CÍCERO RIBEIRO DE LIMA

**PROJETO DE MECANISMOS FLEXÍVEIS USANDO O
MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Engenharia.

São Paulo
2002

CÍCERO RIBEIRO DE LIMA

**PROJETO DE MECANISMOS FLEXÍVEIS USANDO O
MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica/Mecatrônica

Orientador:
Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva

São Paulo
2002

FICHA CATALOGRÁFICA

Lima, Cícero Ribeiro de

Projeto de Mecanismos Flexíveis Usando o Método de
Otimização Topológica, São Paulo, 2002.

146p.

Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia
Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1. Otimização Topológica 2. Mecanismos Flexíveis
3. Elementos Finitos 4. MEMS.

I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.
Departamento de Engenharia Mecânica II. t

*Aos meus pais e à minha filha.
Por tudo o que eles representam para mim.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar a minha gratidão primeiramente a Deus.

Em seguida, ao meu orientador, Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva, pela atenção, apoio, paciência, orientação segura e principalmente pela oportunidade que me concedeu para o desenvolvimento da minha carreira acadêmica. Expresso com satisfação o meu reconhecimento e respeito pelo seu exemplo de dedicação acadêmica.

À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pelo apoio financeiro deste trabalho, através de bolsa de mestrado (processo no 2000/05706-9).

Ao colega da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Eduardo Lenz Cardoso, pela atenção preciosa e esclarecimentos às dúvidas referentes a alguns tópicos específicos de seu trabalho de mestrado.

Aos meus amigos e familiares, pelo apoio e carinho.

E por fim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

RESUMO

ABSTRACT

CAPÍTULO 1: Introdução..... 1

1.1. Mecanismo flexível..... 1

1.2. Justificativa 7

CAPÍTULO 2: Otimização Topológica 8

2.1. Introdução 8

2.2. Histórico 12

2.3. Outros aspectos da Otimização Topológica..... 15

2.4. Domínio estendido fixo de projeto e modelo de material 17

2.4.1. Domínio estendido fixo de projeto..... 18

2.4.2. Modelo de material 18

2.5. Método de densidades 21

2.6. Procedimento para implementação da Otimização Topológica..... 25

2.7. Tabuleiro de xadrez..... 27

**CAPÍTULO 3: Formulação do problema de otimização para projeto de
mecanismo flexível 32**

3.1. Introdução 32

3.2. Energia mútua e flexibilidade média..... 32

3.3. Descrição do problema de otimização para projeto de
mecanismo flexível 38

3.3.1. Formulação do problema para atender o comportamento cinemático	39
3.3.2. Formulação do problema para atender o comportamento estrutural.....	40
3.3.3. Função multi-objetivo e definição do problema de otimização	42
3.4. Análise de sensibilidades	44
CAPÍTULO 4: Implementação Numérica	48
4.1. Introdução teórica	48
4.2. Implementação do MEF na Otimização Topológica	49
4.2.1. Elemento isoparamétrico de quatro nós	50
4.2.2. Matriz de rigidez do elemento.....	52
4.2.3. Determinação dos deslocamentos nodais.....	54
4.3. Programação Linear Seqüencial (PLS)	55
4.3.1. Programação linear (PL)	56
4.3.2. Rotinas SIMPLX e DSPLP	62
4.4. Implementação do filtro para eliminar o “tabuleiro de xadrez”	63
4.5. Procedimento para implementação do método de Otimização Topológica..	66
CAPÍTULO 5: Resultados	70
5.1. Introdução	70
5.2. Resultados preliminares	71
5.2.1. Exemplo 1 – variação da restrição de volume	72
5.2.2. Exemplo 2 – variação do coeficiente w	76
5.2.3. Exemplo 3 – variação na discretização do domínio inicial.....	79
5.3. Formação e eliminação do “tabuleiro de xadrez”	83
5.3.1. Evolução da versão básica do OPTMEC para lidar com altas discretizações	84
5.3.2. Exemplos - eliminação do “tabuleiro de xadrez” no OPTMEC	87
5.3.3 Redução das “escalas de cinza”	89
5.4. Efeito do fator p de penalidade das “escalas de cinza”	95

5.5. Outros resultados.....	97
5.5.1. Domínio inicial com geometria irregular.....	97
5.5.2. Projeto de mecanismos tipo “garras”	102
5.5.3. Projeto de mecanismos tipo “pinças” e “atuadores”	105
5.5.4. Projeto de mecanismos tipo “alicate”	110
5.6. Interpretação dos resultados.....	112
5.6.1. Exemplos de algumas interpretações realizadas	113
5.6.1. Configurações finais	117
CAPÍTULO 6: Conclusão	121
6.1. Conclusões e Observações	121
6.2. Considerações Finais e Trabalhos Futuros.....	122
ANEXO A: Forma matricial da formulação do problema de otimização para projeto de mecanismo flexível.....	123
ANEXO B: Descrição da utilização e funcionamento do software	127
B.1. Pré-processamento.....	128
B.2. Processamento com o OPTMEC	130
B.3. Pós-processamento	135
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	137
APÊNDICE: Parâmetros utilizados pela DSPLP	

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Mecanismo convencional com vários componentes.	1
Figura 1.2	Classificação dos mecanismos flexíveis.	2
Figura 1.3	Mecanismo flexível composto por uma única peça.	2
Figura 1.4	Projeto do mecanismo flexível.	4
Figura 1.5	Pseudo-corpo rígido e modelo de flexibilidade concentrada.	5
Figura 2.1	Exemplo clássico de otimização estrutural.	9
Figura 2.2	Formas clássicas de otimização estrutural.	11
Figura 2.3	Otimização estrutural obtida por Michell.	16
Figura 2.4	Otimização topológica através de uma estrutura discreta.	17
Figura 2.5	Resultado da Otimização Topológica do problema resolvido anteriormente por Michell.	17
Figura 2.6	Microestruturas para o método da homogeneização.	20
Figura 2.7	Curva limite superior de Hashin-Shtrikman e curvas do modelo SIMP.	24
Figura 2.8	Procedimento típico de projeto estrutural por otimização topológica. .	26
Figura 2.9	Tabuleiro de xadrez.	28
Figura 2.10	Arranjos de “tabuleiro de xadrez” e de material distribuído uniformemente.	28
Figura 3.1	Corpo submetido a dois casos diferentes de carregamento.	33
Figura 3.2	Condição de flexibilidade do mecanismo.	39
Figura 3.3	Condição de rigidez do mecanismo.	41
Figura 4.1	Elemento retangular de quatro nós.	50
Figura 4.2	Limites móveis.	58
Figura 4.3 –	Raio de abrangência nos filtros espaciais	64
Figura 4.4 –	Fluxo do processo iterativo de otimização.	67
Figura 4.5 –	Situações de carregamento para o projeto de mecanismo flexível.	68
Figura 5.1 –	Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.	73
Figura 5.2 –	Efeito da restrição de volume de material na OT do mecanismo flexível.	74
Figura 5.3 –	Gráficos de convergência ($V^* = 30\%$).	75

Figura 5.4 – Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.....	76
Figura 5.5 – Efeito da alteração do coeficiente w na OT do mecanismo flexível.....	77
Figura 5.6 – Gráficos de convergência ($w = 0,5$).....	79
Figura 5.7 – Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.....	80
Figura 5.8 – Configurações de topologia ótima para malhas diferentes.	81
Figura 5.9 – Gráficos de convergência (malha com 800 elementos).	83
Figura 5.10 Configuração de topologia ótima para o exemplo do item 5.2.1, usando uma malha de 2304 elementos ($V^*=20\%$).....	86
Figura 5.11 Configuração de topologia ótima para o exemplo do item 5.2.2, usando uma malha de 2592 elementos ($w=0,5$).....	86
Figura 5.12 Configuração de topologia ótima para o exemplo do item 5.2.3, usando uma malha de 2592 elementos.....	86
Figura 5.13 Topologia ótima obtida com a utilização do filtro, para o domínio inicial do item 5.2.1 (2304 elementos; $R_{max} = 1,5$).	88
Figura 5.14 Topologia ótima obtida com a utilização do filtro, para o domínio inicial do item 5.2.2 (2592 elementos; $R_{max} = 1,5$).	88
Figura 5.15 Topologia ótima obtida com a utilização do filtro, para o domínio inicial do item 5.2.3 (2592 elementos; $R_{max} = 1,5$).	88
Figura 5.16 Configuração final da topologia para o domínio inicial do item 5.2.1.....	90
Figura 5.17 Configuração final da topologia para o domínio inicial do item 5.2.2.....	90
Figura 5.18 Configuração final da topologia para o domínio inicial do item 5.2.3.....	91
Figura 5.19 Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.....	92
Figura 5.20 Topologia ótima obtida sem a utilização do filtro espacial.....	92
Figura 5.21 Topologia ótima obtida com a utilização do filtro espacial ($R_{max} = 1,0$).	93
Figura 5.22 Configuração final da topologia ótima obtida com o desligamento do filtro nas últimas iterações.	93
Figura 5.23 Efeito da alteração do tamanho do raio de abrangência do filtro nos resultados.	94

Figura 5.24	Configurações de topologias ótimas obtidas através da variação do p .	95
Figura 5.25	Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.	98
Figura 5.26	Configurações da topologia ótima.	99
Figura 5.27	Configuração deformada da topologia.	99
Figura 5.28	Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.	100
Figura 5.29	Configurações da topologia ótima.	100
Figura 5.30	Configuração deformada da topologia.	101
Figura 5.31	Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.	101
Figura 5.32	Configurações da topologia ótima.	102
Figura 5.33	Configuração deformada da topologia.	102
Figura 5.34	Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.	103
Figura 5.35	Configuração da topologia ótima.	103
Figura 5.36	Configuração deformada da topologia.	103
Figura 5.37	Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.	104
Figura 5.38	Configuração da topologia ótima.	105
Figura 5.39	Configuração deformada da topologia.	105
Figura 5.40	Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.	106
Figura 5.41	Configuração da topologia ótima.	106
Figura 5.42	Configuração deformada da topologia.	107
Figura 5.43	Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.	107
Figura 5.44	Configuração da topologia ótima.	108
Figura 5.45	Configuração deformada da topologia.	108
Figura 5.46	Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.	109
Figura 5.47	Configuração da topologia ótima.	109
Figura 5.48	Configuração deformada da topologia.	109
Figura 5.49	Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.	111
Figura 5.50	Configuração da topologia ótima.	111
Figura 5.51	Configuração deformada da topologia.	111
Figura 5.52	Distribuição de tensões mecânicas (Von-Mises).	112
Figura 5.53	Interpretação da topologia ótima ($V^* = 20\%$).	113
Figura 5.54	Modelo de elementos finitos (malha com 1434 elementos).	114

Figura 5.55	Configuração deformada do modelo de elementos finitos.....	114
Figura 5.56	Interpretação da topologia ótima ($w = 0,5$).....	115
Figura 5.57	Modelo de elementos finitos (malha com 1434 elementos).....	116
Figura 5.58	Configuração deformada do modelo de elementos finitos.....	116
Figura 5.59	Distribuição de tensões mecânicas (Von-Mises).	116
Figura 5.60	Estrutura final da “garra” modificada obtida a partir da topologia da Fig. 5.38 e respectivo protótipo.....	117
Figura 5.61	Estrutura final da “garra” obtida a partir da topologia da Fig. 5.35 e respectivo protótipo.	118
Figura 5.62	Estrutura final da “pinça” obtida a partir da topologia da Fig. 5.41 e respectivo protótipo.	119
Figura 5.63	Estrutura final do “alicate” obtido a partir da topologia da Fig. 5.50 e respectivo protótipo.	120
Figura B.1	Fluxo básico da estrutura de utilização do OPTMEC.....	127
Figura B.2	Modelo do arquivo texto lido pelo OPTMEC.....	129
Figura B.3	Fluxo geral de funcionamento do OPTMEC.	130
Figura B.4	Cabeçalho do código fonte do OPTMEC.	131
Figura B.5	Fluxo da rotina de MEF.	133

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

2D	Bidimensional
3D	Tridimensional
ANSYS	Software Comercial de Elementos Finitos
ASCII	American Standard Code for Information Interchange
CAD	Computer Aided Design
DSPLP	Rotina de programação linear que usa o método de Kamarkar
EUA	Estados Unidos da América
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEMS	Microelectromechanical Systems
MOT	Método de Otimização Topológica
OPTMEC	Software de Otimização Topológica desenvolvido neste trabalho
OT	Otimização Topológica
PL	Programação Linear
PLS	Programação Linear Seqüencial
PQS	Programação Quadrática Seqüencial
RAM	Random-Access Memory
SAND	Simultaneous Analysis and Design
SIMP	Simple Isotropic Material with Penalization
SIMPLX	Rotina de Programação Linear que usa o método Simplex
Eq.	Equação
Fig.	Figura
GPa	Gigapascal
MHz	Megahertz
.obj	Arquivo ponto objeto

LISTA DE SÍMBOLOS

ξ	Abscissa do sistema de coordenadas locais do elemento
θ	Ângulo de rotação da microestrutura
A_e	Área do elemento
w	Coefficiente de atribuição de peso na função objetivo
ρ	Distribuição contínua de densidades (variável de projeto)
ρ_e	Densidade de cada elemento
ρ_i	Densidade do elemento i
R_{ij}	Distância entre centróides dos elementos i e j
Ω	Domínio estendido fixo de projeto
U_e	Energia elástica de deformação no elemento
Π	Energia potencial total
$e(x)$	Erro da linearização da função através da Série de Taylor
H^1	Espaço de Sobolev
h_e	Espessura do elemento
p	Fator de penalidade das densidades intermediárias
F_A	Força aplicada no ponto A
$a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$	Forma bilinear da energia interna
$L^k(\mathbf{u}^l)$	Forma linear da flexibilidade média
$\chi(x)$	Função de distribuição discreta
$f(x)$	Função linear
$F(x)$	Função não-linear
F_k	Função objetivo do problema de otimização
q	Função qualquer
T	Índice de transposição de matriz ou vetor
$\det \mathbf{J}$	Jacobiano de transformação de coordenadas

$x_i^{\min}$	Limite móvel inferior da variável de projeto
$x_i^{\max}$	Limite móvel superior da variável de projeto
$\log$	Logaritmo na base 10
$\ln$	Logaritmo neperiano
$\mathbf{N}$	Matriz das funções de forma do elemento
$\mathbf{B}$	Matriz de operadores diferenciais dos polinômios bilineares
$\mathbf{k}_e^0$	Matriz de rigidez base do elemento
$\mathbf{k}_e$	Matriz de rigidez do elemento
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez global
$\mathbf{J}$	Matriz jacobiana
γ	Medida entre camadas da célula da microestrutura
E	Módulo de elasticidade
E_0	Módulo de elasticidade do material base
nv	Número de vizinhos do elemento central i
M	Número total de elementos finitos
η	Ordenada do sistema de coordenadas locais do elemento
w_i	Peso de filtragem
x	Posição
x_0	Posição inicial de partida para a PL
$R_{\max}$	Raio de abrangência do filtro
ν	Razão de Poisson
Ω_D	Região onde há presença de material
V^*	Restrição de volume de material
Γ_{t^k}	Superfície com carregamento aplicado
Γ_d	Superfície restringida
$\mathbf{C}$	Tensor constitutivo de elasticidade do material
$\mathbf{C}_0$	Tensor constitutivo de elasticidade do material base
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor das deformações infinitesimais
$\mathbf{T}$	Tensor tensão

W	Trabalho total
$\delta\Pi$	Variacional da energia potencial total
$\delta\mathbf{v}$	Variacional dos deslocamentos admissíveis
A_n	Variável de projeto qualquer
$\mathbf{v}$	Vetor dos deslocamentos admissíveis
$\boldsymbol{\sigma}$	Vetor das tensões
$\mathbf{t}^k$	Vetor de carregamento de superfície
$\mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos
$\mathbf{f}$	Vetor de forças aplicadas
$\mathbf{n}$	Vetor normal à superfície Γ_{t^k}
V_e	Volume do elemento
V_i	Volume do elemento i
Ω_s	Volume final de material desejado na estrutura a ser otimizada

RESUMO

Mecanismos flexíveis são mecanismos onde o movimento é dado pela flexibilidade da estrutura ao invés da presença de juntas e pinos. Tem grande aplicação em dispositivos de mecânica de precisão, área biomédica, e mais recentemente na construção de microeletromecanismos (“MEMS” em inglês). Várias técnicas são usadas no projeto de mecanismos flexíveis, sendo que entre elas, a Otimização Topológica tem se mostrado a mais genérica e sistemática. O método de Otimização Topológica combina um método de otimização com o método dos elementos finitos (MEF). A utilização da Otimização Topológica permite que um engenheiro ou cientista projete o mecanismo para a sua aplicação específica sem precisar adquirir conhecimentos específicos sobre estruturas e mecanismos flexíveis. Dessa forma, o objetivo desse trabalho é aplicar o método de Otimização Topológica no projeto de mecanismos flexíveis, usando o modelo de material SIMP (método de densidades). O projeto é definido como sendo um problema de otimização de uma estrutura flexível, sujeito à restrição na quantidade de material, onde a função objetivo é maximizar o deslocamento numa dada região do domínio da estrutura quando submetida a um dado carregamento em outra região. Para ilustrar a implementação do método são apresentados resultados de topologias bidimensionais de mecanismos flexíveis.

Palavras chave: Otimização Topológica, Mecanismos Flexíveis, Elementos Finitos, Microeletromecanismos, MEMS.

ABSTRACT

Compliant Mechanisms consist of mechanisms where the movement is giving by the structural flexibility rather than the presence of joints and pins. They are applied to precision mechanic devices, biomedical field, and more recently to the design of microelectromechanical systems (MEMS). Many techniques has been applied to design compliant mechanisms. Among them, topology optimization method is a generic and systematic method. Topology optimization combines optimization algorithms with finite element method and allows an engineer or a scientist to design a compliant mechanism for its application without having to acquire specific knowledge about structures or compliant mechanisms. Therefore, the objective of this work is to apply topology optimization to design compliant mechanisms. The topology optimization method implemented is based on the SIMP material model. The design is defined as the optimization problem of a flexible structure, subject to an amount of material constraint, where the objective function is to maximize the output displacement in a certain region of the structure domain due to an applied load to other region. To illustrate the implementation of the method, two-dimensional topologies of compliant mechanisms are presented as a result.

Keywords: Topology Optimization, Compliant Mechanisms, Finite Element, Microelectromechanisms, MEMS.

CAPÍTULO 1: Introdução

1.1. Mecanismo flexível

Mecanismos flexíveis são uma nova categoria de mecanismos onde o movimento é dado pela flexibilidade da estrutura ao invés da presença de juntas e pinos. Tais mecanismos são conhecidos na literatura internacional como “compliant mechanisms” e, neste trabalho, é traduzido como *mecanismo flexível*.

Os mecanismos convencionais são compostos de corpos rígidos unidos por pinos que configuram juntas articuláveis, as quais provêm a esses mecanismos movimentos diversos. Assim sendo, a deformação elástica dos componentes desse tipo de mecanismo é indesejável. O alicate mostrado na Fig. 1.1 é um exemplo desse tipo de mecanismo, onde se nota a quantidade de componentes necessários para a montagem do mecanismo.

Figura 1.1 – Mecanismo convencional com vários componentes

Já os mecanismos flexíveis (objeto desta dissertação) utilizam a propriedade de deformação como fonte de movimento. Geralmente são constituídos de uma única peça e são divididos em duas classes (ANANTHASURESH et al., 1994):

mecanismos com flexibilidade distribuída ao longo do corpo e mecanismos com flexibilidade concentrada em alguns pontos do corpo, conforme mostrado na Fig. 1.2.

Figura 1.2 – Classificação dos mecanismos flexíveis.

Uma das principais vantagens dos mecanismos flexíveis é a redução potencial da quantidade de componentes necessários para a montagem e funcionamento do mecanismo. Como, em geral, consiste de uma única peça, podem ser fabricados com pequenas dimensões. A Fig. 1.3 mostra um mecanismo flexível composto de uma única peça, o qual pode ser uma alternativa ao alicate anterior (Fig.1.1). Outras vantagens também podem ser citadas (SALAMON; MIDHA, 1992), como a inexistência de problemas de folga devido à montagem de pinos e o fato de não necessitar de lubrificação, pois não há atrito entre peças. As principais desvantagens são o problema de fadiga e a operação se limitar, em geral, a pequenos deslocamentos.

Figura 1.3 – Mecanismo flexível composto por uma única peça.

Mecanismos flexíveis possuem grande aplicação em aparelhos que envolvem mecânica de precisão, como mecanismos de máquinas fotográficas, cabeçote leitor de um vídeo-cassete ou de um disco rígido de computador, transdutores piezelétricos, onde devido à montagem compacta desses equipamentos, exigem-se peças de pequenas dimensões e o menor número possível de componentes a serem montados, caso contrário o problema de folga na montagem pode inviabilizar o funcionamento do equipamento. Além disso, a maioria dos movimentos envolvidos nesses equipamentos podem ser realizados com pequenos deslocamentos gerados por mecanismos flexíveis. Outra área de aplicação de mecanismos flexíveis é na engenharia biomédica no projeto de instrumentos cirúrgicos, onde esses mecanismos podem ser usados na construção de garras, pinças ou tesouras que produzam movimentos variados, além do fato que a existência de poucas peças facilita a esterilização desses instrumentos. Recentemente, uma área de aplicação de mecanismos flexíveis que tem emergido internacionalmente é a área de sistemas microeletromecânicos (ou MEMS em inglês). MEMS são sistemas mecânicos projetados em escalas micrométricas que possuem circuitos eletrônicos acoplados (PETERSEN, 1982). Os componentes desses sistemas são fabricados utilizando-se técnicas e processos de fabricação usados na construção de circuitos integrados e “chips” para computadores. MEMS têm potencial aplicação nos setores biomédico e industrial, como por exemplo em equipamentos cirúrgicos de laparoscopia* e na integração de sensores em “airbags”. A aplicação de mecanismos flexíveis no projeto de MEMS é quase 100%, já que na microescala em que são fabricados, a presença de pinos e juntas torna a montagem difícil, senão impossível. Assim, as características técnicas dos mecanismos flexíveis, como descritas anteriormente, se enquadram perfeitamente dentro dos requisitos para aplicação em MEMS. Além disso, as técnicas de fabricação de MEMS permitem a obtenção de qualquer estrutura plana de forma complexa, a qual muitas vezes é característica dos mecanismos flexíveis.

* Processo cirúrgico onde se visualiza o interior da cavidade abdominal através da inserção de pequenas cânulas de metal.

No entanto, o projeto genérico de mecanismos flexíveis é uma tarefa muito complexa, pois essencialmente se deseja saber qual a topologia da estrutura que ao se deformar, gera um deslocamento desejado numa dada direção e ponto da estrutura, dado uma certa força aplicada em outra direção e ponto da estrutura (veja Fig. 1.4). Devido à complexidade, o projeto de mecanismos flexíveis foi por algum tempo realizado por métodos de tentativa e erro. Porém, pesquisas recentes propõem procedimento mais sistemático para o projeto (ANANTHASURESH et al., 1994, FRECKER et al., 1996, SIGMUND, 1996, NISHIWAKI et al., 1998). Essas pesquisas abordam métodos que se baseiam em dois tipos de teorias para o desenvolvimento de projetos de mecanismos flexíveis: a síntese cinemática e a síntese do contínuo.

Figura 1.4 – Projeto do mecanismo flexível.

A síntese cinemática (MIDHA et al., 1992) se baseia na tradicional teoria cinemática dos corpos rígidos. Essa teoria é utilizada para obter configurações e extrair movimento de cadeias cinemáticas de corpos rígidos, cuja estrutura é composta por elementos rígidos articulados por pinos ou pivôs. Os trabalhos pioneiros (HER; MIDHA, 1987), desenvolvidos a partir dessa teoria para projetos de mecanismos flexíveis, convertiam uma dada cadeia cinemática de corpos rígidos num mecanismo parcialmente flexível ou num mecanismo com flexibilidade concentrada em determinados pontos. Depois, surgiu outro método (HOWELL; MIDHA, 1994 e 1996) que produz um mecanismo com flexibilidade concentrada em determinados pontos a partir de um mecanismo cujo comportamento flexível é dado pela composição de barras rígidas e molas (Fig. 1.5), também conhecido por

mecanismo de pseudo-corpo rígido. Esse método permite projetar mecanismos com grandes deslocamentos.

Figura 1.5 – Pseudo-corpo rígido e modelo de flexibilidade concentrada.

A segunda abordagem teórica para o desenvolvimento de projetos de mecanismos flexíveis é a síntese do contínuo (ANANTHASURESH et al., 1994), cujo enfoque é obter a flexibilidade distribuída no mecanismo. Esta teoria é baseada no método de Otimização Topológica (BENDSØE; KIKUCHI, 1988), o qual busca de forma sistemática a mudança de topologia da estrutura. O projeto de mecanismos flexíveis é então, apresentado como sendo um problema de otimização estrutural, no qual o método de Otimização Topológica (MOT) distribui o material no interior de um domínio fixo (região inicial pré-definida que limitará o espaço ocupado pelo mecanismo) de forma a maximizar ou minimizar uma função objetivo especificada (por exemplo, máxima rigidez e mínimo volume de material). Originalmente o MOT foi desenvolvido para projetos de estruturas onde a função objetivo do problema de otimização era a maximização da rigidez com restrição de volume de material (SUZUKI; KIKUCHI, 1991). Porém, devido à complexidade do projeto, somente a maximização de rigidez não é suficiente para atender o comportamento elástico e estrutural do mecanismo flexível, então outras formulações para a função objetivo foram propostas para este caso (ANANTHASURESH et al., 1994, NISHIWAKI et al., 1998). As primeiras propostas de melhoria da função objetivo (SIGMUND, 1995, FRECKER et al., 1996) surgiram com os projetos de mecanismos flexíveis

elaborados a partir da otimização topológica de estrutura discretas (tipo treliça), os quais utilizam uma função multi-objetivo que considera os requerimentos cinemático e estrutural do mecanismo. A idéia foi estendida para otimização topológica de estruturas contínuas e foi desenvolvida uma função objetivo chamada de “vantagem mecânica” (SIGMUND, 1996), a qual maximiza a razão entre as forças disponível e aplicada (saída e entrada) em um mecanismo flexível. Já LARSEN et al. (1997) desenvolveu uma função objetivo, aplicável ao projeto de micro-mecanismos flexíveis, que permite o controle da força disponível (saída) obtida com a função anterior (“vantagem mecânica”).

Várias tentativas foram feitas para combinar as duas teorias (cinemática e otimização estrutural) com objetivo de gerar topologias para mecanismos flexíveis, mas o MOT tem obtido o maior sucesso por ser genérico e sistemático. O MOT é um tema recente e existem vários estudos na literatura que comprovam a sua eficiência como ferramenta para projeto de mecanismos flexíveis. Entre as aplicações apresentadas nos artigos podemos citar vários projetos como os mecanismos de garras de ANANTHASURESH et al. (1994), os mecanismos complexos com múltiplas entradas e respostas de LARSEN et al. (1997), os atuadores flexíveis e mecanismos de pinças de SIGMUND (1996, 1999), os micromecanismos flexíveis com atuação térmica de JONSMANN et al. (1999), e os atuadores flexionais piezelétricos de SILVA et al. (1999 e 2000).

Portanto, neste trabalho, o MOT é utilizado para o projeto de mecanismos flexíveis. O problema de otimização consiste em encontrar uma estrutura com o mínimo volume de material que maximize um deslocamento desejado numa dada direção e ponto especificados, dado uma certa força aplicada em outra direção e ponto da estrutura, ou seja, obter dentre todas as estruturas possíveis para o mecanismo, aquela que provê o máximo deslocamento possível no ponto de interesse. A função multi-objetivo do problema de otimização é formulada para maximizar a razão entre a energia total acumulada e o trabalho de deformação (NISHIWAKI et al., 1998), sujeitos às restrições de equilíbrio e recurso de material. O MOT é implementado com o modelo de material do tipo SIMP (“Simple Isotropic Material with Penalization”) (BENDSØE, 1989, ZHOU; ROZVANY, 1991, MLEJNEK, 1992) e combina o método de otimização de programação linear

seqüencial (PLS) (HAFTKA et al., 1996) com o método numérico de análise por elementos finitos (MEF) (BATHE, 1996).

1.2. Justificativa

Como já exposto, mecanismos flexíveis têm grande aplicação em aparelhos que envolvem mecânica de precisão, área biomédica, e mais recentemente em aplicações de MEMS. O projeto de mecanismos flexíveis para MEMS tem crescido muito, internacionalmente, e já constitui tema de interesse e estudo de grupos de pesquisa no Brasil.

Devido a sua aplicação multidisciplinar, o projeto desses mecanismos flexíveis exige que os profissionais de diferentes áreas adquiram conhecimentos específicos sobre estruturas e projeto de mecanismos flexíveis, o que de certa forma limita a sua aplicação nessas várias áreas. Assim, nesse trabalho, o projeto de mecanismos flexíveis é implementado usando o MOT, com o objetivo de gerar como produto final um software (programa de computador) que possa ser utilizado por engenheiros em diferentes áreas para o projeto de mecanismos flexíveis considerando uma dada aplicação desejada. Dessa forma, a implementação de um software para o projeto de mecanismos flexíveis que seja genérico e sistemático, poderá trazer grandes contribuições nas áreas de aplicação, permitindo que os pesquisadores de diversas áreas no Brasil, onde o uso desses mecanismos se faz necessário, possam projetá-los para a aplicação desejada sem a necessidade de adquirir conhecimentos específicos de estruturas mecânicas, projeto de mecanismos flexíveis etc., apenas tendo em mente as necessidades de sua aplicação específica. Além disso, a existência dessa ferramenta computacional permitirá uma maior divulgação da tecnologia de mecanismos flexíveis entre o meio acadêmico, principalmente, alunos de graduação e pós-graduação em engenharia.

O MOT no projeto de mecanismos flexíveis encontra-se bem difundido na comunidade científica da área nos Estados Unidos e Europa, e dessa forma esse trabalho de mestrado procura iniciar esse tema no Brasil.

CAPÍTULO 2: Otimização Topológica

2.1. Introdução

Otimização Topológica consiste num método computacional que permite projetar a topologia ótima de estruturas segundo um certo critério de custo (por exemplo, máxima rigidez e menor volume de material). Basicamente, o método de Otimização Topológica (MOT) distribui o material no interior de um domínio fixo de forma a atender uma função custo especificada (por exemplo, maximizar a rigidez sujeito a restrição de volume de material). O material em cada ponto do domínio pode variar de “vazio” (não há presença de material) até sólido (total presença de material), podendo também assumir densidades intermediárias entre “vazio” e sólido de acordo com um modelo de material definido. Um algoritmo de otimização é usado para encontrar de forma iterativa a distribuição ótima de material, o que torna o processo rápido, caso contrário milhões de análises seriam necessárias para encontrar a distribuição ótima. Este algoritmo combina essencialmente métodos de otimização (VANDERPLAATZ, 1984) com um método numérico de análise, como por exemplo, o método de elementos finitos (MEF) (BATHE, 1996). Outros métodos numéricos de análise podem ser usados, no entanto, devem ser genéricos o suficiente de forma a lidar com estruturas de formas complexas resultantes da otimização. Os métodos de otimização aceleram o processo de busca da distribuição ótima de material, utilizando-se para isso a informação dos gradientes (ou derivadas) da função custo em relação à quantidade de material em cada elemento.

Desde sua introdução nos EUA e Europa, no final da década de 80, o MOT (BENDSØE; KIKUCHI, 1988) tem ganhado destaque no meio acadêmico e na indústria. Originalmente foi desenvolvido para projetos de maximização de rigidez de estruturas mecânicas (SUZUKI; KIKUCHI, 1991) e recentemente tem sido expandido com sucesso para várias outras aplicações, como projeto de atuadores piezelétricos (SILVA et al., 1998), antenas e motores eletromagnéticos (YOO;

KIKUCHI, 2000), projeto de mecanismos flexíveis (NISHIWAKI, 1998), entre outros. O MOT torna o processo de projeto mais genérico, sistemático, otimizado, e independente da experiência específica de alguns engenheiros, fornecendo a topologia inicial, otimizada para uma certa aplicação, do dispositivo a ser construído. Obviamente, a presença do engenheiro é necessária para a obtenção do projeto final e verificação de seu desempenho para o qual foi projetado (utilizando métodos numéricos e experimentais).

O MOT é um tema recente no campo da otimização estrutural. Porém, os conceitos básicos que dão suporte teórico ao método foram estabelecidos a mais de um século. ROZVANY et al. (1995) faz uma boa revisão desses conceitos. Para entender melhor como surgiu o método e como ele se estabeleceu atualmente nos projetos de estruturas mecânicas, devemos antes conhecer as diferentes formas de otimização estrutural existentes. A Fig. 2.2 ilustra as três diferentes formas de otimização para o mesmo exemplo de projeto estrutural mostrado na Fig. 2.1.

Figura 2.1 – Exemplo clássico de otimização estrutural.

Basicamente a otimização de estruturas mecânicas busca a melhor configuração possível de maneira a atender uma função objetivo especificada. Dentro do projeto é necessário selecionar qual a melhor maneira de se obter a ótima configuração da estrutura. Uma delas consiste em assumir para a estrutura uma forma fixa previamente definida, onde as características geométricas (por exemplo, as

medidas b , t e h da viga "I" mostrada na Fig. 2.2a) são as variáveis de projeto do problema, ou seja, os parâmetros que podem ser alterados para otimizar a estrutura. Essa abordagem é conhecida por otimização paramétrica (ou “size optimization” como é conhecida na literatura internacional). Assim, utilizando um algoritmo computacional para investigar as diversas possíveis combinações entre os parâmetros (medidas b , t e h) é possível determinar o valor ótimo de cada uma dessas variáveis de projeto que otimizam a função custo do projeto (por exemplo, máxima rigidez para a restrição de material imposta). Uma outra forma de se buscar a ótima configuração da estrutura é através da otimização de forma (ou “shape optimization”), onde os contornos externos da estrutura são parametrizados por curvas “splines” e os parâmetros dessas curvas constituem as variáveis de projeto. Daí, através de um algoritmo computacional de otimização são determinados os parâmetros ótimos das curvas “splines”, e portanto a forma ótima da estrutura (Fig. 2.2b) que otimiza as especificações do projeto. O processo de solução da otimização de forma é mais genérico em relação ao da otimização paramétrica, que não permite a alteração da forma externa da estrutura. Por final, uma outra forma de buscar a ótima configuração consiste em se encontrar a distribuição ótima de material no interior da estrutura, de tal forma a permitir a introdução de “buracos” nas regiões onde não houver a necessidade de material (Fig. 2.2c), observando que a estrutura resultante deve otimizar a função custo do projeto. Essa abordagem é chamada de otimização topológica (ou “topology optimization”). As variáveis de projeto podem ser, por exemplo, medidas que indicam a distribuição de material em cada ponto do domínio. A otimização topológica é a mais genérica em relação às duas otimizações anteriores. A quantidade de material removido (para a mesma função custo) é maior na otimização topológica, o que faz com que a estrutura obtida seja mais leve e com melhor desempenho em relação às estruturas obtidas pelas duas otimizações anteriores, constituindo-se numa grande vantagem dependendo do caso.

a) otimização paramétrica

b) otimização de forma

c) otimização topológica

Figura 2.2 – Formas clássicas de otimização estrutural.

2.2. Histórico

A otimização topológica surgiu da necessidade de se aprimorar a otimização de forma para permitir a viabilidade de uma distribuição de material mais acentuada no interior do domínio da estrutura. Em outras palavras, a otimização de forma permite a mudança no contorno, mas não é viável se quisermos, por exemplo, inserir alguns “buracos” no corpo da estrutura para reduzir o seu peso, sem violar as restrições de projeto. A otimização de forma é um tema estudado desde a década de 70 e vários artigos sobre o assunto podem ser encontrados na literatura científica. Uma revisão sobre o desenvolvimento dos métodos que permitem a variação do contorno da estrutura na otimização de forma pode ser encontrada em HAFTKA; GANDHI (1986). Os métodos de variação do contorno da estrutura (otimização de forma) fundamentam-se em métodos de análise como o método dos elementos finitos (BATHE, 1996), métodos numéricos baseados na programação matemática, e análise de sensibilidades (CHOI; SEONG, 1986), os quais possibilitam a implementação de algoritmos computacionais utilizados para encontrar a solução do problema de otimização. Mas, na otimização de forma encontramos sérias dificuldades quando pretendemos alterar a topologia (ou distribuição de material) de uma estrutura, pois a mudança da topologia implica na constante alteração, durante o processo de otimização, do modelo de elementos finitos associado à estrutura no início do processo. Para conseguir essa alteração o algoritmo de otimização deve prever esquemas que permitem a atualização constante da malha de elementos finitos a cada iteração do processo de otimização, o que é complicado no caso tridimensional (3D). O algoritmo de otimização pode usar um módulo gerador de malhas que os softwares comerciais de elementos finitos integram, mas ainda assim não é viável devido a grande distorção da malha quando introduzimos “buracos” na estrutura, principalmente se ela for 3D. No final da década de 80, Bendsøe e Kikuchi introduziram uma metodologia alternativa para a otimização de forma, que parte do princípio em se fixar o domínio inicial da estrutura e, portanto manter inalterado o modelo de elementos finitos utilizado no processo de otimização. Desta maneira, surge a metodologia para Otimização Topológica (OT) de estruturas mecânicas, baseada no conceito de domínio fixo estendido de projeto e, inicialmente, no método

da homogeneização (BENDSØE; KIKUCHI, 1988).

A metodologia criada por Bendsøe e Kikuchi para a OT, foi fortemente inspirada nas conclusões obtidas nos trabalhos que lidam com otimização da distribuição de espessuras em placas e chapas (CHENG; OLHOFF, 1981, 1982) e otimização para projetos de barras de torção construídas com dois materiais em diferentes proporções volumétricas (LURIE et al., 1982, GOODMAN et al., 1986, KOHN; STRANG, 1986a). CHENG; OLHOFF (1981) investigaram a formulação matemática para o problema de maximização de rigidez (com restrição de volume) de placas delgadas, onde a variável de projeto é a espessura da placa, e concluíram que para este problema de otimização existem várias soluções ótimas locais. ROZVANY et al. (1982) também chegaram a mesma conclusão. Ou seja, os resultados encontrados por eles indicam que a solução ótima é uma placa que, ao longo da espessura, é composta por regiões com infinitos reforços infinitesimais (nervuras), cujo comportamento é similar a um material composto por infinitas microestruturas. As microestruturas constituem a base da OT e podem ser divididas em duas categorias como será visto no item 2.4.2. Uma revisão sobre as características das microestruturas utilizadas no MOT pode ser vista em HASSANI; HINTON (1998b). Em termos matemáticos a introdução de uma microestrutura na formulação de um problema estrutural requer a relaxação do variacional (variação da função) do problema para permitir a otimização. Detalhes do cálculo da relaxação dos funcionais na otimização estrutural podem ser encontrados em KOHN; STRANG (1986a, 1986b). BENDSØE (1989) descreve várias maneiras de se conseguir a relaxação mencionada acima através da introdução de um modelo de material baseado na distribuição de densidades na microestrutura, dentre eles o chamado de método de densidades. Esse método permite que a natureza discreta da função de distribuição de material seja aproximada por uma de natureza contínua, ou seja, o problema de otimização é definido de tal forma que os parâmetros desse modelo de material sejam as variáveis de projeto, sendo que essas agora são descritas por funções contínuas que permitem haver estágios intermediários ao se passar de uma condição extrema para outra (por exemplo, sólido para “vazio”), isso garante a relaxação do problema evitando mudanças bruscas de material ao longo da otimização. O método de densidades será descrito com mais detalhes no item 2.5.

A metodologia para OT foi definida em BENDSØE; KIKUCHI (1988) e SUZUKI; KIKUCHI (1991), que implementaram o método para resolver, com sucesso, vários exemplos de otimização estrutural cuja função objetivo do problema era a maximização de rigidez, sujeita à restrição de volume de material. Depois disso, BENDSØE; RODRIGUES (1991) e OLHOFF et al. (1991) estudaram a possibilidade da integração do MOT aos sistemas de CAD (desenho assistido por computador). DÍAZ; BENDSØE (1992) apresentaram uma formulação para o problema de maximização de rigidez de estruturas elásticas submetida a várias cargas não simultâneas. THOMSEN (1992) e OLHOFF et al. (1993) trataram numericamente uma extensão do método aplicada a otimização de estruturas compostas por mais de um material. Outra extensão do método para aplicação em projeto de reforçamento de chapas de carrocerias de automóveis pode ser encontrada em FUKUSHIMA et al. (1993). Problemas de OT considerando frequência de ressonância em estruturas contínuas são descritos em DÍAZ; KIKUCHI (1992), MA et al. (1993). O uso do método da homogeneização para OT de placas usando o modelo de Mindlin pode ser visto em SOTO; DÍAZ (1993). Enquanto isso, problemas de instabilidades de estruturas (flambagem) usando o MOT foram resolvidos por NEVES et al. (1995). RODRÍGUEZ; FERNANDEZ (1995) descreveram a OT de estruturas termoelásticas submetidas a cargas térmicas. A análise transiente em estruturas como problema de OT foi realizada por MIN (1997). Além das aplicações na área estrutural clássica, a utilização do MOT expandiu-se para outras áreas de projeto. Por exemplo, a aplicação do método por ANANTHASURESH (1994) em projetos de mecanismos flexíveis motivou o surgimento de vários trabalhos nesta área (SIGMUND, 1996, LARSEN et al., 1997, NISHIWAKI et al., 1998, entre outros). Problemas de maximização da condutividade térmica na transferência de calor são resolvidos em PARK (1995). Atualmente a metodologia da OT está bem estabelecida, tornando-se evidente em várias linhas de projetos. Dentre eles, os projetos de transdutores piezelétricos (SILVA et al., 1999), projetos de micromecanismos flexíveis com atuação térmica (SIGMUND, 1999, JONSMANN, 1999), projetos de atuadores flexensionais (SILVA et al., 2000), projetos de estruturas sob atuação de campos magnéticos (YOO; KIKUCHI, 2000), implementação de flexibilidade com carga dinâmica

(NISHIWAKI et al., 2000), entre outros.

2.3. Outros aspectos da Otimização Topológica

A Otimização Topológica (OT) de estruturas pode ser dividida em duas categorias distintas: a OT a partir de um meio discreto e a OT a partir de um meio contínuo.

A OT a partir de um meio discreto considera o domínio contínuo da estrutura discretizado por barras rígidas ou treliças, como mostrado na Fig.2.4b. Esta categoria é subdividida em outras duas (ROZVANY et al., 1995): OT de estruturas de malha contínua e OT de estruturas discretas. A OT de estruturas de malha contínua (“gridlike contínua”) trabalha com um infinito número de barras rígidas separadas por um espaço infinitesimal, cuja solução ótima é obtida analiticamente. Este conceito de otimização não é recente, em 1904 Michell foi o pioneiro a oferecer uma abordagem teórica para a solução analítica de problemas de otimização em estruturas de malha contínua com mínimo volume de material. A Fig. 2.3 mostra um exemplo da configuração otimizada de uma alavanca encontrada por Michell onde as linhas de isotensão principais, determinadas através da teoria da elasticidade, podem ser compostas por uma série de barras rígidas. Os trabalhos realizados por Michell foram considerados muito acadêmicos e sem aplicação prática para a época. Anos depois, na década de 70, com o advento dos computadores e o desenvolvimento dos métodos numéricos, os trabalhos de Michell foram retomados por HEMP (1973) e PRAGER (1974) e posteriormente surgiram várias outras extensões desses trabalhos (ROZVANY; ZHOU, 1991, BENDSØE et al., 1994). Outros exemplos e detalhes sobre a metodologia de Michell podem ser visto em MICHELL (1904) apud ROZVANY et al. (1995).

Figura 2.3 – Otimização estrutural obtida por Michell.

Já a OT de estruturas discretas (“ground structural”) considera um domínio de projeto onde há vários pontos distribuídos e que podem ser uma possível junta (ou ligação) de treliças (DORN, 1964 apud ROZVANY, 1995). Nessa subcategoria a solução ótima é obtida numericamente. Há vários métodos numéricos para a otimização de estruturas discretas, dentre eles a programação linear (YANG; CHUANG, 1994), o critério de optimalidade (ROZVANY; ZHOU, 1991, ZHOU; ROZVANY, 1991) e o SAND (“simultaneous analysis and design”) (BENDSØE et al., 1994) são considerados os mais adequados por conseguir lidar com estruturas, compostas por milhares de barras rígidas (treliças). Durante o processo de otimização da estrutura discreta, algumas treliças desnecessárias à estrutura são eliminadas e ao final da otimização a sua topologia é dada por elementos de treliça, cujas áreas das secções transversais ou coordenadas dos nós (variáveis de projeto) são otimizadas de forma a atender uma função custo especificada, por exemplo minimizar a flexibilidade da estrutura sujeita à restrição de volume de material. A Fig. 2.4 ilustra a otimização a partir de uma estrutura discreta. A aplicação da OT de estruturas discretas (treliças) é evidente na área estrutural clássica, mas pode ser encontrada aplicação em outras áreas de projeto, como por exemplo em FRECKER et al. (1996), que aplicou esta teoria ao projeto de mecanismos flexíveis.

Figura 2.4 – Otimização topológica através de uma estrutura discreta.

A outra categoria da OT considera um meio contínuo, onde se busca a ótima configuração da estrutura. Vários trabalhos estabeleceram o MOT (BENDSØE; KIKUCHI, 1988) como um método eficiente para esse objetivo, inclusive SUZUKI; KIKUCHI (1991) comprovaram o embasamento matemático do método, reproduzindo o resultado analítico obtido por Michell (Fig. 2.5), para o problema estrutural mostrado na Fig. 2.3.

Figura 2.5 – Resultado da Otimização Topológica do problema resolvido anteriormente por Michell.

2.4. Domínio estendido fixo de projeto e modelo de material

Como foi mencionado no item 2.2, o MOT é baseado em dois conceitos: domínio estendido fixo de projeto e modelo de material, que serão detalhados a seguir.

2.4.1. Domínio estendido fixo de projeto

O domínio estendido fixo de projeto (Ω) consiste num domínio de forma fixa, limitado pelos pontos de apoio da estrutura e pontos de aplicação de carregamento, que conterá a estrutura desconhecida. O objetivo da OT é determinar os espaços sem material (“vazio”) e a conectividade da estrutura através da remoção e adição de material nesse domínio. O problema de otimização consiste portanto em se encontrar a distribuição ótima de propriedades de materiais no domínio estendido fixo. Na implementação numérica o domínio estendido fixo é discretizado em elementos finitos. Portanto, o modelo de elementos finitos do domínio não é alterado durante o processo de otimização, sendo alterado somente a sua distribuição de material nos elementos. O que torna o processo de otimização bastante vantajoso, pois sendo o domínio fixo, as derivadas de qualquer função q são facilmente calculadas usando a expressão:

$$\frac{\partial}{\partial A_n} \int_{\Omega} q d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial A_n} d\Omega \quad (2.1)$$

onde A_n é uma variável de projeto, e q é uma função qualquer.

2.4.2. Modelo de material

O modelo de material é uma equação que define a mistura em micro-escala de dois ou mais materiais (um deles pode ser “vazio”) permitindo que haja estágios intermediários ao se passar da condição de zero material (“buraco”) a sólido em cada ponto do domínio.

De forma básica, a topologia a ser otimizada pode ser representada por uma função discreta $\chi(x)$, definida em cada ponto (x) do domínio (Ω) , da seguinte

maneira:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega_D \end{cases} \quad (2.2)$$

onde Ω_D é a região onde há presença de material, inserida no domínio (Ω). Sendo o material isotrópico, podemos escrever:

$$\mathbf{C}(x) = \chi(x) \mathbf{C}_0 \quad (2.3)$$

onde $\mathbf{C}_0$ é o tensor constitutivo do material base. Ou seja, fisicamente a função discreta $\chi(x)$ define se o ponto (x) do domínio é preenchido totalmente com material (sólido) ou é um vazio (buraco), não havendo estágios intermediários.

Mas, a parametrização discreta da Eq. (2.3) gera um mal-condicionamento na solução numérica do problema, devido ao de fato da alteração brusca do valor (0 ou 1) das variáveis de projeto, e não garante a obtenção da solução para o problema de OT. Uma maneira de relaxar do problema, ou seja, permitir que as variáveis de projeto assumam valores intermediários entre 0 e 1, é definir um modelo de material para substituir a função discreta por uma contínua (CHENG; OLHOFF, 1982, BENDSØE, 1989). A princípio, os estágios intermediários não têm significado físico sendo apenas decorrentes de um recurso matemático para relaxação do problema. Segundo BENDSØE (1995), um modelo de material que fornecer uma função contínua e consistente das propriedades do material em cada ponto do domínio, garante o alcance da solução. Existem vários modelos de material que podem ser utilizados, entre eles o método de densidades (BENDSØE, 1989, ZHOU; ROZVANY, 1991, MLEJNEK, 1992) e o método da homogeneização (MURAT; TARTAT, 1985, BENDSØE; KIKUCHI, 1988). Neste item será feita uma breve descrição sobre o método da homogeneização. No presente trabalho é utilizado o método de densidades, cujo detalhamento é feito no item 2.5.

O método da homogeneização é baseado em microestruturas formadas pela mistura de materiais homogêneos (MURAT; TARTAT, 1985, BENDSØE; KIKUCHI, 1988), uma revisão sobre esse método pode ser encontrada em HASSANI; HINTON (1998a). Esse método se constitui num modelo de material complexo e robusto para a definição das propriedades efetivas de um material composto conhecida a geometria e composição de sua microestrutura. Assim, tomando-se como exemplo uma placa perfurada podemos calcular as propriedades da composição dos materiais da placa perfurada (sólido + “vazio”) a partir do material base da placa e conhecendo a distribuição dos furos na mesma. No MOT, cada ponto do domínio da estrutura é definido como sendo um material composto gerado pela repetição periódica de uma microestrutura. Desta maneira, existem duas configurações de microestrutura que podem ser utilizadas, a partir das quais podem ser geradas outras microestruturas (FUJII et al., 2001). Uma delas é a microestrutura composta por material sólido com vazio interno (célula 1 na Fig. 2.6) e a outra é a microestrutura composta por camadas alternadas de material e vazio (célula 2 na Fig. 2.6).

Figura 2.6 – Microestruturas para o método da homogeneização.

A microestrutura composta por camadas alternadas de material (célula 2 na Fig. 2.6) é construída alternando-se camadas de materiais sólidos com “vazios” e cujo parâmetro de otimização é a medida γ . THOMSEN (1992) e OLHOFF et al. (1993) usaram essa categoria de microestrutura para OT em seus trabalhos. A

microestrutura composta por material sólido com vazio interno (célula 1 na Fig. 2.6) consiste numa célula unitária com um buraco retangular no seu interior (BENDSØE; KIKUCHI, 1988, SUZUKI; KIKUCHI, 1991), cujas dimensões são definidas pelas variáveis de projeto a e b e o ângulo θ . Assim, em cada ponto do domínio (Ω) define-se um material composto gerado pela repetição periódica de uma microestrutura de dimensões a , b , e θ (ou γ na célula 2) correspondente aquele ponto. Dessa forma variando-se os valores de a , b , e θ (ou γ na célula 2) ao longo do domínio estendido fixo durante a otimização altera-se a distribuição de material nesse domínio, de maneira que ao final da otimização existirão pontos com ar ($a=b=1$ ou $\gamma=1$ na célula 2), pontos com sólido ($a=b=0$ ou $\gamma=0$ na célula 2) e alguns pontos com materiais intermediários. Nesse sentido o problema consiste em se otimizar a distribuição de material num domínio perfurado com infinitos micro-furos.

Como já mencionado o método da homogeneização é um método robusto capaz de descrever as propriedades efetivas de um material homogeneizado a partir da definição de uma célula unitária ortotrópica, mas isso tem um custo: a introdução de novas variáveis de projeto (as dimensões a , b , e θ na célula 1 ou γ na célula 2) no problema de OT. De fato, o aumento de variáveis de projeto no problema torna o MOT desvantajoso, devido à complexidade da implementação numérica e ao alto custo computacional. Diante disso, o método de densidades vem conquistando a preferência dos pesquisadores da área de Otimização Topológica por ser um modelo mais simples de implementar e por utilizar somente uma variável de projeto: a densidade relativa do material em cada ponto domínio estendido fixo de projeto. Além de permitir obter um resultado muito semelhante ao obtido usando o método da homogeneização. O método de densidades é detalhado na sequência.

2.5. Método de densidades

Neste trabalho, é utilizado o modelo de material do tipo SIMP (“Simple Isotropic Material with Penalization”). O SIMP ou método de densidades

(BENDSØE, 1989, ZHOU; ROZVANY, 1991, MLEJNEK, 1992) consiste numa equação matemática que define o valor da densidade (variável de projeto que varia de zero a um valor máximo) em cada ponto do domínio (Ω) em função da propriedade efetiva do material base usado no projeto, essencialmente simulando uma microestrutura. Esta equação é dada por:

$$\mathbf{C}(x) = \rho(x) \mathbf{C}_0 \quad (2.4)$$

onde $\rho(x)$ é interpretada como uma função de distribuição (contínua) de densidades (variável de projeto), $0 \leq \rho(x) \leq 1$ e $x \in \Omega$. Desta forma, podemos dizer que a densidade do material em cada ponto do domínio (Ω) pode variar de “zero” (não há presença de material) a “um” (total presença de material).

A relação linear produzida pela Eq. (2.4) nos faz acreditar que, matematicamente qualquer valor de propriedade efetiva do material $\mathbf{C}(x)$, variando de “zero” (ou um valor bem próximo de zero para evitar o problema de condicionamento numérico) até o valor da propriedade efetiva do material base $\mathbf{C}_0$, pode ser obtido e é viável. Porém, fisicamente isso não é verdade, pois como o valor da propriedade efetiva do material é definido pela sua estrutura molecular, nem todos os valores neste intervalo serão atingíveis. As microestruturas ótimas formadas pela mistura homogênea de materiais base (cujo valor da propriedade efetiva é conhecida) são alternativas para contornar esse impasse (BENDSØE, 1989, ROZVANI et al., 1995). No entanto, do ponto de vista da engenharia o interessante é que, através de uma função contínua, se possa alcançar uma solução para o problema de otimização em que a topologia ótima obtida seja composta praticamente por material base e vazios (buracos), ou seja, obter uma topologia constituída de materiais cujas propriedades efetivas (módulo de elasticidade, por exemplo) sejam possíveis de se construir.

Matematicamente, a ocorrência de valores intermediários para a variável de projeto $\rho(x)$ estabelece a relaxação do problema e permite a obtenção da solução do problema de OT (BENDSØE, 1995), embora implique em obter uma estrutura com

regiões de diferentes propriedades de material. Como já mencionado, do ponto de vista prático, isto não é interessante pois dificulta a interpretação final da topologia e torna inviável a fabricação.

Então, para evitar a ocorrência do excesso de densidades intermediárias (também conhecida como “escalas de cinza”), penaliza-se os valores intermediários de $\rho(x)$ da seguinte maneira (BENS DSOE, 1989, ZHOU; ROZVANY, 1991, MLEJNEK, 1992):

$$\mathbf{C}(x) = \rho(x)^p \mathbf{C}_0 \quad (2.5)$$

onde p é o fator de penalidade que reduz as densidades intermediárias no resultado final. O tensor $\mathbf{C}_0$ é isotrópico e depende do módulo de elasticidade do material base (E_0) e da razão de Poisson (ν). No SIMP o módulo de elasticidade do material em cada ponto do domínio (Ω) varia com a densidade ρ , enquanto que ν não depende de ρ .

O fator p pode ser ajustado para evitar o aparecimento das “escalas de cinza”. Uma discussão interessante sobre este ajuste é feita em BENDSØE & SIGMUND (1999), onde eles demonstram que para garantir a existência de um modelo SIMP formado a partir da mistura de um material base e ar (buraco), sendo $E_0 \gg E_{ar}$, no estado plano de tensão, as seguintes relações devem ser satisfeitas:

$$\rho^p E_0 \leq \frac{\rho E_0}{3-2\rho} \quad \text{para } 0 \leq \rho \leq 1 \quad (2.6)$$

$$p \geq \max \left\{ \frac{2}{1-\nu}, \frac{4}{1+\nu} \right\} \quad (2.7)$$

As Eq. (2.6) e (2.7) são baseadas nos limites de Hashin-Shtrikman (HASHIN

& SHTRIKMAN, 1963 apud BENDSØE & SIGMUND, 1999), os quais definem uma região, onde as propriedades de microestruturas formadas a partir da mistura de dois materiais são fisicamente possíveis de serem obtidas. A partir das Eq. (2.6) e (2.7) podemos concluir que ambas são satisfeitas se $p \geq 3$. Embora matematicamente essa conclusão seja factível, na prática devemos tomar cuidado quanto a excessiva penalidade das densidades intermediárias (fator p muito alto), pois a medida que aumentamos o fator p , aproximamos cada vez mais o problema contínuo num problema discreto, conforme observado em RIETZ (2001), retornando ao caso da não garantia da obtenção da solução do problema de OT, devido as instabilidades numéricas geradas pela variação brusca da variação de projeto no problema discreto

Também é interessante notar que apesar da razão de Poisson (ν) não depender de $\rho(x)$, o valor de p está implicitamente relacionada a ela pela condições de Hashin-Shtrikman. Assim, a partir da Eq. (2.7) é simples verificar que, para os casos bidimensionais (2D), se ν for igual a $1/3$ (razão de Poisson do aço) o fator p deverá ser igual a 3. A Fig. 2.7 mostra a comparação entre a curva limite superior de Hashin-Shtrikman e as curvas da relação entre o módulo de elasticidade e a densidade do modelo SIMP para diversos valores de p .

Figura 2.7 – Curva limite superior de Hashin-Shtrikman e curvas do modelo SIMP.

O excesso de “escalas de cinza” também ocorre no método da homogeneização, contudo BENDSØE & KIKUCHI (1988) utilizaram esse método e uma microestrutura sub-ótima para o problema de maximização de rigidez com restrição de volume e obtiveram soluções que matematicamente eram ótimos locais, mas que do ponto de vista da engenharia eram soluções mais adequadas, ou seja, as topologias obtidas eram bem definidas e continham uma quantidade mínima de “escalas de cinzas”. Já a utilização da Eq. (2.5) no método de densidades, para os problemas de OT, é uma alternativa menos complexa que também permite obter topologias bem definidas, isentas ou com uma quantidade mínima de “escalas de cinza”. BENDSØE (1995) descreveu a prova da existência dessa solução. Mas, é importante deixar claro que as topologias obtidas são soluções ótimas locais, que buscam atender o ponto de vista de engenharia. Assim, devemos ter uma solução de compromisso, ou seja, obter uma solução ótima local, bem definida, o mais próxima possível da solução ótima global e que atenda os requisitos de viabilidade de construção para a estrutura projetada.

O método de densidades é um modelo de material que, comparado ao método da homogeneização, é menos complexo de ser implementado numericamente num algoritmo de otimização. Há vários artigos científicos que implementam o MOT utilizando esse modelo de material (SIGMUND, 1996 e 1999, JONSMANN et al., 1999, YIN; YANG, 2000, PEDERSEN et al., 2001, e outros).

2.6. Procedimento para implementação da Otimização Topológica

A metodologia criada por Bendsøe e Kikuchi para a OT gera um procedimento constituído de várias etapas para a obtenção da solução ótima. Maiores detalhes sobre a implementação da metodologia podem ser encontrados em BENDSØE; KIKUCHI (1988) e SUZUKI; KIKUCHI (1991). É importante observar que no processo de solução do problema de otimização o domínio da estrutura é discretizado, portanto torna-se necessário a utilização de métodos numéricos.

O procedimento típico para o projeto de estruturas mecânicas que utiliza o MOT, é apresentado na Fig. 2.8. A primeira etapa consiste em se definir o domínio estendido fixo de projeto (Ω), no qual a estrutura pode existir. Esse domínio é limitado pelos pontos de aplicação de carga e pelas condições de contorno da estrutura, ou seja, os pontos onde os deslocamentos são restringidos.

Figura 2.8 – Procedimento típico de projeto estrutural por otimização topológica.

É importante nessa fase definir o domínio (Ω) com o maior tamanho possível, de forma a não limitar o domínio de trabalho da OT, pois como em qualquer método de otimização quanto mais restringimos o problema, menos ótima será a solução. Na segunda etapa o domínio (Ω) é discretizado em elementos finitos e são aplicadas as condições de contorno. Na terceira etapa, os dados do domínio (Ω) são inseridos no algoritmo de otimização topológica, que num processo iterativo distribui o material no domínio (Ω) de forma a minimizar (ou maximizar) a função objetivo especificada. O resultado obtido é a topologia ótima mostrada na Fig. 2.8 (item "Resultado da OT"), onde a cor escura indica a presença de material e a cor branca indica a ausência de material no ponto do domínio (Ω). Note que podem surgir pontos com cores intermediárias, denominados de escalas de cinza ("gray

scale"). Essas cores indicam a presença de materiais intermediários no interior do domínio. (Ω), os quais são difíceis de serem implementados na prática, no entanto são inerentes ao problema de OT (BENDSØE; KIKUCHI, 1988, BENDSØE, 1989, SUZUKI; KIKUCHI, 1991). Outro problema que pode acontecer é o surgimento de regiões com elementos de cor escura e elementos de cor branca dispostos em forma de tabuleiro de xadrez. A rigidez da região que contém o “tabuleiro de xadrez” é maior se comparada à rigidez de uma região com distribuição uniforme de material. Maiores detalhes do “tabuleiro de xadrez” podem ser observados no item 2.7. Portanto, as “escalas de cinza” e o “tabuleiro de xadrez” são indesejáveis e irão prejudicar a interpretação dos resultados da otimização (quarta etapa). Essa interpretação consiste na remoção das eventuais “escalas de cinza” e a suavização do contorno da topologia obtida, ajustando-a de forma que possa ser fabricada. Existem várias técnicas usadas para realizar a interpretação dos resultados, como desde desenhar uma estrutura baseada na topologia obtida até o processamento de imagens (KIKUCHI et al., 1997, HSU et al., 2001). A quinta etapa consiste em se verificar o resultado final da estrutura, com o objetivo de avaliar a alteração da função objetivo devido às pequenas alterações da interpretação. Além disso, os resultados gerados na OT não são intuitivos e é interessante fazer uma verificação da estrutura final usando o MEF. Finalmente, a última etapa é a fabricação da estrutura onde, atualmente, existem várias técnicas de fabricação que permitem obter uma variedade de estruturas com formas complexas, como a prototipagem rápida (JACOBS, 1996), a eletro-erosão a fio, entre outras.

2.7. Tabuleiro de xadrez

Na maioria dos trabalhos sobre a aplicação do MOT observa-se uma certa complexidade para a eliminação de um aspecto comum a todos esses trabalhos: a formação de regiões com elementos de cor escura (presença de material) e elementos de cor branca (ausência de material), dispostos em forma de tabuleiro de xadrez nos resultados obtidos. A Fig. 2.9 ilustra o exemplo de um resultado de OT onde surge o

“tabuleiro de xadrez” (ou “checkerboard” como é conhecido na literatura internacional).

Figura 2.9 – Tabuleiro de xadrez.

O “tabuleiro de xadrez” é indesejável na solução do problema, pois não se configura numa ótima distribuição de material e sim num fenômeno que aparece devido à formulação (funções de interpolação) do elemento finito utilizado no processo de otimização. DÍAZ & SIGMUND (1995) investigaram o comportamento local do arranjo de elementos finitos dispostos em forma de tabuleiro de xadrez. Segundo eles, a explicação para a ocorrência desse fenômeno nos resultados dos problemas de OT é que as aproximações numéricas introduzidas pelo método de elementos finitos (MEF) fazem com que o arranjo do material em forma de tabuleiro de xadrez seja mais rígido do que o arranjo uniforme (Fig. 2.10), considerando o mesmo volume de material em ambos os arranjos.

Figura 2.10 – Arranjos de “tabuleiro de xadrez” e de material distribuído uniformemente.

Em seu trabalho, DÍAZ & SIGMUND (1995) calcularam a propriedade efetiva do arranjo de elementos finitos disposto em forma de tabuleiro de xadrez e concluíram que, considerando os arranjos mostrados na Fig. 2.10, se usarmos elementos isoparamétricos de 4 nós com funções de interpolação bi-linear, o “tabuleiro de xadrez” mostrado na Fig. 2.10a é mais rígido (artificialmente) em termos de deformação de cisalhamento do que o arranjo da Fig. 2.10b, que possui distribuição de material igual para todos os elementos. Como geralmente a maximização de rigidez é uma característica implícita nos problemas de OT (e explícita no caso do problema de maximização de rigidez com restrição de volume de material), na busca da solução ótima, o MOT acaba optando pela formação do “tabuleiro de xadrez”.

A formação do “tabuleiro de xadrez” não é um aspecto exclusivo da OT, este fenômeno também se manifesta na solução de MEF para problemas com variacional misto. Um exemplo disto pode ser visto numa distribuição de pressões obtidas através da análise de MEF do problema de escoamento de fluidos de Stokes (ODEN et al., 1982), cujo variacional envolve velocidades e pressões. Conforme JOG et al. (1994) a formação do “tabuleiro de xadrez” neste tipo de problema ocorre quando a condição de Babuska-Brezzi (BATHE, 1996) é violada. Assim, eles sugeriram que se o problema de OT for interpretado como um problema que contém um variacional misto, que envolve o campo de densidades (variáveis) e o campo de deslocamentos, a formação do “tabuleiro de xadrez” pode ser evitada usando diferentes funções de interpolação (de mesma ordem) para ambos os campos (densidades e deslocamentos). No entanto, isso não é tão simples e requer várias análises de combinações para encontrar a interpolação do campo de densidades e do campo de deslocamentos que gera configurações estáveis sob a condição de Babuska-Brezzi (JOG et al., 1994, JOG & HABER, 1996).

Vários trabalhos na literatura mencionam a formação do “tabuleiro de xadrez” em seus resultados de OT, mas poucos discutem profundamente o assunto, tanto que a sua solução ainda é um tema bastante polêmico e pouco explorado. Em suma, a maioria desses trabalhos, sugerem duas formas distintas para eliminação da formação do “tabuleiro de xadrez” nos problemas de OT. Uma delas é aumentar a

ordem do elemento finito e a outra é utilizar métodos de filtragem ou de controle de gradientes.

Como visto anteriormente, para uma mesma quantidade de material o arranjo de “tabuleiro de xadrez” (Fig. 2.10a), com elementos de baixa ordem (4 nós), produz uma configuração mais rígida em termos de deformação de cisalhamento do que o arranjo uniforme de material. Aumentar a ordem do elemento significa aumentar o número de nós do elemento finito. Os elementos com 8 ou 9 nós possuem funções de interpolação que representam melhor (aproximação mais refinada) o campo de deslocamentos no elemento e, conseqüentemente, o campo de deformações. Então, a utilização de elementos com maior números de nós permite reduzir o erro induzido aos termos de deformação de cisalhamento no elemento, e portanto representar de forma menos “artificial” a rigidez num arranjo de elementos finitos. Isso provavelmente explica a razão pela qual o “tabuleiro de xadrez” não aparece quando se utiliza elementos finitos de alta ordem nos problemas de OT. PETERSSOM & SIGMUND (1998) utilizaram essa solução para obter resultados isentos da formação de ‘tabuleiro de xadrez’ para o problema de OT cuja função objetivo considera máxima rigidez de uma estrutura com restrição de volume de material. Mas, eles concluíram que esta é uma alternativa cara devido ao alto custo computacional, pois a matriz de rigidez do modelo de MEF se torna demasiadamente grande a medida que aumentamos o número de nós do elemento. Além disso, é importante observar que DÍAZ & SIGMUND (1995) demonstraram que, para determinados valores do fator de penalidade p dos problemas de OT que utilizam o método de densidades (veja item 2.5 deste capítulo), elementos de 9 nós também podem causar a formação do “tabuleiro de xadrez”. Segundo eles, não é interessante a utilização desses elementos para a seguinte relação:

$$p > \frac{\log(2(6-5\nu))}{\log 2} \quad (2.8)$$

onde ν é a razão de Poisson.

A maioria dos trabalhos que envolvem o MOT, inclusive este, usa o elemento quadrilátero de 4 nós, por ele ter uma formulação simples de ser implementada num

software e além disso a matriz de rigidez global da estrutura é menor em relação a alguma outra que considera elementos de ordem maior, o que implica em economia de tempo computacional, se considerarmos a natureza iterativa do MOT. Desta forma, uma outra alternativa muito usada para a eliminação do “tabuleiro de xadrez” nos problemas de OT é a introdução de métodos de controle das variáveis de projeto (densidades). Variações bruscas nos gradientes das variáveis de projeto favorecem a formação do “tabuleiro de xadrez”, sendo assim a utilização de um método de controle sobre a variação espacial das variáveis de projeto evita esse fenômeno, além de permitir um razoável controle da complexidade da topologia (BOURDIN, 2001) obtida pelo MOT. A suavização da variação das variáveis de projeto nos problemas de OT é feita, ou através de restrições inseridas na própria formulação do problema de otimização, como em HABER et al. (1996) que acrescenta uma restrição de perímetro na formulação e CARDOSO & FONSECA (1999) que impõe uma restrição aos gradientes das variáveis de projeto no problema de minimização de volume com restrição de flexibilidade média (“compliance”), ou através de métodos de filtragem, os quais são mais utilizados devido a facilidade de implementação e rapidez computacional, embora não garantam o controle efetivo da variação das variáveis de projeto. SWAN & KOSAKA (1997) propuseram um filtro espacial de vizinhança fixa, no qual a densidade de cada elemento depende das densidades dos elementos vizinhos. Apesar deste filtro ser eficaz para evitar a formação do “tabuleiro de xadrez” ele é dependente do tamanho da malha de elementos finitos, ou seja, obtêm-se resultados de OT diferentes conforme aumentamos a discretização do domínio estendido fixo de projeto. CARDOSO & FONSECA (1999) propuseram uma versão baseada no filtro de SWAN & KOSAKA (1997) na qual implementam um conceito de raio de abrangência no filtro para torná-lo independente ao refino da malha de elementos finitos.

Neste trabalho é utilizado o filtro espacial proposto por CARDOSO & FONSECA (1999), cuja introdução teórica e implementação numérica serão vistos mais adiante.

CAPÍTULO 3: Formulação do problema de otimização para projeto de mecanismo flexível

3.1. Introdução

Em geral a função de um mecanismo flexível é a de agarrar, prender ou “morder” um objeto, portanto o projeto desses mecanismos deve satisfazer duas condições, flexibilidade e rigidez. De fato, o mecanismo deverá prover máxima deflexão, em um ponto e direção de interesse, e máxima rigidez possível de toda a estrutura, a fim de suportar os trabalhos externo e interno. Para tanto o problema de otimização é formulado em termos de energia e se divide em duas partes: energia mútua e flexibilidade média. A energia mútua está relacionada com o deslocamento do mecanismo em um ponto e direção de interesse quando submetido a um carregamento em outro ponto e direção qualquer. Enquanto a flexibilidade média está relacionada com a rigidez estrutural do mecanismo, necessária caso contrário teríamos um mecanismo extremamente flexível, ou seja, bastante próximo do comportamento de um fluido. O equacionamento da energia mútua e da flexibilidade média é detalhado no item 3.2. No item 3.3 é descrito a formulação da função multi-objetivo proposta para o problema de otimização, que atenderá a natureza do comportamento cinemático e estrutural do mecanismo. E por fim, no item 3.4 são desenvolvidas as derivadas (gradientes) da função multi-objetivo, as quais serão utilizadas mais adiante na implementação numérica do problema.

3.2. Energia mútua e flexibilidade média

Para satisfazer a condição de flexibilidade (máxima deflexão) o problema é definido usando-se o conceito de energia mútua (SHIELD; PRAGER, 1970;

HUANG, 1971) e flexibilidade média. Para ilustrar estes conceitos considere um corpo tridimensional, constituído de um material elástico linear, com domínio Ω e fixo na região Γ_d , como mostrado na Fig. 3.1. Agora, suponha esse corpo submetido a dois casos de carregamento distintos. O primeiro carregamento é mostrado na Fig. 3.1a e consiste na aplicação de um carregamento $\mathbf{t}^1$ na superfície Γ_{t^1} , o que gera ao corpo um campo de deslocamentos $\mathbf{u}^1 = \{u_1^1, u_2^1, u_3^1\}$. O segundo caso é mostrado na Fig. 3.1b, onde é aplicado um carregamento $\mathbf{t}^2$ na superfície Γ_{t^2} , gerando um campo de deslocamentos $\mathbf{u}^2 = \{u_1^2, u_2^2, u_3^2\}$. Para simplificar a formulação, em ambos os casos, as forças de volume que agem no corpo (como por exemplo, o peso próprio) não são consideradas.

Figura 3.1 – Corpo submetido a dois casos diferentes de carregamento.

Pela teoria da mecânica do meio contínuo, sabe-se que a forma linear da flexibilidade média (ou “mean compliance”) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$L^k(\mathbf{u}^l) = \int_{\Gamma_k} \mathbf{t}^k \cdot \mathbf{u}^l d\Gamma \quad \text{para } \mathbf{u}^l \in V \quad (3.1)$$

onde V é o espaço linear admissível, tal que $V = \{\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i : v_i \in H^1(\Omega) \text{ com } \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Gamma_d, i = 1, 2, 3\}$; $\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$, sendo $\mathbf{T}$ o tensor tensão (definição do estado de tensão

num dado ponto) e $\mathbf{n}$ um vetor normal à superfície Γ_k ; e os índices k e l assume o valor 1 (primeiro caso de carregamento) ou 2 (segundo caso de carregamento).

Se o corpo for submetido ao primeiro ou ao segundo carregamento descritos anteriormente, de maneira que somente haja a ação de um deles, aplicando a Eq. (3.1) obtém-se as seguintes equações:

$$L^1(\mathbf{u}^1) = \int_{\Gamma_1} \mathbf{t}^1 \cdot \mathbf{u}^1 d\Gamma \quad (3.2)$$

$$L^2(\mathbf{u}^2) = \int_{\Gamma_2} \mathbf{t}^2 \cdot \mathbf{u}^2 d\Gamma \quad (3.3)$$

onde a $L^1(\mathbf{u}^1)$, assim como $L^2(\mathbf{u}^2)$, é igual a flexibilidade média, ou seja, essa energia pode ser interpretada como sendo a deformação armazenada pelo corpo tridimensional quando aplicado o carregamento $\mathbf{t}^1$ na superfície Γ_1 (ou quando aplicado o carregamento $\mathbf{t}^2$ na superfície Γ_2).

Na realidade, a flexibilidade média de uma estrutura em equilíbrio estático é igual ao dobro da energia potencial total. De fato, sabemos que a energia potencial total (Π) é dada pela seguinte expressão:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{v})^T \mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad \text{para } \mathbf{v} \in V \quad (3.4)$$

onde o primeiro termo da Eq. (3.4) refere-se a energia elástica de deformação e o segundo termo refere-se ao trabalho realizado pelas forças externas. Minimizando esse funcional ($\delta\Pi = 0$), obtemos:

$$\int_{\Omega} [\varepsilon(\mathbf{v})^T \mathbf{C} \varepsilon(\delta\mathbf{v}) - \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{v}] d\Omega = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{v})^T \mathbf{C} \varepsilon(\delta\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{v} d\Omega \quad (3.5)$$

onde $\delta \mathbf{v}$ é arbitrário entre as funções admissíveis. Então, desde que um campo de deslocamento $\mathbf{u}$ seja solução para o equilíbrio estático, podemos fazer:

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u})^T \mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (3.6)$$

Desta maneira, da Eq. (3.4) e considerando a Eq. (3.6), obtemos:

$$\Pi_{\text{equil.}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u})^T \mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Omega \Rightarrow \Pi_{\text{equil.}} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (3.7)$$

Portanto, conclui-se que

$$\text{flexibilidade média} = \int_{\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Omega = -2\Pi_{\text{equil.}} \quad (3.8)$$

ou seja, em módulo, a flexibilidade média é exatamente o dobro da energia potencial total de equilíbrio estático.

Para atender aos requisitos cinemáticos do mecanismo precisamos conhecer também a energia mútua. Então, agora considere o corpo submetido à ação dos dois casos de carregamento simultaneamente. Neste caso, devem ser observadas as seguintes situações:

- a) o carregamento $\mathbf{t}^1$, aplicado na superfície Γ_1 , permanece constante enquanto o carregamento $\mathbf{t}^2$ é aplicado gradualmente na superfície Γ_2 , nesta situação o trabalho total (W_1) realizado por $\mathbf{t}^1$ e $\mathbf{t}^2$ é dado por:

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \mathbf{t}^1 \cdot \mathbf{u}^1 d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} \mathbf{t}^2 \cdot \mathbf{u}^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \mathbf{t}^1 \cdot \mathbf{u}^2 d\Gamma \quad (3.9)$$

b) agora, os carregamentos são aplicados na ordem reversa em relação a situação anterior, ou seja, $\mathbf{t}^2$ é constante e $\mathbf{t}^1$ é aplicada gradualmente, desta forma o trabalho total (W_2) realizado por $\mathbf{t}^1$ e $\mathbf{t}^2$ é dado por:

$$W_2 = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} \mathbf{t}^2 \cdot \mathbf{u}^2 d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \mathbf{t}^1 \cdot \mathbf{u}^1 d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \mathbf{t}^2 \cdot \mathbf{u}^1 d\Gamma \quad (3.10)$$

Como o trabalho realizado não depende da ordem de aplicação dos carregamentos $\mathbf{t}^1$ e $\mathbf{t}^2$, podemos afirmar que $W_1 = W_2$, então:

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{t}^1 \cdot \mathbf{u}^2 d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \mathbf{t}^2 \cdot \mathbf{u}^1 d\Gamma \quad (3.11)$$

A Equação (3.11) é conhecida como Teorema de Betti (COOK; YOUNG, 1985), o qual comprova que o trabalho realizado por $\mathbf{t}^1$ ao longo do campo de deslocamento $\mathbf{u}^2$ da superfície Γ_2 é igual ao trabalho realizado por $\mathbf{t}^2$ ao longo do campo de deslocamento $\mathbf{u}^1$ da superfície Γ_1 . Este teorema é uma generalização do Teorema de Maxwell, o qual é específico para o caso de aplicação de forças pontuais, ao invés de um sistema de forças superficiais. Este teorema é muito útil quando queremos determinar o campo de deslocamentos provocado pela força aplicada num dado ponto, conhecendo-se a força e o campo de deslocamentos que atuam em outro ponto de uma estrutura.

Assim, para a condição onde corpo é submetido simultaneamente aos dois casos de carregamento, verifica-se que:

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{t}^1 \cdot \mathbf{u}^2 d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \mathbf{t}^2 \cdot \mathbf{u}^1 d\Gamma \Leftrightarrow L^1(\mathbf{u}^2) = L^2(\mathbf{u}^1) \quad (3.12)$$

onde $L^1(\mathbf{u}^2)$ (ou $L^2(\mathbf{u}^1)$) é a energia mútua do sistema.

A energia mútua também pode ser escrita em termos do trabalho interno realizado pelas forças internas ao corpo tridimensional. Sabe-se que o trabalho interno devido a deformação do corpo é dado por:

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u})^T \mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{v}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) d\Omega \quad (3.13)$$

onde $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ é a deformação linearizada, C_{ijkl} é o tensor de elasticidade (simétrico) e o índice T indica a transposição de matriz.

Considere a Eq. (3.5) e $\mathbf{u}$ como o campo de deslocamentos solução da equação na condição de equilíbrio. Então, fazendo $\mathbf{v} = \mathbf{u}^2$, temos:

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}^1)^T \mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{u}^2) d\Omega = \int_{\Gamma_1} \mathbf{t}^1 \cdot \mathbf{u}^2 d\Gamma = L^1(\mathbf{u}^2) \quad (3.14)$$

e fazendo $\mathbf{v} = \mathbf{u}^1$, temos:

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}^2)^T \mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{u}^1) d\Omega = \int_{\Gamma_2} \mathbf{t}^2 \cdot \mathbf{u}^1 d\Gamma = L^2(\mathbf{u}^1) \quad (3.15)$$

ou, ainda utilizando o seguinte operador (forma bilinear da energia):

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u})^T \mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{v}) d\Omega \quad (3.16)$$

fazendo $\mathbf{u}$ igual $\mathbf{u}^1$ e $\mathbf{v}$ igual a $\mathbf{u}^2$ (desde que $\mathbf{v}$ seja admissível), podemos escrever as Eq. (3.14) e (3.15) da seguinte forma:

$$a(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) = \int_{\Gamma_{t^1}} \mathbf{t}^1 \cdot \mathbf{u}^2 d\Gamma = L^1(\mathbf{u}^2) \quad (3.17)$$

$$a(\mathbf{u}^2, \mathbf{u}^1) = \int_{\Gamma_{t^2}} \mathbf{t}^2 \cdot \mathbf{u}^1 d\Gamma = L^2(\mathbf{u}^1) \quad (3.18)$$

Enfim, a energia mútua representa a deformação acumulada entre as regiões Γ_{t^1} e Γ_{t^2} , no corpo tridimensional (Fig. 3.1), quando aplicado $\mathbf{t}^1$ numa região qualquer (Γ_{t^1}) e $\mathbf{t}^2$ em outra região qualquer (Γ_{t^2}). Se assumirmos por exemplo um valor unitário para o carregamento $\mathbf{t}^2$, a energia mútua representa o quanto se desloca a região Γ_{t^2} devido a ação do carregamento $\mathbf{t}^1$, aplicado na região Γ_{t^1} . Em outras palavras, a energia mútua está relacionada com o deslocamento do corpo em um ponto e direção de interesse, quando submetido a um carregamento em outro ponto distinto. Portanto, se quisermos a máxima deflexão em qualquer ponto do corpo, por exemplo, devemos maximizar a energia mútua correspondente a esses pontos.

3.3. Descrição do problema de otimização para projeto de mecanismo flexível

O projeto de mecanismo flexível deve atender a natureza do comportamento cinemático e estrutural do mecanismo. O comportamento cinemático é a capacidade que o mecanismo possui de se movimentar ao longo de uma direção especificada e o comportamento estrutural provê a rigidez suficiente para garantir a forma do mecanismo. Para isso o problema de otimização é formulado usando os conceitos de energia mútua e flexibilidade média, as quais permitem ao mecanismo o comportamento cinemático e o comportamento estrutural respectivamente.

3.3.1. Formulação do problema para atender o comportamento cinemático

A função objetivo do problema de otimização para atender o comportamento cinemático do mecanismo é formulada através dos conceitos de energia mútua, para isso considere o mecanismo flexível de domínio (Ω) qualquer, mostrado na Fig. 3.2. Esse domínio é fixado pela região Γ_d e está sujeito a aplicação de um carregamento $\mathbf{t}^1$ numa superfície Γ_{t^1} qualquer do domínio. Este carregamento $\mathbf{t}^1$, aplicado em qualquer direção, gera ao corpo do mecanismo flexível um campo de deslocamentos $\mathbf{u}^1$. Agora suponha a aplicação um carregamento fictício $\mathbf{t}^2$ na direção e sentido do deslocamento desejado em outra superfície Γ_{t^2} (qualquer do domínio). Este carregamento fictício gera ao corpo do mecanismo flexível um outro campo de deslocamento $\mathbf{u}^2$. Os carregamentos e as superfícies de aplicação são mostrados na Fig. 3.2.

Figura 3.2 – Condição de flexibilidade do mecanismo.

Desta maneira, a energia mútua do sistema é dada pelas Eq. (3.17) ou (3.18). Neste trabalho, o projeto do mecanismo flexível supõe que o carregamento $\mathbf{t}^1$ é uma força aplicada na direção e em um ponto qualquer da estrutura do mecanismo, e $\mathbf{t}^2$ é

uma força fictícia unitária aplicada em outro ponto qualquer da estrutura, na direção e sentido do deslocamento desejado. De fato, o mecanismo deverá prover máxima deflexão, em um ponto e direção de interesse, quando aplicado uma dada força em outro ponto qualquer da estrutura. Sendo assim, o problema de otimização é formulado da seguinte maneira:

$$\text{Maximizar: } L^2(\mathbf{u}^1) = \int_{\Gamma_2} \mathbf{t}^2 \cdot \mathbf{u}^1 d\Gamma \quad (\text{energia mútua}) \quad (3.19)$$

$$\text{Sujeito à: } a(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1) = L^1(\mathbf{v}^1) \quad \text{para } \mathbf{u}^1 \in V_a \text{ e } \forall \mathbf{v}^1 \in V_a \quad (3.20)$$

$$a(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2) = L^2(\mathbf{v}^2) \quad \text{para } \mathbf{u}^2 \in V_a \text{ e } \forall \mathbf{v}^2 \in V_a \quad (3.21)$$

$$\int_{\Omega} \rho d\Omega - \Omega_s \leq 0 \quad (3.22)$$

onde $V_a = \{\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i : v_i \in H^1(\Omega) \text{ com } \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Gamma_d\}$; $a(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1)$ e $a(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2)$ são as formas compactas das energias internas $\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}^1)^T \mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{v}^1) d\Omega$ e $\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}^2)^T \mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{v}^2) d\Omega$ respectivamente. A Eq. (3.22) restringe a quantidade de material no mecanismo flexível, sendo Ω_s o volume final desejado para o mecanismo e ρ é a função de densidade do material utilizado no projeto.

3.3.2. Formulação do problema para atender o comportamento estrutural

Se considerássemos apenas a condição do item 3.3.1 (maximização da energia mútua) obteríamos um mecanismo extremamente flexível, ou seja, sem nenhuma rigidez, cujo comportamento seria bastante próximo ao de um fluido (ar, por exemplo), o que não é interessante pois o mecanismo deve manter a forma ao ser submetido à ação de carregamentos. De fato, o mecanismo flexível deve prover

rigidez o suficiente para suportar o esforço de reação ao segurar um objeto. Para satisfazer esta condição de rigidez o problema é formulado sob o aspecto de minimização da energia elástica de deformação. Para tanto a Fig. 3.3 mostra a configuração necessária para a formulação deste problema (NISHIWAKI et al., 1998).

Figura 3.3 – Condição de rigidez do mecanismo.

Observe que agora o domínio (Ω) do mecanismo flexível, mostrado no caso anterior (Fig. 3.2), continua fixo pela região Γ_d , porém, a região Γ_{t^1} é fixa (restrição ao deslocamento) na mesma direção do carregamento aplicado anteriormente ($\mathbf{t}^1$). Essa restrição é necessária para simular o esforço de reação obtido na região Γ_{t^1} quando o mecanismo se deforma. A região Γ_{t^2} é submetida a um carregamento que representa o esforço de reação do objeto segurado pelo mecanismo flexível. Como anteriormente foi aplicado o carregamento $\mathbf{t}^2$ (força fictícia unitária), o esforço de reação do objeto segurado é então representado por $-\mathbf{t}^2$, o qual é aplicado na mesma região, mesma direção, mas sentido contrário ao carregamento anterior ($\mathbf{t}^2$) e gera ao corpo do mecanismo flexível um campo de deslocamento $\mathbf{u}^3 = \{u_1^3, u_2^3, u_3^3\}$.

Portanto, com a configuração mostrada na Fig. 3.3, o problema de minimização da energia elástica de deformação, que atende o comportamento

estrutural do mecanismo flexível, é equivalente a um problema de minimização de flexibilidade média (“mean compliance”), que é dado por:

$$\text{Minimizar: } L^3(\mathbf{u}^3) = \int_{\Gamma_1} \mathbf{t}^3 \cdot \mathbf{u}^3 d\Gamma \quad (\text{“mean compliance”}) \quad (3.23)$$

$$\text{Sujeito à: } \mathbf{t}^3 = -\mathbf{t}^2 \quad (3.24)$$

$$a(\mathbf{u}^3, \mathbf{v}^3) = L^3(\mathbf{v}^3) \quad \text{para } \mathbf{u}^3 \in V_b \text{ e } \forall \mathbf{v}^3 \in V_b \quad (3.25)$$

$$\int_{\Omega} \rho d\Omega - \Omega_s \leq 0$$

onde $V_b = \{\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i : v_i \in H^1(\Omega) \text{ com } \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Gamma_d \text{ e } \Gamma_1\}$; $a(\mathbf{u}^3, \mathbf{v}^3)$ é a forma compacta da energia interna $\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^3)^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^3) d\Omega$; e $\int_{\Omega} \rho d\Omega - \Omega_s \leq 0$ é a restrição de material.

3.3.3. Função multi-objetivo e definição do problema de otimização

Definida as formulações das duas parcelas de energia (mútua e elástica de deformação) que constituem o comportamento cinemático e estrutural do mecanismo flexível, cabe agora combinarmos os dois problemas de otimização anteriores (itens 3.3.1 e 3.3.2) para obtermos uma única formulação. Lembrando que a função multi-objetivo deve combinar dois problemas de otimização com objetivos distintos, ou seja, um deles maximiza a energia mútua e o outro minimiza a flexibilidade média no mecanismo flexível. Neste trabalho, foi utilizada uma função multi-objetivo sugerida pela literatura sobre flexibilidade nos projetos de otimização topológica de estruturas (NISHIWAKI et al, 1998), a qual é dada da seguinte forma:

$$\text{Maximizar}_{\rho} : F_1 = \frac{L^2(\mathbf{u}^1)}{L^3(\mathbf{u}^3)} \quad (3.26)$$

onde ρ é a variável de projeto (a qual, neste trabalho, é o valor da densidade de cada ponto do domínio estendido fixo); $L^2(\mathbf{u}^1)$ é a energia mútua e $L^3(\mathbf{u}^3)$ é a flexibilidade média.

Observe que a função objetivo F_1 , da Eq. (3.26), é a razão entre a energia mútua e a flexibilidade média, portanto a maximização dessa função (F_1) é obtida quando se maximiza a energia mútua e/ou minimiza a flexibilidade média, o que atende perfeitamente o problema de otimização para o projeto do mecanismo flexível. De certa forma, a função objetivo F_1 pode ser interpretada como um fator de eficiência, onde quanto maior é esse fator melhor é o desempenho do mecanismo flexível.

Mas, a função objetivo (F_1) posta desta maneira, não permite um controle melhor sobre cada uma das parcelas de energia (mútua e flexibilidade média) envolvidas no processo de otimização. No entanto, a função objetivo F_1 pode ser generalizada para atender essa condição, para isso atribui-se um peso a cada uma das parcelas de energia da Eq. (3.26), de tal forma que a função objetivo atualizada do problema de otimização, agora é dada da seguinte maneira (NISHIWAKI, et al., 1998):

$$\text{Maximizar}_{\rho} : F_2 = w \cdot \ln(L^2(\mathbf{u}^1)) - (1-w) \cdot \ln(L^3(\mathbf{u}^3)) \quad (3.27)$$

$$0 \leq w \leq 1$$

onde w é um coeficiente de atribuição de peso que permite flexibilizar a função objetivo (F_2) para que, no projeto do mecanismo flexível, seja opcional ter mais flexibilidade e menos rigidez ou vice-versa.

Portanto, o problema de otimização de mecanismos flexíveis, considerando as restrições, é formulado da seguinte maneira:

$$\text{Maximizar}_{\rho} : F_2 = w \cdot \ln(L^2(\mathbf{u}^1)) - (1-w) \cdot \ln(L^3(\mathbf{u}^3))$$

$$\text{Sujeito à: } \mathbf{t}^3 = -\mathbf{t}^2$$

$$a(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1) = L^1(\mathbf{v}^1) \quad \text{para } \mathbf{u}^1 \in V_a \text{ e } \forall \mathbf{v}^1 \in V_a$$

$$a(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2) = L^2(\mathbf{v}^2) \quad \text{para } \mathbf{u}^2 \in V_a \text{ e } \forall \mathbf{v}^2 \in V_a$$

$$a(\mathbf{u}^3, \mathbf{v}^3) = L^3(\mathbf{v}^3) \quad \text{para } \mathbf{u}^3 \in V_b \text{ e } \forall \mathbf{v}^3 \in V_b$$

$$\int_{\Omega} \rho \, d\Omega - \Omega_s \leq 0$$

$$0 \leq \rho \leq 1$$

onde ρ (variável de projeto) é a função de densidade do material utilizado no projeto, o qual pode variar de “vazio” ($\rho = 0$) a sólido ($\rho = 1$).

3.4. Análise de sensibilidades

Os gradientes (ou derivadas) da função objetivo e restrições são chamados de sensibilidades do problema de otimização. O cálculo desses gradientes é importante devido a necessidade da linearização da função objetivo em relação as variáveis do problema, como veremos mais adiante na implementação numérica da rotina de programação linear seqüencial (PLS) (capítulo 4). Diante desta necessidade, neste item são desenvolvidos os gradientes da função objetivo definida para a otimização topológica do mecanismo flexível.

Derivando a equação da função objetivo, Eq. (3.27), em relação às variáveis

do problema de otimização (ρ), temos:

$$\frac{\partial F_2}{\partial \rho} = \frac{w}{L^2(\mathbf{u}^1)} \left(\frac{\partial L^2(\mathbf{u}^1)}{\partial \rho} \right) - \frac{1-w}{L^3(\mathbf{u}^3)} \left(\frac{\partial L^3(\mathbf{u}^3)}{\partial \rho} \right) \quad (3.28)$$

Observa-se que a Eq. (3.28) contém os termos $\frac{\partial L^2(\mathbf{u}^1)}{\partial \rho}$ e $\frac{\partial L^3(\mathbf{u}^3)}{\partial \rho}$ que representam a derivada da energia mútua e a derivada da flexibilidade média, respectivamente, em relação a variável do problema (ρ). Na sequência são desenvolvidas as duas derivadas.

Sabemos que a energia mútua é dada por $L^2(\mathbf{u}^1)$, Eq. (3.18), cuja derivada em relação à variável do problema ρ , é dada por:

$$\frac{\partial L^2(\mathbf{u}^1)}{\partial \rho} = \int_{\Gamma_t^2} \mathbf{t}^2 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \rho} d\Gamma \quad (3.29)$$

onde $\mathbf{t}^2$ é um carregamento superficial que não depende da variável ρ .

Mas, também vimos que ela pode ser escrita em termos de energia interna, o que permite escrever a equação da energia mútua da seguinte forma:

$$L^2(\mathbf{u}^1) = \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}^2)^T \mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{u}^1) d\Omega \quad (3.30)$$

Usando a regra da cadeia para derivar a Eq.(3.30) em relação à variável do problema ρ , e compactando o resultado conforme o operador definido na Eq. (3.16), obtemos:

$$\frac{\partial L^2(\mathbf{u}^1)}{\partial \rho} = a\left(\frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial \rho}, \mathbf{u}^1\right) + \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}^2)^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \rho} \varepsilon(\mathbf{u}^1) d\Omega + a\left(\mathbf{u}^2, \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \rho}\right) \quad (3.31)$$

Agora, derivando a equação de equilíbrio dada pela Eq. (3.15), obtemos:

$$a\left(\frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial \rho}, \mathbf{u}^1\right) + \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}^2)^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \rho} \varepsilon(\mathbf{u}^1) d\Omega + a\left(\mathbf{u}^2, \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \rho}\right) = \int_{\Gamma_2} \mathbf{t}^2 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \rho} d\Gamma \quad (3.32)$$

A Eq. (3.6) do equilíbrio estático, também pode ser representado pela seguinte equação, definida de um modo geral:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_1} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad (3.33)$$

onde $\mathbf{v}$ é arbitrário e pode assumir qualquer valor dentro do espaço que o contém, ou seja, $\forall \mathbf{v} \in V$ onde $V = \{ \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i : v_i \in H^1(\Omega) \text{ com } \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Gamma_d, i = 1, 2 \}$. Então

fazendo $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \rho}$ e substituindo na Eq. (3.33), temos:

$$a\left(\mathbf{u}^2, \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \rho}\right) = \int_{\Gamma_2} \mathbf{t}^2 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \rho} d\Gamma \quad (3.34)$$

Substituindo a Eq. (3.34) na Eq. (3.32), obtemos a seguinte equação:

$$a\left(\frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial \rho}, \mathbf{u}^1\right) + \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}^2)^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \rho} \varepsilon(\mathbf{u}^1) d\Omega = 0 \quad (3.35)$$

de maneira análoga:

$$a\left(\frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \rho}, \mathbf{u}^2\right) + \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}^1)^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \rho} \varepsilon(\mathbf{u}^2) d\Omega = 0 \quad (3.36)$$

Como o tensor de elasticidade $\mathbf{C}$ é simétrico, então:

$$a\left(\frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \rho}, \mathbf{u}^2\right) = a\left(\mathbf{u}^2, \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \rho}\right) \quad (3.37)$$

Portanto, conclui-se que a equação que permite o cálculo da derivada da energia mútua é dada por:

$$\frac{\partial L^2(\mathbf{u}^1)}{\partial \rho} = -\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}^2)^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \rho} \varepsilon(\mathbf{u}^1) d\Omega \quad (3.38)$$

De maneira análoga ao desenvolvimento da derivada da energia mútua, Eq. (3.38), substituindo $\mathbf{u}^1$ e $\mathbf{u}^2$ por $\mathbf{u}^3$, obtemos a seguinte equação que permite o cálculo da derivada da flexibilidade média:

$$\frac{\partial L^3(\mathbf{u}^3)}{\partial \rho} = -\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}^3)^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \rho} \varepsilon(\mathbf{u}^3) d\Omega \quad (3.39)$$

CAPÍTULO 4: Implementação Numérica

4.1. Introdução teórica

A solução do problema de otimização, apresentado no item 3.3.3, é encontrada numericamente através de um algoritmo computacional que combina o método de otimização de programação linear sequencial (PLS) (HAFTKA et al., 1996) com o método numérico de análise por elementos finitos (MEF). Para melhor entendimento desse processo, será feita na sequência uma breve introdução teórica sobre a utilização dos métodos de otimização na OT.

Em geral, para resolver os problemas de otimização estrutural são usados métodos de otimização, que se dividem em dois grupos: métodos específicos e métodos genéricos. O método específico mais utilizado nos problemas de Otimização Topológica é o critério de optimalidade (“optimality criteria”). Uma revisão sobre este método pode ser encontrada em HASSANI; HINTON (1998c). Neste método, é desenvolvida uma formulação empírica específica para cada problema que é elaborado, o que faz com que o critério de optimalidade tenha aplicação restrita. No entanto, o método do critério de optimalidade é eficiente computacionalmente e foi aplicado em vários problemas de otimização topológica, entre eles o problema de minimização de flexibilidade média (ou maximização de rigidez) (SUZUKI; KIKUCHI, 1991), o problema da otimização de estruturas discretas (tipo treliça) (ROZVANY; ZHOU, 1991, ZHOU; ROZVANY, 1991) e o problema de maximização da frequência de ressonância (MA et al., 1995).

Já os métodos genéricos consistem em métodos de otimização que são baseados na chamada teoria de programação matemática e podem ser aplicados a qualquer problema de otimização, seja no projeto de estruturas ou em outro ramo de aplicação. Os métodos de programação matemática são classificados em métodos de programação linear, programação não-linear e métodos baseados em teoria de aproximações como programação linear sequencial (PLS) e programação quadrática

seqüencial (PQS). Entre eles, o PLS vem sendo aplicado com sucesso na otimização topológica, em particular no projeto de mecanismos flexíveis (SIGMUND, 1996, NISHIWAKI et al., 1998). O PLS é uma rotina que resolve, seqüencialmente, vários subproblemas lineares na busca da solução do problema não linear, o qual geralmente possui uma função objetivo complexa, um grande número de variáveis de projeto e várias restrições. No item 4.3 é feito um detalhamento maior sobre o PLS.

Os métodos numéricos exigem que o domínio contínuo da estrutura seja discretizado. Assim, passamos a ter, por exemplo, ao invés de uma distribuição contínua de densidade no interior do domínio da estrutura, valores de densidades dos elementos discretos que compõem o corpo da estrutura, sendo que a variável densidade do elemento é uma variável contínua, pois pode assumir qualquer valor entre 0 e 1. Assim, o MOT lida com domínios discretizados em elementos finitos, então no item seguinte (4.2) é feita uma breve descrição sobre o método dos elementos finitos (MEF) e o detalhamento do tipo de elemento finito utilizado no processo de otimização topológica.

4.2. Implementação do MEF na Otimização Topológica

O método dos elementos finitos (MEF) surgiu no início dos anos 50 e graças à evolução e expansão da área da computação, a partir da década de 70, tem sido bastante aplicado a diversos ramos da engenharia. Embora a abrangência deste método seja bastante grande, limitaremos a demonstrar seu uso em problemas mecânicos de estruturas sólidas, principalmente na área de otimização estrutural aplicada ao projeto de mecanismos flexíveis. O MEF possui uma vasta literatura, sendo que maiores detalhes sobre a teoria podem ser encontrados em BATHE (1996). O MEF é utilizado na Otimização Topológica por ser um método de análise robusto, confiável e genérico o suficiente para lidar com estruturas de formas complexas resultantes da otimização. Outros métodos de análise podem ser usados, desde que tenham as mesmas características. No entanto o MEF é comum em todos

os trabalhos, que usam o método de Otimização Topológica, consultados na literatura.

Uma estrutura sólida é introduzida no MEF através de um modelo discretizado numa malha de elementos finitos que represente, através de matrizes numéricas, o seu corpo estrutural (geometria), os apoios de fixação e as forças aplicadas. A partir do MEF podemos descobrir os deslocamentos (e por conseguinte as tensões) em cada ponto da estrutura discretizada. Neste trabalho, o mecanismo flexível é considerado como sendo uma estrutura bidimensional, cujo domínio estendido fixo de projeto é discretizado em vários elementos quadrados isoparamétricos de quatro nós cada. Nos itens seguintes faremos uma descrição sobre esse elemento (item 4.2.1) e sobre a formulação teórica de sua matriz de rigidez (item 4.2.2) e por final uma breve descrição sobre o cálculo dos deslocamentos nodais no MEF (item 4.2.3).

4.2.1. Elemento isoparamétrico de quatro nós

O elemento finito bidimensional, mostrado na Fig. 4.1, possui dois graus de liberdade por nó, que são os deslocamentos na direção horizontal (eixo x) e vertical (eixo y).

Figura 4.1 – Elemento retangular de quatro nós.

Da teoria do MEF sabe-se que os graus de liberdade de um elemento finito relacionam-se com as componentes dos deslocamentos nodais da seguinte forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{v} \quad (4.1)$$

onde $\mathbf{u}$ é o vetor que contém as componentes dos deslocamentos em cada ponto do elemento, $\mathbf{v}$ é o vetor das componentes dos deslocamentos nodais e $\mathbf{N}$ é a matriz das funções de forma que, para o elemento retangular da Fig. 4.1a, é composta pelos seguintes polinômios bilineares:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad (4.2)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad (4.3)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad (4.4)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (4.5)$$

onde ξ e η são as coordenadas locais do elemento.

As coordenadas de um ponto genérico (x, y) do elemento isoparamétrico, mostrado na Fig. 4.1b, são obtidas em função das coordenadas nodais do elemento, usando os mesmos polinômios bilineares do elemento retangular, Eq. (4.2) a (4.5), Desta forma:

$$x = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 \quad (4.6)$$

$$y = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 \quad (4.7)$$

As Eq. (4.6) e (4.7) representam as aproximações para as componentes horizontal e vertical, respectivamente, do deslocamento de cada ponto no domínio do elemento. No item seguinte veremos como determinar a rigidez do elemento.

4.2.2. Matriz de rigidez do elemento

Segundo a teoria do MEF, a matriz de rigidez do elemento pode ser encontrada a partir da expressão de energia elástica de deformação (U_e) do elemento sólido e de um modo geral é dada por:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV_e \quad (4.8)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}^T$ é o vetor transposto das deformações, $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor das tensões. A Eq. 4.8 é integrável no volume, então se a espessura (h_e) do elemento é constante, podemos fazer $dV_e = h_e dA_e$, e ainda sabendo que a relação entre as tensões e deformações tem a forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.9)$$

então, podemos reescrever a Eq. (4.8), numa integral de área com a seguinte forma:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{A_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} h_e dA_e \quad (4.10)$$

onde $\mathbf{C}$ é a matriz que contém os parâmetros de elasticidade do material do

elemento. Considerando o estado plano de tensão, essa matriz é dada por:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

sendo E o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson.

As deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$ em função das componentes dos deslocamentos nodais ($\mathbf{v}$) do elemento, tem a seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{v} \quad (4.12)$$

onde $\mathbf{B}$ é uma matriz de operadores diferenciais dos polinômios bilineares (Eq. (4.2) a (4.5)) que, para o elemento que está sendo utilizado (quadrilátero de quatro nós), é:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Substituindo a Eq. 4.12 na Eq. 4.10, temos:

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \int_{A_e} (\mathbf{B} \mathbf{v})^T \mathbf{C} (\mathbf{B} \mathbf{v}) h_e dA_e \quad \Rightarrow \quad U_e = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \int_{A_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} h_e dA_e \mathbf{v} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad U_e &= \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{k}_e \mathbf{v} \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde $\mathbf{k}_e$ é a matriz de rigidez do elemento, que é definida por:

$$\mathbf{k}_e = \int_{A_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} h_e dA_e \quad (4.15)$$

Usando o Jacobiano como um operador para transformar as coordenadas locais (ξ, η) em coordenadas globais (x, y) , a matriz de rigidez do elemento pode ser obtida da seguinte forma:

$$\mathbf{k}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} h_e \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (4.16)$$

onde $\det \mathbf{J}$ é o determinante da matriz Jacobiana, definida por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Se o elemento possuir uma forma quadrilátera qualquer, é extremamente difícil calcular analiticamente a integral definida na Eq. (4.16), para matriz de rigidez $\mathbf{k}_e$. Assim, devemos aplicar métodos de integração numérica, como a Quadratura de Gauss-Legendre (BATHE, 1996), por exemplo. Mas, no caso do elemento quadrado o Jacobiano da transformação dos sistemas de coordenadas é simplificado, conseqüentemente simplificando também a integral da Eq. (4.16), e tornando-se não necessária a utilização de métodos de integração numérica.

4.2.3. Determinação dos deslocamentos nodais

Determinada a matriz de rigidez $\mathbf{k}_e$ do elemento, essa é inserida numa matriz de rigidez global $\mathbf{K}$, que representa toda a estrutura. A inserção da matriz $\mathbf{k}_e$ na matriz global $\mathbf{K}$ é feita de acordo com uma matriz de conectividade, que associa um

número a cada elemento e o número dos nós a que está ligado. Cada nó por sua vez está representado por uma matriz de coordenadas. Montando a matriz de rigidez global (**K**) e conhecido o vetor de forças (**f**) aplicado nos nós, calculamos o vetor de deslocamentos nodais (**v**) a partir da relação de equilíbrio:

$$\mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{f} \quad (4.18)$$

Para resolver o sistema de equações lineares, dado pela Eq. (4.18), aplica-se um método numérico de soluções de equações (Gauss-Jordan, Gradientes Conjugados, etc.). Desta forma, determinamos o vetor de deslocamentos nodais (**v**) na estrutura.

4.3. Programação Linear Seqüencial (PLS)

O problema de otimização de mecanismos flexíveis (item 3.3.3), considerando as restrições, foi formulado da seguinte maneira:

$$\text{Maximizar}_{\rho} : F_2 = w \cdot \ln(L^2(\mathbf{u}^1)) - (1-w) \cdot \ln(L^3(\mathbf{u}^3))$$

$$\text{Sujeito à: } \mathbf{t}^3 = -\mathbf{t}^2$$

$$a(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1) = L^1(\mathbf{v}^1) \quad \text{para } \mathbf{u}^1 \in V_a \text{ e } \forall \mathbf{v}^1 \in V_a$$

$$a(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2) = L^2(\mathbf{v}^2) \quad \text{para } \mathbf{u}^2 \in V_a \text{ e } \forall \mathbf{v}^2 \in V_a$$

$$a(\mathbf{u}^3, \mathbf{v}^3) = L^3(\mathbf{v}^3) \quad \text{para } \mathbf{u}^3 \in V_b \text{ e } \forall \mathbf{v}^3 \in V_b$$

$$\int_{\Omega} \rho \, d\Omega - \Omega_s \leq 0$$

$$0 \leq \rho \leq 1$$

Neste trabalho, o método numérico que foi utilizado para resolver o problema

acima, é conhecido como programação linear seqüencial (PLS). Entre as vantagens do PLS podemos citar o fato de permitir trabalhar com um grande número de variáveis e restrições de projeto e funções objetivo complexas, sendo necessário somente determinar as primeiras derivadas dessas funções, além disso é de fácil implementação. A PLS resolve um problema de otimização não-linear dividindo-o em uma seqüência de problemas de otimização lineares que podem ser resolvidos com a técnica de programação linear (PL).

4.3.1. Programação linear (PL)

A programação linear (YANG; CHUANG, 1994) resolve um problema de otimização em que a função objetivo e as restrições são funções lineares em relação às variáveis do problema, ou seja, o problema deve ter a seguinte forma:

$$\text{Maximizar: } F(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \quad (4.19)$$

$$\text{Sujeita à: } g_i^1(x) = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n \leq c_i, (i = 1, \dots, m_1)$$

$$g_j^2(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \geq d_j, (j = 1, \dots, m_2)$$

$$g_k^3(x) = d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n = e_k, (k = 1, \dots, m_3)$$

Embora, a função objetivo do problema de otimização mostrado anteriormente (função F_2), que queremos maximizar, não seja linear em relação às variáveis do problema, que são as densidades de cada ponto do domínio estendido fixo de projeto, o problema pode ser linearizado calculando-se a Série de Taylor de 1º grau da função objetivo. Sabe-se do cálculo diferencial que a Série de Taylor pode representar uma função $f(x)$, para x próximo de um valor x_0 , a menos de um erro $e(x)$, como ilustra a equação abaixo:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{\partial^N f}{\partial x^N} \frac{(x - x_0)^N}{N!} + e(x) \quad (4.20)$$

Para uma função com n variáveis, teríamos:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1} (x_1 - x_{01}) + \dots + \frac{\partial^N f}{\partial x_1^N} \frac{(x_1 - x_{01})^N}{N!} + \frac{\partial f}{\partial x_2} (x_2 - x_{02}) + \dots \\ & + \frac{\partial^N f}{\partial x_2^N} \frac{(x_2 - x_{02})^N}{N!} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} (x_n - x_{0n}) + \dots + \frac{\partial^N f}{\partial x_n^N} \frac{(x_n - x_{0n})^N}{N!} + e(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Os termos com derivada de segunda ordem ou superior são desprezados, pois o que nos interessa é a representação linear da função objetivo, para ser utilizada na PL. No entanto, também há métodos que realizam otimização de funções considerando aproximação com termos de derivada de segunda ordem ou superior, como por exemplo a Programação Quadrática Sequencial (PQS).

Então, podemos representar a função objetivo (F_2) pela seguinte função de primeiro grau:

$$F_2 = F_2^0 + \frac{\partial F_2}{\partial \rho_1} (\rho_1 - \rho_1^0) + \frac{\partial F_2}{\partial \rho_2} (\rho_2 - \rho_2^0) + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial \rho_n} (\rho_n - \rho_n^0) \quad (4.22)$$

Separando os termos constantes dos termos dependentes das variáveis, temos:

$$F_2 = F_2^0 - \underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial \rho_1} \rho_1^0 - \frac{\partial F_2}{\partial \rho_2} \rho_2^0 - \dots - \frac{\partial F_2}{\partial \rho_n} \rho_n^0}_{\text{constantes}} + \underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial \rho_1} \rho_1 + \frac{\partial F_2}{\partial \rho_2} \rho_2 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial \rho_n} \rho_n}_{\text{variáveis}} \quad (4.23)$$

As constantes podem ser retiradas da Eq. (4.23), pois não influenciam no

processo de maximização da função. Desta maneira a função a ser maximizada na PL é dada por:

$$F_2^{\text{linear}} = \frac{\partial F_2}{\partial \rho_1} \rho_1 + \frac{\partial F_2}{\partial \rho_2} \rho_2 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial \rho_n} \rho_n \quad (4.24)$$

$\rho=\rho^0 \quad \rho=\rho^0 \quad \rho=\rho^0$

Observe que agora a função a ser maximizada (Eq. (4.24)) é linear, onde o coeficiente das densidades ρ_i (variáveis) é a derivada (ou sensibilidade) da função objetivo do problema de otimização (função F_2) em relação a variável do problema, no ponto $\rho = \rho^0$. Essa derivada foi desenvolvida no item 3.4 e é calculada através da Eq. (3.28).

Como visto anteriormente, a idéia primária do PLS para solucionar o problema de otimização não-linear é fazer uma aproximação por sucessivos subproblemas lineares que são resolvidos por método de programação linear, Simplex (DANTZIG, 1963) ou Kamarkar (HAFTKA, 1990). Para que essa aproximação seja válida é necessário limitar a variação do valor da variável de projeto (variável do problema de otimização) em cada subproblema linear através dos limites móveis (THOMAS et al., 1992). Para entender melhor este conceito, considere a função não-linear $F(x)$ mostrada no gráfico da Fig. 4.2.

Figura 4.2 – Limites móveis.

Considere também a função linear $f(x)$ como uma aproximação da função não linear $F(x)$ em torno do ponto x_i . Observa-se que a aproximação linear (função $f(x)$) somente é válida em torno do ponto x_i , se distanciando muito do valor real da função $F(x)$ a medida que se afasta de x_i . Desta maneira defini-se os valores máximo e mínimo em torno de x_i , onde a aproximação linear é válida, de limites móveis da variável x_i . A cada iteração a rotina de PLS maximiza a função linear $f(x)$ no intervalo dos limites móveis ($x_i^{\min}$ e $x_i^{\max}$) e encontra o valor ótimo para a variável x_i , que será utilizada na iteração seguinte. Assim as iterações seguem sucessivamente, substituindo-se como valor inicial da iteração posterior o valor ótimo de x_i encontrado na iteração anterior, até ocorrer a convergência da solução.

Os limites são considerados móveis pelo fato da variável x_i assumir um valor diferente a cada iteração da rotina de PLS. Esses limites são definidos como valores relativos em relação ao valor dessa variável. Porém é necessário observar que, se os valores utilizados para os limites móveis forem muito grandes, o erro da aproximação linear será grande, podendo causar inclusive a perda do ponto ótimo. Em contra partida, se forem muito pequenos o custo computacional para obter a solução ótima (no caso o ponto de máximo da função $F(x)$) será muito grande. Uma forma de tentar minimizar esse impasse e tornar mais rápido a convergência da solução é assumir valores grandes para os limites móveis na região em que a função não linear $F(x)$ apresenta um valor baixo de derivadas (região do ponto x_0 mostrada na Fig. 4.2), pois nessa região a função não linear $F(x)$ tem praticamente o mesmo comportamento da aproximação linear (função $f(x)$). Já na região em que a função apresenta grandes derivadas os limites móveis devem ser pequenos. Além disso, a medida que nos aproximamos da convergência da solução (ponto de máximo da função não linear $F(x)$) devemos reduzir bastante os valores dos limites móveis, caso contrário podemos "passar" pelo ponto máximo gerando oscilação no valor da função $F(x)$.

Uma escolha inadequada dos valores dos limites móveis pode tornar o método da PLS desvantajoso, bem como não fazer um ajuste mais preciso desses limites quando nos aproximamos do valor ótimo da função objetivo. Em geral, são utilizados valores em torno de 15% do valor de x_i para os limites móveis.

Além da função objetivo, o PL exige que as restrições do problema de otimização também sejam funções lineares em relação às variáveis de problema. Considerando em particular o problema de otimização definido neste trabalho (item 3.3.3), as restrições que dependem das variáveis do problema são dadas por:

$$\int_{\Omega} \rho \, d\Omega - \Omega_s \leq 0 \quad (4.25)$$

$$0 \leq \rho \leq 1 \quad (4.26)$$

onde a Eq. (4.25) é a restrição de volume de material e a Eq. (4.26) é a restrição ao valor limite (superior e inferior) da variável de problema.

A Eq. (4.25) é composta por duas parcelas, sendo uma delas indicada por Ω_s que é um valor desejado e estabelecido previamente para o volume final de material na estrutura a ser otimizada (neste caso o mecanismo flexível). A outra parcela, indicada pela integral $\int_{\Omega} \rho \, d\Omega$, é o valor do volume de material obtido após a otimização e que depende dos valores da densidade de cada ponto do domínio da estrutura otimizada. Como o domínio da estrutura é discretizado em elementos finitos, para se obter uma solução numérica do problema de otimização, consideramos a densidade de cada elemento (ρ_i) como sendo a variável do problema, de tal forma que o volume total de material na estrutura possa ser representado pela somatória do produto entre o volume de cada elemento e sua densidade. Na realidade a variável ρ_i , apesar de ser chamada de densidade, é na verdade um valor relativo e não deve confundida com o peso específico. Desta forma, temos a restrição da Eq. (4.25) como uma função linear em relação a variável do problema ρ_i , ou seja:

$$\sum_{i=1}^M V_i \rho_i \leq V^* \quad (4.27)$$

onde V_i é o volume de cada elemento e V^* é a restrição do volume de material no

domínio discretizado e M é o número total de elementos finitos.

Já a Eq. (4.26) (restrição da variável do problema), faz com que o valor da variável do problema seja limitado dentro de uma faixa. Esta faixa representa uma variação da presença de material no domínio da estrutura, onde o valor 0 (zero) indica ausência de material (“buraco”) e 1 indica a total presença de material. Observa-se que, como a rigidez do elemento finito está condicionada diretamente com as propriedades efetivas do material (item 4.2.2), a penalidade do material intermediário (item 2.5) é feita na matriz de rigidez $\mathbf{k}_e$ do elemento, da seguinte forma:

$$\mathbf{k}_e = \rho_e^p \mathbf{k}_e^0 \quad (4.28)$$

onde ρ_e é a densidade do elemento, p é o fator de penalidade (veja item 2.5) e $\mathbf{k}_e^0$ é a matriz de rigidez base do elemento (considerando o elemento inteiramente sólido). Como a matriz de rigidez global $\mathbf{K}$ é montada a partir da matriz $\mathbf{k}_e$ de cada elemento (veja item 4.2.3), é possível que alguns pontos da diagonal da matriz $\mathbf{K}$ sejam nulos, caso seja considerado algum valor de densidade (ρ_i) igual a zero, o que acarretaria em divisão por zero durante as operações realizadas com essa matriz. Portanto, o valor limite inferior da variável do problema de otimização não pode ser considerado exatamente zero, e sim um valor muito pequeno (próximo de zero), isto é necessário para evitar singularidades na matriz de rigidez global $\mathbf{K}$ e conseqüentemente o mal-condicionamento numérico.

Finalmente, o problema a ser inserido na rotina de Programação Linear adquire a seguinte forma:

$$\text{Maximizar:}_{\rho} \quad F_2^{\text{linear}} = \frac{\partial F_2}{\partial \rho_1} \rho_1 + \frac{\partial F_2}{\partial \rho_2} \rho_2 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial \rho_n} \rho_n \quad (4.29)$$

$\rho = \rho^0$ $\rho = \rho^0$ $\rho = \rho^0$

$$\text{Sujeita à:} \quad \sum_{i=1}^M V_i \rho_i \leq V^*$$

$$0 \leq \rho_i^{\min} \leq \rho_i \leq \rho_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, M$$

A solução numérica do problema de programação linear (PL) pode ser obtida usando-se o método Simplex (DANTZIG, 1963) ou o método Kamarkar (HAFTKA, 1990) que buscam, dentro de um conjunto de soluções possíveis para o problema, a solução que satisfaz as restrições e maximize a função objetivo. Geralmente, as rotinas de PL podem ser encontradas na literatura, como por exemplo a rotina SIMPLX (PRESS et al., 1999) que usa o método Simplex, ou disponibilizadas gratuitamente pela rede mundial de computadores (internet), como é o caso da rotina conhecida por DSPLP que usa o método de Kamarkar.

4.3.2. Rotinas SIMPLX e DSPLP

Para resolver o problema de otimização, inicialmente foi testada no software a rotina SIMPLX. Essa rotina faz a programação linear das variáveis de projeto, utilizando o método Simplex de programação matemática. Porém, a rotina SIMPLX resolve a programação linear satisfatoriamente para problemas com baixa quantidade de variáveis de projeto (na ordem de centenas), ou seja, a medida que aumenta-se a discretização da malha de elementos finitos, aumenta-se muito o custo computacional.

Portanto, a rotina SIMPLX foi substituída pela rotina conhecida por DSPLP (HANSON & HIEBERT, 1981). A rotina DSPLP é um conjunto de rotinas, programadas em linguagem Fortran por Hanson e Hiebert do Sandia National Laboratory (EUA), e usa o método de Kamarkar (HAFTKA, 1990) para resolução de problemas de programação linear que envolvem milhares de variáveis e tem como vantagem a robustez e rapidez da solução. Assim, essa rotina possibilita trabalharmos com alta discretização da malha de elementos finitos (acima de 1000 elementos) e obtermos o resultado da programação linear em menos tempo. Essa rotina é distribuída livremente na Internet através do endereço www.netlib.org/slatec e as instruções sobre os parâmetros utilizados por ela podem ser obtidas no apêndice deste trabalho.

4.4. Implementação do filtro para eliminar o “tabuleiro de xadrez”

Como foi exposto no capítulo 2 (item 2.7), o “tabuleiro de xadrez” (ou “checkerboard”) é a formação de regiões nas topologias obtidas pelo método de Otimização Topológica, que possuem uma instabilidade de presença e ausência de material, cuja aparência é semelhante ao do tabuleiro de xadrez. Essas regiões são indesejáveis e aparecem devido à formulação (funções de interpolação) do elemento finito utilizado no processo de otimização (quadrilátero de 4 nós). A explicação mais coerente, encontrada na literatura sobre o assunto (DÍAZ & SIGMUND, 1995) é que, considerando o mesmo volume de material, o arranjo do material em forma de tabuleiro de xadrez é mais rígido do que o arranjo uniforme, o que faz com que o método de Otimização Topológica opte por essa configuração.

Estudando a literatura sobre o assunto, constata-se que a solução para evitar a formação do “tabuleiro de xadrez”, nos resultados da Otimização Topológica, é aumentar a ordem do elemento ou utilizar um filtro que controle a variação das densidades (variáveis de projeto). No entanto, aumentar a ordem do elemento significa trabalhar com elementos finitos com um número grande de nós (maior que 4), o que implica numa solução que produz alto custo computacional devido ao processamento da matriz de rigidez do modelo de MEF. Assim, a solução adotada neste trabalho para evitar a formação do “tabuleiro de xadrez” foi a utilização de um filtro espacial proposto por CARDOSO & FONSECA (1999). Esse filtro suaviza a distribuição espacial das variáveis de projeto ao longo do domínio estendido fixo, através de uma transformação matemática a cada variável do problema de otimização. Alguns trabalhos da literatura sugerem a aplicação do filtro sobre o campo de densidades (SIGMUND, 2000), mas como essas densidades geralmente são as variáveis, atualizadas a cada iteração durante o processo de otimização, ao aplicarmos esse filtro modificamos os valores ótimos encontrados para essas variáveis, “bagunçando” um pouco a otimização realizada. No entanto, o filtro espacial com raio de abrangência variável, adotado neste trabalho, é aplicado sobre os limites móveis das variáveis do problema de otimização linearizado, ou seja, o problema resolvido por programação linear (veja item 4.3.1).

A aplicação do filtro espacial sobre os limites móveis da variável permite um controle simplificado da complexidade da topologia ótima encontrada no processo de Otimização Topológica. Esse filtro é uma variação espacial do filtro originalmente proposto por SWAN & KOSAKA (1997), que propuseram um esquema de filtragem de vizinhança fixa, em que a densidade de cada elemento depende das densidades dos elementos vizinhos, da seguinte maneira:

$$\rho_i = \frac{\rho_i V_i + w_1 \sum_j \rho_j V_j + w_2 \sum_j \rho_j V_j}{V_i + w_1 \sum_j V_j + w_2 \sum_j V_j} \quad (4.30)$$

onde V_i é o volume do elemento i no problema discreto, w_1 e w_2 são pesos atribuídos heurísticamente aos vizinhos de arestas e vizinhos de vértices, respectivamente.

Em filtros de vizinhança fixa somente elementos vizinhos de aresta e/ou vértice são considerados, o que torna o resultado da otimização dependente da discretização do domínio e restringe a utilização de malhas não regulares. Já nos filtros espaciais são considerados os elementos que estão dentro de um determinado raio de varredura em torno do elemento central, conforme mostrado na Fig. 4.3.

Figura 4.3 – Raio de abrangência nos filtros espaciais

Os filtros espaciais minimizam a dependência do resultado final ao refino da malha de elementos finitos e permitem um controle da complexidade da topologia,

ou seja, uma abrangência maior de elementos em torno do elemento central permite obter distribuições mais suaves da variável do problema e, portanto, topologias mais simples. O filtro espacial linear é o mais simples, nele são considerados os elementos vizinhos que se encontram dentro de um raio $R_{\max}$ em torno do elemento central, cujos pesos da média ponderada são calculados, conforme equação abaixo:

$$W_i = R_{\max} - R_{ij} \quad (4.31)$$

onde R_{ij} é a distância entre centróides (menor que $R_{\max}$) do elemento central i e do elemento vizinho j .

Baseado no conceito do filtro espacial linear, CARDOSO & FONSECA (1999) propuseram a seguinte alteração para tornar o filtro de SWAN & KOSAKA (1997) num filtro espacial:

$$\rho_i = \frac{\rho_i V_i + \bar{w} \sum_{j=1}^{nv} \rho_j V_j}{V_i + \bar{w} \sum_{j=1}^{nv} V_j} \quad (4.32)$$

com

$$\bar{w} = \frac{\sum_{j=1}^{nv} w_j}{nv} \quad (4.33)$$

onde

$$w_i = \frac{R_{\max} - R_{ij}}{R_{\max}} \quad (4.34)$$

e nv é o número de vizinhos determinados por uma varredura fixa em torno do elemento central i , sendo $j = 1, 2, \dots, nv$. Percebe-se que, desta maneira os pesos fixos para vizinhos de aresta e de vértice não são mais considerados. O filtro proposto por CARDOSO & FONSECA (1999) combina as vantagens do filtro de vizinhança fixa,

com os benefícios dos filtros espaciais, e como são aplicados diretamente sobre os limites móveis da programação linear, permite obter um controle sobre o gradiente da variável do problema sem impor uma mudança artificial sobre a distribuição das densidades, obtidas da otimização, no domínio de projeto. A desvantagem da aplicação do filtro sobre os limites móveis é a dependência do desempenho do filtro com métodos de determinação dos limites móveis. Se esses métodos permitirem uma variação muito brusca dos valores dos limites móveis, poderão causar uma atenuação do efeito do filtro. Porém, isso não se configura num grande problema, pois as variações dos limites móveis são limitadas a pequenos valores devido a aproximação linear realizada na programação linear do problema de otimização.

4.5. Procedimento para implementação do método de Otimização Topológica

Neste item é apresentado passo a passo a implementação numérica da solução do problema de otimização apresentado no item 3.3.3, onde é implementado um software (programa de computador) que resolve o problema através de rotinas de MEF e PL. As rotinas do software são escritas usando a linguagem C (ARAKAKI, 1990), sendo que as rotinas de programação linear (algoritmo SIMPLX e DSPLP) foram extraídas do livro “Numerical Recipes in C – The Art of Scientific Computing” e na Internet através do endereço www.netlib.org/slatec. A Fig. 4.4 descreve o fluxo do software de otimização topológica. Maiores detalhes sobre o procedimento de utilização e funcionamento do software podem ser obtidos no anexo B.

Inicialmente, o software precisa receber a informação (dados iniciais) sobre a geometria, pontos de fixação e aplicação das cargas do domínio inicial (estendido fixo de projeto). Isto é feito através da leitura, pelo software, de um arquivo texto que contém as matrizes de coordenadas, fixação dos graus de liberdade e aplicação de forças de cada nó da malha de elementos finitos, gerada para o domínio inicial. A

malha de elementos finitos é gerada no software comercial de elementos finitos ANSYS.

Figura 4.4 – Fluxo do processo iterativo de otimização.

Na realidade, para implementar numericamente a função multi-objetivo do problema de otimização (Eq. 3.27) para o projeto de mecanismo flexíveis, o usuário deve elaborar três situações de carregamentos distintos, para a mesma malha gerada. A Fig. 4.5 ilustra essas situações de carregamento, a partir dos quais serão calculadas a energia mútua e a flexibilidade média (relacionada com a energia de deformação), e conseqüentemente a função multi-objetivo. Desta forma, na Fig. 4.5 a é mostrado a aplicação da força aplicada em um nó na direção vertical e restrições aos deslocamentos (fixação dos nós) estipulados previamente pelo projeto do mecanismo flexível. A Fig. 4.5b mostra a aplicação da força fictícia no ponto e na direção do deslocamento desejado, mantendo as mesmas fixações de nós mostradas na Fig. 4.5a. Finalmente, na Fig. 4.5c é mostrada a aplicação da força de reação no mesmo ponto,

mesma direção, mas sentido oposto da força fictícia mostrada na Fig. 4.5b. Uma observação se faz necessária nesse carregamento (Fig.4.5c), que é a mudança das condições de contorno do modelo, ou seja, é colocada uma fixação no mesmo nó e mesma direção da força aplicada anteriormente na primeira situação de carregamento (Fig. 4.5a).

Figura 4.5 – Situações de carregamento para o projeto de mecanismo flexível.

O software recebe essas informações e através de uma rotina de MEF é determinada, para cada situação de carregamento, a configuração de deformação da malha. Ou melhor dizendo, os deslocamentos nodais de cada elemento da malha de elementos finitos. Em seguida, conhecidos os deslocamentos nodais e a matriz de rigidez global (montada pela rotina de MEF), é calculado de forma matricial a energia mútua e a energia de deformação. Desta maneira, é possível calcular também o valor da função objetivo. A forma matricial obtida da formulação contínua é utilizada pelo software para o cálculo da energia mútua, energia de deformação e função objetivo. Essa forma matricial é apresentada no anexo A.

O software usa o método da programação linear seqüencial (PLS) para resolver o problema de otimização, para isso necessita da informação dos gradientes da função objetivo, ou seja, ele possui uma rotina que monta o vetor da derivada da função objetivo em relação a densidade (variável do problema) de cada elemento do domínio. Esse vetor representa os coeficientes da função objetivo linearizada para a PL. A rotina de PL exige também a informação sobre as restrições do problema, e essas informações estão contidas em outros vetores montados pelas diversas rotinas

do software.

A rotina de programação linear (SIMPLX ou DSPLP) recebe esses dados e, através de um processo iterativo, obtém os valores ótimos das variáveis do problema que maximiza a função objetivo para o subproblema. Lembrando que, no presente trabalho, as variáveis de projeto do problema de otimização são as densidades relativas (ρ) dos elementos da malha de elementos finitos, gerada para o domínio inicial. Na primeira iteração, o usuário informa à rotina de PL quaisquer valores para as variáveis do problema, os quais servem de ponto de partida para o processo de busca dos valores ótimos das variáveis. O software utiliza automaticamente o último valor ótimo obtido como valor inicial para as iterações seguintes.

A cada iteração, a matriz de rigidez global $\mathbf{K}$, e os cálculos do valor da função objetivo e sua derivada são refeitos, pois os valores ótimos das variáveis do problema são modificados, ou seja, a cada iteração o algoritmo se desloca sequencialmente na função objetivo e restrições, em pequenos trechos lineares limitados por limites móveis aplicados às variáveis do problema. Após algumas iterações, o processo pela busca do máximo da função objetivo é terminado quando há convergência das iterações, que pode ser verificada quando o valor da função objetivo não apresenta mais variações. Em benefício da rápida convergência das iterações, os limites móveis podem ser alterados, conforme o processo iterativo se aproxima do valor ótimo da função, como já comentado no item 4.3.1. Inicialmente, atribui-se um limite móvel de 15% superior e inferior ao valor da densidade de cada elemento.

CAPÍTULO 5: Resultados

5.1. Introdução

Neste capítulo são apresentados vários exemplos que ilustram a implementação e potencialidade do software de otimização topológica desenvolvido neste trabalho (cujo nome daqui em diante será OPTMEC). A sequência de resultados apresentados neste capítulo também tem o objetivo de mostrar ao leitor as dificuldades encontradas e a evolução do software do início ao fim deste trabalho. São mostrados alguns resultados obtidos com uma versão básica do software que somente permite obter a topologia ótima de um mecanismo flexível a partir de uma baixa discretização do domínio estendido fixo de projeto (ou simplesmente domínio inicial). Outros resultados usando uma versão mais completa do software também são mostrados. Essa versão mais completa permite obter topologias ótimas bem definidas, manipular domínios iniciais com alta discretização, trabalhar com elementos finitos irregulares e evitar a formação do “tabuleiro de xadrez”. Neste trabalho considera-se, por convenção, que um domínio inicial tem baixa discretização quando a sua respectiva malha do modelo de MEF tem uma quantidade abaixo de 1000 elementos finitos e, conseqüentemente, qualquer quantidade acima desse valor é considerada como alta discretização. Características como formação e eliminação do “tabuleiro de xadrez”, não unicidade da solução, redução das “escalas de cinza” e interpretação dos resultados obtidos serão ilustradas e analisadas neste capítulo. Além disso, verificaremos através de ilustrações o que acontece quando variamos alguns parâmetros da formulação do problema de otimização aplicado ao projeto de mecanismos flexíveis, tais como o coeficiente de atribuição de peso w , a restrição de volume de material (V^*), a discretização do domínio inicial de projeto e o fator p de penalidade das densidades intermediárias.

Algumas das configurações geométricas para o domínio inicial de projeto, apresentados neste trabalho, foram selecionadas da literatura para fins de comparação

e algumas outras configurações são sugestões do próprio autor para verificar a potencialidade do software. Para que não haja dúvida, quando a configuração geométrica do domínio inicial é uma sugestão da literatura a referência é citada, caso contrário trata-se de uma configuração sugerida pelo autor. A escala das dimensões dessas configurações geométricas é na ordem de milímetros (mm), sendo que a espessura é unitária e igual para todos os exemplos apresentados aqui. O módulo de elasticidade (E_0) e a razão de Poisson (ν) do material base utilizado para Otimização Topológica dos mecanismos flexíveis, mostrados neste trabalho, são iguais a 210Gpa (210.000 N/mm²) e 0,3 respectivamente. O fator de penalidade p para todos os resultados apresentados neste trabalho é igual a 3. É considerada em todos os resultados a formulação do MEF para elementos finitos isoparamétricos quadriláteros de 4 nós, baseado no estado plano de tensão. Demais informações encontram-se descritas na introdução local de cada exemplo e caso ocorra algum resultado obtido com valores diferentes dos apontados aqui, será observado no local.

5.2. Resultados preliminares

Neste item verificamos através do OPTMEC o que acontece quando variamos os seguintes parâmetros do MOT aplicado aos projetos de mecanismos flexíveis: a restrição de volume, o coeficiente w e a discretização do domínio inicial.

Assim, o primeiro exemplo considera o projeto de um mecanismo flexível tipo “garra” e ilustra as topologias ótimas obtidas para quatro casos diferentes de restrição do volume de material (V^*) do mecanismo. O segundo exemplo descreve um projeto de um mecanismo flexível tipo “acionador”, no qual são obtidas topologias ótimas para três diferentes valores do coeficiente w da Eq.(3.27). E no último exemplo são observados os resultados obtidos em três diferentes malhas de elementos finitos, geradas para o mesmo domínio inicial e mesmas condições iniciais de carregamento, restrições e geometria.

Observa-se que, para obtenção destes resultados foi utilizada uma versão

básica do software, programada com uma rotina que utiliza o método Simplex (SIMPLX) para a otimização das variáveis de projeto. O SIMPLX é um algoritmo eficiente para a programação matemática de problemas de otimização, porém torna-se inviável computacionalmente a medida que aumentamos a quantidade de variáveis de projeto, ou seja, quando aumentamos a malha de elementos finitos associada ao domínio inicial de projeto. Por exemplo, para obter a topologia ótima de um mecanismo flexível cujo domínio inicial foi discretizado numa malha de 450 elementos finitos, utilizando um microcomputador Pentium III – 500MHz com 256 Mb de RAM, essa versão do software precisou de aproximadamente 1 minuto/iteração. Se discretizarmos esse mesmo domínio numa malha com 800 elementos, esse tempo sobe para aproximadamente 4 minutos/iteração. Então, sabendo-se que a convergência da solução acontece após dezenas de iterações, conclui-se que o tempo computacional, para obter a topologia ótima do mecanismo com esta versão básica, é muito grande.

A utilização da versão básica do software, não atrapalha em nada o propósito deste item, que é observar o comportamento da solução conforme variamos a restrição de volume, o coeficiente w e a discretização do domínio inicial. A conclusão obtida aqui, é válida para discretizações maiores do domínio inicial de projeto. A intenção de se utilizar essa versão é mostrar ao leitor que é possível utilizar o método Simplex como otimizador na programação linear seqüencial do MOT, porém sujeito à penalidade de se ter um longo tempo de processamento a medida que aumentamos a quantidade de variáveis de projeto.

5.2.1. Exemplo 1 – variação da restrição de volume

A Figura 5.1 mostra o domínio inicial de projeto do mecanismo flexível (NISHIWAKI et al., 1998), onde devido a simetria do mecanismo (em relação a direção horizontal) somente metade do domínio é apresentada. Os pontos de aplicação da força, do deslocamento desejado e das restrições de deslocamentos (nós fixos) também são mostrados na mesma figura. Esse domínio é discretizado numa

malha com **400 elementos** finitos isoparamétricos **quadrados de 4 nós**, sendo que o seu lado esquerdo é todo restringido, ou seja, todos os nós desta região não poderão se deslocar em nenhuma das duas direções (horizontal e vertical). Já o lado inferior do domínio, terá todos nós restringidos somente na direção vertical, isso para simular a condição de simetria.

Figura 5.1 – Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.

O mecanismo deve deslocar o ponto B na direção indicada para o deslocamento desejado, quando F_A for aplicado no ponto A, e ser capaz de segurar um objeto mediante a aplicação contínua desta força. O valor da força aplicada F_A e da força fictícia (aplicada no ponto B) são iguais a 1. A força fictícia é aplicada na mesma direção do deslocamento desejado e não é representada na Fig. 5.1, pois é um recurso utilizado exclusivamente pelo OPTMEC para calcular as energias envolvidas no sistema (veja item 3.2 do capítulo 3). O coeficiente w da Eq. (3.27) (função objetivo do problema de otimização) é igual a 0,5. O volume de material é restringido em 10%, 15%, 20% e 30% do volume inicial (considerando o domínio totalmente sólido) e o valor inicial para as densidades é 0,15 (“chute” inicial). Observa-se que a rigor, valores diferentes para o “chute” inicial (ponto de partida para a rotina de PL) geram soluções diferentes nos problemas de OT, porém, após alguns testes, verificamos que o OPTMEC não é tão sensível à variação do “chute” inicial. Apesar disto, esta observação deve servir como um alerta para futuras implementações do MOT em outros trabalhos.

A seguir, são ilustradas na Fig. 5.2 as configurações de topologias ótimas obtidas, através do OPTMEC, para os quatro diferentes casos de restrição no volume de material do mecanismo flexível.

Figura 5.2 – Efeito da restrição de volume de material na OT do mecanismo flexível.

Observando a Fig. 5.2, pode-se concluir que a topologia do mecanismo flexível se mantém em todos os casos de restrição de volume de material, ou seja, a distribuição de material no interior do domínio inicial converge sempre para a mesma região, porém é claro que a configuração ótima em cada caso é alterada conforme há mais ou menos restrição no volume de material. Nota-se que conforme é permitido mais material no interior do domínio (valores de V^* do menor para o maior), há maior concentração de material próximo ao ponto B para garantir rigidez suficiente para que o mecanismo suporte a força aplicada no ponto A, enquanto segura um objeto na região do ponto B. Por outro lado a região inicialmente engastada (lado esquerdo do domínio inicial) exige pouca quantidade de material, pois essa região proverá a flexibilidade necessária para o movimento do mecanismo. Desta forma, as conclusões obtidas neste exemplo conferem com as obtidas em

NISHIWAKI et al. (1998).

Pode-se verificar através dos gráficos de convergência, mostrado na Fig. 5.3, que a energia mútua entre o ponto de aplicação da força F_A e o ponto B é maximizada, o que significa maximizar o deslocamento neste ponto. Já a energia de deformação (relacionada com a flexibilidade média) no ponto B é minimizada, significando que a rigidez foi maximizada, nas condições iniciais impostas no projeto. Máximo deslocamento requerido do ponto B aliado à máxima rigidez no mesmo ponto são as características necessárias para que o mecanismo flexível desempenhe bem a sua função.

Figura 5.3 – Gráficos de convergência ($V^* = 30\%$).

5.2.2. Exemplo 2 – variação do coeficiente w

A Figura 5.4 deste exemplo mostra o domínio inicial de projeto do mecanismo flexível (NISHIWAKI et al, 1998). Somente metade do domínio inicial é desenhado, devido a simetria do mecanismo (em relação a direção horizontal). A força aplicada (F_A), o deslocamento desejado e as restrições de deslocamentos são mostrados na mesma figura. O domínio é discretizado numa malha com **450 elementos** finitos isoparamétricos **quadrados de 4 nós**, sendo que o canto superior esquerdo é restringido, ou seja, alguns nós dessa região não poderão se deslocar em nenhuma das duas direções (horizontal e vertical). Já o lado inferior do domínio, terá todos nós restringidos somente na direção vertical, isso para simular a condição de simetria.

Figura 5.4 – Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.

O mecanismo deve deslocar o ponto B na direção indicada para o deslocamento desejado quando F_A for aplicada no ponto A, ou seja, o movimento do ponto B acontecerá no sentido inverso da força aplicada. O valor da força aplicada F_A e da força fictícia são iguais a 1. A força fictícia aplicada no ponto B, na mesma direção do deslocamento desejado, não é representada na Fig. 5.4 pelo mesmo motivo explicado no exemplo anterior. O volume de material V^* é restringido em 20% do volume inicial (considerando o domínio totalmente sólido) e o valor inicial

para as densidades é 0,15.

A Figura 5.5 ilustra as configurações de topologia ótima obtidas, através do OPTMEC, para valores do coeficiente w da função objetivo iguais a 0,25; 0,5 e 0,95.

a) topologia ótima para $w = 0,25$

b) topologia ótima para $w = 0,5$

c) topologia ótima para $w = 0,95$

Figura 5.5 – Efeito da alteração do coeficiente w na OT do mecanismo flexível.

Pode-se verificar através da Fig. 5.5 uma mudança perceptível na topologia do mecanismo conforme o valor de w é alterado, ou seja, a distribuição de material em cada caso sofre uma pequena modificação. Isso pode ser explicado devido ao fato de w ser um coeficiente de atribuição de peso que permite flexibilizar a função objetivo, para que o mecanismo flexível tenha mais flexibilidade e menos rigidez ou vice-versa. Quando diminuimos o valor de w da Eq. (3.27) percebemos que há uma concentração maior de material na região do ponto B, o que significa que a flexibilidade entre os pontos A e B (energia mútua) diminui, enquanto a rigidez no ponto B aumenta. No entanto, conforme aumentamos o valor de w da Eq. (3.23) notamos que a concentração de material no ponto B diminui, o que indica o aumento da flexibilidade do mecanismo e a diminuição da rigidez no ponto B. É claro que para valores de w próximo de zero, o problema de otimização do mecanismo flexível se torna semelhante aos problemas de otimização onde a função objetivo é maximizar a rigidez da estrutura (SUZUKI; KIKUCHI, 1991). Já para valores de w próximos de 1, tornam a configuração da topologia ótima quase indefinida, pois as descontinuidades (pontos de densidades quase nulas) que ocorrem na estrutura do mecanismo, devido a alta flexibilidade, faz com o mecanismo flexível seja inviável do ponto de vista prático.

A Figura 5.6 mostram os gráficos de convergência para a topologia ótima obtida com w igual a 0,5. Pode-se verificar através dos gráficos de convergência, que a energia mútua entre o ponto de aplicação da força F_A e o ponto B é maximizada, o que significa maximizar o deslocamento neste ponto. Já a flexibilidade média no ponto B é minimizada, significando que a rigidez foi maximizada, nas condições iniciais impostas no projeto.

Figura 5.6 – Gráficos de convergência ($w = 0,5$).

5.2.3. Exemplo 3 – variação na discretização do domínio inicial

Neste exemplo verificamos a dependência do problema de otimização com relação ao tamanho da malha de elementos finitos utilizada. O domínio inicial de projeto do mecanismo flexível, o ponto de aplicação da força F_A , o deslocamento desejado e as restrições de deslocamentos são mostrados na Fig. 5.7 (NISHIWAKI et al., 1998). A configuração geométrica deste exemplo é semelhante a de uma viga engastada, mas a intenção é tratar essa configuração como um possível domínio inicial para obtenção de um mecanismo flexível através do OPTMEC (software de Otimização Topológica desenvolvido neste trabalho).

Figura 5.7 – Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.

O mecanismo requerido deve deslocar o ponto B na direção indicada para o deslocamento desejado quando F_A for aplicado no canto superior direito do domínio indicado pelo ponto A. O valor da força aplicada F_A e da força fictícia são iguais a 1. A força fictícia aplicada no ponto B, na mesma direção do deslocamento desejado, não é representada na Fig. 5.7 pelo mesmo motivo explicado no exemplo do item 5.2.1. O volume de material é restringido em 20% do volume inicial (considerando o domínio totalmente sólido) e o valor inicial para as densidades é 0,15. O coeficiente w da função objetivo é igual a 0,5.

São utilizadas três malhas diferentes para a discretização do domínio inicial de projeto, sendo cada uma delas composta por **450, 800 e 1152 elementos** finitos isoparamétricos **quadrados de 4 nós**, respectivamente. A Fig. 5.8 ilustra as configurações de topologia ótima obtidas, através do OPTMEC, para as três malhas.

a) configuração ótima para a malha com 450 elementos

b) configuração ótima para a malha com 800 elementos

c) configuração ótima para a malha com 1152 elementos

Figura 5.8 – Configurações de topologia ótima para malhas diferentes.

Através das configurações mostradas na Fig. 5.8 podemos notar que, para este caso, a configuração de topologia ótima é semelhante nos três casos e que, obviamente, o contorno do mecanismo flexível é mais bem definido no último caso de malha (Fig. 5.8c). No presente exemplo, podemos observar que a medida que aumentamos a quantidade de elementos finitos, os reforços produzidos no interior da topologia obtida são mais bem definidos, conseqüentemente, induzem a uma melhor descrição da geometria do mecanismo flexível resultante. Porém, notamos também que a medida que aumentamos a discretização há a formação do “tabuleiro de xadrez” (Fig. 5.8b e 5.8c), aumentando a complexidade da topologia ótima. O “tabuleiro de xadrez” é um fenômeno que aparece devido a formulação do elemento finito utilizado (quadrilátero de 4 nós), que faz a interpolação do campo de deslocamentos utilizando um polinômio de baixa ordem (bilinear), considerada “pobre” pois não representa com precisão o comportamento ao cisalhamento do domínio discretizado (como já discutido extensivamente no capítulo 2). Portanto, através deste exemplo podemos concluir que, assim como em outras áreas de projeto, o MOT aplicado ao projeto de mecanismos flexíveis é sensível ao aumento da discretização do domínio inicial (BENDSØE, 1995, NISHIWAKI et al., 1998). Uma solução para tornar o método independente da discretização do domínio inicial é a utilização de filtros espaciais, como já descrito no capítulo 4 e que será exemplificado no próximo item deste capítulo.

A Fig. 5.9 mostram os gráficos de convergência para uma das malhas (800 elementos). Observando os gráficos podemos concluir que a otimização ocorreu sob os mesmos aspectos observados nos exemplos anteriores, ou seja, a função objetivo foi maximizada, o volume convergiu para o valor da restrição, a energia mútua foi maximizada, enquanto a flexibilidade média foi minimizada. Desta forma, para não se tornar repetitivo, nos próximos resultados não serão incluídos os gráficos de convergência.

Figura 5.9 – Gráficos de convergência (malha com 800 elementos).

5.3. Formação e eliminação do “tabuleiro de xadrez”

Como vimos anteriormente, o aumento da discretização do domínio inicial de projeto permite distinguir melhor o contorno da topologia ótima o mecanismo flexível, além de descrever melhor o campo de deslocamentos e conseqüentemente o campo de deformações e tensões. Porém, também vimos que conforme aumentamos a discretização do domínio inicial, a formação do “tabuleiro de xadrez” se torna evidente. Além disso, a versão básica do OPTMEC se torna inviável, computacionalmente, para lidar com uma grande quantidade de variáveis de projeto (acima de 1000). Portanto, neste item, será exemplificado a evolução da versão

básica do OPTMEC para torná-lo capaz de lidar com altas discretizações do domínio inicial e evitar a formação do “tabuleiro de xadrez”.

5.3.1. Evolução da versão básica do OPTMEC para lidar com altas discretizações

A versão básica do OPTMEC utiliza, satisfatoriamente, a rotina SIMPLX para a programação linear de otimização das variáveis de projeto para baixas discretizações do domínio inicial de projeto. Para aprimorar ainda mais esse aspecto, a rotina SIMPLX foi substituída por uma rotina conhecida por DSPLP. A rotina DSPLP é um conjunto de rotinas, programadas em linguagem Fortran por Hanson e Hiebert do Sandia National Laboratory (EUA), que usa o método de Kamarkar (HAFTKA, 1990) para resolução de problemas de programação linear que envolvem milhares de variáveis e tem como vantagem a robustez e rapidez da solução. A rotina DSPLP foi compilada juntamente com o OPTMEC, escrito na linguagem C. No campo da programação, a interface entre as linguagens C e Fortran é totalmente possível, para isso devemos fazer a ligação dos arquivos *.obj* gerados pelos compiladores de cada uma das linguagens (C e Fortran). É claro que também é necessário o conhecimento de alguns aspectos básicos pertinentes a cada linguagem e seu compilador, por exemplo como cada uma delas trata os dados de entrada e saída, se fazem a passagem de parâmetros por valor ou por referência, a convenção para nomes adotada por cada uma delas, a sequência de parâmetros na pilha etc. Maiores detalhes sobre estes aspectos podem ser encontrados em ARAKAKI et al. (1990).

Após, adaptado perfeitamente a rotina DSPLP no código fonte do OPTMEC, passamos a obter resultados de topologias ótimas a partir de malhas de elementos finitos muito mais refinadas que anteriormente, ou seja, o software agora pode “rodar” com um domínio discretizado em milhares de elementos finitos. Desde então, é notório o ganho em produtividade desta nova versão do OPTMEC, o que o torna ainda mais profissional para aplicação no projeto de mecanismos flexíveis.

Além de tornar possível trabalharmos com altas discretizações do domínio

inicial, uma outra grande vantagem alcançada com a substituição da rotina de otimização é que, considerando um modelo com o mesmo número de elementos finitos, essa nova versão do OPTMEC (com a rotina DSPLP) resolve a programação linear num tempo bem menor em relação a configuração anterior (versão básica do OPTMEC). Por exemplo, para obter a topologia ótima de um mecanismo flexível, cujo domínio inicial é discretizado numa malha de 800 elementos finitos (de 4 nós), utilizando um microcomputador Pentium III – 500MHz com 256 Mb de RAM, a versão anterior do OPTMEC (que usa a rotina SIMPLX) precisou de aproximadamente 240 segundos/iteração enquanto que, para a mesma malha de elementos finitos, a nova versão (que usa a rotina DSPLP) precisa somente de 6 segundos/iteração (40 vezes menor).

Para ilustrar a aplicação desta nova versão do OPTMEC, a seguir são mostradas as novas configurações de topologias ótimas para os exemplos descritos no item 5.2 deste capítulo. O primeiro resultado (Fig. 5.10) corresponde ao domínio inicial apresentado no exemplo do item 5.2.1 (Fig. 5.1), considerando a restrição de volume (V^*) igual a 20%. Já o segundo resultado (Fig. 5.11) corresponde ao domínio inicial apresentado no exemplo do item 5.2.2 (Fig. 5.4), para o coeficiente w igual a 0,5. E o último resultado (Fig. 5.12) corresponde ao domínio inicial apresentado no exemplo do item 5.2.3 (Fig. 5.7), cuja discretização foi aumentada mais ainda. No primeiro resultado (Fig. 5.10), o domínio inicial de projeto foi discretizado numa malha de **2304 elementos** e nos dois últimos resultados (Fig. 5.11 e 5.12) o domínio inicial de projeto de cada exemplo foi discretizado numa malha de **2592 elementos**. Em todos os casos foram utilizados elementos quadriláteros isoparamétricos de 4 nós e os demais parâmetros (módulo de elasticidade, razão de Poisson, dimensões etc) permaneceram os mesmos descritos no item 5.2. Observe que em todos os resultados (Fig. 5.10 a 5.12) há a formação do “tabuleiro de xadrez”, cuja eliminação será exemplificada na seqüência.

Figura 5.10 – Configuração de topologia ótima para o exemplo do item 5.2.1, usando uma malha de 2304 elementos ($V^*=20\%$).

Figura 5.11 – Configuração de topologia ótima para o exemplo do item 5.2.2, usando uma malha de 2592 elementos ($w=0,5$).

Figura 5.12 – Configuração de topologia ótima para o exemplo do item 5.2.3, usando uma malha de 2592 elementos.

5.3.2. Exemplos - eliminação do “tabuleiro de xadrez” no OPTMEC

Outra melhoria bastante significativa no OPTMEC foi a implementação da rotina com um filtro espacial que evita a formação do “tabuleiro de xadrez”. Conforme visto no capítulo 4, o filtro suaviza a distribuição espacial das variáveis de projeto (a densidade de cada elemento da malha do MEF) ao longo do domínio inicial de projeto. O filtro utilizado neste trabalho é espacial, o que minimiza a dependência do resultado final ao refino da malha de elementos finitos e permite um controle da complexidade da topologia, ou seja, é possível a obtenção de topologias mais simples com a aplicação desse filtro.

O parâmetro de controle do filtro é o raio de abrangência e quanto maior for o raio, maior será a suavização da distribuição de densidades no interior do domínio inicial. Porém, não devemos usar um valor nem muito pequeno nem muito grande, senão corremos o risco de voltarmos ao problema da formação de “tabuleiro de xadrez” (se for usado raios muito pequenos) ou gerar uma quantidade muito grande de áreas com densidades intermediárias (se for usado raios muito grandes). Neste trabalho, após várias aplicações do OPTMEC com filtro, concluímos que sempre obtemos bons resultados usando um valor de raio que abrange os vizinhos comuns de arestas e cantos do elemento central (veja Fig. 4.3 do capítulo 4), o que corresponde a oito elementos vizinhos j para um determinado elemento central i na Eq. 4.32. Mais adiante ilustraremos esta conclusão.

Para exemplificar a nova versão do OPTMEC com filtro, aplicamos o software nos resultados apresentados no item anterior (Fig. 5.10 a 5.12) e obtemos as configurações de topologias ótimas mostradas nas Fig. 5.13 a 5.15.

Figura 5.13 – Topologia ótima obtida com a utilização do filtro, para o domínio inicial do item 5.2.1 (2304 elementos; $R_{\max} = 1,5$).

Figura 5.14 – Topologia ótima obtida com a utilização do filtro, para o domínio inicial do item 5.2.2 (2592 elementos; $R_{\max} = 1,5$).

Figura 5.15 – Topologia ótima obtida com a utilização do filtro, para o domínio inicial do item 5.2.3 (2592 elementos; $R_{\max} = 1,5$).

5.3.3 Redução das “escalas de cinza”

Comparando os resultados apresentados nas Fig. 5.10 a 5.12 (sem aplicação do filtro) com os resultados mostrados nas Fig. 5.13 a 5.15 (com aplicação do filtro), podemos perceber através das configurações de topologias ótimas apresentadas que ao aplicarmos o filtro espacial eliminamos o fenômeno do “tabuleiro de xadrez”, ou seja, a topologia ótima obtida é mais bem definida, isenta de vários reforços internos e pode ser interpretada facilmente.

Porém, observa-se um aumento da formação das “escalas de cinza” que, nos resultados apresentados nas Fig. 5.13 a 5.15, formam uma transição suave entre material sólido (região escura da topologia) e vazio (região clara da topologia), em torno do contorno do mecanismo. Isso ocorre, pois para uma distribuição mais uniforme de densidades ao longo do domínio, o filtro faz com que o método produza mais densidades com valores intermediários para definir a topologia ótima. Conceitualmente a solução ótima global é uma topologia que tende conter uma quantidade excessiva de “escalas de cinza”, porém do ponto de vista da engenharia, uma solução deste tipo é impraticável, pois seria inviável economicamente ou quase impossível a fabricação de um mecanismo com essa configuração.

A aplicação do filtro permite ao método buscar a ótima solução global, porém o fator p (Eq. 2.5 do capítulo 2) penaliza o excesso de densidades intermediárias, ou seja, um tende a aumentar as “escalas de cinza” (filtro) enquanto o outro tende a reduzir (fator p). Assim, o resultado é uma topologia ótima que apesar de ser mais bem definida, em relação aos resultados sem o filtro, contém uma quantidade considerável de “escalas de cinza” concentradas em torno do contorno. Uma solução bastante interessante para limpar essas “escalas de cinzas” é, após obter a topologia final, desligar o filtro e deixar o método prosseguir por mais algumas iterações (CARDOSO, 2000). Quando desligamos o filtro, a transição entre material sólido e materiais intermediários no interior do domínio inicial é mais brusca devido à penalidade imposta aos valores de densidade intermediárias ($p=3$). Então a lógica é que, após algumas iterações penalizando as densidades intermediárias sem o filtro, o método elimina a maioria das “escalas de cinza” remanescentes. O desligamento do filtro, feito dessa forma, não compromete o resultado, entretanto este artifício deve

ser feito de maneira que não ocorra novamente a formação do “tabuleiro de xadrez”, ou seja, depois de desligado o filtro devemos ter cuidado com o excesso de iterações adicionais. Neste trabalho, obtivemos bons resultados usando um padrão de 8 iterações após o desligamento do filtro, para todos os resultados apresentados aqui.

A seguir, ilustramos a aplicação dessa metodologia para os resultados anteriormente mostrados nas Fig. 5.13 a 5.15. Logo após, são ilustrados outros exemplos que comprovam a eficácia desta metodologia.

Figura 5.16 – Configuração final da topologia para o domínio inicial do item 5.2.1.

Figura 5.17 – Configuração final da topologia para o domínio inicial do item 5.2.2.

Figura 5.18 – Configuração final da topologia para o domínio inicial do item 5.2.3.

Como observado nas Fig. 5.16 a 5.18, agora as topologias ótimas são bem definidas, sem a presença de “tabuleiro de xadrez” e com uma quantidade ínfima de “escalas de cinza”. Em algumas regiões do mecanismo flexível, essas “escalas de cinza” formam uma configuração semelhante a “rótulas”, as quais são aceitáveis desde que sejam interpretadas corretamente, para que o mecanismo flexível tenha o desempenho esperado. A seguir é ilustrado outro resultado em que a formação dessas “rótulas” é evidente.

A Figura 5.19 mostra o domínio inicial de projeto e os pontos de aplicação de força e de restrições no mecanismo flexível tipo “atuador” (SILVA et al., 1999) onde devido a simetria do mecanismo (em relação às direções horizontal e vertical) somente um quarto do domínio é apresentado. Os pontos de aplicação da força, do deslocamento desejado e das restrições de deslocamentos (nós fixos) também são mostrados na mesma figura. Esse domínio é discretizado numa malha com **2450 elementos** finitos, sendo que o lado inferior do domínio terá todos os nós restringidos somente na direção vertical e os nós do lado esquerdo, somente serão restringidos na direção horizontal.

Figura 5.19 – Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.

Neste caso, o mecanismo deve deslocar o ponto B na direção indicada para o deslocamento desejado, quando F_A for aplicado no ponto A. O valor da força aplicada F_A e da força fictícia (aplicada no ponto B) são iguais a 1. A força fictícia é aplicada na mesma direção do deslocamento desejado. O volume de material é restringido em 25% do volume inicial (considerando o domínio totalmente sólido). O coeficiente w da função objetivo é igual a 0,5 e o valor inicial para as densidades é 0,25.

As Fig. 5.20 a 5.22 mostram, inicialmente, os resultados obtidos com e sem a utilização do filtro espacial e, em seguida, com o desligamento do filtro nas últimas iterações.

Figura 5.20 – Topologia ótima obtida sem a utilização do filtro espacial.

Figura 5.21 – Topologia ótima obtida com a utilização do filtro espacial ($R_{\max} = 1,0$).

Figura 5.22 – Configura final da topologia ótima obtida com o desligamento do filtro nas últimas iterações.

Conforme já vimos, o filtro permite a formação das “escalas de cinza” para definir uma distribuição suave de densidades ao longo do domínio. Este efeito é ampliado conforme aumentamos o raio de abrangência do filtro, pois mais elementos vizinhos j são usados para definir a densidade do elemento central i (veja Fig. 4.3 do capítulo 4). A Fig. 5.23 ilustra o efeito da variação do tamanho do raio de abrangência do filtro para o domínio inicial apresentado na Fig. 5.19. Nota-se que a

topologia ótima é bem definida quando usado um raio que abrange oito elementos vizinhos em torno do elemento central, o que corresponde a usar somente os elementos que estão encostados nas arestas e nos cantos do elemento central, como já havia concluído no item 5.3.2.

a) raio = 1,0 (8 elementos vizinhos)

b) raio = 2,0 (24 elementos vizinhos)

a) raio = 3,0 (48 elementos vizinhos)

Figura 5.23 – Efeito da alteração do tamanho do raio de abrangência do filtro nos resultados.

5.4. Efeito do fator p de penalidade das “escalas de cinza”

Como visto no capítulo 2, o fator p da Eq. 2.5 penaliza os valores intermediários das variáveis de projeto (densidades) para evitar o excesso de “escalas de cinza”. Assim, o objetivo deste item é ilustrar o comportamento dos resultados (topologias ótimas) quando modificamos o fator p na solução do problema de otimização topológica aplicado ao projeto de mecanismos flexíveis. Neste caso, usaremos o domínio inicial apresentado no exemplo do item 5.2.3 (Fig. 5.7), discretizado em 2592 elementos finitos e mantendo-se as condições originais (carregamentos, fixações, material, restrição de volume etc). A Fig. 5.24 mostra as configurações obtidas, usando p igual a 1,0 – 1,5 – 2,0 – 4,0 – 5,0 e 9,0. Valores de p menor que um são matematicamente possíveis na Eq. 2.5, porém não são convenientes pois implicaria em obter um domínio composto por materiais com propriedades muito aquém da realidade, como por exemplo um material com baixa densidade e altíssima rigidez.

Figura 5.24 – Configurações de topologia ótimas obtidas através da variação do p .

Podemos perceber claramente, através da Fig. 5.24, que para um valor unitário de p houve a formação de grande quantidade de “escalas de cinza” e a medida que aumentamos o valor de p elas são reduzidas ou eliminadas. Entretanto, elevados valores de p implica em o problema retornar ao caso da formação de “tabuleiro de xadrez” ($p=9,0$ na Fig. 5.24), o que é indesejável. O valor de p também impacta na característica de ótimo da solução do problema, pois a medida que ele reduz ou amplia a formação das “escalas de cinza”, modifica a natureza da relaxação do problema, sendo que para valores elevados de p o problema de otimização, relaxado através da Eq. (2.5), se aproxima bastante do problema discreto (veja item 2.4.2. do capítulo 2) e, conseqüentemente, não permite a obtenção da solução devido às instabilidades numéricas.

Desta forma, devemos utilizar um valor para p que seja um ponto de equilíbrio, que permita encontrar uma topologia ótima bem definida e com a mínima quantidade de “escalas de cinza” possível. A escolha do valor de p é um assunto que ainda carece ser mais explorado nessa área de pesquisa. Na literatura não encontramos nenhum aprofundamento teórico sobre o assunto, a não ser o trabalho de BENDSØE & SIGMUND (1999) que traz uma discussão um pouco mais detalhada, como visto no item 2.5 do capítulo 2. Uma sugestão bastante interessante, encontrada na literatura (ROZVANY, 1995), é iniciar o processo de otimização utilizando o fator de penalidade p igual a 1 (configuração que garante a unicidade da solução do problema) e, após encontrado a solução ótima nessa configuração, aumentar gradualmente a penalidade dos valores intermediários das variáveis de projeto (densidades) até obtenção de uma solução ótima local que se aproxime bastante da solução ótima global. Este artifício é conhecido como método da continuação e permite obter topologias bem definidas. Nesse trabalho não é utilizado o método da continuação, porém segue-se a proposta de BENDSØE & SIGMUND (1999) que se baseiam nos limites de Hashin-Shtrikman para escolha do valor do fator de penalidade p (veja item 2.5 do capítulo 2).

5.5. Outros resultados

Os resultados apresentados até aqui conferem com os resultados contidos na literatura, o que atesta o OPTMEC para aplicação do MOT para o projeto de mecanismos flexíveis. Agora, conhecendo-se a funcionalidade do OPTMEC, apresentamos a seguir uma série de exemplos, cujo objetivo é mostrar a potencialidade do software para aplicação em projetos dos mais variados tipos de mecanismos flexíveis. Inicialmente veremos a aplicação para obtenção de mecanismos a partir de um domínio inicial de projeto com geometria irregular, depois para mecanismos tipo “garras”, “pinça” e “atuadores”. E por último, uma ilustração da aplicação do OPTMEC para obtenção de uma topologia ótima para um alicate.

Em todos os exemplos, o mecanismo deve deslocar um ponto **B** na direção indicada para o deslocamento desejado, quando uma força F_A for aplicada no ponto **A** (conforme ilustrado nas figuras dos respectivos exemplos). O valor da força aplicada F_A e da força fictícia (aplicada no ponto **B**) são iguais a 1. A força fictícia é aplicada na mesma direção do deslocamento desejado e não é representada nas figuras que ilustram os respectivos domínios iniciais, pois é um recurso utilizado exclusivamente pelo software para calcular as energias envolvidas no sistema (veja item 3.2 do capítulo 3). O volume de material é restringido em 25% do volume inicial (considerando o domínio totalmente sólido), o valor inicial para as densidades é 0,15 e o coeficiente w da função objetivo (Eq. 3.27) é igual a 0,5.

5.5.1. Domínio inicial com geometria irregular

Vários trabalhos da literatura lidam com a aplicação do MOT usando domínios iniciais de projeto com a geometria bem regular (quadrados ou retângulos), ou seja, não é comum a aplicação em domínios cuja geometria ofereça uma certa complexidade, como cantos pontiagudos, por exemplo. Provavelmente, isso se deve

ao fato de que, quando trabalhamos com elementos muito irregulares, podem ocorrer problemas numéricos com o Jacobiano do elemento (BATHE, 1996).

A seguir são apresentados três exemplos que ilustram a obtenção de topologias ótimas para o projeto de mecanismos flexíveis, a partir de domínios irregulares.

a) Exemplo 1:

A Fig. 5.25 mostra o domínio inicial de projeto e os pontos de aplicação de força e de restrições de deslocamentos no mecanismo flexível, onde devido a simetria do mecanismo (em relação à direção horizontal) somente metade do domínio é apresentado. O domínio é discretizado numa malha com **3133 elementos** finitos, sendo que o lado inferior do domínio discretizado terá todos os nós restringidos na direção vertical. O mecanismo deve deslocar o ponto B na direção vertical e para cima, quando F_A for aplicado no ponto A. A Fig. 5.26 mostra a configuração da topologia ótima, obtida através do OPTMEC. A Fig. 5.27 ilustra uma verificação, obtida através do ANSYS, da topologia deformada e a confirmação do deslocamento desejado.

Figura 5.25 – Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.

Figura 5.26 – Configurações da topologia ótima.

Figura 5.27 – Configuração deformada da topologia.

b) Exemplo 2:

A Fig. 5.28 mostra o domínio inicial de projeto e os pontos de aplicação da força, do deslocamento desejado e das restrições de deslocamentos. O domínio é discretizado numa malha com **3600 elementos** finitos. O mecanismo deve deslocar o ponto B na direção horizontal e para a esquerda, quando F_A for aplicado no ponto A. A Fig. 5.29 mostra a configuração da topologia ótima, obtida através do OPTMEC. E

a Fig. 5.30 ilustra uma verificação, obtida através do ANSYS, da topologia deformada e novamente a confirmação do deslocamento desejado.

Figura 5.28 – Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.

Figura 5.29 – Configurações da topologia ótima.

Figura 5.30 – Configuração deformada da topologia.

c) Exemplo 3:

A Fig. 5.31 mostra o domínio inicial de projeto e os pontos de aplicação de força e de restrições de deslocamentos no mecanismo flexível, onde devido a simetria do mecanismo (em relação à direção horizontal) somente metade do domínio é apresentado. O domínio é discretizado numa malha com **3375 elementos** finitos, sendo que o lado inferior do domínio discretizado terá todos os nós restringidos na direção vertical. O mecanismo deve deslocar o ponto **B** na direção vertical e para cima, quando F_A for aplicado no ponto **A**. A Fig. 5.32 mostra a configuração da topologia ótima, obtida através do OPTMEC. E a Fig. 5.33 ilustra uma verificação, obtida através do ANSYS, da topologia deformada.

Figura 5.31 – Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.

Figura 5.32 – Configurações da topologia ótima.

Figura 5.33 – Configuração deformada da topologia.

5.5.2. Projeto de mecanismos tipo “garras”

A Figura 5.34 mostra o domínio inicial de projeto do mecanismo flexível (NISHIWAKI et al., 1998), onde devido a simetria do mecanismo (em relação a direção horizontal) somente metade do domínio é apresentado. Os pontos de aplicação da força, do deslocamento desejado e das restrições de deslocamentos também são mostrados na mesma figura. O domínio é discretizado numa malha com **3234 elementos** finitos, sendo que o lado inferior do domínio terá todos nós restringidos na direção vertical.

A Fig. 5.35 ilustra as configurações de topologias ótimas obtidas, através do OPTMEC, para o mecanismo flexível. Na seqüência, a Fig. 5.36 ilustra a verificação, obtida através do ANSYS, da topologia deformada e a confirmação do deslocamento desejado.

Figura 5.34 – Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.

Figura 5.35 – Configuração da topologia ótima.

Figura 5.36 – Configuração deformada da topologia.

Neste trabalho, entende-se como mecanismos tipo “garras” o mecanismo que tem a capacidade de segurar um objeto em uma de suas extremidade, enquanto for aplicada uma força na extremidade oposta. Usando o OPTMEC podemos projetar esse tipo de mecanismo tanto numa macro, como numa micro escala, o que lhe confere a garantia de aplicação em diversos dispositivos de interesse, como os sistemas micro-eletromecânicos, os instrumentos de micro-cirurgias, entre outros.

A seguir usamos o mesmo domínio inicial apresentado na Fig. 5.34, com algumas mudanças nas condições de contorno do modelo de MEF, para obter outro mecanismo tipo “garra” (NISHIWAKI et al., 1998). Neste novo modelo o domínio inicial continua discretizado em 3234 elementos finitos, a fixação do lado inferior do domínio é igual ao modelo anterior e acrescentamos uma restrição no canto superior direito do domínio. O ponto de aplicação da força é modificado e o deslocamento desejado é mantido inalterado, conforme mostrado na Fig. 5.37. A Fig. 5.38 ilustra a configuração da topologia ótima obtida para o mecanismo flexível e a Fig 5.39 mostra uma verificação, obtida através do ANSYS, da topologia deformada.

Figura 5.37 – Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.

Figura 5.38 – Configuração da topologia ótima.

Figura 5.39 – Configuração deformada da topologia.

5.5.3. Projeto de mecanismos tipo “pinças” e “atuadores”

Neste exemplo ilustraremos três outras aplicações do OPTMEC, as quais aqui tratamos como “pinça” e “atuadores”. Na primeira aplicação, o domínio inicial de projeto do mecanismo flexível é mostrado na Fig. 5.40, onde devido a simetria do mecanismo (em relação a direção horizontal) somente metade do domínio é apresentada. Neste caso a aplicação da força F_A unitária é feita em mais de um nó, conforme ilustrado na Fig. 5.40. O deslocamento desejado e as restrições de

deslocamentos também são mostrados na mesma figura. O domínio é discretizado numa malha com **3584 elementos** finitos. O mecanismo deve deslocar o ponto **B** na direção indicada para o deslocamento desejado, enquanto um conjunto de F_A for aplicado no ponto **A**, e ser capaz de segurar um objeto mediante a aplicação contínua deste conjunto de forças. A Fig. 5.41 ilustra a configuração da topologia ótima obtida para o mecanismo flexível e a Fig. 5.42 mostra uma verificação, obtida através do ANSYS, da topologia deformada, confirmando assim o deslocamento desejado.

Figura 5.40 – Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.

Figura 5.41 – Configuração da topologia ótima.

Figura 5.42 – Configuração deformada da topologia.

Na segunda aplicação, o domínio inicial de projeto do mecanismo flexível é mostrado na Fig. 5.43. A aplicação da força F_A , do deslocamento desejado e das restrições de deslocamentos também são mostrados na mesma figura. O domínio é discretizado numa malha com **3425 elementos** finitos. A Fig. 5.44 ilustra a configuração da topologia ótima obtida para o mecanismo flexível e a Fig. 5.45 mostra uma verificação, obtida através do ANSYS, da topologia deformada e a confirmação do deslocamento desejado.

Figura 5.43 – Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.

Figura 5.44 – Configuração da topologia ótima.

Figura 5.45 – Configuração deformada da topologia.

Na terceira aplicação, o domínio inicial de projeto do mecanismo flexível é mostrado na Fig. 5.46. A aplicação da força F_A , do deslocamento desejado e das restrições de deslocamentos também são mostrados na mesma figura. O domínio é discretizado numa malha com **2700 elementos** finitos. A Fig. 5.47 ilustra a configuração da topologia ótima obtida para o mecanismo flexível e a Fig. 5.48 mostra uma verificação, obtida através do ANSYS, da topologia deformada.

Figura 5.46 – Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.

Figura 5.47 – Configuração da topologia ótima.

Figura 5.48 – Configuração deformada da topologia.

5.5.4. Projeto de mecanismos tipo “alicate”

Conforme visto no capítulo 1, uma das principais vantagens dos mecanismos flexíveis é a grande redução da quantidade de componentes necessários para a montagem e funcionamento do mecanismo. Em geral, o mecanismo flexível consiste de uma única peça, que pode ser fabricada em pequenas dimensões. Assim, o objetivo deste exemplo é mostrar que é perfeitamente possível a aplicação do OPTMEC para obtenção da topologia ótima de um mecanismo tipo alicate, similar ao mostrado na Fig. 1.1 do capítulo 1. Todavia, devemos levar em consideração que todo o desenvolvimento teórico feito neste trabalho é baseado na hipótese de ocorrer somente pequenos deslocamentos (regime elástico linear), entretanto sabemos que na prática um mecanismo tipo alicate trabalha com grandes deslocamentos e portanto seria muita pretensão dizer que o mecanismo flexível, mostrado nos resultados deste exemplo, substitui por completo o alicate convencional. Na realidade, pretendemos que o resultado apresentado neste exemplo sirva de ponto de partida para outros trabalhos futuros, que dêem seqüência e complementem este trabalho.

O domínio inicial de projeto para o mecanismo flexível é mostrado na Fig. 5.49 (SIGMUND, 1996), no qual duas forças F_A , de sentidos opostos, são aplicadas no canto superior e inferior direito do domínio, simulando o esforço de aperto produzida pela mão do homem. O deslocamento desejado (fechamento da “boca” do alicate) e as restrições de deslocamentos são mostrados na mesma figura. O domínio é discretizado numa malha com **3290 elementos** finitos. A Figura 5.50 ilustra a configuração de topologia ótima obtida, através do OPTMEC, para o mecanismo flexível. A fim de examinar se o mecanismo atende a condição imposta no projeto, ou seja, obter o fechamento da “boca” do alicate quando as forças F_A são aplicadas, fizemos uma verificação da topologia deformada, através do ANSYS, a qual é ilustrada na Fig. 5.51. É importante mencionar que a distribuição de material no interior do domínio inicial de projeto é tal que o resultado é um mecanismo que não apresenta concentração de tensões interna, conforme ilustrado na Fig. 5.52. O que nos leva a concluir que apesar da aparência frágil do mecanismo obtido, ele pode ter um ciclo de trabalho bastante elevado, sem se fadigar ou se romper facilmente.

Figura 5.49 – Domínio inicial de projeto do mecanismo flexível.

Figura 5.50 – Configuração da topologia ótima.

Figura 5.51 – Configuração deformada da topologia.

Figura 5.52 – Distribuição de tensões mecânicas (Von-Mises).

5.6. Interpretação dos resultados

Obtida a topologia ótima, podemos então interpretar o contorno da geometria final do mecanismo flexível. A interpretação é uma das tarefas que exige muita atenção dentro do processo de obtenção do mecanismo otimizado, pois qualquer falha nessa operação pode comprometer o resultado da otimização. Geralmente, pode ser realizada por meio de processamento de imagem ou simplesmente desenhando o contorno sobre a imagem da topologia usando um CAD (desenho auxiliado por computador).

A interpretação dos resultados da Otimização Topológica não é uma atividade simples, principalmente se for realizada manualmente, pois existem alguns aspectos, como a presença de “escalas de cinza” que, mesmo ocorrendo numa quantidade muito pequena, dificultam a interpretação da topologia. Por exemplo, se desprezarmos as “escalas de cinza” obteremos um mecanismo mais flexível do que o esperado ou se considerarmos essas “escalas de cinza” como material totalmente sólido aumentaremos a rigidez do mecanismo, e assim por diante. O software implementado neste trabalho (OPTMEC) permite gerar, para a configuração de topologia ótima, uma malha de elementos finitos em formato padrão do ANSYS, o que permite a análise e verificação do comportamento da topologia obtida, através do MEF. Porém, não contempla nenhum recurso sofisticado, que permita a interpretação

do contorno da topologia otimizada, de forma automatizada. O que pode se constituir em um tema de interesse para trabalhos futuros. Neste trabalho, a interpretação do contorno das topologias ótimas, obtidas através do OPTMEC, foram realizadas manualmente, desenhando-se o contorno sobre a imagem da topologia usando um CAD (desenho auxiliado por computador). Apesar de grosseira, o uso desta técnica é suficiente no momento.

Para ilustrar, a seguir, são apresentadas as interpretações realizadas para algumas topologias ótimas, mostradas em exemplos anteriores.

5.6.1. Exemplos de algumas interpretações realizadas

A Fig. 5.53 mostra uma interpretação feita para a topologia obtida para o mecanismo do exemplo do item 5.2.1, onde a restrição de volume de material é de 20% (veja Fig. 5.2).

Figura 5.53 – Interpretação da topologia ótima ($V^* = 20\%$).

Para examinar se o comportamento do mecanismo (Fig. 5.53) atende a especificação imposta no projeto, ou seja, obter o deslocamento desejado no ponto B enquanto F_A é aplicada no ponto A, fazemos uma análise numérica no ANSYS. A

Fig. 5.54 mostra o modelo de elementos finitos construído a partir da geometria final do mecanismo. O modelo de elementos finitos utiliza uma malha de **1434 elementos** quadriláteros de 4 nós, em estado plano de tensão. A Fig. 5.55 mostra a configuração deformada do modelo de elementos finitos, bem como a confirmação de que o ponto B se desloca no sentido que se esperava (para baixo).

Figura 5.54 – Modelo de elementos finitos (malha com 1434 elementos).

Figura 5.55 – Configuração deformada do modelo de elementos finitos.

Da mesma forma, apresentada acima, podemos interpretar o contorno da geometria final da topologia obtida no exemplo do item 5.2.2. A Fig. 5.56 mostra

uma interpretação feita para a topologia obtida quando o coeficiente w é igual a 0,5 (veja Fig. 5.5). Para examinar se o comportamento do mecanismo atende a especificação imposta no projeto, fazemos uma simulação final no ANSYS. A Fig. 5.57 mostra o modelo de elementos finitos construído a partir da geometria final do mecanismo. O modelo de elementos finitos utiliza uma malha de **1134 elementos** quadriláteros de 4 nós, em estado plano de tensão. A Fig. 5.58 mostra a configuração deformada da malha, bem como a confirmação de que o ponto B se desloca no sentido que se esperava (contrário ao de F_A). É importante mencionar que a distribuição de material no interior do domínio inicial de projeto é tal que o resultado é um mecanismo que apresenta pouca concentração de tensões interna, isto pode ser verificado através da distribuição de tensões mecânicas de Von Mises, mostrado na Fig. 5.59. Observa-se que a concentração de tensão nesse caso é mínima e resultante de uma interpretação grosseira dos cantos do mecanismo, os quais são potenciais geradores de concentração de tensões. É importante também observar que a configuração do mecanismo flexível obtido aqui é semelhante a configuração obtida por (NISHIWAKI et al., 1998).

Figura 5.56 – Interpretação da topologia ótima ($w = 0,5$).

Figura 5.57 – Modelo de elementos finitos (malha com 1434 elementos).

Figura 5.58 – Configuração deformada do modelo de elementos finitos.

Figura 5.59 – Distribuição de tensões mecânicas (Von-Mises).

5.6.1. Configurações finais

Todas as interpretações apresentadas acima foram feitas de maneira rudimentar, sem nos preocuparmos com os arredondamentos de cantos vivos e suavização de alguns ângulos agudos da geometria do mecanismo flexível. Enfim, essa característica pode ser melhorada, investindo-se mais tempo de modelagem em CAD. E desta maneira, obtermos uma configuração final para o mecanismo com ótimo acabamento e pronta para ser fabricada. A seguir são mostradas as configurações finais da estrutura de alguns mecanismos flexíveis obtidos nos exemplos apresentados neste capítulo. A verificação do comportamento da estrutura desses mecanismos foi feita na prática, através da utilização de protótipos confeccionados em material ABS (densidade = $1,05 \text{ g/cm}^3$) pela técnica de prototipagem rápida.

a) configuração final

b) protótipo

Figura 5.60 – Estrutura final da “garra” modificada obtida a partir da topologia da Fig. 5.38 e respectivo protótipo.

a) configuração final

b) protótipo

Figura 5.61 – Estrutura final da “garra” obtida a partir da topologia da Fig. 5.35 e respectivo protótipo.

a) configuração final

b) protótipo

Figura 5.62 – Estrutura final da “pinça” obtida a partir da topologia da Fig. 5.41 e respectivo protótipo.

a) configuração final

b) protótipo

Figura 5.63 – Estrutura final do “alicate” obtido a partir da topologia da Fig. 5.50 e respectivo protótipo.

CAPÍTULO 6: Conclusão

6.1. Conclusões e Observações

Neste trabalho o método de Otimização Topológica, baseado no método das densidades (SIMP), foi implementado para projetar mecanismos flexíveis. Os mecanismos flexíveis são mecanismos onde o movimento é dado pela flexibilidade da estrutura ao invés da presença de juntas e pinos. Esses mecanismos têm grande aplicação em dispositivos de mecânica de precisão, na área biomédica, e em microeletromecanismos (MEMS). Um software, em linguagem C, foi desenvolvido para processar o procedimento do método e gerar as topologias otimizadas. O software, denominado de OPTMEC, utiliza a Programação Linear Seqüencial (PLS), que incorpora rotinas de programação matemática e método dos elementos finitos (MEF). Uma função multi-objetivo, que considera máxima flexibilidade e mínima rigidez, foi definida para o problema de otimização sujeito a restrição de volume de material da estrutura. Com esta versão do OPTMEC conseguimos obter resultados satisfatórios e que consolidam a sua potencialidade para aplicação no projeto de mecanismos flexíveis. As “escalas de cinza”, o “tabuleiro de xadrez” e a dependência ao aumento da discretização do domínio inicial são problemas muito comuns do método de Otimização Topológica. O OPTMEC foi preparado para permitir o controle do aparecimento das “escalas de cinza” e uma rotina de filtro espacial foi implementada para eliminação da formação do “tabuleiro de xadrez” e tornar o método independente do refino da malha de elementos finitos associada ao domínio inicial de projeto. O OPTMEC conta também com uma rotina que desenvolve a integração numérica da formulação genérica de MEF para o elemento quadrilátero isoparamétrico de 4 nós, em estado plano de tensão. O elemento finito de 4 nós é um dos mais utilizados nos trabalhos da literatura que aplicam o método de Otimização Topológica, sendo o principal motivo o fato de permitir um baixo custo computacional em relação aos elementos de alta ordem. Outra característica

importante que o torna mais eficiente computacionalmente é a utilização da rotina de programação linear DSPLP, que produz a otimização de milhares de variáveis de projeto numa velocidade consideravelmente alta. Desta forma, através do OPTMEC, é perfeitamente possível obter mecanismos flexíveis bidimensionais complexos e com movimentos diversos, que podem ser usados para diferentes aplicações onde o deslocamento de uma dada região do mecanismo, quando submetido a uma força concentrada em outra região, é requerido. Esses mecanismos podem ser fabricados numa mesoescala por técnicas de eletroerosão a fio ou prototipagem rápida, e numa microescala por técnicas de microeletromecanismos (MEMS).

6.2. Considerações Finais e Trabalhos Futuros

Na conclusão deste trabalho de mestrado, espera-se ter contribuído com um software genérico e sistemático que aplique o método de Otimização Topológica para o projeto de mecanismos flexíveis, considerando uma dada aplicação desejada, e que possa ser utilizado por engenheiros ou cientistas envolvidos nesta área de projeto. Além disso, a existência desse software permitirá uma maior divulgação da tecnologia de mecanismos flexíveis no meio acadêmico, principalmente, alunos de graduação e pós-graduação em engenharia. Como extensão, num próximo trabalho, sugere-se o desenvolvimento do software para projetar instrumentos cirúrgicos de laparoscopia e microeletromecanismos (MEMS), onde a aplicação dos mecanismos flexíveis cresce cada vez mais. Outra sugestão é desenvolver uma nova versão do software, implementando conceito de multi-flexibilidade, para projetar mecanismos com múltiplas entradas e múltiplas respostas. Além disso, outras funções objetivo e domínios iniciais podem ser considerados e implementados dependendo da aplicação específica desejada para o mecanismo flexível.

ANEXO A: Forma matricial da formulação do problema de otimização para projeto de mecanismo flexível

O software desenvolvido neste trabalho utiliza a forma matricial (obtida da formulação contínua) para calcular a energia mútua, a energia de deformação e a função objetivo. Então segue abaixo uma breve descrição sobre a forma matricial da formulação do problema de otimização para projeto de mecanismo flexível.

Inicialmente, utilizamos o mesmo procedimento, feito no capítulo 3, para o desenvolvimento da formulação do problema de otimização. Desta maneira, considerando o carregamento superficial $\mathbf{t}^1$ como sendo uma força $\mathbf{f}_A$ aplicada na direção e em um ponto A qualquer do corpo do mecanismo, onde essa força $\mathbf{f}_A$ gera um campo de deslocamentos $\mathbf{u}_A$. Considerando também, o carregamento fictício $\mathbf{t}^2$ como sendo uma força fictícia $\mathbf{f}_B$ aplicada na direção e sentido do deslocamento desejado em um outro ponto (B) qualquer do corpo do mecanismo, onde essa força fictícia gera ao corpo um outro campo de deslocamento $\mathbf{v}_B$. Desta maneira, podemos definir a forma matricial da energia mútua e da flexibilidade média da seguinte maneira:

$$\text{energia mútua} = \mathbf{u}_A^T \mathbf{K} \mathbf{v}_B \quad (1)$$

$$\text{flexibilidade média} = \mathbf{u}_C^T \mathbf{K} \mathbf{u}_C \quad (2)$$

onde $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez global (simétrica) e $\mathbf{u}_C$ é o campo de deslocamentos considerando somente a aplicação da força $\mathbf{f}_C = (-\mathbf{f}_B)$ na direção e sentido contrário ao deslocamento desejado, no ponto B. Lembrando que nesta configuração (aplicação da força contrária a força fictícia) o ponto A deve ser restringido na mesma direção da força $\mathbf{f}_A$, aplicada anteriormente.

Assim a função multi-objetivo para o problema de otimização, na sua forma matricial, é dada por:

$$F = w.\ln(\mathbf{u}_A^T \mathbf{K} \mathbf{v}_B) - (1-w).\ln(\mathbf{u}_C^T \mathbf{K} \mathbf{u}_C) \quad (3)$$

$$0 \leq w \leq 1$$

onde w é coeficiente de atribuição de peso.

Portanto, o problema de otimização de mecanismos flexíveis, considerando as restrições, é formulado da seguinte maneira:

$$\text{Maximizar} \quad F = w.\ln(\mathbf{u}_A^T \mathbf{K} \mathbf{v}_B) - (1-w).\ln(\mathbf{u}_C^T \mathbf{K} \mathbf{u}_C)$$

$$\text{Sujeito à} \quad \mathbf{K} \mathbf{u}_A = \mathbf{f}_A$$

$$\mathbf{K} \mathbf{v}_B = \mathbf{f}_B$$

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_C = \mathbf{f}_C$$

$$\sum_{i=1}^M V_i \rho_i \leq V^*$$

$$0 \leq \rho_i^{\min} \leq \rho_i \leq 1$$

onde V^* é a restrição de volume desejada, ρ_i ($i = 1, 2, \dots, M$) são as variáveis do problema (M o número total de variáveis) e $\rho_i^{\min}$ é valor limite inferior considerado na solução numérica.

Os gradientes (derivadas) da função objetivo (função F) são calculados da seguinte maneira:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_i} = \frac{w}{\mathbf{u}_A^T \mathbf{K} \mathbf{v}_B} \left(\frac{\partial (\mathbf{u}_A^T \mathbf{K} \mathbf{v}_B)}{\partial \rho_i} \right) - \frac{(1-w)}{\mathbf{u}_C^T \mathbf{K} \mathbf{u}_C} \left(\frac{\partial (\mathbf{u}_C^T \mathbf{K} \mathbf{u}_C)}{\partial \rho_i} \right) \quad (4)$$

A primeira parcela da Eq. (4) contém derivada da energia mútua, a qual é desenvolvida da seguinte forma:

$$\frac{\partial(\mathbf{u}_A^T \mathbf{K} \mathbf{v}_B)}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{u}_A^T}{\partial x_i} \mathbf{K} \mathbf{v}_B + \mathbf{u}_A^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{v}_B + \mathbf{u}_A^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{v}_B}{\partial x_i} \quad (5)$$

Derivando a relação de equilíbrio $\mathbf{K} \mathbf{u}_A = \mathbf{f}_A$ em relação às variáveis do problema x_i , temos:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u}_A + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}_A}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{f}_A}{\partial x_i} \quad (6)$$

Como $\mathbf{f}_A$ é constante $\partial \mathbf{f}_A / \partial x_i = 0$, então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u}_A + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}_A}{\partial x_i} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{u}_A}{\partial x_i} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u}_A \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{u}_A^T}{\partial x_i} &= -\mathbf{u}_A^T \frac{\partial \mathbf{K}^T}{\partial x_i} (\mathbf{K}^{-1})^T = -\mathbf{u}_A^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{K}^{-1} \end{aligned} \quad (7)$$

Observe que, como $\mathbf{K}$ é simétrica, $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$, da mesma forma que $(\mathbf{K}^{-1})^T = \mathbf{K}^{-1}$. Da mesma maneira, derivando a equação de equilíbrio $\mathbf{K} \mathbf{v}_B = \mathbf{f}_B$, obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_B}{\partial x_i} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{v}_B \quad (8)$$

Substituindo as Eq. (7) e (8) na Eq. (5) e simplificando, temos:

$$\frac{\partial(\mathbf{u}_A^T \mathbf{K} \mathbf{v}_B)}{\partial x_i} = -\mathbf{u}_A^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{v}_B \quad (9)$$

Seguindo o mesmo procedimento acima para a derivada da segunda parcela da Eq. (4), obtemos a equação da derivada da flexibilidade média:

$$\frac{\partial(\mathbf{u}_C^T \mathbf{K} \mathbf{u}_C)}{\partial x_i} = -\mathbf{u}_C^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u}_C \quad (10)$$

ANEXO B: Descrição da utilização e funcionamento do software

O objetivo deste anexo é apresentar uma descrição detalhada da utilização e do funcionamento do software de Otimização Topológica (OPTMEC) implementado neste trabalho de mestrado. Conhecendo-se o domínio estendido fixo (domínio inicial) para o projeto do mecanismo flexível, o usuário deverá seguir 3 etapas distintas para obtenção da topologia otimizada e, conseqüentemente, a forma final do mecanismo desejado. A Fig. B.1 apresenta o fluxograma básico da estrutura de utilização do OPTMEC. A primeira etapa é o pré-processamento, através do ANSYS, para geração dos dados iniciais; a segunda etapa é o processamento dos dados iniciais, através do OPTMEC, para obtenção da topologia otimizada; e a terceira etapa é o pós-processamento para visualização, interpretação e análise da topologia obtida. Essas três etapas serão detalhadas a seguir.

Figura B.1 – Fluxo básico da estrutura de utilização do OPTMEC.

B.1. Pré-processamento

O pré-processamento é realizado no ANSYS (software comercial de elementos finitos) e consiste em desenhar a geometria do domínio inicial de projeto do mecanismo flexível, a partir da qual se define o modelo de MEF adequado. Basicamente, o usuário utiliza no ANSYS somente os recursos de CAD e gerador de malhas para criar um arquivo texto (<nome do arquivo>.txt), no formato padrão do ANSYS (ASCII), contendo a informação sobre as características da malha de elementos finitos, sendo elas o número de elementos, o número de nós, as coordenadas de cada nó, a conectividade dos elementos, o material de cada elemento (módulo de elasticidade e razão de Poisson), os nós fixos e os nós em que estão aplicadas as forças. O OPTMEC necessita da informação de três carregamentos diferentes (veja capítulo 4), a qual deve estar contida no mesmo arquivo texto. É importante observar que o usuário deve gerar somente uma malha, a qual deve conter inicialmente as condições de contorno e aplicações de forças do 1º. e 2º. caso de carregamento. Com isso, cria-se um arquivo texto do tipo *DB data* através da função *CDWRITE* do ANSYS. Após, o usuário deve utilizar a mesma malha, substituindo as condições de contorno e aplicação de forças pelo 3º. caso de carregamento e criar um outro arquivo texto *Loads* através da função *CDWRITE* do ANSYS. O primeiro arquivo (*DB data*) é completo e contém todas as informações necessárias sobre a malha de elementos finitos, já o segundo arquivo contém somente a informação sobre restrição de nós e aplicação de forças do 3º. caso de carregamento. Assim, é necessário unir o conteúdo dos dois arquivos, porém como são arquivos textos essa montagem pode ser feita facilmente através de programas simples (por exemplo, o bloco de notas do Windows). A Figura B.2 ilustra um modelo de arquivo texto pronto para ser lido no OPTMEC. O leitor pode perceber que no final do arquivo existe a impressão de alguns dados complementares que são inseridos manualmente, são eles o coeficiente w (WEIGH), restrição de volume (VFRAC), fator de penalidade p (PENAL), restrições laterais das variáveis de projeto (XMIN0 e XMAX0) e o valor inicial das variáveis de projeto (XINI0).

```

/COM,ANSYS RELEASE 5.4      UP19970828      10:30:12      04/12/2001
/PREP7
/NOPR
/TITLE,
ANTYPE, 0
*IF,_CDRDOFF,EQ,1,THEN      !if solid model was read in
_CDRDOFF=                  !reset flag, numoffs already performed
*ELSE                      !offset database for the following FE model
NUMOFF,NODE,      9
NUMOFF,ELEM,      4
NUMOFF,MAT ,      1
NUMOFF,TYPE,      1
*ENDIF
ET,      1, 42
NBLOCK,6,SOLID
(3i8,6e16.9)
      1      0      0      .000000000      .000000000
      2      0      0      120.000000      .000000000
      3      0      0      60.0000000      .000000000
      4      0      0      120.000000      120.000000
      5      0      0      120.000000      60.000000
      6      0      0      .000000000      120.000000
      7      0      0      60.0000000      120.000000
      8      0      0      .000000000      60.000000
      9      0      0      60.0000000      60.000000
N,R5.3,LOC,      -1,
EBLOCK,18,SOLID
(18i7)
      1      1      1      1      4      0      1      3      9      8
      1      1      1      2      4      0      3      2      5      9
      1      1      1      3      4      0      8      9      7      6
      1      1      1      4      4      0      9      5      4      7
      -1
MPTEMP,R5.0, 1, 1, .000000000 ,
MPDATA,R5.0, 1,EX ,      1, 1, 100.000000 ,
MPTEMP,R5.0, 1, 1, .000000000 ,
MPDATA,R5.0, 1,NUXY,      1, 1, .300000000 ,
...
CGOMEGA, .000000000 , .000000000 , .000000000
DCGOMG, .000000000 , .000000000 , .000000000
IRLF, 0

D,      1,UX , .000000000 , .000000000
D,      1,UY , .000000000 , .000000000
D,      6,UX , .000000000 , .000000000
D,      6,UY , .000000000 , .000000000
D,      8,UX , .000000000 , .000000000
D,      8,UY , .000000000 , .000000000
F,      4,FY , -1.00000000 , .000000000
/GO
FINISH
F,      3,FY , -1.00000000 , .000000000
/GO
FINISH
D,      1,UX , .000000000 , .000000000
D,      1,UY , .000000000 , .000000000
D,      4,UY , .000000000 , .000000000
D,      6,UX , .000000000 , .000000000
D,      6,UY , .000000000 , .000000000
D,      8,UX , .000000000 , .000000000
D,      8,UY , .000000000 , .000000000
F,      3,FY , 1.00000000 , .000000000
/GO
DADOS COMPLEMENTARES
WEIGH, .500000000
VFRAC, .200000000
PENAL, 3.00000000
XMIN0, .001000000
XMAX0, 1.00000000
XINI0, .150000000

```

Figura B.2 – Modelo do arquivo texto lido pelo OPTMEC.

B.2. Processamento com o OPTMEC

O processamento para obtenção da topologia ótima aplicada ao projeto do mecanismo flexível, é realizado no OPTMEC (software de otimização desenvolvido neste trabalho). O fluxograma da Fig. B.3 mostra as atividades desenvolvidas pelo software para obtenção da topologia ótima.

Figura B.3 – Fluxo geral de funcionamento do OPTMEC.

Inicialmente, nesta etapa, o usuário deve informar ao software o nome do arquivo de entrada de dados (arquivo texto preparado na etapa do pré-processamento), digitando o nome do arquivo na seguinte linha de comando, localizada no cabeçalho do código fonte conforme mostrado na Fig. B.4.

```

/*****
OPTMEC      -      Software de Otimização Topológica Aplicado
                  ao Projeto de Mecanismos Flexíveis
                  -----

copyright      : (C) 2002 by Cícero Ribeiro de Lima
email         : cicerorl@usp.br
*****/

#include <stdio.h>
#include <malloc.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <string.h>

#define arquivol "malha4.txt"          /* entrada */

#define arqANSYS1 "otANSYS.txt"        /* saída */
#define arqANSYS2 "otmlhANSYS.txt"     /* saída */

#define NMAX 800*TAM
#define TAM 150
#define ITERTOL 1.0e-4
...

```

nome do arquivo de entrada

Figura B.4 – Cabeçalho do código fonte do OPTMEC.

Após a inserção do nome do arquivo, é feita a compilação do arquivo fonte em algum compilador de linguagem C. A escolha do compilador fica a critério do usuário, neste trabalho foi utilizado o compilador do sistema operacional Linux que, para este trabalho se demonstrou um sistema mais rápido e com melhor gerenciamento de memória, para rodar softwares numéricos de grande porte. No passo seguinte, basta o usuário mandar “rodar” o arquivo executável gerado pelo compilador. A partir desse ponto, a processamento é automático pelo software. Assim, na seqüência descrevemos somente a estrutura de funcionamento do software.

O OPTMEC possui uma rotina que faz a leitura dos dados do arquivo de entrada, armazenando-os em vetores e matrizes, na linguagem padrão do C. Após a leitura do arquivo de entrada, o software determina os vetores e matrizes fixas que

serão utilizados ao longo do processo de otimização, ou seja, são montados: a matriz de coordenadas nodais, a matriz de conectividades dos nós da malha de MEF, o vetor de restrições nodais, os vetores de forças nodais dos três casos de carregamentos, a matriz de graus de liberdade dos nós, a matriz de coordenadas do centro de cada elemento (determinada a partir das coordenadas nodais e utilizada na rotina do filtro espacial), os vetores dos limites laterais das variáveis de projeto (densidade de cada elemento) e o vetor dos valores iniciais das variáveis de projeto (“chute” inicial para a PL).

Após a montagem das matrizes fixas, o OPTMEC inicia o “loop” de otimização, cujo número de voltas depende do número de iterações necessárias para a convergência da função objetivo do problema. Neste caso, consideramos que a convergência ocorre quando o valor da função objetivo torna-se constante, dentro de uma margem de erro de 0,01%, durante as iterações. Esse “loop” de otimização compreende basicamente as rotinas de MEF, de cálculo do valor da função objetivo e suas derivadas, de determinação dos limites móveis, de aplicação do filtro espacial e de programação linear, conforme mostrado na Fig. B.3.

A rotina de MEF executa um “loop” interno de M voltas (sendo M o número total de elementos) que, em cada volta, constrói a matriz de rigidez local do elemento e posiciona os valores dessa matriz local na matriz de rigidez global, de acordo com a conectividade de cada elemento da malha. A matriz de rigidez do elemento é construída através de uma rotina de integração numérica de Gauss-Legendre (2x2 pontos) para a Eq. (4.16) do capítulo 4. A matriz de rigidez global é montada de maneira que sejam desconsideradas as linhas e colunas referentes aos deslocamentos nulos (nós fixos), isto reduz o tamanho da matriz e, conseqüentemente, o tempo de processamento. A Fig. B.5 mostra o fluxograma específico da rotina de MEF. Após o “loop”, a rotina de MEF armazena a matriz de rigidez global “cheia” no formato esparso, de acordo com PRESS et al. (1999). E para cada caso de carregamento (1º, 2º. e 3º.), a rotina obtém os deslocamentos nodais correspondentes, resolvendo o sistema de equações de equilíbrio de cada caso ($\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$), através de uma rotina de Gradientes Conjugados (válida somente para matrizes positiva-definidas). Os vetores de deslocamentos nodais (configuração deformada de cada caso de carregamento) são obtidos a partir do vetor de densidades dos elementos (variáveis de projeto),

atualizado a cada iteração do processo de otimização. Uma vez obtidos esses vetores, o OPTMEC calcula o valor da energia mútua e flexibilidade média e, conseqüentemente, o valor da função objetivo e suas derivadas (gradientes), através de rotinas que desenvolvem o produto de matrizes das Eq. (1) a (4) do anexo A.

Figura B.5 – Fluxo da rotina de MEF.

Antes de entrar na rotina de otimização das variáveis de projeto, o OPTMEC determina os limites móveis da programação linear seqüencial e aplica o filtro espacial no valor da densidade de cada elemento. Inicialmente é atribuído aos limites móveis um passo de 15% do valor da densidade de cada elemento na iteração vigente, ou seja, em cada iteração o limite móvel superior é igual ao valor de densidade mais um passo e o limite móvel inferior é igual ao valor da densidade menos um passo. À medida que as iterações se aproximem da convergência da

função objetivo, o passo dos limites móveis é diminuído sucessivamente. Isto é feito comparando-se os valores da função objetivo de três iterações consecutivas (iteração atual, uma anterior e duas anteriores). Se a diferença entre o valor da função objetivo atual e de uma iteração anterior (*valor1*) estiver entre 30% e 60% da diferença entre o valor função objetivo de uma iteração anterior e de duas anteriores (*valor2*), reduzimos o passo dos limites móveis para 10% do valor da densidade de cada elemento na iteração vigente. E se *valor1* for menor que 30% do *valor2*, reduzimos o passo dos limites móveis para 5% do valor da densidade de cada elemento na iteração vigente. O OPTMEC armazena os limites móveis em dois vetores distintos, um para o limite superior e outro para o limite inferior, que são posteriormente filtrados. A rotina de filtro recebe esses vetores e devolve outros dois (limites superior e inferior filtrados), que são utilizados pela rotina de programação linear. A rotina de filtro do OPTMEC é um “loop” de M voltas que utiliza as informações da matriz de coordenadas do centro de cada elemento (matriz fixa) para calcular as distâncias entre o elemento central i e seus adjacentes e, por meio da comparação com o raio máximo de abrangência (definido pelo usuário), determinar quais são efetivamente os elementos vizinhos que serão utilizados no processo de filtragem, como descrito no item 4.4 do capítulo 4. Se a distância de um elemento adjacente for menor que o raio de abrangência do filtro, esse elemento será um vizinho j do elemento central i . Para o cálculo da filtragem, é utilizado também um vetor com a informação do volume de cada elemento, o qual é obtido na etapa em que é construída a matriz de rigidez local do elemento. Depois de finalizado o “loop” da rotina de filtro, os novos valores limites filtrados são verificados, para evitar que valores de densidades acima do limite máximo (1) e abaixo do limite mínimo (0,001) sejam obtidos.

Numa etapa seguinte o OPTMEC executa a otimização das variáveis de projeto através da rotina de programação linear DSPLP, adaptada ao OPTMEC. Numa rotina anterior, o OPTMEC monta os vetores com parâmetros de entrada da DSPLP (veja apêndice). Na primeira iteração, a DSPLP utiliza o vetor de distribuição de densidades iniciais dos elementos, que por simplicidade pode conter valores de densidades iguais para todos os elementos (respeitando os limites máximo e mínimo), o qual servem de ponto de partida para o processo de busca da

distribuição ótima de densidades dos elementos. O OPTMEC utiliza automaticamente a última distribuição ótima de densidades como valor inicial para as iterações seguintes. A DSPLP recebe todos esses parâmetros e devolve um vetor com a nova distribuição de densidades dos elementos (variáveis de projeto), o qual é utilizado para um novo cálculo na rotina de MEF, dando início a mais uma iteração da programação linear seqüencial (PLS) do software, até a convergência.

B.3. Pós-processamento

O pós-processamento é realizado no ANSYS. Depois de terminado o processo de otimização, o OPTMEC gera dois arquivos texto, em formato padrão lido pelo ANSYS, um deles (`otANSYS.txt`) contém a informação necessária para visualizar a configuração ótima da topologia e o outro (`otmlhANSYS.txt`) contém a informação para importar uma malha gerada a partir da distribuição ótima de densidades dos elementos.

O arquivo `otANSYS.txt` é formado a partir da rotina do OPTMEC que escreve, em formato ASCII lido pelo ANSYS, um arquivo texto com as componentes dos vetores de coordenadas e de conectividade dos nós dos elementos, além do número da cor que é atribuído a cada elemento conforme o valor da densidade obtida para o mesmo na otimização. Para que o ANSYS interprete esse número, é fornecido para ele um arquivo do mapa de cores (criado a partir do utilitário *CMAP* do ANSYS), o qual contém um intervalo de dez cores em preto e branco. Assim as regiões de cor preta indicam um valor máximo para a densidade do elemento, a cor branca indica o valor mínimo e as tonalidades de cinza indicam os valores intermediários de densidades. A geometria do mecanismo flexível pode ser obtida a partir da interpretação dessa imagem em preto e branco. Não é previsto no OPTMEC nenhum recurso avançado que permita a interpretação automatizada da topologia obtida, assim neste trabalho, essa interpretação é realizada manualmente no CAD do ANSYS, desenhando-se as linhas do contorno do mecanismo diretamente na

topologia obtida.

O OPTMEC permite gerar uma malha de elementos finitos no formato lido pelo ANSYS, para posterior análise e verificação da topologia obtida. O arquivo `otmlhANSYS.txt` é criado pelo OPTMEC para este fim, e contém o valor das coordenadas e conectividades dos elementos, cujo valor de densidade está abaixo de um valor determinado pelo usuário. A propósito, este arquivo foi utilizado para gerar as configurações deformadas de alguns mecanismos apresentados no capítulo 5.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANATHASURESH, G. K., Kota S., Gianchandani, Y., 1994, “A Methodical Approach to the Design of Compliant Micromechanisms”, Solid-state Sensor and Actuator Workshop, pp. 189-192.
- ARAKAKI, R., Arakaki, J., Angerami, P. M., Aoki, O. L., Salles, D. S., 1990, “Fundamentos de Programação em C – Técnicas e Aplicações”, Segunda Edição, LITEC.
- BATHE, K.J., 1996, "Finite Elements Procedures", Prentice Hall, New Jersey.
- BENDSØE, M., P., 1995, “Optimization of Structural Topology, Shape and Material”, Springer - Verlag, New York.
- BENDSØE M.P., Ben-Tal, A., e Zowe, J., 1994, “Optimization Methods for Truss Geometry and Topology Design”, Structural Optimization, 7, pp. 141-159.
- BENDSØE, M. P., 1989, “Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem”, Structural Optimization, 1, pp. 192-202.
- BENDSØE, M. P., KIKUCHI, N., 1988, “Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method”. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 71, pp. 197-224.
- BENDSØE, M. P., SIGMUND, O., 1999, “Material Interpolations Schemes in Topology Optimization”, Archive of Applied Mechanics, vol. 69, pp. 635-654.
- BENDSØE, M.P., RODRIGUES, H.C., 1991, “Integrated Topology and Boundary Shape Optimization of 2-D Solids”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 87, pp 15-34.

- BOURDIN, B., 2001, "Filters in Topology Optimization", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, pp. 2143-2158.
- CARDOSO, E.L., FONSECA, J.S.O., 1999, "Intermediate density reduction and Complexity Control in the Topology Optimization", 20th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE'99), Brasil.
- CHENG, T.K., OLHOFF, N., 1981, "An Investigation Concerning Optimal Design of Solid Elastic Plates", *International Journal of Solids Structures*, 17, pp. 305-323.
- CHENG, T.K., OLHOFF, N., 1982, "Regularized Formulation for Optimal Design of Axisymmetric Plates", *International Journal of Solids Structures*, 18-2, 153-169.
- CHOI, K.K., SEONG, K.K., 1986, "A Domain Method for Shape Design Sensitivity Analysis of Built-up Structures", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 57, pp 1-16.
- COOK, R. D., YOUNG, W. C., 1985, "Advanced Mechanics of Materials", Macmillan, New York.
- DANTZIG, G.B., 1963, "Linear Programming and Extensions", Princeton, New Jersey.
- DÍAZ, A., SIGMUND, O., 1995, "Checkerboard Patterns in Layout Optimization", *Structural Optimization*, 10, pp. 40-45.
- DÍAZ, A.R., BENDSØE, M. P., 1992, "Shape Optimization of Structures for Multiple Loading Conditions Using Homogenization Method", *Structural Optimization*, 4, 17-22.

- DÍAZ, A.R., KIKUCHI, N., 1992, "Solution to Shape and Topology Eigenvalue Optimization Problems Using a Homogenization Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35, pp. 1487-1502.
- FRECKER, M.I., Kikuchi, N., Kota, S., 1996, "Optimal Synthesis of Compliant Mechanisms to Satisfy Kinematics and Structural Requirements – Preliminary Results", *Proceedings of ASME Design Engineering of Technical Conferences and Computers in Engineering Conference*, California, 96-DETCDAC-1417.
- FUJII, D., Chen, B.C., Kikuchi, N., 2001, "Composite Material Design of Two-Dimensional Structures Using Homogenization Design Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, pp. 2031-2051.
- FUKUSHIMA, J., Suzuki, K., Kikuchi, N., 1993, "Applications to Car Bodies: Generalized Layout Design of Three-Dimensional Shells", *Optimization of Large Structural Systems*, Ed. Rozvany, G.I.N, Dordrecht: Kluwer, pp. 177-191.
- GOODMAN, J., Kohn, R.V., Reyna, L., 1986, "Numerical Study of Relaxed Variational Problem from Optimal Design", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 57, pp. 107-127.
- HABER, R.B., Jog, C.S., Bendsøe, M.P., 1996, "A New Approach to Variable-Topology Shape Design Using a Constraint on Perimeter", *Structural Optimization*, Springer Verlag, 11, pp. 1-12.
- HAFTKA, R.T., GANDHI, R.V., 1986, "Structural Shape Optimization – A survey", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 57, pp. 91-106.
- HAFTKA, R.T., Gürdal, Z., Kamat, M.P., 1996, "Element of Structural Optimization", Kluwer Academic Publishers, Boston.

- HANSON, R.J., HIEBERT, K.L., 1981, "A Sparse Linear Programming Subprogram", Sandia National Laboratories, Technical Report SAND81-0297.
- HASSANI, B., HINTON, E., 1998a, "A Review of Homogenization and Topology Optimization, I- Homogenization theory for media with periodic structure", *Computer and Structures*, 69, pp. 707-717.
- HASSANI, B., HINTON, E., 1998b, "A Review of Homogenization and Topology Optimization, II- Analytical and numerical solution of homogenization equations", *Computer and Structures*, 69, pp. 719-738.
- HASSANI, B., HINTON, E., 1998c, "A Review of Homogenization and Topology Optimization, III- Topology Optimization using optimality criteria", *Computer and Structures*, 69, pp. 739-756.
- HEMP, W.S., 1973, "Optimum Structures", Clarendon, Oxford.
- HER, I., MIDHA, A., 1987, "A Compliance Number Concept for Compliant Mechanisms and Type Synthesis", *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Transaction of the ASME, 109, pp. 348-355.
- HOWELL, L.L., MIDHA, A., 1996, "A Loop-closure Theory for the Analysis and Synthesis of Compliant Mechanisms", *Journal of Mechanical Design*, Transaction of the ASME, 118, pp. 121-125.
- HOWELL, L.L., MIDHA, A., 1994, "A Method for the Design of Compliant Mechanisms with Small Length Flexural Pivots", *Journal of Mechanical Design*, Transaction of the ASME, 116, pp. 280-289.
- HSU, Y., Hsu, M., Chen, C., 2001, "Interpreting Results from Topology Optimization Using Density Contours", *Computers and Structures*, 79, pp. 1049-1058.

- HUANG, N., 1971, "ON principle of Stationary Mutual Complementary Energy and its Application to Optimal Structural Design", *Journal of Applied Mathematics and Physics*, ZAMP 22, pp. 609-620.
- JACOBS, P., 1996, "Stereolithography and Other RP&M Technologies From Rapid Prototyping to Rapid Tooling" Society of Manufacturing Engineers in Cooperation with the Rapid Prototyping Association of SME, ASME Press, New York.
- JOG, C.S., Haber, R.B., Bendsøe, M.P., 1994, "Topology Design with Optimized Self-Adaptive Materials" *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp. 1323-1350.
- JOG., C.S., HABER, R.B., 1996, "Stability of Finite Element Models for Distributed Parameter Optimization and Topology Design", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 130, pp. 203-226.
- JONSMANN, J., Sigmund, O., Bouwstra, S., 1999, "Compliant Thermal Microactuators", *Sensors and Actuators*, vol. 76, pp. 463-469.
- KIKUCHI, N., Hollister, S., Yoo, J., 1997, "A Concept of Image-based integrated CAE for production Engineering", *Proceedings of International Symposium on Optimization and Innovative Design in JSME*, Tokyo, Japan, pp. 75-90.
- KOHN, R.V., STRANG, G., 1986a, "Optimal Design in Elasticity and Plasticity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22, pp. 183-188.
- KOHN, R.V., STRANG, G., 1986b, "Optimal Design and Relaxation of Variational Problems", *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 39, pp. 1-25 (Part I), 139-182 (Part II), 353-377 (Part III).
- LARSEN, U. D., Sigmund, O., Bouwstra, S., 1997, "Design and Fabrication of

- Compliant Mechanisms and Material Structures with Negative Poisson's Ratio", *Journal of Microelectromechanical Systems (MEMS)*, 6(2), pp. 99–106.
- LURIE, K.A., Federov, A.V., Cherkaev, A.V., 1982, "Regularization of Optimal Design Problems for Bar and Plates, Parts I and II", *Journal of Optimizations and Theory and Applications*, 37-4, pp. 499-521, 523-543.
- MA, Z.D, Kikuchi, N., Hagiwara, I., 1993, "Structural Topology and Shape Optimization for a Frequency Response Problem", *Computational Mechanics*, 13, pp. 157-174.
- MA, Z.D., Kikuchi, N., e Cheng, H.C., 1995, "Topology Design for Vibration Structures", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 121.1-4, pp. 259-280.
- MIDHA, A., Norton, T.W., Howell, L.L., 1992, "On the Nomenclature and Classification of Compliant Mechanisms: Abstraction of Mechanisms and Mechanism Synthesis Problems", *Flexible Mechanisms, Dynamics, and Analysis*, ASME 1992 Design Technical Conferences, 22nd Biennial Mechanisms Conferences, Scottsdale, Arizona De-Vol.47, pp.13-16.
- MIN, S., 1997, "Optimum Structural Design for Multi-objective, Stability, and Transient Problems Using Homogenization Design Method", Ph.D. Dissertation, University of Michigan.
- MLEJNEK, H. P., 1992, "Some Aspects of the Genesis of Structures", *Structural Optimization*, vol. 5, pp. 64-69.
- MURAT, F., TARTAR, L., 1985, "optimality Conditions and homogenization", Eds. Marino, A., Modica L., Spagnolo, S., and Degiovanni, M., *Nonlinear Variational Problems* Pitman Publishing Program, Boston, pp. 1-8.

- NEVES, M., M., Rodrigues, H., Guedes, J. M., 1995, "Generalized Topology Design of Structures with a Buckling Load Criterion", *Structural Optimization*, 10, 71-18.
- NISHIWAKI, S., Saitou, K., Min, S., Kikuchi, N., 2000, 'Topology Design Considering Flexibility Under Periodic Loads', *Struct Multidisc Optim*, Springer-Verlag, 19, 4-16.
- NISHIWAKI, S., Frecker, M.I., Min, S., Kikuchi, N., 1998, "Topology Optimization of Compliant Mechanisms using the Homogenization Method", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 42, pp. 535-559.
- ODEN, J.T., Kikuchi, N., Song, Y.J., 1982, "Penalty-Finite Element Methods for the Analysis of Stokesian Flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 31, pp. 297-329.
- OLHOF, N., Bendsøe, M.P., Rasmussen, J., 1991, "On CAD-integrated Structural Topology and Design Optimization", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89, pp 259-279.
- OLHOFF, N., Kog, L., Thomsen, J., 1993, "Bi-material Topology Optimization", In: Kerskovites J., editor, *Structural Optimization*, 93, COPPE/Federal University of Rio de Janeiro, RJ, Brazil, pp. 327-334.
- PARK, Y.K., 1995, "Extensions of Optimal Layout Design Using Homogenization Method", Ph.D. Dissertation, University of Michigan.
- PEDERSEN, C.B.W, Buhl, T., Sigmund, O., 2001, "Topology Synthesis of Large Displacement Compliant Mechanics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, pp. 2683-2705.
- PETERSEN, K. E., 1982, "Silicon as a Mechanical Material", *Proceedings IEEE*, 70(5), pp. 420-457.

- PRAGER, W., 1974, "A Note on Discretized Michell Structures", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3, pp. 349-355.
- PRESS, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P., 1999, "Numerical Recipes in C – The Art of Scientific Computing", pp. 430-444, Cambridge University Press.
- RIETZ, A., 2001, "Sufficiency of Finite Exponent in SIMP (Power Law) Methods", *Struct Multidisc*, Springer-Verlag, 21, pp. 159-163.
- RODRIGUES, H., FERNANDES, P., 1995, "Material Based Model for Topology Optimization of Thermoelastic Structures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38.12, pp. 1951-1965.
- ROZVANY, G.I.N., Bendsøe, M. P., e Kirsch, U., 1995, "Layout Optimization of Structures", *Applied Mechanics Reviews*, 48.2, pp. 41-119.
- ROZVANY, G.I.N., Olhoff, N., Cheng, K., Taylor, J.E., 1982, "On the Solid Plate Paradox in Structural Optimization", *Journal of Structural Mechanics*, 10-1, 1-32.
- ROZVANY, G.I.N., ZHOU, M., 1991, "The COC Algorithm, Part I: Cross Section Optimization or Sizing", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89, pp 281-308.
- SALAMON, B. A., e Midha, A., 1992, "An Introduction to Mechanical Advantage in Compliant Mechanisms", In DE-Vol. 44-2, *Advances in Design Automation*, ASME, pp. 47-51.
- SHIELD, R.T., PRAGER, W., 1970, "Optimal Structural Design for Given Deflection", *Journal of Applied Mathematics and Physics*, ZAMP 21, pp. 513-523.

- SIGMUND, O., 1995, "Some Inverse Problem in Topology Design of Materials and Mechanisms", Proceedings of IUTAM Symposium on Optimization of Mechanical Systems, Stuttgart, Germany, pp. 26-31.
- SIGMUND, O., 1996, "On the Design of Compliant Mechanisms using Topology Optimization", Mechanics of Structures and Machines, 25, pp. 495-526.
- SIGMUND, O., 1999, "Topology Synthesis of Two Phase Compliant Actuator", Proceedings of the ASME Design Engineering Thecnical Conferences, Las Vegas, Nevada, USA, pp. 12-15.
- SIGMUND, O., 2000, "A 99 Line Topology Optimization Code Written in Matlab", Technical University of Denmark ([www. topopt.dtu.dk](http://www.topopt.dtu.dk)).
- SILVA, E.C.N, Nishiwaki, S., Kikuchi, N., 2000, "Topology Optimization Design of Flextensional Actuators", IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 47, pp. 657-671.
- SILVA, E.C.N., Nishiwaki, S., Fonseca, J.S.N., e Kikuchi, N., 1999, "Optimization Methods Applied to Material and Flextensional Actuator Design Using Homogenization Method", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 172, pp. 241-271.
- SOTO, C.A., DÍAZ, A.R., 1993, "Optimum Layout and Shape of Plate Structures Using Homogenization", In: BENDSØE M.P. and Mota S. CA Topology Design of Structures", pp.407-420.
- SUZUKI, K., KIKUCHI, N., 1991, "A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 93, pp. 291-318.
- SWAN, C., KOSAKA, I., 1997, "Voigt-Reuss Topology Optimization for Structures

with Linear Elastic Material Behaviour”, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 40, No. 1, pp. 3033-3057.

THOMAS, H.L., Vanderplaats, G.N., Shyy, Y.K., 1992, “A Study of Move Limit Adjustment Strategies in the Approximation Concepts Approach to Structural Synthesis”, AIAA-VMA Engineering, pp. 507-512.

THOMSEN, J., 1992, “Topology Optimization of Structures Composed of One or Two Materials”, Structural Optimization, 5, pp. 108-115.

VANDERPLAATZ, G., 1984, "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: with Applications". McGraw-Hill.

YANG, R.J., CHUANG, C.H., 1994, “Optimal Topology Design Using Linear Programming”, Computer and Structures, 52-2, pp. 265-275.

YIN, L., YANG, W., 2000, “Topology Optimization for Tunnel Support in Layered Geological Structures”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 47, pp. 1983-1996.

YOO, J., KIKUCHI, N., 2000, “Topology Optimization in Magnetic Fields Using Homogenization Design Method”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 48, pp. 1463-1479.

ZHOU, M., ROZVANY, G.I.N., 1991, “The COC Algorithm, Part II: Topological, Geometrical, and Generalized Shape Optimization”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 89, pp. 309-336.

APÊNDICE: Parâmetros utilizados pela DSPLP

A rotina DSPLP utiliza os seguintes parâmetros para fazer a programação linear das variáveis de projeto do problema de otimização:

DSPLP (DUSRMT, MRELAS, NVARs, COSTS, PRGOPT, DATTRV, BL, BU, IND, INFO, PRIMAL, DUALS, IBASIS, WORK, LW, IWORK, LIW)

onde:

DUSRMT : subprograma que é chamado pela rotina DSPLP.

MRELAS : número de restrições do problema de otimização.

NVARs : número de variáveis do problema.

COSTS : vetor de tamanho NVARS que contém os gradientes da função objetivo em relação as variáveis do problema.

PRGOPT : vetor utilizado para definir vários parâmetros para otimização com a DSPLP.

DATTRV : vetor de tamanho NVARS(1+2*MRELAS)+1 que contém os dados da matriz A do sistema $A.x \leq b$.

BU e BL : vetores de tamanho NVARS+MRELAS que contém os valores superior e inferior, respectivamente, dos limites móveis das variáveis do problema.

IND : vetor de tamanho NVARS+MRELAS onde são definidos parâmetros para os limites móveis das variáveis do problema.

INFO : número retornado pela rotina DSPLP e se igual a 1 indica sucesso na otimização.

PRIMAL : vetor que contém o conjunto de variáveis ótima do problema de otimização.

- DUALS : vetor que contém o conjunto de variáveis ótimas para o problema dual.
- IBASIS : vetor de tamanho NVAR+MRELAS que contém índices para as variáveis do problema.
- WORK : vetor de tamanho LW manipulado pela rotina DSPLP.
- LW : valor do tamanho do vetor WORK e dado por
 $4*NVAR+8*MRELAS+4*NVAR+7+8*MRELAS$
- IWORK : vetor de tamanho LIW manipulado pela rotina DSPLP.
- LIW : valor do tamanho do vetor WORK, dado por
 $NVAR+11*MRELAS+4*NVAR+7+16*MRELAS$

A utilização dessa rotina no OPTMEC, seria muito simples se não fosse um detalhe – originalmente o código fonte do software foi escrito em linguagem C, uma linguagem poderosa de programação, utilizada em várias aplicações técnicas e comerciais como compiladores e sistemas operacionais e por isso foi escolhida no início do projeto. Já a rotina DSPLP é uma rotina, composta por várias sub-rotinas escritas em Fortran, e por ser robusta para resolver a programação linear de milhares de variáveis, também foi escolhida para o projeto. No campo da programação, a interface entre as linguagens C e Fortran é totalmente possível. Para isso, devemos fazer a ligação dos arquivos *.obj* gerados pelos compiladores de cada uma das linguagens. É claro que também é necessário o conhecimento de alguns aspectos básicos pertinentes a cada linguagem e seu compilador, por exemplo como cada uma delas trata os dados de entrada e saída, se fazem a passagem de parâmetros por valor ou por referência, a convenção para nomes adotada por cada uma delas, a sequência de parâmetros na pilha etc.

Como dito anteriormente, a interface é feita através da ligação dos arquivos *.obj* gerados pelos compiladores de cada linguagem e para este fim é utilizada a palavra reservada *extern*. Assim, a função declarada em linguagem C deve vir acompanhada da palavra *extern* para que o código escrito em Fortran consiga interpretar e utilizar os parâmetros transmitidos pelo código escrito em C. A rotina

DSPLP é uma função que deverá ser chamada e lida pelo código fonte do software, portanto sua declaração deverá vir antes da função *main* (), da seguinte maneira:

```
extern void dsplp_( );  
  
...  
void main ( )  
{  
...  
dsplp_( dusrmt_, &mrelas, &nvars, &costs[1], &prgopt[1],  
        &dattrv[1], &bl[1], &bu[1], &ind[1], &info,  
        &primal[1], &duals[1], &ibasis[1], &work[1],  
        &lw, &iwork[1], &liw );  
  
...  
}
```

onde *dusrmt*, *mrelas*, *nvars*, *costs*, *prgopt*, *dattrv*, *bl*, *bu*, *ind*, *info*, *primal*, *duals*, *ibasis*, *work*, *lw*, *iwork* e *liw* são os argumentos que a rotina DSPLP recebe.