pelo ponto $(x,y) = (-3;-0,1)$, e contornos de pressão no plano $z=2,5$ (b), com linhas de emissão desprendidas do segmento que liga os pontos $(-3; -1; 2,5)$ e $(-3; 1; 2,5)$. Caso $t5d$, $Re=320$.

Já nos gráficos relativos ao cilindro a jusante, percebe-se que com o aumento de Re os casos que perdem correlação mais rapidamente são $t5d$ e $t8d$. Para analisar estes casos, é interessante observar a Figura 4.54. Nota-se que como a primeira esteira chega a ser formada, ou seja, os vórtices que atingem o cilindro a jusante chegam a ser desprendidos da camada cisalhante do cilindro a montante. Não ocorre recirculação na mesma intensidade do caso de espaçamento $3D$ próximo do primeiro cilindro. Por conseguinte, há uma menor influência da presença do segundo corpo nas forças aplicadas no primeiro corpo. Devido ao alto Re , há a presença de várias regiões com vorticidade no plano xy , como pode ser verificado no detalhe (a). Isto faz com que as linhas de emissão se deformem e cheguem bastante desordenadas ao

segundo cilindro. Como pode ser visto no detalhe (b), no plano, as linhas de corrente chegam com um ângulo acentuado em relação à direção x , fazendo com que o ponto de estagnação seja bastante deslocado. Obviamente, este deslocamento tem grande influência na sustentação do cilindro já que inclina o diferencial de pressão da linha jusante/montante, que é bastante significativo. Estando as linhas de corrente deformadas na direção do eixo, é razoável admitir de esta inclinação se dê de forma irregular ao longo de z , e isto explica porque, em Re mais elevados, quando as tridimensionalidades já são fortes o bastante, os valores de r do segundo cilindro são mais baixos para $t5d$ e $t8d$ do que para os outros casos. Além disso, restringindo nossa atenção somente às configurações com $l_{cc}=5D$ e $l_{cc}=8D$, justifica-se a menor correlação para a segunda porque, como nela o espaçamento entre os cilindros é maior, as tridimensionalidades agem no escoamento ao longo de um trecho mais extenso, desviando em maior medida o fluxo de uma direção paralela ao plano xy .

Por fim, outros dois pontos também são dignos de nota. O primeiro deles é o comportamento dos resultados relativos à configuração $t1,5d$ para todos os Re . Tanto para o primeiro quanto para o segundo cilindro r se mantém muito próximo de 1. Isto corrobora as análises feitas anteriormente, quando se observou que para este espaçamento não há a formação de estruturas tridimensionais no espaço entre os corpos e as estruturas que se formam após o segundo cilindro são relativamente fracas e aparecem a uma distância relativamente grande dos corpos. O segundo é a forma harmônica das curvas em $Re=270$. Como visto na seção 4.2, a escolha do comprimento periódico igual a 5 acabou por sintonizar certos modos de emissão neste Re , e isso também se reflete nos resultados apresentados na presente seção.

5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Nesta dissertação foram expostos resultados de cálculos computacionais de escoamentos bi e tridimensionais ao redor de um cilindro isolado e de pares de cilindros alinhados com a corrente, com respectivas discussões. Uma meta central deste trabalho foi entender em maior profundidade os mecanismos físicos envolvidos no fenômeno de interferência. Procurou-se justificar de maneira pormenorizada e fundamentada os diferentes comportamentos encontrados nas curvas apresentadas. A seguir estão delineadas as principais conclusões desse esforço, para cada um dos regimes de escoamento estudados.

Para uma configuração no regime C, cuja representante nos resultados descritos foi $t1,5d$, o sistema se comporta como se o conjunto dos dois cilindros fosse um só corpo, pois na região entre os cilindros o escoamento é permanentemente simétrico. Chamando o comprimento de formação do escoamento ao redor de um cilindro isolado a um dado Re de L_f , no regime C a extremidade montante do segundo cilindro está a uma distância menor do que L_f do centro do primeiro corpo. A curva de St em função de Re tem uma inclinação maior do que a observada no caso $1cil$, e o comprimento de formação, medido a partir do cilindro a jusante, também é consideravelmente maior quando comparado a $1cil$.

No que se refere ao arrasto médio do cilindro a montante, verificou-se que a tendência decrescente com o aumento de Re deve-se basicamente à componente viscosa, já que a componente de pressão permanece praticamente constante. Já para o cilindro a jusante, o arrasto de forma é quem dita a variação, pois as zonas de recirculação, que estão mais próximas do segundo corpo, têm papel preponderante. Tanto é verdade que se observa a inversão do arrasto viscoso, devido à intensificação do escoamento com componente u (velocidade na direção x) negativa nas proximidades da superfície anterior do cilindro 2.

A flutuação da sustentação para esse regime é sensivelmente menor do que nos outros, pois a esteira é formada a uma distância maior dos corpos. Também a

distância em relação à esteira é o que motiva C_L' no cilindro a montante ser menor do que a registrada no cilindro a jusante.

Em todas as curvas apresentadas referentes a $t1,5d$, os resultados bi e tridimensionais praticamente coincidem, e o coeficiente de correlação é muito próximo de 1 em toda a faixa de Re estudada. Isso denota que, para o regime C, as tridimensionalidades, apesar de presentes, pouco influem nas forças impostas aos corpos. Com o auxílio de visualizações do escoamento e de séries temporais da velocidade w em pontos distribuídos na região da esteira, viu-se que as tridimensionalidades no regime C, quando comparadas às tridimensionalidades presentes nos outros regimes, são consideravelmente menos intensas e são formadas em uma região mais distante dos corpos. O processo de transição na esteira é modificado sensivelmente neste regime, em relação ao observado no caso $1cil$. Os tipos de simetrias aparecem na mesma ordem ($2d \rightarrow A \rightarrow B$), mas os comprimentos de onda são muito diferentes, assim com os Re de transição. Outro fato digno de nota é a regularidade dos padrões, que persiste para toda a faixa de Re estudada.

Passaremos agora ao regime D, representado nas simulações bidimensionais pelos primeiros pontos dos casos $t3d$ e $t3,5d$ e nas simulações tridimensionais por todos os pontos dos mesmos casos. Nesse regime os vórtices começam a se formar, mas não são desprendidos completamente, antes do segundo corpo. O foco de circulação ainda ligado à camada cisalhante do primeiro cilindro choca-se com o cilindro a jusante, deformando-se e retraindo parte da circulação na região entre os corpos, enquanto a outra parte segue para jusante, somando-se à camada cisalhante do segundo cilindro. As simulações tridimensionais mostram que o fato dos vórtices começarem a se formar antes do segundo corpo faz com que apareçam estruturas tridimensionais nessa região. Como os vórtices não são convectados, mas sim ficam retidos na região entre os corpos, a presença de velocidade w não nula faz com que as camadas cisalhantes não sejam uniformes ao longo da direção z , o que provoca perda de correlação axial nos esforços impostos ao cilindro a montante.

Outro ponto ainda referente ao regime D é que, nos casos observados nesta investigação que resultaram nesse regime, a extremidade montante do segundo cilindro está a uma distância maior do que L_f do centro do primeiro corpo. Este fato

levou à conclusão de que, para que não haja a formação de uma esteira na região entre os corpos, é suficiente que exista uma alteração significativa nos campos de pressão e velocidades numa região onde $x < L_f$, não sendo estritamente necessária a presença do corpo em si nessa região. Chamou-se de d_i a máxima distância à qual o segundo corpo tem que estar de L_f para que essa alteração ocorra, e verificou-se que d_i tende a diminuir com Re .

O arrasto do cilindro a montante nesse regime tem comportamento similar ao observado para o regime C, só que com um arrasto menor, pois, para $l_{cc} < l_{cc}^C$, a pressão na região entre os corpos aumenta com o aumento de l_{cc} . Isso também é o que determina o comportamento do cilindro a jusante, que também é similar ao observado no regime C, mas dessa vez com valores de arrasto maiores.

Já quanto à flutuação da sustentação, observa-se que a diferença entre os valores registrados para o cilindro a jusante e o cilindro a montante fica ainda maior, quando comparados ao regime C. Isso se deve à presença das zonas de recirculação que se alternam nas proximidades do segundo corpo, resultantes da formação incompleta de vórtices que se dá na região entre os cilindros.

Comparando as curvas bi e tridimensionais referentes aos casos $t3d$ e $t3,5d$, viu-se que na faixa de Re estudada observa-se a inversão do arrasto nos resultados bidimensionais, mas não nos resultados tridimensionais. Disso, conclui-se que, para $Re > 190$, quando estruturas tridimensionais se fazem presentes no escoamento, simulações bidimensionais são insuficientes para se prever o Re para o qual um dado espaçamento é crítico e, da mesma forma, o espaçamento crítico para um dado Re .

O processo de transição na esteira também é sensivelmente modificado neste regime. Observou-se uma alteração na sequência de aparecimento das simetrias relativas aos modos e também mudanças nos comprimentos de onda das instabilidades e nos Re de transição.

Também o regime transicional E pode ser observado. A simulação bidimensional da configuração $t3d$ a $Re=270$ mostrou que esse regime leva à obtenção de um espectro menos suave e a um St mais baixo. Já o caráter bi-estável que este regime pode assumir foi verificado com a simulação do caso $t3,5d$ com $Re=240$.

Finalmente, o regime F, onde há a formação de uma esteira na região entre os corpos, foi encontrado nos últimos pontos das simulações bidimensionais dos casos $t3d$ e $t3,5d$ e em todos os pontos dos resultados bi e tridimensionais referentes aos casos $t5d$ e $t8d$. Verificou-se que, nesse regime, não há uma região de formação verdadeira após o cilindro a jusante, sendo os vórtices emitidos diretamente da superfície deste e dando origem a uma esteira mais larga. Isso acontece porque os vórtices vindos do cilindro a montante chocam-se com o segundo corpo, forçando e sincronizando o desprendimento. O St observado nesse regime é menor do que o encontrado no escoamento ao redor de um cilindro isolado, o que se deve à perturbação nos campos de pressão e velocidades na região de formação do primeiro cilindro e imediações, provocada pela presença do segundo corpo. Essa perturbação dificulta o desprendimento dos vórtices e encurta a região de formação. Desse modo, o que se percebe é que, fixado um Re , a diminuição de l_{cc} leva a um St mais baixo e a uma região de formação mais curta.

Sobre o coeficiente de arrasto médio do cilindro a montante, conclui-se que sua variação se dá fundamentalmente pela variação no arrasto de forma, que em última análise reflete mudanças na região de formação. Por isso é que se observa que quanto maior é o espaçamento, mais alto é o arrasto, pois a pressão na porção posterior do cilindro é menor. Quanto ao cilindro a jusante, também a componente que determina a variação do arrasto total é a de pressão. Nesse caso, dado um espaçamento, é principalmente a chegada de vórtices emitidos na região de formação do cilindro a montante a causadora dessa variação. Porém há um outro fator também bastante importante, que é a formação de uma esteira secundária, originada da esteira binária emitida do segundo cilindro. Esta esteira muda drasticamente a distribuição média de pressão na face posterior do cilindro. Em simulações tridimensionais, quando as estruturas 3d já estão desenvolvidas, o acréscimo de difusão provocado pela presença de tridimensionalidades evita que esta estrutura apareça, e isto é evidenciado por um salto nos valores de arrasto médio.

No tocante à flutuação do coeficiente de sustentação, observa-se uma grande diferença nos valores referentes ao cilindro 1 em relação aos resultados dos outros regimes, devido à existência da esteira na região entre os corpos. Este também é o

motivo que leva também a existir uma diferença de C_L' no cilindro a jusante entre os regimes, pois esta esteira faz com que vórtices intensos, que são zonas de baixa pressão, atinjam o cilindro 2, além de desviar o fluxo incidente, o que faz oscilar significativamente o ponto de estagnação frontal, que é uma zona de alta pressão. Vimos também que para espaçamentos pouco maiores do que o crítico, o cilindro a montante apresenta um valor maior de C_L' , pois a curta região de formação resultante aumenta a intensidade de pequenas zonas de baixa pressão que aparecem alternadamente nas proximidades da superfície posterior do corpo.

Sobre os aspectos tridimensionais referentes a este regime, verificou-se que $l_{cc} \geq 5D$ já é suficiente para que as tridimensionalidades influam nos cilindros de forma semelhante à que acontece no caso l_{cil} . Isto é verificado tanto nas curvas dos parâmetros analisados quanto no processo de transição da esteira. Além disso, a presença de tridimensionalidades bem desenvolvidas na região entre os corpos faz com que o escoamento incidente no cilindro a jusante varie bastante ao longo do eixo, provocando uma maior perda de correlação quanto maior for l_{cc} .

Uma última observação de cunho geral é que, a partir desses resultados, conclui-se que as tridimensionalidades têm influência indireta nas forças que atuam nos cilindros. Melhor explicando, a simples presença de estruturas tridimensionais não leva necessariamente à alteração nas forças impostas pelo fluido ao corpo. É preciso que estas tridimensionalidades sejam intensas o bastante para que alterem características bidimensionais do escoamento, tal como o comprimento de formação. Exemplificando, para espaçamento $1,5D$ as estruturas tridimensionais não são fortes o suficiente para alterar as características bidimensionais importantes do escoamento. Já para o espaçamento $3D$, a presença de tridimensionalidades faz com que a taxa de diminuição do comprimento de formação com Re seja menor e este fato faz com que não ocorra a inversão do arrasto, o que torna as curvas bi e tridimensionais completamente diferentes.

Ficam aqui três sugestões para trabalhos futuros. A primeira delas é a realização de cálculos de estabilidade linear dos campos bidimensionais em relação a perturbações tridimensionais (análise de Floquet), conforme Barkley; Henderson

(1996). A presente dissertação traz evidências de que, para espaçamentos menores do que o crítico, devem existir curvas de estabilidade neutra completamente diferentes daquelas encontradas nos cálculos referentes a cilindro isolado.

A segunda consiste num trabalho similar a esta pesquisa de mestrado, só que com foco nas instabilidades de grande escala. Para gerar estes resultados, bastaria essencialmente aumentar o comprimento periódico do cilindro. Esta pesquisa se mostra bastante interessante na medida em que seria possível comparar os resultados com dados experimentais.

Por fim, a última sugestão é estudar de forma similar ao que foi feito aqui outras configurações de interesse, como cilindros dispostos lado-a-lado ou mesmo agrupamentos de mais de dois cilindros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARIE, M. et al. Pressure fluctuation on the surface of two circular cylinders in tandem arrangement. **Journal of Fluids Engineering**, v.105, p.161-167, 1983.

BARKLEY, D.; HENDERSON, R. D. Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder. **Journal of Fluid Mechanics**, v.322, p.215-241, 1996.

BIERMANN, D.; HERRNSTEIN JR., W. H. The interference between struts in various combinations. **NACA Technical Report**, n.468, 1933.

CIMBALA, J. M.; NAGIB, H. M.; ROSHKO, A. Large structure in the far wakes of two dimensional bluff bodies. **Journal of Fluid Mechanics**, v.190, p.265-298, 1988.

EISENLOHR, H.; ECKELMANN, H. Vortex splitting and its consequences in the vortex street wake of cylinders at low Reynolds numbers. **Physics of Fluids A**, v.1, n.2, p.189-192, 1989.

FEY, U.; KÖNIG, M.; ECKELMANN, H. A new Strouhal-Reynolds number relationship for the circular cylinder in the range $47 < Re < 2 \times 10^5$. **Physics of Fluids**, v.10, n.7, p.1547-1549, 1998.

FORNBERG, B. Steady viscous flow past a circular cylinder up to Reynolds Number 600. **Journal of Computational Physics**, v.61, p.297-320, 1985.

GERRARD, J. H. The mechanics of the formation region of vortices behind bluff bodies. **Journal of Fluid Mechanics**, v.25, n.2, p.401-413, 1966.

HAMMACHE, M.; GHARIB, M. A novel method to promote parallel vortex shedding in the wake of circular cylinders. **Physics of Fluids A**, v.1, n.10, p.1611-1614, 1989.

HAMMACHE, M.; GHARIB, M. An experimental study of the parallel and oblique vortex shedding from circular cylinders. **Journal of Fluid Mechanics**, v.232, p.567-590, 1991.

HENDERSON, R. D. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition. **Journal of Fluid Mechanics**, v.352, p.65-112, 1997.

HENDERSON, R. D.; BARKLEY, D. Secondary instability in the wake of a circular cylinder. **Physics of Fluids**, v.9, n.6, p.1683-1685, 1996.

HENDERSON, R. D.; KARNIADAKIS, G. E. Unstructured spectral element methods for simulation of turbulent flows. **Journal of Computational Physics**, v.122, p.191-217, 1995.

HONJI, H. Downstream persistence of regular vortex streets. **Journal of the Physical Society of Japan**, v.55, n.8, p.2897-2898, 1986.

IGARASHI, T. Characteristics of the flow around two circular cylinders arranged in tandem. **Bulletin of JSME**, v.24, n.188, p.323-331, 1981.

KARNIADAKIS, G. E. Spectral element – Fourier methods for incompressible turbulent flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.80, p.367-380, 1990.

KARNIADAKIS, G. E.; BULLISTER, E. T.; PATERA, A. T. A spectral element method for solution of the two- and three-dimensional time-dependent incompressible Navier-Stokes equations. In: BERGAN, P.; BATHE, K. J.;

WUNDERLICH, W. (Ed.) **Finite element methods for nonlinear problems**. Berlin: Springer, 1986. p.803-817.

KARNIADAKIS, G. E.; ISRAELI, M.; ORSZAG, S. A. High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations. **Journal of Computational Physics**, v.97, p.414-443, 1991.

KARNIADAKIS, G. E.; SHERWIN, S. J. **Spectral/hp element methods for CFD**. New York: Oxford University Press, 1999.

KARNIADAKIS, G. E.; TRIANTAFYLLOU, G. S. Frequency selection and asymptotic states in laminar wakes. **Journal of Fluid Mechanics**, v.199, p.441-469, 1989.

KARNIADAKIS, G. E.; TRIANTAFYLLOU, G. S. Three-dimensional dynamics and transition to turbulence in the wake of bluff objects. **Journal of Fluid Mechanics**, v.238, p.1-30, 1992.

KÖNIG, M.; EISENLOHR, H.; ECKELMANN, H. The fine structure in the Strouhal-Reynolds number relationship of the laminar wake of a circular cylinder. **Physics of Fluids A**, v.2, n.9, p.1607-1614, 1990.

KORCZAK, K. Z.; PATERA, A. T.; An isoparametric spectral element method for solution of the Navier-Stokes equations in complex geometry. **Journal of Computational Physics**, v.62, p.361-382, 1986.

LEWEKE, T.; PROVANSAL, M. The flow behind rings: bluff body wakes without end effects. **Journal of Fluid Mechanics**, v.288, p.265-310, 1995.

LIN, J. C.; YANG, Y.; ROCKWELL, D. Flow past two cylinders in tandem: instantaneous and averaged flow structure. **Journal of Fluids and Structures**, v.16, n.8, p.1059-1071, 2002.

MAHBUB ALAM, Md. et al. Fluctuating fluid forces acting on two circular cylinders in a tandem arrangement at a subcritical Reynolds number. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v.91, p.139-154, 2003.

MENEZHINI, J. R. **Projetos de pesquisa no t3pico gera33o e desprendimento de v3rtices no escoamento ao redor de cilindros**. 2002. 213p. Tese (Livre-Doc4ncia) – Escola Polit3cnica, Universidade de S3o Paulo. S3o Paulo.

MENEZHINI, J. R. et al. Numerical Simulation of flow interference between two circular cylinders in tandem and side-by-side arrangements. **Journal of Fluids and Structures**, v.15, p.327-350, 2001.

MILLER, G. D.; WILLIAMSON, C. H. K. Control of three-dimensional phase dynamics in a cylinder wake. **Experiments in fluids**, v.18, p.26-35, 1994.

MITTAL, S.; KUMAR, V.; RAGHUVANSHI, A. Unsteady incompressible flows past two cylinders in tandem and staggered arrangements. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.25, p.1315-1344, 1997.

NORBERG, C. Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. **Journal of Fluids and Structures**, v.17, p.57-96, 2003.

PATERA, A. T. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. **Journal of Computational Physics**, v.54, p.468-488, 1984.

PRASAD, A.; WILLIAMSON, C. H. K. Three-dimensional effects in turbulent bluff-body wakes. **Journal of Fluid Mechanics**, v.343, p.235-265, 1997a.

PRASAD, A.; WILLIAMSON, C. H. K. Three-dimensional effects in turbulent bluff body wakes. **Experimental Thermal and Fluid Science**, v.14, p.9-16, 1997b.

PROVANSAL, M.; MATHIS, C.; BOYER, L. Bénard-von Kármán instability: transient and forced regimes. **Journal of Fluid Mechanics**, v.182, p.1-22, 1987.

SLAOUTI, A.; STANSBY, P. K. Flow around two circular cylinders by the random-vortex method. **Journal of Fluids and Structures**, v.6, n.6, p.641-670, 1992.

THOMAS, D. G.; KRAUS, K. A. Interaction of vortex streets. **Journal of Applied Physics**, v.35, n.12, p.3458-3459, 1964.

VAN DYKE, M. **An album of fluid motion**. Stanford: Parabolic Press, 1982.

WARBURTON, T. C.; SHERWIN, S. J.; KARNIADAKIS, G. E. Basis functions for triangular and quadrilateral high-order elements. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v.20, n.5, p.1671-1695, 1999.

WIESELSBERGER, C. New data on the laws of fluid resistance. **NACA Technical Note**, v.84, 1922.

WILLIAMSON, C. H. K. Defining a universal and continuous Strouhal-Reynolds number relationship for the laminar vortex shedding of a circular cylinder. **Physics of Fluids**, v.31, n.10, p.2742-2744, 1988a.

WILLIAMSON, C. H. K. The existence of two stages in the transition to three-dimensionality of a cylinder wake. **Physics of Fluids**, v.31, n.11, p.3165-3168, 1988b.

WILLIAMSON, C. H. K. Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers. **Journal of Fluid Mechanics**, v.206, p.579-627, 1989.

WILLIAMSON, C. H. K. The natural and forced formation of spot-like ‘vortex dislocations’ in the transition of a wake. **Journal of Fluid Mechanics**, v.243, p.393-441, 1992.

WILLIAMSON, C. H. K. Vortex dynamics in the cylinder wake. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v.28, p.477-539, 1996a.

WILLIAMSON, C. H. K. Mode A secondary instability in wake transition. **Physics of Fluids**, v.8, n.6, p.1680-1682, 1996b.

WILLIAMSON, C. H. K. Three-dimensional wake transition. **Journal of Fluid Mechanics**, v.328, p.345-407, 1996c.

WILLIAMSON, C. H. K.; BROWN, G. L. A series in $1/\sqrt{\text{Re}}$ to represent the Strouhal-Reynolds number relationship of the cylinder wake. **Journal of Fluids and Structures**, v.12, p.1073-1085, 1998.

WILLIAMSON, C. H. K.; PRASAD, A. Wave interactions in the far wake of a body. **Physics of Fluids A**, v.5, n.7, p.1854-1856, 1993a.

WILLIAMSON, C. H. K.; PRASAD, A. A new mechanism for oblique wave resonance in the natural far wake. **Journal of Fluid Mechanics**, v.256, p.269-313, 1993b.

WILLIAMSON, C. H. K.; PRASAD, A. Acoustic forcing of oblique wave resonance in the far wake. **Journal of Fluid Mechanics**, v.256, p.315-341, 1993c.

WILLIAMSON, C. H. K.; ROSHKO, A. Measurements of base pressure in the wake of a cylinder at low Reynolds numbers. **Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung**, v.14, p.38-46, 1990.

WU, J. et al. Spanwise wake structures of a circular cylinder and two circular cylinders in tandem. **Experimental Thermal and Fluid Science**, v.9, p.299-308, 1994.

WU, J. et al. Three-dimensional vortex structures in a cylinder wake. **Journal of Fluid Mechanics**, V.312, p.201-222, 1996.

ZDRAVKOVICH, M. M. Smoke observations of wakes of tandem cylinders at low Reynolds numbers. **Aeronautical Journal**, v.76, p.108-114, 1972.

ZDRAVKOVICH, M. M. Review of flow interference between two circular cylinders in various arrangements. **ASME Journal of Fluids Engineering**, v.99, p.618-633, 1977.

ZDRAVKOVICH, M. M. The effects of interference between circular cylinders in cross flow **Journal of Fluids and Structures**, v.1, p.239-261, 1987.

ZDRAVKOVICH, M. M. **Flow around circular cylinders – Vol. 1: Fundamentals**. Oxford: Oxford University Press, 1997.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

BLEVINS, R. D. **Flow-induced vibration.** 2.ed. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990.

BOYD, J. D. **Chebyshev and Fourier spectral methods.** 2.ed. New York: Dover, 2000.

CANUTO, C. et al. **Spectral Methods for Fluid Dynamics.** New York: Springer-Verlag, 1988.

GUNZBURGER, M. D. **Finite element methods for viscous incompressible flows: a guide to theory, practice, and algorithms.** Boston: Academic Press, 1989.

ZIENKIEWICZ, O. C.; MORGAN, K. **Finite elements and approximation.** New York: Wiley, 1983.

APÊNDICES

APÊNDICE A – O MÉTODO DE ELEMENTOS ESPECTRAIS

O método de elementos espectrais é uma junção de métodos espectrais puros com o método de elementos finitos, empregando funções de base espectrais em uma formulação de elementos finitos. Do primeiro, ele herda a convergência exponencial e a alta resolução, devido à alta ordem das funções de aproximação. Do segundo vem a divisão do domínio em elementos, que permite refinamento local e flexibilidade geométrica.

Os métodos espectrais (SM) derivam de métodos analíticos de solução de equações diferenciais parciais que apresentam soluções baseadas em expansões em série de funções ortogonais. Estas funções são suaves e o erro da equação diferencial é minimizado segundo um dado critério. A vantagem deste método é a convergência exponencial que possibilita a solução do problema com relativamente poucos graus de liberdade. Contudo, geometrias complexas são difíceis de serem tratadas com esta abordagem.

Os métodos de elementos finitos (FEM) foram os primeiros métodos numéricos que permitiram a solução de problemas em geometrias complexas com certa facilidade. Depois de anos de evolução e estudo, este método hoje é utilizado na solução de praticamente qualquer tipo de equação diferencial parcial e sistemas de equações diferenciais parciais.

Isso posto, podem-se observar nos métodos numéricos utilizados para a simulação de escoamentos duas tendências predominantes. Por um lado, existem métodos de baixa ordem para simulação de problemas em geometrias complexas e “problemas de engenharia” envolvendo modelos físicos avançados (modelos de turbulência do tipo $k-\varepsilon$ por exemplo). Por outro, pesquisas envolvendo simulação numérica direta (DNS) só são possíveis com métodos de ordem superior. Os métodos de elementos espectrais (SEM) procuram conciliar estas duas tendências. Uma outra questão relevante é a simulação durante longos intervalos de tempo. Nesta situação, uma resolução espacial alta é essencial para minimizar os erros (Karniadakis; Israeli; Orzag, 1991), o que é o caso deste trabalho onde se estudam séries temporais de grandezas num escoamento ao redor de cilindros.

A seguir, será feita uma breve exposição dos fundamentos teóricos que norteiam o método utilizado.

A.1 O método de resíduos ponderados e formulação de Galerkin

Ao se aproximar numericamente a solução exata de uma equação, tipicamente o que se faz é substituir uma expansão infinita, que é a solução exata, por uma representação dada por um conjunto finito de funções conhecidas. Tal aproximação, portanto, é incapaz de satisfazer a equação diferencial em todos os pontos do domínio de interesse. Ao invés disso, impõe-se que esta aproximação tenha que satisfazer um número finito de condições. A escolha destas condições é que determina o tipo de método numérico. O método de resíduos ponderados consiste em utilizar funções de peso (ou ponderação) na forma integral ou forma fraca da equação diferencial em questão para se chegar a aproximações válidas da solução.

Para descrever este método, considera-se uma equação diferencial linear num domínio Ω denotada por:

$$\mathbf{L}(u) = 0 \quad (\text{A.1})$$

sujeita a condições de contorno e condições iniciais apropriadas. Assume-se que a solução $u(x, t)$ pode ser representada com uma dada precisão por uma solução aproximada da forma:

$$u^\delta(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{i=1}^{N_{gl}} \hat{u}_i(t) \Phi_i(x) \quad (\text{A.2})$$

onde $\Phi_i(x)$ são funções analíticas chamadas funções de base ou funções de forma, $\hat{u}_i(t)$ são os N_{gl} coeficientes desconhecidos e $u_0(x, t)$ é selecionada de modo a satisfazer as condições de contorno e condições iniciais. A substituição da aproximação (A.2) na equação (A.1) produz um resíduo não-nulo, R , tal que:

$$\mathbf{L}(u^\delta) = R(u^\delta) \quad (\text{A.3})$$

A fim de estabelecer uma maneira única de determinar os coeficientes $\hat{u}_i(t)$, é imposta uma restrição ao resíduo R de modo que a equação (A.3) se reduza a um sistema de equações diferenciais ordinárias em $\hat{u}_i(t)$. Se a equação diferencial original

(A.1) é independente do tempo, então os coeficientes $\hat{u}_i$ podem ser determinados diretamente da solução de um sistema de equações algébricos.

Definindo o produto interno (f, g) no domínio Ω :

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx$$

A restrição colocada a R é que o produto interno do resíduo com uma função peso é igual a zero, ou seja:

$$(v_j(x), R) = 0, \quad j = 1, \dots, N_{gl}$$

A função $v_j(x)$ é a função peso e é daí que vem o nome da técnica.

Se o método apresenta convergência, $R(x)$ tenderá a zero desde que a solução $u^\delta(x, t)$ tenda para a solução exata $u(x, t)$ na medida em que $N_{gl} \rightarrow \infty$. A natureza do esquema é determinado pela escolha das funções de base $\Phi_i(x)$ e das funções peso v_j .

Dentre as várias escolhas possíveis, o método utilizado neste trabalho é o método de Galerkin. Nele as funções de peso são iguais às funções de base, ou seja, $v_j = \Phi_j$. Outros métodos além do método de Galerkin são brevemente descritos em Karniadakis; Sherwin (1999).

Na formulação do tipo Galerkin, condições de contorno do tipo Dirichlet têm que ser especificadas explicitamente enquanto condições de contorno do tipo Neumann são tratadas implicitamente, como parte da formulação, através do uso de integração por partes e de uma função teste que se anule nas partes da fronteira onde condições de contorno do tipo Dirichlet são especificadas (Karniadakis; Sherwin, 1999, p.20). Por isso, as condições de contorno do tipo Neumann são também chamadas de *naturais* enquanto as do tipo Dirichlet são também chamadas de *essenciais*.

Para tratar condições de contorno essenciais não-homogêneas, tendo em vista que as funções de teste são nulas nas regiões onde tais condições são definidas, é preciso que a base utilizada para aproximar a solução contenha outras funções que sejam não nulas nestes contornos. Sem isso, seria impossível satisfazer estas condições de contorno do problema. Assim, a solução aproximada u^δ é composta de uma parcela conhecida u^D , que satisfaz as condições de contorno essenciais, e uma

parcela homogênea desconhecida, u^H , que se anula nos contornos com condição do tipo Dirichlet, ou seja:

$$u^\delta = u^D + u^H$$

Desse modo, o mesmo conjunto de funções agora é usado para representar a solução homogênea u^H e a função de teste v .

Algumas propriedades da formulação de Galerkin que tornam o seu uso interessante são unicidade de solução, ortogonalidade do erro em relação ao espaço de funções de peso, solução que minimiza a norma de energia do erro e equivalência de bases polinomiais no que diz respeito à norma de energia. Esta última característica tem a implicação importante de que a estimativa de erro é independente do tipo de expansão polinomial e depende somente do espaço polinomial. Todas estas propriedades são descritas e provadas em Karniadakis; Sherwin (1999).

A.2 Conceitos fundamentais – caso unidimensional

Neste item serão abordados tópicos referentes a expansões polinomiais utilizadas como funções de base em problemas unidimensionais. A tradição no uso de expansões polinomiais em métodos de elementos finitos pode ser atribuída ao uso histórico de série de Taylor para aproximar funções e também pela existência de regras de integração discreta para estas expansões, o que é uma vantagem, já que facilita a implementação computacional.

Conforme dito anteriormente, o método de elementos espectrais procura juntar o melhor do método de elementos finitos (flexibilidade) com o melhor dos métodos espectrais (convergência exponencial). Neste método, as funções de base são definidas localmente em um elemento. A convergência é resultado de um aumento da ordem de interpolação (refinamento tipo p) e/ou um refinamento da malha (refinamento tipo h). Por isso, o SEM é chamado de método hp .

No refinamento do tipo h a ordem do polinômio utilizado como função de base em todos os elementos é mantida e a convergência é atingida através da redução do tamanho dos elementos. O caractere h representa o tamanho característico de um elemento.

No refinamento do tipo p uma malha fixa é empregada e a convergência é atingida através do aumento da ordem do polinômio em todos os elementos. O

caractere p representa a ordem da expansão. Se o domínio inteiro for tratado como um único elemento, então este método nada mais é do que o método espectral simples.

A.2.1 Decomposição elementar – refinamento tipo h

Subdividir o domínio de interesse em diversos subdomínios tem algumas vantagens. Entre as principais estão a flexibilidade geométrica e o tratamento das equações localmente. O particionamento do domínio deve ser feito de modo que todo o domínio seja coberto pelo novo conjunto de subdomínios e que estes subdomínios não se sobreponham. Em linguagem matemática, podemos dizer que, considerado um domínio Ω , pode-se dividi-lo em N_{el} elementos, denotados por Ω^e , tais que:

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_{el}} \Omega^e \quad \text{e} \quad \bigcap_{e=1}^{N_{el}} \Omega^e = \emptyset$$

Com a finalidade de introduzir e ilustrar os conceitos de mapeamento de coordenadas e elemento padrão, será descrito o início do procedimento de montagem das matrizes para um caso unidimensional de formulação do tipo elementos finitos utilizando funções de base lineares. Para este caso, cada modo tem valor unitário em um nó de cada um dos elementos e decai linearmente para zero ao longo dos elementos que contém este nó. Uma ilustração gráfica está na Figura A.1.

Figura A.1 – Funções de forma lineares unidimensionais

Escrevendo a expressão de um elemento qualquer Ω^e :

$$\Omega^e = \{ x \mid x_{e-1} < x < x_e \}$$

O que se quer é definir uma mudança de coordenadas para um elemento padrão do tipo:

$$\Omega_{st} = \{ \xi \mid -1 < \xi < 1 \}$$

onde podemos definir as funções de base facilmente, em termos da coordenada local ξ , através das expressões:

$$\phi_0(\xi) = \begin{cases} \frac{1-\xi}{2} & \xi \in \Omega_{st} \\ 0 & \xi \notin \Omega_{st} \end{cases} \quad \phi_1(\xi) = \begin{cases} \frac{1+\xi}{2} & \xi \in \Omega_{st} \\ 0 & \xi \notin \Omega_{st} \end{cases}$$

O elemento padrão pode ser mapeado para qualquer domínio Ω^e através da transformação $\chi^e(\xi)$ que expressa a coordenada global x em termos da coordenada local ξ como:

$$x = \chi^e(\xi) = \frac{(1-\xi)}{2} x_{e-1} + \frac{(1+\xi)}{2} x_e, \quad \xi \in \Omega_{st}$$

Este mapeamento tem uma inversa analítica, $(\chi^e)^{-1}(x)$, da forma:

$$\xi = (\chi^e)^{-1}(x) = 2 \frac{(x - x_{e-1})}{(x_e - x_{e-1})} - 1, \quad x \in \Omega^e$$

Introduzidos os conceitos de elemento padrão e de mapeamento de coordenadas locais para globais, pode-se definir formalmente o espaço $\mathcal{X}^\delta$ do elemento hp em uma dimensão: Se denotarmos o espaço de todos os polinômios de grau P definidos no elemento padrão Ω_{st} por $\mathcal{P}_P(\Omega_{st})$, então o espaço discreto $\mathcal{X}^\delta$ é o conjunto de todas as funções $u^\delta(x)$ que existem em H^1 e que são polinômios em ξ dentro de todos os elementos. Isto é, $u^\delta(\chi^e(\xi)) \in \mathcal{P}_P(\Omega_{st})$, que pode ser escrito formalmente como:

$$\mathcal{X}^\delta = \{ u^\delta \mid u^\delta \in H^1, u^\delta(\chi^e(\xi)) \in \mathcal{P}_P(\Omega_{st}), e = 1, \dots, N_{el} \}$$

Esta definição permite que tanto o mapeamento $\chi^e(\xi)$ quanto a ordem do polinômio P^e variem dentro de cada elemento e , portanto permitindo refinamento h , que altera $\chi^e(\xi)$ e refinamento p , que altera P^e .

Em métodos puramente do tipo h , como é o caso do método de elementos finitos, as funções de base são definidas localmente. Elas têm valor não nulo dentro de um único elemento e nulo em todos os outros e são construídas de modo a obter

uma aproximação C^0 da solução (a solução é contínua, mas não suas derivadas). Uma consequência é que a matriz global poder ser obtida através da montagem (*assembly*) das matrizes obtidas para cada elemento.

Observe que agora se pode considerar dois tipos de grau de liberdade: os graus de liberdade locais e os graus de liberdade globais. Cada grau de liberdade local corresponde a um grau de liberdade global, $i^e \rightarrow i$ (i^e é o grau de liberdade local e i é o grau de liberdade global).

A montagem da matriz global M_{ij} a partir das matrizes elementares M_{ij}^e para uma base com N graus de liberdade local pode ser feita usando o seguinte algoritmo:

Para $e = 0 \rightarrow N_{\text{elementos}}$

Para $i^e = 0 \rightarrow N$

Para $j^e = 0 \rightarrow N$

$$i_{\text{global}} = \text{map}(e, i^e), j_{\text{global}} = \text{map}(e, j^e)$$

$$M_{i_{\text{global}} j_{\text{global}}} += M_{i^e j^e}^e$$

Próximo j

Próximo i

Próximo e

Neste algoritmo, a função $\text{map}(e, i)$ retorna o grau de liberdade global do grau de liberdade local i do elemento e .

Observando o algoritmo anterior, é evidente que as matrizes globais são extremamente esparsas e com uma numeração adequada dos graus de liberdade global, a resolução de sistemas lineares com matrizes de ordem N é uma operação com custo $O[N]$. Esta é uma das vantagens de se trabalhar com interpolantes de válidos localmente.

A.2.2 Construção de expansões do tipo p

Como mencionado anteriormente, uma expansão do tipo p num domínio único é uma expansão espectral e portanto pode-se considerar esta abordagem como um método do tipo p global.

Em múltiplas dimensões, domínios complexos tornam difícil a tarefa de achar uma expansão global tanto analiticamente quanto numericamente. A introdução de geometrias complexas pode gerar também a presença de *escalas* diferentes na solução, que podem ter uma estrutura bastante localizada. Tais considerações fazem com que o uso de decomposição em elementos, como discutido na seção anterior, seja necessário.

O processo de construção de expansões do tipo p pode ser sumarizado em dois passos:

- Determinação de uma expansão apropriada dentro de uma região padrão
- Modificação da expansão de modo que ela possa ser facilmente implementada numericamente

No primeiro passo, uma expansão apropriada é tipicamente um conjunto de funções ortogonais ou quase ortogonais. No segundo passo, considerações sobre a implementação computacional desta base têm que ser feitas e a base é modificada, se necessário, para facilitar o processo. Tipicamente, a base é decomposta em contribuições no contorno e no interior de uma região padrão, pois esta abordagem simplifica o processo de montagem global.

Algumas definições relativas a tipos de expansão devem ser feitas:

- Uma base é chamada de uma expansão modal *hierárquica* quando uma expansão de ordem P está contida numa expansão de ordem $P+1$.

Um exemplo deste tipo de base é:

$$\Phi_p^A(x) = x^p \quad p = 0, \dots, P$$

Ilustrando, considerando uma base com $p = 2$, tem-se $\mathcal{X}_2^\delta = \{1, x, x^2\}$. Uma base com $p = 3$, tem-se $\mathcal{X}_3^\delta = \{1, x, x^2, x^3\} = \{\mathcal{X}_2^\delta, x^3\}$. Isto quer dizer que se for necessário incluir mais termos na expansão, os $P + 1$ termos já calculados podem ser utilizados

como valores iniciais. Isto é muito interessante em um problema adaptativo onde não é necessário recalcular nenhuma base, apenas adicionar novos termos.

- Uma base é chamada *nodal* quando os coeficientes da expansão representam a solução aproximada nos nós.

Bases com polinômios de Lagrange são típicas bases nodais. Esta base pode ser escrita em linguagem matemática da seguinte forma:

$$\Phi_p^B(x) = \frac{\prod_{q=0, q \neq p}^P (x - x_q)}{\prod_{q=0, q \neq p}^P (x_p - x_q)} \quad p = 0, \dots, P$$

Esta base não é hierárquica, visto que consiste de $P + 1$ polinômios de ordem P . Comparando com a expansão $\Phi_p^A(x)$, vemos que esta consiste de polinômios de ordem crescente. Porque a base de Lagrange tem a propriedade $\Phi_p^B(x_q) = \delta_{pq}$, onde δ_{pq} é o delta de Kronecker, temos que

$$u^\delta(x_q) = \sum_{p=0}^P \hat{u}_p \Phi_p^B(x_q) = \sum_{p=0}^P \hat{u}_p \delta_{pq} = \hat{u}_q$$

e, portanto, esta base é um exemplo de base nodal.

- Literalmente, qualquer base é uma base *nodal*. No entanto, neste texto, assim como em Karniadakis; Sherwin (1999), usaremos o termo *nodal* para expansões hierárquicas.

Uma base modal, que também apresenta características de ortogonalidade, é a seguinte:

$$\Phi_p^C(x) = L_p(x) \quad p = 0, \dots, P$$

onde $L_p(x)$ são polinômios de Legendre. Polinômios deste tipo estão descritos no apêndice C, que trata de polinômios de Jacobi, dos quais o polinômio de Legendre é um caso especial. Por definição, esta base é ortogonal no produto interno de Legendre, valendo a expressão:

$$(L_p(x), L_q(x)) = \int_{-1}^1 L_p(x) L_q(x) dx = \left(\frac{2}{2p+1} \right) \delta_{pq}$$

A ortogonalidade tem implicações numéricas importantes quando se utiliza o método de Galerkin.

Na escolha de uma dada expansão deve-se levar em conta fatores como eficiência computacional, condicionamento, independência linear da base e propriedades da aproximação.

Quanto à eficiência computacional, devem ser analisados dois aspectos. O primeiro é o custo de construção da matriz, o que pode envolver integração numérica. O segundo é o custo de inversão do sistema matricial para a obtenção da solução. Quando a matriz tem alguma estrutura conhecida, esta última tarefa pode ser feita de forma muito mais eficiente. Karniadakis; Sherwin (1999) mostram, utilizando uma projeção de Galerkin, que a base $\Phi_p^C(x)$ é a mais eficiente das três bases mostradas até aqui, pois gera uma matriz diagonal, que é de fácil construção e inversão. Isto porque é uma base ortogonal. Entretanto, quando utilizada em casos com decomposição elementar, devido à imposição de continuidade C^0 , esta base perde sua ortogonalidade.

No que se refere ao condicionamento, Karniadakis; Sherwin (1999) mostra que, para polinômios de baixa ordem, as três bases tem comportamento similar. Todavia, na medida em que a ordem é aumentada, a base de Legendre se torna superior às outras duas. O condicionamento da matriz reflete o grau de dependência linear da base e influi no número de iterações necessárias para se inverter uma matriz, quando métodos iterativos são empregados.

A.2.3 Decomposição Contorno-Interior em expansões tipo p

Da discussão anterior, presume-se que a melhor escolha para uma base são os polinômios de Legendre ou mais geralmente, um sistema de polinômios ortogonais, pois hierarquia e ortogonalidade são características que levam à geração de matrizes com bom condicionamento numérico. No entanto, se deseja também combinar este tipo de expansão com decomposição elementar do tipo h . A principal dificuldade deste processo aparece quando se tenta garantir um grau de continuidade na

expansão global nas fronteiras dos elementos. Para uma equação diferencial parcial de segunda ordem, foi visto que é suficiente garantir que a solução aproximada u^δ esteja em H^1 . Tipicamente em métodos de elementos finitos, esta condição é satisfeita através da imposição de continuidade C^0 entre elementos, isto é, os modos de expansão global são contínuos em todo o domínio da solução, embora suas derivadas possam não ser.

Esta condição de continuidade pode ser implementada construindo expansões locais que tenham alguns modos com magnitude não nula nos contornos enquanto todos os outros sejam nulos ao longo da fronteira. Este tipo de decomposição é conhecida como *Decomposição Contorno-Interior*. Modos de contorno tem magnitude não nula (geralmente unitária) em uma das fronteiras do domínio e são nulos em todas as outras fronteiras. Modos interiores, também conhecidos como modos de bolha, somente tem magnitude não nula no interior do elemento e são nulos ao longo de todas as fronteiras. As expansões apresentadas nos próximos itens apresentam este tipo de decomposição

A.2.4 Expansão modal tipo p C^0

Como já foi visto, é vantajoso considerar polinômios ortogonais para a construção de bases. Dentre as expansões mais utilizadas para a construção de bases estão aquelas que utilizam os polinômios de Jacobi. Estes polinômios estão descritos no apêndice C. A seguir é apresentada uma base de ordem $P + 1$ e C^0 construída com estes polinômios, válida no domínio padrão $\Omega_{st} = \{ \xi \mid -1 < \xi < 1 \}$:

$$\phi_p(\xi) \mapsto \psi_p(\xi) = \begin{cases} \left(\frac{1-\xi}{2} \right) & p=0 \\ \left(\frac{1-\xi}{2} \right) \left(\frac{1+\xi}{2} \right) P_{p-1}^{1,1}(\xi) & 0 < p < P \\ \left(\frac{1+\xi}{2} \right) & p=P \end{cases} \quad (A.4)$$

Note que $\phi_p(\xi)$ será usado para denotar a definição geral de uma base polinomial local enquanto $\psi_p(\xi)$ tem a definição específica dada acima. Os modos $\psi_0(\xi)$ e $\psi_P(\xi)$ são os mesmos da expansão linear para elementos finitos. Estes são modos de contorno, já que são os únicos que tem valor não nulo nas extremidades do intervalo.

Os modos interiores restantes, por definição, são zero nas extremidades do intervalo e aumentam em ordem polinomial como é típico em uma expansão polinomial.

Os modos interiores poderiam ser definidos com qualquer polinômio que tenha valor nulo nas extremidades, porém o uso de polinômios ortogonais mantém um alto grau de ortogonalidade na matriz cujo acoplamento interior gera matrizes de banda, o que é muito interessante para os processos de inversão.

Agora resta determinar a melhor escolha dentre os polinômios de Jacobi. Karniadakis; Sherwin (1999) mostram que uma escolha bastante interessante é o polinômio de Jacobi simétrico com $\alpha = \beta = 1$, ou seja, $P_p^{1,1}(\xi)$, pois ele gera uma matriz de massa local pentadiagonal, com alguns poucos elementos adicionais nos nós de contorno e uma matriz Laplaciana diagonal, com dois elementos não nulos adicionais nos nós de contorno. Nesta mesma referência são analisados outros exemplos de polinômio de Jacobi e verifica-se que eles não apresentam características tão interessantes quanto o caso de $P_p^{1,1}(\xi)$.

Karniadakis; Sherwin (1999) analisam também bases nodais adaptadas para o SEM. Como estas bases não são utilizadas neste trabalho, entende-se que uma exposição teórica de tais expansões foge do escopo texto. O leitor interessado neste assunto é encorajado a buscar tal referência.

Por fim, cabe aqui observar que até este ponto foi assumido que todas as integrais eram conhecidas. Não é sempre que estas integrais têm expressão analítica estabelecida, e a forma das funções integradas depende especificamente do problema. É preciso portanto, utilizar algum método numérico para cálculo destas integrais, a fim de automatizar este processo. Os métodos de integração numérica são conhecidos por quadraturas. O conceito fundamental é a aproximação da integral por uma soma finita da forma:

$$\int_{-1}^1 u(\xi) d\xi \approx \sum_{i=0}^{Q-1} w_i u(\xi_i)$$

onde w_i são pesos e ξ_i representam as abscissa de Q pontos distintos no intervalo $-1 \leq \xi_i \leq 1$. Neste trabalho é utilizada uma regra específica de quadratura, denominada

quadratura de Gauss. Uma descrição detalhada desta regra pode ser encontrada no apêndice D.

Quanto à diferenciação, a idéia utilizada aqui é que, assumindo uma aproximação polinomial da forma:

$$u^{\delta}(\xi) = \sum_{p=0}^P \hat{u}_p \phi_p(\xi)$$

a diferenciação tem a forma:

$$\frac{du^{\delta}(\xi)}{d\xi} = \sum_{p=0}^P \hat{u}_p \frac{d\phi_p(\xi)}{d\xi}$$

A diferenciação de $u^{\delta}(\xi)$ depende portanto do cálculo de $d\phi_p(\xi)/d\xi$. Qualquer expansão polinomial pode ser representada em termos de polinômios de Lagrange, e para este tipo de polinômio podem ser definidas regras específicas de diferenciação. Os procedimentos de representação das expansões em termos de polinômios de Lagrange, bem como a diferenciação de tais polinômios estão expostos no apêndice E.

A.3 Bases multidimensionais

Os conceitos referentes a bases unidimensionais serão agora estendidos para casos multidimensionais. Todas as expansões discutidas neste item serão consideradas como válidas dentro de uma *região padrão*, que, no caso deste trabalho, é um quadrado, visto que somente malhas com elementos quadriláteros são utilizadas nas simulações.

As bases de expansão aqui discutidas são tais que podem ser expressas em termos de um produto de funções unidimensionais, isto é:

$$\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \psi_p^a(\xi_1) \psi_q^a(\xi_2)$$

Expansões construídas desta maneira permitem que muitas operações numéricas sejam realizadas de maneira bastante eficiente, através da utilização da técnica de *soma fatorada*, discutida no item A.5.1.5.

Para o caso de malhas com elementos quadriláteros, a região padrão bidimensional, Q^2 , é definida como sendo o quadrado:

$$\Omega_{st} = \mathcal{Q}^2 = \{-1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1\}$$

Como esta região é trivialmente definida por um sistema de coordenadas cartesiano padrão, a forma mais natural e direta de construir esta base é tomando o produto de bases unidimensionais, que podem ser pensadas como *tensores* unidimensionais.

Analisando a base unidimensional descrita na eq. (A.4), precebe-se que a expansão é denotada por um subscrito único, p , e portanto pode ser considerada como um tensor unidimensional. A base bidimensional pode, por conseguinte, ser construída através de um produto simples de tensores bidimensionais em cada uma das direções das coordenadas cartesianas. Destarte, a base modal é:

$$\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \psi_p^a(\xi_1) \psi_q^a(\xi_2) \quad 0 \leq p, q; \quad p \leq P_1, q \leq P_2$$

Nota-se pelo uso de limites distintos P_1 e P_2 que a ordem polinomial de expansões multidimensionais podem diferir em cada direção.

A decomposição contorno-interior da base unidimensional é herdada pela base bidimensional. Para os casos bidimensionais, os modos de contorno recebem uma subclassificação. Os modos chamados modos de vértices são aqueles que tem magnitude unitária em um dos vértices e são nulos em todos os outros, e os modos de aresta são todos os modos que tem magnitude não nula ao longo de uma aresta e são nulos em todas outras arestas e vértices que não pertencem a esta aresta.

Considerando a base bidimensional, $\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2)$, como uma matriz que se estende pela região padrão ilustrada na Figura A.2, os índices dos modos de contorno correspondem às suas localizações dentro desta matriz. Por exemplo, o modo de vértice que tem magnitude no vértice A do quadrado corresponde aos índices $p = 0$, $q = 0$ e portanto $\phi_{0,0}(\xi_1, \xi_2) = \psi_0^a(\xi_1) \psi_0^a(\xi_2)$ é o modo deste vértice na expansão utilizada aqui.

Os quatro modos de vértice são:

$$\text{Vértice A: } \phi_{0,0}(\xi_1, \xi_2) = \psi_0^a(\xi_1) \psi_0^a(\xi_2)$$

$$\text{Vértice B: } \phi_{P_1,0}(\xi_1, \xi_2) = \psi_{P_1}^a(\xi_1) \psi_0^a(\xi_2)$$

$$\text{Vértice C: } \phi_{0,P_2}(\xi_1, \xi_2) = \psi_0^a(\xi_1) \psi_{P_2}^a(\xi_2)$$

$$\text{Vértice D: } \phi_{P_1, P_2}(\xi_1, \xi_2) = \psi_{P_1}^a(\xi_1) \psi_{P_2}^a(\xi_2)$$

Figura A.2 - Região padrão bidimensional

Da mesma forma os modos de aresta são:

$$\text{Aresta AB: } \phi_{p,0}(\xi_1, \xi_2) = \psi_p^a(\xi_1) \psi_0^a(\xi_2) \quad (0 < p < P_1)$$

$$\text{Aresta CD: } \phi_{p,P_2}(\xi_1, \xi_2) = \psi_p^a(\xi_1) \psi_{P_2}^a(\xi_2) \quad (0 < p < P_1)$$

$$\text{Aresta AC: } \phi_{0,q}(\xi_1, \xi_2) = \psi_0^a(\xi_1) \psi_q^a(\xi_2) \quad (0 < q < P_2)$$

$$\text{Aresta BD: } \phi_{P_1,q}(\xi_1, \xi_2) = \psi_{P_1}^a(\xi_1) \psi_q^a(\xi_2) \quad (0 < q < P_2)$$

E, por fim, os modos de interior:

$$\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \psi_p^a(\xi_1) \psi_q^a(\xi_2) \quad (0 < p, q; \quad p < P_1, q < P_2)$$

Neste trabalho, as ordens utilizadas em cada uma das direções são sempre iguais. Detalhes quanto a expansões tridimensionais, expansões com ordens diferentes em cada uma das direções e bases em malhas com elementos triangulares podem ser encontrados em Karniadakis; Sherwin (1999).

A.4 Expansões em domínios homogêneos

Em uma larga gama de aplicações, como o escoamento entre placas paralelas ou o escoamento ao redor de cilindros ou grupos de cilindros, o problema de interesse tem pelo menos uma região homogênea, isto é, uma região onde não há um comprimento característico. Esta propriedade indica que neste tipo de problema uma expansão do tipo p pode ser utilizada na direção homogênea, com a ressalva de que a solução tem que ser suave. Considerando a direção homogênea como sendo ξ_3 , a base tridimensional $\phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ pode ser escrita em termos de uma expansão bidimensional qualquer, denominada $\phi_{pq}^{2D}(\xi_1, \xi_2)$, multiplicada por uma expansão completa em ξ_3 , denominada $\varphi_r(\xi_3)$, ou seja:

$$\phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_{pq}^{2D}(\xi_1, \xi_2) \varphi_r(\xi_3)$$

A escolha de $\varphi_r(\xi_3)$ depende das condições de contorno nas extremidades da direção homogênea. Como $\varphi_r(\xi_3)$ é uma expansão puramente tipo p , uma grande variedade de expansões polinomiais podem ser utilizadas, como polinômios de Legendre ou Chebychev. Cada uma destas expansões tem suas propriedades particulares e são apropriadas para uma dada aplicação. Contudo, a expansão mais utilizada é adequada para o caso onde a direção homogênea recebe condição de contorno do tipo periódica e a função empregada neste caso é uma expansão de Fourier, ou seja:

$$\varphi_r(\xi_3) = e^{ir\beta\xi_3}$$

onde

$$\beta = 2\pi/L_{\xi_3}$$

e L_{ξ_3} é o comprimento do domínio calculado na direção periódica, que é a direção homogênea. O grande atrativo desta expansão é o uso da transformada rápida de Fourier para transitar entre o espaço transformado e o espaço físico. Além do mais, quando operadores diferenciais lineares são considerados, têm-se as seguintes expressões:

$$\nabla \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left[\tilde{\nabla}_r \right] \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ ir\beta \end{bmatrix} \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

$$\nabla^2 \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left[\tilde{\nabla}_r^2 \right] \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} - r^2 \beta^2 \right) \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

A introdução destes operadores $\tilde{\nabla}$ e $\tilde{\nabla}^2$ significa que um problema diferencial linear tridimensional pode ser reduzido a uma série de r problemas bidimensionais nos planos de Fourier. A aplicação desta decomposição ao estudo de escoamentos incompressíveis é abordada na seção B.2.

A.5 Formulação multidimensional

Numa analogia direta com a formulação unidimensional, as operações de integração e diferenciação podem ser executadas no nível do elemento e por isso são consideradas *operação locais*. Elas são consideradas no item A.5.1, juntamente com a técnica de *soma fatorada*, que é de primordial importância para a eficiência numérica do método.

Para construir uma expansão que seja globalmente C^0 é preciso introduzir *operações globais*. Construído o sistema matricial global, discute-se a técnica de *condensação estática* que faz uso da decomposição contorno-interior das expansões para desacoplar os modos interiores dos graus de liberdade de fronteira. Estas questões são discutidas na seção A.5.2.

Por fim, o item A.5.3 aborda pontos relativos à representação de condições de contorno essenciais e geometrias curvas no domínio computacional.

A.5.1 Operações Locais

Nesta seção serão abordadas operações de integração e diferenciação, mapeamento, transformações no nível de elemento e a técnica de soma fatorada.

A.5.1.1 Integração

Em domínios multidimensionais, a quadratura de Gauss também pode ser utilizada. A regra de integração na região padrão bidimensional é uma extensão direta da regra de quadratura de Gauss unidimensional. A integração sobre o domínio $Q^2 = \{-1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1\}$ é matematicamente definida como duas integrais unidimensionais da forma:

$$\int_{Q^2} u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \int_{-1}^1 \left\{ \int_{-1}^1 u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 \right\} \Big|_{\xi_2} d\xi_2$$

Se as integrais forem substituídas pelas somas advindas das regras de integração, chega-se a:

$$\int_{Q^2} u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \approx \sum_{i=0}^{Q_1-1} w_i \left\{ \sum_{j=0}^{Q_2-1} w_j u(\xi_{1i}, \xi_{2j}) \right\}$$

onde Q_1 e Q_2 são os números de pontos de quadratura nas direções ξ_1 e ξ_2 , respectivamente. A expressão será exata se $u(\xi_1, \xi_2)$ é um polinômio e Q_1 e Q_2 são escolhidos de forma apropriada.

A.5.1.2 Diferenciação

Como no caso unidimensional, a discussão será restrita à diferenciação no espaço físico, o que significa que a função polinomial é representada por polinômios de Lagrange com um conjunto de pontos que são tipicamente pontos da quadratura.

Para diferenciar uma expansão no interior de uma região padrão quadrada Q^2 da forma:

$$u^\delta(\xi_1, \xi_2) = \sum_{p=0}^{P_1} \sum_{q=0}^{P_2} \hat{u}_{pq} \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2)$$

primeiro representa-se a função em termos de polinômios de Lagrange:

$$u^\delta(\xi_1, \xi_2) = \sum_{p=0}^{Q_1-1} \sum_{q=0}^{Q_2-1} u_{pq} h_p(\xi_1) h_q(\xi_2)$$

onde

$$u_{pq} = u^\delta(\xi_{1p}, \xi_{2q}), \quad Q_1 > P_1, \quad Q_2 > P_2$$

e ξ_p e ξ_q são tipicamente zeros de uma quadratura Gaussiana apropriada. A derivada parcial em relação a ξ_1 é portanto:

$$\frac{\partial u^\delta}{\partial \xi_1}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{p=0}^{P_1} \sum_{q=0}^{P_2} u_{pq} \frac{dh_p(\xi_1)}{d\xi_1} h_q(\xi_2) \quad (\text{A.5})$$

Com base na eq. (A.5) vê-se que para calcular uma derivada num ponto arbitrário em (ξ_1, ξ_2) pe preciso fazer uma soma de $\mathcal{O}(P^2)$ nos índices p e q . Para avaliar a derivada num ponto nodal (ξ_{1i}, ξ_{2j}) do polinômio de Lagrange, a operação cai para $\mathcal{O}(P)$, pois $h_q(\xi_{1j}) = \delta_{qj}$, isto é:

$$\frac{\partial u^\delta}{\partial \xi_1}(\xi_{1i}, \xi_{2j}) = \sum_{p=0}^{P_1} \sum_{q=0}^{P_2} u_{pq} \frac{dh_p(\xi_1)}{d\xi_1} \bigg|_{\xi_{1i}} \delta_{qj} = \sum_{p=0}^{P_1} u_{pj} \frac{dh_p(\xi_1)}{d\xi_1} \bigg|_{\xi_{1i}}$$

Tipicamente, este é o único lugar onde a derivada é necessária pois é parte de uma integral que é calculada usando quadratura de Gauss. O custo total do cálculo de uma derivada em $\mathcal{O}(P^2)$ pontos será por conseguinte $\mathcal{O}(P^3)$. A derivada parcial em relação a ξ_2 pode ser calculada de forma similar, chegando a:

$$\frac{\partial u^\delta}{\partial \xi_2}(\xi_{1i}, \xi_{2j}) = \sum_{q=0}^{P_2} u_{iq} \frac{dh_q(\xi_2)}{d\xi_2} \bigg|_{\xi_{2j}}$$

A.5.1.3 Mapeamento

Visto como integrar e diferenciar numa região padrão, é preciso agora estabelecer como fazer estas operações em regiões que podem ter uma forma arbitrária. Para isso, um mapeamento é introduzido, com a seguinte forma para casos bidimensionais:

$$x_1 = \chi_1^e(\xi_1, \xi_2) \quad x_2 = \chi_2^e(\xi_1, \xi_2)$$

Para elementos com lados retilíneos um mapeamento simples pode ser construído usando os modos de vértices lineares da expansão modal. Esta abordagem leva a um

mapeamento bilinear de um quadrilátero de forma arbitrária onde apenas os vértices precisam ser prescritos (ver Figura A.3). Este mapeamento tem a forma:

$$x_1 = \chi_1(\xi_1, \xi_2) = x_1^A \frac{(1-\xi_1)(1-\xi_2)}{4} + x_1^B \frac{(1+\xi_1)(1-\xi_2)}{4} + x_1^D \frac{(1-\xi_1)(1+\xi_2)}{4} + x_1^C \frac{(1+\xi_1)(1+\xi_2)}{4} \quad (\text{A.6})$$

Figura A.3 – Mapeamento de coordenadas, caso bidimensional

A construção de um mapeamento baseado nos modos de expansão pode ser estendido de modo a incluir regiões com lados curvos usando uma representação isoparamétrica. Este conceito será tratado adiante.

Quando do desenvolvimento de um tipo de mapeamento é importante garantir que o Jacobiano do mapeamento para a região padrão é não-nulo e de mesmo sinal. Para o mapeamento dado, esta condição é satisfeita quando todos os ângulos internos dos elementos têm valores menores que 180° , ou seja, todos os elementos são polígonos convexos.

Para integrar uma função num elemento qualquer Ω^e , é preciso transformar esta região na região padrão Ω_{st} definida em termos de (ξ_1, ξ_2) e calcular:

$$\int_{\Omega^e} u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega_{st}} u(\xi_1, \xi_2) |J_{2D}| d\xi_1 d\xi_2$$

onde J_{2D} é o Jacobiano bidimensional devido à transformação de coordenadas, definido como:

$$J_{2D} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \quad (\text{A.7})$$

Como é assumido que a forma do mapeamento é conhecida, então todas as derivadas parciais necessárias para o cálculo do Jacobiano podem ser calculadas. Calculado o Jacobiano nos pontos de quadratura, basta multiplicar o integrando pelo resultado e calcular a integral da mesma forma discutida na seção A.5.1.1.

Para diferenciar uma função numa região arbitrária Ω^e aplica-se a regra da cadeia que, para um caso bidimensional, resulta em:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Na seção A.5.1.2 foi apresentado um método de diferenciação em relação a ξ_1 e ξ_2 mas é necessário calcular também derivadas da forma $\partial \xi_1 / \partial x_1$. Para o mapeamento linear dado pela eq. (A.6) é possível obter uma fórmula analítica, mas em geral é preciso saber também com tratar elementos curvilíneos. Para isso, pode-se expressar derivadas como $\partial \xi_1 / \partial x_1$ em termos de derivadas parciais em relação a ξ_1 e ξ_2 , que podem ser tratadas utilizando-se os conceitos já apresentados. Para uma função geral dependente de duas variáveis, $u(\xi_1, \xi_2)$ sabe-se pela regra da cadeia que o diferencial total desta função é :

$$du(\xi_1, \xi_2) = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} d\xi_2$$

Substituindo $u(\xi_1, \xi_2)$ por $x_1 = \chi_1(\xi_1, \xi_2)$ e $x_2 = \chi_2(\xi_1, \xi_2)$ o seguinte sistema matricial é obtido:

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{bmatrix}$$

que pode ser invertido, obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

onde J é o Jacobiano definido pela eq. (A.7). Porém, como o mapeamento é assumido bijetor e com inversa expressa por $\xi_1 = (\chi_1)^{-1}(x_1, x_2)$ e $\xi_2 = (\chi_2)^{-1}(x_1, x_2)$ e portanto pode-se aplicar a regra da cadeia diretamente a ξ_1 e ξ_2 :

$$\begin{bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Finalmente, igualando as matrizes de (A.9) e (A.10), vê-se que:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \frac{1}{J} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = \frac{1}{J} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}$$

Por fim, conclui-se que o operador gradiente bidimensional na eq. (A.8) pode ser calculado pois todas as derivadas parciais podem ser expressas em termos de diferenciais em relação a ξ_1 e ξ_2 , que por sua vez podem ser avaliados usando a representação em polinômios de Lagrange utilizada na seção A.5.1.2.

A.5.1.4 Transformações nos Domínios Elementares

Escolhida uma base de expansão, $\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2)$, a seguinte equação é válida:

$$u^\delta(x_1, x_2) = \sum_{pq} \hat{u}_{pq} \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega^e \quad (\text{A.11})$$

onde $\xi_1 = (\chi_1)^{-1}(x_1, x_2)$ e $\xi_2 = (\chi_2)^{-1}(x_1, x_2)$. Analogamente à transformada de Fourier, diz-se que $u^\delta(x_1, x_2)$ representa a variável no espaço *físico*, enquanto que $\hat{u}_{pq}$ representa a variável no espaço *transformado*.

Nesta seção serão abordadas transformações que são efetuadas para se passar de um espaço para o outro. A transformação que leva a variável do espaço físico para o espaço transformado é chamada de *transformação para frente*. A transformação inversa, descrita pela eq. (A.11), é chamada de *transformação para trás*.

Para facilitar a notação em casos multidimensionais, onde um grande número de índices tem que ser utilizados, será empregada a notação matricial. Utilizando esta notação, pode-se definir o vetor $\mathbf{u}$, que é o valor de $u(\xi_{1i}, \xi_{2j})$ nos pontos de quadratura. Se existem Q_1, Q_2 pontos de quadratura em cada direção, então $\mathbf{u}$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{u}[m(ij)] = u(\xi_{1i}, \xi_{2j}) \quad m(ij) = i + j \cdot Q_1$$

Para representar os coeficientes da expansão, $\hat{u}_{pq}$, na forma vetorial uma notação similar é adotada, porém com um acento circunflexo, $\hat{\mathbf{u}}$. Sendo P_1, P_2 a ordem dos polinômios da expansão, a expressão matemática é;

$$\hat{\mathbf{u}}[m(pq)] = \hat{u}_{pq} \quad m(pq) = q + p(P_2 + 1)$$

Os índices correm de forma inversa do vetor $\mathbf{u}$ porque para elementos triangulares isto é interessante para manter uma ortogonalidade parcial (Karniadakis; Sherwin, 1999, p.114). Apesar de neste trabalho serem empregados somente elementos quadriláteros, esta regra foi mantida, pois o código computacional usa esta convenção, na medida em que aceita os dois tipos de elemento.

Cabe ressaltar que os índices não são intercambiáveis, pois nas bases utilizadas é utilizada decomposição contorno-interior. O esquema de armazenamento típico coloca nas primeiras posições os modos de vértice, depois os modos de aresta e por último os modos de interior.

Serão introduzidas agora matrizes importantes para as operações que serão abordadas. A primeira delas é a matriz de peso $\mathbf{W}$, que é diagonal e contém os pesos da quadratura multiplicados pelo Jacobiano nos pontos de quadratura e é definida consistentemente com $\mathbf{u}$. Se J_{ij} representa o valor discreto do Jacobiano $J(\xi_{1i}, \xi_{2j})$, então $\mathbf{W}$ é:

$$\mathbf{W}[m(ij)][n(ij)] = J_{ij} w_i w_j \delta_{mn} \quad m(ij) = n(ij) = i + j \cdot Q_1$$

onde δ_{mn} é o delta de Dirac e $m(ij)$ e $n(ij)$ são definidos de forma consistente com $\mathbf{u}$.

A matriz de base $\mathbf{B}$ tem nas colunas os valores discretos dos modos de expansão nos pontos de quadratura, isto é:

$$\mathbf{B}[m(ij)][m(pq)] = \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) \quad m(ij) = i + j \cdot Q_1, \quad n(pq) = q + p(P_2 + 1)$$

A matriz é montada de modo que suas colunas (laço em $m(ij)$) são ordenadas de modo consistente com $\mathbf{u}$ e suas linhas (laço em $n(pq)$) são ordenadas de modo consistente com $\hat{\mathbf{u}}$.

Para ilustrar o uso da notação matricial, será considerado o produto interno de uma função $v(x_1, x_2)$ com uma função $u(x_1, x_2)$ que é definido como:

$$(v, u) = \int v(\xi_1, \xi_2) u(\xi_1, \xi_2) |J| d\xi_1 d\xi_2$$

Representando a integral usando quadratura Gaussiana, a aproximação discreta é:

$$(v, u)^\delta = \sum_{i=0}^{Q_1-1} \sum_{j=0}^{Q_2-1} w_i w_j v(\xi_{1i}, \xi_{2j}) u(\xi_{1i}, \xi_{2j}) |J_{ij}| \quad (\text{A.12})$$

onde

$$(v, u) = (v, u)_\delta + \varepsilon$$

e ε é o erro devido à integração numérica. Se as funções u e v são suaves o suficiente, em outros termos, se as primeiras Q derivadas são limitadas, então ε será da mesma ordem do erro da aproximação. A operação na eq. (A.12) pode ser efetuada usando os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ e a matriz $\mathbf{W}$:

$$(v, u)_\delta = \mathbf{v}^T \mathbf{W} \mathbf{u}$$

Uma outra matriz a ser definida é aquela que representa o operador de diferenciação. Relembrando a expressão da diferenciação parcial em relação a uma coordenada local ξ_1 definida no espaço físico:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_1}(\xi_{1i}, \xi_{2j}) = \sum_{r=0}^{Q_1} \sum_{s=0}^{Q_2} \frac{dh_r(\xi_1)}{d\xi_1} \bigg|_{\xi_{1i}} h_s(\xi_{2j}) u_{rs}$$

onde $h_r(\xi_1)$ é um polinômio de Lagrange definido com os Q_1 pontos de quadratura. A derivada em relação a ξ_2 é calculada de maneira similar.. Será introduzida agora uma matriz $\mathbf{D}_{\xi_1}$ que age sobre $\mathbf{u}$ de tal forma que $\mathbf{D}_{\xi_1} \mathbf{u}$ é a derivada nos pontos de quadratura, ou seja:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} = \mathbf{D}_{\xi_1} \mathbf{u}$$

onde

$$\mathbf{D}_{\xi_1} [m(ij)] [n(rs)] = \left. \frac{dh_r(\xi_1)}{d\xi_1} \right|_{\xi_{1i}} h_s(\xi_{2j}), \quad m(ij) = n(ij) = i + j \cdot Q_1$$

Para calcular as derivadas com relação às coordenadas globais x_1 e x_2 é preciso utilizar a regra da cadeia. A operação matricial equivalente consiste em pré-multiplicar as matrizes de derivação por uma matriz diagonal contendo fatores tais como $\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}, \dots$ avaliados nos pontos de quadratura. Defini-se $\Lambda(f(\xi_1, \xi_2))$

como uma matriz diagonal cujos componentes são os valores da função $f(\xi_1, \xi_2)$ nos pontos de quadratura

$$\Lambda(f(\xi_1, \xi_2)) [m(ij)] [n(ij)] = f(\xi_{1i}, \xi_{2j}) \delta_{mn}, \quad m(ij) = n(ij) = i + j \cdot Q_1$$

Assim, a forma matricial da expressão:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_2}$$

é

$$\mathbf{u}_{x_1} = \left[\Lambda \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right) \mathbf{D}_{\xi_1} + \Lambda \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) \mathbf{D}_{\xi_2} \right] \mathbf{u}$$

Definidas todas estas matrizes pode-se escrever as transformações em termos matriciais. Primeiramente, a transformação para trás:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}$$

Depois a transformação para frente:

$$\hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{u} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{u}$$

onde a matriz $\mathbf{M}$ é a matriz de massa. Esta expressão está deduzida em Karniadakis; Sherwin (1999), utilizando o método de resíduos ponderados com projeção de Galerkin. É interessante observar que a matriz $\mathbf{M}$ é positiva definida (Karniadakis;

Sherwin, 1999, p.122). Por fim, a operação de interpolação, que consiste numa transformação para frente seguido de uma transformação para trás:

$$\mathbf{u}^\delta = \mathbf{B}^* \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{B}^* (\mathbf{M})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{u}$$

Nesta equação $\mathbf{u}$ é a função a ser interpolada nos pontos de quadratura e $\mathbf{B}^*$ é construída da mesma maneira que a matriz de base $\mathbf{B}$, só que calculando o valor da expansão nos locais onde se deseja interpolar a função $\mathbf{u}^\delta$.

A.5.1.5 Soma Fatorada

Apesar da notação matricial ser bastante clara e ser um tipo de notação que pode facilmente ser transportada para uma linguagem computacional, ela não é a forma mais eficiente de se implementar os algoritmos, dado que muitas dessas matrizes são bastante esparsas. Um método mais eficiente de executar essas operações é a chamada técnica da soma fatorada, que é considerada a chave da eficiência dos métodos espectrais. Ela se baseia no fato de que a expansão é o produto tensorial de funções unidimensionais, o que significa que muitas operações numéricas importantes podem ser efetuadas com uma notável redução no número de operações computacionais.

Para demonstrar como esta técnica funciona, considera-se o cálculo de uma soma em r, s de um vetor f_{rs} com as funções h_{ir} e h_{js} para todos os índices i, j , isto é:

$$U_{ij} = \sum_r^P \sum_s^P f_{rs} h_{ir} h_{js}, \quad \forall i, j \quad (\text{A.13})$$

Se $f_{rs} = f(\xi_{1r}, \xi_{2s})$ e $h_{ir} = h_r(\xi_{1i})$ e $h_{js} = h_s(\xi_{2j})$, então esta soma representaria a interpolação, usando polinômios de Lagrange, de um conjunto de pontos (ξ_{1r}, ξ_{2s}) para um conjunto de pontos (ξ_{1i}, ξ_{2j}) . Se todos os índices i, j, r, s forem da ordem $\mathcal{O}(P)$, então o cálculo total da operação se reduz a uma soma $\mathcal{O}(P^2)$ em r, s para cada um dos $\mathcal{O}(P^2)$ índices i, j de tal forma que a operação total é da ordem $\mathcal{O}(P^4)$.

Contudo, notando que se pode fatorar o termo h_{ir} fora da segunda somatória:

$$U_{ij} = \sum_r^P h_{ir} \left(\sum_s^P f_{rs} h_{js} \right), \quad \forall i, j$$

pode-se calcular a somatória em s e substituir os termos entre parênteses por:

$$\bar{f}_{jr} = \sum_s^P f_{rs} h_{js}$$

Construir $\bar{f}_{jr}$ é uma operação $\mathcal{O}(P^3)$ pois se calcula uma soma $\mathcal{O}(P)$ em s para todos os $\mathcal{O}(P^2)$ índices jr . A soma original (A.13) pode então ser escrita:

$$U_{ij} = \sum_r^P h_{ir} \bar{f}_{jr}, \quad \forall i, j$$

que também é uma operação $\mathcal{O}(P^3)$ pois se está calculando uma soma $\mathcal{O}(P)$ no índice r para todos os $\mathcal{O}(P^3)$ pontos i, j . Conclui-se então que esta fatoração reduziu o custo de uma operação $\mathcal{O}(P^4)$ para uma operação $\mathcal{O}(P^3)$ com a necessidade de armazenamento de um vetor extra de tamanho $\mathcal{O}(P^2)$, o que é típico em somas bidimensionais. Somas como estas aparecem, por exemplo, na transformação para trás e no cálculo de produtos internos. Detalhes quanto a implementações tridimensionais e exemplos detalhados podem ser encontrados em Karniadakis; Sherwin (1999).

A.5.2 Operações globais

Na seção A.5.1 foram vistas operações realizadas no nível do elemento e não foi feita nenhuma consideração a respeito de como as informações de diferentes elementos são acopladas. Para resolver equações diferenciais parciais de segunda ordem é suficiente que a aproximação global seja de classe C^0 . Para isso, as informações dos elementos são acopladas entre si e, portanto, operações que envolvem inversão de um sistema matricial se tornam operações *globais*. Para executar este tipo de operação, é preciso realizar a montagem da matriz global, conhecida em linguagem de elementos finitas como *assembly*, que constrói uma base de expansão global de classe C^0 a partir das funções de forma dos elementos.

Este tópico já foi abordado para o caso unidimensional com funções de forma lineares na seção A.2.1, e agora os conceitos serão estendidos para casos multidimensionais. Uma característica das expansões que estão sendo utilizadas que

é fundamental para este processo é a decomposição contorno-interior, pois através do acoplamento somente dos modos de contorno é possível construir uma expansão global que atenda os requisitos estabelecidos.

Na prática, muitas das operações podem ser executadas em nível local, bastando depois somar as contribuições de modo a formar o sistema global. Para isso, é preciso definir um procedimento de montagem do sistema local a partir de sistemas locais. Isto será discutido na seção A.5.2.1. O sistema resultante é analisado na seção A.5.2.2, e na seção A.5.2.3, uma técnica de manipulação de matrizes conhecida como condensação estática, que pode ser aplicada ao sistema global para invertê-lo de forma eficiente, é introduzida.

A.5.2.1 Montagem das matrizes globais e conectividade

Primeiramente é preciso definir os modos de expansão local $\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2)$ dentro do domínio de solução global Ω . Se Ω for dividido em N_{el} elementos contíguos chamados Ω^e os modos de expansão $\phi_{pq}^e(\xi_1, \xi_2)$ são definidos da seguinte forma:

$$\phi_{pq}^e(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) & (x_1, x_2) \in \Omega^e \\ 0 & (x_1, x_2) \notin \Omega^e \end{cases}, \quad \begin{aligned} \xi_1 &= [\chi_1^e]^{-1}(x_1, x_2) \\ \xi_2 &= [\chi_2^e]^{-1}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Olhando a expressão acima vê-se que os modos de interior, que são nulos na fronteira dos elementos, são de classe C^0 em nível global, mas os modos de contorno não têm esta propriedade e é com eles que será feito o acoplamento das variáveis entre os elementos.

Graus de liberdade locais são definidos como coeficientes de expansão elementares em todos os elementos. O vetor $\hat{\mathbf{u}}$, previamente introduzido, representa uma lista consecutiva de todos os coeficientes dos modos de expansão de um elemento. Usando o sobrescrito e pra indicar o vetor elementar dos coeficientes de expansão $\hat{\mathbf{u}}^e$, então o vetor de todos os graus de liberdade locais, denominado $\hat{\mathbf{u}}_l$, é:

$$\hat{\mathbf{u}}_l = \underline{\hat{\mathbf{u}}}^e = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}^1 \\ \hat{\mathbf{u}}^2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}^{N_{el}} \end{bmatrix}$$

que tem dimensão N_{eof} . Aqui também é introduzida a notação de um vetor sublinhado, que implica em extensão a todas as regiões elementares. Como complemento de $\hat{\mathbf{u}}_l$ define-se $\hat{\mathbf{u}}_g$ que indica os graus de liberdade globais e é um vetor de dimensão N_{dof} . O mapeamento dos graus de liberdade globais para os graus de liberdade locais é representado pela multiplicação de $\hat{\mathbf{u}}_g$ pela matriz $\mathcal{A}$, isto é:

$$\hat{\mathbf{u}}_l = \mathcal{A} \hat{\mathbf{u}}_g \quad (\text{A.14})$$

$\mathcal{A}$ é uma matriz retangular esparsa de dimensão $N_{eof} \times N_{dof}$ cujos valores não nulos podem ser 1 ou -1 dependendo da forma dos modos de contorno. Para uma expansão nodal, todas as entradas são positivas. Toda linha da matriz $\mathcal{A}$ contém somente uma entrada, dado o fato de que cada grau de liberdade local está relacionado a um grau de liberdade global. Toda coluna da matriz $\mathcal{A}$ contém pelo menos uma entrada e a soma dos valores absolutos das colunas indica quantos modos locais contribuem para a construção de um grau de liberdade global, o que é conhecido como multiplicidade do modo.

O processo de mapeamento de graus de liberdade locais para graus de liberdade globais é feito pela matriz transposta de $\mathcal{A}$, ou seja:

$$\hat{\mathbf{v}}_g = \mathcal{A}^T \hat{\mathbf{v}}_l \quad (\text{A.15})$$

Usou-se $\hat{\mathbf{v}}$ ao invés de $\hat{\mathbf{u}}$ para enfatizar que as matrizes $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^T$ não são inversas uma da outra.

Na prática, não é vantajoso construir $\mathcal{A}$ explicitamente devido ao tamanho e esparsidade da matriz. As operações podem ser implementadas numericamente de forma análoga à descrita na seção A.2.1, através do uso de uma matriz de mapeamento que será chamado de $map[e][i]$. Esta matriz nada mais é do que a matriz de conectividade e tem a dimensão $N_{el} \times \max_e(N_m^e)$, onde N_m^e é o número de modos de expansão em um elemento. Tipicamente e neste trabalho, N_m^e é igual para todos os elementos embora, em geral, este valor possa variar entre os elementos. A matriz $map[e][i]$ tem como entradas o valor global do i -ésimo coeficiente de expansão do e -

ésimo elemento. Isto posto, a operação descrita pela eq. (A.14) pode ser implementada pelo seguinte algoritmo:

Para $e = 1 \rightarrow N_{el}$

Para $i = 0 \rightarrow N_m^e - 1$

$\hat{\mathbf{u}}^e[i] = \text{sinal}[e][i] \cdot \hat{\mathbf{u}}_g[\text{map}[e][i]]$

Próximo i

Próximo e

onde $\text{sinal}[e][i]$ é uma matriz de mesma dimensão de $\text{map}[e][i]$ contendo entradas de valor 1 ou -1 dependendo da conectividade modal entre dois elementos, como será discutido um pouco mais a frente. Já a eq. (A.15) pode ser calculada utilizando o seguinte algoritmo:

Para $e = 1 \rightarrow N_{el}$

Para $i = 0 \rightarrow N_m^e - 1$

$\hat{\mathbf{v}}_g[\text{map}[e][i]] = \hat{\mathbf{v}}_g[\text{map}[e][i]] + \text{sinal}[e][i] \cdot \hat{\mathbf{v}}^e[i]$

Próximo i

Próximo e

O procedimento de montagem envolve essencialmente a conectividade dos modos de contorno, pois como os modos de interior já são globalmente de classe C^0 , podem ser numerados independentemente como graus de liberdade globais. Na seção A.5.2.3 será visto que o procedimento de montagem prescinde dos modos de interior, pois estes podem ser removidos do sistema matricial global pelo uso da técnica de condensação estática. Nesta seção, portanto, o foco será no desenvolvimento de um mapeamento de fronteira $b\text{map}[e][i]$ e nas questões envolvidas na construção desta expansão de alta ordem.

Assumindo a ordenação dos nós na qual os nós de contorno são numerados primeiro, se há $nb[e]$ modos de fronteira no e -ésimo elemento, o procedimento de montagem do sistema local para o global pode ser feito segundo o seguinte algoritmo:

Para $e = 1 \rightarrow N_{el}$

Para $i = 0 \rightarrow nb[e] - 1$

$$\hat{\mathbf{v}}_g [bmap[e][i]] = \hat{\mathbf{v}}_g [bmap[e][i]] + sinal[e][i] \cdot \hat{\mathbf{v}}^e [i]$$

Próximo i

Próximo e

cuja representação matricial é:

$$\hat{\mathbf{v}}_g = \mathcal{A}_b^T \hat{\mathbf{v}}_b^e$$

Este procedimento é idêntico ao sistema de mapeamento total, usando inclusive a mesma notação, só que agora somente os primeiros $nb[e]$ elementos são usados. A matriz $\mathcal{A}_b$ é uma sub-matriz de $\mathcal{A}$.

Será considerada agora a construção da matriz $sinal[e][i]$ para uma expansão modal em elementos bidimensionais quadriláteros. Extensões para elementos triangulares e tridimensionais podem ser encontrados em Karniadakis; Sherwin (1999).

Quando uma expansão com mais de um modo de aresta é considerada, é preciso levar em conta a orientação do sistema de coordenadas local do elemento, pois dependendo dele o sinal dos modos de aresta ímpares tem que ser trocado. A razão para isso é que a forma dos modos elementares são definidos em relação ao sistema de coordenadas local. Se os sistemas locais de dois elementos vizinhos são orientados de forma que duas coordenadas vizinhas estão em direção oposta, então o sinal dos modos ímpares de um dos dois elementos tem que ser invertido. Elementos vizinhos com sistema de coordenadas concordantes estão ilustrados na Figura A.4, e elementos vizinhos com sistema de coordenadas não concordantes estão ilustrados na Figura A.5.

Figura A.4 – Elementos vizinhos com sistemas de coordenadas locais concordantes. Retirado de Karniadakis; Sherwin (1999) e adaptado

Olhando para a Figura A.5 vemos que é necessário também inverter a ordem dos modos de arestas. Normalmente este problema é abordado quando da definição da numeração global dos nós da aresta. Como os modos hierárquicos de contorno tem sua interpretação física ligada ao fato de estarem associados a um vértice ou aresta, a ordem dos modos de uma dada aresta pode ser mudado, desde que a aresta não seja mudada. Por conseguinte, o procedimento de numeração global de modos de aresta deve prever a verificação de que modos com polinômios de mesma ordem estão sendo associados. Uma vez montada corretamente a matriz de conectividade, este problema está solucionado e todas as operações podem ser executadas normalmente.

Todavia, ainda resta o problema do sinal, que pode ser resolvido por um procedimento automático que identifica quais arestas que tem modos ímpares que precisam ter seus sinais trocados. Tal procedimento pode ser construído considerando o sinal do produto interno entre dois vetores representando a direção e sentido de uma aresta em coordenadas globais. Dado que sempre se conhece os vértices que

definem um elemento, define-se Δx_a^e como um vetor paralelo a uma aresta no elemento e orientado de acordo com o sentido da coordenada local ξ_1 ou ξ_2 . Por exemplo, para a aresta onde $\xi_2 = -1$:

$$\Delta x_a^e = \begin{bmatrix} \chi_1(1, -1) - \chi_1(-1, -1) \\ \chi_2(1, -1) - \chi_2(-1, -1) \end{bmatrix}, \quad x_1 = \chi_1(\xi_1, \xi_2), \quad x_2 = \chi_2(\xi_1, \xi_2)$$

Para determinar se um modo de aresta ímpar precisa ter seu sinal trocado ou não, em uma aresta comum a dois elementos e e k , o seguinte teste é aplicado:

$$\Delta x_a^e \cdot \Delta x_a^k < 0 \quad \text{e} \quad k > e$$

Se o resultado do teste for verdadeiro, então inverte-se o sinal do modo no elemento e . O critério extra $k > e$ certifica que apenas um dos dois modos de aresta tem o sinal trocado. Este teste simplesmente indica se os sistemas de coordenadas locais ao longo de uma aresta específica têm sentidos iguais ou opostos.

Figura A.5 – Elementos vizinhos com sistemas de coordenadas locais não concordantes.

Retirado de Karniadakis; Sherwin (1999) e adaptado

A.5.2.2 O sistema matricial global

Foi visto na seção anterior como montar um sistema global a partir de sistemas locais. Esta técnica será empregada agora para gerar matrizes globais a partir de matrizes elementares. Na notação empregada aqui, o sobrescrito e é uma variável que se refere ao número do elemento, portanto matrizes ou vetores com este sobrescrito são elementares. Matrizes ou vetores sem este sobrescrito são entendidas como globais. Isto posto, vale ressaltar as igualdades: $\hat{\mathbf{u}}_l = \underline{\hat{\mathbf{u}}}^e$ e $\mathbf{u}_l = \underline{\mathbf{u}}^e$.

Como exemplo de montagem de sistema matricial global, será explanada a montagem das matrizes para a operação de transformação para frente em nível global. Em nível elementar, esta operação é descrita pela expressão:

$$\mathbf{M}^e \hat{\mathbf{u}}^e = (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{W}^e \mathbf{u}^e \quad (\text{A.16})$$

Pode-se representar esta operação em todos os elementos em termos de uma expressão matricial global com o uso de matrizes diagonais por blocos da forma:

$$\underline{\mathbf{M}}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}^{N_{el}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{(\mathbf{B}^e)^T \mathbf{W}^e} = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}^1)^T \mathbf{W}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{B}^2)^T \mathbf{W}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\mathbf{B}^{N_{el}})^T \mathbf{W}^{N_{el}} \end{bmatrix}$$

O sistema matricial:

$$\underline{\mathbf{M}}^e \hat{\mathbf{u}}_l = \underline{(\mathbf{B}^e)^T \mathbf{W}^e \mathbf{u}_l} \quad (\text{A.17})$$

representa a transformação para frente local em todos os N_{el} elementos e é equivalente à eq. (A.16). Este sistema pode ser invertido pois os sistemas locais estão desacoplados e são individualmente inversíveis. Entretanto, não há garantia de continuidade entre os elementos. Porém, sabe-se da seção A.5.2.1 que a eq. (A.14)

determina os graus de liberdade locais a partir dos graus de liberdade globais. Substituindo a eq. (A.14) na eq. (A.17), chega-se a:

$$\underline{\mathbf{M}}^e \underline{\mathcal{A}} \hat{\mathbf{u}}_g = \underline{(\mathbf{B}^e)^T} \mathbf{W}^e \mathbf{u}_l \quad (\text{A.18})$$

O efeito de pós-multiplicar a matriz $\underline{\mathbf{M}}^e$ por $\underline{\mathcal{A}}$ é a imposição da continuidade entre os elementos, através da montagem adequada das linhas da matriz $\underline{\mathbf{M}}^e$. A matriz resultante $\underline{\mathbf{M}}^e \underline{\mathcal{A}}$ não é quadrada pois as colunas do sistema não foram adequadamente montadas. Isto pode ser feito através de pré-multiplicação dos dois lados da eq. (A.18) por $\underline{\mathcal{A}}^T$, de modo a obter o sistema global quadrado:

$$\left[\underline{\mathcal{A}}^T \underline{\mathbf{M}}^e \underline{\mathcal{A}} \right] \hat{\mathbf{u}}_g = \underline{\mathcal{A}}^T \underline{(\mathbf{B}^e)^T} \mathbf{W}^e \mathbf{u}_l \quad (\text{A.19})$$

que pode ser resolvido, pois é um sistema linear determinado. A matriz resultante da expressão entre colchetes é a matriz de massa global $\mathbf{M}$. Qualquer sistema matricial global pode ser derivado de um sistema matricial local utilizando-se um procedimento idêntico a este.

Por fim, nota-se que para problemas grandes calcular produtos de matrizes de forma explícita é inviável e nesses casos, a técnica de soma fatorada pode ser utilizada. O sistema resultante é bastante grande, e também tipicamente bastante esparso. A inversão ou fatoração direta são praticamente inviáveis. Na seção A.5.2.3, será visto como reduzir este sistema matricial em componentes menores baseado na decomposição natural de métodos de elementos espectrais.

A.5.2.3 Condensação estática

Nesta seção será apresentada a técnica de condensação estática, que é utilizada para resolver sistemas matriciais tirando proveito da estrutura do método de elementos espectrais. Embora esta técnica possa ser aplicada também a um sistema matricial não-simétrico, aqui a atenção será restrita somente a sistemas simétricos, que são típicos quando se usa o método de Galerkin. Para o uso desta técnica, similarmente ao esquema de numeração local a convenção usada para a numeração global é numerar primeiramente os modos de vértices globais, depois os modos de

aresta e por último os modos de interior. Além disso, os modos de interior são numerados consecutivamente.

Será tomado como exemplo o sistema matricial representado pela eq. (A.19). As matrizes elementares $\mathbf{M}^e$ podem ser divididas em componentes que contém contribuições do contorno e/ou interior, da seguinte forma:

$$\mathbf{M}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_b^e & \mathbf{M}_c^e \\ (\mathbf{M}_c^e)^T & \mathbf{M}_i^e \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{M}_b^e$ representa os componentes de $\mathbf{M}^e$ que resultam da interação entre modos de contorno, $\mathbf{M}_c^e$ representa os componentes de $\mathbf{M}^e$ que resultam do acoplamento entre modos de contorno e modos de interior e $\mathbf{M}_i^e$ representa componentes de $\mathbf{M}^e$ que resultam da interação entre modos de interior.

Figura A.6 – Estrutura da matriz $\mathbf{M}$

Dada a convenção de numeração descrita no primeiro parágrafo desta seção, a matriz $\mathbf{M}$ terá a estrutura descrita na Figura A.6. Nesta figura, a matriz $\mathbf{M}_b$ é a montagem global das matrizes $\mathbf{M}_b^e$ e similarmente $\mathbf{M}_c$ e $\mathbf{M}_i$ correspondem à montagem global das matrizes $\mathbf{M}_c^e$ e $\mathbf{M}_i^e$ respectivamente. Uma característica

notável do sistema global é que a parcela $\mathbf{M}_b$ é esparsa e pode ser reordenada de modo a diminuir a largura de banda usando procedimentos como, por exemplo, o algoritmo reverso de Cuthill McKee ou refatoração em multi-nível utilizando complemento de Schur. Este último exemplo será discutidos nessa seção. A matriz $\mathbf{M}_c$ é bastante esparsa mas, como será visto adiante, ela só opera em vetores conhecidos e por isso só é preciso armazenar as matrizes elementares $\mathbf{M}_c^e$. Finalmente, a forma natural de $\mathbf{M}_i$ é uma matriz diagonal em blocos, cuja inversão tem um custo bastante baixo, pois cada bloco pode ser invertido individualmente. É a estrutura desta última matriz que faz com que o método de condensação estática seja interessante em termos de eficiência e ela decorre do fato de que um modo de interior só tem magnitude não nula em um elemento e portanto é ortogonal aos modos de interior dos outros elementos.

Reescrevendo o sistema da eq. (A.19) de modo a simplificar a notação para esta seção, temos:

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (\text{A.20})$$

onde $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{u}}_g$ e $\mathbf{f} = \mathcal{A}^T(\mathbf{B}^e)^T \mathbf{W}^e \mathbf{u}_l$. Pode-se fazer a distinção entre componentes de interior e contorno para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{f}$, usando $\mathbf{x}_b$, $\mathbf{x}_i$, e $\mathbf{f}_b$, $\mathbf{f}_i$ respectivamente, ou seja,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_i \end{bmatrix}$$

A eq. (A.20) pode então ser reescrita, mostrando suas partes constituintes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_b & \mathbf{M}_c \\ \mathbf{M}_c^T & \mathbf{M}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_i \end{bmatrix}$$

Para resolver este sistema, uma eliminação de bloco é efetuada através da pré-multiplicação dos dois lados da equação pela matriz:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

chegando a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_b - \mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^T & 0 \\ \mathbf{M}_c^T & \mathbf{M}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b - \mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

A equação para as incógnitas de contorno é, portanto:

$$(\mathbf{M}_b - \mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^T) \mathbf{x}_b = \mathbf{f}_b - \mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{f}_i$$

Uma vez conhecido $\mathbf{x}_b$, pode-se determinar $\mathbf{x}_i$ com a segunda linha da eq. (A.21):

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{f}_i - \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^T \mathbf{x}_b \quad (\text{A.22})$$

A solução da eq. (A.20) foi dividida em três etapas: a primeira é calcular e inverter

$[\mathbf{M}_b - \mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^T]$, que é conhecido como *complemento de Schur*. A segunda é o

cálculo de $\mathbf{M}_i^{-1}$ e a operação final é o cálculo de $\mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} = [\mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^T]^T *$.

A segunda e terceira operações podem ambas serem feitas no nível de elemento. Como $\mathbf{M}_i$ é uma matriz diagonal de blocos e estes blocos são as matrizes $\mathbf{M}_i^e$, isto é, $\mathbf{M}_i = \underline{\mathbf{M}_i^e}$, a inversa de $\mathbf{M}_i$ é:

$$\mathbf{M}_i^{-1} = [\underline{\mathbf{M}_i^e}]^{-1} = \underline{[\mathbf{M}_i^e]^{-1}}$$

que é ainda uma matriz diagonal de blocos e pode ser calculada localmente para cada elemento. Os produtos $\mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{f}_i$ e $\mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^T \mathbf{x}_b$ podem também ser tratados localmente pois envolvem somente produtos entre matrizes e vetores com um vetor conhecido. Para ilustrar esta operação na sua forma matricial, define-se uma matriz $\mathcal{A}_b$ que a versão para contorno da matriz $\mathcal{A}$ e é equivalente à operação feita por $bmap[e][i]$ discutida na seção A.5.2.1. A matriz $\mathcal{A}_b$ portanto transforma os graus de liberdade de contorno globais em locais, isto é:

* Esta igualdade vale pela propriedade de matrizes $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ e porque a matriz $\mathbf{M}_i$ é simétrica, e portanto, também sua inversa, fazendo com que a $(\mathbf{M}_i^{-1})^T = \mathbf{M}_i^{-1}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_b^1 \\ \mathbf{x}_b^2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_b^{N_{el}} \end{bmatrix} = \mathcal{A}_b \mathbf{x}_b$$

onde $\mathbf{x}_b^e$ contém os componentes de $\mathbf{x}_b$ no elemento e . Similarmente, ao se operar com $\mathcal{A}_b^T$ os graus de liberdade de contorno locais são montados num vetor global. A matriz $\mathbf{M}_c$ pode ser escrita:

$$\mathbf{M}_c = \mathcal{A}_b^T \underline{\mathbf{M}_c^e}$$

e os produtos $\mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{f}_i$ e $\mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^T \mathbf{x}_b$ tornam-se:

$$\mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{f}_i = \mathcal{A}_b^T \underline{\mathbf{M}_c^e [\mathbf{M}_i^e]^{-1} \mathbf{f}_i}$$

$$\mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^T \mathbf{x}_b = \underline{[\mathbf{M}_i^e]^{-1} [\mathbf{M}_c^e]^T \mathcal{A}_b \mathbf{x}_b}$$

Como tanto $[\mathbf{M}_i^e]^{-1}$ quanto $\underline{\mathbf{M}_c^e}$ são essencialmente matrizes locais, estes produtos podem ser calculados no nível do elemento em relação a um vetor que ou está montado globalmente, como representado por $\mathcal{A}_b^T$, ou distribuído globalmente, como representado por $\mathcal{A}_b$. Essas duas matrizes também ilustram como construir o sistema de modos de contorno, pois:

$$\mathbf{M}_b = \mathcal{A}_b^T \underline{\mathbf{M}_b^e} \mathcal{A}_b$$

Por conseguinte, a expressão do complemento de Schur pode ser reescrita:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_b - \mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^T &= \mathcal{A}_b^T \underline{\mathbf{M}_b^e} \mathcal{A}_b - \mathcal{A}_b^T \underline{\mathbf{M}_c^e [\mathbf{M}_i^e]^{-1} (\mathbf{M}_c^e)^T} \mathcal{A}_b = \\ &= \mathcal{A}_b^T \left[\underline{\mathbf{M}_b^e - \mathbf{M}_c^e [\mathbf{M}_i^e]^{-1} (\mathbf{M}_c^e)^T} \right] \mathcal{A}_b \end{aligned}$$

o que mostra que o complemento de Schur global pode ser gerado a partir de sistemas locais de complemento de Schur $\mathbf{M}_b^e - \mathbf{M}_c^e [\mathbf{M}_i^e]^{-1} (\mathbf{M}_c^e)^T$. Conclui-se então que, quando a técnica de condensação estática é empregada, a montagem global é necessária somente para o sistema de contorno. Uma vez que a solução no contorno é conhecida, a solução dos modos de interior dada pela eq. (A.22) pode ser calculada

no nível de elemento. Nesta formulação, assumiu-se que todas as condições de contorno globais eram incógnitas, resultando numa matriz global para o complemento de Schur de tamanho N_b . No entanto, na maioria dos problemas algumas condições de contorno são do tipo Dirichlet, ou seja, têm valores conhecidos. Pode-se então renumerar o sistema global de modo que estes graus de liberdade sejam posicionados após os graus de liberdade de valor desconhecido. Por fim, somente uma sub-matriz de $\mathbf{M}_b$ é utilizada.

Dado que a maior parte da memória requerida no emprego desta técnica é usada no sistema global do complemento de Schur, uma alternativa é resolver este sistema iterativamente, onde somente o armazenamento de complementos de Schur locais $\mathbf{M}_b^e - \mathbf{M}_c^e [\mathbf{M}_i^e]^{-1} (\mathbf{M}_c^e)^T$ são necessários. Este sistema local é também melhor condicionado do que o sistema completo (Karniadakis; Sherwin, 1999, p.151). A seguir, será descrito este modo de resolução.

O efeito de construir cada um dos complementos de Schur locais é separar os modos de contorno dos modos de interior. Entretanto, a matriz inversa $[\mathbf{M}_i^e]^{-1}$ é tipicamente cheia, o que significa que os modos de contorno estão acoplados. É este acoplamento que dita a largura de banda do complemento de Schur global.

Embora um modo de contorno esteja acoplado a todos os outros modos de contorno dos elementos aos quais ele pertence, ele não está acoplado com os modos de contorno dos elementos aos quais ele não pertence. Assim, uma numeração apropriada do sistema de contorno gera uma matriz de complemento de Schur que também contém uma sub-matriz que é diagonal de blocos, podendo-se, desse modo, reaplicar a técnica de condensação estática. Esta renumeração pode ser repetida enquanto houver mais de uma região com elementos não vizinhos.

A.5.3 Representação da fronteira

Para concluir este capítulo, serão discutidos tópicos relevantes para a representação de informações na fronteira do domínio. Até agora, assumiu-se que todas as condições de contorno eram especificadas em termos de coeficientes modais, contudo, este não é o caso típico.

Para ilustrar os conceitos desta seção será considerada uma equação de Poisson na região bidimensional Ω ;

$$\nabla^2 u - f = 0$$

com condições de contorno

$$u|_{\partial\Omega^D} = g_D(\partial\Omega^D), \quad \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega^N} = g_N(\partial\Omega^N)$$

onde g_D e g_N são as condições de contorno tipo Dirichlet e Neumann, respectivamente, e $\partial\Omega^D \cup \partial\Omega^N = \partial\Omega$. Para construir a formulação fraca deste problema, multiplica-se a equação pela função de peso $v(x)$ e integra-se no domínio Ω para obter:

$$(v, \nabla^2 u) - (v, f) = 0$$

Aplicando o teorema da divergência ao primeiro termo desta equação, chega-se a:

$$(\nabla v, \nabla u) = (v, f) + \langle v, \nabla u \cdot \mathbf{n} \rangle$$

onde

$$\langle v, \nabla u \cdot \mathbf{n} \rangle = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \mathbf{n} dS, \quad (\text{A.23})$$

e $\mathbf{n}$ é a normal que aponta para fora do domínio. É preciso agora aplicar as condições de contorno, lembrando que o espaço de funções $v(\mathbf{x})$ numa expansão de Galerkin é homogênea e portanto nula em todas as fronteiras do tipo Dirichlet.

Só se pode operar com componentes de $u(\mathbf{x})$ que estejam no mesmo espaço. Por isso, a solução total $u(\mathbf{x})$ será decomposta numa componente homogênea $u^H(\mathbf{x})$ e numa componente não-homogênea $u^D(\mathbf{x})$, onde $u(\mathbf{x}) = u^H(\mathbf{x}) + u^D(\mathbf{x})$ e $u^D(\mathbf{x})$ satisfaz as condições de contorno essenciais $g_D(\partial\Omega^D)$. Nota-se que como $v(\mathbf{x})$ é definida de modo a ser nula em todas as fronteiras do tipo Dirichlet, pode-se reescrever a eq. (A.23):

$$\langle v, \nabla u \cdot \mathbf{n} \rangle = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial\Omega} v g_N dS = \langle v, g_N \rangle$$

Desse modo, o problema de Galerkin pode ser posto como:

Encontrar $u^H \in \mathcal{X}$ tal que:

$$(\nabla v, \nabla u^h) = (v, f) + \langle v, g_N \rangle - (\nabla v, \nabla u^D), \quad \forall v \in \mathcal{X} \quad (\text{A.24})$$

onde $\mathcal{X}$ é o espaço homogêneo de teste. Tendo em mente todos os conceitos apresentados até então, ainda resta descrever uma maneira de determinar a solução não-homogênea $u^D(\mathbf{x})$ assim como um procedimento para calcular a integral de contorno $\langle v, g_N \rangle$. Embora a escolha de funções globais quaisquer que satisfaçam as condições de contorno seja suficiente, pode-se automatizar este processo aplicando a solução não-homogênea $u^D(\mathbf{x})$ nos modos de expansão que não são nulos na fronteira do tipo Dirichlet. Este processo é descrito na seção A.5.3.1.

Para calcular a integral de contorno $\langle v, g_N \rangle$, é necessário saber como representar elementos curvos, pois o objetivo deste trabalho é o estudo do escoamento ao redor de corpos cilíndricos, portanto, nas simulações haverá a necessidade de se representar superfícies curvas. Este tópico é abordado na seção A.5.3.2. Além de definir este tipo de representação, é preciso também calcular o Jacobiano do mapeamento da fronteira para a região padrão de integração, ponto este que é abordado na seção A.5.3.3.

A.5.3.1 Aplicação de condições de contorno essenciais

Em termos práticos, normalmente se deseja tratar todos os graus de liberdade globais do sistema como incógnitas, de modo que se possa manter a generalidade da implementação numérica. No entanto, graus de liberdade associados com condições de contorno essenciais são conhecidos. O procedimento que se adota então é renumerar estes modos de forma que eles fiquem agrupados e colocados dentro da porção de contorno, após os modos de contorno incógnitos. Assim, o sistema referente ao contorno $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ pode ser escrito:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathcal{H}\mathcal{H}} & \mathbf{A}^{\mathcal{H}\mathcal{D}} \\ \mathbf{A}^{\mathcal{D}\mathcal{H}} & \mathbf{A}^{\mathcal{D}\mathcal{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\mathcal{H}} \\ \mathbf{u}^{\mathcal{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{\mathcal{H}} \\ \mathbf{f}^{\mathcal{D}} \end{bmatrix}$$

Como $\mathbf{u}^{\mathcal{D}}(\mathbf{x})$ é conhecido, o sistema fica reduzido a:

$$\mathbf{A}^{\mathcal{H}\mathcal{H}} \mathbf{u}^{\mathcal{H}} = \mathbf{f}^{\mathcal{H}} - \mathbf{A}^{\mathcal{H}\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{D}}$$

Dada uma condição de contorno essencial $g_D(\mathbf{x})$, onde $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ faz-se necessário um método consistente de aproximar esta condição de contorno em termos da expansão discreta utilizada. O método que será utilizado opera em nível local e consiste em fazer uma projeção de Galerkin de g_D nos modos de fronteira, e depois subtrair a contribuição dos vértices e fazer uma projeção L^2 dos modos de aresta da função que sobra, de modo a garantir continuidade C^0 . Esta operação será ilustrada agora, considerando a Figura A.7.

Figura A.7 – Contornos e sistemas de coordenadas locais e global

Uma condição de contorno conhecida g_D será projetada na fronteira de um elemento e que está ao longo de $\partial\Omega$. A solução discreta $u^\delta(x_1, x_2)$ ao longo da aresta pode ser escrita da seguinte forma:

$$u^\delta(x_1, x_2) = \sum_{pq} \hat{u}_{pq}^e \phi_{p0}^e(\xi_1, -1) = \sum_{p=0}^{P_1} \hat{u}_{p0}^e \phi_{p0}^e(\xi_1, -1),$$

onde $x_1 = \chi_1^e(\xi_1, -1)$, $x_2 = \chi_2^e(\xi_1, -1)$. Sendo a expansão modal então $\phi_{p0}(\xi_1, -1) = \psi_p^a(\xi_1) \psi_0^a(-1) = \psi_p^a(\xi_1)$. Portanto, o problema é encontrar $\hat{u}_{p0}^e$ tal que:

$$\sum_{p=0}^{P_1} \hat{u}_{p0}^e \psi_p^a(\xi_1) \square g_D(\chi_1^e(\xi_1, -1))$$

Pode-se usar a decomposição vértice-aresta dos modos de fronteira para garantir que a aproximação seja globalmente C^0 . Os modos de vértice tem, por definição, valor

unitário nas extremidades de uma aresta e todos os outros modos de contorno são nulos nestes pontos. Continuidade C^0 é, portanto, garantida se os coeficientes de vértice forem igualados a:

$$\begin{aligned}\hat{u}_{00}^e &= g_D(\chi_1^e(-1, -1)) \\ \hat{u}_{P_1 0}^e &= g_D(\chi_1^e(1, -1))\end{aligned}$$

Os coeficientes restantes da fronteira podem ser escritos da forma:

$$\sum_{p=1}^{P_1-1} \hat{u}_{p0}^e \psi_p^a(\xi_1) \square g_D(\chi_1^e(\xi_1, -1)) - \hat{u}_{00}^e \psi_0^a(\xi_1) - \hat{u}_{P_1 0}^e \psi_{P_1}^a(\xi_1)$$

Como os modos restantes não contribuem para os pontos de extremidade, pode-se resolver a equação para as incógnitas restantes $\hat{u}_{p0}^e (1 \leq p \leq P_1)$ sem destruir a continuidade C^0 . Estes coeficientes podem ser encontrados através do cálculo uma projeção de Galerkin:

Encontrar $\hat{u}_{p0}^e$ tal que

$$\left(\phi_i, \sum_{p=1}^{P_1-1} \hat{u}_{p0}^e \phi_p \right) = \left(\phi_i, g_D - \hat{u}_{00}^e \psi_0^a - \hat{u}_{P_1 0}^e \psi_{P_1}^a \right), \quad 0 \leq i \leq P_1 - 1$$

Claramente isto envolve a construção e inversão de uma matriz unidimensional de massa $\mathbf{M}^{1D}[i][j] = (\phi_i(\xi_1), \phi_j(\xi_1))$ para $(1 \leq i, j \leq P_1)$. Esta aproximação de Galerkin minimiza a norma L^2 do erro entre a condição de contorno exata e a aproximação na aresta no interior da região (Karniadakis; Sherwin, 1999, p.158).

A.5.3.2 Representação de superfícies curvas

Na seção A.5.1.3 foi visto como mapear quadrilátero qualquer com lados retilíneos na região padrão de integração. Nesta seção, o método de mapeamento será generalizado com a finalidade de incluir também contornos curvos.

A função de mapeamento pode ser escrita de forma genérica como uma expansão da forma:

$$x_i = \chi_i(\xi_1, \xi_2) = \sum_{p=0}^{P_1} \sum_{q=0}^{P_2} \hat{x}_{pq}^i \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) \quad (\text{A.25})$$

onde, para um quadrilátero de lados retilíneos, $\hat{x}_{pq}^i = 0$ exceto para os modos de vértice, que tem os valores:

$$\hat{x}_{00}^i = x_i^A \quad \hat{x}_{P_1 0}^i = x_i^B \quad \hat{x}_{P_1 P_2}^i = x_i^C \quad \hat{x}_{0 P_2}^i = x_i^D$$

Portanto, para descrever uma região de lados retos, só é necessário conhecer a localização dos vértices. No entanto, para arestas de forma arbitrária, mais informações são necessárias, e normalmente uma aresta deste tipo é descrita em termos de funções paramétricas, que serão chamadas de $f_i^A(\xi_1)$, $f_i^B(\xi_2)$, $f_i^C(\xi_1)$ e $f_i^D(\xi_2)$.

Como foi mostrado na seção A.5.3.1, pode-se representar a função de contorno analítica em termos de uma expansão C^0 usando uma transformação de contorno modificada. Por exemplo, pode-se representar uma aresta curva ao longo de $\xi_2 = -1$ onde $x_i = f_i(\xi_1)$ por uma expansão polinomial em ξ_1 da forma:

$$x_i = f_i^A(\xi_1) + \sum_{p=0}^{P_1} \hat{x}_{p0}^i \psi_p(\xi_1)$$

Este tipo de expansão força a continuidade das coordenadas nos vértices. Se um procedimento similar for aplicado a todas as outras arestas então, ter-se-á um conjunto de coeficientes $\hat{x}_{pq}^i$ que representará todas as arestas. O mapeamento geral das coordenadas ξ_1, ξ_2 para x_1, x_2 é determinado pela (A.25).

Concluindo, este tipo de mapeamento pode ser gerado para todo tipo de expansão modal modificada em qualquer região padrão seguindo dois passos:

1. Projeção das coordenadas globais curvas x_i nos contornos de cada elemento usando a transformação de contorno modificada
2. A transformação para trás expressa pela eq. (A.25) então determina o mapeamento isoparamétrico que relaciona as coordenadas locais ξ_1, ξ_2 às coordenadas globais x_1, x_2

A.5.3.3 Cálculo do Jacobiano da integral de contorno

Para determinar integrais da forma:

$$\langle v, g_{\mathcal{N}} \rangle = \int_{\partial\Omega^{\mathcal{N}}} v g_{\mathcal{N}} dS \quad (\text{A.26})$$

que aparecem tipicamente em discretizações de Galerkin de operadores Laplacianos como mostrado na eq. (A.24) transforma-se cada contribuição elementar numa integral em um intervalo padrão, a fim de efetuar a integração usando quadratura de Gauss. Esta transformação necessariamente introduz um Jacobiano, chamado de Jacobiano da integral de contorno.

Em duas dimensões a eq. (A.26) é uma integral de linha da forma:

$$\int_a^b f(x_1, x_2) ds, \quad (\text{A.27})$$

onde $ds = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2}$ é o comprimento diferencial. A fronteira é particionada em contornos elementares $\partial\Omega^e \cap s$, nos quais se deseja calcular cada segmento da integral (A.27). Sabe-se que as coordenadas globais x_1, x_2 em cada elemento estão relacionadas com as coordenadas locais ξ_1, ξ_2 pelo mapeamento, ou seja:

$$x_1 = \chi_1^e(\xi_1, \xi_2) \quad x_2 = \chi_2^e(\xi_1, \xi_2)$$

Pode-se, portanto, relacionar o diferencial em x_1 e x_2 em termos do diferencial em ξ_1 e ξ_2 pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} d\xi_2 \\ dx_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} d\xi_2 \end{aligned}$$

onde as derivadas parciais podem ser calculadas como mostrado na seção A.5.1.2.

Ao longo de uma aresta de qualquer elemento a aresta está completamente parametrizada em termos de ξ_1 ou ξ_2 enquanto a outra coordenada local é constante e tem o valor 1 ou -1. Sendo assim, dependendo da aresta, o comprimento ds pode ter uma das seguintes expressões:

$$ds = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\right)^2 (d\xi_1)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\right)^2 (d\xi_1)^2}$$

$$ds = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right)^2 (d\xi_2)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right)^2 (d\xi_2)^2}$$

e a integral (A.27) pode ser escrita como:

$$\int_{\partial\Omega^e \cap s} f(x_1, x_2) ds = \int_{-1}^1 f(\xi_1, \xi_2) \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\right)^2} d\xi_1$$

$$\int_{\partial\Omega^e \cap s} f(x_1, x_2) ds = \int_{-1}^1 f(\xi_1, \xi_2) \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right)^2} d\xi_2$$

que pode ser calculada usando quadratura de Gauss.

APÊNDICE B – APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS ESPECTRAIS ÀS EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL

O objeto de estudo deste trabalho é o escoamento de um fluido newtoniano ao redor de corpos cilíndricos. As equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível, sem forças de corpo e com propriedades constantes são:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

onde $\mathbf{u}=(u, v, w)$ é o vetor velocidade, t é o tempo, p é a pressão, ρ é a densidade e $\nu = \mu/\rho$ é a viscosidade cinemática do fluido. Esta equação pode ser adimensionalizada utilizando as seguintes expressões:

$$\bar{u} = \frac{u}{U_\infty}, \quad \bar{v} = \frac{v}{U_\infty}, \quad \bar{w} = \frac{w}{U_\infty}, \quad \bar{t} = \frac{t U_\infty}{D},$$

$$\bar{x} = \frac{x}{D}, \quad \bar{y} = \frac{y}{D}, \quad \bar{z} = \frac{z}{D}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho U_\infty^2}, \quad Re = \frac{U_\infty D}{\nu}$$

onde U_∞ é a velocidade do campo não perturbado, D é a dimensão característica do corpo, que neste trabalho, onde são estudados escoamentos ao redor de cilindros, é o diâmetro do cilindro e Re é o número de Reynolds. Todas as variáveis utilizadas daqui para diante serão adimensionais, salvo indicação contrária, e por isso não se usará mais a barra sobre as grandezas a fim de simplificar a notação. As equações de Navier-Stokes podem então ser escritas na sua forma adimensional:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

A solução numérica das equações de Navier-Stokes apresenta diversas dificuldades. Talvez a mais evidente seja a existência do termo não linear. No método que será descrito aqui, o termo não linear é tratado de maneira explícita e com um intervalo de tempo (Δt) adequado este problema é solucionado.

Uma outra dificuldade importante é a forma de acoplamento entre pressão e velocidade, que faz com que as duas variáveis não possam ser aproximadas independentemente. Uma condição de compatibilidade conhecida como condição *inf-sup* ou *div-stability* deve ser satisfeita pelos espaços discretos que aproximarão a solução, a fim de garantir estabilidade e unicidade da solução discreta. Maiores detalhes sobre esta condição podem ser encontrados em Gunzburger (1989) e Karniadakis; Sherwin (1999).

Neste apêndice, será delineado como o método de elementos espectrais, descrito no apêndice C, é empregado na resolução das equações de Navier-Stokes para um escoamento incompressível. Na seção B.1 serão abordadas questões referentes às condições de contorno e avanço no tempo. Já a seção B.2 trata da utilização do método apresentado no item A.4, que trata de expansões em domínios homogêneos, nas equações de Navier-Stokes.

B.1 Condições de contorno e avanço no tempo

Esta seção baseia-se primordialmente nos trabalhos de Karniadakis; Israeli; Orszag (1991) e Karniadakis; Sherwin (1999).

Primeiramente serão definidas condições de contorno apropriadas para o tipo de problema estudado neste trabalho, que é o escoamento externo ao redor de um corpo rombudo. Começando com as condições de contorno para velocidade, pode-se dizer que ao longe, onde não há influência do corpo nem da esteira por ele formada, o escoamento pode ser considerado não perturbado e a velocidade é igual a U_∞ . Nas paredes, é imposta condição de não escorregamento e a velocidade é nula. Na região de saída de fluido, tipicamente influenciada pela esteira, a derivada da velocidade na direção normal do contorno é nula, ou seja, $\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{n} = 0$.

Já para a pressão, na saída também se impõe uma condição do tipo Neumann, isto é, $\partial p / \partial \mathbf{n} = 0$. Quanto à condição de contorno da pressão na parede, a literatura apresenta um debate intenso sobre esta questão. Vale lembrar que não existe uma equação para pressão e, portanto, a pressão numa parede é consequência do escoamento. Tradicionalmente, nas paredes adotou-se para a pressão um gradiente nulo:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{parede} = 0$$

Deve-se ressaltar que a adoção deste tipo de condição de contorno é totalmente compatível com a teoria da camada limite. Contudo, segundo Karniadakis; Israeli; Orszag (1991), esta condição de contorno compromete qualquer tentativa de se obter uma precisão melhor do que primeira ordem no tempo. Os mesmos autores propõem uma condição de contorno do tipo Neumann de alta ordem para a pressão nestas regiões, que é derivada da equação de equilíbrio de momento linear na direção normal na fronteira do domínio. Esta mesma condição é utilizada também nas regiões de escoamento ao longe na implementação empregada neste trabalho. Ela será descrita adiante, juntamente com o método de avanço no tempo.

Ao se resolver as equações de Navier-Stokes no tempo, é necessário adotar uma discretização temporal. O mais usual em escoamentos incompressíveis é fazer a discretização no tempo independente da discretização no espaço. O método de elementos espectrais permite uma resolução muito alta no espaço mas isso de nada adianta se a resolução temporal não for compatível com esta precisão. A discretização temporal, além de estar diretamente ligada com fenômenos transientes, também influencia diretamente na forma do sistema de equações que precisam ser resolvidas. Em particular, ela determina a forma da equação de pressão e dita o quão bem a restrição de incompressibilidade é aproximada nas formulações com variáveis primitivas, ou seja, formulações do tipo pressão-velocidade.

Eles propõem um método de solução das equações de Navier-Stokes transitórias usando *time-splitting* que permite o uso de precisões de ordens superiores.

A eq. (B.1) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{N}(\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \mathbf{L}(\mathbf{u}) \quad (\text{B.2})$$

Nesta equação,

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}) = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{2} [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})]$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \nabla^2 \mathbf{u}$$

que representam o termo convectivo e o termo difusivo. O termo convectivo geralmente é implementado desta forma para reduzir *aliasing* (Karniadakis; Israeli; Orszag, 1991) e apresenta resultados superiores apesar de aumentar o custo computacional.

A eq. (B.2) integrada num passo de tempo Δt resulta em:

$$\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla p dt + \frac{1}{\text{Re}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{L}(\mathbf{u}) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{N}(\mathbf{u}) dt$$

onde o índice n se refere ao passo de tempo $t_n = n\Delta t$. O termo não linear é aproximado por um esquema explícito de ordem J_e da família de Adams-Bashforth, principalmente por razões de eficiência:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{N}(\mathbf{u}) dt = \Delta t \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathbf{N}(\mathbf{u}^{n-q}) \quad (\text{B.3})$$

onde β_q são os pesos dados pela Tabela B.1, que dependem da ordem de integração escolhida. Os termos lineares $\mathbf{L}(\mathbf{u})$ são aproximados de forma implícita por razões de estabilidade. Será utilizado um esquema de ordem J_i da família de Adams-Moulton, resultando em:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{L}(\mathbf{u}) dt = \Delta t \sum_{q=0}^{J_i-1} \gamma_q \mathbf{L}(\mathbf{u}^{n+1-q}) \quad (\text{B.4})$$

onde γ_q são os pesos dados pela Tabela B.1, que dependem da ordem de integração escolhida. Por último, o termo de pressão será reescrito:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla p dt = \Delta t \nabla \bar{p}^{n+1} \quad (\text{B.5})$$

onde $\bar{p}^{n+1}$ é um campo escalar que assegura que o campo de velocidades final é incompressível ao final do passo de tempo $(n+1)$.

Tabela B.1 – Coeficientes dos algoritmos das famílias Adams-Bashforth e Adams-Moulton

	Coeficiente	1ª ordem	2ª ordem	3ª ordem
Adams-Bashforth	β_0	1	3/2	23/12
	β_1	0	-1/2	-16/12
	β_2	0	0	5/12
Adams-Moulton	γ_0	1	1/2	5/12
	γ_1	0	1/2	8/12
	γ_2	0	0	-1/12

Usando esta notação, a discretização temporal pode ser realizada em três etapas, tomando a seguinte forma:

$$\frac{\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q N(\mathbf{u}^{n-q}) \quad \text{em } \Omega \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}}{\Delta t} = -\nabla \bar{p}^{n+1} \quad \text{em } \Omega \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}}{\Delta t} = \nu \sum_{q=0}^{J_i-1} \gamma_q L(\mathbf{u}^{n+1-q}) \quad \text{em } \Omega \quad (\text{B.8})$$

com condições de contorno essenciais $\mathbf{u}_0$:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_0 \quad \text{em } \partial\Omega$$

Nestas equações, $\hat{\mathbf{u}}$ e $\hat{\mathbf{u}}$ são campos de velocidade intermediários. A eq. (B.6) pode ser resolvida para $\hat{\mathbf{u}}$, já que é uma expressão explícita. Desde que se conheça o campo $\hat{\mathbf{u}}$, que deve vir da eq. (B.7), a eq. (B.8) também pode ser resolvida para $\mathbf{u}^{n+1}$, pois se trata de uma equação linear resolvida de maneira implícita. Resta saber como resolver a eq. (B.7), já que nesta expressão há duas incógnitas: $\hat{\mathbf{u}}$ e $\bar{p}^{n+1}$. Isto é solucionado assumindo-se que o campo de velocidades temporário $\hat{\mathbf{u}}$ satisfaz a condição de incompressibilidade do fluido, assim:

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{B.9})$$

Substituindo a eq. (B.9) na eq. (B.7) chega-se a:

$$\nabla^2 \bar{p}^{n+1} = \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{u}}}{\Delta t} \right) \quad \text{em } \Omega$$

Falta agora estabelecer as condições de contorno para esta equação. Para isso, toma-se a equação (B.2) no contorno $\partial\Omega$ integrada no tempo, multiplicando todos os termos pelo vetor normal $\mathbf{n}$:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dt = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla p \cdot \mathbf{n} dt + \frac{1}{\text{Re}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{L}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{N}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dt \quad \text{em } \partial\Omega \quad (\text{B.10})$$

O termo dentro da integral do lado esquerdo desta equação pode ser reescrito:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}$$

O segundo termo do lado direito desta equação é nulo, visto que o domínio é fixo e que portanto o vetor normal na fronteira é invariante no tempo. Já o segundo termo, quando integrado em todo o contorno, representa o fluxo mássico líquido no domínio. Como está sendo considerado um escoamento incompressível, sem fontes ou sorvedouros no interior do domínio, a integral no contorno deste termo é nula, embora localmente ele possa não ser. Entretanto, como no método numérico utilizado as equações posteriormente são integradas em todo o domínio, este termo será cancelado numa etapa seguinte, e por isso, ele será desconsiderado nesta etapa. Isto posto, o termo do lado esquerdo na eq. (B.10) é anulado e substituindo nela as expressões (B.3), (B.4) e (B.5), chega-se a:

$$\frac{\partial \bar{p}^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \left[\sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathbf{N}(\mathbf{u}^{n-q}) + \frac{1}{\text{Re}} \sum_{q=0}^{J_s-1} \gamma_q \mathbf{L}(\mathbf{u}^{n+1-q}) \right] \quad \text{em } \partial\Omega \quad (\text{B.11})$$

Nota-se que nesta expressão aparecem variáveis no tempo $n+1$, que são incógnitas. Isto acontece devido ao tratamento implícito do termo difusivo $\mathbf{L}(\mathbf{u})$. A fim de eliminar este problema e construir um esquema estável, o termo difusivo é reescrito da seguinte forma:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

O primeiro termo, $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})$, será tratado de forma implícita enquanto o segundo termo, $-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$, será tratado de forma explícita. Pode-se reescrever então a eq. (B.11):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} = & \mathbf{n} \cdot \left[\sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathbf{N}(\mathbf{u}^{n-q}) + \frac{1}{\text{Re}} \sum_{q=0}^{J_i-1} \gamma_q \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1-q}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\text{Re}} \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \left(-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^{n-q}) \right) \right] \quad \text{em } \partial\Omega \end{aligned}$$

Note que nesta equação, o termo $\gamma_0 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1})$ pode ser igualado a zero, pois o requisito de incompressibilidade no passo $n+1$ faz com que $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$. Desse modo, elimina-se as velocidades no passo $n+1$ da expressão e a única incógnita passa a ser $\frac{\partial \bar{p}^{n+1}}{\partial \mathbf{n}}$. Perceba que esta expressão também recupera a condição imposta na região de saída, $\partial p / \partial \mathbf{n} = 0$, pois nesta região $\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{n} = 0$.

Recapitulando então os quatro passos para o avanço no tempo:

1. Calcula-se o campo intermediário $\hat{\mathbf{u}}$ com a expressão:

$$\frac{\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathbf{N}(\mathbf{u}^{n-q}) \quad \text{em } \Omega$$

2. Procede-se então ao cálculo do campo de pressões $\bar{p}^{n+1}$, com o auxílio da equação:

$$\nabla^2 \bar{p}^{n+1} = \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{u}}}{\Delta t} \right) \quad \text{em } \Omega$$

submetida à condição de contorno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} = & \mathbf{n} \cdot \left[\sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathbf{N}(\mathbf{u}^{n-q}) + \frac{1}{\text{Re}} \sum_{q=1}^{J_i-1} \gamma_q \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1-q}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\text{Re}} \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \left(-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^{n-q}) \right) \right] \quad \text{em } \partial\Omega \end{aligned}$$

3. Em seguida, é calculado o campo de velocidades intermediário $\hat{\mathbf{u}}$:

$$\frac{\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla \bar{p}^{n+1} \quad \text{em } \Omega$$

4. Por fim, o campo de velocidades $\mathbf{u}^{n+1}$ é obtido da seguinte expressão:

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}}{\Delta t} = \nu \sum_{q=0}^{J_i-1} \gamma_q L(\mathbf{u}^{n+1-q}) \quad \text{em } \Omega$$

B.2 Decomposição modal na direção do eixo

Nesta seção será descrito como aplicar os conceitos apresentados na seção A.4, relativos a expansões em domínios homogêneos, às equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis. Para isso considere o caso do movimento de um fluido viscoso ao redor de um cilindro infinitamente longo posicionado perpendicularmente a uma corrente uniforme. Assume-se que o fluido tenha densidade constante ρ e viscosidade dinâmica constante μ . Este escoamento incompressível depende de três parâmetros dimensionais: o diâmetro do cilindro D , a velocidade da corrente livre U_∞ , e a viscosidade cinemática do fluido $\nu = \mu/\rho$. A única combinação adimensional destes parâmetros é o número de Reynolds, $Re = U_\infty D / \nu$, e ele serve como um parâmetro de controle do sistema. O problema pode ser descrito de forma adimensional, com U_∞ e D servindo de escalas de referência para velocidade e distância. O estado do fluido em qualquer instante de tempo t neste escoamento é determinado pelo campo de velocidades $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ e o campo de pressão $p(x, y, z, t)$. Estes campos são descritos num sistema de coordenadas onde x está alinhado com a direção e sentido da corrente livre, y é normal à corrente livre, e z está alinhado com o eixo do cilindro.

A evolução do escoamento é descrita pelas equações de Navier-Stokes para fluido incompressível, escritas a seguir na forma adimensional:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{N}(\mathbf{u}) - \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad \text{em } \Omega$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega$$

$\mathbf{N}(\mathbf{u})$ representa o termo convectivo não linear:

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}) = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{2} [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})]$$

O domínio computacional Ω representa a região do espaço tridimensional ao redor do cilindro que contém o que é considerada a parte “importante” do escoamento e na qual as equações de Navier-Stokes serão resolvidas.

O primeiro passo da discretização é reduzir o problema no infinito para um problema num domínio de dimensão finita L na direção da envergadura. Em outras palavras, serão considerados escoamentos $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ que satisfaçam o requisito de periodicidade:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}(x, y, z + L, t).$$

O campo tridimensional periódico $\mathbf{u}$ pode ser projetado exatamente num conjunto de modos de Fourier bidimensionais $\hat{\mathbf{u}}_q$ usando a transformada de Fourier:

$$\hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t) = L^{-1} \int_0^L \mathbf{u}(x, y, z, t) e^{-i(2\pi/L)qz} dz$$

Da mesma maneira, os modos na direção do eixo $\hat{\mathbf{u}}_q$ dão a expansão do campo de velocidades numa série de Fourier e podem ser encontrados através da transformada inversa de Fourier, desta vez, já apresentada na sua versão discreta:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t) e^{i(2\pi/L)qz}$$

Substituindo a expansão de Fourier do campo de velocidades nas equações de Navier-Stokes, é obtido um sistema acoplado de equações para os modos de Fourier. Com o intuito de simplificar a escrita, será utilizada e complementada a notação introduzida na seção A.4. Define-se o número de onda escalado $\beta_q = (2\pi/L)q$ e os operadores dependentes de q :

$$\tilde{\nabla} \equiv (\partial_x, \partial_y, i\beta_q), \quad \tilde{\nabla}^2 \equiv (\partial_x^2, \partial_y^2, -\beta_q^2)$$

A equação de evolução para os modos de Fourier passa então a ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_q}{\partial t} = \mathbf{N}_q(\mathbf{u}) - \tilde{\nabla} \hat{p}_q + \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\nabla}^2 \hat{\mathbf{u}}_q \quad \text{em } \Omega$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{u}}_q = 0 \quad \text{em } \Omega$$

O termo não linear de convecção proporciona o acoplamento entre todos os modos. Pode-se grafar este termo assim:

$$\mathbf{N}_q(\mathbf{u}) = L^{-1} \int_0^L \mathbf{N}(\mathbf{u}) e^{-i(2\pi/L)qz} dz$$

A representação final do campo de velocidades será tomada como uma expansão truncada:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \sum_{q=-M}^M \hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t) e^{i(2\pi/L)qz}$$

Computacionalmente, é mais conveniente calcular a evolução de modos bidimensionais de Fourier $\hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t)$ do que o campo tridimensional completo $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Porque $\mathbf{u}$ é real, os modos de Fourier satisfazem à condição de simetria $\hat{\mathbf{u}}_{-q} = -\hat{\mathbf{u}}_q^*$. Por isso, apenas metade do espectro ($q \geq 0$) é necessário. No entanto cabe a ressalva de que os campos $\hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t)$ e $\hat{p}_q(x, y, t)$ são complexos, pois a expansão utilizada é uma série de Fourier, e por isso requerem o dobro de espaço para armazenamento.

A representação do campo de velocidades através de modos de Fourier tem outras vantagens intrínsecas. Ela proporciona uma maneira direta de ligar modos particulares de sistemas com padrões tridimensionais específicos. A teoria de estabilidade linear pode prever quais modos interagirão de forma mais forte com o escoamento bidimensional para produzir estes padrões. A amplitude média no tempo dos modos de Fourier é uma indicação direta da quão boa é a resolução dos cálculos efetuados. E finalmente, a amplitude dependente do tempo dos modos de Fourier oferecem uma maneira conveniente de explicar a transferência de energia entre as diferentes escalas na esteira tridimensional.

O conjunto de equações modais são integradas avançando-se no tempo utilizando-se o método segregado apresentado na seção B.1. A repetição dos cálculos para cada um dos modos de Fourier sugere uma estratégia natural de distribuição do trabalho computacional num conjunto de processadores paralelos: dados de cada modo são atribuídos para um computador diferente. A integração no tempo é feita para cada modo em paralelo com troca de dados no começo do passo de tempo visando avaliar o termo não-linear. Este termo é computado pseudo-espectralmente numa malha de pontos no espaço físico através do uso de uma transformada rápida de Fourier (FFT). O cálculo do termo não linear compreende grosso modo a um quarto do trabalho computacional. O trabalho restante constitui a solução de sistemas lineares nos passos referentes à pressão e ao termo de difusão. Esses últimos passos

não requerem interação entre os modos e podem ser feitos em paralelo, com o trabalho perfeitamente balanceado no conjunto de processadores paralelos.

APÊNDICE C – POLINÔMIOS DE JACOBI

Polinômios de Jacobi, denotados por $P_p^{\alpha,\beta}(x)$, representam a família de soluções polinomiais de um problema singular de Sturm-Liouville, que na região $x \in]-1,1[$ é escrito:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x)^{1+\alpha} (1+x)^{1+\beta} \frac{d}{dx} u_p(x) \right] = \lambda_p (1-x)^\alpha (1+x)^\beta u_p(x) \quad (\text{C.1})$$

onde

$$u_p(x) = P_p^{\alpha,\beta}(x)$$

e

$$\lambda_p = -p(\alpha + \beta + p + 1)$$

Uma importante propriedade destes polinômios é sua relação de ortogonalidade:

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_p^{\alpha,\beta}(x) P_q^{\alpha,\beta}(x) dx = C \delta_{pq} \quad (\text{C.2})$$

onde o valor de C depende de α , β e p e tem o valor:

$$C = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2p+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(p+\alpha+1)\Gamma(p+\beta+1)}{p!\Gamma(p+\alpha+\beta+1)}$$

Esta relação implica que $P_p^{\alpha,\beta}(x)$ é ortogonal a todos os polinômios de ordem menor que p quando integrados com respeito a $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$. Estes polinômios podem ser construídos usando uma recursão de três termos como mostrado adiante:

$$\begin{aligned} P_0^{\alpha,\beta}(x) &= 1 \\ P_1^{\alpha,\beta}(x) &= \frac{1}{2} [\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)x] \\ a_p^1 P_{p+1}^{\alpha,\beta}(x) &= (a_p^2 + a_p^3 x) P_p^{\alpha,\beta}(x) - a_p^4 P_{p-1}^{\alpha,\beta}(x) \\ a_p^1 &= 2(p+1)(p+\alpha+\beta+1)(2p+\alpha+\beta) \\ a_p^2 &= (2p+\alpha+\beta+1)(\alpha^2 - \beta^2) \\ a_p^3 &= (2p+\alpha+\beta)(2p+\alpha+\beta+1)(2p+\alpha+\beta+2) \\ a_p^4 &= 2(p+\alpha)(p+\beta)(2p+\alpha+\beta+2) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Uma classe de polinômios simétricos, conhecido como polinômios ultraesféricos, são os polinômios de Legendre ($\alpha = \beta = 0$) e os polinômios de Chebychev ($\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$).

Uma relação de recursão pode também ser utilizada para o cálculo das derivadas destes polinômios:

$$\begin{aligned} b_p^1(x) \frac{d}{dx} P_p^{\alpha,\beta}(x) &= b_p^2(x) P_p^{\alpha,\beta}(x) + b_n^3(x) P_{p-1}^{\alpha,\beta}(x) \\ b_p^1(x) &= (2p + \alpha + \beta)(1 - x^2) \\ b_p^2(x) &= p[\alpha - \beta - (2p + \alpha + \beta)x] \\ b_p^3(x) &= 2(p + \alpha)(p + \beta) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Alguns valores especiais que merecem nota são:

$$P_p^{\alpha,\beta}(1) = \binom{p + \alpha}{p} = \frac{(p + \alpha)!}{p! \alpha!}$$

$$P_p^{\alpha,\beta}(-x) = (-1)^n P_p^{\alpha,\beta}(x)$$

Quanto à interpolação de valores quando estes polinômios são utilizados, dois casos merecem destaque, em face às aplicações citadas no texto principal. O primeiro deles é a interpolação lagrangeana do tipo Gauss-Jacobi. Nela, os pontos de interesse são as raízes do polinômio $P_Q^{\alpha,\beta}(x)$, que são encontradas conforme descrito no apêndice D. Seguindo a definição de interpolantes de Lagrange da A.2.4 obtêm-se:

$$h_j(x) = \begin{cases} \frac{P_Q^{\alpha,\beta}(x)}{\left[P_Q^{\alpha,\beta}(x_j) \right]' (x - x_j)} & x \neq x_j \\ 1 & x = x_j \end{cases}$$

O outro caso de interesse é a interpolação lagrangeana de Gauss-Lobatto. Nela, os pontos em questão são os zeros de $\left[P_{Q-2}^{\alpha,\beta}(x) \right]'$, mais os dois pontos de extremidade em $+1$ e -1 , como explicado no apêndice D. A expressão para o interpolante de lagrange nos Q pontos é dado por:

$$h_j(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^{Q-1}(Q-2)!\Gamma(\beta+2)}{(Q+\alpha+\beta)\Gamma(Q+\beta)}(x-1)[P_{Q-1}^{\alpha,\beta}(x)]' & j=0 \\ \frac{(x^2-1)[P_{Q-1}^{\alpha,\beta}(x)]'}{(Q-1)(Q+\alpha+\beta)P_{Q-1}^{\alpha,\beta}(x_j)(x-x_j)} & 1 \leq j \leq Q-2 \\ \frac{(Q-2)!\Gamma(\alpha+2)}{(Q+\alpha+\beta)\Gamma(Q+\alpha)}(x+1)[P_{Q-1}^{\alpha,\beta}(x)]' & j=Q-1 \end{cases}$$

APÊNDICE D – QUADRATURA DE GAUSS

A integração de $u(x)$ no intervalo $[-1,1]$ multiplicada pela função $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ ($\alpha > -1$, $\beta > -1$), que é um produto interno bastante utilizado no método de elementos espectrais, pode ser calculada numericamente utilizando-se a regra de quadratura de Gauss, que transforma a integral numa soma discreta da forma:

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta u(x) dx = \sum_{i=0}^{Q-1} w_i^{\alpha,\beta} u(x_i) + R(u) \quad (\text{D.1})$$

Onde $R(u) = 0$ se $u(x) \in \mathcal{P}_{2Q-k}([-1,1])$. O valor de k é determinado pelo tipo de quadratura utilizada, que pode ser a quadratura de Gauss clássica ($k = 1$), Gauss-Radau ($k = 2$) ou Gauss-Lobatto ($k = 3$).

Para derivar (D.1) considera-se o caso onde $u(x)$ é um polinômio de ordem $2Q - k$, ou seja, $u(x) \in \mathcal{P}_{2Q-k}([-1,1])$, e decompõe-se $u(x)$ em:

$$u(x) = \sum_{i=0}^{Q-1} u(x_i) h_i(x) + s(x) r(x) \quad (\text{D.2})$$

onde

$$\begin{aligned} h_i(x_j) &= \delta_{ij} & h(x) &\in \mathcal{P}_{Q-1} \\ s(x) &\in \mathcal{P}_Q \\ s(x_i) &= 0 & r(x) &\in \mathcal{P}_{Q-k} \end{aligned}$$

e δ_{ij} é o delta de Kronecker. A função $u(x)$ foi decomposta em $h_i(x_j)$ que é um polinômio de Lagrange nos Q pontos nodais x_j ; $s(x)$ que é um polinômio de ordem Q com raízes nos pontos nodais x_i e o polinômio restante $r(x)$ é de ordem $Q - k$. Integrando (D.2) multiplicado por $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ no intervalo $[-1,1]$ e comparando com (D.1) deduz-se que:

$$\begin{aligned} w_i^{\alpha,\beta} &= \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta h_i(x) dx \\ R(u) &= \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta s(x) r(x) dx \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Se $s(x)$ é especificado então os pontos nodais x_i são determinados como sendo as raízes de $s(x)$, isto é, $s(x_i) = 0$. É preferível especificar $s(x)$ do que os pontos nodais x_i pois uma escolha apropriada de $s(x)$ faz com que $R(u) = 0$. Por exemplo, se $s(x) = P_Q^{\alpha,\beta}(x)$ onde $P_Q^{\alpha,\beta}(x)$ é um polinômio de Jacobi (ver apêndice C) então:

$$R(u) = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_Q^{\alpha,\beta}(x) r(x) dx$$

Esta integral é a relação de ortogonalidade para $P_Q^{\alpha,\beta}(x)$ (ver eq. (C.2)) então, se $k = 1$, então $r(x)$ é um polinômio de ordem $Q - 1$ e portanto $R(u) = 0$. Esta escolha de $s(x)$ determina a quadratura clássica de Gauss e por conseguinte os pontos nodais são determinados por $x_i = x_{i,P}^{\alpha,\beta}$ onde $x_{i,P}^{\alpha,\beta}$ denota os m zeros do polinômio de Jacobi $P_P^{\alpha,\beta}$ tais que:

$$P_P^{\alpha,\beta}(x_{i,P}^{\alpha,\beta}) = 0 \quad i = 0, 1, \dots, P-1 \quad (\text{D.4})$$

onde

$$x_{0,P}^{\alpha,\beta} < x_{1,P}^{\alpha,\beta} < \dots < x_{P-1,P}^{\alpha,\beta}$$

As integrais de Gauss-Radau e Gauss-Lobatto requerem que os pontos nodais incluam um ou ambos os pontos de extremidade $x = \pm 1$. Esta restrição modifica a forma de $s(x)$ e tem o efeito de alterar a função de peso $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Portanto os pontos nodais são determinados por um polinômio de Jacobi com diferentes valores de α e β .

D.1 Fórmulas de Jacobi

Nesta seção serão determinados os valores nodais x_i e os pesos $w_i^{\alpha,\beta}$ para a integração de Gauss da função $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ onde $\alpha, \beta > -1$. Os pontos nodais x_i são determinados em termos das raízes dos polinômios de Jacobi $x_{i,P}^{\alpha,\beta}$ definidas em (D.4).

Quadratura de Gauss-Jacobi

Para este tipo de quadratura, nenhuma restrição é imposta nos pontos nodais e, portanto, estes pontos são as raízes de $P_Q^{\alpha,\beta}(x)$. As fórmulas de Gauss-Jacobi são:

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i,Q}^{\alpha,\beta} & i &= 0, \dots, Q-1 \\ w_i^{\alpha,\beta} &= H_{i,Q}^{\alpha} & i &= 0, \dots, Q-1 \\ R(u) &= 0 & \text{se } u(x) &\in P_{2Q-1}([-1,1]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{i,Q}^{\alpha,\beta} &= \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+Q+1) \Gamma(\beta+Q+1)}{Q! \Gamma(\alpha+\beta+Q+1) [1-x_i^2]} \left[\frac{d}{dx} (P_Q^{\alpha,\beta}(x)) \right]_{x=x_i}^{-2} \\ R(u) &\leq \frac{2^{\alpha+\beta+2Q+1} Q! \Gamma(\alpha+Q+1) \Gamma(\beta+Q+1) \Gamma(\alpha+\beta+Q+1)}{(2Q)! (\alpha+\beta+2Q+1) [\Gamma(\alpha+\beta+2Q+1)]^2} M_{2Q} \\ &\left(M_{2Q} = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |u^{2Q}(x)| \right) \end{aligned}$$

Quadratura de Gauss-Radau-Jacobi – Fórmula de Bouzitat do primeiro tipo

A integração de Gauss-Radau requer que os pontos nodais incluam um dos pontos extremos do intervalo de integração $x=\pm 1$. Escolhendo incluir $x=-1$, então o valor de $s(x)$ em (D.2) tem a forma:

$$s(x) = (1+x) s_1(x)$$

onde

$$s_1(x) \in P_{Q-1}([-1,1])$$

Portanto, a relação para $R(u)$ dada pela equação (A.3) torna-se:

$$R(u) = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^{\beta+1} s_1(x) r(x) dx$$

Fazendo $s_1(x) = P_{Q-1}^{\alpha,\beta+1}(x)$ então $R(u)=0$ se $k=2$. As fórmulas de Gauss-Radau-Jacobi são:

$$\begin{aligned}
 x_i &= \begin{cases} -1 & i = 0 \\ x_{i-1, Q-1}^{\alpha, \beta} & i = 1, \dots, Q-1 \end{cases} \\
 w_i^{\alpha, \beta} &= \begin{cases} (\beta+1) B_{0, Q-1}^{\alpha, \beta} & i = 0 \\ B_{i, Q-1}^{\alpha, \beta} & i = 1, \dots, Q-1 \end{cases} \\
 R(u) &= 0 \quad \text{se } u(x) \in P_{2Q-2}([-1, 1])
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{i, Q-1}^{\alpha, \beta} &= \frac{2^{\alpha+\beta} \Gamma(\alpha+Q) \Gamma(\beta+Q) (1-x_i)}{(Q-1)! (\beta+Q) \Gamma(\alpha+\beta+Q+1) [P_{Q-1}^{\alpha, \beta}(x_i)]^2} \\
 R(u) &\leq \frac{2^{\alpha+\beta+2Q} (Q-1)! \Gamma(\alpha+Q) \Gamma(\beta+Q+1) \Gamma(\alpha+\beta+Q+1)}{(2Q-1)! (\alpha+\beta+2Q) [\Gamma(\alpha+\beta+2Q)]^2} M_{2Q-1} \\
 \left(M_{2Q-1} &= \sup_{-1 \leq x \leq 1} |u^{2Q-1}(x)| \right)
 \end{aligned}$$

Quadratura de Gauss-Lobato-Jacobi – Fórmula de Bouzitat do segundo tipo

A integração de Gauss-Lobatto requer que os pontos nodais incluam ambos os pontos extremo no intervalo de integração $x=\pm 1$. Para esse caso, o valor de $s(x)$ em (D.2) tem a forma:

$$s(x) = (1-x)(1+x) s_2(x)$$

onde

$$s_2(x) \in P_{Q-2}([-1, 1])$$

Portanto, a relação para $R(u)$ dada pela equação (A.3) torna-se:

$$R(u) = \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} s_2(x) r(x) dx$$

Fazendo $s_2(x) = P_{Q-2}^{\alpha+1, \beta+1}(x)$ então $R(u)=0$ se $k=3$. As fórmulas de Gauss-Lobatto-Jacobi são:

$$\begin{aligned}
 x_i &= \begin{cases} -1 & i = 0 \\ x_{i-1, Q-2}^{\alpha+1, \beta+1} & i = 1, \dots, Q-2 \\ 1 & i = Q-1 \end{cases} \\
 w_i^{\alpha, \beta} &= \begin{cases} (\beta+1) C_{0, Q-2}^{\alpha, \beta} & i = 0 \\ C_{i, Q-2}^{\alpha, \beta} & i = 1, \dots, Q-2 \\ (\alpha+1) C_{Q-1, Q-2}^{\alpha, \beta} & i = Q-1 \end{cases} \\
 R(u) &= 0 \quad \text{se } u(x) \in P_{2Q-3}([-1, 1])
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{i, Q-1}^{\alpha, \beta} &= \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+Q) \Gamma(\beta+Q)}{(Q-1)(Q-1)! \Gamma(\alpha+\beta+Q+1) [P_{Q-1}^{\alpha, \beta}(x_i)]^2} \\
 R(u) &\leq \frac{2^{\alpha+\beta+2Q-1} (Q-2)! \Gamma(\alpha+Q) \Gamma(\beta+Q) \Gamma(\alpha+\beta+Q+1)}{(2Q-2)! (\alpha+\beta+2Q-1) [\Gamma(\alpha+\beta+2Q-1)]^2} M_{2Q-2} \\
 \left(M_{2Q-2} &= \sup_{-1 \leq x \leq 1} |u^{2Q-2}(x)| \right)
 \end{aligned}$$

D.2 Cálculo das raízes dos polinômios de Jacobi

As fórmulas para os pesos na seção D.1 tem uma forma fechada em termos dos pontos nodais x_i . Todavia, em geral não há uma fórmula explícita para esses valores nodais. Eles são definidos em termos das raízes de um polinômio de Jacobi conforme (D.4). Essas raízes podem ser calculadas numericamente utilizando uma técnica iterativa com a de Newton-Raphson. No entanto, os zeros de um polinômio de Chebychev ($\alpha=\beta=-1/2$) tem uma forma explícita:

$$x_{i,m}^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = -\cos\left(\frac{2i+1}{2m}\pi\right) \quad i = 0, \dots, m-1$$

Desse modo, pode-se usar $x_{i,m}^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$ como uma estimativa inicial para as iterações.

Para garantir que uma nova raiz seja encontrada a cada busca, pode-se fatorar o polinômio com as raízes já conhecidas assim que forem sendo determinadas. Isto significa que o algoritmo de busca de raízes é aplicado ao polinômio:

$$f_{m-n}(x) = \frac{P_m^{\alpha, \beta}(x)}{\prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)}$$

onde x_i ($i=0, \dots, n-1$) são as raízes conhecidas de $P_m^{\alpha, \beta}(x)$.

Notando que

$$\frac{f_{m-n}(x)}{f'_{m-n}(x)} = \frac{P_m^{\alpha,\beta}(x)}{\left[P_m^{\alpha,\beta}(x)\right]' - P_m^{\alpha,\beta}(x) \sum_{i=0}^{n-1} \left[1/(x-x_i)\right]},$$

um algoritmo para determinar as m raízes de $P_m^{\alpha,\beta}(x)$ usando a técnica de Newton-Raphson com o esquema de fatoração polinomial é:

Para $k = 0:m-1$

$$r = x_{i,m}^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$$

se ($k > 0$) $r = (r + x_{k-1})/2$

Para $j = 1:(\text{máximo de iterações})$

$$s = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(r - x_i)}$$

$$\delta = - \frac{P_m^{\alpha,\beta}(r)}{\left[P_m^{\alpha,\beta}(r)\right]' - P_m^{\alpha,\beta}(r)}$$

$$r = r + \delta$$

se ($\delta < \varepsilon$) saia do laço

continue

$$x_k = r$$

continue

onde ε é uma tolerância especificada. Numericamente, uma aproximação melhor para a estimativa inicial é dada pela média de $x_{i,m}^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$ e x_{k-1} (Karniadakis, Sherwin; 1999). Os valores de $P_m^{\alpha,\beta}(x)$ e $\left[P_m^{\alpha,\beta}(x)\right]'$ podem ser calculados usando as relações de recursão (C.3) e (C.4).

APÊNDICE E – DIFERENCIAÇÃO DE LAGRANGE

Uma função $u(x) \in P_m$, onde P_m é o espaço de todos os polinômios de grau $\leq m$, pode ser escrita em termos de polinômios de Lagrange $h_i(x)$ usando um conjunto de Q pontos nodais x_i ($0 \leq i \leq Q-1$) como

$$u(x) = \sum_{i=0}^{Q-1} u(x_i) h_i(x)$$

onde $Q \geq m+1$. A derivada de $u(x)$ é, portanto:

$$\frac{du(x)}{dx} = \sum_{j=0}^{Q-1} u(x_j) \frac{d}{dx} h_j(x)$$

Avaliando $\frac{du(x)}{dx}$ nos pontos nodais x_i temos:

$$\left. \frac{du(x)}{dx} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=0}^{Q-1} D_{ij} u(x_j), \quad D_{ij} = \left. \frac{dh_j(x)}{dx} \right|_{x=x_i}$$

O polinômio de Lagrange é

$$h_i(x) = \frac{p_Q(x)}{p'_Q(x_i)(x-x_i)}, \quad p_Q(x) = \prod_{j=0}^{Q-1} (x-x_j)$$

e a derivada de $h_i(x)$ é

$$\frac{dh_i(x)}{dx} = \frac{p'_Q(x)(x-x_i) - p_Q(x)}{p'_Q(x)(x-x_i)^2}$$

Notando que

$$\lim_{x \rightarrow x_i} \frac{dh_i(x)}{dx} = \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{p''_Q(x)}{2p'_Q(x)} = \frac{p''_Q(x_i)}{2p'_Q(x_i)}$$

D_{ij} pode ser definido da seguinte maneira:

$$D_{ij} = \begin{cases} \frac{p'_Q(x_i)}{p'_Q(x_j)} \frac{1}{(x_i - x_j)} & i \neq j \\ \frac{p''_Q(x_i)}{2p'_Q(x_i)} & i = j \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

E.1 Fórmulas de Jacobi

Nesta seção serão deduzidas formas específicas de $p'_Q(x_i)$ e $p''_Q(x_i)$, correspondentes aos pontos nodais das quadraturas de Gauss-Jacobi, Gauss-Radau-Jacobi e Gauss-Lobatto-Jacobi.

Quadratura de Gauss-Jacobi

Para este caso, os nós são dados pelas raízes do polinômio de Jacobi $P_Q^{\alpha,\beta}$, que são $x_i = x_{i,Q}^{\alpha,\beta}$. Portanto:

$$\begin{aligned} p_Q(x_i) &= P_Q^{\alpha,\beta}(x_i) \\ p'_Q(x_i) &= [P_Q^{\alpha,\beta}(x_i)]' \\ p''_Q(x_i) &= [P_Q^{\alpha,\beta}(x_i)]'' \end{aligned}$$

Avaliando a expressão (C.1) em $x_i = x_{i,Q}^{\alpha,\beta}$ (isto é, $P_Q^{\alpha,\beta}(x_i) = 0$), pode-se expressar

$[P_Q^{\alpha,\beta}(x_i)]''$ em termos de $[P_Q^{\alpha,\beta}(x_i)]'$ ($0 \leq i \leq Q-1$), chegando à relação:

$$[P_Q^{\alpha,\beta}(x_i)]'' = \frac{(\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)x_i)}{(1 - x_i^2)} [P_Q^{\alpha,\beta}(x_i)]' \quad (\text{E.2})$$

O valor de $[P_Q^{\alpha,\beta}(x_i)]'$ pode ser obtido usando a relação de recursão (C.4).

Quadratura de Gauss-Radau-Jacobi

Para este caso, os nós são dados por:

$$x_i = \begin{cases} -1 & i = 0 \\ x_{i-1, Q-1}^{\alpha, \beta} & i = 1, \dots, Q-1 \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} p_Q(x_i) &= (1+x_i) P_{Q-1}^{\alpha, \beta+1}(x_i) \\ p'_Q(x_i) &= (1+x_i) [P_{Q-1}^{\alpha, \beta+1}(x_i)]' + P_{Q-1}^{\alpha, \beta+1}(x_i) \\ p''_Q(x_i) &= (1+x_i) [P_{Q-1}^{\alpha, \beta+1}(x_i)]'' + 2P_{Q-1}^{\alpha, \beta+1}(x_i) \end{aligned}$$

Usando um argumento similar àquele utilizado para deduzir a eq. (E.2), a segunda derivada ($1 \leq i \leq Q-1$) pode ser expressa como:

$$(1+x_i) [P_{Q-1}^{\alpha, \beta+1}(x_i)]'' = \frac{(\alpha - \beta - 1 + (\alpha + \beta + 3)x_i)}{(1-x_i)} [P_{Q-1}^{\alpha, \beta+1}(x_i)]'$$

Assim, os valores de $p'_Q(x_i)$ e $p''_Q(x_i)$ são dados por:

$$\begin{aligned} p'_Q(x_i) &= \begin{cases} \frac{(-1)^{Q-1} \Gamma(Q+\beta+1)}{\Gamma(Q)\Gamma(\beta+2)} & i = 0 \\ (1+x_i) [P_{Q-1}^{\alpha, \beta+1}(x_i)]' & i = 1, \dots, Q-1 \end{cases} \\ p''_Q(x_i) &= \begin{cases} \frac{(-1)^{Q-1} (Q+\alpha+\beta+1) \Gamma(Q+\beta+1)}{\Gamma(Q-1)\Gamma(\beta+3)} & i = 0 \\ \frac{(\alpha - \beta + 1 + (\alpha + \beta + 1)x_i)}{(1-x_i)} [P_{Q-1}^{\alpha, \beta+1}(x_i)]' & i = 1, \dots, Q-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Quadratura de Gauss-Lobatto-Jacobi

Para este caso, os nós são dados por:

$$x_i = \begin{cases} -1 & i = 0 \\ x_{i-1, Q-2}^{\alpha+1, \beta+1} & i = 1, \dots, Q-2 \\ 1 & i = Q-1 \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
 p_Q(x_i) &= (1-x_i)(1+x_i)P_{Q-2}^{\alpha+1,\beta+1}(x_i) \\
 p'_Q(x_i) &= (1-x_i)(1+x_i)\left[P_{Q-2}^{\alpha+1,\beta+1}(x_i)\right]' - 2P_{Q-2}^{\alpha+1,\beta+1}(x_i) \\
 p''_Q(x_i) &= (1-x_i)(1+x_i)\left[P_{Q-2}^{\alpha+1,\beta+1}(x_i)\right]'' - 4x_i\left[P_{Q-2}^{\alpha+1,\beta+1}(x_i)\right]' - 2P_{Q-1}^{\alpha,\beta+1}(x_i)
 \end{aligned}$$

Mais uma vez, usando um argumento similar àquele utilizado para deduzir a eq. (E.2), a segunda derivada ($1 \leq i \leq Q-2$) pode ser expressa como:

$$(1-x_i)(1+x_i)\left[P_{Q-2}^{\alpha+1,\beta+1}(x_i)\right]'' = (\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 4)x_i)\left[P_{Q-2}^{\alpha+1,\beta+1}(x_i)\right]'$$

Assim, os valores de $p'_Q(x_i)$ e $p''_Q(x_i)$ são dados por:

$$\begin{aligned}
 p'_Q(x_i) &= \begin{cases} \frac{(-1)^Q 2\Gamma(Q+\beta)}{\Gamma(Q-1)\Gamma(\beta+2)} & i=0 \\ (1-x_i)(1+x_i)\left[P_{Q-2}^{\alpha+1,\beta+1}(x_i)\right]' & i=1,\dots,Q-2 \\ \frac{-2\Gamma(Q+\alpha)}{\Gamma(Q-1)\Gamma(\alpha+2)} & i=Q-1 \end{cases} \\
 p''_Q(x_i) &= \begin{cases} \frac{(-1)^Q 2(\alpha - (Q-1)(Q+\alpha+\beta))}{\beta+2} \frac{\Gamma(Q+\beta)}{\Gamma(Q-1)\Gamma(\beta+2)} & i=0 \\ (\alpha - \beta + (\alpha + \beta)x_i)\left[P_{Q-2}^{\alpha+1,\beta+1}(x_i)\right]' & i=1,\dots,Q-2 \\ \frac{2(\beta - (Q-1)(Q+\alpha+\beta))}{\alpha+2} \frac{\Gamma(Q+\alpha)}{\Gamma(Q-1)\Gamma(\alpha+2)} & i=Q-1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

APÊNDICE F – TESTES DE CONVERGÊNCIA E VALIDAÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO

Para os testes de convergência e validação do método numérico utilizado, foi escolhido o caso do escoamento ao redor de um cilindro isolado. Esta decisão é justificada pelo fato de existir um vasto conjunto de dados experimentais disponíveis na literatura para fins de comparação.

Os testes de convergência foram realizados primeiramente para casos bidimensionais, com a finalidade de estabelecer as dimensões do domínio e os parâmetros adequados para a realização das simulações. Os números de Reynolds estudados variam de 100 a 500, pois esta é a faixa na qual as investigações deste trabalho foram feitas. O esquema e sequência dos testes foram estabelecidos tomando como base os procedimentos de validação descritos em Barkley; Henderson (1996).

Depois de feitos os testes de convergência em relação a todos os parâmetros, foi feita uma comparação com resultados experimentais com emissão paralela de vórtices. dentro da faixa de Re para a qual o escoamento é estável a perturbações na direção do eixo e o escoamento físico pode ser considerado bidimensional.

Depois de estabelecida a malha bidimensional, foram feitos testes variando os parâmetros tridimensionais do problema, que são o número de modos na direção do eixo e o comprimento periódico para a simulação. Os resultados também são comparados com dados disponíveis na literatura.

Segue uma descrição detalhada de todos os testes de convergência e validações.

F.1 Testes de convergência – independência da malha bidimensional

F.1.1 Grau do polinômio da função de base

Quando o método de elementos espectrais é utilizado, geralmente procede-se da seguinte forma: primeiramente é gerada uma malha que distribui elementos de forma adequada, de acordo com o fenômeno simulado. Procura-se dessa forma,

localizar um maior número de elementos em áreas que apresentam maiores gradientes, como regiões de camada limite ou esteira. Em seguida, são feitos testes variando-se o grau do polinômio utilizado como função de base e analisa-se a sensibilidade dos resultados em relação a esta variação. Este foi o primeiro teste realizado neste trabalho. Na Figura F.1 é apresentada a malha empregada neste procedimento. Esta malha foi construída com base em trabalhos da literatura no que se refere à ordem de grandeza das dimensões e da distribuição da densidade de elementos. Especificamente quanto à distribuição de elementos, esta característica foi mantida em todas as outras malhas usadas nos outros testes e mesmo nas simulações. Vale notar o maior refinamento nas proximidades da parede do cilindro, onde a camada limite é formada, e o maior número de elementos na região da esteira.

Figura F.1 – Malha utilizada para os testes com o grau do polinômio da função de base.

Nesta malha, a fronteira em azul indica onde foi colocada uma condição de contorno do tipo entrada com velocidade especificada, no caso, de módulo unitário, horizontal da esquerda para a direita. A fronteira vermelha representa o cilindro, onde uma condição de contorno do tipo parede sem escorregamento foi fixada. Finalmente a fronteira verde representa a região de saída. A malha se estende, em unidades de diâmetro do cilindro, estando o centro do cilindro na origem, de -30 a 30 na direção y , ou direção vertical, e de -18 a 52 na direção x , ou direção horizontal. O número de elementos é 372 e o número de nós é de 419.

Foi fixado o número de Reynolds igual a 160 e foram feitas simulações para polinômios de grau variando de 4 até 12. Abaixo se encontra uma tabela com os resultados encontrados para número de Strouhal (St), coeficiente de arrasto médio ($\overline{C_D}$), valor RMS do coeficiente de sustentação (C_L') coeficiente de pressão de base médio ($\overline{C_{pb}}$). Também constam na tabela o passo de tempo adimensional utilizado nas simulações (Δt) e uma estimativa do tempo computacional gasto para cada caso.

Tabela F.1 – Teste de convergência – grau do polinômio da função de base.

Ordem	Δt	St	$\overline{C_{pb}}$	$\overline{C_D}$	C_L'	Tempo (min)
4	0,010	0,1880	-0,8717	1,345	0,4009	57
5	0,010	0,1880	-0,8630	1,336	0,3941	88
6	0,008	0,1880	-0,8643	1,336	0,3957	159
7	0,005	0,1880	-0,8640	1,335	0,3949	320
8	0,005	0,1880	-0,8642	1,335	0,3951	443
9	0,005	0,1880	-0,8641	1,335	0,3952	587
10	0,005	0,1880	-0,8641	1,335	0,3951	778
11	0,004	0,1880	-0,8641	1,335	0,3950	1253
12	0,004	0,1880	-0,8641	1,335	0,3951	1608

O critério utilizado para convergência foi de variação relativa em relação ao caso de refinamento imediatamente maior. Ilustrando, a variação relativa calculada para o caso de polinômio de grau 5 é feita tomando como padrão os resultados obtidos com polinômio de grau 6. Considerou-se a convergência atingida quando esta variação fosse menor que 1% para todas as grandezas.

Como o leitor pode verificar, o polinômio de grau 7 já atende aos requisitos estabelecidos. Contudo optou-se pelo uso do polinômio de grau 8 por dois motivos. O primeiro deles é que planejava-se então fazer simulações com Re mais altos, que requerem um maior refinamento. Assim, a escolha de um polinômio de grau maior poderia evitar que mais tempo fosse gasto com ajustes no futuro. O outro motivo é que, como as funções de base são de classe C^0 , quando se calculam contornos de vorticidade, no contorno de cada elemento descontinuidades são visualizadas, pois esta grandeza envolve derivadas da velocidade. Todavia, quanto maior o refinamento da discretização, mais suave é esta descontinuidade. Observando-se os contornos de vorticidade dos casos dos polinômios de grau 7 e 8, verificou-se também um ganho

interessante em termos de definição de contornos. Esta definição tem bastante relevância no caso deste trabalho, onde um dos objetivos é observar as estruturas que aparecem no escoamento.

Neste ponto, cabe uma observação. O número de Strouhal foi calculado aqui e em todas as outras simulações através de uma transformada rápida de Fourier do sinal de sustentação. A incerteza na frequência depende do número de pontos amostrados e do intervalo de tempo e é dada pela seguinte equação:

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta t}$$

onde Δf é a incerteza na frequência, N é o número de amostras e Δt é o intervalo de tempo entre as amostras. Analisando esta fórmula, percebemos que temos duas formas de aumentar a precisão na frequência. Uma delas é aumentar o passo de tempo. Todavia, esta abordagem tem uma série de desvantagens, pois ela também reduz a faixa de frequência que pode ser estudada, uma vez que a máxima frequência que pode ser extraída de um sinal é dada pela relação de Nyquist:

$$f_{\max} = \frac{2}{\Delta t}$$

Desse modo, pode-se notar que aumentando-se o passo de tempo melhora-se a precisão na frequência às custas da redução da faixa que pode ser aferida. Além disso, o aumento de Δt pode desestabilizar o método. Tendo isso em mente, conclui-se que a melhor maneira de se ter um pequeno quanta de frequência é aumentar o número de amostras. A única desvantagem que esta abordagem acarreta é o aumento do tempo computacional gasto nas simulações.

Quando da realização destes testes com o grau do polinômio, não se tinha consciência de toda esta questão envolvida com o passo de frequência, e a série temporal simulada foi demasiadamente curta para se medir a variação de St coerentemente com o limite de 1% utilizado como critério. Contudo, mediante a realização de testes posteriores, verificou-se que o St é o parâmetro que se estabiliza mais rapidamente em testes de convergência quando comparado com os outros parâmetros analisados. Portanto, entendeu-se que as simulações realizadas já eram suficientes para o fim a que se propunham.

Por fim, cabe aqui dizer que não houve a preocupação de se fazer um ajuste fino do passo de tempo. Por conseguinte, os passos de tempo utilizados não foram os ótimos em termos do compromisso tempo de simulação/estabilidade do método. Nos testes seguintes procurou-se fazer um ajuste melhor deste parâmetro.

F.1.2 Integração da condição de contorno de pressão

O teste seguinte referiu-se a mais um parâmetro particular do método utilizado. Conforme descrito na seção B.1 e em Karniadakis; Israeli; Orzag (1991), nas fronteiras onde há condições de contorno essenciais para a velocidade, isto é, nas paredes e nas regiões de entrada, a condição de contorno para a pressão é uma do tipo Neumann de alta ordem. O software utilizado permite que a ordem desta condição seja variada. Em vista deste fato, tentou-se avaliar a influência deste parâmetro nos resultados das simulações.

Na Tabela F.2 estão listados os resultados encontrados para simulações utilizando a mesma malha do teste do item F.1.1, com $Re = 100$. Desta vez foram extraídas séries temporais suficientemente grandes para que se tivesse uma precisão de 10^{-4} no St .

Tabela F.2 – Teste de convergência – Integração da pressão no contorno.

Grau de Integração	St	$\overline{C_{pb}}$	$\overline{C_D}$	C_L'
1	0,1676	-0,7103	1,3568	0,2441
2	0,1663	-0,6995	1,3467	0,2325
3	0,1663	-0,6995	1,3467	0,2324

Como se pode verificar pelos dados, a partir de grau 2, os dados não apresentam diferenças significativas. Como o aumento no grau de integração acarreta em aumento do custo computacional, optou-se pelo grau 2.

F.1.3 Tamanho lateral da malha – efeito de blocagem

Após estabelecer o grau do polinômio de Jacobi que seria utilizado como função de base, passou-se à tarefa de definição das dimensões da malha. A primeira dimensão com a qual uma análise paramétrica foi executada foi a largura. Em domínios demasiadamente estreitos ocorre um fenômeno conhecido como blocagem,

que é a imposição de uma condição de contorno de velocidade ao longe numa região onde ainda não se pode desprezar os efeitos da esteira. Esta condição faz com que o número de Strouhal suba e é observada tanto em experimentos (túneis de vento ou canais demasiadamente estreitos) quanto em simulações computacionais.

Tomando a malha utilizada nos itens anteriores como base, foram feitos testes utilizando diversas larguras. O número de elementos para todas as malhas foi o mesmo, como se pode observar nos exemplos da Figura F.2. O que se fez foi somente estirar os elementos da lateral. Isso não acarretou nenhuma prejuízo aos resultados, uma vez que a região em questão não apresenta grandes gradientes. Esta afirmação foi confirmada através de testes com malhas com maior número de elementos na região lateral, cujos resultados não apresentaram diferenças significativas em relação àqueles obtidos com as malhas originais.

A Tabela F.1 traz listadas as larguras (distância do centro do cilindro até o limite lateral da malha) utilizadas, expressas em unidades de diâmetro, juntamente com os números de Strouhal obtidos nas simulações numéricas. Desta vez, foram simulados Re variando de 100 a 500, com intervalos de 100, e mais uma vez com séries temporais suficientemente grandes para que se tivesse uma precisão de 10^{-4} no St .

Tabela F.3 – Números de Strouhal – Teste de convergência para largura da malha.

Largura (X_w/D)	Re100	Re200	Re300	Re400	Re500
20	0,1667	0,1976	0,2117	0,2198	0,2254
25	0,1664	0,1974	0,2114	0,2194	0,2250
30	0,1663	0,1973	0,2113	0,2192	0,2248
35	0,1663	0,1972	0,2112	0,2191	0,2247
40	0,1662	0,1972	0,2111	0,2190	0,2247
45	0,1662	0,1971	0,2110	0,2190	0,2247
50	0,1662	0,1971	0,2110	0,2190	0,2246
55	0,1662	0,1971	0,2110	0,2190	0,2246

Figura F.2 – Exemplos de malhas utilizadas nos testes de convergência para largura da malha.

Neste caso, adotou-se o critério de máxima precisão à qual se podia chegar, visto que o aumento da largura não traria prejuízo significativo algum, pois o número de elementos e por conseguinte o custo computacional não era aumentado e o método mostrou-se estável para todos os casos. Não havendo mudança sensível dentro da precisão estabelecida nos casos de largura 50 e 55, optou-se pelo primeiro.

F.1.4 Comprimento do domínio a jusante do corpo

Para a análise da influência do comprimento do domínio a jusante do corpo, foram utilizadas as condições estabelecidas pelos testes anteriores e variou-se o comprimento da malha. Todavia, diferentemente do teste para largura da malha, no

presente caso, o número de elementos foi variado de acordo com o tamanho do domínio, de forma a manter aproximadamente a mesma distribuição e densidade de elementos nas proximidades da região de saída. Os comprimentos testados, em unidades de diâmetro foram: 25, 35, 45, 52 e 60. Exemplos das malhas encontram-se na Figura F.3.

Figura F.3 – Exemplos de malhas utilizadas no teste de convergência para comprimento a jusante.

A grandeza monitorada neste caso foi o módulo da vorticidade máxima que ocorria durante um ciclo em diversas estações. Por estações entendem-se segmentos de reta paralelas à fronteira de saída colocadas cada uma a certa distância do corpo. Para fazer esta análise, foram gravados 16 quadros ao longo de um ciclo. De todos esses 16 quadros foram extraídos os valores de vorticidade de 100 pontos ao longo segmentos de reta de 5 diâmetros, centrada no domínio, que corresponde a uma estação cada. Com estes valores para cada estação e em todos os quadros do ciclo, procurou-se então o maior valor de módulo de vorticidade em um ciclo para cada estação. Este procedimento foi repetido para todas as malhas geradas, para números de Reynolds variando de 100 a 500, com intervalos de 100 unidades. Este pós-processamento é bastante custoso em termos computacionais, e foi feito através da

geração de arquivos de dados pelo software de visualização Tecplot e posterior tratamento executado por algoritmo desenvolvido pelo próprio pesquisador.

Os resultados estão expostos a seguir na forma de gráficos, sendo um gráfico para cada Re testado.

Figura F.4 – Teste de convergência para comprimento a jusante – Re 100.

Figura F.5 – Teste de convergência para comprimento a jusante – Re 200.

Figura F.6 – Teste de convergência para comprimento a jusante – *Re* 300.

Figura F.7 – Teste de convergência para comprimento a jusante – *Re* 400.

Figura F.8 – Teste de convergência para comprimento a jusante – Re 500.

Como se pode notar nos resultados expostos acima, não há diferença significativa no cálculo de vorticidade para as malhas consideradas dentro dos limites dos respectivos domínios. O espalhamento que se verifica com o aumento de Re se deve ao aparecimento gradativo de turbulência. Isto posto, decidiu-se pela malha de 45 diâmetros de comprimento a jusante do centro do cilindro porque julgou-se que este seria um bom comprimento para o estudo das estruturas do escoamento, visto que é grande o suficiente para observar formação, propagação e decaimento de tais estruturas.

F.1.5 Comprimento do domínio a montante do corpo

Em seguida, procedeu-se com o último dos testes de convergência, que se refere ao comprimento do domínio estudado compreendido entre o corpo e a seção de entrada do fluido. Os resultados apresentaram grande sensibilidade a este parâmetro, o que foi surpreendente, pois não foi encontrada na literatura pesquisada nenhum teste com relação ao comprimento do domínio a montante do corpo.

O procedimento adotado foi semelhante aos anteriores. Foram fixados os parâmetros já determinados pelos testes anteriores e variou-se o comprimento da malha a montante do corpo. Exemplos das malhas utilizadas estão na Figura F.9.

Figura F.9 – Exemplos de malhas utilizadas no teste de convergência para comprimento a montante.

Foram simulados escoamentos com Re variando de 100 a 500, em intervalos de 100. As grandezas monitoradas foram St , $\overline{C_{pb}}$, $\overline{C_D}$ e C_L' , e os comprimentos testados foram, em unidades de diâmetro: 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66 e 72. O número de casos testados foi grande porque decidiu-se verificar a sensibilidade a este parâmetro até a precisão utilizada no método, já que não foram encontradas referências em relação a tal fator. As tabelas F.4 a F.8 trazem listados os resultados encontrados.

Tabela F.4 – Teste de convergência – Comprimento a montante – Re 100.

X_i/D	St	$\overline{C_D}$	C_L'	$\overline{C_{pb}}$
18	0,1662	1,345	0,2323	-0,7033
24	0,1655	1,337	0,2301	-0,6991
30	0,1651	1,333	0,2290	-0,6968
36	0,1649	1,331	0,2283	-0,6953
42	0,1648	1,329	0,2279	-0,6944
48	0,1647	1,328	0,2276	-0,6937
54	0,1646	1,327	0,2274	-0,6932
60	0,1646	1,327	0,2272	-0,6927
66	0,1646	1,326	0,2271	-0,6926
72	0,1646	1,326	0,2272	-0,6926

Tabela F.5 – Teste de convergência – Comprimento a montante – Re 200.

X_i/D	St	$\overline{C_D}$	C_L'	$\overline{C_{pb}}$
18	0,1971	1,344	0,4851	-0,9641
24	0,1965	1,337	0,4811	-0,9587
30	0,1962	1,333	0,4793	-0,9558
36	0,1960	1,331	0,4784	-0,9541
42	0,1958	1,330	0,4778	-0,9529
48	0,1958	1,329	0,4773	-0,9521
54	0,1957	1,328	0,4769	-0,9515
60	0,1957	1,328	0,4767	-0,9512
66	0,1956	1,327	0,4765	-0,9509
72	0,1956	1,327	0,4764	-0,9507

Tabela F.6 – Teste de convergência – Comprimento a montante – Re 300.

X_i/D	St	$\overline{C_D}$	C_L'	$\overline{C_{pb}}$
18	0,2109	1,378	0,6509	-1,1482
24	0,2103	1,370	0,6469	-1,1415
30	0,2100	1,367	0,6454	-1,1389
36	0,2097	1,364	0,6436	-1,1365
42	0,2096	1,362	0,6418	-1,1339
48	0,2095	1,361	0,6415	-1,1332
54	0,2095	1,361	0,6416	-1,1332
60	0,2094	1,359	0,6405	-1,1315
66	0,2094	1,360	0,6411	-1,1325
72	0,2094	1,359	0,6406	-1,1317

Tabela F.7 – Teste de convergência – Comprimento a montante – Re 400.

X_i/D	St	$\overline{C_D}$	C_L'	$\overline{C_{pb}}$
18	0,2190	1,405	0,7567	-1,2990
24	0,2184	1,398	0,7530	-1,2923
30	0,2180	1,393	0,7497	-1,2877
36	0,2178	1,390	0,7476	-1,2848
42	0,2177	1,389	0,7469	-1,2831
48	0,2176	1,387	0,7460	-1,2820
54	0,2175	1,387	0,7455	-1,2812
60	0,2174	1,386	0,7453	-1,2808
66	0,2174	1,386	0,7451	-1,2806
72	0,2174	1,386	0,7450	-1,2804

Tabela F.8 – Teste de convergência – Comprimento a montante – Re 500.

X_i/D	St	$\overline{C_D}$	C_L'	$\overline{C_{pb}}$
18	0,2246	1,425	0,8277	-1,3918
24	0,2240	1,419	0,8230	-1,3841
30	0,2235	1,413	0,8194	-1,3797
36	0,2234	1,410	0,8179	-1,3773
42	0,2232	1,408	0,8166	-1,3749
48	0,2231	1,407	0,8160	-1,3742
54	0,2230	1,406	0,8154	-1,3731
60	0,2230	1,406	0,8150	-1,3725
66	0,2230	1,406	0,8148	-1,3723
72	0,2229	1,406	0,8148	-1,3722

Para este parâmetro, utilizamos um critério mais estreito, de variação relativa em todas as grandezas para todos os Re menor ou igual a 0,3%. Seguindo este critério, a malha escolhida foi de comprimento a montante igual a 36 diâmetros.

Figura F.10 – Exemplos de malhas utilizados nos teste de engrossamento da região de entrada.

Como se pode ver pela Figura F.9, o domínio foi aumentado juntamente com o número de elementos. Foram feitos então testes engrossando-se a malha escolhida na região de entrada, para Re 100, que foi o caso mais sensível, a fim de reduzir o tempo computacional das simulações. Exemplos de malhas geradas neste processo estão na Figura F.10. Os resultados obtidos estão na Tabela F.9, onde pode ser

observado que todos os testes ficaram dentro do critério estabelecido e por isso a malha final escolhida foi a de menor número de elementos. Esta malha está mostrada na Figura F.11.

Tabela F.9 – Resultados para engrossamento da malha na região de entrada.

Nº de elementos	St	$\overline{C_D}$	C_L'	$\overline{C_{pb}}$
2	0,1649	1,331	0,2285	-0,6954
3	0,1649	1,331	0,2284	-0,6953
4	0,1649	1,331	0,2284	-0,6953
5	0,1649	1,331	0,2283	-0,6952
6	0,1649	1,331	0,2283	-0,6953

Em seguida, foi feita uma verificação final quanto à independência dos parâmetros. Em outros termos, desejava-se verificar se a variação de um dos parâmetros influenciava na resposta do sistema à variação dos outros parâmetros. Isso foi feito fixando-se a malha escolhida e variando-se mais uma vez, separadamente e para o grau imediatamente mais refinado/longo, o grau do polinômio, a largura da malha, o comprimento a jusante e o comprimento a montante. Analisando-se os resultados para simulações com Re igual a 100, verificou-se que as diferenças não eram significativas dentro dos critérios de convergência utilizados. Assim, ficou definida a malha base final. Sumarizando os resultados do teste, sendo o cilindro centrado na origem, o domínio se estende de -36 a 45 na direção do escoamento e de -50 a 50 na direção transversal, sendo todas as medidas em unidades de diâmetros. O número total de elementos é de 336 e o número de nós é de 379. Comparando-se estes números com os da primeira malha gerada, Figura F.1, vemos que o número de elementos e o número de nós foram reduzidos ambos em cerca de 10%. Conclui-se então que estes testes de convergência, além de se prestarem a determinar um domínio que forneça os melhores resultados que o método pode oferecer, também ajuda a determinar uma condição ótima, em termos de custo computacional, para a simulação do escoamento.

Figura F.11 – Malha final resultante dos testes de convergência.

F.2 Validação das simulações bidimensionais com resultados experimentais da literatura

O algoritmo computacional utilizado foi validado através da comparação dos resultados bidimensionais com valores experimentais para regime de emissão paralela de vórtices, extraídos de Williamson (1989). Na faixa de Re analisada, que vai de aproximadamente 50 até 180, o escoamento físico é estável em relação a perturbações tridimensionais (Williamson 1988) e, por conseguinte, simulações bidimensionais consistentes devem ser capazes de representar adequadamente o fenômeno.

A Figura F.12 traz um gráfico onde estão colocados os resultados experimentais juntamente com os resultados obtidos pelo método numérico e malha aqui utilizados. Pelo gráfico percebe-se claramente que os resultados numéricos tem ótima aderência com os dados experimentais. Comparando-se numericamente as duas fontes, verificou-se que o maior erro fica abaixo de 1%, o que é considerado plenamente aceitável para os objetivos deste trabalho.

Figura F.12 – Validação com resultados experimentais.

F.3 Testes de convergência – parâmetros tridimensionais

Estabelecida a malha bidimensional, procedeu-se com testes relativos à variação dos parâmetros que definem a discretização do domínio na direção do eixo, ou seja, o número de modos na direção z , e o comprimento periódico de simulação na direção do eixo. Estes testes estão descritos nas seções subsequentes.

F.3.1 Número de modos da direção do eixo

O caso escolhido para este teste foi o maior Re apresentado nos resultados, de valor 320. Foi escolhido este extremo porque o número de modos está ligado à resolução na direção do eixo, ou seja, com a melhor representação de fenômenos de pequena escala. Dado que quanto maior o Re maior a turbulência e, portanto, maiores as flutuações de pequena escala, o Re mais alto simulado é o caso crítico para este parâmetro no presente contexto. A malha utilizada aqui é a malha bidimensional da Figura F.11 com um refinamento adicional na região da esteira próxima. Esta malha está indicada no capítulo 4.. Os resultados estão tabulados na Tabela F.10. Os resultados foram extraídos de simulações de 1000 passos de tempo adimensionais, com comprimento periódico $L=5D$. Devido ao alto custo das computações

tridimensionais (uma simulação com $Re=320$, rodando paralelamente em 8 processadores, demora cerca de 8 dias), a resolução de St é de 0,001 nesses testes.

Tabela F.10 – Resultados dos testes de convergência do número de modos na direção z , $Re=320$.

Nº de modos	St	$\overline{C_D}$	C_L'
16	divergiu		
32	0,201	1,22	0,362
64	0,202	1,21	0,341
Resultados Experimentais			
<i>Williamson; Brown (1998)</i>	0,204	-	-
<i>Fey; König; Eckelmann (1998)</i>	0,201	-	-
<i>Wieselsberger (1922)</i>	-	1,21 – 1,25	-

Como se pode perceber, tanto o número de Strouhal quanto o arrasto médio variam bem pouco com a mudança do número de modos. Também para essas duas grandezas, os resultados obtidos coincidem com as faixas observadas em experimentos. Já a flutuação da sustentação apresentou variação mais significativa, próxima de 6%. Entretanto, como não foram encontrados resultados experimentais de flutuação da sustentação para este Re , decidiu-se não usar esta grandeza como parâmetro de validação.

Assim sendo, conclui-se que uma discretização de 0,15625 elementos por unidade de diâmetro na direção z já é suficiente para que os efeitos dos fenômenos de pequenas escalas sejam sentidos nos coeficientes de força.

F.3.2 Comprimento periódico do eixo

Em seguida, foi estudada a sensibilidade dos resultados ao comprimento periódico simulado. Este comprimento, representado por L , tem ligação direta com a maior escala que pode ser representada pela simulação. Desse modo, a região crítica para o estudo de convergência do parâmetro L é onde ocorrem instabilidades de maior escala, ou seja, o modo A e os deslocamentos de vórtices. Por isso, o número de Reynolds escolhido para os testes foi 200. O número de modos foi mantido constante para todos os casos, igual a 64, resultando em discretizações na direção z que variam entre 0,25 e 0,046875 diâmetros. Nota-se que o extremo de discretização 0,25 é maior do que o valor de 0,15625 obtido no teste anterior. Todavia, admitiu-se

o uso de tal discretização por dois motivos: o primeiro é que para $Re=200$ espera-se que as pequenas escalas tenham influência bem menos representativa do que no caso onde $Re=320$. O segundo motivo é que, devido à estrutura do código, só é possível simular números de modos que sejam potências de 2, o que resulta em passos muito grandes de discretização. Assim, este valor obtido no teste anterior é mais uma ordem de grandeza do que um limite propriamente dito. Na Tabela F.11 encontram-se os resultados dos testes feitos variando-se o comprimento periódico.

Tabela F.11 – Resultados dos testes de convergência do comprimento periódico do cilindro, $Re=200$.

Comprimento periódico	St	$\overline{C_D}$	C_L'
$3D$	0,196	1,33	0,479
$5D$	0,196	1,31	0,454
$8D$	0,195	1,29	0,424
$12D$	0,184	1,28	0,388
$16D$	0,185	1,27	0,350
Resultados Experimentais			
<i>Williamson (1996c)</i>	0,183	-	-
<i>Fey; König; Eckelmann (1998)</i>	0,183	-	-
<i>Wieselsberger (1922)</i>	-	1,27 – 1,30	-

Talvez a observação mais marcante que se pode fazer desses resultados é o salto em St que acontece quando se muda o espaçamento de $8D$ para $12D$. Comparando-se com os resultados da literatura, vê-se que esse salto se dá em direção aos valores medidos. O arrasto também tende aos valores experimentais, porém de forma suave. Isso denota que existem fenômenos de grande escala importantes para esse regime de Re , e que só se consegue representá-los de forma adequada usando um comprimento periódico também grande. Por outro lado, este fator indica também uma forma de se isolar essas instabilidades de grande escala da simulação, e estudar as pequenas escalas da transição. Como os resultados entre os comprimentos $12D$ e $16D$ não variam significativamente, assume-se que o comprimento de $12D$ com 64 modos na direção z consegue representar de forma adequada os fenômenos de grande escala, satisfazendo também os critérios de discretização mínima.

Figura F.13 – Séries temporais da velocidade em x no ponto (5,37; 0,62; 2,42), para diversos comprimentos periódicos, $Re=200$.

Com o intuito de melhor ilustrar a influência do comprimento periódico na representação das instabilidades na transição da esteira, a Figura F.13 traz histórias

temporais da velocidade na direção x , medida no ponto (5,37; 0,62; 2,42), para os comprimentos periódicos $3D$, $5D$ e $12D$. Conforme colocado por Williamson (1992), a presença de deslocamentos de vórtices pode ser notada por falhas no sinal de velocidade da esteira obtido, por exemplo, com anemômetros de fio quente. Analisando a Figura F.13, fica claro que estas falhas não estão presentes na simulação com $L=3D$. Para $L=5D$ elas aparecem de forma intermitente, e apenas duas vezes no espaço de tempo simulado. Finalmente, para $L=12D$, as irregularidades são notavelmente mais freqüentes. Esse comportamento pode ser explicado pelo fato dos deslocamentos de vórtices serem originados nos sítios de formação dos laços do modo A. Desse modo, já que para $L=3D$ o comprimento representado é menor do que o comprimento de onda do modo A, não há a formação de laços nesse caso e, conseqüentemente, os deslocamentos de vórtices também não aparecem. O comprimento $L=5D$ já é capaz de simular ao menos um comprimento de onda do modo A e, por isso, alguns deslocamentos de vórtices podem ser observados. Entretanto, esses deslocamentos não são freqüentes o suficiente para modificar a dinâmica da esteira ao ponto de alterar o número de Strouhal observado. Por fim, para $L=12D$ já há a presença de sítios de formação de laços do modo A em número suficiente para que aconteçam deslocamentos de vórtices com periodicidade tal que o número de Strouhal apresente considerável queda.

As afirmações do parágrafo anterior são corroboradas pelos gráficos na Figura F.14, onde são traçadas as evoluções das velocidades na direção z no mesmo ponto e para os mesmos comprimentos da Figura F.13. Perceba que a perturbação tridimensional é completamente atenuada no resultado referente a $L=3D$. Para $L=5D$, a tridimensionalidade se manifesta com maior força exatamente nas regiões onde se observam as falhas na série temporal da velocidade em x . Finalmente, no resultado da simulação com $L=12D$ a velocidade em z tem valores expressivos ao longo de todo o tempo de simulação.

A Figura F.15 traz os contornos da vorticidade na direção do eixo no plano $y=0$, para os comprimentos periódicos $3D$, $5D$ e $12D$. Nela pode-se notar que para $L=3D$ os contornos são retilíneos na direção z , pois não há estruturas tridimensionais. Para $L=5D$ os contornos apresentam a ondulação característica do modo A. Na simulação com $L=12D$ esta ondulação persiste, mas os contornos não são contínuos

na direção z como no caso $L=5D$, mas estão interrompidos em diversos pontos devido à presença de estruturas tridimensionais de grande escala.

Figura F.14 – Séries temporais da velocidade em z no ponto (5,37; 0,62; 2,42), para diversos comprimentos periódicos, $Re=200$.

Figura F.15 – Contornos de vorticidade na direção z no plano $y=0$, escoamento ao redor de um cilindro isolado, $Re=200$.

APÊNDICE G – RESULTADOS TABELADOS

Tabela G.1 – Número de Strouhal, simulações bidimensionais.

<i>Re</i>	<i>l_{cil}</i>	<i>t_{1,5d}</i>	<i>t_{3,5d}</i>	<i>t_{3d}</i>	<i>t_{5d}</i>	<i>t_{8d}</i>
160	0,187	0,153	0,124	0,122	0,167	0,179
195	0,195	0,165	0,126	0,123	0,177	0,189
200	0,196	0,167	0,127	0,123	0,178	0,190
240	0,203	0,179	0,127	0,173	0,186	0,197
270	0,207	0,187	0,113	0,177	0,191	0,201
300	0,210	0,192	0,172	0,183	0,195	0,205
320	0,212	0,196	0,175	0,185	0,197	0,207

Tabela G.2 – Número de Strouhal, simulações tridimensionais.

<i>Re</i>	<i>l_{cil}</i>	<i>t_{1,5d}</i>	<i>t_{3,5d}</i>	<i>t_{3d}</i>	<i>t_{5d}</i>	<i>t_{8d}</i>
160	0,187	0,153	0,124	0,122	0,167	0,180
195	0,195	0,165	0,126	0,123	0,177	0,189
200	0,196	0,167	0,127	0,123	0,178	0,190
240	0,199	0,179	0,129	0,127	0,181	0,192
270	0,197	0,186	0,127	0,128	0,178	0,189
300	0,200	0,194	0,128	0,130	0,181	0,193
320	0,202	0,197	0,130	0,131	0,184	0,192

Tabela G.3 – Coeficiente de arrasto médio, simulações bidimensionais.

<i>Re</i>	<i>l_{cil}</i>	<i>t_{1,5d}</i>		<i>t_{3d}</i>		<i>t_{3,5d}</i>		<i>t_{5d}</i>		<i>t_{8d}</i>	
		<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>
160	1,320	1,090	-0,162	1,032	-0,080	1,016	-0,014	1,201	0,403	1,270	0,439
195	1,329	1,063	-0,189	0,998	-0,112	0,978	-0,054	1,222	0,394	1,285	0,372
200	1,331	1,060	-0,193	0,994	-0,116	0,973	-0,058	1,224	0,389	1,287	0,364
240	1,345	1,042	-0,214	0,965	-0,144	1,203	0,318	1,241	0,357	1,305	0,318
270	1,355	1,032	-0,228	0,941	-0,041	1,208	0,288	1,253	0,335	1,316	0,299
300	1,364	1,024	-0,239	1,202	0,280	1,229	0,295	1,267	0,310	1,324	0,275
320	1,369	1,020	-0,246	1,207	0,261	1,236	0,287	1,277	0,296	1,330	0,269

Tabela G.4 – Coeficiente de arrasto médio, simulações tridimensionais.

<i>Re</i>	<i>1cil</i>	<i>t1,5d</i>		<i>t3d</i>		<i>t3,5d</i>		<i>t5d</i>		<i>t8d</i>	
		<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>
160	1,320	1,090	-0,162	1,032	-0,080	1,016	-0,014	1,201	0,403	1,270	0,439
195	1,329	1,063	-0,189	0,998	-0,112	0,978	-0,054	1,222	0,394	1,285	0,372
200	1,314	1,060	-0,193	0,994	-0,116	0,973	-0,058	1,224	0,390	1,276	0,379
240	1,255	1,040	-0,216	0,966	-0,124	0,946	-0,067	1,159	0,511	1,214	0,438
270	1,172	1,031	-0,228	0,948	-0,098	0,930	-0,085	1,111	0,548	1,139	0,517
300	1,207	1,025	-0,239	0,937	-0,101	0,916	-0,091	1,142	0,484	1,181	0,502
320	1,211	1,021	-0,245	0,930	-0,107	0,910	-0,099	1,132	0,471	1,169	0,489

Tabela G.5 – Flutuação do coeficiente de sustentação, simulações bidimensionais.

<i>Re</i>	<i>1cil</i>	<i>t1,5d</i>		<i>t3d</i>		<i>t3,5d</i>		<i>t5d</i>		<i>t8d</i>	
		<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>
160	3,88E-01	1,44E-02	3,84E-02	1,97E-02	1,93E-01	2,35E-02	2,57E-01	3,95E-01	9,50E-01	3,91E-01	7,90E-01
195	4,68E-01	1,46E-02	3,72E-02	2,04E-02	2,09E-01	2,20E-02	2,57E-01	4,60E-01	1,01E+00	4,67E-01	8,60E-01
200	4,78E-01	1,48E-02	3,74E-02	2,06E-02	2,11E-01	2,22E-02	2,57E-01	4,68E-01	1,02E+00	4,77E-01	8,73E-01
240	5,54E-01	1,63E-02	4,09E-02	2,36E-02	2,23E-01	6,12E-01	1,19E+00	5,31E-01	1,07E+00	5,48E-01	9,72E-01
270	6,02E-01	1,77E-02	4,45E-02	1,36E-01	3,20E-01	6,42E-01	1,18E+00	5,72E-01	1,11E+00	5,92E-01	1,04E+00
300	6,44E-01	1,90E-02	4,85E-02	7,15E-01	1,29E+00	6,75E-01	1,23E+00	6,09E-01	1,17E+00	6,30E-01	1,07E+00
320	6,68E-01	1,99E-02	5,12E-02	7,30E-01	1,28E+00	6,92E-01	1,24E+00	6,32E-01	1,21E+00	6,53E-01	1,10E+00

Tabela G.6 – Flutuação do coeficiente de sustentação, simulações tridimensionais.

<i>Re</i>	<i>1cil</i>	<i>t1,5d</i>		<i>t3d</i>		<i>t3,5d</i>		<i>t5d</i>		<i>t8d</i>	
		<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>
160	3,88E-01	1,44E-02	3,85E-02	1,97E-02	1,93E-01	2,35E-02	2,57E-01	3,95E-01	9,50E-01	3,91E-01	7,90E-01
195	4,68E-01	1,46E-02	3,72E-02	2,04E-02	2,09E-01	2,20E-02	2,57E-01	4,60E-01	1,01E+00	4,67E-01	8,60E-01
200	4,54E-01	1,48E-02	3,74E-02	2,06E-02	2,11E-01	2,22E-02	2,57E-01	4,68E-01	1,01E+00	4,62E-01	8,38E-01
240	3,63E-01	1,49E-02	3,69E-02	2,59E-02	2,47E-01	1,77E-02	2,70E-01	3,34E-01	8,75E-01	3,57E-01	7,47E-01
270	2,45E-01	1,67E-02	4,17E-02	6,03E-02	2,87E-01	1,51E-02	2,68E-01	2,78E-01	6,83E-01	2,58E-01	4,84E-01
300	3,17E-01	1,90E-02	4,87E-02	4,30E-02	2,96E-01	1,61E-02	2,74E-01	3,44E-01	8,86E-01	3,42E-01	6,68E-01
320	3,41E-01	2,00E-02	5,19E-02	3,11E-02	3,01E-01	1,30E-02	2,81E-01	3,27E-01	8,85E-01	3,28E-01	6,68E-01

Tabela G.7 – Coeficiente de pressão de base média, simulações bidimensionais.

Re	1cil	t1,5d		t3d		t3,5d		t5d		t8d	
		<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>
160	-0,859	-0,570	-0,338	-0,497	-0,286	-0,475	-0,300	-0,695	-0,349	-0,785	-0,403
195	-0,943	-0,592	-0,344	-0,507	-0,285	-0,480	-0,290	-0,792	-0,406	-0,878	-0,444
200	-0,954	-0,596	-0,345	-0,508	-0,285	-0,480	-0,289	-0,804	-0,410	-0,891	-0,449
240	-1,037	-0,619	-0,356	-0,514	-0,283	-0,853	-0,456	-0,889	-0,441	-0,981	-0,479
270	-1,091	-0,634	-0,363	-0,513	-0,344	-0,898	-0,432	-0,945	-0,465	-1,037	-0,489
300	-1,136	-0,647	-0,369	-0,931	-0,529	-0,963	-0,475	-1,001	-0,489	-1,082	-0,471
320	-1,162	-0,654	-0,372	-0,956	-0,506	-0,992	-0,480	-1,037	-0,507	-1,113	-0,473

Tabela G.8 – Coeficiente de pressão de base média, simulações tridimensionais.

Re	1cil	t1,5d		t3d		t3,5d		t5d		t8d	
		<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>	<i>mont.</i>	<i>jus.</i>
160	-0,859	-0,570	-0,338	-0,497	-0,286	-0,475	-0,300	-0,695	-0,349	-0,785	-0,403
195	-0,946	-0,592	-0,345	-0,507	-0,286	-0,480	-0,290	-0,792	-0,406	-0,880	-0,447
200	-0,933	-0,596	-0,345	-0,508	-0,285	-0,480	-0,289	-0,804	-0,412	-0,875	-0,457
240	-0,902	-0,616	-0,360	-0,513	-0,299	-0,504	-0,288	-0,757	-0,512	-0,836	-0,448
270	-0,818	-0,632	-0,367	-0,523	-0,318	-0,478	-0,308	-0,719	-0,540	-0,760	-0,422
300	-0,896	-0,648	-0,370	-0,515	-0,338	-0,501	-0,301	-0,790	-0,520	-0,848	-0,466
320	-0,918	-0,656	-0,377	-0,526	-0,339	-0,502	-0,304	-0,796	-0,536	-0,848	-0,485