RICARDO GALDINO DA SILVA

**ESTUDO NUMÉRICO
DE MOVIMENTAÇÃO DE PARTÍCULAS
EM ESCOAMENTOS**

Dissertação apresentada à
Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Engenharia

SÃO PAULO
2006

RICARDO GALDINO DA SILVA

**ESTUDO NUMÉRICO
DE MOVIMENTAÇÃO DE PARTÍCULAS
EM ESCOAMENTOS**

Dissertação apresentada à
Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Engenharia

Área de concentração:

Engenharia Mecânica

Orientador:

Prof. Dr. Marcos de Mattos Pimenta

SÃO PAULO

2006

FOLHA DE APROVAÇÃO

RICARDO GALDINO DA SILVA

Dissertação apresentada à
Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Engenharia
Área de concentração:
Engenharia Mecânica

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Assinatura: _____

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 5 de agosto de 2006.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Silva, Ricardo Galdino da

**Estudo numérico de movimentação de partículas em escoamentos / R.G. da Silva. -- ed.rev. --São Paulo, 2006.
238 p.**

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Efeito Magnus 2.Efeito Saffman 3.Força de Bousinesq / Basset 4.Movimento de partículas 5.Solução numérica de escoamento I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Marcos de Mattos Pimenta, pela paciência, pela atenção e apoio de definição e orientação.

À EMBRAER, pela oportunidade de realização do curso de mestrado .

Em especial aos meus pais que não pouparam esforços para que eu recebesse uma boa educação.

À Alessandra, por todo amor, carinho e compreensão.

Sumário

LISTA DE TABELAS.....	I
LISTA DE FIGURAS	II
LISTA DE FIGURAS	II
LISTA DE SÍMBOLOS	IX
RESUMO	X
ABSTRACT	XI
1. INTRODUÇÃO	1
1.2 – Escoamento Bifásico Diluído x Denso.....	4
1.3- Objetivos	8
2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	10
2.1 - Força de Arrasto	10
2.1.1. - Arrasto de Stokes.....	14
2.1.1.2 – Outros efeitos no Arrasto de Stokes.....	16
2.1.2. - Arrasto Transiente.....	22
2.2 -Força de Sustentação	27
2.2.1 – Efeito Saffman.....	28
2.2.2 Efeito Magnus	34
2.3 Choques com paredes	38
2.4 - Considerações	41
3. EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO	44
3.1 – Equação de conservação da massa	46
3.2 – Equação de conservação da quantidade de movimento.....	51
3.3 – Equação de conservação da energia	55
3.4 – Simplificação das Equações.....	57
4 - EQUAÇÕES DA PARTÍCULA	59
4.1 Equação de conservação da massa	59
4.2 Equação da quantidade de movimento linear e angular	62
4.2.1 – Peso e Empuxo	65
4.2.2 – Força de Arrasto.....	65

4.2.3 – Sustentação	74
4.2.4 – Torque	76
4.3 - Considerações	77
5 – MÉTODOS NUMÉRICOS	79
5.1 – Navier Stokes	79
5.1.1 – Condição de contorno para equações.....	90
5.1.2 – Etapas do método	92
5.1.3 – Validação da solução	93
5.2 – Equação da Partícula	105
5.3 – Acoplamento entre partícula e fluido	109
6 – ANÁLISE DO ARRASTO	113
6.1 - Arrasto de estado estacionário ou de Stokes.....	114
6.1.1- Velocidade Terminal e Velocidade Terminal Adimensional	117
6.1.2 – Comparação com dados experimentais	120
6.2 - Arrasto Transiente ou Dependente da Aceleração	129
6.2.1 -Solução da equação da partícula em queda livre	130
6.2.2.- Análise dos Modelos	140
6.3 – Considerações finais	157
CAPÍTULO 7 – ANÁLISE DA FORÇA DE SUSTENTAÇÃO	158
7.1 Determinação numérica do arrasto em uma partícula.....	159
7.2 Efeito Saffman.....	167
7.3 Efeito Magnus	175
7.4 – Considerações finais	184
8 – SIMULAÇÕES DO MOVIMENTO DE PARTÍCULAS.....	188
8.1 – Escoamento uniforme em torno de um cilindro – Caso teste um. .	188
8.2 – Partícula em queda livre emersa por fluido estagnado – Caso teste	
2.....	192
8.3 – Movimentação da partícula no interior de uma camada limite – Caso	
teste 3.	196
8.4 – Considerações finais	201

9 – CONCLUSÕES E SUGESTOES PARA TRABALHOS FUTUROS	202
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	204
ANEXO A	209
.Anexo A.1 - Solução de Stokes.....	210
ANEXO A.2 - Solução de Ossen.....	218
ANEXO B	225

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. 1 - Tipos de escoamentos multi-fásicos.....	2
Tabela 2.1 – Modelos de previsão do arrasto de Stokes.....	17
Tabela 2.2 – Fator C de correção do efeito de parede, extraído de Clift et al. (1978).	18
Tabela 2.3 - Fator de correção para o efeito de parede, para uma partícula caindo no interior de tubo circular - f_{Parede} - Clift et al. (1978).....	20
Tabela 6.1 – Propriedades da Partícula e fluido para os experimentos de Mordante Pinton (2000) e Crowe (1997).....	121
Tabela 6.2 – Viscosidade pela expressão de por Haider e Levenspiel (1989), μ^{**} e os obtidos com a expressão 6.8, μ^*	124
Tabela 6.3 - Propriedades da Partícula e fluido para os experimentos de Ataídes (2003) – Glicerina 100 % e 96%.	126
Tabela 6.4 – Determinação do erro (equação 6.9) cometidos na determinação da velocidade terminal para as relações empíricas de Tilly (1969), Clift e Gauvin (1970), White (1991) e expressão 6.1.....	127
Tabela 6.5 – Determinação do erro (equação 6.9) cometidos na determinação da velocidade terminal a partir dos modelos em estudo.	152
Tabela 7.1 – Malhas utilizadas na determinação do arrasto.....	160
Tabela 7.2 a – Expressões para determinação da coeficiente de sustentação devido ao efeito Saffman – Modelos dependentes do gradiente da velocidade.	168
Tabela 7.2 b – Expressões para determinação da coeficiente de sustentação devido ao efeito Saffman – Modelos dependentes da distância da parede até a part.....	168
Tabela 7.3 – Tabela de condição para análise do efeito da malha nas simulações.	175
Tabela 8.1 – Posição da partícula para os casos em estudo.....	191
Tabela 8.2 – Condições para os experimentos numéricos.	194
Tabela 8.3 – Espaçamento das malhas nas direções x e y.	194

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1- Divisões do Escoamento Multicomponente	1
Figura – 1.2 – Classificação dos escoamentos Multicomponentes.....	3
Figura – 1.3 – Volume cúbico baseado na distância entre partículas, extraída de Crowe et al (1998).	5
Figura – 1.4 – Choques entre partículas, extraída de Crowe et al(1998).....	7
Figura 2.1 -Fator C de correção do efeito de parede, extraído de Clift et al. (1978).	19
Figura 2.2–Variação de I_L em função de h_* , extraído de Vasseur e Cox (1977). .	31
Figura 2.3 – Esquemas utilizados por Cherrukat e Mclaughlin (1994), Vasseur e Cox (1977) e Cox e Hsu's (1977) para obter o efeito de parede na força de sustentação.	33
Figura 2.4 – Esquema partícula-fluido que ilustra o experimento de Mollinger e Niewstadt (1996).....	34
Figura 3.1 – Fluxos de massa associados a um volume infinitesimal de fluido.	46
Figura 4. 3 – CR em função de Re_R	78
Figura 5.1 –Volume definido pela malha.....	81
Figura 5.2 – Exemplo de malhas estruturadas utilizadas neste trabalho.....	90
Figura 5.3 – Volume fictício.	91
Figura 5.4 – Malha utilizada para solução do escoamento utilizando o FLUENT e o programa flow.	94
Figura 5.5 – Representação e condições de contorno do domínio de cálculo.....	95
Figura 5.6 – Perfis de velocidade para $x = 0.50$ m, comparação entre o programa flow com e sem balanço de fluxo e FLUENT.	96
Figura 5.7– Perfis de velocidade para $x = 1.00$ m, comparação entre o programa flow com e sem balanço de fluxo e FLUENT.	97
Figura 5.8– Perfis de velocidade para $x = 1.5$ m, comparação entre o programa flow com e sem balanço de fluxo e FLUENT.	97
Figura 5.9 - Perfis de velocidade para $x = 2.00$ m, comparação entre o programa flow com e sem balanço de fluxo e FLUENT.	98

Figura 5.10 - Perfis de velocidade para $x = 2.50$ m, comparação entre o programa flow com e sem balanço de fluxo e FLUENT.	98
Figura 5.11 – Visualização de u	100
Figura 5.12 – Visualização de v	101
Figura 5.13 - Perfis de velocidade para $x = 0.50$ m, comparação entre o programa flow com e sem balanço de fluxo, FLUENT e solução de Blasius.	102
Figura 5.14 - Perfis de velocidade para $x = 1.00$ m, comparação entre o programa flow com e sem balanço de fluxo, FLUENT e solução de Blasius.	102
Figura 5.15 - Perfis de velocidade para $x = 1.50$ m, comparação entre o programa flow com e sem balanço de fluxo, FLUENT e solução de Blasius.	103
Figura 5.16 - Perfis de velocidade para $x = 2.00$ m, comparação entre o programa flow com e sem balanço de fluxo, FLUENT e solução de Blasius.	103
Figura 5.17 - Perfis de velocidade para $x = 2.50$ m, comparação entre o programa flow com e sem balanço de fluxo, FLUENT e solução de Blasius.	104
Figura 5.18 – Desenvolvimento do escoamento entre placas planas.	104
Figura 5.19 – Evolução temporal da força de Boussinesq/Basset determinada com o expressão de Maxey e Riley (1983).....	110
Figura 5.20 – Evolução temporal da força de Boussinesq/Basset determinada com o expressão de Mei e Adrian (1992).	110
Figura 5.21 – Evolução temporal da força de Boussinesq/Basset determinada com o expressão de Kim et al. (1998).	111
Figura 6.1 - Arrasto de Stokes em função do número de Reynolds da partícula (Re_P), os pontos experimentais foram extraídos de Schlichting (1965) e White (1991).	114
Figura 6.2 – Comparação dos modelos da tabela 2.1 e o ajuste aqui proposto (novo ajuste) com os dados experimentais extraídos de Schlichting (1965) e White (1991).	118
Figura 6.3 – Comparação dos modelos empíricos e dados experimentais.....	120
Figura 6.4 – Variação temporal da velocidade para o Caso 2 (ATAÍDES, 2003 – Glicerina 100 %).	122

Figura 6.4 – Comparação dos modelos empíricos para velocidade terminal adimensional e dados experimentais.....	123
Figura 6.5 – Comparação dos modelos empíricos para velocidade terminal adimensional e dados experimentais (ATAÍDES, 2003 viscosidade determinada pela expressão de HAIDER; LEVENSPIEL ,1989).	124
Figura 6.6 – Variação temporal da velocidade para o Caso 2 (ATAÍDES, 2003 – Glicerina 100 %) - ** viscosidade determinada pela expressão de Haider e Levenspiel (1989); * viscosidade determinada pela expressão 6.8.	125
Figura 6.7 – Reta 45 graus apresentando os resultados experimentais.....	128
Figura 6.8 – Efeito das soluções dos termos D e E na solução da evolução temporal da velocidade da partícula.	133
Figura 6.9 – Evolução temporal do módulo das forças (força de Boussinesq-Basset, força de arrasto de Stokes, força de massa aparente e força de empuxo).....	134
Figura 6.10 – Evolução temporal da velocidade da partícula.	135
Figura 6.11 – Força de Boussinesq-Basset.....	136
Figura 6.12 – Variação de FBB com a variação de D_p (diâmetro da partícula)....	137
Figura 6.13 – Variação de FBB com a variação da viscosidade do fluido, no gráfico representada por μ_i	138
Figura 6.14 – Variação de FBB com a variação de D_p	139
Figura 6.15 – Variação de FBB/FE (%) com a variação da razão entre as massas específicas.....	139
Figura 6.16 – Comparação das soluções numéricas da expressão de Maxey e Riley (1983) completa, sem FMA e sem FMA e FBB. Caso 1 Mordant e Pinton (2000).	141
Figura 6.17 – Comparação das soluções numéricas da expressão de Maxey e Riley (1983) completa, sem FMA e sem FMA e FBB. Caso 5 Mordant e Pinton (2000).	141
Figura 6.18 – Evolução temporal da velocidade de uma partícula em queda livre em um fluido estagnado.....	142

Figura 6.19 – Evolução temporal do módulo das forças (força de Boussinesq-Basset, força de arrasto de Stokes, força de massa aparente e força de empuxo) - Caso 1 Mordant e Pinton (2000).....	144
Figura 6.20 – Força de Boussinesq/Basset em função do tempo – Caso 1 de Mordant e Pinton (2000).	147
Figura 6.21 – Força de Boussinesq/Basset em função do tempo – Caso 5 de Mordant e Pinton (2000).	148
Figura 6.22– Força de Boussinesq/Basset em função do tempo – Caso 8 de Ataídes (2003); glicerina 96 %.	149
Figura 6.23– Força de Boussinesq/Basset em função do tempo – Caso 9 de Ataídes (2003); glicerina 100 %.	150
Figura 6.24 – Relação de $ FBB_{MÍNIMO}/FE \cdot 100$ e $Re_P^{V_T}$	153
Figura 6.25 – Variação de $FBB_{MÍNIMO}$ em função da razão de massas específicas fluido partícula.	154
Figura 6.26 – Comparação entre as expressões 6.19 e 6.26.	155
Figura 6.27 – Variação de $ FBB_{MÍNIMO}/FE \cdot 100$ em função de G para $\left(\frac{\rho_f}{\rho_p}\right) = 0.001$	156
Figura 7.1 – Representação esquemática da malha.	160
Figura 7.3 – Esquema do domínio computacional.....	162
Figura 7.4 - Arrasto de Stokes em função do número de Reynolds da partícula (Re_P), dados numéricos e experimentais (SCHLICHTING (1965) E WHITE (1991)).	164
Figura 7.5 - Arrasto viscoso em função do número de Reynolds.	165
Figura 7.6 - Arrasto de pressão em função do número de Reynolds.....	165
Figura 7.7 a – Visualização das linhas de corrente	166
Figura 7.7 b – Visualização da velocidade na direção x	166
Figura 7.8 – Comparação das expressões da tabela 7.1- $Re_\infty = 0.005$; perfil linear.	171
Figura 7.9 – Comparação das expressões da tabela 7.1- $Re_\infty = 0.01$; perfil linear.	171

Figura 7.10 – Comparação das expressões da tabela 7.1- $Re_{\infty} = 0.10$; perfil linear.	172
Figura 7.11 – Comparação das expressões da tabela 7.1- $Re_{\infty} = 1$; perfil linear.	172
Figura 7.12 – Comparação das expressões da tabela 7.1- $Re_{\infty} = 0.005$ - perfil cúbico.	173
Figura 7.13 – Comparação das expressões da tabela 7.1- $Re_{\infty} = 0.01$; perfil cúbico.	173
Figura 7.14 – Comparação das expressões da tabela 7.1- $Re_{\infty} = 0.1$; perfil cúbico.	174
Figura 7.15 – Comparação das expressões da tabela 7.1- $Re_{\infty} = 1$; perfil cúbico.	174
Figura 7.16 – Malha superficial da partícula mais haste.	177
Figura 7.17 – Refinamento da malha 1.	178
Figura 7.18 – Refinamento da malha 2.	178
Figura 7.19 – Refinamento da malha 3.	178
Figura 7.20 – Coeficiente de sustentação em h_{malha} .	179
Figura 7.21 – Coeficiente de sustentação devido ao efeito Magnus – Experimentais e modelo empírico.	180
Figura 7.22 – Coeficiente de sustentação devido ao efeito Magnus – $0.90 < \gamma < 2.0$, numérico – resultados do FLUENT.	181
Figura 7.23 – Coeficiente de sustentação devido ao efeito Magnus – $2.0 < \gamma < 3.0$, numérico – resultados do FLUENT.	182
Figura 7.24 – Coeficiente de sustentação devido ao efeito Magnus – $3.0 < \gamma < 4.0$, numérico – resultados do FLUENT.	182
Figura 7.25 – Coeficiente de sustentação devido ao efeito Magnus – $\gamma > 4.0$, numérico – resultados do FLUENT.	183
Figura 7.26 – Coeficiente de sustentação devido ao efeito Magnus obtido com o FLUENT.	185
Figura 7.27 – Comparação do $C_{l_{Magnus}}$ entre os resultados numérico (FLUENT), teóricos (equação 2.48) e modelamento empírico – $\gamma = 5.0$.	186

Figura 7.28 – Comparação do Cl_{Magnus} entre os resultados numérico (FLUENT), teóricos (equação 2.48) ,modelamento empírico e expressão aqui proposta – γ = 0.50.....	186
Figura 7.29 – Comparação do Cl_{Magnus} entre os resultados numérico (FLUENT), teóricos (equação 2.48) ,modelamento empírico e expressão aqui proposta – γ = 3.50.....	187
Figura 8.1 – Trajetória de uma partícula em escoamento ao redor de um cilindro.	191
Figura 8.2 – Efeito da forma como é calculado termo fonte introduzido na equação de quantidade de movimento do fluido.	193
Figura 8.3 – Malhas utilizadas para análise do caso teste 2.....	195
Figura 8.4 – Efeito do movimento de uma partícula em fluido estagnado – Mordant e Pinton (2000).	197
Figura 8.5 – Representação e condições de contorno do domínio de cálculo.....	198
Figura 8.6 – Malha utilizada para o caso teste 3.	198
Figura 8.7 – Solução numérica caso teste 3 com e sem acoplamento – Velocidade em m/s.	199
Figura 8.8 Trajetória da partícula – Caso teste 3.....	200
Figura 8.9 – Variação temporal da velocidade da partícula na direção x.	200
Figura 8.10 – Variação temporal da velocidade da partícula na direção y	201
Figura A.1 - Sistema de coordenadas para solução de Stokes	215
Figura B.1 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico	226
Figura B.2 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico	227
Figura B.3 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico	228
Figura B.4 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico	229
Figura B.5 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico	230
Figura B.6 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico	231
Figura B.7 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico	232
Figura B.8 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico	233
Figura B.9 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico	234
Figura B.10 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico	235

Figura B.11 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico	236
Figura B.12 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico	237
Figura B.13 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico	238

LISTA DE SÍMBOLOS

- A_P – Área projetada da partícula.
- C_D – Coeficiente de Arrasto.
- $C_{D \text{ Pressão}}$ – Coeficiente de Arrasto relacionadas a forças de pressão.
- $C_{D \text{ Viscoso}}$ – Coeficiente de Arrasto relacionado com as forças de origem viscosa.
- d^* - Diâmetro adimensional da partícula
- D_P – Diâmetro da partícula.
- FAC – Forças relacionadas à aceleração
- FBB – Força de Boussinesq/Basset
- FCD – Força de arrasto de Stokes ou de estado estacionário.
- FE – Força de empuxo.
- FMA – Força de massa aparente
- m_P – Massa da partícula
- Re_P – Número de Reynolds baseado no diâmetro da partícula.
- U – Velocidade do fluido
- V^* - Velocidade limite adimensional
- V_P – Velocidade da partícula
- V_T – Velocidade limite ou terminal.
- $V_t^{\text{Exp.}}$ - Velocidade limite ou terminal determinada experimentalmente.
- $V_t^{\text{Num.}}$ - Velocidade limite ou terminal determinada numericamente.
- U_∞ - Velocidade do escoamento não perturbada.

Símbolos Gregos

- μ_f - Viscosidade dinâmica
- ρ_f – Massa específica do fluido
- $\vec{\tau}$ - Tensão de cisalhamento
- $\vec{\sigma}$ - Tensor das tensões

RESUMO

No trabalho desenvolvido estudaram-se as forças que atuam em uma partícula quando esta se movimenta em escoamentos, com intuito de obter uma metodologia capaz de representar o movimento de uma partícula em um escoamento.

A equação do movimento da partícula foi integrada numericamente considerando os termos de massa aparente, arrasto estacionário, arrasto não estacionário (forças de Boussinesq/Basset) e forças de sustentação; efeito Magnus e efeito Saffman. O método dos volumes finitos foi utilizado para simulação do escoamento.

Na análise das forças utilizamos tanto experimentos quanto simulações numéricas (FLUENT) para avaliar e aumentar a validade dos modelos apresentados na revisão bibliográfica.

O FLUENT foi validado para obtenção do coeficiente de arrasto estacionário e sustentação devido ao efeito Magnus.

Palavras-chaves: Efeito Magnus, efeito Saffman, força de Boussinesq/Basset, movimento de partículas e solução numérica.

ABSTRACT

In the developed work was studied the forces which act on a particle when these is a moving inside of a flow, in order to find out a methodology which is able to represent the particle dynamics on a flow.

The equation of particle motion was integrated with a numerical approach taking in account the apparent mass, static drag, dynamic drag (history term; Boussinesq/Basset force) and lift force; Magnus effect and Saffman effect. The finite volume method was used to simulate the flow.

In the force analyses we used experimental and numerical simulation (FLUENT) to evaluate and extend the models shown on the review.

FLUENT was validated to determine the static drag coefficient and lift coefficient due to Magnus effect.

Keywords: Magnus effect, Saffman effect, history term (Boussinesq/Basset force), particle motion, numerical solution

1. INTRODUÇÃO

Em muitas aplicações de engenharia nos deparamos com escoamentos multicomponentes, como por exemplo em sistemas de refrigeração, transporte pneumático, combustão, sistemas de combate a incêndio (sprinklers), escoamento em turbinas a gás, processos de metalização, pulverização em plantações, formação de gelo no bordo ataque da asa de aviões, entre outras. Estes tipos de escoamentos se caracterizam pela existência de mais de um componente.

Os escoamentos multicomponentes podem ser divididos em dois tipos, escoamentos de fase única (exemplo : ar; todos os componentes são gases) ou escoamentos multi-fásicos (os componentes estão em fases diferentes), onde, fase representa o estado físico da matéria (sólido, líquido e gasoso). O melhor exemplo de escoamento de fase única é o citado acima (ar; este tipo de escoamento na grande maioria dos trabalhos encontrados na bibliografia é tratado como um escoamento de único componente), como exemplo de escoamento multi-fásico podemos citar o escoamento encontrado nos sistemas de refrigeração, onde teremos no condensador e no evaporador uma fase gasosa e uma outra líquida.

Figura 1.1- Divisões do Escoamento Multicomponente

O fato de utilizarmos o termo “fase” não necessariamente consiste em dizer que o escoamento multi-fásico é composto por fases de uma mesma espécie química, este termo está sendo aqui aplicado com um sentido mais genérico, ou seja, no sentido de distinguir o estado físico que se encontra a uma determinada

espécie química, desta forma sempre que for encontrada a palavra fase, esta pode se referir ou não à mesma espécie química em estados diferentes.

As fases podem ser sólidas, líquidas, ou gasosas, desta forma podemos dividir os escoamentos multi-fásicos em dois grupos : os que são formados por 2 fases (bifásicos) e os que são formados por três fases (tri-fásicos), vale ressaltar que os escoamentos bifásicos se dividem em três grupos, conforme tabela 1.1, desta forma podemos compor um quadro com as divisões e subdivisões dos escoamentos multicomponentes (Figura 1.2).

O enfoque deste trabalho é o estudo de escoamentos bifásicos onde uma das fases é considerada diluída ou dispersa, como por exemplo gás - gotículas de água. Os motivos pelos quais podemos considerar uma das fases dispersa na outra serão discutidos em maiores detalhes no decorrer deste capítulo.

Tabela 1. 1 - Tipos de escoamentos multi-fásicos

TIPOS
Gás – Sólido
Líquido – Sólido
Líquido – Gás

Podemos dividir os modelos matemáticos que descrevem os escoamentos bifásicos em dois grandes grupos, modelos euleriano-euleriano e modelos euleriano-lagrangeano. A diferença entre estes grupos está basicamente na forma como são escritas as equações de conservação para as fases. Para este trabalho nos utilizaremos os modelos euleriano-lagrangiano, onde uma das fases é modelada utilizando forma euleriana, onde as equações de conservação são escritas para um volume de controle e a outra na forma lagrangiana, onde seu comportamento é descrito ao longo de sua trajetória.

Figura – 1.2 – Classificação dos escoamentos Multicomponentes

No que tange ao tratamento matemático, os escoamentos bifásicos euleriano-euleriano, sob certas hipóteses, também podem ser tratados como um escoamento de uma única fase (modelo de escoamento homogêneo), onde basicamente as várias fases compõem uma única fase, levando em conta massa específica, concentração, volume ocupado de cada fase etc... Para compor um pseudo-fluido, outros modelos (modelos de fases separadas) tratam este tipo de escoamento considerando as fases separadamente e levando em conta ou não a interação existente entre as fases.

Os escoamentos bifásicos podem ser caracterizados, entre outros fatores, pelo acoplamento entre as fases, que pode ser considerado em mão única ou em mão dupla; se considerarmos o movimento de uma partícula em gás, por exemplo, a partícula se movimenta unicamente, por hipótese, devido ao arrasto (força que o fluido exerce na partícula), esta mesma força atua em sentido contrário no fluido (escoamento acoplado em mão dupla). No entanto se não consideramos esta força atuando no fluido, teremos um escoamento acoplado em um único sentido (mão única). O fato de considerarmos o acoplamento em sentido único (mão única) ou em sentido duplo (mão dupla), nos levará a acrescentar termos fontes nas equações de conservação das fases. Os tipos de acoplamentos serão apresentados no Capítulo 5.

1.2 – Escoamento Bifásico Diluído x Denso

O foco principal deste trabalho se encontra no estudo de material particulado disperso em um meio fluido. A fase dispersa pode ser considerada densa ou diluída. Sendo que o escoamento bifásico será considerado diluído quando o movimento da partícula¹ é controlado pelas forças exercidas pelo fluido (arrasto e sustentação); denso quando o movimento do material particulado for controlado pelo choque entre partículas. No decorrer deste trabalho vamos considerar o escoamento como sendo diluído, ou seja, a partícula será tratada individualmente, desconsiderando a influência das partículas vizinhas.

Para caracterizar o escoamento bifásico como diluído ou denso utilizamos a fração em volume, ou seja, o volume ocupado pelo material particulado em um volume unitário. A fração em volume das partículas é dada por :

$$\alpha_p = \frac{\sum_{i=1}^N Vol_p^i}{Vol} \quad 1.1$$

onde Vol_p^i é o volume de partícula i , Vol o volume considerado e N o número de partículas encontradas no volume considerado. Tomando o volume de referência formado pela distância entre partículas (Figura 1.3), temos que :

$$\alpha_p = \frac{\pi D_p^3}{L^3 6} \quad 1.2$$

ou ainda :

¹ Neste trabalho a palavra partícula se refere a gotículas, partículas sólidas e bolhas.

$$\frac{L}{D_p} = \left(\frac{\pi}{6\alpha_p} \right)^{1/3} \quad 1.3$$

Figura – 1.3 – Volume cúbico baseado na distância entre partículas, extraída de Crowe et al (1998).

A concentração em massa das partículas pode ser definida como :

$$C = \frac{\alpha_p \rho_p}{\alpha_f \rho_f} \quad 1.4$$

Substituindo 1.4 em 1.3 e considerando $k = C \frac{\rho_f}{\rho_p}$, temos que :

$$\frac{L}{D_p} = \left(\frac{\pi}{6} \frac{1+k}{k} \right)^{1/3} \quad 1.5$$

Segundo Crowe et al(1998) temos que para um $\frac{L}{D_p}$ igual aproximadamente 10 o escoamento bifásico pode ser considerado diluído, teremos uma distância de 10 D_p entre partículas próximas. Esta relação corresponde a $\alpha_p = 5.23e-4$.

Em Crowe et al (1998) encontramos que o escoamento bifásico pode ser considerado diluído quando a seguinte relação for obedecida :

$$\frac{\tau_V}{\tau_C} < 1 \quad 1.6$$

A relação acima representa a razão entre τ_V - tempo de resposta da quantidade de movimento (“momentum response time”) e τ_C - tempo entre colisões de partículas.

O tempo de resposta da quantidade de movimento é definido a partir da equação da quantidade de movimento da partícula. Considerando que atue na partícula apenas a força de arrasto dada pela relação de Stokes temos que :

$$m_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{1}{\tau_V} (u - V_p) \quad 1.7$$

$$\text{onde } \tau_V = \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu_f}$$

A equação 1.7 tem como solução : $V_p = u \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_V}} \right)$, sendo assim temos que τ_V representa o tempo necessário para que a V_p – velocidade da partícula atinja 63,33 % $\left(\frac{e-1}{e} \right)$ de u - velocidade do escoamento.

Tomando um grupo de partículas com diâmetros constantes, D_p , como é mostrado na figura 1.4. A partícula com borda vermelha (no centro tubo imaginário) se movimenta com uma velocidade relativa, v_r com relação as outras partículas. Em um tempo δt a partícula irá colidir com as partículas que se encontram no tubo de diâmetro $2D_p$ e comprimento $v_r \delta t$, sendo assim o volume é igual à

$$Vol_{CIL} = \pi D_p^2 v_r \delta t \quad 1.8$$

Figura – 1.4 – Choques entre partículas, extraída de Crowe et al(1998).

O número de partículas que colidirão com a partícula marcada em vermelho (figura 1.4) será igual à :

$$N = \frac{Vol_{CIL}}{Vol_p} \alpha_p = \frac{v_r \delta t}{\frac{1}{3} D_p} \alpha_p \quad 1.9$$

A frequência com que ocorrem as colisões é dada por :

$$f_C = \frac{v_r}{\frac{1}{6} D_p} \alpha_p \quad 1.10$$

e o tempo entre colisões é dado por :

$$\tau_C = \frac{D_p}{6v_r \alpha_p} \quad 1.11$$

Da relação 1.6 temos que o diâmetro da partícula para que o escoamento seja considerado diluído, dado por :

$$D_p < \frac{3\mu_f}{\rho_p v_r \alpha_p} \quad 1.12$$

1.3- Objetivos

O objetivo principal será o cálculo de trajetórias das partículas diluídas em escoamentos com gradiente de velocidade. Utilizaremos os modelos euleriano-lagrangianos, onde o fluido será tratado na forma euleriano e as partículas na forma lagrangiana. De modo geral a maioria dos trabalhos encontrados na literatura tratam da determinação das forças que atuam na partícula, no entanto não encontramos trabalhos onde todos os modelos fossem comparados, onde a relevância das forças fossem analisadas e a sua influência na dinâmica do movimento da partícula.

Nos propomos a obter uma metodologia capaz de representar o movimento de uma partícula isolada em um escoamento qualquer. Não temos conhecimento de nenhum programa comercial, entre eles FLUENT, CFD++ e CFX, que leve em conta todas as forças que atuam em uma partícula, desta maneira a metodologia deve levar em conta estas forças.

Para tanto avaliaremos os modelos existentes na literatura para determinação das forças de sustentação e arrasto. Para esta avaliação utilizaremos resultados empíricos e numéricos. Em algumas situações a formulação será modificada para se obter um intervalo de validade maior.

No Capítulo 2, apresentamos a revisão bibliográfica.

Nos Capítulos 3 e 4 são apresentadas as equações do movimento do fluido e partícula, respectivamente.

No Capítulo, 5 é exposta a metodologia numérica para solução do escoamento e do movimento da partícula.

No Capítulo 6, apresentamos um estudo das forças de arrasto estacionárias e não estacionárias. Neste Capítulo são avaliadas as expressões encontradas na

literatura, dentre elas serão escolhidas as que tiverem menor desvio dos resultados experimentais.

No Capítulo 7, apresentamos uma avaliação do FLUENT e dos modelos encontrados na bibliografia para determinação das forças de sustentação.

No Capítulo 8, apresentamos 3 simulações; de uma esfera se movimentando no escoamento em torno de um cilindro, uma partícula sedimentando em um escoamento estagnado e uma partícula se movimentando em um perfil de velocidades laminar.

No Capítulo 9, são apresentadas as conclusões.

2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A dinâmica da partícula em fluidos é regida pela segunda lei de Newton que é dada por :

$$m_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \sum \vec{F} \quad 2.1$$

As forças hidrodinâmicas que atuam na partícula podem ser divididas em forças de arrasto (na direção do escoamento) e força de sustentação (perpendicular ao escoamento), que decorrem em linhas gerais da resistência ao movimento da partícula imposta pelo fluido; da existência de gradientes de velocidade (presença de paredes) e ou rotação da partícula. Estas ainda hoje são motivo de grande pesquisa e são o assunto principal deste trabalho. Podemos também ter forças de outras naturezas atuando na partícula, como por exemplo força devido a presença de campo magnético, etc.. Entretanto, estas forças não estão no escopo deste trabalho.

Tentaremos dar um panorama do “estado da arte” na determinação das forças hidrodinâmicas. Os fatos serão enunciados de forma cronológica, porém agrupados segundo o fenômeno físico que representam.

2.1 - Força de Arrasto

Há mais ou menos 200 anos Dubuat observou, em seus experimentos com pêndulos oscilando em água, que era necessário acrescentar uma massa fictícia (ou aparente) à esfera para levar em conta o efeito da inércia do fluido, quando a esfera acelerava. Bessel (1828 apud MICHAELIDES, 1997) através de uma observação similar, representou o aumento da inércia através de uma massa k vezes maior que a massa original, onde k é conhecido como coeficiente de massa aparente (C_{vm}). Em seu trabalho Bessel (1828 apud

MICHAELIDES, 1997) obteve $k = 0,9$ e $k = 0,6$, para o pêndulo imerso em ar e água, respectivamente.

Poisson (1831 apud MICHAELIDES, 1997), através da análise matemática do escoamento potencial em torno de uma esfera rígida obteve uma expressão para a massa aparente, onde o coeficiente (K ou C_{vm}) era igual a 0.5. Green (1833 apud MICHAELIDES, 1997), de forma independente, obteve o termo de massa aparente para o escoamento potencial em torno de uma elipse, Clesbech (1856 apud MICHAELIDES, 1997) completou o trabalho de Green considerando a rotação da elipse.

Examinando o movimento de pêndulos imersos em ar, com o objetivo de melhorar os relógios existentes, Stokes (1851), com as hipóteses de regime permanente, fronteiras do fluido no infinito, aderência do fluido à superfície da esfera ($U = V_p$ em $|(x,y,z)| = r$; escorregamento entre as superfícies do fluido e da partícula igual a zero), escoamento uniforme (as linhas de corrente são sempre paralelas) e $Re_p \ll 1$, obteve a solução para o escoamento causado por uma esfera em movimento de translação. O fato de considerar $Re_p \ll 1$ (“*creeping flow*”) implica tornar os termos de inércia não lineares (termos convectivos) desprezíveis frente aos outros termos na equação de Navier-Stokes. Determinando assim uma expressão para a força que age na esfera, devido a aderência do fluido à mesma e a distribuição de pressão ao longo de sua superfície, ou seja, obteve uma expressão para a força de arrasto, obtendo um coeficiente de arrasto (CD_{Stokes}) igual a $24/Re$, quando a expressão obtida é comparada com o Arrasto de Newton.

Boussinesq (1885) determinou a expressão para a força atuante em uma esfera, que iniciava seu movimento a partir do repouso, imersa em um fluido viscoso (em repouso, $U = 0$) com suas fronteiras no infinito. Em seu trabalho Boussinesq, considerou que a velocidade da esfera era uma função arbitrária do tempo (retirando a hipótese de regime permanente), diferentemente de Stokes que prescreveu a velocidade como sendo uma senoidal. Ainda sob a hipótese de “*creeping flow*” e aderência do fluido à superfície da esfera, Boussinesq, pela primeira vez, obteve uma expressão que

continha os termos de massa aparente (ou fictícia), força de arrasto de Stokes e um termo que representava o efeito da difusão dos vórtices em torno da esfera (termo de Boussinesq ou, como é mais conhecido, termo de Basset). A equação que segue é geralmente atribuída a Boussinesq (1885), Basset (1888) e Ossen (1927), por este motivo recebe o nome de força de BBO.

$$F = \underbrace{-3\pi D_p \mu_f V_p}_1 - \underbrace{\frac{m_f}{2} \frac{dV_p}{dt}}_2 - \underbrace{\frac{3}{2} D_p^2 \sqrt{\pi \rho_f \mu_f} \int_0^t \frac{dV_p}{\sqrt{t-\tau}} d\tau}_3, \quad 2.2$$

onde D_p é o raio da esfera, μ_f é a viscosidade do fluido, ρ_f é a massa específica do fluido, V_p é velocidade da partícula e m_f é massa de fluido deslocada pelo movimento da esfera. Os termos são :

1 – Força relativa ao arrasto de Stokes, ou arrasto de regime estacionário e ou não transiente. Este termo recebe este nome, pois independe da aceleração da partícula. Consiste da soma entre arrasto de fricção e de forma.

2 – Força de massa aparente ou virtual (“*Apparent mass* ou *virtual mass*”). A aceleração/desaceleração da partícula em um meio fluido acarreta em uma aceleração/desaceleração do fluido que está a sua volta. Esta força esta em fase com a aceleração da partícula.

3 – Força relacionada a mudanças na camada limite que envolve a partícula, que ocorrem devido à aceleração ou desaceleração da partícula. Normalmente é chamada de *history force* ou ainda força de Boussinesq/Basset.

Faxén (1922) introduziu um termo na equação 1.1, conhecido como termo de Faxén. Este termo leva em conta a não uniformidade do campo de velocidades em torno da esfera.

Maxey e Riley (1983), assumindo que a velocidade relativa ($U_r = U - V_p$) entre o fluido e partícula (esfera rígida), poderia ser decomposta em uma parte não perturbada e uma perturbada (gerada pela presença da partícula), sendo

respectivamente W^0 e W^1 ($W = W^0 + W^1$, observada em referencial que se move com a partícula), sendo que suas condições de contorno eram : $W = U - V$ ($|z| \rightarrow \infty$; onde z é a diferença entre a posição da partícula e posição do ponto em estudo, sendo que esta última posição é definida em relação a um referencial estático) e $W = \Omega \times z$ ($|z| = r$; onde Ω é a velocidade angular da esfera. Esta condição de contorno só é válida se considerarmos que não ocorre escorregamento entre as superfícies em contato).

Desta forma, obtiveram as equações de conservação - quantidade de movimento (Navier-Stokes) e conservação da massa - para cada velocidade, em relação a um referencial solidário, a partícula. Por intermédio de uma análise adimensional da equação de Navier –Stokes da velocidade perturbada, sob a hipótese de “creeping flow” ($Re_p \ll 1$), chegaram à conclusão que os termos de inércia não lineares poderiam ser desprezados; assumindo que o gradiente de pressão e divergente do tensor das deformações, relacionados à velocidade não perturbada, são praticamente uniformes ao longo da superfície da esfera, contanto que a esfera seja suficientemente pequena Maxey e Riley (1983) deduziram a expressão (equação 2.3) para a força hidrodinâmica, onde estão incluídos os termos devido à não uniformidade do escoamento ou termos de Faxen.

$$\begin{aligned} \vec{F}_p = & 6\pi\mu_f \left(\vec{U} - \vec{V}_p + \frac{1}{6} r^2 \nabla^2 \vec{U} \right) + m_f \frac{D\vec{U}}{Dt} + \frac{1}{2} m_f \left(\frac{d}{dt} \left(\vec{U} + \frac{1}{10} r^2 \nabla^2 \vec{U} \right) - \frac{d\vec{V}_p}{dt} \right) + \\ & + 6\pi^2 \mu_f \int_0^t \left(\frac{\frac{d}{d\tau} \left(\vec{U} + \frac{1}{6} r^2 \nabla^2 \vec{U} \right) - \frac{d\vec{V}_p}{d\tau}}{\sqrt{\pi\nu_f(t-\tau)}} \right) d\tau + (m_p - m_f) \vec{g} \end{aligned} \quad 2.3$$

onde d/dt representa a derivada total seguindo a partícula (esfera) e D/Dt representa a derivada total seguindo a partícula fluida . Sendo assim :

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{V}_p \cdot \nabla \vec{U} \quad 2.3.a$$

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} \quad 2.3.b$$

A equação 2.3 além de incluir o termo de Faxén, inclui também o termo referente ao empuxo e a força peso da partícula. Desta forma aparece a diferença entre as massas específicas do fluido e da partícula na citada equação.

A generalização da expressão 2.2 ou 2.3 utilizadas para determinação da força de arrasto que atua em uma partícula, ainda hoje é motivo de pesquisa, seja experimental ou teórica. De forma geral os termos da equação 2.2 são estudados separadamente, ainda que não se tenha certeza de que isto não induza erros. Tentando melhorar a previsão obtida com os termos de 2.2 ou 2.3, o que se vê na maioria dos trabalhos a respeito é a inclusão de fatores de correção empíricos no termos 1, 2 e 3 (Arrasto de Stokes, Massa Aparente e Força de Boussinesq/Basset, respectivamente) que tentam minimizar os efeitos da hipótese de *creeping flow* e incluir efeitos relacionados à turbulência do escoamento.

De forma geral, podemos dividir as forças de arrasto em dois grupos, que são força de arrasto estacionário ou de Stokes e forças de arrasto não estacionário, onde esta divisão está relacionada ao fato de levar em conta os efeitos de aceleração.

2.1.1. - Arrasto de Stokes

Ossen (1913 apud SCHLICHTING, 1968) obteve uma expressão para a força hidrodinâmica atuando em uma esfera levando em conta os termos de inércia não lineares da equação de Navier-Stokes. Ele assumiu que a velocidade podia ser decomposta na soma de uma constante (U_∞) e uma perturbação (u' , v' e w'), desta forma os termos de inércia se dividem em dois grupos:

$$U_{\infty} \frac{\partial u'}{\partial x}, U_{\infty} \frac{\partial v'}{\partial x}, \dots \text{ e } u' \frac{\partial u'}{\partial x}, u' \frac{\partial v'}{\partial x}, \dots \text{ onde } u', v' \text{ e } w' \text{ são as perturbações.}$$

Ossen considerou o segundo grupo desprezível frente ao primeiro grupo (Teoria de Pequenas Perturbações). Desta forma obteve um coeficiente de arrasto (C_D), com validade para $Re \geq 5$, igual a:

$$CD_s = \frac{24}{Re_p} \left(1 + \frac{3}{16} Re_p \right) = \frac{24}{Re_p} f(Re_p) \quad 2.4$$

O que pode ser entendido como a obtenção de um fator de correção para o arrasto encontrado por Stokes. Muitos outros coeficientes de arrasto são encontrados na literatura, que levam em conta um fator de correção (f), que tenta suavizar a hipótese de “*creeping flow*” ($Re < 1$). Esta idéia foi utilizada por Proudman e Pearson (1957 apud WHITE, 1991), que incluíram um termo ($9Re_p^2 \ln(Re_p)/160$) no fator encontrado por Ossen. No entanto, esta nova forma de prever o coeficiente de arrasto da partícula divergia para Re_p maior que 3. Segundo White (1991), a idéia de corrigir o coeficiente de arrasto, obtido com a hipótese de “*creeping flow*”, para números de Reynolds grandes não teve muito sucesso.

Podemos determinar a correção inicialmente proposta por Ossen (1913 apud SCHLICHTING, 1968) por intermédio de ajustes empíricos. Diversas fórmulas com este tipo de ajuste são encontrados na literatura (apresentados na tabela 2.1), de forma geral os ajustes seguem aos seguintes padrões :

O Ajuste polinomial proposto por Morsi e Alexander (1972) dado por:

$$f(Re_p) = A + B Re_p^m + C Re_p^n \quad 2.5$$

onde A , B , C , m e n são constantes a serem determinadas pelo ajuste. Stokes (1851), Ossen (1913 apud SCHLICHTING, 1968), Rowe (1961) e Putnam (1961) entre outros, são exemplos deste tipo de ajuste.

2.1.1.2 – Outros efeitos no Arrasto de Stokes

Efeitos de compressibilidade no fator de correção foram estudados por DAVIES (1945).

Segundo Rubinow e Keller (1961) o arrasto não transiente ou de Stokes não é influenciado pela velocidade de rotação da partícula.

Brenner (1961) obteve uma expressão (equação 2.7) que determina o efeito no arrasto quando a partícula vai de encontro à parede.

$$\frac{CD_{Ef.Parede}}{CD} = 1 + \frac{9}{8} \frac{Re_p}{h} \quad 2.7$$

Na expressão 2.7, h é a distância do centro da partícula à parede.

Para uma partícula que se movimenta em fluido com paredes sólidas temos que: quando o efeito das paredes não influencia o movimento da partícula, esta está em um meio infinito, já quando as paredes interferem dizemos que está se movimentando em um meio confinado. Para esta última devemos introduzir um fator de correção no arrasto, sendo assim ficamos com:

$$f_{Parede}|_{Arrasto} = \frac{FCD_{Parede}}{FCD} \quad 2.8$$

De forma alternativa, podemos escrever uma relação entre as velocidades terminais de uma partícula com dimensões constantes meio restrito e meio infinito como:

$$f_{Parede}|_{V_t} = \frac{V_{t\infty}}{V_{tR}} \quad 2.9$$

E ainda podemos introduzir uma relação entre as viscosidades, dada na forma :

Tabela 2.1 – Modelos de previsão do arrasto de Stokes

Autor	Ajuste
Stokes	$C_D = \frac{24}{Re_p} \quad Re_p < 1$
OSSEN (1910)	$C_D = \frac{24}{Re_p} \left(1 + \frac{3}{16} Re_p \right) \quad Re_p < 5$
INGEBO (1956)	$C_D = \frac{27}{Re_p^{0.84}}$
ROWE (1961)	$C_D = \frac{24}{Re_p} (1 + 0.15 Re_p^{0.667})$
PUTNAM (1961)	$C_D = \frac{24}{Re_p} (1 + 0.15 Re_p^{0.687}) \quad Re_p < 1000$ $C_D = \frac{24}{Re_p} (0.0183 Re_p) \quad 1000 \leq Re_p < 2.E05$
TILLY (1969)	$C_D = \frac{24}{Re_p} (1 + 0.197 Re_p^{0.63} + 0.00026 Re_p^{1.38}) \quad Re_p < 2.E05$
CLIFT E GAUVIN (1970)	$C_D = \frac{24}{Re_p} \left(1 + 0.15 Re_p^{0.687} + \frac{0.0175 Re_p}{\left(1 + \frac{4.25E4}{Re_p^{1.16}} \right)} \right) \quad Re_p < 2.E05$
HAIDER E LEVENSPIEL (1989)	$C_D = \frac{24}{Re_p} \left(1 + 0.1806 Re_p^{0.687} + \frac{0.4251 Re_p}{\left(1 + \frac{6880.9}{Re_p} \right)} \right) \quad 1.0 < Re_p < 2.5E05$
WHITE (1991)	$C_D = 0.4 + \frac{24}{Re_p} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re_p}} \quad Re_p < 2.E05$

$$f_{Parede}|_{\mu_f} = \frac{\mu_{f\infty}}{\mu} \quad 2.10$$

onde : $\mu_{f\infty} = \frac{D_p^2 g (\rho_p - \rho_f)}{18V_{f\infty}}$, que vêm da expressão de Stokes para o arrasto.

Para movimentos com número de Reynolds pequeno, onde a hipótese “creeping flow” é válida, temos que $f_{Parede}|_{Arrasto} = f_{Parede}|_{V_t} = f_{Parede}|_{\mu_f} = f_{Parede}$.

Happel e Brenner (1973 apud Clift et al, 1978) apresentaram uma revisão sobre o assunto. Para uma partícula movendo-se nas proximidades de paredes sólidas em um escoamento estagnado, temos que :

$$f_{Parede} = \left[1 - C \frac{FCD}{6\pi V_{Relativo} l} + ordem \left(\frac{D_p}{l} \right)^3 \right]^{-1} \quad 2.11$$

Tabela 2.2 – Fator C de correção do efeito de parede, extraído de Clift et al. (1978).

Geometria da Parede	Localização da Partícula	Direção do Movimento	C
		Axial	2,1044
Parede Paralela	Eqüidistante	Paralelo às paredes	1,004
	¼ da parede	Paralelo às paredes	0,6526
Parede Simples	-	Paralelo à parede	9/16
	-	Perpendicular à parede	9/8
Esférica	Central	-	9/4

Onde l é a menor distância do centro da partícula até a parede, D_p é a máxima dimensão da partícula (para o caso de partículas esféricas representa o diâmetro da mesma; este parâmetro faz com que as expressões independam do formato da partícula) e C é um parâmetro que depende da natureza

geométrica da parede e do tipo de movimento. Na tabela 2.2 (extraída de CLIFT et al., 1978) os valores para o parâmetro C.

Para partículas em movimento no interior de tubos temos que o parâmetro C depende da excentricidade, definida por h/Dt (Dt é o diâmetro da tubulação e $h=Dt/2-l$), para valores de excentricidade menores que 0,2 temos :

$$C = 2,10444 - 0,6977\left(\frac{h}{Dt}\right)^2 + \text{ordem}\left(\frac{h}{Dt}\right)^4 \quad 2.12$$

Para valores de h/Dt maiores que 0,2 os valores de C devem ser extraídos da figura 2.1.

Figura 2.1 -Fator C de correção do efeito de parede, extraído de Clift et al. (1978).

As expressões que se encontram na tabela 2.2 são limitadas pela hipótese de “*creeping flow*” ($Re \ll 1$) ou número de Reynolds pequeno. Sendo assim, devemos incluir os efeitos para número de Reynolds maiores, Fayon e Happer (1960 apud CLIFT et al., 1978) obtiveram a seguinte correção para partículas movendo-se em tubos circulares:

$$\frac{CD_{Parede}}{CD} = 1 + \frac{24}{Re_p CD} (F_{Parede} - 1) \quad 2.13$$

onde F_{Parede} é dado pelos fatores da tabela 2.3, tendo sua validade restrita a $Re_{relativo} < 50$.

Tabela 2.3 - Fator de correção para o efeito de parede, para uma partícula caindo no interior de tubo circular - f_{Parede} - Clift et al. (1978)

Autor	F_{Parede}	Validade
LANDEBURG (1907)	$1,0 + 2,105 \left(\frac{d_p}{Dt} \right)$	$d_p/D_t < 0,10$
FAXÉN (1923)	$(1,0 - 2,104 \left(\frac{d_p}{Dt} \right) + 2,088 \left(\frac{d_p}{Dt} \right)^3 - 0,948 \left(\frac{d_p}{Dt} \right)^5 - 1,373 \left(\frac{d_p}{Dt} \right)^6 + 3,87 \left(\frac{d_p}{Dt} \right)^8 - 4,19 \left(\frac{d_p}{Dt} \right)^{10})^{-1}$	$d_p/D_t < 0,20$
FRANCIS (1923)	$\left(\frac{1 - 0,475 \left(\frac{d_p}{Dt} \right)}{1 - \left(\frac{d_p}{Dt} \right)} \right)^4$	$d_p/D_t < 0,90$
HANBERNAN; SAYARE (1957)	$\frac{1 - 0,75857 \left(\frac{d_p}{Dt} \right)^5}{1 - 2,1050 \left(\frac{d_p}{Dt} \right) + 2,0865 \left(\frac{d_p}{Dt} \right)^3 - 1,7068 \left(\frac{d_p}{Dt} \right)^5 - 0,72603 \left(\frac{d_p}{Dt} \right)^6}$	$d_p/D_t < 0,60$

Para $Re_p < 10^5$ e $d_p/D_t \leq 0,92$ Achembach (1971 apud Clift et al., 1978) encontrou que :

$$f_{Parede}^{Re} \Big|_{Arrasto} = \frac{1 + 1,45 \left(\frac{d_p}{D_t} \right)^{4,5}}{\left(1 - \left(\frac{d_p}{D_t} \right)^2 \right)^2} \quad 2.14$$

Clift et al. (1978), baseados em dados disponíveis na literatura observaram que no intervalo de Re_p entre 100 e 10^4 a correção do arrasto se torna independente de Re_p . Desta forma propuseram a seguinte expressão:

$$f_{Parede}^{Re} \Big|_{Arrasto} = \frac{1}{\left(1 - 1,6 \left(\frac{d_p}{D_t} \right)^{1,6} \right)} \text{ para } d_p/D_t \leq 0.92 \quad 2.15$$

As equações 2.14 e 2.15 representam partículas se movendo em tubos circulares. Um fato interessante nas expressões 2.13, 2.14 e 2.15 é a independência destas com relação à distância da partícula até a parede. Happel e Brenner (1973 apud CLIFT et al, 1978), Fayon e Happer (1960 apud CLIFT et al., 1978) e Clift et al. (1978) consideram a partícula em movimento estacionário, ou seja, com sua velocidade igual à velocidade terminal da partícula.

A presença de paredes sólidas no escoamento, em linhas gerais, produz variações na velocidade do fluido próximo as paredes (gradiente de velocidade) e estes são função da distância até as paredes. Desta forma é de se esperar que o efeito de parede seja dependente da distância da partícula até a parede.

De forma geral as partículas são consideradas esféricas, uma aproximação que muitas vezes não é válida, sendo assim Haider e Levenspiel (1989) propuseram a seguinte fórmula para o coeficiente de arrasto não transiente :

$$CD_s = \frac{24}{Re_p} \left[1 + A Re_p^m \right] + \frac{B}{1 + \frac{C}{Re_p}} \quad 2.16$$

onde A, B, C e m são dados por:

$$\begin{aligned} A &= e^{(2.33-6.46\alpha+2.45\alpha^2)} \\ B &= e^{(4.91-13.89\alpha-18.42\alpha^2-10.26\alpha^3)} \\ C &= e^{(1.47+12.26\alpha-20.73\alpha^2+15.886\alpha^3)} \\ m &= 0.0964 + 0.56\alpha \end{aligned} \quad 2.16.a$$

onde α é razão entre a área da superfície da esfera de volume equivalente e a área da superfície da partícula não esférica.

2.1.2. - Arrasto Transiente

Ainda com a idéia de suavizar a hipótese de *creeping flow*, Odar e Hamilton (1964) incorporaram fatores de correção (obtidos empiricamente) aos termos da equação 2.2, que de forma geral também se aplicam a 2.3, diminuindo a discrepância dos valores previstos pela mesma e os observados experimentalmente. Os fatores empíricos (MICHAELIDES, 1997), para cada termo da equação 2.2, são encontrados através da utilização de várias hipóteses, já que é praticamente impossível realizar experimentos onde as forças hidrodinâmicas, que são encontradas na equação de BBO, atuem de forma separada na partícula. A força atuante na partícula é medida como uma força total de arrasto, sendo dividida em vários termos através de uma série de hipóteses, tornando possível a comparação dos termos medidos com os calculados por 2.2. ou 2.3. Desta forma é possível obter uma correlação dos valores medidos em função dos termos de 2.2; obtendo por consequência os fatores empíricos de correção.

$$F = -CD_s \left(\frac{1}{2} \pi r_p^2 \mu_f |V|V \right) - C_A \left(\frac{m_f}{2} \frac{dV}{dt} \right) - C_H \left(6r_p^2 \sqrt{\pi \rho_f \mu_f} \int_0^t \frac{\frac{dV}{d\tau}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right) \quad 2.17$$

onde C_D é o coeficiente de arrasto não transiente (tópico 2.1.1). Já C_A e C_H são encontrados Odar (1966), sendo representados pela equação 2.18.

$$C_A = 2,1 - \frac{0,132}{Ac^2 + 0,12} \quad 2.18$$

$$C_H = 0,48 + \frac{0,52}{(A_C + 1)^3}$$

onde $A_C = \frac{|\vec{U} - \vec{V}_p|^2}{D_p \left| \frac{d\vec{V}_p}{dt} \right|}$, conhecido como número de aceleração (“*acceleration number*”). O intervalo de validade é dado por $0 < Re_{Relativo} < 62$.

Karanfillian e Kotas (1978) sugeriam valores para C_A e C_H , iguais a 1 e propuseram uma correção para CD_s (coeficiente de arrasto permanente) dada por:

$$\frac{CD_{KK}}{CD_s} = (A_C + 1)^{1,20 \pm 0,03} \quad 2.19$$

sendo esta expressão válida para:

$$10^2 < Re_{Relativo} < 10^4 \quad 2.20$$

$$0 \leq A_C \leq 10,5$$

Possivelmente baseado em Ingebo (1956), Temkin e Kim (1980) e Temkin e Mehta (1982) atribuíram, através de observação de partículas se

movendo em um tubo de choque, todo efeito transiente do arrasto somente em CD_s , chegando a :

$$CD = CD_s - 0.048A_C^{Modificado} \quad \text{para} \quad -45 < A_C^{Modificado} < 3 \quad 2.21$$

$$CD = CD_s - \frac{3.829}{A_C^{Modificado}} - 0.204 \quad \text{para} \quad 5.9 < A_C^{Modificado} < 25 \quad 2.22$$

$$\text{para } Re_{Relativo} \text{ entre 9 e 115 e } A_C^{Modificado} = \left(\frac{\rho_p}{\rho_f} - 1 \right) \frac{D_p}{|\vec{U} - \vec{V}_p|^2} \left| \frac{dV_p}{dt} \right|.$$

Reeks e McKee (1984) perceberam que, quando o termo de Boussinesq/Basset é integrado com intuito de resolver a equação 2.3, o valor resultante para força de Boussinesq/Basset não desaparece e sim retém um efeito memória ao longo de um grande período. A partícula parece se lembrar de sua velocidade inicial. Esse fato é fisicamente questionável, já que os efeitos viscosos fariam com qualquer memória de seu estado inicial fosse destruída. Sendo assim obtiveram uma expressão para a força de Boussinesq/Basset dada por:

$$F_{BB} = 6r_p^2 \sqrt{\pi \rho_f \mu_f} \int_0^t \frac{dV_p}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \frac{6r_p^2 \sqrt{\pi \rho_f \mu_f} (U(0) - V_p(0))}{\sqrt{t}} \quad 2.23$$

A equação acima não inclui os termos de Faxén. Cabe ressaltar que a expressão 2.3 foi obtida para partícula com velocidade inicial nula.

Auton (1988) mostrou que o termo de massa fictícia (ou aparente) deve ser substituído quando o interesse é o estudo de “partículas viscosas” (gotas d’água ou bolhas).

Tsuji et al. (1991) confirmou as expressões obtidas por Odar e Hamilton (1964) e Odar (1966), e mostraram que esta correção é válida para Re_p até 16000 para o caso de partículas se movendo em gás.

Mei et al. (1991) perceberam por meio da simulação numérica do escoamento com pequenas perturbações sobre uma esfera em repouso, que a força de Boussinesq/Basset deveria decair mais rápido que o previsto por 2.3 tempos grandes. Mei et al. (1991) também sugeriu que este fato é uma possível explicação para o efeito memória observada por Reeks e McKee (1984).

Mei e Adrian (1992) propuseram alterar a função *kernel* ($K(t-\tau)$) do termo de Boussinesq/Basset, que é dado na expressão 2.23 por $(\sqrt{t-\tau})^{-1}$, para que este decaísse de forma mais rápida quando o tempo for grande, chegando a:

$$F_{BB} = 6r_p^2 \pi \mu_f \int_0^t K(t-\tau) \left(\frac{d(\vec{U} - \vec{V}_p)}{d\tau} \right) d\tau \quad 2.24$$

$$\text{onde } K(t-\tau) = \left[\left(\frac{\pi(t-\tau)\nu_f}{\left(D_p/2\right)^2} \right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{2} \pi \frac{|U(\tau) - V_p(\tau)|^3 (t-\tau)^2}{\left(D_p/2\right)\nu_f f_H^3(\text{Re}_{\text{Relativo}}(\tau))} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-2} \quad 2.25$$

$$\text{e } f_H(\text{Re}_{\text{Relativo}}) = 0.75 + 0.105 \text{Re}_{\text{Relativo}}(\tau) \quad 2.25.a$$

Lovalenti e Brady (1993), constataram por meio da forma adimensional da equação da quantidade de movimento, escrita em termos da velocidade relativa ($W = U - V_p$) que os termos não lineares da equação de Navier-Stokes só podem ser desprezados quando o St (número de Strouhal) $\gg 1$. Quando isto ocorrer o termo de Boussinesq (ou Basset), contabiliza de forma correta a força viscosa decorrente da formação de vórtices em torno da partícula (força viscosa instável). Entretanto, quando o St não for $\gg 1$, este tipo de hipótese não pode ser formulada, sendo assim o termo de Boussinesq pode não descrever corretamente a força viscosa instável.

Kim et al. (1998) propuseram para a faixa de $Re_{Relativo}$ entre 2 e 150, ainda com intuito de fazer com que a força Boussinesq/Basset decaia mais rapidamente quando o tempo for grande, a seguinte expressão para a citada força:

$$F_{BB} = 6r_p^2 \pi \mu_f \int_0^t K(t-\tau) \frac{d(\vec{U} - \vec{V}_p)}{d\tau} d\tau + 6r_p^2 \pi \mu_f K_1(t) (U(0^+) - V_p(0^+) - U(0^-) + V_p(0^-)) \quad 2.26$$

onde

$$K(t-\tau) = \left[\left(\frac{\pi(t-\tau) \nu_f}{\left(D_p/2\right)^2} \right)^{1/5} + G(\tau) \left(\frac{\pi}{2} \frac{|U(\tau) - V_p(\tau)|^3}{\left(D_p/2\right) \nu_f f_H^3(Re_{Relativo})} (t-\tau)^2 \right)^{1/2.5} \right]^{-2.5}; \quad 2.27$$

$$G(\tau) = \frac{1}{1 + \beta(Ma_1(\tau))^{0.5}}; \quad 2.27.a$$

$$\beta = \frac{22}{1 + \frac{\phi_r^{1.25}}{0.07(\phi_r + \phi_r^{0.25})}}; \quad 2.27.b$$

$$f_H = 0.75 + 0.126 Re_p(\tau); \quad 2.27.c$$

$$K_1(t-\tau) = \left[\left(\frac{\pi \nu_f}{\left(D_p/2\right)^2} \right)^{1/5} + G_1 \left(\frac{\pi}{2} \frac{|U(0) - V_p(0)|^3}{\left(D_p/2\right)^2 \nu_f f_H^3(Re^{t=0}_{Relativo})} (t)^2 \right)^{1/2.5} \right]^{-2.5}; \quad 2.27.d$$

$$G_1 = \frac{1}{1 + 17.8 \text{Re}_{\text{Relativo}}^{t=0}^{-1/4} \left(\frac{\rho_p}{\rho_f} + 0.5 \right)^{-1/2}}; \quad 2.27.e$$

$$Ma_1 = \frac{1}{A_c} = \frac{D_p}{|U - V_p|^2} \left| \frac{d(U - V_p)}{dt} \right|; \quad 2.27.f$$

$$Ma_2 = \frac{(D_p)^2}{|U - V_p|^3} \left| \frac{d^2(U - V_p)}{dt^2} \right|; \quad 2.27.g$$

$$\phi_r = \frac{Ma_2}{Ma_1} \quad 2.27.h$$

Em Kim et al. (1998) são encontradas algumas comparações entre as equações que representam as forças hidrodinâmicas (sem o termo de Faxén) que agem em uma partícula (esfera) com a solução numérica das equações de Navier-Stokes em torno de uma esfera. Estas comparações mostram um déficit no coeficiente de arrasto, sendo que este déficit cresce com o aumento do Re_p , quando se utiliza a equação 2.3 (sem os termos de Faxén) para o cálculo da força de arrasto em uma esfera. Esta ocorrência se deve ao fato de se desprezar os termos não lineares na obtenção da equação 2.2 (equação de BB0 (Boussinesq, Basset e Ossen)).

2.2 -Força de Sustentação

Poiseuille (1841 apud MICHAELIDES, 1997) observou que as células sanguíneas se afastavam da parede dos capilares. Esta observação foi confirmada por todos os experimentos posteriores, relativos ao movimento de partículas em escoamentos onde as fronteiras não se encontravam no infinito

(exemplo : escoamento em tubos). Como exemplo deste tipo de observação podemos citar Segré e Silberberg (1961), entre outros.

Wallis (1961) diz que, sendo a velocidade do fluido pequena e a distância entre as paredes do duto (fronteiras sólidas do escoamento) grande, podemos desconsiderar o atrito causado pela parede devido à aderência do fluido à mesma, sendo assim os efeitos de parede podem ser desprezados. Se levarmos em conta que nos estudos realizados por Stokes, Boussinesq e outros, as fronteiras do escoamento se encontravam no infinito, é fácil perceber que os efeitos de parede não foram levados em conta na obtenção das equações de BBO. Portanto, surge a necessidade de incluir um termo que leve em conta as modificações que ocorrem no escoamento quando introduzimos o efeito de parede.

O termo a ser incluído, perpendicular à velocidade relativa da partícula, é denominado força de sustentação. A força em questão causa um movimento lateral da partícula ou movimento de migração. Este movimento se deve a diferença de pressão ao longo da superfície da partícula, causada pelo gradiente da velocidade do fluido que está em torno da partícula (efeito Saffman). Outra fonte de sustentação é a rotação da partícula (efeito Magnus).

2.2.1 – Efeito Saffman

Saffman (1965,1968) foi quem mostrou que, mesmo quando a partícula não tem movimento de rotação, surge uma força lateral na partícula. Em uma região do escoamento onde exista o rotacional da velocidade temos uma distribuição de pressão não uniforme na partícula, fazendo com que surja uma força que é perpendicular à direção do escoamento; este efeito é conhecido como efeito Saffman. A expressão para a determinação desta força é dada na forma:

$$F_L^{Saffman} = 1.615 \rho_f \nu_f^{1/2} D_p^2 (U - V_p) \left| \frac{dU}{dy} \right|^{1/2} \sin \alpha \left(\frac{dU}{dy} \right) \quad 2.28$$

onde U é a velocidade do fluido na posição em que o centro de massa da partícula se encontra. A expressão obtida por Saffman (1965,1968) tem sua validade restrita as seguintes condições:

$$\begin{aligned}
 \text{Re}_{\text{Relativo}} &= \frac{|U - V_p|}{V_f} D_p \ll 1 \\
 \text{Re}_{\text{Giro}} &= \frac{w_p D_p^2}{V_f} \ll 1 \\
 \text{Re}_{\text{Re}} &= \frac{\left| \frac{dU}{dy} \right| D_p^2}{V_f} \ll 1 \\
 \varepsilon &= \frac{\text{Re}_{\text{Rotacional}}^{1/2}}{\text{Re}_{\text{Relativo}}} \gg 1
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

Vasseur e Cox (1977) utilizando solução de Ossen, onde parte dos termos de inércia são considerados. Deduziram expressões para força de sustentação e velocidade de migração (ou lateral; que faz a partícula se afastar da parede) da partícula sedimentando nas proximidades de uma parede, num preenchido por um fluido de viscosidade μ_f , com um velocidade U_f pequena ($\text{Re}_p < 1$). Cabe aqui lembrar que o fluido foi estudado sob a hipótese de regime permanente, desta forma os termos de inércia (transiente) na equação do fluido foram desprezados, sendo assim o cálculo da velocidade de migração pela expressão determinada por Vasseur e Cox (1977) tem sua validade limitada.

A força sustentação pode ser escrita na seguinte forma:

$$F_L = \frac{\rho V_{\text{Relativa}}^2 D_p^2 I_L}{4}, \text{ onde } V_{\text{Relativa}} = U - V_p \text{ e } I_L \text{ é força de sustentação adimensional.}$$

Vasseur e Cox (1977) obtiveram uma expressão para I_L , dada por :

$$I_l = \frac{3}{4\pi h_*^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{(\eta^2 + ih_* \eta \cos \xi)^{0.5}}{(-\eta^2 + ih_* \eta \cos \xi)^{0.5}} \left(e^{-\eta} - e^{(-\eta^2 + ih_* \eta \cos \xi)^{0.50}} \right)^2 \eta d\eta d\xi \quad 2.29$$

onde $h_* = \frac{hV_{\text{Relativa}}}{v_f}$, sendo h a distância entre o centro da partícula e a parede.

Quando a partícula está bem próxima à parede, Vasseur e Cox (1977) chegaram à seguinte expressão:

$$I_L = \frac{18\pi}{32} - \frac{198\pi}{1024} h_*^2 + \dots \quad 2.30$$

Já quando a partícula está distante da parede, Vasseur e Cox (1977) chegaram à :

$$I_L = \frac{9\pi}{4} (h_*^{-2} + 2.21901 h_*^{5/2} + \dots) \quad 2.31$$

A velocidade de migração obtida pelos citados autores é dada por :

$$v_m = \frac{V_{\text{Relativo}} \text{Re}_{\text{Relativo}}}{2} I_l \quad 2.32$$

onde I_l é dado por 2.29 ou 2.31 e 2.32 dependendo da distância da partícula à parede.

Na figura 2.2 extraída de Vasseur e Cox (1977) nos mostra as expressões 2.30, 2.31 e ainda a solução numérica de 2.29.

Figura 2.2—Variação de I_L em função de h_* , extraído de Vasseur e Cox (1977).

Cox e Hsu's (1977) obtiveram a seguinte expressão para I_L :

$$I_L = \frac{18\pi}{32} - \frac{66\pi}{64} K \Lambda_G + \frac{366}{576} \Lambda_G^2 \quad 2.33$$

A expressão acima é válida para partículas sem rotação. Já quando a partícula tem rotação, Cox e Hsu's (1977) obtiveram uma expressão diferente, dada por :

$$I_L = \frac{18\pi}{32} - \frac{66\pi}{64} K \Lambda_G + \frac{330}{576} \Lambda_G^2 \quad 2.34$$

onde $\Lambda_G = \frac{\text{Re}_{\text{Rotacional}}}{\text{Re}_{\text{Relativo}}}$ e $K = \frac{D_p}{2h}$, onde h é a distância da parede ao

centro da partícula.

Podemos escrever a equação 2.28 na forma :

$$F_L = \frac{\rho_f}{2} \frac{\pi}{4} D_p^3 CL_{Saffman} \left[(\vec{U} - \vec{V}_p) \frac{dU}{dy} \right] \quad 2.36$$

onde

$$CL_{Saffman} = \frac{4.1126}{Re_{Rotacional}^{0.5}} f(Re_{Rotacional}, Re_{Relativo}) \quad 2.37$$

Dandy e Dwyer (1990) descobriram que a expressão obtida por Saffman (1965,1968) é válida para valores grandes de Re_R e ε pequeno. McLaughlin (1991) mostrou que a força de sustentação diminui com a diminuição do ε .

A correlação para $f(Re_{Rotacional}, Re_{Relativo})$ foi obtida por Mei (1992), que utilizou os dados numéricos obtidos por Dandy e Dwyer (1990), sendo esta dada por :

$$f(Re_{Rotacional}, Re_{Relativo}) = \frac{F_L}{F_{L_{Saffman}}} = (1 - 0.3314\beta^{0.5})e^{-\frac{Re_{Relativo}}{10}} + 0.3314\beta^{0.5} \quad 2.37.a$$

para e $0.10 \leq Re_{Relativo} \leq 40$

$$f(Re_{Rotacional}, Re_{Relativo}) = \frac{F_L}{F_{L_{Saffman}}} = 0.0524(\beta Re_{Relativo})^{0.5} \quad 2.37 b$$

para $40 < Re_{Relativo} \leq 100$

onde

$$\beta = 0.5 \frac{Re_{Rotacional}}{Re_{Relativo}} \quad 2.37.c$$

Mei (1992) também ajustou aos dados de McLaughlin (1991) à seguinte expressão :

$$f(\text{Re}_{\text{Rotacional}}, \text{Re}_{\text{Relativo}}) = \frac{F_L}{F_L^{\text{Saffman}}} = 0.443J(\varepsilon) \quad 2.38$$

onde $J(\varepsilon) = 0.6765[1 + \tanh(2.5 \log_{10} \varepsilon + 0.191)](0.667 + \tanh(6(\varepsilon - 0.32)))$

Figura 2.3 – Esquemas utilizados por Cherrukat e Mclaughlin (1994), Vasseur e Cox (1977) e Cox e Hsu's (1977) para obter o efeito de parede na força de sustentação.

Cherrukat e Mclaughlin (1994), encontraram a seguinte expressão para a força de sustentação adimensional:

$$\begin{aligned} I_L = & (1.7716 + 0.216K - 0.7292K^2 + 0.4854K^3) - \\ & + \left(\frac{3.2397}{K} + 1.145 + 2.084K - 0.9059K^2 \right) \Lambda_G + \\ & + (2.0069 + 1.0575 - 2.4007K^2 + 1.3174K^3) \Lambda_G^2 \end{aligned} \quad 2.39$$

A expressão acima é válida quando a partícula não tem velocidade de rotação. Já quando a partícula tem velocidade de rotação, Cherrukat e Mclaughlin (1994) propuseram a seguinte equação para I_L :

$$\begin{aligned} I_L = & (1.7631 + 0.3561K - 1.1837K^2 + 0.845163K^3) - \\ & + \left(\frac{3.24139}{K} + 2.6760 + 0.8248K - 0.4616K^2 \right) \Lambda_G + \\ & + (1.8081 + 0.879585K - 1.9009K^2 + 0.98149K^3) \Lambda_G^2 \end{aligned} \quad 2.40$$

Considerando partículas isoladas, que se encontravam paradas sobre paredes lisas (ver figura 2.4), onde se desenvolvia uma camada limite turbulenta. Mollinger e Niewstadt (1996) obtiveram a seguinte expressão

$$F_L^+ = 15.57(d^+)^{1.87} \quad 2.41$$

$$\text{onde } d^+ = \frac{D_p u_\tau}{\nu_f} \text{ e } F_L^+ = \frac{F_L}{\rho \nu_f^2}, \text{ sendo } u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_f}} \text{ e } y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu_f}$$

A lei de parede encontrada por Mollinger e Niewstadt (1996) é dada na forma :

$$u_\tau = (33.23 + 36.18U)10^{-3}, \text{ onde } U \text{ é velocidade não perturbada.}$$

Figura 2.4 – Esquema partícula-fluido que ilustra o experimento de Mollinger e Niewstadt (1996).

2.2.2 Efeito Magnus

Rubinow e Keller (1961) deduziram a força de sustentação causada pelo efeito Magnus para um número de Re_p igual a um, obtiveram uma expressão analítica dada por :

$$F_L^{Magnus} = \pi \frac{D_p^3}{8} \rho_f (\vec{\omega}_p \times (\vec{U} - \vec{V}_p)) \quad 2.42$$

onde é a $\vec{\omega}_p$ rotação da partícula.

A rotação que a partícula assume pode ser em decorrência de choque contra paredes, Matsuomoto e Satio (1970) encontraram que as altas velocidades de rotações, que as partículas possam vir a assumir, são decorrentes das colisões entre partículas e paredes. Velocidades de rotação da ordem de 1800 r.p.s., foram mensurados para partículas de vidro, com diâmetro igual a 0,5 mm. Este fenômeno nos mostra que é muito importante a análise das colisões partícula-parede, quando o interesse é estudar o efeito Magnus nas partículas.

A variação temporal da velocidade de rotação da partícula vêm da solução da equação da quantidade de movimento angular, que por sua vez depende do torque aplicado na partícula. Kirchhoff (1876 apud RUBINOW e KELLER, 1961) obteve a expressão para o torque que atua em uma esfera devido ao escoamento que está ao seu redor, tem sua validade restrita a um número de Reynolds pequeno, sendo dada por :

$$\vec{T}_p = -8\pi \left(\frac{D_p}{2} \right)^3 \vec{\omega}_p \quad 2.43$$

A expressão acima pode ser estendida para o caso tridimensional e alto número de Reynolds introduzindo um coeficiente rotacional (*“rotational coefficient”*; CR), sendo assim chegamos a :

$$\vec{T}_p = -\frac{\rho_f}{2} \left(\frac{D_p}{2} \right)^5 CR |\vec{\omega}_{\text{Relativo}}| \vec{\omega}_{\text{Relativo}} \quad 2.44$$

Dennis et al (1980) com dados experimentais obtidos por Sawatzki (1970) encontrou a seguinte expressão para o CR :

$$CR = \frac{12,9}{\text{Re}_R^{0,50}} + \frac{128,4}{\text{Re}_R} \quad 2.45$$

Sendo sua validade restrita a $20 \leq Re_R \leq 1000$ e

$$Re_R = \frac{\rho_f D_p^2 \left| \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{U} - \vec{\omega}_p \right|}{\mu_f}.$$

Crowe et al. (1998) introduziu na equação 2.42 um coeficiente de sustentação (possibilitando assim estender o cálculo das forças para número de Reynolds maiores que 1) e incluiu o efeito do rotacional da velocidade do fluido na força, ficando com a equação para determinação da força devido ao efeito Magnus na forma :

$$F_L^{Magnus} = D_p^2 \frac{\pi}{4} \frac{\rho_f}{2} CL_{Magnus} \left| (\vec{U} - \vec{V}_p) \right| \frac{(\vec{\omega}_R \times (\vec{U} - \vec{V}_p))}{|\vec{\omega}_R|} \quad 2.46$$

onde

$$\vec{\omega}_R = \frac{1}{2} \vec{\omega}_f - \vec{\omega}_p = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{U} - \vec{\omega}_p \quad 2.47$$

Perceber que quando a rotação relativa, $\frac{1}{2} \vec{\omega}_f = \vec{\omega}_p$, temos que a força de sustentação referente ao efeito Magnus é nula.

Desta forma podemos obter o CL_{Magnus} para expressão da força de sustentação obtida por Rubinow e Keller (1961) obtiveram, considerando a hipótese de “creeping flow” a seguinte expressão:

$$CL_{Magnus} = \frac{D_p |\vec{\omega}_R|}{|\vec{U} - \vec{V}_p|} = \frac{Re_R}{Re_{Relativo}} \quad 2.48$$

onde

$$Re_R = \frac{\rho_f D_p^2 |\vec{\omega}_R|}{\mu_f} \quad 2.48.a$$

Oesterlé e Bui Dinh (1998) com dados disponíveis na literatura e experimentos para Reynolds menor que 140 obtiveram a seguinte correlação :

$$CL_{Magnus} = 0.45 + \left(\frac{Re_R}{Re_{Relativo}} - 0.45 \right) e^{(-0.05684 Re_R^{0.4} Re_{Relativo}^{0.3})} \quad 2.49$$

para $10 < Re_{Relativo} < 140$

Cabe aqui ressaltar que o CL_{Magnus} obtido por Oesterlé e Bui Dinh (1998) é igual a :

$$CL_{Magnus} = \frac{FL_{Magnus}}{\frac{1}{2} \rho_f V_{Relativo}^2 A_p}, \text{ onde } \vec{V}_R = |\vec{U} - \vec{V}_p|$$

Desta forma para aplicarmos equação 2.49 diretamente na equação 2.46 temos que considerar que no experimento de Oesterlé e Bui Dinh (1998) os vetores $\vec{V}_{Relativo}$ e $\vec{w}_R$ são perpendiculares, o que é verificado quando analisamos o equacionamento utilizado. Entretanto o experimento possibilita que os citados vetores não sejam perpendiculares. Outro ponto que vale a pena ressaltar é que no citado experimento a partícula se encontra em um fluido com velocidade nula, com rotacional da velocidade deste fluido nulo, colocando em duvida a validade da expressão 2.44 quando o rotacional não for nulo, sendo assim seria questionável a determinação do efeito do rotacional da velocidade com equação 2.49 e equação 2.46.

2.3 Choques com paredes

Com a intenção de obter um modelo que melhor representasse as colisões entre partícula-parede, ou seja, com o objetivo de entender melhor a mecânica das colisões, Matsumoto e Saito (1970) propuseram um modelo baseado nas equações impulsivas. Para tal dividiram as colisões entre partícula-parede em dois tipos, com escorregamento e sem escorregamento da partícula com relação à parede. Para realizar tal divisão se basearam em uma desigualdade que relacionava velocidades translacionais e rotacionais da partícula. No entanto, a empiricidade deste modelo ainda é um fator que limita muito o universo de aplicação do mesmo, já que os valores empíricos (Coeficiente de restituição, atrito estático e dinâmico entre parede e partícula) necessários para sua utilização não são encontrados com facilidade na literatura. O choque é dito sem escorregamento quando:

$$\left| V_{p1}^x - \frac{D_p}{2} w_{p1}^z \right| < \frac{7}{2} \mu_e (1+e) V_{p1}^y \quad 2.50$$

Neste caso a relação entre velocidades antes (subscrito 1) e depois do choque (subscrito 2) é dada por :

$$V_{p2}^y = -e V_{p1}^y \quad 2.51$$

$$V_{p2}^x = \frac{1}{7} (5V_{p1}^x + D_p w_{p1}^z) \quad 2.52$$

$$w_{p2}^z = 2 \left(\frac{V_{p1}^x}{D_p} \right) \quad 2.53$$

Para o choque dito com escorregamento temos :

$$V_{p2}^y = -eV_{p1}^y \quad 2.54$$

$$V_{p2}^x = V_{p1}^x - \mu_d(1+e)V_{p1}^y \varepsilon_0 \quad 2.55$$

$$w_{p2}^z = w_{p1}^z + 5\mu_d(1+e)\frac{V_{p1}^y}{D_p} \varepsilon_0 \quad 2.56$$

onde ε_0 indica a direção da velocidade relativa entre partícula e a parede, sendo dado por:

$$\varepsilon_0 = \sin\left(V_{p1}^x - \frac{D_p}{2}w_{p1}^z\right) \quad 2.57$$

O mesmo equacionamento apresentado acima é encontrado em Oesterlé (1988).

O problema da falta de dados pode ser em parte resolvido se consideramos a relação empírica obtida por Grant e Tabakoff (1975 apud SOMMERFELD, 1992) para o coeficiente de restituição, onde este coeficiente é correlacionado com o ângulo de impacto (ângulo de incidência) da partícula na parede. A expressão obtida por Grant e Tabakoff (1975 apud SOMMERFELD, 1992) é dada por :

$$e = \frac{V_{p1}^x}{V_{p2}^x} = 0.993 - 1.76\alpha_1 + 1.56\alpha_1^2 - 0.49\alpha_1^3 \quad 2.58$$

A rugosidade da parede e as pequenas não esfericidades das partículas alteram o ângulo de impacto, alterando assim as velocidades pós-colisão, Matsumoto e Satio (1970), desenvolveram um modelo, onde este fato era levado em conta. A rugosidade da parede, neste modelo, foi considerada como tendo uma forma senoidal.

Se consideramos que as partículas tem formato esférico, temos que a rugosidade se torna um fator crítico quando as partículas tem diâmetros menores que a mesma. No entanto, quando as partículas forem de diâmetros

muito maiores que a rugosidade, a alteração no ângulo de impacto pode ser desprezado, pois a rugosidade não será percebida por elas.

Levando em conta a discrepância entre os modelos e experimentos, Sommerfeld (1990) propôs um novo modelo, que considerava que a rugosidade da parede causaria uma inclinação virtual na mesma. Desta forma a parede passaria a ter um ângulo (γ - ângulo de rugosidade) com a horizontal, alterando assim o ângulo de impacto da partícula com a parede (a partícula se chocaria com uma parede virtual). A variação do ângulo de rugosidade era tratado de forma simples, sendo obtida pela multiplicação de um número randômico, entre 1 e -1; com igual probabilidade, pelo máximo ângulo de rugosidade (γ). Desta forma, o ângulo de impacto alterado pela rugosidade era obtido pela soma do ângulo de impacto (parede sem considerar a rugosidade) e variação do ângulo de rugosidade. Neste trabalho é encontrada uma tentativa de melhor representar a estrutura da rugosidade da parede ou mesmo a não-esfericidade da partícula, já que a idéia de considerar estes fatores como causadores de alteração no ângulo de impacto não era nova, pois já havia sido abordada por Matsumoto e Satio (1970).

Sommerfeld e Huber (1995 apud SOMMERFELD; HUBER, 1999) a partir de experimentos e simulações numéricas encontraram que a probabilidade do ângulo de rugosidade, pode ser representado pela distribuição normal. Obtiveram a seguinte expressão para o ângulo de impacto:

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + \gamma \xi \quad 2.59$$

onde ξ representa a variável randômica gaussiana, que tem média nula e valor entre 0 e 1.

Sommerfeld e Huber (1999) baseado em três casos possíveis, identificaram a função probabilidade para o ângulo efetivo de rugosidade para uma dada combinação α_1 e γ , a saber :

1 – A partícula não pode atingir a parede quando o ângulo de rugosidade for negativo e menor que α_1 , de onde vem que $f(\alpha_1, \gamma)$ é nula.

2 – A probabilidade da partícula atingir um ângulo de rugosidade com inclinação negativa ($0 < |\gamma_-| < \alpha_1$) é menor que atingir a parede com inclinação nula, onde a diferença na probabilidade é dada por :

$$f(\alpha_1, \gamma) = \frac{\text{sen}(\alpha_1 + \gamma_-)}{\text{sen}(\alpha_1)} \quad 2.60$$

3 – A probabilidade de atingir um ângulo de rugosidade da parede ($\gamma_+ > 0$) é maior que atingir a parede com inclinação nula, sendo esta diferença dada pelo fator:

$$f(\alpha_1, \gamma) = \frac{\text{sen}(\alpha_1 + \gamma_+)}{\text{sen}(\alpha_1)} \quad 2.61$$

Com os fatores acima Sommerfeld e Huber (1999) obtiveram a seguinte expressão para o ângulo de rugosidade efetivo :

$$\gamma_{ef}(\nabla \gamma, \gamma, \alpha_1) = \int_{\alpha_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \nabla \gamma^2}} e^{\left(-\frac{\gamma^2}{2\nabla \gamma^2}\right)} \frac{\text{sen}(\alpha_1 + \gamma)}{\text{sen}(\alpha_1)} d\gamma \quad 2.62$$

2.4 - Considerações

Nesta revisão bibliográfica tentamos levantar todos os trabalhos relevantes referentes à determinação das forças (sustentação e arrasto) que atuam na partícula em movimento, seja ele acelerado ou não, em meios fluidos.

De forma geral podemos verificar a existência de um grande número de modelos, no que tange a determinação das forças de arrasto e de sustentação. Entretanto, nenhum dos trabalhos analisados neste item estuda de forma

comparativa os modelos, sendo assim cabe a nós realizar este trabalho e assim definirmos os modelos que melhor representam os fenômenos envolvidos na movimentação de partículas em fluidos, possibilitando assim alcançar o nosso objetivo final, que é simular partículas em escoamentos.

Por outro lado os efeitos introduzidos pela existência de paredes no escoamento, que fazem surgir forças de sustentação e modificam o arrasto da partícula, parecem não seguir um padrão quando as variáveis envolvidas neste tipo de fenômeno. Alguns autores introduzem a distância da partícula à parede como parâmetro, entretanto este pode ser um fator limitante do modelo. No nosso ponto de vista os modelos que são função apenas do gradiente e do rotacional do campo de velocidades são mais vantajosos, uma vez que sua generalização é imediata. Com o intuito de tornar os modelos mais generalistas, nós vamos modelar os fenômenos que envolvem a existência de paredes, por intermédio de funções que levam em conta o gradiente e o rotacional do campo de velocidades. Para tanto vamos utilizar tanto dados empíricos, extraídos da literatura, quanto simulações numéricas devidamente validadas.

Com os modelos devidamente testados e validados podemos representar qualquer tipo de escoamento, atingindo assim o objetivo final deste trabalho que é em linhas gerais ter um modelo que seja capaz de simular a movimentação de partículas no interior de dutos. Para geometrias mais complexas um programa mais genérico seria necessário, o que a princípio não é o escopo deste trabalho.

Vale ressaltar que os choques entre partícula-partícula e entre partícula-parede, apesar da revisão bibliográfica contemplar estes tópicos, não serão considerados neste trabalho, uma vez que estes dependem de parâmetros empíricos, conforme citado anteriormente, que não são encontrados com facilidade na literatura. A obtenção destes parâmetros dependeria de experimentos que não estão no escopo deste trabalho.

Um tópico que não foi considerado nesta revisão bibliográfica é a variação da temperatura da partícula ao longo de sua trajetória no escoamento.

Este seria de suma importância em estudos de condensação, evaporação e queima da partícula. A equação da variação da massa da partícula apresentado no Capítulo 4 em caráter apenas didático, uma vez que a variação da temperatura e da massa da partícula não fazem parte do escopo deste trabalho. Como referência para este tópico podemos citar entre outros o trabalho de Coimbra e Rangel (2000).

Neste trabalho verificamos que na equação da temperatura, é encontrado um termo semelhante ao termo de Boussinesq/Basset, o que nos induz a supor que os mesmos métodos numéricos, abordados no Capítulo 5, originalmente utilizados para solução do termo de Boussinesq/Basset podem também ser empregados para resolver este termo.

3. EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

A mecânica dos fluidos é um ramo da ciência que estuda o comportamento dos fluidos, onde fluido é definido como sendo uma substância que se deforma continuamente independentemente da magnitude da força que nela atua. Os fluidos são compostos por moléculas em constante movimento, estas moléculas interagem entre si. Para se obter uma descrição realista do fenômeno deveríamos levar em conta no nosso estudo as interações entre as moléculas ou grupos de moléculas, como é feito na Teoria Cinética dos Gases e Mecânica Estatística. Entretanto, para os interesses de engenharia, não é necessário chegar a tal, cabe apenas mensurar grandezas que são decorrentes da ação de grupos, que envolvam grandes números de moléculas, como por exemplo pressão, temperatura e densidade. A engenharia se preocupa com uma visão macroscópica do fenômeno, desta forma se torna conveniente assumir que a matéria se distribua continuamente ao longo do domínio em estudo, isto é o que chamamos de hipótese do contínuo.

Como exemplo do tratamento macroscópico podemos citar a forma como é tratada a viscosidade dinâmica. Isaac Newton descobriu que, para os fluidos chamados de newtonianos, a tensão é diretamente proporcional a taxa de deformação, ou seja:

$$\tau \propto \frac{\partial u}{\partial y}, \quad 3.1$$

onde τ é a tensão de cisalhamento e $\frac{\partial u}{\partial y}$ é a taxa de deformação. Perceber que na equação 3.1 falta o coeficiente de proporcionalidade, conhecido como viscosidade dinâmica (μ). A viscosidade dinâmica é uma propriedade do fluido e representa a dificuldade que o fluido encontra para se movimentar (escoar). Desta forma a Lei da Viscosidade de Newton, tem a forma :

$$\tau = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad 3.2$$

As leis básicas que governam a Mecânica dos fluidos são :

- *Princípio de Conservação da Massa* : A massa não pode ser criada nem destruída.

- *Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento* : A quantidade de movimento é conservada, ou seja, a resultante das forças atuando no fluido é igual à variação da quantidade movimento (2º Lei de Newton).

- *Princípio da Conservação da energia* : A energia é conservada.

Cabe aqui ressaltar a existência de dois métodos para a descrição dos fenômenos físicos, Método de Lagrange e Método de Euler ou espacial. Onde a diferença básica entre estes dois métodos, com respeito a fenômenos de mecânica do fluido, reside na forma como tratamos o volume de controle, ou seja, se tomarmos um volume de controle e acompanhamos este volume ao longo do escoamento estamos nos referindo ao Método de Lagrange. No entanto se considerarmos um volume de controle fixo no espaço, por onde o fluido entra e sai através das superfícies de controle teremos o fenômeno em questão descrito pelo Método de Euler. Vale lembrar que a derivada temporal na descrição euleriana gera uma derivada temporal conhecida como derivada material ou substancial (por se tratar de partículas fluidas). Esta derivada tem dois termos: um termo local, que indica a variação temporal da grandeza em estudo e outro convectivo que indica a uniformidade ou não da mesma grandeza.

A seguir, temos a obtenção das equações de conservação tanto na forma diferencial quanto integral.

3.1 – Equação de conservação da massa

Seja um volume infinitesimal de fluido fixo no espaço (descrição euleriana) conforme a Figura 3.1 :

Fazendo uma análise do fluxo de massa através das faces do volume considerado, obteremos para cada dimensão :

Figura 3.1 – Fluxos de massa associados a um volume infinitesimal de fluido.

Na direção x

$$\left[\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right] dy dz - \rho u dx dy dz = \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz \quad 3.2$$

Na direção y

$$\left[\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy \right] dx dz - \rho v dx dy dz = \frac{\partial \rho v}{\partial y} dx dy dz \quad 3.3$$

Na direção z

$$\left[\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \right] dy dz - \rho u dx dy dz = \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz \quad 3.4$$

O fluxo líquido de massa no elemento da figura 3.1. é dado pela somatória das equações 3.2, 3.3 e 3.4, obtendo desta forma :

$$(\text{Fluxo líquido de massa}) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy dz \quad 3.5$$

A taxa de variação da massa no volume de controle infinitesimal em estudo é dada por :

$$(\text{Taxa de variação de massa}) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dx dy dz, \quad 3.6$$

onde ρ é a massa específica do fluido; u , v e w são respectivamente as componentes da velocidade do escoamento na direção x , y e z .

Não considerando a existência de fontes, sorvedouros ou qualquer descontinuidade no volume em estudo e aplicando o princípio da conservação da massa teremos que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) = 0 \quad 3.7$$

Sabendo que os operadores matemáticos, conhecidos como divergente, quando aplicado a um vetor, por exemplo o vetor velocidade, resulta em :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad 3.8$$

onde,

$$\vec{U} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

Como a massa específica é uma grandeza escalar, temos a partir de 3.8 que a equação da conservação da massa pode ser escrita na forma vetorial, dada por :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad 3.9$$

A equação 3.9 é conhecida como a primeira forma da equação da continuidade ou forma conservativa. A segunda forma, ou forma não conservativa, pode ser obtida desenvolvendo o segundo termo da equação acima. O fato da equação ser ou não conservativa matematicamente não implica em nada. No entanto, se forem numericamente discretizadas, a utilização da forma não conservativa poderá gerar erros devido ao não cancelamento de todos os fluxos através da malha, não respeitando assim o princípio da conservação da massa. Para maiores detalhes ver Maliska (1995), Capítulo 4 páginas 66 e 67.

Na equação 3.9, podemos observar que o seu segundo termo é igual ao fluxo líquido de massa que atravessa as faces do volume de controle infinitesimal da figura 3.1. Desta forma podemos dar uma explicação física para o operador matemático dado em 3.7, o divergente é a diferença entre o que entra e o que sai em um dado volume.

Tomando a equação 3.9 e desenvolvendo o segundo termo, temos :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad 3.10$$

Sabendo que $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho = \frac{D\rho}{Dt}$, é conhecido como derivada material ou substancial. Desta forma teremos 3.10 escrita na forma :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad 3.11$$

A equação 3.11 é a segunda forma, ou forma não conservativa da equação da conservação da massa ou continuidade.

Considere a massa específica do fluido, $\rho = \rho(x, y, z, t)$ em dois instantes t_1 e t_2 , expandindo a massa específica em série de Taylor teremos :

$$\begin{aligned} \rho_2 = \rho_1 + \frac{\partial \rho}{\partial x}(x_2 - x_1) + \frac{\partial \rho}{\partial y}(y_2 - y_1) + \frac{\partial \rho}{\partial z}(z_2 - z_1) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(t_2 - t_1) + \\ + \text{termos de ordem superior} \end{aligned} \quad 3.12$$

Se desprezarmos os termos de segunda ordem e dividirmos a equação 3.12 por $(t_2 - t_1)$, teremos :

$$\frac{(\rho_2 - \rho_1)}{(t_2 - t_1)} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{(y_2 - y_1)}{(t_2 - t_1)} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{(z_2 - z_1)}{(t_2 - t_1)} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad 3.13$$

Fazendo t_2 tender a t_1 termos :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho \quad 3.14$$

Onde $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ é taxa de variação temporal de ρ em ponto fixo e $\vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho$ é o termo convectivo que representa a taxa de variação temporal de ρ devido ao

movimento do elemento de fluido em um escoamento que tem suas propriedades variando espacialmente.

A forma integral da equação da massa pode ser obtida considerando que: a massa contida em uma região do espaço, onde vale a hipótese do contínuo em um dado tempo t é dada pela integral volumétrica da massa específica, ou seja :

$$m = \int_V \rho(x, y, z, t) dV \quad 3.15$$

Para obtermos a forma integral da equação da conservação nós utilizaremos o teorema de transporte de Reynolds. Do princípio da conservação da massa temos que :

$$\frac{Dm}{Dt} = 0 \quad 3.16$$

Sendo m dada por 3.16. Tomando a propriedade intensiva como sendo igual a 1 para a massa, teremos :

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dS \quad 3.17$$

Onde $\vec{n}$ é o versor norma a superfície de controle, apontando para fora da mesma. Se aplicarmos o teorema do divergente¹ a equação 3.17, ficamos com :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{U} dV = 0 \quad 3.18$$

¹ O teorema do divergente ou de Gauss trans forma uma integral de volume em uma integral de superfície.

A equação 3.18 é a forma integral da equação da conservação da massa.

3.2 – Equação de conservação da quantidade de movimento

A equação da quantidade de movimento (qdm) é obtida através da segunda lei de Newton, onde a força resultante é igual à taxa de variação da quantidade de movimento. As forças que atuam em um elemento infinitesimal de fluido, podem ser divididas em forças de campo (agem à distância) e forças de superfície (agem pelo contato). São exemplos do primeiro tipo, o campo gravitacional e campo magnético, já para o segundo tipo temos, força de pressão e forças viscosas (tensões normais e tangenciais), esta última sendo resultado do movimento do elemento fluido.

Tomando o princípio da conservação da qdm na sua forma mais geral, dada por :

$$\vec{F} = \frac{D\vec{U}m}{Dt} \quad 3.19$$

Onde m é massa de fluido, que pode ser obtida pela equação 3.15. No caso em questão a propriedade extensiva é $\vec{U}m$, o que implica $\vec{U}$ ser a propriedade intensiva, aplicando o teorema de transporte de Reynolds para um volume fixo no espaço, teremos que:

$$\vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{U} dV + \int_{SC} \rho \vec{U} (\vec{U} \cdot \vec{n}) dS \quad 3.20$$

O primeiro termo da equação acima representa a variação da qdm no volume de controle, já o segundo termo representa o fluxo de qdm através da

superfície do volume de controle. Aplicando o teorema do divergente no segundo termo da equação 3.20, chegamos a :

$$\vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{U} dV + \int_{VC} \nabla \cdot \rho \vec{U} \vec{U} dV = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) + \nabla \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) dV \quad 3.21$$

A somatória das forças, desconsiderando apenas forças do tipo magnéticas, pode ser dada na forma geral como:

$$\vec{F} = \int_{VC} \rho \vec{g} dV + \int_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS \quad 3.22$$

onde o primeiro termo da equação 3.22 é resultado das forças de campo (no caso gravitacionais), o segundo representa as forças de superfície. Aplicando o teorema do divergente, chegamos a :

$$\vec{F} = \int_{VC} \rho \vec{g} dV + \int_{VC} \nabla \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) dV \quad 3.23$$

Substituindo a equação 3.23 em 3.21 e eliminando a integral de volume da equação resultante, chegamos a :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) + \nabla \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \vec{\sigma} \quad 3.24$$

que é conhecida como forma diferencial da equação qdm. A forma integral pode ser obtida substituindo 3.22 em 3.20. A equação 3.24 é a forma conservativa ou primeira forma da equação da qdm, esta equação escrita na forma inicial é dada por :

$$\partial_t \rho U_k + \partial_j (\rho U_j U_k) = \rho g_k + \partial_j \sigma_{jk} \quad 3.25$$

Podemos reescrever o lado esquerdo da equação, chegando a :

$$\partial_t \rho U_k + \partial_j (\rho U_j U_k) = \rho \partial_t U_k + U_j \rho \partial_j (U_k) + U_k (\partial_t \rho + \partial_j \rho U_j) \quad 3.26$$

Aplicando a equação da continuidade em 3.26 chegamos a :

$$\partial_t \rho U_k + \partial_j (\rho U_j U_k) = \rho \partial_t U_k + U_j \rho \partial_j (U_k) \quad 3.27$$

Substituindo a equação 3.27 em 3.25 chegamos a segunda forma da equação de qdm, também conhecida como forma não conservativa, que na forma vetorial é dada por :

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} \right) = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \vec{\sigma} \quad 3.28$$

O tensor gradiente da velocidade pode ser escrito como a soma de uma parte simétrica e outra antissimétrica, de tal forma que :

$$\nabla \vec{U} = \vec{\vec{D}} + \vec{\vec{R}}$$

onde o primeiro termo é chamado de tensor deformação e o segundo de tensor turbilhão e são dados por :

$$\vec{\vec{D}} = \nabla \vec{U} + \nabla \vec{U}^T \quad 3.29$$

$$\vec{\vec{R}} = \nabla \vec{U} - \nabla \vec{U}^T \quad 3.30$$

Stokes (1845 apud WHITE, 1991) para determinar o tensor das tensões ($\vec{\vec{T}}$), assumiu as seguintes hipóteses :

1– O fluido é um contínuo apolar, ou seja admite-se a simetria do tensor das tensões.

2– O fluido é isotrópico, ou seja não existe direção preferencial para as grandezas que o caracterizam.

3– Linearidade entre tensões e deformações.

Assumindo a validade simultânea das três hipóteses chegamos à expressão para o tensor das tensões na forma :

$$\vec{\sigma} = 2\mu\vec{D} + \lambda(\nabla\vec{U} + \beta)\vec{I} \quad 3.31$$

O parâmetro β pode ser determinado se considerarmos o fluido estático ($\vec{U} = 0$ e $\nabla\vec{U} = 0$), sendo assim :

$$\beta = -p$$

A relação entre μ e λ foi obtida por Stokes. Ele percebeu que a pressão média ou pressão mecânica, definida pela média aritmética das tensões principais do tensor das tensões é diferente da pressão termodinâmica. Para impor que ambas as pressões fossem iguais Stokes (1845 apud WHITE, 1991) postulou que :

$$\frac{2}{3}\mu + \lambda = 0$$

Considerando as duas expressões obtidas chegamos que o tensor das tensões é dado por :

$$\vec{\sigma} = 2\mu\vec{D} - \frac{2}{3}\mu(\nabla\vec{U})\vec{I} - p\vec{I} \quad 3.32$$

onde os dois primeiro termos representam as tensões viscosas ($\vec{\tau}$).

Substituindo 3.32 em 3.24 chegamos á equação de Navier-Stokes, que na forma vetorial é dada por :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{U} + \nabla \rho \vec{U} \vec{U} \right) = \rho \vec{g} + \nabla \cdot (2\mu \vec{D} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{U}) \vec{I}) - \nabla p \quad 3.33$$

3.3 – Equação de conservação da energia

A equação diferencial que representa a primeira lei da termodinâmica (princípio de conservação da energia) é dada por :

$$dE_t = dQ + dW \quad 3.34$$

onde Q é o calor adicionado ao sistema, W é trabalho realizado pelo fluido sobre a vizinhança e E_t é energia total, que para fluidos é soma da energia interna, energia cinética e energia potencial. Para uma partícula fluida a energia total por unidade de volume é dada por :

$$E_t = \rho \left(e + \frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2} + \vec{g} \cdot \vec{r} \right) \quad 3.35$$

Escrevendo na forma de variação temporal seguindo uma partícula fluida; já utilizando a equação 3.35, chegamos a :

$$\frac{DE_t}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\rho \left(e + \frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2} + \vec{g} \cdot \vec{r} \right) \right) = \frac{DQ}{Dt} + \frac{DW}{Dt} \quad 3.36$$

Utilizando a equação da continuidade conseguimos extrair a massa específica de dentro da derivada material, sendo assim ficamos com :

$$\rho \left(\frac{De}{Dt} + \vec{U} \cdot \frac{D\vec{U}}{Dt} + \vec{g} \cdot \vec{U} \right) = \frac{DQ}{Dt} + \frac{DW}{Dt} \quad 3.37$$

Assumindo que a transferência de calor é dada pela lei de Fourier; que não ocorra geração interna de calor e que condutividade térmica (k) do fluido seja constante, teremos que :

$$\frac{DQ}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{q} = -\nabla \cdot k \nabla T = k \nabla^2 T \quad 3.38$$

As outras causas da variação da energia são o trabalho realizado pelas forças de volume (ou campo) e forças de superfície. Sendo que o trabalho das forças de campo já foi incluído na equação. Ficamos então com as forças de superfície, que são causadas tensões viscosas e pela pressão. Assim temos que :

$$\frac{DW}{Dt} = \nabla \cdot (\vec{U} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{\sigma} : \nabla \vec{U} + U \cdot (-\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau}) \quad 3.39$$

O fato do tensor das tensões ser simétrico já foi considerado. Perceber que o segundo termo da equação 3.39 pode ser substituído pela equação 3.33, sendo assim ficamos com :

$$\frac{DW}{Dt} = \nabla \cdot (\vec{U} \cdot \vec{\sigma}) = -p \nabla \cdot \vec{U} + \vec{\tau} : \nabla \vec{U} + \rho \vec{U} \cdot \frac{D}{Dt} (\vec{U}) + \rho \vec{g} \cdot \vec{U} \quad 3.40$$

Substituindo 3.38 e 3.40 em 3.37 chegamos a :

$$\rho \left(\frac{De}{Dt} \right) = -p \nabla \cdot \vec{U} + \vec{\tau} : \nabla \vec{U} + k \nabla^2 T \quad 3.41$$

O termo $p\nabla\cdot\vec{U}$ pode ser reescrito, com auxílio da equação da continuidade chegamos a:

$$p\nabla\cdot\vec{U} = -\frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) - \frac{Dp}{Dt} \quad 3.42$$

A equação 3.42 nos permite escrever a equação 3.41 em função da entalpia, já que esta é dada por : $h = e + \frac{p}{\rho}$, sendo assim temos que :

$$\rho \left(\frac{Dh}{Dt} \right) = \frac{Dp}{Dt} + \vec{\tau} : \nabla \vec{U} + k \nabla^2 T \quad 3.43$$

3.4 – Simplificação das Equações

Os escoamentos considerados neste trabalho serão em todos os casos considerados como laminar e viscosos, o fluido será considerado com viscosidade constante. As variações de temperatura serão consideradas desprezíveis, sendo assim, a equação da energia não será considerada nas soluções numéricas dos escoamentos. As equações de Navier-Stokes ficam na forma :

- Equação da conservação

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad 3.44$$

- Equação da Quantidade de Movimento (qdm)

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \nabla \vec{U} \vec{U} \right) = \rho \vec{g} + \mu \nabla \left(2\vec{\bar{D}} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{U}) \vec{\bar{I}} \right) - \nabla p \quad 3.45$$

A equação 3.45 pode ser escrita em uma forma mais simplificada com auxílio da equação da conservação (3.44), entretanto estas simplificações não foram introduzidas por motivos numéricos que serão mais bem explicados no Capítulo 5.

Sendo a massa específica do fluido considerada constante, temos que garantir que o campo de velocidades gerado pela equação 3.45 satisfaça a equação 3.44, para que a massa do fluido permaneça constante. Para tanto vamos introduzir uma terceira equação (equação de Poisson para pressão), que juntamente com as simplificações não aplicadas na equação 3.45 tentarão fazer com que a equação 3.44 seja respeitada. A metodologia de solução destas equações será apresentada no Capítulo 5.

4 - Equações da Partícula

O movimento da partícula em meios fluidos descrito na forma lagrangiana é dado pela solução de equações diferenciais ao longo de sua trajetória, determinando assim posição, velocidade linear e angular, temperatura e massa da partícula.

Este capítulo se destina à obtenção das equações no que diz respeito à troca de massa (evaporação, combustão, etc), quantidade de movimento linear e angular com o fluido que está ao seu redor.

4.1 Equação de conservação da massa

A equação de conservação da massa aplicada ao sistema definido na figura 4.1 é dado por :

$$\frac{dM}{dt} = 0 \quad 4.1$$

Figura 4.1 – Sistema – A linha tracejada representa a superfície de controle.

Se aplicarmos o teorema de transporte de Reynolds na equação 4.1 teremos :

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho_p dV + \int_{SC} \rho w_i n_i dS = 0 \quad 4.2$$

onde ρ_p é a densidade do material que forma a partícula, ρ_{fv} é a densidade do fluido que se encontra em volta da partícula, $\rho_{fv} w_i$ é a média do fluxo de massa, que atravessa a superfície de controle e n_i é o versor normal a superfície de controle, este versor aponta para fora da superfície.

Percebendo que a integração volumétrica da densidade da partícula é igual a massa da mesma, sendo assim teremos :

$$\frac{dm_p}{dt} = - \int_{SC} \rho_{fv} w_i n_i dS \quad 4.3$$

O termo à direita da equação acima representa a entrada ou saída de massa do sistema em questão. Se a partícula estiver evaporando teremos uma saída de massa, desta forma o produto escalar entre a velocidade (W – vetor velocidade) e versor normal à superfície de controle é positivo, implicando uma saída de massa; fluxo de massa negativo. Já para a condensação o produto escalar é negativo, resultando em fluxo de massa positivo; massa que está entrando no volume de controle.

Tomando o fluxo de massa $\rho_{fv} w_i$ como sendo constante teremos :

$$\frac{dm_p}{dt} = -\rho_{fv} w_i n_i S, \text{ onde } S \text{ é a área da superfície de controle.}$$

A questão principal neste ponto é determinar o fluxo de massa que sai (evaporação) ou entra (condensação) no sistema. A força que rege este fenômeno é a diferença de concentração de vapor entre a superfície da partícula e o fluido que está em volta da mesma. Através da Lei de Fick podemos calcular o fluxo de massa que atravessa a superfície de uma partícula, que está evaporando ou condensado (CROWE, 1977), desta forma chegamos

$$\rho_{fv} W = -D \frac{\partial(\rho_A)}{\partial n} = -\rho_{mistura} D \frac{\partial\left(\frac{\rho_A}{\rho_{mistura}}\right)}{\partial n} \quad 4.4$$

D é o coeficiente de difusão para uma espécie. Chamando a relação entre as densidades de fração em massa, o gradiente da fração em massa deve ser proporcional à diferença entre as frações em massa da superfície da partícula e do fluido ao seu redor. Sendo inversamente proporcional ao seu diâmetro. Desta forma para uma partícula de diâmetro D_p , podemos escrever :

$$\rho_{fv} W \sim -\rho_f D \frac{X_s - X_\infty}{D_p}$$

Perceber que na equação acima a densidade da mistura foi substituída pela densidade do fluido, fato que é válido com exceção de grandes taxas de evaporação ou condensação.

A constante de proporcionalidade é o número de Sherwood (Sh), desta forma chegamos a :

$$\frac{dm_p}{dt} = -Sh \rho_f D \pi \frac{X_s - X_\infty}{D_p} \quad 4.5$$

A expressão para o número de Sherwood é extraída de (CROWE, 1977) e é dada pela seguinte fórmula empírica abaixo.

$$Sh = 2 + 0.6 Re^{0.5} Sc^{0.33} \quad 4.6$$

Onde Sc é o número de Schimidt, que caracteriza a transferência de massa, sendo dado por :

$$Sc = \frac{\mu}{\rho} D \quad 4.7$$

O sinal da diferença entre a fração em massa da superfície da partícula e do fluido ao seu redor, indicará se caso em questão é evaporação ou condensação.

A massa da partícula na equação 4.5 pode ser escrita em função do diâmetro da partícula e de sua densidade, deste modo ficamos com :

$$D_p \frac{d(D_p)}{dt} = -2 \frac{Sh \rho_f D}{\rho_p} \frac{X_s - X_\infty}{D_p} \quad 4.8$$

Na equação 4.8 a densidade da partícula foi considerada constante. Para o caso de evaporação ou condensação parece ser razoável esta aproximação. Já para o caso de secagem de partícula sólida, o que deve ser considerado invariante, no tempo é o diâmetro da mesma e a densidade deve variar com o tempo.

4.2 Equação da quantidade de movimento linear e angular

A segunda lei de Newton quando aplicada a uma partícula, nos diz que a massa vezes a aceleração é igual à somatória das forças que agem na partícula. Desta forma teremos a equação da quantidade de movimento linear dada por :

$$m_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \vec{F} \quad 4.9$$

Onde $\vec{F}$ representa as forças responsáveis pelo movimento da partícula. Estas forças podem ser subdivididas em força de campo (ex.: peso - campo gravitacional) e forças de superfície que são resultado do movimento do fluido que está ao seu redor (força de arrasto e sustentação). Sendo que este último grupo de forças representa o acoplamento da quantidade de movimento entre as fases. A determinação desta força ainda é motivo de pesquisa,

experimental, analítica ou mesmo numérica. Estas forças podem ser classificadas quanto à sua direção; se alinhadas com a direção do movimento da partícula são conhecidas como forças de arrasto; se são perpendiculares são denominadas forças de sustentação.

As forças de arrasto que agem em uma partícula (resistência que o fluido oferece ao movimento da partícula) podem ser divididas em dois tipos; forças dependentes e independentes dos termos inerciais da equação da quantidade de movimento aplicada ao fluido (equação de Navier-Stokes) que escoam em torno da partícula. Esta dependência está ligada à desconsideração total ou parcial dos termos de inércia da equação de Navier-Stokes.

Os efeitos causados pelas partículas que se movimentam no fluido, são efeitos transientes, ou seja, as mudanças que ocorrem na velocidade do fluido são dependentes do tempo; desta forma se torna impraticável a hipótese de regime permanente. Este fato se dá em decorrência da variação da velocidade da partícula (V_p) com o tempo. Entretanto se considerarmos que a partícula se movimenta com velocidade constante e adotarmos um referencial solidário à mesma, teremos a possibilidade de adotar a hipótese de regime permanente. No que diz respeito à solução de Stokes (1851) e Ossen (1910,1913) se tal possibilidade não for aplicável ocorrerá uma total desconsideração da variação temporal de V_p , já que nestas soluções os termos de inércia da equação de Navier-Stokes são totalmente (Stokes) ou parcialmente (Ossen) desprezados.

No caso em que a partícula tem aceleração, são adicionados dois termos ao arrasto, um que leva em conta a massa de fluido que a partícula tem que acelerar ou desacelerar (força de massa virtual) e outro que leva em conta mudanças na camada limite da partícula, sendo este último geralmente atribuído a Boussinesq (1885) e Basset (1888), que obtiveram de forma independente a expressão para esta força (equação 2.2 – terceiro termo).

A força de sustentação é dividida em dois grupos de acordo com o fenômeno físico pelo qual é gerada. Um grupo está relacionado à existência de gradientes no campo de velocidade do fluido (efeito Saffman) e outro à rotação da partícula (efeito Magnus). Sendo que este último é geralmente desprezado

nos artigos encontrados na literatura, já que envolve a dinâmica dos choques entre partícula-parede e partícula-partícula.

Experimentalmente as forças que atuam na partícula são mensuradas por meio da medida de uma força resultante, a divisão na forma exposta acima é uma tarefa difícil. De forma geral esta divisão é feita considerando os efeitos de forma isolada, desta maneira os modelos obtidos determinam as forças isoladamente.

Se considerarmos uma malha computacional capaz de representar todos os fenômenos que ocorrem no escoamento em torno de uma partícula. O FLUENT, com a malha descrita anteriormente, com um ajuste transiente e que permita seis graus de liberdade para partícula é capaz de determinar as forças de arrasto e sustentação.

Introduzindo todas as forças citadas acima na equação 4.9 e incluindo a força peso e empuxo, temos que :

$$m_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \vec{F}_{Peso} + \vec{F}_{Empuxo} + \vec{F}_{Arrasto} + \vec{F}_{Boussinesq} + \vec{F}_{Aparente} + \vec{F}_{Saffman} + \vec{F}_{Magnus} \quad 4.10$$

Outras forças, como por exemplo forças magnéticas não serão consideradas neste trabalho.

As expressões para as forças citadas serão apresentadas nos sub itens que se seguem. No entanto antes de prosseguir, iremos enunciar a expressão para a quantidade de movimento angular, que é dada por :

$$I_p \frac{d\vec{\omega}_p}{dt} = \vec{T}_p \quad 4.11$$

onde I_p é o momento de inércia da partícula, $\vec{\omega}_p$ a velocidade de rotação da partícula e $\vec{T}_p$ é o torque aplicado à partícula pelo escoamento que está ao seu redor. A expressão para o torque é encontrada no item 4.2.4.

4.2.1 – Peso e Empuxo

A força peso que age em uma partícula, que neste trabalho será considerada esférica, pode ser obtida através da seguinte expressão :

$$\vec{F}_p = m_p \vec{g} \quad 4.12$$

onde $\vec{g}$ é um vetor que representa a aceleração da gravidade e m_p é a massa da partícula, que para o nosso caso é dada por :

$$m_p = \rho_p Vol_p = \frac{1}{6} \pi D_p^3 \rho_p \quad 4.13$$

Desta forma ficamos com a força peso sendo dada por :

$$\vec{F}_p = \frac{1}{6} \pi D_p^3 \rho_p \vec{g} \quad 4.14$$

O empuxo, segundo o princípio de Arquimedes, que em linhas gerais diz: que a força que é exercida em um corpo submerso num fluido é igual ao volume de fluido deslocado vezes a aceleração da gravidade, desta forma temos :

$$\vec{F}_E = -\frac{1}{6} \pi D_p^3 \rho_f \vec{g} \quad 4.14$$

O sinal negativo na equação 4.14 indica que esta força tem o contrário da força peso.

4.2.2 – Força de Arrasto

4.2.2.1 - Forças Não Transientes

O Arrasto não transiente, ou arrasto de Stokes pode ser obtido considerando o movimento de uma esfera em um fluido sem fronteiras sólidas com uma velocidade uniforme (U), conforme figura 4.2. As forças atuantes na esfera são seu próprio peso (F_P), força de arrasto de Stokes (F_{AZ}) e o empuxo (F_E) decorrente do fluido que está em torno da esfera, desta forma teremos:

$$\frac{dm_p \vec{V}}{dt} = \vec{F}_E + \vec{F}_P + \vec{F}_{AS} \quad 4.15$$

Tomando as equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível e com o número de Reynolds (Re ; relativo ao diâmetro da partícula) tendendo a zero, obteremos as chamadas equações de Stokes, dadas na forma inicial por:

Figura 4. 2 Configuração do Escoamento

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \rho f_i \quad 4.16$$

É fácil notar que esta equação independe do tempo, daí o nome para a força obtida por meio da solução desta equação. Stokes em 1851 obteve a solução para a referida equação. No anexo A temos a obtenção da solução da equação 4.16.

Da equação A.24, anexo A vêem que a equação da quantidade de movimento da partícula obtida por Stokes (1851) é dada por :

$$m_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \vec{F} = F_{Arrasto} \hat{i} + (F_E - F_p) \hat{j} = 3\mu\pi D_p \vec{V}_r + \frac{1}{6} D_p^3 \pi (\rho_f - \rho_p) \hat{j} \quad 4.17$$

O primeiro termo da equação 4.17 é a soma do arrasto de pressão e de arrasto devido às forças de cisalhamento na superfície da partícula, que a partir de agora será chamada de força de arrasto de Stokes. Já o segundo termo é a diferença entre força de empuxo e a força peso.

Definindo a força de arrasto como sendo :

$$F_{Arrasto} = CD \frac{1}{2} \rho_f V_r^2 A_p \quad 4.18$$

onde A_p é a área projetada da partícula na direção do escoamento, sendo, para uma esfera igual a :

$$A_p = \frac{\pi}{4} D_p^2$$

Sendo assim podemos obter o coeficiente de arrasto (CD) para a força de arrasto de Stokes, que fica sendo :

$$CD_{Stokes} = \frac{3\mu\pi D_p V_r}{\frac{1}{2} \rho_f V_r^2 \frac{\pi}{4} D_p^2} = \frac{24\mu}{\rho_f V_r D_p}$$

Sendo que $\frac{\rho_f V_r D_p}{\mu}$ é o número de Reynolds (Re_p) baseado na velocidade relativa e no diâmetro da partícula. Desta forma chegamos ao coeficiente de arrasto de Stokes que é dado por :

$$CD_{Stokes} = \frac{24}{Re_p} \quad 4.19$$

Na solução proposta por Stokes existe uma inconsistência, que pode ser verificada analisando a forma adimensional da equação de Navier-Stokes em regime permanente. Nesta fórmula é possível perceber quando a adimensionalização é feita em função de U (velocidade uniforme do fluido), r_p (raio da partícula) e d (distância da partícula até o ponto em estudo), teremos que ordem de grandeza do termo convectivo é $U^2 dp/r_p$, enquanto que do termo viscoso é $U\mu(d/r_p)^2$. Sendo assim teremos que a razão entre o termo viscoso e o convectivo é dada por : D_p/Re_p . Isto nos mostra que a uma certa distância da partícula o termo convectivo passa a ter a mesma ordem de grandeza do termo viscoso, desta forma a hipótese de Stokes só tem validade para regiões distantes da partícula; onde a razão entre os termos viscosos e convectivos seja muito maior que 1. Sendo tudo o que foi dito válido para Re_p pequeno ("Creeping flow").

Ossen (1913) obteve a solução para equação de Navier-Stokes levando em conta parte dos termos convectivos, para maiores detalhes ver anexo A item 2, onde temos a solução de Ossen em detalhes.

Da equação A.43 temos que a força de arrasto obtida por Ossen (1913) é dada por :

$$F_{Ossen} = 3\pi r_p \mu_f \left(1 + \frac{3}{16} Re_p \right) \quad 4.20$$

Ou em função do coeficiente de arrasto, temos que :

$$CD_{Ossen} = \frac{24}{Re_p} \left(1 + \frac{3}{16} Re_p \right) \quad 4.21$$

Comparando a 4.21 com a equação 4.19, vemos que a introdução dos termos inerciais (apenas termos convectivos) na equação de Navier-Stokes gera uma correção no arrasto de Stokes. O que nos leva a :

$$CD_{Os\ sen} = CD_{Stokes} f_{Os\ sen} (Re_p) \quad 4.20$$

Seguindo na mesma linha de pensamento podemos introduzir uma correção que leva em conta todos os termos inerciais da equação de Navier-Stokes. Esta função, assim como em 4.19 deverá ser função do número de Reynolds, sendo assim ficamos com :

$$CD = CD_{Stokes} f(Re_p) \quad 4.21$$

A função $f(Re_p)$ é obtida de forma empírica, na literatura encontramos diversas formas para esta função, que podem ser encontradas na tabela 2.1 do capítulo 2. As formulações empíricas destas tabelas podem ser generalizadas pela :

$$f(Re_p) = \left(A + B Re_p^m + \frac{C Re_p^n}{(E + D Re_p^o)} \right) \quad 4.22$$

Onde A, B, C, D, E, n, m e o são constantes a serem determinadas. A expressão acima se ajusta a todas as fórmulas empíricas apresentados na tabela 2.1.

Da equação 2.6 temos a expressão para $f(Re_p)$. Sendo assim ficamos com

$$CD = CD_{Stokes} \left(A + B Re_p^m + \frac{C Re_p^n}{(E + D Re_p^o)} \right) \quad 4.22.a$$

Com a expressão 4.22.a somos capazes de determinar o arrasto da partícula levando em conta parte dos termos inerciais (termos convectivos) da equação de Navier-Stokes. Nas expressões teóricas (STOKES, 1851 e OSSEN, 1913) e nas expressões empíricas (generalizadas pela equação 4.22), temos o fluido em regime permanente. Também vale a pena ressaltar que não foi considerado até agora a variação temporal da velocidade da partícula. Se introduzirmos as citadas variações temporais temos a adição de novas forças, que são dependentes da aceleração do fluido e partícula. As forças de arrasto dependentes da aceleração ou forças de arrasto transiente são o escopo do próximo item.

Com os modelos empíricos (tabela 2.1) estamos suavizando a hipótese de “Creeping flow”, possibilitando assim uma aplicação mais ampla da equação 4.22.

4.2.2.3 - EFEITO DA ACELERAÇÃO DA PARTÍCULA

A aceleração de um corpo envolvido por um fluido terá como efeito o surgimento de uma força contrária devido à aceleração que surgirá no fluido. Implicando um trabalho adicional a ser realizado pelo corpo. A força associada a este trabalho damos o nome de massa virtual ou aparente (“virtual mass” ; “apparent mass”) podemos também encontrar na literatura como “added mass”, este nome se justificará pela forma deste termo, já que terá uma parcela que será equivalente a somarmos massa à partícula.

Este item se destina ao cálculo deste tipo de efeito em uma partícula, para tal vamos considerar que o fluido é invisível e incompressível; o referencial adotado será solidário à partícula.

Tomando uma partícula que se movimenta em um fluido, com as características citadas, com velocidade relativa V_r teremos que a velocidade do escoamento pode ser dada pelo potencial de velocidades, assim sendo, ficamos com :

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \phi \quad 4.23$$

Se aplicarmos a este campo de velocidades a equação da continuidade, teremos que o laplaciano de ϕ é zero, resolvendo esta equação diferencial chegaremos ao potencial de velocidades.

Para o cálculo da força adicional devido a aceleração do fluido teremos que determinar a energia cinética necessária para movimentar o fluido, já que o trabalho adicional é determinado pela variação temporal da energia cinética, sendo assim teremos :

$$V_r F_{Aparente} = \frac{dE_c}{dt} \quad 4.24$$

Já energia cinética para o fluido que está ao redor da partícula é dado por :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho_f \int_V u^2 dV$$

onde V representa o volume infinitesimal e u a velocidade fluido. Substituindo 4.23 nesta expressão, teremos :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho_f \int_V (\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \phi) dV \quad 4.25$$

Perceber que :

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \phi) = \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi + \phi \nabla^2 \phi \quad 4.26$$

Da equação da continuidade temos que o segundo termo desta equação é igual zero. Substituindo 4.25 em 4.26 e aplicando o teorema do divergente (transforma uma integral de volume em uma de superfície), ficamos com :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho_f \int_{SC} (\phi \vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{n} dA \quad 4.26$$

onde $\vec{n}$ é o versor que aponta para fora da superfície de controle (normal à superfície).

Agora cabe determinar o potencial de velocidades para que possamos encontrar a força extra que a partícula tem para poder se acelerar em um meio fluido.

Por meio da teoria de singularidades (ANDERSON, 1991) podemos determinar o potencial de velocidades. Para tal vamos usar um dipolo tridimensional “Three-dimensional Dipole”), o que nos leva a :

$$\phi = -\frac{\eta}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r^2} \quad 4.26.a$$

Lembrado que, devido à hipótese de aderência do fluido à partícula, a velocidade na direção do raio deve ser igual a $V_r \cos \theta$ quando r (distância do centro da partícula ao ponto em que se deseja determinar a velocidade) for igual a r_p (raio da partícula), assim a intensidade do dipolo é:

$$\eta = V_r 2\pi r_p^3 \quad 2.26.b$$

Assim o potencial de velocidades é dado por :

$$\phi = -\frac{V_r r_p^3}{2} \frac{\cos \theta}{r^2} \quad 4.27$$

Substituindo 4.27 em 4.26 teremos,

$$E_c = \frac{1}{2} \rho_f \int_{SC} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \dots \right) \cdot \vec{e}_r dA \Big|_{r=r_p} = \frac{1}{2} \rho_f \int_{SC} \frac{V_r^2}{2} r_p \cos^2 \theta (2\pi \sin \theta r_p^2 d\theta) = \frac{\pi \rho_f r_p^3 V_r^2}{3} \quad 4.28$$

O trabalho necessário para alterar a energia cinética dada acima é :

$$V_r F_{aparente} = \frac{dE_c}{dt} = \frac{2\pi \rho_f r_p^3}{3} V_r \frac{dV_r}{dt} \quad 4.28.a$$

Basta dividir os dois lados da equação 4.28.a por V_r para obtermos a força “aparente”. Lembrando que a velocidade relativa é a diferença entre a velocidade do fluido pela velocidade da partícula, teremos :

$$F_{aparente} = \frac{m_f}{2} \left(\frac{d\vec{V}_p}{dt} - \frac{D\vec{u}}{Dt} \right) \quad 4.29$$

O termo $\frac{D\vec{u}}{Dt}$ é a derivada material da velocidade do fluido. A força representada por 4.29 é a força que a partícula exerce no fluido para variar sua aceleração, já a força de arrasto, ou que atua na partícula é de mesma magnitude porém com o sentido contrário, o que implicaria uma mudança do sinal dos termos que estão entre parênteses.

Maxey e Riley (1983) obtiveram as forças, dadas pela equação 4.30, que atuam em uma partícula quando está imersa em um escoamento com velocidades baixas (“*creeping flow*”), obtendo forças atribuídas à Boussinesq (1885), Basset (1888) e Ossen (1927), forças de Boussinesq-Basset (FBB); à Faxén (1922), efeito da existência de gradientes no escoamento, entre outras.

$$\begin{aligned}
\vec{F}_p = & 3\pi D_p \mu_f \left(\vec{U} - \vec{V}_p + \frac{1}{6} \left(\frac{D_p}{2} \right)^2 \nabla^2 \vec{U} \right) + \\
& + m_f \frac{D\vec{U}}{Dt} + \frac{1}{2} m_f \left(\frac{d}{dt} \left(\vec{U} + \frac{1}{10} \left(\frac{D_p}{2} \right)^2 \nabla^2 \vec{U} \right) - \frac{d\vec{V}_p}{dt} \right) + \\
& + 6\pi \left(\frac{D_p}{2} \right)^2 \mu_f \int_0^t \left(\frac{\frac{d}{d\tau} \left(\vec{U} + \frac{1}{6} \left(\frac{D_p}{2} \right)^2 \nabla^2 \vec{U} \right) - \frac{d\vec{V}_p}{d\tau}}{\sqrt{\pi \nu_f (t - \tau)}} \right) d\tau + (m_p - m_f) \vec{g}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

A força de Boussineq-Basset que aparece na equação 4.30 é a dependente da aceleração da partícula que sem efeitos de gradientes é dada na forma :

$$FBB = 6\pi \left(\frac{D_p}{2} \right)^2 \mu_f \int_0^t \left(\frac{\frac{d\vec{U}}{d\tau} - \frac{d\vec{V}_p}{d\tau}}{\sqrt{\pi \nu_f (t - \tau)}} \right) d\tau \tag{4.31}$$

Na revisão bibliográfica encontramos formulações corrigidas para a expressão 4.31 e também formulações diferentes para avaliar o efeito da aceleração na força de arrasto. No capítulo 6 avaliaremos estas correções e formulações.

4.2.3 – Sustentação

Em uma região do escoamento onde exista um gradiente de velocidade temos uma distribuição de pressão não uniforme na partícula, fazendo com que surja na partícula uma força que é perpendicular à direção do escoamento, este efeito é conhecido como efeito Saffman. A expressão para a determinação desta força de sustentação foi obtida por Saffman (1965,1968), sendo dada na forma :

$$F_L^{Saffman} = 1.615 \rho_f \nu_f^{1/2} D_p^2 (U - V_p) \left| \frac{dU}{dy} \right|^{1/2} \sin al \left(\frac{dU}{dy} \right) \quad 4.32$$

A expressão é restrita as condições citadas no item 2.2.1. incluindo uma correção para número de Reynolds altos, teremos :

$$F_L = 1.615 \rho_f \nu_f^{1/2} D_p^2 \left(\frac{1}{\left| \frac{dU}{dy} \right|} \right)^{1/2} \left[(\vec{U} - \vec{V}_p) \frac{dU}{dy} \right] \sin al \left(\frac{dU}{dy} \right) f(\text{Re}_{Rotacional}, \text{Re}_{Relativo}) \quad 4.33$$

onde $f(\text{Re}_{Rotacional}, \text{Re}_{Relativo})$ é dado pelas relações encontradas na revisão bibliográfica e serão analisados no capítulo 7.

Partículas que por algum motivo venham a adquirir velocidade de rotação experimentarão uma sustentação em decorrência do efeito Magnus, Rubinow e Keller (1961) obtiveram uma expressão analítica para força decorrente deste efeito, dada por :

$$F_L^{Magnus} = \pi \frac{D_p^3}{8} \rho_f (\vec{\omega}_R \times (\vec{U} - \vec{V}_p)) \quad 4.34$$

Crowe et al. (1998) introduziu na equação 4.33 um coeficiente de sustentação, ficando com a citada equação na forma :

$$F_L^{Magnus} = D_p^2 \frac{\pi}{4} \frac{\rho_f}{2} C_{L_{Magnus}} \left| (\vec{U} - \vec{V}_p) \right| \frac{(\vec{\omega}_R \times (\vec{U} - \vec{V}_p))}{|\vec{\omega}_R|} \quad 4.35$$

Onde as formulações para o coeficiente de sustentação de Magnus podem ser encontradas na revisão bibliográfica.

Resumindo, as forças de sustentação que atuam na partícula tem duas origens ligadas a existência de gradientes de velocidade no escoamento e rotação da partícula, efeito Saffman e efeito Magnus respectivamente. Para ambos os efeitos, foram encontrados diversas formulações, que serão analisadas e comparadas com dados experimentais (extraídos da literatura) e dados numéricos no Capítulo 7.

4.2.4 – Torque

O torque pode ser obtido pela expressão obtida por Kirchhoff (1876 apud RUBINOW e KELLER, 1961), dada pela equação 2.38 e para o caso tridimensional pela equação 2.39. A partir da equação 2.38, podemos obter o coeficiente rotacional ou torque adimensional para a expressão de Kirchhoff (1876 apud RUBINOW e KELLER, 1961), o que nos leva a:

$$CR = \frac{64\pi}{Re_R} \quad 4.36$$

Sendo sua validade limitada a número de Reynolds baixos. Já para uma faixa maior de validade tomamos o CR obtido por Dennis et al. (1980) que é dado por :

$$CR = \frac{12,9}{Re_R^{0,5}} + \frac{128,4}{Re_R} \quad 4.37$$

Na Figura 4.3 temos a comparação entre os coeficientes, com os dados experimentais obtidos por Sawatzki (1970) apud Dennis et al. (1980), perceber que a curvas da equações 4.36 e 4.37 se cruzam em Re_R igual 20. Da citada figura podemos constatar que a expressão obtida por Dennis et al. (1980) representa bem os dados experimentais para Re_R maior que 20, para valores

menores que 20 observamos que a expressão de Kirchhoff (1876 apud RUBINOW e KELLER, 1961) representa melhor os dados experimentais.

Por fim o torque pode ser obtido por :

$$\vec{T}_p = -\frac{\rho_f}{2} \left(\frac{D_p}{2} \right)^5 CR |\vec{w}_R| \vec{w}_R \quad 4.38$$

4.3 - Considerações

A equação da conservação da massa, da partícula foi incluída neste trabalho apenas com fins didáticos. Uma vez que esta não será utilizada neste trabalho. A massa da partícula será considerada invariante com o tempo. A variação da massa da partícula estaria relacionada com evaporação, condensação ou mesmo queima da mesma, estes fenômenos estão relacionadas ao histórico de temperatura da partícula e trocas de calor com fluido, sendo necessária uma equação que avaliasse a temperatura e as trocas de calor entre partícula e fluido, fugindo assim do escopo do presente trabalho.

Figura 4. 3 – CR em função de Re_R .

Assim como exposto na revisão bibliográfica, percebemos a falta de um trabalho que comparasse os modelos que determinam as forças que atuam na partícula ao longo de sua trajetória, sendo esta de suma importância para se atingir o objetivo deste trabalho, faremos uma análise comparativa dos modelos de previsão destas forças.

No Capítulo 6 analisaremos os modelos encontrados na bibliografia para determinação do arrasto (estacionário e não estacionário). Quando for o caso, estas análises serão realizadas por meio de comparações com dados empíricos encontrados na literatura.

No Capítulo 7 faremos o mesmo com os modelos de previsão da força de sustentação, para tanto utilizaremos dados experimentais e dados numéricos obtidos com pacote comercial FLUENT, estes serão validados com dados experimentais se for possível encontrar estes dados na literatura.

5 – MÉTODOS NUMÉRICOS

Neste capítulo iremos abordar os métodos numéricos utilizados para solução das equações de Navier-Stokes e da quantidade de movimento da partícula. Iremos também abordar a metodologia que utilizaremos para acoplar as fases.

Para testar o programa que resolve o escoamento serão analisados escoamentos entre placas planas em dado tempo (transiente) e ainda em um escoamento desenvolvido, as soluções serão comparadas com a solução de Blasius e perfil parabólico, respectivamente.

Para validar o cálculo da força de Boussinesq/Basset utilizaremos dados experimentais extraídos de Mordant e Pinton (2000) onde são realizados experimentos com partículas em queda livre em um fluido estagnado.

O acoplamento entre fluido-partícula em duas mãos será testado e analisado no Capítulo 8, para tal utilizaremos os casos: partículas em queda livre e em escoamentos com gradientes de velocidade.

5.1 – Navier Stokes

O interesse neste trabalho é resolver escoamentos incompressíveis modelados pelas equações de Navier-Stokes dadas por :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{U} + \nabla \rho \vec{U} \vec{U} \right) &= \rho \vec{g} + \nabla \cdot \left(2\mu \vec{\vec{D}} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{U}) \vec{I} \right) - \nabla p \end{aligned} \quad , \quad 5.1$$

onde $\vec{\vec{D}} = \nabla \vec{U} + \nabla \vec{U}^T$

O método de discretização das equações utilizado será o método dos volumes finitos, que consiste basicamente em fazer o balanço de propriedades em estudo em um volume elementar ou volume finito, ou ainda integrar

especialmente e com relação ao tempo as equações de Navier-Stokes sobre um volume finito.

Para tal vamos reescrever as equações de Navier-Stokes bidimensionais de forma a facilitar o trabalho. A equação 5.1 em sua forma bidimensional pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho u \phi}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S^\phi \quad 5.2$$

onde, para equação da conservação da massa temos :

$$\phi = \rho, \quad \Gamma^\phi = 0 \quad \text{e} \quad S^\phi = 0 \quad 5.2.a$$

Para a quantidade de movimento em x temos :

$$\phi = u, \quad \Gamma^u = \mu_f \quad \text{e} \quad S^u = B_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{U} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \quad 5.2.b$$

Para a quantidade de movimento em y temos :

$$\phi = v, \quad \Gamma^v = \mu_f \quad \text{e} \quad S^v = B_y + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_f \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu_f \nabla \cdot \vec{U} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \mu_f \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \quad 5.2.c$$

Os termos B_x e B_y são os termos que farão o acoplamento entre as fases. Na equação da conservação não teremos a derivada temporal, já que os escoamentos serão considerados incompressíveis.

O volume onde faremos a integração da equação diferencial 5.2 será definida pela malha, no nosso caso todas as propriedades serão armazenadas no nó. As faces dos volumes se encontram na metade das distâncias entre os nós, na figura 5.1 temos a representação do volume.

Figura 5.1 – Volume definido pela malha.

Integrando a equação 5.2 no volume de controle centrado no nó P definido na figura 5.1, temos :

$$\begin{aligned} \int_{V,t} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dV dt + \int_{V,t} \frac{\partial \rho u \phi}{\partial x} dV dt + \int_{V,t} \frac{\partial \rho v \phi}{\partial y} dV dt = \\ \int_{V,t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dV dt + \int_{V,t} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dV dt + \int_{V,t} S^\phi dV dt \end{aligned} \quad 5.3$$

Tomaremos que as propriedades serão avaliadas no meio das faces do volume e representarão a média da variação na face, desta forma teremos :

$$\begin{aligned} \rho \phi \Big|_p^{t+\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z + \rho \phi \Big|_p^t \Delta x \Delta y \Delta z + \rho u \phi \Big|_e^\theta \Delta y \Delta z \Delta t - \rho u \phi \Big|_w^\theta \Delta y \Delta z \Delta t + \rho v \phi \Big|_n^\theta \Delta x \Delta z \Delta t - \rho v \phi \Big|_s^\theta \Delta x \Delta z \Delta t = \\ \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e^\theta \Delta y \Delta z \Delta t - \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_w^\theta \Delta y \Delta z \Delta t + \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_n^\theta \Delta x \Delta z \Delta t - \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_s^\theta \Delta x \Delta z \Delta t + L[S^\phi]^\theta \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \end{aligned} \quad 5.4$$

Para o caso bidimensional Δz é igual 1. O termo fonte S^ϕ será tratado de forma diferente, adiante voltaremos ao termo fonte.

A função de interpolação no tempo é dada por :

$$\phi^\theta = \theta \phi^{t+\Delta t} + (1-\theta) \phi^t \quad 5.5$$

Se tomarmos $\theta = 0$ temos a formulação explícita, para $\theta = 1$ temos a formulação totalmente implícita, utilizaremos a formulação totalmente implícita pois esta permite avanços no tempo maior que a formulação explícita. Desta forma ficamos com :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho \phi \Big|_P^{t+\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z - \rho \phi \Big|_P^t \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} + \dot{m}_e \phi \Big|_e^{t+1} - \dot{m}_w \phi \Big|_w^{t+1} + \dot{m}_n \phi \Big|_n^{t+1} - \dot{m}_s \phi \Big|_s^{t+1} = \\ & \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e^{t+1} \Delta y \Delta z - \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e^{t+1} \Delta y \Delta z + \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_n^{t+1} \Delta y \Delta z - \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_s^{t+1} \Delta y \Delta z + L[S^\phi]^{t+1} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad 5.6$$

Como todas as propriedades estão nos nós da malha temos que obter os valores destas propriedades no centro da face, para tanto vamos utilizar o método de interpolação apresentado em Maliska (1995), o de interpolação unidimensional esquema WUDS é dado por :

Para os termos convectivos temos :

$$\begin{aligned} \phi_e &= \left(\frac{1}{2} + \alpha_e \right) \phi_P + \left(\frac{1}{2} - \alpha_e \right) \phi_E \\ \phi_w &= \left(\frac{1}{2} + \alpha_w \right) \phi_W + \left(\frac{1}{2} - \alpha_w \right) \phi_P \\ \phi_n &= \left(\frac{1}{2} + \alpha_n \right) \phi_P + \left(\frac{1}{2} - \alpha_n \right) \phi_N \\ \phi_s &= \left(\frac{1}{2} + \alpha_s \right) \phi_S + \left(\frac{1}{2} - \alpha_s \right) \phi_P \end{aligned} \quad 5.7$$

Para os termos difusivos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e &= \beta_e \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_e} \\
\Gamma_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w &= \beta_w \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_w} \\
\Gamma_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_n &= \beta_n \Gamma_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta x_n} \\
\Gamma_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_s &= \beta_s \Gamma_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta x_s}
\end{aligned}
\tag{5.8}$$

Os coeficientes α e β são dados pela expressão:

$$\alpha_i = \frac{Pe_i^2}{10 + 2Pe_i^2} \tag{5.9}$$

$$\beta_i = \frac{1 + 0.005Pe_i^2}{1 + 0.05Pe_i^2} \tag{5.10}$$

onde Pe é número de Peclet sendo dado por :

$$Pe_i = \frac{\dot{m}_i}{D_i} \tag{5.11}$$

O índice i se refere à face, ou seja, i pode ser e, w, n e s , para o nosso caso. Para as faces do volume de controle da figura 5.1 temos:

$$\begin{aligned}
 \dot{m}_e &= \rho u \Delta x \Delta y \Delta z|_e \\
 \dot{m}_w &= \rho u \Delta x \Delta y \Delta z|_w \\
 \dot{m}_s &= \rho v \Delta x \Delta y \Delta z|_s \\
 \dot{m}_n &= \rho v \Delta x \Delta y \Delta z|_n \\
 D_e &= \Gamma^\phi \Delta y \Delta z|_e \\
 D_w &= \Gamma^\phi \Delta y \Delta z|_w \\
 D_s &= \Gamma^\phi \Delta x \Delta z|_s \\
 D_n &= \Gamma^\phi \Delta x \Delta z|_n
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Temos todas as equações necessárias para obtenção das equações aproximadas de Navier-Stokes, a menos do termo fonte $L[S^\phi]$. Este termo será linearizado na forma $L[S^\phi] = S_C^\phi + S_P^\phi \phi_P^\theta$, para a equação da quantidade de movimento na direção x temos :

$$S^u = B_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{U} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{3} \mu_f \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + B_x - \frac{\partial P}{\partial x} \tag{5.13}$$

Os termos da expressão acima serão discretizados por diferenças finitas com aproximações de segunda ordem, sendo assim teremos :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}_e - \frac{\partial u}{\partial x}_w}{x_e - x_w} = \frac{\beta_e \left(\frac{u_E - u_P}{x_E - x_P} \right) - \beta_w \left(\frac{u_P - u_W}{x_P - x_W} \right)}{x_e - x_w} = \\
 &= 2u_E \beta_e \frac{1}{(x_E - x_P)(x_E - x_W)} + 2u_W \beta_w \frac{1}{(x_P - x_W)(x_E - x_W)} + \\
 &- 2u_P \left(\frac{\beta_e}{(x_E - x_P)(x_E - x_W)} + \frac{\beta_w}{(x_P - x_W)(x_E - x_W)} \right)
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}_e - \frac{\partial v}{\partial y}_w}{x_e - x_w} = \frac{2 \frac{v_{ne} - v_{se}}{y_E + y_P} - 2 \frac{v_{nw} - v_{sw}}{y_P + y_W}}{x_e - x_w} = \left(\frac{v_{ne} - v_{se}}{y_N + y_S} - \frac{v_{nw} - v_{sw}}{y_N + y_S} \right) \left(\frac{4}{x_E - x_W} \right) \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(\frac{P_E - P_P(1 - \alpha_x^2) - P_W \alpha_x^2}{(x_P - x_W) \alpha_x (1 - \alpha_x)} \right) \quad 5.16$$

onde, $\alpha_x = \frac{x_E - x_P}{x_P - x_W}$, desta forma podemos considerar malhas onde a distância entre os nós não é constante.

Na expressão 5.15 temos novos termos que representam as quinas do volume de controle. Sendo obtidos a partir de :

$$\begin{aligned} v_{ne} &= \frac{v_{Pe} + v_{En} + v_{Ne} + v_{Pn}}{4} \\ v_{nw} &= \frac{v_{Pw} + v_{Ns} + v_{Nw} + v_{Pn}}{4} \\ v_{se} &= \frac{v_{Pe} + v_{Es} + v_{Se} + v_{Ps}}{4} \\ v_{sw} &= \frac{v_{Pw} + v_{Ws} + v_{Sw} + v_{Ps}}{4} \end{aligned} \quad 5.17$$

Na expressão acima os termos do lado esquerdo representam os cantos do volume da figura 5.1, no lado direito os índices na ordem se referem ao nó e à face onde as velocidades devem ser consideradas, estes termos.

Sendo assim ficamos com:

$$S_P^u = -2 \left(\frac{\beta_e}{(x_E - x_P)(x_E - x_W)} + \frac{\beta_w}{(x_P - x_W)(x_E - x_W)} \right) \quad 5.18$$

$$\begin{aligned} S_C^u &= 2u_E \beta_e \frac{1}{(x_E - x_P)(x_E - x_W)} + 2u_W \beta_w \frac{1}{(x_P - x_W)(x_E - x_W)} + \left(\frac{v_{ne} - v_{se} - v_{nw} + v_{sw}}{y_N + y_S} \right) \left(\frac{4}{x_E - x_W} \right) + \\ &- \left(\frac{P_E - P_P(1 - \alpha_x^2) - P_W \alpha_x^2}{(x_P - x_W) \alpha_x (1 - \alpha_x)} \right) + B_x \end{aligned} \quad 5.19$$

Para a equação da quantidade de movimento de y temos que :

$$S_P^v = -2 \left(\frac{\beta_n}{(y_N - y_P)(y_N - y_S)} + \frac{\beta_s}{(y_P - y_S)(y_N - y_S)} \right) \quad 5.20$$

$$S_C^v = 2v_N \beta_n \frac{1}{(y_N - y_P)(y_N - y_S)} + 2v_S \beta_s \frac{1}{(y_P - y_S)(y_N - y_S)} + \left(\frac{u_{ne} - u_{se} - u_{nw} + u_{sw}}{x_E + x_W} \right) \left(\frac{4}{y_N - y_S} \right) +$$

$$- \left(\frac{P_N - P_P(1 - \alpha_y^2) - P_S \alpha_y^2}{(y_P - y_S) \alpha_y (1 - \alpha_y)} \right) + B_y \quad 5.21$$

A equação da conservação fica na forma :

$$\dot{m}_e - \dot{m}_w + \dot{m}_n + \dot{m}_s = 0 \quad 5.22$$

Multiplicando por $\phi|_P^{t+\Delta t}$ a equação da conservação da massa (5.22) e subtraindo da equação 5.6 chegamos a:

$$\phi|_P^{t+\Delta t} A_P = A_e \phi|_E^{t+\Delta t} + A_w \phi|_W^{t+\Delta t} + A_n \phi|_N^{t+\Delta t} + A_s \phi|_S^{t+\Delta t} + S_C^u \quad 5.23$$

onde :

$$A_P = A_e + A_w + A_n + A_s - S_P^\phi \Delta x \Delta y \Delta z + \rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t}$$

$$A_e = - \left(\frac{1}{2} - \alpha_e \right) \dot{m}_e + \frac{D\beta}{\Delta x} \Big|_e$$

$$A_w = \left(\frac{1}{2} + \alpha_w \right) \dot{m}_w + \frac{D\beta}{\Delta x} \Big|_w$$

$$A_s = \left(\frac{1}{2} + \alpha_s \right) \dot{m}_s + \frac{D\beta}{\Delta x} \Big|_s$$

$$A_n = - \left(\frac{1}{2} - \alpha_n \right) \dot{m}_n + \frac{D\beta}{\Delta x} \Big|_n \quad 5.24$$

Para obtermos as equações de quantidade de movimento na direção x e y basta substituir ϕ por u e v e seus respectivos termos fontes na equação 5.23. Reescrevendo a equação, a citada equação na forma :

$$\phi \Big|_P^{t+\Delta t} A_P - A_n \phi \Big|_N^{t+\Delta t} - A_s \phi \Big|_S^{t+\Delta t} = A_e \phi \Big|_E^{t+\Delta t} + A_w \phi \Big|_W^{t+\Delta t} + S_C^u \quad 5.25$$

A equação 5.25 deve ser escrita para cada ponto da malha utilizada, gerando assim um sistema de equações. Os coeficientes do lado esquerdo da equação acima, resultam em uma matriz tridiagonal escritos para y constante em uma malha estruturada, deste modo a marcha espacial da solução se dará na direção x, sendo assim a cada passo espacial teremos uma linha toda da matriz sendo resolvida, o algoritmo que utilizaremos para fazer tal processo é o de Thomaz (FORTUNA, 2000).

Vamos ao longo do processo iterativo resolver o transiente real, mesmo quando o escoamento for em regime permanente. A cada passo temporal teremos um processo iterativo intermediário que tem a intenção de fazer com que o resíduo global da equação discretizada 5.25 atinja um limite mínimo, só depois que o limite atingido é que marcharemos no tempo. O resíduo global é definido por :

$$\text{Re } s_{Volume} \quad P = -\phi \Big|_P^{t+\Delta t} A_P + A_e \phi \Big|_E^{t+\Delta t} + A_w \phi \Big|_W^{t+\Delta t} + A_n \phi \Big|_N^{t+\Delta t} + A_s \phi \Big|_S^{t+\Delta t} + S_C^u \quad 5.26$$

$$\text{Re } s_{Global} = \left(\sum_{i=1}^N \text{Re } s_i^2 \right)^{1/2} \quad 5.27$$

Onde N representa o número total de volumes que encontramos na malha.

Ao longo da marcha espacial teremos parte da malha com valores novos, recém calculados, e outros velhos, o algoritmo não chegou até eles,

sendo assim os termos do lado direito da expressão 5.25 serão determinados com os termos mais recentes que tivermos, sendo eles atualizados a cada passo espacial.

A solução será dita convergida quando tivermos : $Re s_{Global} \leq \varepsilon$, onde ε representa o erro mínimo, sendo igual 1.E-12 para equações da quantidade de movimento (qdmx e qdmy) e igual a 1.E-9 para equação da pressão que veremos em seguida

Para avaliarmos a pressão utilizaremos o divergente da quantidade de movimento (qdm), que resulta em uma equação de Poisson. Esta equação fará a ligação entre a qdm e a equação da conservação da massa. Possibilitando assim obter um campo de pressão que faça o campo de velocidade, obtido pelo sistema dado pela equação 5.23, respeitar a equação da conservação.

Tomando o divergente da equação quantidade de movimento chegamos a:

$$\nabla^2 P = \frac{\partial}{\partial x} qdm_x + \frac{\partial}{\partial y} qdm_y \quad 5.28$$

Sendo :

$$qdm_x = -\left(\frac{\partial}{\partial t} \rho_f u + \frac{\partial \rho_f uu}{\partial x} + \frac{\partial \rho_f vu}{\partial y}\right) + \mu_f \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) + B_x \quad 5.29$$

$$qdm_y = -\left(\frac{\partial}{\partial t} \rho_f v + \frac{\partial \rho_f uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho_f vv}{\partial y}\right) + \mu_f \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) + B_y \quad 5.30$$

Poderíamos simplificar a expressão 5.28 utilizando a equação da conservação e assim fazer desaparecer alguns termos, no entanto vamos manter a equação original. Tentando desta forma fazer com que o resíduo da equação da conservação se reduza ao longo do processo iterativo. O campo de pressão que resulta desta equação pode não ser o campo real, este é o

campo que tenta reduzir o resíduo da equação da conservação da massa, desta forma a pressão se torna apenas uma variável computacional, sendo assim não será levada em conta nas análises.

Para obtermos a equação discretizada da pressão vamos utilizar também volumes finitos, integrando a equação de Poisson sobre o volume da figura 5.1, chegamos a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} \Delta y \Delta z \Big|_e - \frac{\partial P}{\partial x} \Delta y \Delta z \Big|_w + \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x \Delta z \Big|_n - \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x \Delta z \Big|_s = \\ qdm_x \Delta y \Delta z \Big|_e - qdm_x \Delta y \Delta z \Big|_w + qdm_x \Delta x \Delta z \Big|_n - qdm_x \Delta x \Delta z \Big|_s \end{aligned} \quad 5.31$$

Onde:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_e = \frac{P_E - P_P}{x_E - x_P}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_w = \frac{P_P - P_W}{x_P - x_W}$$

5.32

$$\frac{\partial P}{\partial y} \Big|_s = \frac{P_P - P_S}{x_P - x_S}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \Big|_n = \frac{P_N - P_P}{x_N - x_P}$$

A dificuldade deste método está em obter qdm nas faces o que podemos fazer utilizando diferenças, assim como foi feito para os termos fontes da qdm. Para maiores detalhes na obtenção ver Fortuna (2000). Podemos escrever a equação 5.30 na forma :

$$\begin{aligned} A_P P_P = A_E P_E + A_W P_W + A_N P_N + A_S P_S + \\ + qdm_x \Delta y \Delta z \Big|_e - qdm_x \Delta y \Delta z \Big|_w + qdm_x \Delta x \Delta z \Big|_n - qdm_x \Delta x \Delta z \Big|_s \end{aligned} \quad 5.33$$

Assim como no cálculo dos valores na face utilizaremos o método WUDS para obtermos as $qdmx$ e qdm_y nas faces, sendo assim para a face w , temos :

$$qdmx_w = \left(\frac{1}{2} + \alpha_w \right) qdmx_W + \left(\frac{1}{2} - \alpha_w \right) qdmx_P \quad 5.34$$

Já $qdmx$ e qdm_y nos nós são obtidos a partir da expressão 5.25. O resíduo para pressão é determinado da mesma forma que o da expressão 5.26.

A solução de interesse neste trabalho é escoamento em tubulação ou entre paredes. Para tal utilizaremos malhas estruturadas, com a da figura 5.2, gerada a partir de um programa próprio capaz de refinar a malha nas regiões próximas à parede.

Figura 5.2 – Exemplo de malhas estruturadas utilizadas neste trabalho.

5.1.1 – Condição de contorno para equações

Na solução da equação da quantidade de movimento, são utilizados volumes fictícios nas fronteiras sólidas do domínio de cálculo, ou seja, serão criados volumes fora do domínio de cálculo (malha). Na Figura 5.3, temos a representação dos volumes fictícios.

Figura 5.3 – Volume fictício.

As velocidades na fronteira serão prescritas, desta forma teremos :

$$u_f = \frac{u_V + u_P}{2} \quad 5.35$$

A fronteira de entrada de fluxo de massa terá o valor da velocidade prescrito na face, uma vez que as faces dos volumes internos coincidirão com as fronteiras. Na saída de fluxo de massa do domínio teremos gradiente na direção perpendicular à saída nulo.

Para equação da pressão (Poisson) utilizaremos a equação da quantidade de movimento, para definirmos as condições de contorno nas fronteiras do domínio; desta forma na face que representa o contorno do domínio teremos :

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = qdm_i \quad 5.36$$

onde o subscrito i indica à direção paralela a normal da fronteira, x e y para malhas com fronteiras paralelas a os eixos x e y .

Os valores de pressão nas fronteiras serão extrapolados a partir valores internos (dentro do domínio).

5.1.2 – Etapas do método

O programa desenvolvido neste trabalho a partir de agora será chamado de flow. Este segue as seguintes etapas para obtenção da solução do escoamento:

- 1 - Inicialização do domínio com a condição inicial em t_0 .
- 2 - Obter u em t a partir da quantidade de movimento na direção x .
- 3 - Obter v em t a partir da quantidade de movimento na direção y .
- 4 - Determinar os resíduos das equações da quantidade de movimento nas direções x e y , repetir 2, 3 e 4 até que:

$$Re_{sqdmx} \leq 1.e-12$$

$$Re_{sqdmy} \leq 1.e-12$$

5 - Obtenção do campo de pressão que garanta a equação da conservação da massa.

5.1 - Obter a pressão com a equação de Poisson

5.2 - Obtenção das velocidades corrigidas a partir da equação da quantidade de movimento.

5.3 - Se o resíduo global da massa for menor igual a $1.e-3$ e o da pressão menor igual a $1.e-10$, passar para o próximo passo no tempo, reiniciar em 2, caso contrário voltar a etapa 5.1. O resíduo da equação da conservação é dada por :

$$Re_{s_{Massa}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\dot{m}_e - \dot{m}_w + \dot{m}_n - \dot{m}_s \right)^2}$$

Perceber que nas etapas acima, a equação da conservação só entra como teste de convergência, o que evita que o campo de velocidades não desrespeite a equação da conservação da massa é a obtenção do campo de pressão a partir da equação de Poisson, para garantir isto vamos obrigar que o programa faça no mínimo 60 iterações das etapas 5.1, 5.2 e 5.3.

5.1.3 – Validação da solução

Para validar a solução obtida com o programa flow vamos tomar um caso teste, em um primeiro teste vamos compará-lo com a resposta dada pelo pacote comercial FLUENT e com a solução de Blasius. Em um segundo teste vamos comparar o perfil de velocidades desenvolvido (obtido com o flow) com o perfil parabólico para escoamento entre placas paralelas. Para tanto utilizaremos a mesma malha, só modificaremos as velocidades na entrada do domínio de cálculo.

O caso teste será dado pelo escoamento bidimensional entre duas paredes planas e paralelas, a malha será gerada pelo programa desenvolvido ao longo deste trabalho. Na Figura 5.4 temos a representação da malha utilizada, que tem 91 divisões na direção x e 91 divisões na direção y, sendo que na direção y temos nas regiões próximas à parede um refinamento maior.

Para garantirmos que ao longo do processo de solução o fluxo de massa na saída do domínio seja igual ao da entrada, será introduzida uma correção nas velocidades obtidas pelo programa flow. Esta correção será realizada ao longo da obtenção do campo de pressão e correção do campo de velocidades. A correção será dada na forma :

$$\beta_i = \frac{\dot{m}_{Entrada} - \dot{m}_i}{\dot{m}_{Entrada}} \quad 5.37$$

Figura 5.4 – Malha utilizada para solução do escoamento utilizando o FLUENT e o programa flow.

onde $\dot{m}_{Entrada}$ representa o fluxo de massa na entrada do domínio e $\dot{m}_i$ é fluxo de massa situados em x constante. Com β serão corridos os valores da velocidades na direção x , sendo assim teremos :

$$u_{ij}^{Corrigido} = \beta_i u_{ij} \quad 5.38$$

Esta correção é mais um artifício para tentar obrigar a solução a respeitar a equação da conservação.

As condições do escoamento para o primeiro teste são:

$$\rho_f = 1.225 \frac{kg}{m^3}$$

$$\mu_f = 1.7894E-4 Pas$$

$$u_{Entrada} = 0.03 \frac{m}{s}$$

$$v_{Entrada} = 0$$

$$\Delta t = 0.90s$$

$$Re = 205$$

As soluções serão comparadas após 80 passos no tempo ($t = 57.6$ s). A condição inicial será dada por $u = 0.03$ m/s e $v = 0.0$ em todo domínio.

O domínio de cálculo é dado na Figura 5.4 na sua forma discretizada e tem suas condições de contorno e dimensões definidas na Figura 5.5.

Utilizaremos o programa flow com e sem correção do fluxo de massa, sendo identificado por flow- com BM e flow – sem BM, respectivamente. As soluções serão comparadas através do perfil de velocidades em determinadas posições da malha. Utilizaremos seções com x constante, $x = 0.5$ m, $x = 1.0$ m, $x = 1.5$ m, $x = 2.0$ m e $x = 2.5$ m.

Figura 5.5 – Representação e condições de contorno do domínio de cálculo.

Vamos utilizar também a espessura da camada limite em uma placa plana obtida a partir da solução de Blasius, que é dada na forma :

$$\delta(x) = 5 \sqrt{\frac{\mu_f x}{\rho_f u}} \quad 5.39$$

onde u é igual à velocidade na entrada. Utilizaremos esta expressão para determinar de forma aproximada a espessura da camada limite nas paredes. A

espessura será representada por uma linha cheia em vermelho em todos os gráficos que comparam os perfis de velocidade na direção x.

Nas Figuras 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 e 5.10 temos os perfis de velocidade na direção x (u); da observação destas figuras podemos concluir que a inclusão do balanço de massa como correção faz com que a solução obtida com flow se aproxime da solução obtida pelo FLUENT. Também podemos observar que a espessura da camada limite obtida com o flow é bastante similar à aproximação obtida pela expressão 5.39. Podemos perceber, a partir das Figuras 5.11 e 5.12, que o campo de velocidades obtido com o flow é bastante similar ao obtido com o fluent. O programa fluent apresenta distorções no perfil de velocidades, estas podem ocorrer em decorrência da discretização (“upwind”) utilizada na obtenção do sistema linear de equações.

Figura 5.6 – Perfis de velocidade para $x = 0.50$ m, comparação entre o programa flow com e sem balanço de fluxo e FLUENT.

Figura 5.7– Perfis de velocidade para $x = 1.00$ m, comparação entre o programa flow com e sem balanço de fluxo e FLUENT.

Figura 5.8– Perfis de velocidade para $x = 1.5$ m, comparação entre o programa flow com e sem balanço de fluxo e FLUENT.

Figura 5.9 - Perfis de velocidade para $x = 2.00$ m, comparação entre o programa flow com e sem balanço de fluxo e FLUENT.

Figura 5.10 - Perfis de velocidade para $x = 2.50$ m, comparação entre o programa flow com e sem balanço de fluxo e FLUENT.

Utilizando os mesmos dados anteriores, podemos comparar os perfis obtidos com os programas. O com perfil de velocidades obtido por Blasius (WHITE, 1991), determinado para o escoamento sobre uma placa plana. Para realizar esta comparação vamos transformar as soluções obtidas com os programas para uma solução equivalente à solução do escoamento sobre uma placa plana. A partir dos perfis de velocidades, obtidas com flow e FLUENT, podemos determinar a espessura da camada limite ($0.99u$) e a partir destas espessuras podemos encontrar o comprimento necessário para uma placa plana gerar uma espessura de camada limite equivalente a gerada pelas soluções. Nas Figuras 5.13, 5.14, 5.15, 5.16 e 5.17 temos a comparação dos perfis de velocidades, podemos verificar uma certa discrepância entre a solução de Blasius e a obtida com flow, ambos os casos com e sem BM, de qualquer forma podemos dizer que as soluções obtidas com o flow são bastante similares à de Blasius. As discrepâncias podem ser justificadas se lembrarmos que as soluções foram obtidas para um determinado tempo (72 s) a partir de uma condição inicial de escoamento uniforme, sendo assim as soluções podem não ter atingido o regime permanente. Desta forma se torna necessário checar a capacidade do programa flow obter uma solução de regime permanente a partir da condição inicial uniforme.

Tomando a mesma malha e as mesmas dimensões do caso anterior, modificando apenas a velocidade de entrada, para podemos obter o perfil de velocidades desenvolvido. A solução obtida com o programa flow com BM será comparada com o perfil de velocidades parabólico (MALISKA, 1995, pg.194). Para uma velocidade uniforme de $1.45e-4$ m/s na entrada do domínio temos que o perfil de velocidades desenvolvido é atingido em x igual à aproximadamente 1 m (a expressão utilizada para estimar x é encontrada em WHITE, 1991). A Figura 5.18 mostra o desenvolvimento dos perfis de velocidade, é fácil constatar que a solução do programa flow com BM tem o perfil de velocidades desenvolvido em x igual à 1 m e que coincide com o perfil parabólico.

Podemos concluir que o programa desenvolvido é capaz de representar de forma satisfatória o escoamento em estudo e tomar que este é capaz de solucionar escoamentos similares.

Flow – com BM

FLUENT

Figura 5.11 – Visualização de u .

flow – com BM

FLUENT

Figura 5.12 – Visualização de v .

Figura 5.13 - Perfis de velocidade para $x = 0.50$ m, comparação entre o programa flow com e sem balanço de fluxo, FLUENT e solução de Blasius.

Figura 5.14 - Perfis de velocidade para $x = 1.00$ m, comparação entre o programa flow com e sem balanço de fluxo, FLUENT e solução de Blasius.

Figura 5.15 - Perfis de velocidade para $x = 1.50$ m, comparação entre o programa flow com e sem balanço de fluxo, FLUENT e solução de Blasius.

Figura 5.16 - Perfis de velocidade para $x = 2.00$ m, comparação entre o programa flow com e sem balanço de fluxo, FLUENT e solução de Blasius.

Figura 5.17 - Perfis de velocidade para $x = 2.50 \text{ m}$, comparação entre o programa flow com e sem balanço de fluxo, FLUENT e solução de Blasius.

Figura 5.18 – Desenvolvimento do escoamento entre placas planas.

5.2 – Equação da Partícula

O algoritmo utilizado para a integração temporal da quantidade de movimento e angular da partícula é o método de Runge – Kutta de quarta ordem. As forças serão determinadas pelas expressões apresentadas no capítulo 2.

Como teste inicial vamos utilizar uma partícula em queda livre em fluido parado, neste item apenas a força de Boussinesq/Basset será testada, no capítulo 6 as outras forças serão melhor analisadas. Em Mordant e Pinton (2000) encontramos a variação temporal da citada força, este caso será utilizado para avaliar o algoritmo que determinará a força de Boussinesq/Basset.

Para calcular numericamente a integral, que se encontra na força de Boussinesq; Basset nós utilizaremos a quadratura de Gauss – Chebyshev. Este método é desenvolvido utilizando a ortogonalidade do polinômio de Chebyshev.

A integral segundo esta quadratura é dada por :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} F(z) dz = \sum_{i=1}^m w_i F(z_i) \quad 5.40$$

Os valores de z_i são as raízes do polinômio de Chebyshev de grau m , dadas por:

$$z_i = \cos\left(\frac{(2(i-1)+1)\pi}{2m}\right), \quad i=1, 2, 3, \dots, m+1 \quad 5.41$$

Os valores de w_i são, neste caso iguais, dados por :

$$w_i = \frac{\pi}{m} \quad 5.42$$

Sendo assim ficamos com :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} F(z) dz = \frac{\pi}{m} \sum_{i=0}^m F(z_i) \quad 5.43$$

A equação obtida por Maxey e Riley (1983) é dada pela equação 2.3 e a força de Boussinesq/Basset é dada na forma :

$$\vec{F}_{Boussinesq/Basset} = 6\pi\eta^2\mu_f \int_0^t \left(\frac{\frac{d\vec{U}}{d\tau} - \frac{d\vec{V}_p}{d\tau}}{\sqrt{\pi\nu_f(t-\tau)}} \right) d\tau \quad 5.44$$

Observando a equação acima é fácil notar as semelhanças, que nos possibilita a obtenção da força de Boussinesq/Basset. Para utilizar esta expressão basta fazermos uma mudança de variáveis e avaliarmos a integral no intervalo -1 e 1.

Rearranjando a função (kernel) que multiplica os termos de aceleração, teremos :

$$Kernel = \frac{-6\pi\eta^2\mu_f}{\sqrt{\pi\nu_f t}} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\tau}{t}\right)}} \quad 5.45$$

Fazendo :

$$\frac{\tau}{t} = z^2 \quad 5.46$$

$$\frac{d\tau}{t} = 2zdz \text{ ou } d\tau = 2tzdz \text{ o que nos leva a } \frac{d(\quad)}{d\tau} = \frac{dz}{d\tau} \frac{d(\quad)}{dz} = \frac{1}{2zt} \frac{d(\quad)}{dz}$$

Substituindo 5.46 em 5.45, teremos :

$$\vec{F}_{Boussinesq/Basset} = \frac{6\pi\mu_f}{\sqrt{\pi\nu_f t}} \int_0^1 \left(\frac{d\vec{U}}{dz} - \frac{d\vec{V}_p}{dz} \right) \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} dz \quad 5.47$$

Para colocarmos a integral acima no intervalo de -1 a 1 , basta fazermos os termos do numerados ($F(z)$) da integral uma função par, ou seja, $F(k)=F(-k)$, assim podemos utilizar diretamente a quadratura de Gauss-Chebysehv. Sendo teremos:

$$\vec{F}_{Boussinesq/Basset} = \frac{3\pi\mu_f}{\sqrt{\pi\nu_f t}} \int_{-1}^1 \left(\frac{d}{dz} \left(\vec{U} + \frac{1}{6}\pi^2 \nabla^2 \vec{U} \right) - \frac{d\vec{V}_p}{dz} \right) \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} dz \quad 5.48$$

onde,

$$\frac{d(\quad)}{dz} = 2zt \frac{d(\quad)}{d\tau} \quad 5.49$$

Escrevendo no formato da equação .4, teremos :

$$F(z) = \left(\frac{d\vec{U}}{dz} - \frac{d\vec{V}_p}{dz} \right) \left(\frac{3\pi\mu_f}{\sqrt{\pi\nu_f t}} \right) \quad 5.50$$

Sendo assim teremos :

$$\vec{F}_{Boussinesq/Basset} = \frac{3\pi}{m+1} \sum_{i=0}^m F(z_i) \quad 5.51$$

Para o caso de Mei e Adrian (1992) e Kim et al. (1998) utilizaremos a mesma metodologia para calcular a força de Boussinesq/Basset exposta acima, lembrando que de forma geral podemos escrever os métodos na forma:

$$F_{BB} = 6r_p^2\pi\mu_f \int_0^t K(t-\tau) \left(\frac{d(\vec{U} - \vec{V}_p)}{d\tau} \right) d\tau \quad 5.52$$

Onde K representa a função kernel, que são dados no Capítulo 2, equação 2.19 e 2.20 b para Mei e Adrian (1992) e Kim et al. (1998), respectivamente. Assim teremos a função F(z) dada por:

$$F(z) = \left(\frac{d\vec{U}}{dz} - \frac{d\vec{V}_p}{dz} \right) \sqrt{1-z^2} (r_p^2\pi\mu_f) \quad 5.53$$

Ficando com :

$$\vec{F}_{Boussinesq/Basset} = \frac{3\pi}{m} \sum_{i=0}^m F(z_i) \quad 5.54$$

O grau do polinômio de Chebyshev, ou seja, o valor de m, será determinado considerando a variação do valor da força de Boussinesq/Basset, para valores de m iguais a 2, 10, 20, 30, 40, 50 e 100. As condições para simulações serão extraídas de Mordant e Pinton (2000), onde também podemos extrair valores para a força em questão, sendo assim temos:

Os modelos para o cálculo da força serão os expostos acima (MAXEY; RILEY, 1983, MEI; ADRIAN, 1992 e KIM et al., 1998). Utilizando $D_p = 1.00$ mm, $\rho_f = 1000.00$ kg/m³, $\rho_p = 7850.00$ kg/m³ e $\mu_f = 0.000891$ Pa*s (MORDANT; PINTON, 2000), onde μ_f a partir do número de Reynolds, que neste é igual a 430) em uma simulação que considera a dinâmica da partícula em um movimento de sedimentação, neste cálculo serão consideradas as forças de arrasto de Stokes com modelamento de Clift e Gauvin (1970), força de massa aparente (ou fictícia), força de empuxo e força peso (responsável pelo movimento da partícula).

Nenhuma consideração será levada em conta com relação aos modelos utilizados para as forças de Boussinesq/Basset, para determinação do grau do polinômio de Chebyshev. Será levada em conta apenas a convergência dos diversos polinômios utilizados na determinação do valor da força encontrado, com o polinômio de grau m.

Observando as figuras 5.19, 5.20 e 5.21 percebemos que ocorrem grandes variações na força, quando utilizamos o polinômio de grau 2, 10 e 20. Entretanto, as diferenças se tornam bem menores para os outros polinômios. Conforme aumentamos o grau do polinômio, aumentamos também o tempo de computação, de tal forma que o benefício obtido se torna não muito mais atraente nos polinômios de grau maior que 20. Desta forma utilizaremos o polinômio Chebyshev com grau 20, no decorrer deste trabalho.

5.3 – Acoplamento entre partícula e fluido

Para estudarmos a influência da partícula no escoamento é necessário acoplar as fases (partícula-escoamento), este será feito utilizando o modelo “PSI in cell” definido em Crowe (1977), onde a partícula é transformada em fonte ou sorvedouro de massa, de quantidade de movimento e energia.

Figura 5.19 – Evolução temporal da força de Boussinesq/Basset determinada com o expressão de Maxey e Riley (1983).

Figura 5.20 – Evolução temporal da força de Boussinesq/Basset determinada com o expressão de Mei e Adrian (1992).

Figura 5.21 – Evolução temporal da força de Boussinesq/Basset determinada com o expressão de Kim et al. (1998).

O processo se inicia com a obtenção do campo de velocidades sem a presença da partícula, utilizando o programa flow, após convergência tratada pelos critérios expostos acima, podemos determinar os termos fonte de cada equação. Com os termos fonte voltamos a calcular o campo de velocidades.

Os termos fonte podem ser obtidos por duas metodologias, via método da trajetória (CROWE et al., 1977) e elemento discreto (CROWE et al., 1998). Onde o primeiro é aplicado para problemas com uma das fases diluída e regime permanente, já o segundo pode ser aplicado para escoamentos transiente e é válido tanto para escoamento diluído quanto denso (controlado pelos choques entre partículas).

O método da trajetória é aplicado quando temos uma injeção, a uma certa taxa de partículas no escoamento, calculamos as trajetórias para as partículas de mesmo diâmetro e massa e assim podemos definir a frequência de partículas que entram em uma dada célula (ou volume) de cálculo, o que permite a determinação dos termos fontes que serão dados pelo balanço entre

as condições na entrada do volume e na saída do mesmo. Por este método é impossível tratar a partícula individualmente.

No método elemento discreto (“Discrete Element”) temos que o movimento da partícula é tratado ao longo do tempo, ou seja, a velocidade e as forças atuantes na partícula são calculadas a cada passo no tempo. Neste método é possível o tratamento individual da partícula e suas respectivas interações com outras partículas e com paredes. Desta forma temos um tratamento mais realista do movimento da partícula no escoamento. Uma vez que o escopo deste trabalho é a determinação de influências do escoamento na partícula e vice-versa, este método é o mais indicado para este trabalho.

As partículas consideradas neste trabalho não sofrerão diminuição ou aumento de sua massa, desta forma não será necessária a determinação do termo fonte de massa. O termo fonte de energia também não será necessário uma vez que a equação da energia não está sendo levada em conta na solução do escoamento. O único termo fonte que calcularemos será o da quantidade de movimento, para direção i este termo é dado na forma :

$$B_i = -\sum_k F_k \quad 5.55$$

onde F_k são as forças que atuam na partícula em um dado instante, estas incluirão forças de arrasto e sustentação. No cálculo acoplado em mão dupla teremos que este termo será atualizado a cada interação, sendo calculada com a velocidade mais atual. Quando tivermos mais de uma partícula envolvida no cálculo teremos :

$$B_i = -\sum_p N_p \sum_k F_k \quad 5.56$$

onde N_p é número de partículas que se encontram um dado volume (ou célula).

O grande problema do método adotado é que não conseguimos levar em conta a posição da partícula no termo fonte, desta forma ele utiliza uma força pontual aplicada ao centro no centro da célula.

6 – ANÁLISE DO ARRASTO

Neste capítulo iremos analisar o arrasto, para tal vamos, da mesma forma que fizemos na revisão bibliográfica, dividir o arrasto em estado estacionário (Stokes) e arrasto que depende da aceleração da partícula ou não estacionário. Assim avaliaremos os diversos modelos apresentados no capítulo 2.

Os modelos empíricos de previsão do arrasto de Stokes serão comparados com dados experimentais extraídos de Schlichting (1965) e White (1991). Desta comparação serão pré-selecionados alguns modelos. Para definirmos a faixa de validade das formulações empíricas pré-selecionadas e ainda qual deles representa melhor a variação do arrasto de Stokes com número de Reynolds, iremos determinar a velocidade terminal (V_t) de uma esfera em queda livre, por meio da simulação numérica do movimento para diversas condições; e estas serão comparadas com valores experimentais extraídos de Mordant e Pinton (2000), Crowe (1997 apud ROSENDAHL, 1998) e Ataides (2003), os fluidos utilizados nos experimentos são respectivamente água, óleo mineral e glicerina 100 %; 96 %.

Para a determinação da influência da aceleração no arrasto vamos utilizar os modelos citados na revisão bibliográfica e os mesmos experimentos utilizados para arrasto de Stokes. Entretanto neste ponto estaremos interessados na dinâmica do movimento da partícula, ou seja na variação temporal da velocidade da partícula.

Em linhas gerais na primeira comparação estaremos preocupados com efeitos na velocidade terminal da partícula. Já na segunda comparação analisaremos a dinâmica da partícula até atingir a velocidade terminal. Ainda com intuito de estudar a dinâmica da partícula vamos resolver a equação da quantidade de movimento da partícula (equação integro-diferencial) sob a hipótese de “*creeping flow*” e com arrasto de Stokes sendo dado pela equação 4.19.

Faremos uma comparação entre os modelos, para determinação do arrasto estacionário e não estacionário, utilizando o acoplamento entre fluido-partícula em uma e duas mãos, determinando assim a influência do acoplamento na determinação das forças de arrasto.

Como último tópico deste capítulo faremos uma análise dos modelos que determinam a correção do arrasto estacionário devido a efeitos da presença de paredes.

6.1 - Arrasto de estado estacionário ou de Stokes

O arrasto de Stokes consiste da soma entre arrasto de fricção e de forma, que é dado em função de Re_p . A figura 6.1 mostra o comportamento de CD de uma esfera em função de Re_p .

Figura 6.1 - Arrasto de Stokes em função do número de Reynolds da partícula (Re_p), os pontos experimentais foram extraídos de Schlichting (1965) e White (1991).

Por intermédio da citada dependência podemos definir 5 regiões no gráfico acima, que em linhas gerais tem as seguintes características :

Região 1 ($Re_p < 1,0$) :

Os efeitos viscosos são dominantes e não se observa separação; esta região é chamada na literatura de Região de Stokes.

Região 2 ($1,0 < Re_p < 10^3$) :

Os efeitos inerciais na equação de Navier-Stokes se tornam importantes. Nesta região é observado o surgimento de separação no escoamento e formação de vórtices atrás da esfera. Segundo Taneda (1956 apud BATCHELOR, 1999) a separação se inicia com Re_p aproximadamente igual à 24. Com Re_p igual à 130 temos o surgimento de perturbações nos vórtices e estes começam a ser convectados.

Região 3 ($10^3 < Re_p < 2,5 \times 10^5$) :

O coeficiente de arrasto permanece praticamente constante com valor aproximado de 0.44. Esta região é chamada de região de Newton.

Região 4 ($2,5 \times 10^5 < Re_p < 4 \times 10^5$) :

No Re_p Crítico ($\approx 2,5 \times 10^5$) é observada uma queda abrupta no CD. Isto ocorre pois o escoamento na camada limite em volta da esfera transiciona de laminar para turbulento, fazendo com que o ponto de separação caminhe para jusante, diminuindo a esteira atrás da esfera.

Região 5 ($Re_p > 4 \times 10^5$) :

Nesta região o arrasto aumenta continuamente com aumento de Re_p .

Diversas formulações empíricas que utilizam a dependência do CD com Re_p são encontradas na literatura, na tabela 2.1 mostramos alguns destes ajustes e também a faixa de validade dos mesmos. Os critérios utilizados na escolha dos modelos são a simplicidade e possibilidade de escrever um algoritmo que utilize a menor quantidade de “if’s” possível, onde este último tenta facilitar a programação e diminuir o tempo computacional gasto para cada cálculo, já que um “if” leva mais tempo computacional que uma conta de multiplicação ou adição.

Com o intuito de selecionar a formulação empírica que melhor se ajusta aos dados experimentais na faixa de Re_p de interesse, a saber $0 < Re_p < 2.0E5$, faremos uma comparação gráfica entre as formulações citadas na tabela 2.1, com os dados experimentais da figura 6.1.

Conforme citamos no capítulo 4 podemos escrever todas as expressões da tabela 2.1 com a expressão 4.22.a, basta modificarmos os valores das constantes. A partir dos dados experimentais da figura 6.1 podemos determinar estas constantes. Através de uma minimização do erro relativo

$$Erro = \left| \frac{CD_{Exp.} - CD_{Ajuste}}{CD_{Exp.}} \right| \text{ obtemos :}$$

$$CD = CD_{Stokes} \left(A + B Re_p^m + \frac{C Re_p^n}{E + D Re_p^o} \right) \quad 6.1$$

onde $A = 0.953$, $B = 9.16E-3$, $C = 0.074$, $D = 0.231$, $E = 1.573$, $m = 1.057$, $n = 2.347$ e $o = 1.976$. A expressão 6.1 é válida para todo o intervalo de interesse.

Na figura 6.2 temos todas as formulações da tabela 2.1 e o ajuste aqui obtido comparados com os dados empíricos extraídos de Schlichting (1965) e White (1991). Cabe ressaltar que as faixas de validade das formulações, em alguns casos não foram respeitadas, para enfatizar o erro a que estaremos sujeitos quando não o fizermos.

Analisando a figura 6.2 temos que as formulações que mais se aproximam dos dados experimentais em toda a faixa de interesse são: WHITE

(1991), Tilly (1969), Clift e Gauvin (1970) e a expressão 6.1. A formulação proposta por White (1991) deve ser usada com certa cautela no intervalo $100 < Re_p < 1.E4$, já Tilly (1969) para valores maiores que $Re_p = 8.E4$. A fórmula de Clift e Gauvin (1970) atende de forma satisfatória a todo intervalo de interesse. A expressão 6.1 também atende todo intervalo.

Desta forma ficamos com quatro expressões que parecem representar a variação do arrasto de Stokes em função de Re_p . Assim devemos recorrer a outra metodologia para verificar qual ajuste atende melhor o intervalo de interesse. Para tanto vamos analisar a queda livre de partículas em um escoamento estagnado. A análise se concentrará na determinação da velocidade terminal ou limite das partículas.

6.1.1- Velocidade Terminal e Velocidade Terminal Adimensional

A velocidade terminal (V_t) de uma partícula em queda livre é determinada através do balanço das forças (Empuxo, Peso e Arrasto). Para uma partícula de diâmetro D_p o balanço das forças fica :

$$CD \frac{\pi}{4} D_p^2 \frac{1}{2} \rho_f V_t^2 = \frac{1}{6} D_p^3 \pi (\rho_p - \rho_f) g \quad 6.2$$

Substituindo o número de Reynolds (baseado no diâmetro da partícula) na equação acima chegamos a :

$$CD Re_p^2 = \frac{4}{3} \frac{D_p^3 \rho_f (\rho_p - \rho_f) g}{\mu_f^2}, \text{ onde } \frac{D_p^3 \rho_f (\rho_p - \rho_f) g}{\mu_f^2} \text{ é conhecido como}$$

número de Grashof (Gr) ou Galio (Ga), sendo assim ficamos com :

$$CD Re_p^2 = \frac{4}{3} Ga \quad 6.3$$

Figura 6.2 – Comparação dos modelos da tabela 2.1 e o ajuste aqui proposto (novo ajuste) com os dados experimentais extraídos de Schlichting (1965) e White (1991).

A equação 6.3 nos permite determinar a velocidade terminal. Para tal basta conhecer as propriedades do fluido e da partícula, já que o CD é dado por relações empíricas (apresentadas no item anterior).

Se extrairmos a raiz cúbica de Ga, obtemos o diâmetro adimensional, que é dado por :

$$d_p^* = D_p \left[\frac{\rho_f (\rho_p - \rho_f) g}{\mu_f^2} \right]^{1/3} \quad 6.4$$

Definindo velocidade terminal adimensional como :

$$V_t^* = \left(\frac{4 \text{Re}_p}{3 \text{CD}} \right)^{1/3} = V_t \left[\frac{\rho_f^2}{g \mu_f (\rho_p - \rho_f)} \right]^{1/3} \quad 6.5$$

Zigrang e Silvester (1981) propuseram uma correlação entre V_t^* e d_p^* , dada por :

$$V_t^* = \frac{(\sqrt{14.51 + 1.83 d_p^*} - 3.81)^2}{d_p^*} \quad 6.6$$

Turton e Clark (1987) assumindo que a velocidade terminal adimensional (V^*) pode ser descrita por uma combinação entre a V^* obtidas com o arrasto determinado pela lei de Stokes ($\text{Re}_p < 1$), e V^* obtido com arrasto da região onde este permanece praticamente constante ($10^3 < \text{Re}_p < 2 \cdot 10^5$ – $\text{CD} = 0.44$), propuseram a seguinte correlação :

$$V_t^* = \left[\frac{1}{\left(\frac{18}{d_*^2} \right)^{K_2} + \left(\frac{3K_1}{4d_*^{0.5}} \right)^{K_2}} \right]^{1/K_2} \quad 6.7$$

onde K1 e K2 são dados por 0.481 e 0.824 respectivamente.

Haider e Levenspiel (1989) obtiveram valores para K1 e K2 iguais a 0.7554 e 0.8243, respectivamente.

Na figura 6.3 temos a comparação entre as expressões empíricas citadas acima e resultados experimentais extraídos de Mordant e Pinton (2000).

Observar que os ajustes de Haider e Levenspiel (1989) e Zigrang e Sylvester (1981) representam bem o experimento de Mordant e Pinton (2000), assim podemos utilizar estas correlações para cálculos e futuras comparações.

Figura 6.3 – Comparação dos modelos empíricos e dados experimentais.

6.1.2 – Comparação com dados experimentais

Na tabela 6.1 abaixo temos os valores das propriedades do fluido e partícula para os experimentos realizados por Mordant e Pinton (2000) e Crowe (1997).

Tabela 6.1 – Propriedades da Partícula e fluido para os experimentos de Mordante Pinton (2000) e Crowe (1997).

CASO		D_p (mm)	ρ_p (kg/m ³)	ρ_f (kg/m ³) **	V_t (m/s)	Re_p	μ (Pa*s) *	T (°C)	Material da Partícula
MORDANT; PINTO (2000)	1	0.50	2560	1000	0.074	41.00	9.04E-04	-	Vidro
	2	1.50	2560	1000	0.218	360.00	9.08E-04	-	Vidro
	3	2.00	2480	1000	0.271	600.00	9.03E-04	-	Vidro
	4	0.80	7710	1000	0.316	280.00	9.03E-04	-	Aço
	5	1.00	7850	1000	0.383	430.00	8.91E-04	-	Aço
	6	2.00	7670	1000	0.636	1400.00	9.09E-04	-	Aço
	7	3.00	7800	1000	0.813	2700.00	9.03E-04	-	Aço
	8	4.00	7700	1000	0.973	4300.00	9.05E-04	-	Aço
	9	6.00	7750	1000	1.158	7700.00	9.02E-04	-	Aço
	10	1.00	14800	1000	0.590	660.00	8.94E-04	-	Tungstênio
CROWE (1997)	1	6.00	2450	825	0.405	325.45	1.66E-02	-	Quartzo
	2	9.00	2450	825	0.550	662.95	2.00E-02	-	Quartzo

Para o experimento de Mordant e Pinton (2000) foram fornecidos valores de número de Reynolds baseados no diâmetro da partícula e em sua velocidade limite. Assim, uma vez adotado um valor para massa específica, podemos determinar a viscosidade dinâmica.

Uma certa dificuldade foi encontrada para determinar as propriedades do fluido utilizado em Ataídes (2003), já que este utilizou glicerina em seus experimentos. A glicerina sofre uma grande variação na viscosidade dinâmica quando alteramos a porcentagem de umidade presente na glicerina e ou a temperatura da mesma.

Através do gráfico encontrado em White (1991) podemos determinar a variação da viscosidade dinâmica da glicerina com a temperatura. A expressão obtida utilizando um ajuste exponencial fica na forma :

$$\mu_f = Ae^{BT} \quad 6.8$$

onde T é a temperatura do fluido e A e B são constantes de ajuste, que assumem os valores 4.94 e -0.05 respectivamente no intervalo 10 °C < T < 100 °C.

No entanto a expressão acima não leva em conta a porcentagem de umidade presente na glicerina, considera o fluido como sendo composto de 100 % de glicerina.

No gráfico mostrado na figura 6.4 temos a comparação da evolução temporal da velocidade da partícula determinados numericamente com valores experimentais (ATAÍDES, 2003). Facilmente podemos perceber que existe uma grande discrepância entre os valores obtidos numericamente e os obtidos experimentalmente. O que não era de se esperar, visto que as formulações utilizadas na simulação numérica são de base empírica.

Lembrando que a partícula ao atingir a velocidade limite está em uma condição de equilíbrio de forças, e a velocidade nesta condição é definida pela força de arrasto, que é determinada por meio de fórmulas empíricas. Assim podemos concluir que os dados fornecidos por Ataídes (2003) estão equivocados, seja na temperatura ou na porcentagem de umidade presente na glicerina.

Figura 6.4 – Variação temporal da velocidade para o Caso 2 (ATAÍDES, 2003 – Glicerina 100 %).

Na Figura 6.4 temos a variação da velocidade limite adimensional (V^*) pelo diâmetro da partícula adimensional (d^*) determinadas por meio dos dados obtidos

por Ataídes (2003) e os previstos pelas relações empíricas de Haider e Levenspiel (1989) e Zigrang e Sylvester (1981 apud TURTON; CLARK,1987).

Podemos observar na figura 6.4 que os experimentos de Mordant e Pinton (2000) e Crowe (1997) estão “muito próximos” dos previstos Haider e Levenspiel (1989) e Zigrang e Sylvester (1981). Já os valores obtidos através dos experimentos de Ataídes (2003), principalmente os experimentos com glicerina 100 %, estão em desacordo, em sua grande maioria, com os valores previstos através das citadas relações empíricas.

Figura 6.4 – Comparação dos modelos empíricos para velocidade terminal adimensional e dados experimentais.

Assim sendo devemos buscar outra forma de determinar a viscosidade dinâmica. Recorrendo à fórmula empírica de Haider e Levenspiel (1989) para velocidade adimensional (V^*) e a própria definição de V^* podemos determinar μ_f . Para tal iremos variar μ_f até que a razão entre V^* dado por Haider e Levenspiel (1989) e pela definição for igual a 1. A tabela 6.2 abaixo mostra os valores obtidos por intermédio do citado método (μ^{**}) e os obtidos com a equação 6.8 (μ^*) para os casos que Ataídes (2003) julgou ser glicerina 100 %. Podemos observar a grande

variação entre a viscosidade determinada pela expressão e pelo método baseado na fórmula de Haider e Levenspiel (1989). Esta metodologia fará com que todos os valores de velocidade adimensional determinados a partir dos experimentos de Ataídes (2003) coincidam com as relações empíricas, o que pode ser verificado na figura 6.5.

Tabela 6.2 – Viscosidade pela expressão de por Haider e Levenspiel (1989), μ^{**} e os obtidos com a expressão 6.8, μ^* .

CASO	D_p (mm)	μ (Pa*s) [*]	T (C)	μ (Pa*s) ^{**}
ATAÍDES (2003) - Glicerina 100 %	32.72	1.636	22.00	0.909
	22.9	1.407	25.00	0.711
	18.78	1.636	22.00	0.854
	19.08	1.636	22.00	1.153
	15.34	1.636	22.00	0.722
	16.64	1.210	28.00	0.743
	13.48	1.273	27.00	0.666
	20.46	1.273	27.00	0.645
	16.99	1.273	27.00	0.609
	28.41	1.273	27.00	0.945
	21.34	1.273	27.00	0.685
	30.05	1.555	23.00	0.875
	25.66	1.555	23.00	0.836

Figura 6.5 – Comparação dos modelos empíricos para velocidade terminal adimensional e dados experimentais (ATAÍDES, 2003 viscosidade determinada pela expressão de HAIDER; LEVENSPIEL, 1989).

Figura 6.6 – Variação temporal da velocidade para o Caso 2 (ATAÍDES, 2003 – Glicerina 100 %) - ** viscosidade determinada pela expressão de Haider e Levenspiel (1989); * viscosidade determinada pela expressão 6.8.

O gráfico acima (figura 6.6) nos mostra a melhora na predição da velocidade limite, quando determinamos μ_f com o método apresentado anteriormente (HAIDER; LEVENSPIEL, 1989). Na tabela 6.3 temos todas as propriedades do fluido e das partículas para os experimentos de Ataídes (2003).

Uma vez determinados todos parâmetros necessários para simulação (tabelas 6.1 e 6.3), podemos comparar os valores de velocidade limite obtidos numericamente com os experimentais.

Se definirmos o erro entre a previsão numérica e a medição experimental como :

$$Erro = \frac{|V_t^{Exp.} - V_t^{Num.}|}{V_t^{Exp.}} 100 \quad 6.9$$

Tabela 6.3 - Propriedades da Partícula e fluido para os experimentos de Ataídes (2003) – Glicerina 100 % e 96%.

CASO		D_p (mm)	ρ_p (kg/m ³)	ρ_f (kg/m ³)	V_t (m/s)	Re_p	μ (Pa*s)	Material da Partícula
ATAÍDE (2003) - Glicerina 96 %	1	23.11	7769	1250	0.831	62.99	0.981	Aço
	2	19.08	7752	1250	0.717	44.90	0.812	Aço
	3	15.08	7739	1250	0.558	27.61	0.726	Aço
	4	13.48	7696	1250	0.501	22.15	0.666	Aço
	5	11.94	7732	1250	0.417	16.33	0.685	Aço
	6	9.53	7653	1250	0.344	10.75	0.545	Aço
	7	25.54	2764	1250	0.302	25.32	0.995	Aluminio
	8	20.46	2714	1250	0.303	20.36	0.561	Aluminio
	9	16.99	2763	1250	0.264	14.71	0.482	Aluminio
	10	32.72	1484	1250	0.138	14.84	0.542	PVC
	11	28.12	1469	1250	0.113	10.41	0.485	PVC
	12	22.90	1478	1250	0.092	6.91	0.439	PVC
	13	18.78	1503	1250	0.069	4.27	0.480	PVC
	14	15.34	1471	1250	0.049	2.47	0.420	PVC
	15	30.05	2076	1250	0.334	32.92	0.528	Porcelana
	16	20.88	2167	1250	0.239	16.38	0.471	Porcelana
ATAÍDE (2003) - Glicerina 100 %	1	32.72	1484	1260	0.095	2.39	0.909	PVC
	2	22.9	1478	1260	0.062	1.28	0.711	PVC
	3	18.78	1503	1260	0.043	0.62	0.854	PVC
	4	19.08	7752	1260	0.589	8.65	1.153	Aço
	5	15.34	1471	1260	0.030	0.36	0.722	PVC
	6	16.64	7717	1260	0.625	10.83	0.743	Aço
	7	13.48	7696	1260	0.500	6.67	0.666	Aço
	8	20.46	2714	1260	0.278	5.63	0.645	Aluminio
	9	16.99	2763	1260	0.227	3.81	0.609	Aluminio
	10	28.41	3554	1260	0.498	14.02	0.945	Porcelana
	11	21.34	3492	1260	0.399	8.43	0.685	Porcelana
	12	30.05	2076	1260	0.250	6.08	0.875	Teflon
	13	25.66	2187	1260	0.227	4.73	0.836	Teflon

Na tabela 6.4 temos o erro cometido quando utilizamos as 4 relações empíricas pré-selecionadas para o cálculo de arrasto de Stokes. Podemos observar que as formulações de White (1991), Tilly (1969), Clift e Gauvin (1970) e a expressão 6.1 são bastante similares, com erros máximos iguais a 14.385 % , 9.880 % , 9.107 % 7.179 % , respectivamente. A expressão de White (1991) apresenta seus maiores erros para Re_p maiores que 100 e menores que 10, o que em parte já havia sido citado na análise do gráfico de CD por Re_p . As expressões de Tilly (1969) e Clift e Gauvin (1970) têm o erro, para maioria dos pontos menor que 6 % , sendo que o primeiro apresenta seus maiores erros em apenas 2 pontos, não sendo possível definir uma tendência, enquanto o último tem seus maiores erros para Re_p menores que 5. A expressão 6.1 têm a grande maioria dos pontos com erros menores que 5 % , sendo que os maiores erros ocorrem para Re_p menor que 10.

Tabela 6.4 – Determinação do erro (equação 6.9) cometidos na determinação da velocidade terminal para as relações empíricas de Tilly (1969), Clift e Gauvin (1970), White (1991) e expressão 6.1.

CASO	D_p (mm)	$V_t^{Exp.}$ (m/s)	Re_p	WHITE (1991)		CLIFT; GAUVIN (1970)		TILLY (1969)		Expressão 6.1	
				$V_t^{Num.}$ (m/s)	ERRO %	$V_t^{Num.}$ (m/s)	ERRO %	$V_t^{Num.}$ (m/s)	ERRO %	$V_t^{Num.}$ (m/s)	ERRO %
MORDANT; PINTO (2000)	0.50	0.074	41.00	0.076	2.294	0.078	5.803	0.076	1.889	0.079	6.565
	1.50	0.218	360.00	0.197	9.633	0.218	0.000	0.215	1.376	0.217	0.399
	2.00	0.271	600.00	0.236	12.915	0.267	1.476	0.263	2.952	0.276	1.760
	0.80	0.316	280.00	0.288	8.861	0.314	0.633	0.310	1.899	0.332	5.123
	1.00	0.383	430.00	0.345	9.880	0.385	0.444	0.345	9.880	0.403	5.097
	2.00	0.636	1400.00	0.545	14.385	0.637	0.182	0.630	1.000	0.633	0.406
	3.00	0.813	2700.00	0.709	12.836	0.828	1.868	0.830	2.065	0.824	1.355
	4.00	0.973	4300.00	0.834	14.264	0.954	1.903	0.974	0.114	0.936	3.825
	6.00	1.158	7700.00	1.056	8.774	1.147	0.933	1.208	4.335	1.150	0.674
	1.00	0.590	660.00	0.515	12.790	0.585	0.827	0.577	2.151	0.602	2.044
ATAÍDE (2003) - Glicerina 96 %	23.11	0.831	62.99	0.805	3.162	0.825	0.646	0.790	4.965	0.800	3.693
	19.08	0.717	44.90	0.700	2.458	0.717	0.082	0.684	4.568	0.690	3.791
	15.08	0.558	27.61	0.556	0.376	0.567	1.677	0.540	3.177	0.538	3.645
	13.48	0.501	22.15	0.502	0.324	0.512	2.259	0.487	2.698	0.483	3.567
	11.94	0.417	16.33	0.426	2.075	0.432	3.711	0.411	1.437	0.404	3.176
	9.53	0.344	10.75	0.354	3.089	0.359	4.544	0.341	0.669	0.334	2.755
	25.54	0.302	25.32	0.307	1.731	0.313	3.429	0.297	1.691	0.292	3.310
	20.46	0.303	20.36	0.303	0.016	0.309	2.001	0.309	2.001	0.293	3.448
	16.99	0.264	14.71	0.266	0.766	0.271	2.623	0.258	2.392	0.255	3.441
	32.72	0.138	14.84	0.140	1.323	0.142	3.016	0.136	1.996	0.133	3.652
	28.12	0.113	10.41	0.116	2.739	0.118	4.255	0.112	0.913	0.109	3.093
	22.90	0.092	6.91	0.096	4.079	0.097	5.298	0.092	0.065	0.090	2.516
	18.78	0.069	4.27	0.074	6.696	0.074	7.296	0.071	2.190	0.069	0.326
	15.34	0.049	2.47	0.053	7.890	0.053	8.019	0.051	3.200	0.050	1.504
	30.05	0.334	32.92	0.324	2.995	0.332	0.506	0.318	4.864	0.322	3.591
	20.88	0.239	16.38	0.239	0.017	0.244	1.987	0.232	2.932	0.230	3.631
ATAÍDE (2003) - Glicerina 100 %	32.72	0.095	2.386	0.100	5.645	0.101	6.505	0.096	1.314	0.093	1.492
	22.90	0.062	1.281	0.062	0.658	0.062	0.702	0.059	5.029	0.058	6.456
	18.78	0.043	0.618	0.046	8.590	0.047	9.107	0.045	4.405	0.045	5.003
	19.08	0.589	8.652	0.591	0.473	0.603	2.380	0.573	2.597	0.567	3.644
	15.34	0.030	0.358	0.033	9.501	0.033	8.690	0.032	4.942	0.032	7.179
	16.64	0.625	10.826	0.616	1.472	0.630	0.749	0.600	3.923	0.601	3.747
	13.48	0.500	6.667	0.501	0.255	0.510	2.195	0.486	2.756	0.482	3.603
	20.46	0.278	5.630	0.281	1.019	0.286	2.840	0.272	2.205	0.268	3.414
	16.99	0.227	3.813	0.233	2.781	0.236	4.295	0.225	0.903	0.220	2.879
	28.41	0.498	14.022	0.489	1.838	0.501	0.443	0.478	4.159	0.480	3.744
	21.34	0.399	8.425	0.396	0.795	0.404	1.324	0.385	3.461	0.384	3.627
	30.05	0.250	6.079	0.253	1.161	0.257	2.955	0.244	2.107	0.241	3.549
	25.66	0.227	4.726	0.232	2.240	0.236	3.841	0.224	1.318	0.220	3.166
CROWE (1997)	6.00	0.405	325.45	0.366	9.684	0.386	4.664	0.377	6.879	0.404	0.138
	9.00	0.55	662.95	0.496	9.796	0.534	2.905	0.525	4.564	0.564	2.504

Quando construímos um gráfico da V_t experimental pela V_t determinada numericamente é de se esperar que obtenhamos uma reta com coeficiente angular de 45 graus. Os desvios desta reta implicam erros na previsão, na figura 6.7 podemos verificar estes desvios, vemos que a menos de White (1991) as expressões empíricas se aproximam muito da reta 45, mostrando uma boa previsão do comportamento do arrasto. Desta forma utilizaremos o critério de erro máximo para decidir qual é a “melhor” expressão, o que nos leva a selecionar a expressão 6.1 e esta será adotada para todas as futuras simulações.

Em todas as simulações realizadas até agora foi considerada a variação temporal da velocidade da partícula, sendo assim temos uma histórica temporal da velocidade que pode, assim como na Figura 6.6, ser comparada aos valores experimentais. Os gráficos dos casos da tabela 6.1 e 6.3 estão no anexo B.

Figura 6.7 – Reta 45 graus apresentando os resultados experimentais.

Da análise dos citados gráficos podemos constatar que de forma geral, na região onde a partícula tem movimento acelerado, a previsão numérica subestima a força de arrasto, resultando em uma velocidade maior que o previsto experimentalmente. Este fato nos mostra que nesta região teremos que incluir os efeitos transientes do arrasto no cálculo da velocidade, seja pela adição de novas forças (forças de Boussinesq-Basset e ou de massa aparente) ou um aumento do coeficiente de arrasto devido à aceleração. A análise do efeito destas forças bem como a análise dos modelos de previsão das mesmas, propostos na literatura, são os escopos do próximo tópico.

6.2 - Arrasto Transiente ou Dependente da Aceleração

No item anterior fizemos uma análise da força de arrasto correspondente a uma partícula em regime estacionário. O movimento acelerado da partícula causa o aparecimento de forças que dependem da aceleração da partícula, sendo elas Força de Boussinesq-Basset (FBB) e Força de Massa Aparente (FMA). Por outro lado podemos, além da inclusão das forças já mencionadas introduzir uma correção no CD , que leve em conta o efeito da aceleração (esta metodologia foi adotada por KARANFILIAN; KOTAS, 1978) ou ainda colocar todo o efeito da aceleração como uma correção do arrasto estacionário (TEMKIN; KIM, 1980 e TEMKIN; MEHTA, 1982).

Conforme citado anteriormente os gráficos do ANEXO B nos mostram que o fato de não considerarmos o efeito da aceleração da partícula na determinação de sua velocidade, nos leva a cometer um erro na região não estacionário do movimento. Na literatura existem diversas metodologias para a determinação destes efeitos, como exposto rapidamente acima e em maiores detalhes na revisão bibliográfica. O intuito deste tópico é analisar as condições em que este efeito é relevante e também comparar os modelos existentes na literatura.

Sendo assim em primeiro lugar analisaremos a equação BBO por intermédio da sua solução e em seguida analisaremos os modelos encontrados na literatura. Para tal utilizaremos os dados experimentais utilizados no item 6.1.2, ou seja, dados extraídos dos trabalhos de Mordant e Pinton (2000), Ataídes (2003) e Crowe (1997 apud ROSENDAHL, 1998). Os resultados obtidos para a velocidade terminal, assim como os diâmetros e densidades de cada experimento se encontram nas tabelas 6.1 e 6.3. Cabe ressaltar que em Mordant e Pinton (2000) são fornecidas apenas a dinâmica do movimento para os casos 1, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, sendo que para o caso 5 temos os valores para força de Boussinesq/Basset determinados por Mordant e Pinton (2000). Já Ataídes (2003) forneceu a dinâmica do movimento para todos os casos. Crowe (1997 apud ROSENDAHL, 1998) não fornece a dinâmica.

6.2.1 - Solução da equação da partícula em queda livre

A intenção deste item é desenvolver a solução da equação integro-diferencial que descreve o movimento da partícula em queda livre em um fluido estagnado, o que nos possibilitará a análise das forças envolvidas no movimento. Para tal vamos considerar a equação obtida por Maxey e Riley (1983), por hipótese, além das impostas no citado trabalho, vamos desprezar os efeitos dos gradientes de velocidade do fluido na partícula, ou seja, acoplamento fluido-partícula em mão única. Sendo assim teremos que:

$$m_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} = 3\pi D_p \mu_f (-\vec{V}_p) + \frac{1}{2} m_f \frac{d\vec{V}_p}{dt} +$$

$$- 6\pi \left(\frac{D_p}{2} \right)^2 \mu_f \int_0^t \frac{-\frac{d\vec{V}_p}{d\tau}}{\sqrt{\pi \nu_f (t-\tau)}} d\tau + (m_p - m_f) \vec{g} \quad 6.10$$

Rearranjando a equação acima chegamos a :

$$\frac{d\vec{V}_p}{dt} + A \vec{V}_p + B \int_0^t \frac{-\frac{d\vec{V}_p}{d\tau}}{\sqrt{(t-\tau)}} d\tau = C \quad , \quad 6.11$$

onde,

$$A = \frac{6D_p \pi \mu_f}{2m_p + m_f} ; B = \frac{12 \left(\frac{D_p}{2} \right)^2 \sqrt{\mu_f \pi \rho_f}}{2m_p + m_f} \text{ e } C = \frac{2(m_p - m_f)g}{2m_p + m_f} \quad 6.11.a$$

Aplicando a transformação de Laplace na equação 6.11 temos que :

$$\hat{V}_p s - VP(0) + A\hat{V}_p + B(\hat{V}_p s - V_p(0)) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} = \frac{C}{s} \quad 6.12$$

Assumindo que a velocidade da partícula no instante t igual a zero é nula, podemos reorganizando 6.12 e chegar à :

$$\hat{V}_p = \frac{C}{s(s + A + B\sqrt{\pi}\sqrt{s})} \text{ ou } \hat{V}_p s = \frac{C}{(s + A + B\sqrt{\pi}\sqrt{s})} \quad 6.12.a$$

Lembrando que $\mathcal{L}\left(\frac{dV_p}{dt}\right) = \hat{V}_p s$, ficamos com :

$$\mathcal{L}\left(\frac{dV_p}{dt}\right) = \frac{C}{(s + A + B\sqrt{\pi}\sqrt{s})} \quad 6.13$$

Para obtermos a aceleração da partícula basta aplicarmos a transformada inversa de Laplace na equação 6.13. Antes de realizarmos esta transformação vamos trabalhar o lado direito da citada equação. Podemos fazer :

$$\frac{C}{(s + A + B\sqrt{\pi}\sqrt{s})} = \frac{C}{D - E} \left(\frac{D}{(\sqrt{s} + D)\sqrt{s}} - \frac{E}{(\sqrt{s} + E)\sqrt{s}} \right) \quad 6.14$$

Temos que a transformada inversa de Laplace de é igual por:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{D}{(\sqrt{s} + D)\sqrt{s}}\right) = De^{D^2 t} (1 - \text{Erf}(D\sqrt{t})) = De^{D^2 t} \text{Erfc}(D\sqrt{t}) \quad 6.15$$

Onde $\text{Erf}()$ é a função erro e $\text{Erfc}()$ é igual $1 - \text{Erf}()$. Sendo assim chegamos a:

$$\frac{dV_p}{dt} = \frac{C}{D - E} \left(De^{D^2 t} \text{Erfc}(D\sqrt{t}) - Ee^{E^2 t} \text{Erfc}(E\sqrt{t}) \right) \quad 6.16$$

Integrando em relação a t a equação 6.16 chegamos a expressão para evolução temporal da velocidade de uma partícula em queda livre, esta expressão é dada por:

$$V_P = \frac{C}{D-E} \left(\frac{e^{D^2 t} \operatorname{Erfc}(D\sqrt{t})}{D} - \frac{e^{E^2 t} \operatorname{Erfc}(E\sqrt{t})}{E} \right) - \frac{C}{D-E} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{E} \right) \quad 6.17$$

Onde :

$\operatorname{Erfc}(E\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{E\sqrt{t}}^{\infty} e^{-u^2} du$, já os termos D e E são obtidos por meio da equação 6.14,

tendo quatro soluções possíveis, dadas por :

Primeira solução

$$E = \frac{A}{D} ; D = \frac{B\sqrt{\pi} + \sqrt{B^2\pi - 4A}}{2}$$

Segunda solução

$$E = \frac{A}{D} ; D = \frac{B\sqrt{\pi} - \sqrt{B^2\pi - 4A}}{2}$$

Terceira solução

$$D = \frac{A}{E} ; E = \frac{B\sqrt{\pi} + \sqrt{B^2\pi - 4A}}{2}$$

Quarta solução

$$D = \frac{A}{E} ; E = \frac{B\sqrt{\pi} - \sqrt{B^2\pi - 4A}}{2}$$

A função $\text{Erfc}()$ pode ser determinada pelas tabelas encontradas na literatura ou numericamente. Neste trabalho vamos obtê-la numericamente com integração de Simpson.

As quatro soluções para D e E no final das contas nos fornecem a mesma resposta, isto pode ser visto na figura 6.8.

Figura 6.8 – Efeito das soluções dos termos D e E na solução da evolução temporal da velocidade da partícula.

A expressão 6.17 está limitada à escoamentos com Re_P menor que 1, entretanto esta expressão nos permitirá fazer algumas análises.

Como primeira abordagem vamos analisar a influência das forças de Boussinesq-Basset e da massa aparente na equação 6.10.

Na figura 6.9 temos a evolução temporal do módulo das forças envolvidas no movimento de queda livre da partícula ($D_P = 1 \text{ mm}$ e $\rho_P = 1100 \text{ kg/m}^3$) em um fluido ($\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ e $\mu_f = 0.001 \text{ Pa s}$) inicialmente estagnado. Nesta primeira solução levamos em conta todas as forças, para as próximas soluções vamos

excluir gradualmente as forças de massa aparente (FMA) e de Boussinesq-Basset (FBB). Desta forma poderemos investigar os efeitos da extração destas forças na evolução temporal da velocidade e na evolução da força de Boussinesq-Basset.

Figura 6.9 – Evolução temporal do módulo das forças (força de Boussinesq-Basset, força de arrasto de Stokes, força de massa aparente e força de empuxo).

Nas citadas soluções não tomamos nenhum cuidado para respeitar o intervalo de validade de Re_p .

A Figura 6.10 mostra que o fato de desprezarmos a força de massa aparente tem um efeito menor do que quando desprezamos a força de Boussinesq-Basset. Esta última parece ter um grande efeito na velocidade da partícula na região acelerada.

Quando desprezamos a força de massa aparente temos uma variação na velocidade (aumentando a velocidade). Isto altera a força de arrasto, que aumenta com o quadrado da velocidade, desta forma esperamos que FBB seja menor ou que tenda a decair com o tempo alterado, já que esta é determinada por meio da relação :

$$FBB = m_p \frac{dV_p}{dt} - FE + FCD + FMA$$

6.18

Figura 6.10 – Evolução temporal da velocidade da partícula.

O cenário descrito acima é confirmado na Figura 6.11, onde observamos que FBB tem seu máximo em módulo diminuído e ocorrendo em um instante menor quando comparado com solução que leva em conta todas as forças (FBB+FCD+FMA). Podemos também observar que ao decaimento de FBB com o tempo é mais rápido na solução em que desprezamos FMA (força de massa aparente) e esta chega a inverter o sinal de FBB, isto pode estar ocorrendo por não termos respeitado o intervalo de validade da expressão utilizada na determinação da velocidade da partícula. Se fizemos um gráfico como o da figura 6.9 teríamos em um determinado instante que a força de arrasto (calculado pela fórmula de Stokes) ultrapassará o limite imposto pela força de empuxo (FE), o que

é fisicamente impossível, já que nesta condição a partícula tem aceleração nula e atinge a velocidade terminal (V_t), sendo assim FBB deveria ser nula.

Figura 6.11 – Força de Boussinesq-Basset

Outra possibilidade para justificar o erro cometido é a falta do acoplamento entre partícula-escoamento. Podemos estar superestimando as forças que atuam na partícula.

Desta primeira análise podemos concluir que FBB tem uma importância maior que FMA no movimento acelerado da partícula.

Agora vamos avaliar as mudanças em FBB causadas por variações do diâmetro da partícula (D_p), massa específica da partícula (ρ_p) e do fluido (ρ_f), e ainda viscosidade do fluido (μ_f). Para tal vamos variar um parâmetro e fixar os outros.

Como era de se esperar o aumento de D_p faz com que a força de arrasto aumente, já que a força de empuxo aumenta, com o aumento da massa da partícula. Ao decair o FBB, como vemos na Figura 6.12, o resultado é muito

parecido. Quando tomamos o ponto máximo em módulo de FBB como uma porcentagem de FE (força de empuxo), temos que esta proporção fica praticamente constante (~29%).

Figura 6.12 – Variação de FBB com a variação de D_p (diâmetro da partícula).

A variação da viscosidade do fluido (μ_f) altera completamente o decair do FBB. A diminuição de μ_f faz com que aumente o tempo de decaimento, já a diminuição faz com que diminua o tempo de decaimento, estas afirmações podem ser vistas na figura 6.13. Novamente a razão entre FBB e FE máxima em módulo sofre quase nenhuma alteração.

A variação de massa específica da partícula, que será representada pela razão entre massa específica do fluido e da partícula, tem grande efeito na FBB, alterando seu decaimento e seu ponto máximo em módulo. Podemos observar na Figura 6.14 que a força FBB cresce rapidamente com o aumento de ρ_p . Escrevendo novamente o módulo de FBB como uma porcentagem de FE, observamos que ocorre uma diminuição desta porcentagem.

Figura 6.13 – Variação de FBB com a variação da viscosidade do fluido, no gráfico representada por μ_i .

Se fizermos um gráfico com ρ_f/ρ_P em função da porcentagem do máximo de FBB em módulo com relação a FE, podemos extrair uma expressão que relaciona estas grandezas e tentar definir uma razão de massas específicas que torna a força de FBB desprezível em relação a FE.

Da Figura 6.15 podemos extrair uma regressão de seus pontos, tomando um polinômio de segundo grau chegamos a :

$$\frac{FBB}{FE} 100 = -23.856 \left(\frac{\rho_f}{\rho_P} \right)^2 + 49.335 \left(\frac{\rho_f}{\rho_P} \right) + 7.684 \quad 6.19$$

Figura 6.14 – Variação de FBB com a variação de D_p .

Figura 6.15 – Variação de FBB/FE (%) com a variação da razão entre as massas específicas.

Se admitimos que a expressão 6.19 não tem restrição quanto à sua aplicação, podemos fazer ρ_P tender a infinito e chegar a uma porcentagem mínima, o que nos leva à $FBB = 0.07684FEE$, ou seja, FBB representa 7.684 % de FE em seu ponto de máximo em módulo. Na literatura encontramos que para $\left(\frac{\rho_f}{\rho_P}\right) = 0.001$ FBB pode ser considerado desprezível, para esta razão da expressão 6.19 temos que FBB representa 7.73 %. Vemos por estas aproximações que a força FBB não pode ser simplesmente desprezada. Para desprezamos esta força temos que fazer uma análise das outras forças presentes no fenômeno, pois se não o fizermos podemos estar desprezando uma força significativa.

6.2.2.- Análise dos Modelos

Antes de iniciar a comparação entre os modelos, vamos mostrar a influência dos termos dependentes da aceleração da partícula na determinação da variação temporal de sua velocidade. Para tal vamos utilizar a equação original de Maxey e Riley (1989) (equação 2.3) sem efeitos de Faxén e dela extrairemos em primeiro lugar FMA e depois FMA e FBB. Estes resultados serão comparados com os experimentos citados anteriormente, o que nos possibilitará determinar o efeito da aceleração e a relevância de FBB e FMA na dinâmica da partícula.

Assim como foi observado no item anterior, FMA tem uma influência menor na solução da velocidade da partícula quando comparada com a influência de FBB. Este fato foi observado em todos os casos em estudo. Como exemplo colocamos as Figuras 6.16 e 6.17, onde podemos observar claramente que o FBB tem um efeito maior. Mesmo assim nos cálculos futuros vamos incluir a força FMA.

Para facilitar as futuras análises vamos dividir a variação temporal da velocidade da partícula em duas regiões, região não estacionária e estacionária, conforme figura 6.18. A região de maior interesse, neste subitem, é a região não estacionária onde as forças de FBB e FMA têm sua maior influência.

Figura 6.16 – Comparação das soluções numéricas da expressão de Maxey e Riley (1983) completa, sem FMA e sem FMA e FBB. Caso 1 Mordant e Pinton (2000).

Figura 6.17 – Comparação das soluções numéricas da expressão de Maxey e Riley (1983) completa, sem FMA e sem FMA e FBB. Caso 5 Mordant e Pinton (2000).

Figura 6.18 – Evolução temporal da velocidade de uma partícula em queda livre em um fluido estagnado.

Da observação dos gráficos, como os da Figura 6.17, temos que a equação BBO melhora a previsão da velocidade na região não estacionária. No entanto a formulação utilizada para a determinação de FBB é validada para $Re_P \ll 1$ (MAXEY; RILEY, 1983).

Visto que a FBB tem um efeito maior na região não estacionária vamos avaliar os modelos dados na revisão bibliográfica, incluindo Maxey e Riley (1983), quanto a determinação de FBB nesta região. Os intervalos de validade dos modelos não serão respeitados, desta forma poderemos avaliar os erros cometidos quando trabalhamos fora da validade dos modelos. Os valores obtidos com modelos encontrados na bibliografia serão comparados com valores experimentais. De qualquer forma é visível a necessidade da inclusão das forças não estacionárias ou correção do arrasto estacionário, nos casos em estudo.

O tratamento dos dados experimentais se dará por meio da equação do movimento da partícula. Podemos estimar as forças que agem na partícula, por meio dos dados experimentais. Para tal nós utilizamos do Método dos mínimos

quadrados para obter expressões que representem os dados experimentais, o que nos possibilita a determinação da aceleração da partícula ao longo do seu movimento em intervalos de tempo constantes e assim determinar as forças que agem na mesma.

As forças que independem da aceleração, Força de Arrasto de Stokes (FCD) e Força de Empuxo (FE), são determinadas pelas expressões :

$$FE = (m_p - m_f)g \quad 6.20$$

$$FCD = CD \frac{1}{2} \rho_f V_p^2 A_p \quad 6.21$$

Onde g é aceleração da gravidade, A_p a área projetada, CD é o coeficiente de arrasto dado pela expressão 6.1.

Já as acelerações podem ser obtidas a partir das regressões dos dados empíricos. Estas serão determinadas por intermédio da aproximação de diferenças finitas de segunda ordem (central) que é dada por :

$$\frac{dV_p}{dt} = \frac{V_p^{t+\Delta t} - V_p^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + \text{Ordem}(\Delta t^2) \quad 6.22$$

Onde as velocidades são determinadas, em intervalos iguais de tempo, pelas expressões obtidas pelo Método dos Mínimos Quadrados. Sendo assim podemos determinar as forças dependentes da aceleração, que chamaremos de FAC. Essas forças serão determinadas pela soma vetorial da Força de Arrasto (FCD) de Stokes e Força de Empuxo (FE). Sendo assim teremos :

$$\vec{FAC} = \vec{FCD} + \vec{FE} = m_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} - \vec{FBB} - \vec{FMA} \quad 6.23$$

Com equação 6.23 e a expressão para a força de massa aparente (FMA; equação 4.29) podemos determinar a força de Boussinesq-Basset (FBB) para cada experimento.

Como exemplo colocamos a Figura 6.19 onde temos a variação temporal do módulo das forças envolvidas no movimento de queda livre da partícula. Podemos observar que a força de arrasto de Stokes (FCD) é subestimada quando a partícula atinge a sua velocidade terminal. Deste modo temos um valor residual em FBB, que nesta situação deveria ser nula. Seja sub ou super estimando FCD, este comportamento é observado em todos os experimentos analisados, podemos justificar este fenômeno pelo erro associado à expressão 6.1. De qualquer forma vamos considerar que na região não estacionária do movimento estamos calculando FBB de forma correta e que esta representa o valor real que seria observado se medíssemos diretamente esta força.

Figura 6.19 – Evolução temporal do módulo das forças (força de Boussinesq-Basset, força de arrasto de Stokes, força de massa aparente e força de empuxo) - Caso 1 Mordant e Pinton (2000).

Para avaliarmos os modelos de determinação da FBB vamos tomar dois pontos de análise: um situado na região não estacionária onde V_p é igual a 63,33 % de V_t e outro onde a força FBB atinge seu valor mínimo. De qualquer forma, não podemos deixar de lado a influência destes modelos na velocidade terminal, sendo assim vamos analisar a influência dos modelos na previsão desta velocidade.

Em alguns experimentos as regressões obtidas não representam bem a variação de velocidade com o tempo, o que nos leva a aproximar as acelerações de forma errada e assim estimar as forças FMA e FBB também de forma errada. Sendo assim resolvemos excluir estes experimentos das análises relacionadas a FBB. Os experimentos excluídos são Mordant e Pinton (2000) casos 8 e 9, Ataídes (2003) – glicerina 100% casos 1,2,4,5 e 6 e glicerina 96 % casos 1,2,3,4,10,11,12,13,14,15 e 16.

Para os experimentos de Ataídes (2003) observamos que o comportamento da força FBB é bastante diferente quando comparada às do experimento de Mordant e Pinton (2000). O primeiro atinge o mínimo de FBB logo nos instantes iniciais decai rapidamente, já o segundo tem seus valores aumentados no início do movimento da partícula e seu decair ocorre de forma mais lenta. Em uma primeira análise podemos justificar este fato pelos erros que são maiores em Ataídes (2003), pois temos menos pontos experimentais, entretanto este comportamento é observado na figura 6.13 o que nos leva a concluir que este comportamento pode ser considerado correto.

Quando tomamos os modelos apresentados na revisão bibliográfica (modelos referentes a determinação de FBB) vemos que de forma geral eles subestimam FBB. Desta forma todos os modelos analisados deixam muito a desejar na determinação de FBB, entretanto devemos lembrar que em nenhum instante do cálculo levamos em conta o acoplamento fluido-partícula em duas mãos e ainda não consideramos o intervalo de validade dos modelos. Mesmo assim vemos que principalmente os modelos propostos por Mei e Adrian (1992) e Kim et al. (1998), apesar de errarem o valor de FBB e o tempo em que ocorre seu valor mínimo, parecem prever bem a forma com que FBB decai nos experimentos

de Mordant e Pinton (2000), os outros modelos de forma geral não acertam a forma do decair de FBB, nas Figuras 6.20 e 6.21 podemos verificar estas observações. Na figura 6.21 temos que a previsão da força FBB a partir da expressão 6.1 se torna constante em dado tempo, isto pode estar ocorrendo por erros na regressão utilizada para aproximar a velocidade em função do tempo ou ainda na expressão 6.1, entretanto para este caso temos os valores de FBB fornecidos por Mordant e Pinton (2000).

Já para os experimentos de Ataídes (2003) temos que nenhum dos modelos é capaz de prever o comportamento de FBB com o tempo, onde as previsões se assemelham mais às obtidas com fluidos de viscosidade baixa, com um decair mais lento. O que nos leva a afirmar que nenhum dos modelos é capaz de prever o efeito da viscosidade na determinação de FBB, que é bastante importante na determinação desta força, como exposto no item 6.2.1. Podemos observar estas afirmações nas Figuras 6.22 e 6.23.

A introdução das correções em FBB e FMA propostas por Odar e Hamilton (1964) faz com que os valores da força de FBB diminuam e assim se afastam ainda mais dos obtidos experimentalmente. Originalmente esta correção foi aplicada para o modelo de Maxey e Riley (1983), entretanto aplicamos esta correção, sem nenhuma análise prévia, para os modelos de Mei e Adrian (1992) e Kim et al. (1998) observamos o mesmo comportamento, FBB tem seu valor diminuído quando comparado com o valor sem a correção. Esta constatação pode ser observada nas figuras 6.20, 6.21, 6.22 e 6.23. Sendo assim poderíamos descartar esta correção, porém vamos mantê-la somente no modelo de Maxey e Riley (1983) para futuras análises, uma vez que este tem o maior intervalo de validade dentre os modelos.

No ponto onde a velocidade da partícula atinge 63.33 % da velocidade terminal temos que os modelos de Maxey e Riley (1983) com a correção de Odar e Hamilton (1964), Mei e Adrian (1992) e Kim et al. (1998) têm suas previsões para velocidade da partícula bastante similares ao experimental; já os modelos de Karanfillian e Kotas (1978), Temkin e Mehta (1982) e Maxey; Riley (1983) se afastam do experimental.

Figura 6.20 – Força de Boussinesq/Basset em função do tempo – Caso 1 de Mordant e Pinton (2000).

Figura 6.21 – Força de Boussinesq/Basset em função do tempo – Caso 5 de Mordant e Pinton (2000).

Figura 6.22– Força de Boussinesq/Basset em função do tempo – Caso 8 de Ataídes (2003); glicerina 96 %.

Figura 6.23– Força de Boussinesq/Basset em função do tempo – Caso 9 de Ataídes (2003); glicerina 100 %.

No ponto onde FBB atinge seu valor mínimo temos que todos os modelos determinam valores menores que os experimentais, ou seja, a força FBB é sempre subestimada.

Analisando a variação temporal da velocidade, percebemos que os modelos Karanfillian e Kotas (1978), Temkin e Mehta (1982) e Maxey e Riley (1983) parecem prever de forma não satisfatória os valores de V_P na região não estacionária, enquanto Maxey e Riley (1983) com a correção de Odar e Hamilton (1964), Mei e Adrian (1992) e Kim et al. (1998) parecem melhorar esta previsão.

Na tabela 6.5 temos os valores de V_T e erro determinado com a equação 6.9 para cada modelo, percebemos que os maiores erros são cometidos nos modelos de Karanfillian e Kotas (1978), Maxey e Riley (1983) e Maxey e Riley (1983) com a correção de Odar e Hamilton (1964), já os Temkin e Mehta (1982), Mei e Adrian (1992) e Kim et al. (1998) modelos parecem prever melhor a velocidade terminal. O modelo proposto por Temkin e Mehta (1982) coloca todo efeito da aceleração da partícula como uma correção no arrasto de Stokes, desta forma não calculamos FBB para este modelo.

Os valores dos erros máximos cometidos pelos modelos de Karanfillian e Kotas (1978), Temkin e Mehta (1982) Maxey e Riley (1982), Maxey e Riley (1983), Maxey e Riley (1983) com a correção de Odar e Hamilton (1964), Mei e Adrian (1992) e Kim et al. (1998) são respectivamente: 29.48 %, 22.95 %, 29.48 %, 14.67 %, 24.29 % e 19.54 %. Percebe-se que os erros cometidos na determinação numérica de V_T são, principalmente nos experimentos de Ataídes (2003), grandes. Este fato pode ser justificado pelos erros cometidos na previsão de FBB ou ainda pela total desconsideração do acoplamento fluido partícula. No próximo item vamos estudar a influência do acoplamento na solução.

Tabela 6.5 – Determinação do erro (equação 6.9) cometidos na determinação da velocidade terminal a partir dos modelos em estudo.

CASO	D_p (mm)	Re_p	$V_t^{Exp.}$ (m/s)	MAXEY: RILEY (1983)		KIM: ELGHOBASHI; SIRIGNANO (1998)		KIM: ELGHOBASHI; SIRIGNANO (1998) & ODAR;		KARANFILLIAN; KOTAS (1978)		MEI; ADRIAN (1992)		MEI; ADRIAN (1992) & ODAR; HAMILTON (1966,1964)		TEMKIN; MEHTA (1982)	
				V_t (m/s)	Erro (%)	V_t (m/s)	Erro (%)	V_t (m/s)	Erro (%)	V_t (m/s)	Erro (%)	V_t (m/s)	Erro (%)	V_t (m/s)	Erro (%)	V_t (m/s)	Erro (%)
ATAIDE (2003) - PINTON (2000)	1	0.50	41.00	0.077	4.04	0.080	8.18	0.083	12.33	0.083	12.47	0.083	12.29	0.083	12.43	0.084	12.76
	2	1.50	360.00	0.218	0.223	0.228	4.74	0.234	7.30	0.235	7.66	0.234	7.49	0.235	7.67	0.235	8.02
	3	2.00	600.00	0.271	0.267	0.273	0.67	0.263	6.69	0.279	3.06	0.279	2.86	0.279	3.07	0.280	3.48
	4	0.80	280.00	0.316	0.304	0.310	2.06	0.314	0.63	0.314	0.61	0.314	0.62	0.314	0.60	0.314	0.58
	5	1.00	430.00	0.363	0.398	0.404	5.56	0.412	7.44	0.412	7.40	0.412	7.46	0.412	7.51	0.412	7.62
	6	2.00	1400.00	0.636	0.618	0.626	1.62	0.632	0.57	0.633	0.47	0.632	0.56	0.633	0.46	0.634	0.29
	7	3.00	2700.00	0.813	0.802	0.796	2.04	0.802	1.37	0.803	1.24	0.802	1.37	0.803	1.24	0.805	1.01
	8	4.00	4300.00	0.973	0.914	0.922	5.28	0.926	4.83	0.927	4.68	0.926	4.84	0.927	4.68	0.930	4.43
	9	6.00	7700.00	1.158	1.126	1.132	2.26	1.136	1.89	1.137	1.83	1.135	1.96	1.136	1.87	1.146	1.03
	10	1.00	650.00	0.590	0.595	0.603	2.17	0.610	3.44	0.610	3.47	0.595	3.44	0.610	3.44	0.611	3.54
ATAIDE (2003) - Glicerina 96 %	1	23.11	62.99	0.831	0.741	0.794	4.47	0.835	0.54	0.838	0.67	0.741	10.82	0.835	0.67	0.843	1.42
	2	19.08	44.90	0.717	0.644	0.686	4.42	0.720	0.33	0.722	0.65	0.644	10.18	0.719	0.27	0.726	1.17
	3	15.08	27.61	0.568	0.506	0.533	4.49	0.506	9.27	0.533	4.49	0.506	9.27	0.558	0.00	0.564	1.04
	4	13.48	22.15	0.501	0.457	0.479	4.41	0.501	0.13	0.503	0.53	0.457	8.82	0.501	0.02	0.503	0.44
	5	11.94	16.33	0.417	0.385	0.401	3.78	0.419	0.57	0.421	1.05	0.385	7.69	0.421	0.95	0.424	1.68
	6	9.53	10.75	0.344	0.321	0.334	2.88	0.348	1.30	0.350	1.80	0.321	6.57	0.347	1.08	0.352	2.46
	7	25.54	25.32	0.302	0.256	0.281	6.85	0.299	0.95	0.302	0.02	0.256	15.21	0.299	0.17	0.302	1.46
	8	20.46	20.36	0.303	0.258	0.283	6.80	0.301	0.76	0.303	0.01	0.258	14.95	0.303	0.12	0.307	1.23
	9	16.99	14.71	0.264	0.227	0.247	6.36	0.262	0.75	0.264	0.01	0.227	13.82	0.261	1.03	0.267	1.22
	10	32.72	14.64	0.138	0.109	0.124	10.23	0.134	3.33	0.136	1.72	0.109	21.34	0.133	3.68	0.140	1.03
ATAIDE (2003) - Glicerina 100 %	11	28.12	10.41	0.113	0.084	0.096	14.67	0.104	7.79	0.108	3.94	0.084	25.72	0.101	10.18	0.115	1.91
	12	22.90	6.91	0.092	0.071	0.082	10.90	0.088	4.58	0.091	0.68	0.071	22.51	0.086	6.83	0.095	3.43
	13	18.78	4.27	0.069	0.054	0.068	1.61	0.072	3.53	0.073	5.92	0.054	22.05	0.063	5.49	0.076	9.18
	14	15.34	2.47	0.049	0.038	0.051	3.14	0.049	0.52	0.054	10.60	0.038	22.93	0.042	14.89	0.054	10.06
	15	30.05	32.92	0.334	0.267	0.299	10.43	0.327	2.06	0.332	0.61	0.267	20.10	0.325	2.70	0.331	0.91
	16	20.88	16.38	0.239	0.198	0.219	8.27	0.236	1.36	0.238	0.45	0.198	17.20	0.235	1.61	0.238	0.60
	1	32.72	2.39	0.095	0.073	0.085	10.21	0.090	5.43	0.095	0.08	0.073	22.70	0.087	8.48	0.093	1.68
	2	22.9	1.28	0.062	0.044	0.059	5.22	0.058	6.59	0.064	1.93	0.044	29.48	0.048	23.32	0.063	1.37
	3	18.78	0.95	0.043	0.032	0.046	8.63	0.037	12.52	0.050	15.98	0.032	24.27	0.034	21.44	0.049	15.18
	4	19.08	8.65	0.589	0.530	0.561	4.74	0.588	0.06	0.591	0.37	0.530	9.99	0.587	0.21	0.590	0.30
ATAIDE (2003) - Glicerina 100 %	5	15.34	0.36	0.030	0.023	0.033	8.61	0.024	19.54	0.036	16.12	0.023	25.53	0.023	24.30	0.035	14.29
	6	16.64	10.83	0.625	0.564	0.597	4.51	0.626	0.20	0.628	0.54	0.564	9.72	0.626	0.10	0.628	0.48
	7	13.48	6.67	0.500	0.455	0.477	4.46	0.500	0.08	0.502	0.49	0.455	8.88	0.499	0.07	0.502	0.40
	8	20.46	5.63	0.278	0.237	0.259	6.66	0.275	0.90	0.278	0.06	0.237	14.74	0.237	1.16	0.277	0.21
	9	16.99	3.81	0.227	0.196	0.214	5.43	0.226	0.10	0.228	0.81	0.196	13.31	0.226	0.44	0.228	0.63
	10	28.41	14.02	0.498	0.423	0.463	7.07	0.495	0.61	0.499	0.06	0.423	15.17	0.495	0.64	0.499	0.02
	11	21.34	8.43	0.399	0.344	0.374	6.19	0.397	0.54	0.399	0.10	0.344	13.77	0.396	0.69	0.399	0.01
	12	30.05	6.08	0.250	0.201	0.226	9.67	0.244	2.23	0.248	0.62	0.201	19.37	0.242	3.08	0.248	0.77
	13	25.66	4.73	0.227	0.189	0.209	7.88	0.225	1.17	0.227	0.04	0.189	17.05	0.223	1.72	0.231	1.72

O tratamento dos dados fornecidos pelos experimentos de Mordant e Pinton (2000) e Ataídes (2003) nos permitem determinar a relação entre FBB mínimo e o número de Reynolds baseado no diâmetro da partícula e na velocidade terminal. Escrevendo FBB como uma porcentagem de FE (força de empuxo) chegamos a figura 6.24 de onde podemos extrair uma relação entre $|FBB_{\text{MÍNIMO}}/FE| \cdot 100$ e $Re_p^{V_T}$ dada por :

$$\left| \frac{FBB_{\text{MÍNIMO}}}{FE} \right| * 100 = 88.335 \left(Re_p^{V_T} \right)^{-0.2439} \quad 6.24$$

Figura 6.24 – Relação de $|FBB_{\text{MÍNIMO}}/FE| \cdot 100$ e $Re_p^{V_T}$

A partir da equação 6.2 podemos extrair uma relação entre ρ_f / ρ_p e $Re_p^{V_T}$, o que nos leva a :

$$\frac{\rho_f}{\rho_p} = 1 - CD \left(Re_p^{V_T} \right)^2 G \quad 6.25$$

onde $G = \frac{3}{4} \frac{\mu_f^2}{\rho_f \rho_p D_p^3 g}$ e CD é dado pela expressão 6.1. Através das relação 6.25 e 6.24 podemos obter uma relação entre a razão entre as massas específicas do fluido e da partícula e a porcentagem em módulo de FBB com relação à FE. Na figura 6.25 temos esta relação, desta figura podemos extrair que :

$$\left| \frac{FBB_{MÍNIMO}}{FE} \right| * 100 = A \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_p} \right)^{-B} \quad 6.26$$

Figura 6.25 – Variação de $FBB_{MÍNIMO}$ em função da razão de massas específicas fluido partícula.

Onde :

$$A = 85.463G^{0.1278} \quad 6.27$$

$$B = 0.3324G^{0.0483} \quad 6.28$$

No item 6.2.1 obtivemos a expressão 6.19 que nos permitiu estimar FBB mínima para ρ_f/ρ_P igual a 0.001, entretanto agora percebemos que na realidade este valor depende de G . Desta forma para esta relação é possível obter infinitos valores de FBB mínimo. Na figura 6.26 temos a comparação dos valores obtidos com a expressão 6.19 e com a expressão 6.26 nas mesmas condições; as linhas cheias representam G constante. Facilmente percebemos que cometemos erros utilizando a equação 6.19, estes erros são menores nos pontos onde ρ_f/ρ_P é igual a 0.5, 0.7 e quando se aproxima de zero.

Figura 6.26 – Comparação entre as expressões 6.19 e 6.26.

Tomando $\left(\frac{\rho_f}{\rho_p}\right) = 0.001$ podemos obter a força FBB mínimo em função de

G e assim analisar em que situação podemos desprezar esta força. Na figura 6.27 temos a variação de $|FBB_{\text{MÍNIMO}}/FE|*100$ com G para a citada razão entre massas específicas, nesta figura estão colocados dois pontos nos quais temos $D_p = 0.001$ m e os fluidos são água ($\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ e $\mu_f = 0.001 \text{ Pa s}$, ponto verde) e ar ($\rho_f = 1.23 \text{ kg/m}^3$ e $\mu_f = 1.79*10^{-5} \text{ Pa s}$, ponto azul), para estes pontos vemos que a porcentagem de FBB em relação a FE são respectivamente 10.70 % e 21.70 %. Vemos que estas porcentagens são bastante representativas. Se considerarmos que uma porcentagem menor ou igual a 5 % torna FBB desprezível frente às outras forças, teremos que D_p deve ser maior ou igual a 0.05 m para o ar e menor ou igual a 0.008 m para água.

Figura 6.27 – Variação de $|FBB_{\text{MÍNIMO}}/FE|*100$ em função de G para $\left(\frac{\rho_f}{\rho_p}\right) = 0.001$.

Das Figuras 6.27 e 6.26 podemos concluir que $|FBB_{\text{MÍNIMO}}/FE|*100$ diminui com o aumento do diâmetro da partícula e como consequência sua influência no movimento, temos também que o aumento de v_f faz com que $|FBB_{\text{MÍNIMO}}/FE|*100$ aumente e consequentemente a influência FBB no movimento.

6.3 – Considerações finais

No item 6.1, os modelos para determinação do arrasto estacionário (Tabela 2.1) foram estudados. Destes estudos pudemos concluir que a expressão 6.1 representa melhor o arrasto estacionário, quando seus resultados são comparados com os resultados obtidos pelos modelos extraídos da literatura. Para o restante deste trabalho utilizaremos a expressão 6.1.

A solução da equação do movimento de uma partícula (equação 6.10) sedimentando num fluido estagnado foi obtida, dada pela equação 6.17. Por meio desta solução, observamos que quando a razão entre a massa específica do fluido e da partícula (ρ_f/ρ_p) é igual a 10^{-3} , a força de Boussinesq-Basset ainda é relevante, quando esta é comparada com outras forças que atuam na partícula. Esta observação é contrária ao que é encontrado na literatura (MICHAELIDES (1997)), uma vez que a força de Boussinesq-Basset é desprezada quando a razão entre a massa específica é menor igual a 10^{-3} . Esta observação foi confirmada com a análise dos dados experimentais extraídos de Mordant e Pinton (2000) e Ataídes (2003).

Os modelos para previsão da força de Boussinesq-Basset, encontrados na literatura, foram estudados e seus resultados confrontados com dados experimentais. Destas comparações observamos que os modelos de Maxey e Riley (1983) com correção de Odar e Hamilton (1964), Mei e Adrian (1992) e Kim et al (1998) representam melhor o comportamento dos dados experimentais utilizados. Entretanto, estes modelos subestimam o valor da força de Boussinesq-Basset.

CAPÍTULO 7 – ANÁLISE DA FORÇA DE SUSTENTAÇÃO

O objetivo principal deste Capítulo é analisar os modelos existentes na literatura para determinação das forças de sustentação. Podemos ressaltar que estes modelos têm intervalo de validade bastante limitado (número de Reynolds baixo, da ordem de 100), desta maneira nos propomos a avaliar a possibilidade de aumentar estes intervalos. Para tanto, vamos analisar os efeitos Saffman e Magnus de forma desacoplada, lembrando que o primeiro se refere às não uniformidades do escoamento e o segundo à rotação da partícula. Visto as dificuldades em realizar experimentos para estes fenômenos, vamos propor experimentos numéricos, onde as condições são controláveis. A obtenção de coeficientes de forças para uma partícula por intermédio de resultados numéricos se atribui a Dandy e Dweyr (1990).

Utilizaremos o programa comercial FLUENT, com malhas capazes de representar o escoamento ao redor da partícula, para determinação das forças. Para tanto, faremos uma validação dos resultados obtidos com as citadas malhas. Esta validação será dividida em 2 etapas: determinação do arrasto estacionário e determinação da força de sustentação devido ao efeito Magnus. Estes valores numéricos serão confrontados com valores experimentais extraídos da literatura.

Em todas as simulações, o FLUENT será ajustado para utilizar uma discretização espacial upwind de primeira ordem e acoplamento pressão-velocidade dado pelo método SIMPLE (PATANKAR (1980)).

Como primeira análise iremos avaliar o arrasto estacionário, partícula parada e fluido com perfil de velocidades uniforme. Apresentaremos uma comparação entre os valores numéricos e os valores experimentais encontrados na literatura.

Avaliaremos os modelos apresentados no Capítulo 2 e ou nas Tabelas 7.2 a e b.

Por fim, tomarmos uma partícula com rotação e avaliaremos a capacidade de prever o efeito Magnus utilizando o FLUENT com as malhas que serão construídas, para tanto os resultados numéricos serão comparados com valores experimentais extraídos de Oesterlé e Bui Dinh (1998). Neste trabalho os autores apresentam uma relação empírica, as hipóteses relacionadas à obtenção desta relação serão analisadas e assim mostraremos que a mesma nos leva valores equivocados, mesmo dentro do seu intervalo de validade.

Estes estudos servirão para aumentar ou mesmo restringir o intervalo de validade das expressões para determinação das forças que atuam em uma partícula imersa em um meio fluido.

Faremos, em todos os estudos, uma avaliação da dependência de malha. Uma vez estabelecida a melhor malha suas características básicas serão aplicadas nos estudos subsequentes.

7.1 Determinação numérica do arrasto em uma partícula

Para este experimento numérico, vamos considerar três malhas diferentes, para maiores detalhes das malhas ver Tabela 7.1. Além disso, vamos considerar dois equacionamentos, laminar e RANS (“Reynolds Average Navier-Stokes”) com modelo SST para a turbulência. O que nos possibilitará a determinar a influência do modelo e da malha. Todos os casos serão resolvidos com malhas tridimensionais, com formato retangular.

Nos casos estudados, vamos tomar o fluido como sendo ar onde $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 1.79\text{e-}5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$; o diâmetro da partícula de 2 mm, uma representação esquemática das malhas é dada na Figura 7.1.

Tabela 7.1 – Malhas utilizadas na determinação do arrasto.

Malha	h_{Malha}	Número de células
1	0.1	24948
2	0.1	32564
3	0.05	38276

Figura 7.1 – Representação esquemática da malha.

Na Tabela 7.1 h_{Malha} representa a distância entre a superfície da partícula e o nó imediatamente após a citada superfície.

Na Figura 7.2 temos as malhas utilizadas neste primeiro estudo. A diferença entre as malha 1 e 2 consiste no número de células na região na região próxima a partícula, ou seja, a malha 2 é mais refinada. Já a malha 3 tem h igual à metade das malhas anteriores e ainda um refinamento maior que as outras duas na citada região.

Os resultados obtidos numericamente serão comparados com dados empíricos, já utilizados neste trabalho (Capítulo 5). Utilizamos os seguintes valores de Re_P : 0.10, 1.0, 10.0, 50.0, 100.0, 1000.0 e 10000.0 para análise.

As condições de contorno impostas ao domínio de cálculo são gradiente da velocidade nulo na direção x na saída do mesmo e velocidade fixa, igual velocidade no infinito nas fronteiras de entrada, superior, inferior e laterais. Na Figura 7.3 temos a representação das fronteiras do domínio e o sistema de coordenadas adotado nas simulações.

Nas simulações, a partícula se encontra parada e escoamento com velocidade constante. Sendo assim, os coeficientes de arrasto que serão determinados são referentes ao arrasto de Stokes ou de regime permanente.

Malha 1

Malha 2

Malha 3

Figura 7.2 – Cortes paralelos ao plano xz das malhas trimensionais estudadas.

Figura 7.3 – Esquema do domínio computacional

Na Figura 7.4 temos os resultados numéricos e valores experimentais do coeficiente de arrasto, facilmente podemos verificar que estes se aproximam bastante, sendo assim podemos afirmar que o programa FLUENT, com as malhas da Figura 7.2, é capaz de representar bem os resultados experimentais.

Os resultados obtidos pelas três malhas são similares com erro relativo (equação 7.1) máximo menor que 5 % quando o Re_p é menor ou igual a 1000, onde erro é baseado no valor médio entre as malhas. Já para Re_p igual a 10000 temos um erro relativo maior, entretanto observamos na figura 7.4 que a

malha 3 tem o melhor resultado dentre as malhas, se aproxima mais do resultado experimental. O erro com relação aos valores experimentais é inferior a 10 % em todas condições simuladas.

$$erro_{Malha_i}(\%) = \left| \frac{Coef_{Médio} - Coef_{Malha_i}}{Coef_{Médio}} \right| 100 \quad 7.1$$

onde,

$$Coef_{Médio} = \sum_i^N Coef_{Malha_i} ; \text{ sendo N igual a quantidade malhas utilizadas.}$$

Nas Figuras 7.5 e 7.6 temos a variação do arrasto de pressão e o arrasto viscoso, na forma de coeficientes em função de Re_p . Nestas figuras verifica-se que o comportamento dos citados coeficientes é praticamente invariante quanto à variação da malha e do equacionamento (laminar ou turbulento).

Dos resultados numéricos, obtidos com e sem modelo de turbulência, observamos valores de arrasto muito próximo, mesmo na região onde ocorrem separações, por simplicidade iremos adotar o modelo laminar, uma vez que tem um custo computacional menor. Nas Figuras 7.5 a e b temos a visualização das separações gerada com modelo laminar, o resultado gerado com a malha 3 e $Re_p=100$.

No que diz respeito à determinação do arrasto estacionário, podemos afirmar que o FLUENT com as malhas da Tabela 7.1 é perfeitamente capaz determinar o arrasto para valores de Re_p entre 0.10 e 10000, com equacionamento laminar e h menor ou igual a 0.05.

Figura 7.4 - Arrasto de Stokes em função do número de Reynolds da partícula (Re_P), dados numéricos e experimentais (SCHLICHTING (1965) E WHITE (1991)).

CAPÍTULO 7 – ANÁLISE DA FORÇA DE SUSTENTAÇÃO

Figura 7.5 - Arrasto viscoso em função do número de Reynolds.

Figura 7.6 - Arrasto de pressão em função do número de Reynolds.

Figura 7.7 a – Visualização das linhas de corrente

Figura 7.7 b – Visualização da velocidade na direção x

7.2 Efeito Saffman

Como primeira análise iremos comparar as expressões encontradas na literatura (Capítulo 2), as Tabelas 7.2 a e b mostram as expressões que serão utilizadas. Estas expressões foram obtidas utilizando duas metodologias diferentes. A determinação do coeficiente de sustentação em uma das abordagens (Tabela 7.2 a) leva em conta o gradiente do campo de velocidade, enquanto que a outra leva em conta a distância entre partícula e parede sólida (Tabela 7.2 b). A segunda metodologia mostra-se limitada, uma vez que esta depende do formato da parede e do perfil de velocidades que se desenvolve na mesma, isto torna bastante difícil uma generalização deste tipo de expressão. A primeira metodologia nos parece mais atraente uma vez que depende apenas do campo de velocidades, não é necessária nenhuma informação da parede.

A diferença nas metodologias de obtenção das expressões das Tabelas 7.2 a e b torna difícil uma comparação, já que deveríamos levar em conta a forma da parede. De qualquer forma, podemos assumir um perfil de velocidades e assim comparar os resultados. De antemão, podemos afirmar que ocorrerão discrepâncias, uma vez que a intensidade do gradiente depende da distância da partícula até a parede.

Assumiremos dois perfis de velocidades, um linear e outro cúbico (perfil de Eckert).

Para as análises que seguiremos assumiremos que a partícula se encontra dentro da camada limite que terá seu desenvolvimento dado pelos perfis linear e cúbico. A espessura da camada limite será assumida como unitária, desta forma os perfis ficam na forma:

Tabela 7.2 a – Expressões para determinação da coeficiente de sustentação devido ao efeito Saffman – Modelos dependentes do gradiente da velocidade.

SAFFMAN (1965,1968)	$CL_{Saffman} = \frac{4.1126}{Re_{Rotacional}^{0.5}}$ Equação 2.28
MEI (1992)	$C_L = CL_{Saffman} \left((1 - 0.3314\beta^{0.5})e^{-\frac{Re_{Relativo}}{10}} + 0.3314\beta^{0.5} \right)$ Equação 2.37 a $0.10 \leq Re_{Relativo} \leq 40$ $C_L = CL_{Saffman} 0.0524(\beta Re_{Relativo})^{0.5}$ Equação 2.37 b $40 < Re_{Relativo} \leq 100$
MEI (1992)	$C_L = CL_{Saffman} 0.443J(\varepsilon)$ $J(\varepsilon) = 0.6765K$ $K = \left[\frac{1 + \tanh\left(\frac{2.5 \log_{10} \varepsilon}{0.191}\right)}{1 + \tanh\left(\frac{2.5 \log_{10} \varepsilon}{0.191}\right)} \right] \left(\frac{0.667 + \tanh(6(\varepsilon - 0.32))}{1 + \tanh(6(\varepsilon - 0.32))} \right)$ Eq. 2.38 $0.10 \leq \varepsilon \leq 20$

Tabela 7.2 b – Expressões para determinação da coeficiente de sustentação devido ao efeito Saffman – Modelos dependentes da distância da parede até a part.

COX; HSU's (1977)	$I_L = \frac{18\pi}{32} - \frac{66\pi}{64} K \Lambda_G + \frac{366}{576} \Lambda_G^2$ Equação 2.29
CHERRUKAT; MCLAUGHLIN (1994)	$I_L = \left(1.7716 + 0.216K + \right. \\ \left. - 0.7292K^2 + 0.4854K^3 \right) - \\ + \left(\frac{3.2397}{K} + 1.145 + \right. \\ \left. + 2.084K - 0.9059K^2 \right) \Lambda_G + \\ + (2.0069 + 1.0575 - 2.4007K^2 + 1.3174K^3) \Lambda_G^2$ Eq. 2.39 $0.05 \leq K \leq 0.90$ $-5.0 \leq \Lambda_G \leq 5.0$

Perfil linear:

$$u(y) = \frac{Re_{\infty} \mu_f}{\rho_f D_p} y \quad 7.1$$

Perfil de Eckert:

$$u(y) = \frac{Re_{\infty} \mu_f}{\rho_f D_p} \left(\frac{3}{2} y - \frac{1}{2} y^3 \right), \quad 7.2$$

onde Re_{∞} representa o numero de baseado no diâmetro da partícula e na velocidade fora da camada limite.

A expressão de Mei (1992), equação 2.37 a e b, será considerada como sendo base para as comparações dos cálculos utilizando o perfil linear, uma vez que está expressão originalmente foi derivada a partir de perfis lineares. Esta expressão é baseada em dados numéricos obtidos por Dandy e Dweyr (1990). Os resultados apresentados por este autores mostra que a expressão de Saffman (1965,1968) é capaz de representar bem o efeito Saffman, para $0.20 \leq (\alpha/Re_p)^{0.5} \leq 2.00$, a maior parte dos resultados aqui apresentados esta dentro deste intervalo.

Nas figuras 7.8, 7.9, 7.10 e 7.11, podemos observar que as expressões apresentadas por Cox e Hsu's (1977) e Cherrukat e Mclaughlin (1994) não representam a variação do coeficiente de sustentação, dentro das condições analisadas, quando utilizamos o perfil linear, isto mostra que estas expressões não são válidas.

O modelo Cox e Hsu's (1977) parece não representar a variação do coeficiente de sustentação, pois este permanece praticamente constante em todas as condições avaliadas. Este modelo mostra pequena variação quando a partícula se aproxima da parede, no perfil cúbico – Figuras 7.12 à 7.15. O

comportamento deste modelo em todo intervalo se mostra ruim, desta maneira podemos descartá-lo.

O modelo de Mei (1992) - equação 2.38 tem seu intervalo de aplicação bastante limitado, na maior parte dos resultados a discrepância, quando comparado com a expressão de Saffman (1965,1968), deste modelo é grande, desta maneira este modelo também será descartado.

As expressões de Mei (1992) – equações 2.37 a e b e Saffman apresentam resultados bastante similares para Re_P baixo, dentro da faixa de validade do modelo de Saffman (1965,1968). Podemos perceber, nas figuras 7.11 e 7.15, diferenças entre o modelo de Saffman (1965,1968) e Mei (1992) – equações 2.37 a e b. Esta diferenças surgem devido ao aumento de Re_P .

Quando comparados as expressões de Mei (1992) – equações 2.37 a e b e Saffman (1965,1968) com Cherrukat e Mclaughlin (1994) para o perfil cúbico observamos uma grande diferença em todo intervalo de Re_P estudado. Entretanto, por falta de resultado, uma vez que este ainda é um problema em aberto, não podemos afirmar qual deles representa melhor o fenômeno em estudo. De qualquer forma, um bom critério de escolha é o intervalo de validade que é maior para o modelo de Mei (1992) – equações 2.37 a e b, sendo ficamos com este modelo para determinação da força de sustentação.

CAPÍTULO 7 – ANÁLISE DA FORÇA DE SUSTENTAÇÃO

Figura 7.8 – Comparação das expressões da tabela 7.1- $Re_{\infty} = 0.005$; perfil linear.

Figura 7.9 – Comparação das expressões da tabela 7.1- $Re_{\infty} = 0.01$; perfil linear.

CAPÍTULO 7 – ANÁLISE DA FORÇA DE SUSTENTAÇÃO

Figura 7.10 – Comparação das expressões da tabela 7.1- $Re_{\infty} = 0.10$; perfil linear.

Figura 7.11 – Comparação das expressões da tabela 7.1- $Re_{\infty} = 1$; perfil linear.

CAPÍTULO 7 – ANÁLISE DA FORÇA DE SUSTENTAÇÃO

Figura 7.12 – Comparação das expressões da tabela 7.1- $Re_\infty = 0.005$ - perfil cúbico.

Figura 7.13 – Comparação das expressões da tabela 7.1- $Re_\infty = 0.01$; perfil cúbico.

CAPÍTULO 7 – ANÁLISE DA FORÇA DE SUSTENTAÇÃO

Figura 7.14 – Comparação das expressões da tabela 7.1- $Re_\infty = 0.1$; perfil cúbico.

Figura 7.15 – Comparação das expressões da tabela 7.1- $Re_\infty = 1$; perfil cúbico.

7.3 Efeito Magnus

Como primeiro estudo, faremos uma validação das malhas que utilizaremos no FLUENT frente aos dados experimentais apresentados por Oesterlé e Bui Dinh (1998), onde são apresentados valores dos coeficientes de sustentação em decorrência da rotação da partícula. No experimento, a partícula adquire velocidade de rotação por intermédio de uma haste. O modelo numérico aqui utilizado leva em conta a partícula e a haste, na Figura 7.16 temos a malha superficial da esfera mais haste, que será mantida constante.

Os resultados experimentais apresentam 20 % de erro na medição (OESTERLÉ E BUI DINH (1998)), este erro se aplica ao coeficiente de sustentação total. Na determinação do erro incluímos uma parcela que leva em conta o comprimento da haste, uma vez que seu valor exato para cada experimento não foi apresentado. Temos um intervalo de variação, o modelo aqui utilizado tem uma haste com comprimento igual à média dos extremos do intervalo, sendo igual a 72 mm.

Dentre todas as condições, escolhemos cinco (Tabela 7.3) para fazer uma análise de dependência de malha. Para tanto, vamos construir três malhas que basicamente são iguais às utilizadas na determinação do arrasto, estas serão caracterizadas pela distância do primeiro ponto da malha até à parede. Nas figuras 7.17, 7.18 e 7.19 são mostrados cortes das malhas utilizadas no FLUENT, no detalhe mostramos o refinamento na região próxima à parede. A malha 1 tem o refinamento maior e a 3 o menor, onde h_{Malha} é igual a 0.001 mm, 0.01 mm e 0.05 mm pra as malhas 1, 2 e 3 respectivamente.

Tabela 7.3 – Tabela de condição para análise do efeito da malha nas simulações.

Pontos	D_P (mm)	D_{Cilindro} (mm)	Re_P	γ
Ponto 1	17	1	11.36	5.25
Ponto 2	17	1	11.55	0.905
Ponto 3	17	1	48.16	3.62
Ponto 4	17	1	63.35	1.66
Ponto 5	55.1	1.5	137.82	6.05

onde $\gamma = \left| \frac{D_p W_p}{2V_R} \right|$, sendo W_p a velocidade angular da partícula e V_R a velocidade relativa da partícula.

O erro relativo (equação 7.1), baseado na média dos valores obtidos, entre as malhas se encontra em todos os pontos avaliados menor que 1 por cento. Desta forma o efeito de malha, pelo menos no que diz respeito a refinamento espacial próximo a parede e partícula e distância da parede ao primeiro ponto da malha (h_{Malha}), se mostra praticamente inexistente. Na Figura 7.20 temos a variação do coeficiente de sustentação em função da distância h_{Malha} , nesta figura podemos observar a pequena variação do C_l com a variação da malha. Tomaremos como padrão para as próximas simulações a malha 3 com h_{Malha} igual a 0.05 mm, uma vez que este é o suficiente para a determinação do arrasto.

Definida a malha a ser utilizada neste experimento numérico, tomamos as condições do escoamento e rotação da partícula apresentados por Oesterlé e Bui Dinh (1998) e assim obter os valores do coeficiente de sustentação devido ao efeito Magnus.

Antes de iniciarmos a análise dos resultados numéricos, vale a pena ressaltar a metodologia utilizada por Oesterlé e Bui Dinh (1998) para determinar o coeficiente de sustentação. No experimento apresentado pelos autores, existem duas fontes de sustentação: uma a própria partícula e a outra a haste, sendo assim, tiveram que prever a sustentação gerado pela haste por intermédio de uma expressão, que no citado trabalho foi a apresentada por Ingham e Tang (1990 apud OESTERLÉ E BUI DINH (1998)), sendo válida para Re , baseado no diâmetro do haste, igual à 5. A utilização desta expressão foi identificada pelos autores com uma possível fonte de erro.

Figura 7.16 – Malha superficial da partícula mais haste.

Figura 7.17 – Refinamento da malha 1.

Figura 7.18 – Refinamento da malha 2.

Figura 7.19 – Refinamento da malha 3

Na Figura 7.21 temos os resultados experimentais apresentados por Oesterlé e Bui Dinh (1998) e a expressão obtida pelos autores.

Os dados obtidos com as simulações numéricas são confrontados com os experimentais nas Figuras 7.22, 7.23, 7.24 e 7.25. Nestas figuras são observadas grandes discrepâncias entre os dados experimentais e os numéricos, a grande maioria dos resultados numéricos se encontra dentro do erro experimental. Desta maneira, podemos concluir que a malha utilizada com o FLUENT é capaz de representar o efeito Magnus.

Figura 7.20 – Coeficiente de sustentação em h_{malha} .

Figura 7.21 – Coeficiente de sustentação devido ao efeito Magnus – Experimentais e modelo empírico.

Uma vez que a metodologia numérica (malha e “Set Up” do FLUENT) foi validada, podemos utilizá-la para obtenção do coeficiente de sustentação devido ao efeito Magnus. Para expansão do modelamento da força de sustentação devido ao efeito magnus vamos considerar Re_p entre 10^{-5} e 15000 e γ entre 0.50 e 6.50.

Os resultados das simulações numéricas obtidos com o FLUENT e uma malha semelhante a utilizada na validação, sem haste, são encontrados na Figura 7.26.

Na Figura 7.27, temos a comparação entre os resultados numéricos e previstos pelas expressões 2.48 e 2.49 para γ igual a 5, podemos observar nesta figura que a expressão 2.48 representam bem os resultados numéricos para $0.01 < Re_p < 0.30$, comportamento semelhante foi observado em para todos os valores de γ estudados

Ainda na Figura 7.27 podemos observar que a expressão 2.49 tem uma grande discrepância em relação aos valores numéricos, em parte isto ocorre, pois Oesterlé e Bui Dinh (1998) consideram que a sustentação da haste

cilíndrica poderia ser representada por uma expressão obtida para um número de Reynolds fixo, quando se deveria utilizar uma expressão que leva em conta a variação do mesmo; outra fonte de erro é não ter considerado a interferência da haste no escoamento próximo à esfera. Esta última poderia ter sido considerada na forma de correção do coeficiente de sustentação.

As observações para expressão 2.48 e 2.49 valem para todo intervalo de γ estudado. Visto a incapacidade dos modelos apresentados em representar a efeito Magnus em todo intervalo de estudo, nos propomos a obter uma relação, baseada nos resultados numéricos, que expresse o coeficiente de sustentação em função de Re_P e γ . A expressão que melhor se adequou aos resultados é pelas expressões 7.4 e 7.5.

Figura 7.22 – Coeficiente de sustentação devido ao efeito Magnus – $0.90 < \gamma < 2.0$, numérico – resultados do FLUENT.

Figura 7.23 – Coeficiente de sustentação devido ao efeito Magnus – $2.0 < \gamma < 3.0$, numérico – resultados do FLUENT.

Figura 7.24 – Coeficiente de sustentação devido ao efeito Magnus – $3.0 < \gamma < 4.0$, numérico – resultados do FLUENT.

Figura 7.25 – Coeficiente de sustentação devido ao efeito Magnus – $\gamma > 4.0$, numérico – resultados do FLUENT.

$$Cl_{Magnus} = (2\gamma) \frac{A}{Re_p} \left(B + C Re_p^D + \frac{E Re_p^F}{G + H Re_p^I} \right) \quad 7.3$$

onde, $A = 2.7675$, $B = 2.2 \cdot 10^{-4}$, $C = 0.0080$, $D = 0.5944$, $E = 2.7102$, $F = 1.1044$, $G = 5.2635$, $H = 4.2094$ e $I = 0.5636$; a expressão 7.2 é validade no intervalo $Re_p \leq 0.45$ e $0.50 \leq \gamma \leq 6.50$.

$$Cl_{Magnus} = 0.32 + (2\gamma - 0.32) e^{(-0.284\gamma^{0.260} Re_p^{0.50} + 0.0168)} \quad 7.4$$

A expressão 7.4 é valida no intervalo $0.45 < Re_p \leq 15000$ e $0.50 \leq \gamma \leq 6.50$.

Nas Figuras 7.28 e 7.29 temos as comparações entre o resultado das equações 7.3 e 7.4, 2.48, 2.49 e resultados numéricos (FLUENT). Podemos

observar que os resultados das equações 7.3 e 7.4 representam melhor os valores numéricos. Entretanto existe uma região, Re_P entre 100 e 1000, onde as comparações mostram uma certa discrepância. Estas observações valem para todo intervalo de velocidade angular adimensional (γ), indicando a possibilidade de melhora na regressão apresentada. De qualquer forma para o objetivo deste trabalho podemos considerar a regressão representada pelas equações 7.3 e 7.4 como sendo o suficiente.

7.4 – Considerações finais

As expressões para a determinação do efeito Saffman (Tabela 7.2 a e b) foram avaliadas para uma partícula que se encontra dentro de uma camada limite dada por: um perfil cúbico e um perfil linear. Por intermédio destas avaliações, observamos que o modelo de Mei (1992) – equação 2.37 a e b é o que melhor atende as nossas necessidades, uma vez que os resultados deste modelo são comparáveis com os resultados obtidos com a expressão proposta por Saffman (1965,1968) e principalmente devido ao intervalo de validade deste modelo, até $Re_{Relativo}$ menor que 100.

Neste capítulo foram obtidas malhas tridimensionais capazes de determinar o arrasto estacionário (com erro relativo 10%, quando comparado com dados experimentais) gerado pelo escoamento ao redor de uma partícula esférica. As malhas aqui obtidas também foram capazes de capturar o efeito Magnus.

Foi obtido de estudos numéricos com o software FLUENT, uma expressão capaz de determinar a força de sustentação devido ao efeito Magnus. Esta expressão tem um intervalo de validade maior que os modelos encontrados na literatura.

Figura 7.26 – Coeficiente de sustentação devido ao efeito Magnus obtido com o FLUENT.

CAPÍTULO 7 – ANÁLISE DA FORÇA DE SUSTENTAÇÃO

Figura 7.27 – Comparação do Cl_{Magnus} entre os resultados numérico (FLUENT), teóricos (equação 2.48) e modelamento empírico – $\gamma = 5.0$.

Figura 7.28 – Comparação do Cl_{Magnus} entre os resultados numérico (FLUENT), teóricos (equação 2.48), modelamento empírico e expressão aqui proposta – $\gamma = 0.50$.

Figura 7.29 – Comparação do $C_{l_{Magnus}}$ entre os resultados numérico (FLUENT), teóricos (equação 2.48), modelamento empírico e expressão aqui proposta – $\gamma = 3.50$.

8 – SIMULAÇÕES DO MOVIMENTO DE PARTÍCULAS

Neste capítulo serão apresentados os resultados finais deste trabalho.
Casos teste:

1 - Movimento de uma partícula em escoamento uniforme em torno de um cilindro,

2 - Movimento de uma partícula em queda livre em um escoamento estagnado.

3 – Movimento de uma partícula em um escoamento definido por um perfil cúbico (simulando uma camada limite).

A velocidade inicial da partícula será considerada nula em todos os casos.

O caso teste um nos servirá para mostrar a relevância das forças na determinação da trajetória da partícula.

Para o caso teste dois faremos uma análise do acoplamento fluido-partícula em duas mãos, o fluido interage com a partícula e vice versa. Este caso teste possibilitará a avaliação da capacidade do acoplamento de representar a presença da partícula e também realizaremos uma avaliação do efeito da malha na solução do escoamento gerado pela partícula.

No caso teste três, teremos a avaliação do efeito do acoplamento fluido-partícula em duas mãos na determinação da trajetória do escoamento.

Para todos os casos vamos utilizar um passo no tempo igual a 0.0001 segundo para a integração temporal. Este passo temporal será utilizado tanto para as equações de conservação do fluido, como para as equações do movimento da partícula.

8.1 – Escoamento uniforme em torno de um cilindro – Caso teste um.

Iremos avaliar a trajetória de uma partícula em um campo de velocidades dado pelo escoamento uniforme em torno de cilindro. A solução potencial deste escoamento é conhecida.

O campo de velocidades é obtido por meio da função linha de corrente, sendo dada por:

$$\Psi = U_{\infty} \left(y - \frac{D_c^2 y}{(x^2 + y^2)} \right) \quad 8.1$$

onde U_{∞} é a velocidade do escoamento não perturbada e D_c é o diâmetro do cilindro.

A velocidade nas direções x e y são dadas por:

$$u = U_{\infty} \left(1 + \frac{D_c^2 (y^2 - x^2)}{4(x^2 + y^2)^2} \right) \quad 8.2$$

$$v = -U_{\infty} \left(\frac{D_c^2 (yx)}{2(x^2 + y^2)^2} \right) \quad 8.3$$

Utilizando as expressões, escolhidas nos Capítulos 6 e 7, para determinação das forças, podemos determinar a trajetória da partícula. Este caso será tratado sem acoplamento fluido-partícula e visto que o escoamento é irrotacional o efeito Magnus não será considerado.

Tomaremos as propriedades do fluido e velocidade não perturbadas são:

$$\rho_f = 1.000 \frac{kg}{m^3}$$

$$\mu_f = 0.904E-3 Pas$$

$$U_{\infty} = 0.10 \frac{m}{s}$$

$$Re = 5530$$

A posição inicial da partícula é:

$$x = -0.10 \text{ m e}$$

$$y = 0.20 \text{ m}$$

O centro do cilindro se encontra em $x = 0 \text{ m}$ e $y = 0$.

Para verificarmos o efeito do escoamento na movimentação da partícula, esta terá uma densidade igual à do fluido, o seu diâmetro será igual a 0.5 mm.

Na figura 8.1 são mostradas as trajetórias de partículas com modelos diferentes, a diferença entre os modelos se encontra no conjunto de forças utilizadas na equação de quantidade de movimento da partícula.

No caso 1 são incluídas todas as forças, sustentação, arrasto estacionário e não estacionário. No caso 2 a força devido ao efeito Saffman é extraída. No caso 3 extraímos as forças devido ao efeito Saffman e ao arrasto não estacionário, ficamos apenas com as forças devido arrasto estacionário.

Se considerarmos apenas as forças de arrasto estacionário (caso 3) atuando na partícula, teremos que a trajetória da partícula é igual a uma linha de corrente. Desta maneira tomaremos como base de comparação a trajetória obtida com as forças do caso 3.

Podemos observar na Figura 8.1 que: o arrasto não estacionário e a força de sustentação devido ao efeito Saffman causam um grande desvio na trajetória da partícula, o que indica que a estas forças tem um papel importante na determinação da trajetória de partículas.

Tomando como referência três pontos, sendo $x = -0.050 \text{ m}$, $x = 0.000 \text{ m}$ e $x = 0.050 \text{ m}$, para o primeiro ponto, segundo ponto e terceiro ponto, respectivamente. A comparação entre os resultados será feita por meio da coordenada y . Na Tabela 8.1 temos os resultados para cada ponto.

Na Tabela 8.1 temos os valores das coordenadas dos pontos escolhidos, observamos que de forma geral as forças de arrasto não estacionário e força de sustentação devido ao efeito Saffman, fazem com que a

partícula se afaste mais do cilindro que a linha de corrente (caso 3). Podemos observar que os maiores desvios se encontram a montante do cilindro.

Tabela 8.1 – Posição da partícula para os casos em estudo.

x (m)	Caso 1 y (m)	Caso 2 y (m)	Caso 3 y (m)
-0.050	0.03797	0.03798	0.03866
0.000	0.05980	0.05986	0.05901
0.050	0.04512	0.04725	0.04315

Figura 8.1 – Trajetória de uma partícula em escoamento ao redor de um cilindro.

8.2 – Partícula em queda livre emersa por fluido estagnado – Caso teste 2.

Com intuito de avaliar o acoplamento fluido-partícula em duas mãos vamos considerar os casos experimentais extraídos de Mordant e Pinton e Ataides (2003) – glicerina 100 %, experimentos 1 e 12, respectivamente. Estes casos já foram analisados no Capítulo 6. Na tabela 8.2, temos as condições dos experimentos. Os resultados que seguem serão avaliados depois 0.10 s do início do experimento numérico.

Antes de iniciar o experimento numérico propriamente dito, vamos analisar a forma como a força que atua na partícula é introduzida na equação da quantidade de movimento do fluido. Por meio de uma análise dimensional das equações 5.19 e 5.21, verificamos que as forças devem ser introduzidas em unidade de força por volume. Aqui surge a questão de qual dos volumes devemos utilizar, o volume da célula onde a partícula se encontra ou o volume da partícula. Para elucidar esta questão, vamos tomar o experimento 1 extraído de Mordant e Pinton (2000). O domínio computacional terá dimensões de $40 D_p$ x $40 D_p$. A malha será igualmente espaçada, tanto na direção x quanto na direção y, o espaçamento será igual à D_p .

Na Figura 8.2 temos as soluções numéricas do escoamento, causado pela sedimentação de uma partícula num fluido inicialmente estagnado, a diferença entre as soluções, reside no termo fonte introduzido nas equações 5.19 e 5.21, na figura a temos as que o termo fonte é igual às forças que atuam na partícula dividida pelo volume da célula onde a mesma se encontra e na figura b temos as forças divididas pelo volume da própria partícula.

Figura 8.2 – Efeito da forma como é calculado termo fonte introduzido na equação de quantidade de movimento do fluido.

As escalas da Figura 8.2 são dadas em porcentagem da velocidade instantânea da partícula. Podemos observar na Figura 8.2 que a forma do termo fonte influencia no resultado final, quando utilizamos o volume da célula o acoplamento se mostra ineficiente. Por outro lado, quando utilizamos o volume da partícula observamos que as velocidades são condizentes com a da partícula. Desta maneira para os resultados que seguem, utilizaremos o volume da partícula para determinação do termo fonte.

Tabela 8.2 – Condições para os experimentos numéricos.

Experimento	D_p (mm)	ρ_p (kg/m ³)	ρ_f (kg/m ³)
Mordant e Pinton (2000) – Caso 1	30.05	2076	1260
Ataides (2003) – Caso 12	0.50	2560	1000

Para avaliação do acoplamento vamos considerar quatro malhas com refinamentos diferentes, na Figura 8.3 são apresentadas as malhas utilizadas. A dimensão para todas elas é igual a $40 D_p \times 40 D_p$ e espaçamento constante nas direções x e y. Na Tabela 8.3 temos os espaçamentos utilizados para cada direção.

Tabela 8.3 – Espaçamento das malhas nas direções x e y.

	Espaçamento na direção x	Espaçamento na direção y
Malha 1	D_p	D_p
Malha 2	$D_p/2$	D_p
Malha 3	$2D_p$	D_p
Malha 4	$4D_p$	D_p

Malha 1

Malha 2

Malha 3

Malha 4

Figura 8.3 – Malhas utilizadas para análise do caso teste 2.

Na Figura 8.4 temos a solução do escoamento para quatro malhas para o experimento extraído de Mordant e Pinton (2000), sendo que todas elas foram obtidas no mesmo instante de tempo ($t=0.10s$). Podemos observar que a solução do escoamento apresenta uma grande dependência com relação ao

refinamento da malha. A região de influência da partícula aumenta conforme aumentamos o espaçamento da malha, uma vez que o volume da célula se torna cada vez maior que o volume da partícula. De qualquer forma, podemos observar que o acoplamento é capaz de impor a uma região do domínio de cálculo, uma velocidade semelhante a da partícula.

O mesmo comportamento foi observado para o experimento extraído de Ataides (2003).

8.3 – Movimentação da partícula no interior de uma camada limite – Caso teste 3.

Na figura 8.5 temos uma representação do domínio de calculo utilizado neste caso. O perfil na entrada do domínio simula uma camada limite com espessura 0.10 m é dado pela equação 7.2. Inicialmente a partícula tem velocidade nula e sua posição inicial igual a $x_p = 0.05$ m e $y_p = 0.05$ m, ou seja, a partícula se encontra no meio da camada limite. A densidade do fluido e da partícula são as mesmas utilizadas no Caso teste 1.

Neste experimento numérico iremos fazer duas avaliações. Na primeira tomares o movimento da partícula sem o acoplamento fluido partícula. Já na segunda o acoplamento fluido partícula será levado em consideração. Estas avaliações serão realizadas em $t = 1.00$ s.

Na Figura 8.6 temos a malha utilizada na solução do escoamento com acoplamento em duas mãos. Esta malha foi construída levando em conta a existência da camada limite (perfil cúbico) próximo à fronteira inferior do domínio, esta região tem um refinamento diferenciado do resto da malha.

Na Figura 8.7 podemos observar o efeito da partícula no escoamento, solução com acoplamento.

Na Figura 8.8 temos a comparação entre as trajetórias com e sem acoplamento fluido partícula. Nesta figura podemos observar que a partícula tende a se afastar da fronteira sólida (fronteira inferior do domínio de cálculo) tanto para a solução acoplada (fluido partícula), como para solução sem

acoplamento. Este fenômeno ocorre devido às forças de arrasto não estacionárias e forças de sustentação (efeitos Saffman e Magnus).

Figura 8.4 – Efeito do movimento de uma partícula em fluido estagnado – Mordant e Pinton (2000).

Na Figura 8.9 podemos observar o efeito do acoplamento fluido partícula na velocidade da partícula na direção x. O acoplamento faz com que a velocidade (direção x) seja menor do que a obtida com a solução sem acoplamento.

O acoplamento atenua o efeito das forças devido ao efeito Saffman e efeito Magnus (sustentação), esta observação pode ser vista na Figura 8.10, onde temos a variação temporal da velocidade da partícula na direção y. Esta figura mostra que a velocidade na direção y é menor para solução com acoplamento.

Figura 8.5 – Representação e condições de contorno do domínio de cálculo.

Figura 8.6 – Malha utilizada para o caso teste 3.

Solução com acoplamento fluido partícula em duas mãos.

Solução sem acoplamento partícula fluido.

Figura 8.7 – Solução numérica caso teste 3 com e sem acoplamento – Velocidade em m/s.

CAPÍTULO 8- SIMULAÇÕES DO MOVIMENTO DE PARTÍCULAS

Figura 8.8 Trajetória da partícula – Caso teste 3

Figura 8.9 – Variação temporal da velocidade da partícula na direção x.

Figura 8.10 – Variação temporal da velocidade da partícula na direção y

8.4 – Considerações finais

Neste capítulo foram avaliados os efeitos das forças de sustentação (efeito Magnus e efeito Saffman), força de arrasto estacionária, força de arrasto não estacionária e do acoplamento na trajetória da partícula.

9 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Foram levantados na literatura modelos para representar as forças de arrasto estacionário, forças de arrasto não estacionário e forças de sustentação (efeito Magnus e efeito Saffman).

Da análise das forças de arrasto estacionário não estacionário, Capítulo 6, podemos concluir que: para o arrasto transiente o modelo proposto neste trabalho (equação 6.1) apresenta resultados bons, quando comparado com dados experimentais para Re_p até $2.5E+5$. Já os modelos de arrasto não estacionário sempre subestimam o valor desta força.

Os resultados obtidos para partículas sedimentando em escoamentos estagnados mostram que as maiores discrepâncias, entre valores numéricos e empíricos se encontram na região acelerada do movimento da partícula. Os modelos entrados na literatura não são capazes de prever estas forças de forma satisfatória.

Foi obtido um modelo para as forças de sustentação devido à rotação da partícula, os modelos existentes tinham sua validade restrita a Re_p menor que 100, o modelo aqui proposto contempla Re_p até 15000.

O programa FLUENT, com a metodologia numérica citada no Capítulo 7, foi capaz de prever a força de sustentação devido ao efeito Magnus, sendo os resultados comparáveis com os obtidos experimentalmente.

Ao final dos Capítulos 6 e 7 uma metodologia de cálculo do movimento de partículas em escoamentos foi obtida, esta foi aplicada aos casos testes propostos no Capítulo 8.

Considerando o modelo numérico utilizado, podemos afirmar que as forças devido ao efeito Saffman e Magnus (forças de sustentação) interferem na trajetória da partícula, fazendo com que com a mesma se afaste de paredes sólidas.

O arrasto transiente tem um efeito semelhante ao gerado pelas forças de sustentação, ou seja, faz com que a partícula se afaste de paredes sólidas.

A influência do movimento da partícula no escoamento é bem representada pelo acoplamento fluido-partícula. Quando observamos os resultados do Capítulo 8, podemos verificar o efeito da partícula no escoamento.

Ficam aqui quatro sugestões para trabalhos futuros, sendo a primeira a tentativa de analisar o arrasto transiente, que atua em partícula acelerada, com programas comerciais de mecânica dos fluidos mecânica dos fluidos computacional.

A segunda consiste da análise do efeito Saffman com programas comerciais.

A terceira sugestão seria a avaliação da influencia da turbulência na trajetória da partícula.

Com quarta sugestão podemos propor o estudo do acoplamento entre as forças de sustentação (Saffman e Magnus) e arrasto (estacionário e não estacionário) visto que ao longo deste trabalho estas forças foram analisadas separadamente.

A quinta sugestão é introduzir coerções nos modelos de previsão do arrasto estacionário e não estacionário. Estas correções seriam introduzidas para levar em conta efeitos de rotação (da partícula e ou do fluido) e de gradientes no campo de velocidades.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ATAIDES, C. H., *Comunicação pessoal – Dados experimentais enviados por e-mail*, 2003.

BRITO, A. B. N., *Movimento transiente de esferas em líquidos newtonianos e não-newtonianos*, Dissertação de mestrado – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2002.

CLIFT, R.; GRACE, J. R.; WEBER, M. E., *Bubbles, Drops and Particles*, New York, Academic Press, 1978.

COIMBRA C. F. M., RANGEL R.H., *Unsteady heat transfer in the harmonic heating of a dilute suspension of small particles*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 43 (18),pp. 3305-3316, 2000

CROWE, C. T., *Personal communication*, 1997 apud **ROSENDAHL, L.**, *Extending the modelling framework for gas-particle system*, -, -, 1998.

CROWE, C.; SOMMERFELD, M.; TSUJI, Y., *Multiphase flows with droplet and particle*, CRC Press, 1998.

CROWE, T. C., *REVIEW – Numerical models for dilute gas-particle flow*, J. of Fluids Engineering, Vol. 104, pp. 297-303, 1982.

DANDY, D. S.; DWYER, H. A., *A Sphere in shear flow at finite Reynolds number effect of shear on particle lift, drag and heat transfer*, J. Fluid Mech., Vol. 216, pp. 381-410, 1990.

- DANNIS, C. R.; SINGH, S. N.; INGHAM, D. B.,** *The steady flow due to a rotating sphere at low and moderate Reynolds numbers*, J. Fluid Mech., Vol. 101, part 2, p. 257-279, 1980.
- DETTMAN, J. W.,** *Mathematical methods in physics and engineering*, Dover Publications, pp. 410-411, 1988.
- FAXÉN, H.,** *Die Bewegung einer starren Kugel langs der Achse eines mit zäher flüssigkeit gefüllten Rohres*, 1923. In : **CLIFT, R.; GRACE, J. R.; WEBER, M. E.,** *Bubbles, Drops and Particles*, New York, Academic Press, p. 225, 1978.
- FORTUNA, A.O.,** *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos*, São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 2000.
- HAIDER, A.; LEVENSPIEL, O.,** *Drag coefficient and terminal velocity of spherical and non spherical particles*, Powder Technology, Vol. 58, pp. 63-70, 1989.
- KARANFILIAN, S. K.; KOTAS, T. J.,** *Drag on sphere in unsteady motion in a liquid at rest*, J. Fluid Mech., Vol. 87, part, p. 85-96, 1978.
- KIM, I.; ELGHOBASHI, S.; SIRIGNANO, W. A.,** *On the equation for sphere-particle motion: effect of Reynolds and acceleration numbers*, Journal of Fluid Mech., Vol. 367, pp. 221-253, 1998.
- KLADAS, D. D.; GEORGIU, D. P.,** *A relative examination of $C_D - Re$ relationships used in particle trajectory calculations*, Journal of Fluids Engineering, Vol. 115, pp. 162-165, 1993.
- MALISKA, C. R.,** *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional – Fundamentos e Coordenadas Generalizadas*, Rio de Janeiro, LTC, 1995.

MAXEY, M. R.; RILEY, J. J., *Equation of motion for small rigid sphere in a nonuniform flow*, Phys. of Fluids, Vol. 26 (4), pp. 883-889, 1983.

McLaughlin, J. B., *Aerosol particle deposition in numerical simulated channel flow*, Phys. Fluids A, Vol. 1 (7), 1989.

McLaughlin, J. B., *Inertial Migration of a small sphere in linear shear flows*, Journal of Fluid Mech., Vol. 224, pp. 261-274, 1991.

McLaughlin, J. B., *The lift on a small sphere in wall-bounded linear shear flows*, Journal of Fluid Mech., Vol. 246, pp. 249-265, 1993.

MEI, R., *An approximate expression for the shear lift force on a spherical particle at finite Reynolds number*, Int. J. of Multiphase Flow, Vol. 18, pp. 145-147, 1992.

MEI, R., *Flow due to an oscillating sphere and an expression for unsteady drag on the sphere at finite Reynolds number*, J. Fluid Mech., Vol. 270, p. 133-174, 1994.

MEI, R.; ADRIAN, R. J., *Flow past a sphere with an oscillation in the free-stream velocity and unsteady drag at finite Reynolds number*, J. Fluid Mech., Vol. 237, p. 323-341, 1992.

MEI, R.; LAWRENCE, C. J. ADRIAN, R. J., *Unsteady drag on a sphere at finite Reynolds number with small fluctuations in the free-stream velocity*, J. Fluid Mech., Vol. 233, p. 613-631, 1991.

MICHAELIDES, E. E., *Review – The Transient equation of the motion for particle, bubbles, and droplets*, Journal of Fluids Engineering, Vol. 119, pp. 233-247, 1997.

MICHAELIDES, E. E.; FENG, Z. G., *Analogies between the transient momentum and energy equations of particle*, Prog. Energy Combust. Sci., Vol. 22, pp. 147-162, 1996.

MORDANT, N.; PINTON, J. F., *Velocity measurement of settling sphere*, The European Physical Journal B, Vol. 18, pp. 343-352, 2000.

ODAR, F., HAMILTON, W. S., *Forces on a sphere accelerating in a viscous fluid*, J. Fluid Mech., Vol. 18, p. 302-314, 1964.

ODAR, F., *Verification of the proposed equation for calculation of the force on a sphere accelerating in a viscous fluid*, J. Fluid Mech., Vol. 25, part 3, p. 591-592, 1966.

ODAR, F.; HAMILTON, S., *Forces on a sphere accelerating in a viscous flow*, Journal of Fluid Mech., Vol. 18, pp. 302-314, 1964.

REEKS, M. W.; MCKEE, S., *The dispersive effect of Basset history term on particle motion in a turbulent flow*, Phys. Fluids, Vol. 27 (7), pp. 1573-1582, 1984.

ROSENDAHL, L., *Extending the modelling framework for gas-particle system*, -, -, 1998.

SCHLICHTING, H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill Book Company, 1965

STOKES, D. E., *Particle Dispersion in flowing gases –1994 Freeman Scholar Lecture*, Journal of Fluids Engineering, Vol. 118, pp. 4-17, 1996.

TSUJI, Y.; KATO, N.; TANAKA, T., *Experiments on the unsteady drag and wake of a sphere at high Reynolds numbers*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 17, No. 3, p. 343-354, 1991.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

TURTON, R.; CLARK, R. P., *An empirical relationship to predict spherical particle terminal velocity*, Powder Technology, Vol. 53, pp. 127,129, 1987.

VASSEUR, P.; COX, R. G., *The lateral migration of spherical particle sedimenting in stagnant bounded fluid*, J. Fluid Mech.,Vol. 80, part 3, p. 561-591, 1977.

WHITE, F.M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill Book Company, 1991

ZIRGRANG, D. J.; SYLVSTER, N. D., *An explicit equation for particle settling velocity in solid-liquid system*, AIChE Journal, Vol. 27,pp. 1043-1044, 1981.

ANEXO A

Obtenção da solução de Stokes e Ossen

.Anexo A.1 - Solução de Stokes

Este anexo se destina obtenção da solução da equação 4.2.8, que é atribuída a Stokes (1851); a citada equação é reescrita abaixo por conveniência.

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \rho g_i \quad \text{A.1}$$

O segundo termo do lado direito da equação A.1 representa a força de campo, sendo que este pode ser entendido como sendo o gradiente da pressão hidrostática (P_h). O símbolo P é a pressão de movimento, responsável pelo escoamento. Neste ponto se torna mais conveniente trabalhar com uma pressão modificada ($P_m = P + P_h$).

Se tomarmos como referência um sistema de coordenadas solidário a partícula, e substituirmos a velocidade do fluido em A.1 pela velocidade relativa entre fluido e partícula ($V_r = U - V_p$). Obteremos:

$$\frac{\partial P_m}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial^2 (V_r)_i}{\partial x_j^2} + \rho_f g_i \quad \text{A.2}$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$(x^2 + y^2 + z^2) \rightarrow r_p^2 \dots V_r = 0$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) \rightarrow \infty \dots V_r = (U - V_p)$$

Utilizando coordenadas esféricas teremos as componentes da velocidade, em suas respectivas direções, dadas por :

$$\begin{aligned}
v_r &= v_r(\rho, \theta) = V_r \cos \theta \\
v_\theta &= v_\theta(\rho, \theta) = -V_r \sin \theta \\
v_\varphi &= 0
\end{aligned}$$

A.2.a

Tomando a equação da conservação da massa em coordenadas esféricas e as velocidades como definido acima, temos que :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta r \sin \theta) = 0$$

A.2.b

Ou ainda

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r \sin \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} (-v_\theta r \sin \theta)$$

A.3

Definindo a função corrente (ψ) de tal forma que :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta}$$

A.4

Comparando A.3 e A.4 obtemos que as velocidades em suas respectivas direções, podem ser definidas como :

$$\begin{aligned}
v_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\
v_\theta &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}
\end{aligned}$$

A.5

Calculando o divergente da equação A.2, e lembrando que o $\nabla \cdot \nabla P_m = 0$. Teremos a equação da quantidade de movimento em relação à função corrente. Em coordenadas esféricas, ficamos com:

$$(\nabla^2)^2 \psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right)^2 \psi = 0 \quad \text{A.6}$$

Onde as condições de contorno para esta equação deverão sair das condições de contorno enunciadas para a equação A.2, desta forma teremos, para r tendendo a r_p as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \quad \text{A.7}$$

Já para r tendendo ao infinito teremos :

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \rightarrow V_r \cos \theta \\ v_\theta &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \rightarrow -V_r \sin \theta \end{aligned} \quad \text{A8}$$

Quando integramos a equação de v_r , obtemos:

$$\int_0^\psi \partial \psi = \int_0^\theta r^2 V_r \cos \theta \sin \theta d\theta \quad \text{A.9}$$

ou ainda

$$\psi \rightarrow \frac{1}{2} V_r r^2 \sin^2 \theta \quad \text{A.10}$$

Sendo A.10 a condição de contorno para r tendendo a infinito. O que nos sugere que a função corrente pode ser escrita como uma função arbitrária ($R(r)$) de r multiplicada pelo seno de θ , sendo assim :

$$\psi = R(r) \sin \theta \quad \text{A.11}$$

Para que a equação A.11 satisfaça a equação A.6 .e suas condições de contorno, dadas por A.7 e A.8, teremos que solucionar a equação resultante da substituição de A.11 em A.6, o que nos leva a obter uma equação na forma:

$$\frac{\partial^4 R}{\partial r^4} - \frac{4}{r^2} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{8}{r^3} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{8R}{r^4} = 0 \quad \text{A.12}$$

Com as seguintes condições de contorno,

$$\begin{aligned} R &= 0 \dots r \rightarrow 0 \\ \frac{\partial R}{\partial r} &= 0 \dots r \rightarrow 0 \\ R &\rightarrow \frac{1}{2} r^2 V_r \dots r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad \text{A.13}$$

A solução da equação linear homogênea de quarta ordem A.12 é dada de forma genérica por :

$$R(r) = \frac{a}{r} + br + cr^2 + dr^4 \quad \text{A.14}$$

Onde os coeficientes da equação acima são obtidos através das condições de contorno, o que nos leva a :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4} V_p r_p^3 \\ b &= -\frac{3}{4} V_p r_p \\ c &= \frac{1}{2} V_p \\ d &= 0 \end{aligned}$$

Sendo assim a função corrente é dada por:

$$\psi = \left(\frac{1}{4} V_p \frac{r_p^3}{r} - \frac{3}{4} V_p r_p r + \frac{1}{2} V_p r^2 \right) \sin^2 \theta \quad \text{A.15}$$

Substituindo A.15 em A.5 obtemos as expressões para as velocidades em coordenadas esféricas , desta forma teremos :

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_p \left(1 - \frac{3}{2} \frac{r_p}{r} + \left(\frac{r_p}{r} \right)^3 \right) \cos \theta \\ v_\theta &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -V_p \left(1 - \frac{3}{4} \frac{r_p}{r} - \frac{1}{4} \left(\frac{r_p}{r} \right)^3 \right) \cos \theta \end{aligned} \quad \text{A.16}$$

A pressão modificada, como foi dito anteriormente, pode ser escrita em termos da pressão hidrostática ($P_h = \rho_f x_i g_i$) e efetiva , no entanto, para o caso em estudo, a força de campo que atua no escoamento é a da gravidade, desta forma a pressão hidrostática pode ser escrita em função da aceleração da gravidade ($P_h = \rho_f g$ e $g = r_p \sin(\varphi) \sin(\theta)$).

Para as direções r e θ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_m}{\partial r} &= 3\mu V_p r_p \frac{\cos \theta}{r^3} \\ \frac{\partial P_m}{\partial \theta} &= \frac{3}{2} \mu V_p r_p \frac{\sin \theta}{r^2} \end{aligned} \quad \text{A.17}$$

O que nos permite obter a expressão para pressão, que fica na forma:

$$P = P_\infty - \rho_f g r \sin \theta \sin \varphi - \frac{3}{2} \mu V_p r_p \frac{\cos \theta}{r^2} \quad \text{A.18}$$

As tensões de cisalhamento são dadas por :

$$\begin{aligned}\tau_{rr} &= 2\mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = 2V_p \left(\frac{3}{2} \frac{r_p}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{r_p^3}{r^4} \right) \cos \theta \\ \tau_{\theta\theta} &= 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) = -2V_p \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{4} \frac{r_p}{r^2} - \frac{1}{4} \frac{r_p^3}{r^4} \right) \cos \theta \\ \tau_{\theta r} &= \tau_{r\theta} = \mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) = -\mu V_p \left(\frac{3}{2} \frac{r_p}{r^4} \right) \sin \theta\end{aligned}\tag{A.19}$$

Os termos do tensor das tensões de cisalhamento não expressos acima são nulos. Para termos a distribuição da pressão e da tensão de cisalhamento na superfície da partícula basta fazer $r=r_p$, é fácil verificar que todos os termos da tensão de cisalhamento de anula a menos do $\tau_{r\theta}$ e que a pressão na superfície será uma função do co-seno e do seno do ângulo θ . Se desconsiderarmos a pressão hidrostática é fácil perceber que a pressão terá um máximo no ponto A e um mínimo no ponto B, representados na figura 4.3.

Figura A.1 - Sistema de coordenadas para solução de Stokes

A força em relação ao eixo x é obtida através da integral de superfície das tensões de cisalhamento e da pressão, levando em conta a projeção dos mesmos em relação ao referido eixo, para o eixo y podemos fazer a mesma coisa, desta forma a força que atua na partícula na direção de x é dada por :

$$F_x = r_p \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(-P \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta \right)_{r=r_p} \sin \theta d\theta d\varphi\tag{A.20}$$

Perceber que a equação acima nos mostra que a força de arrasto tem uma parcela que é função da pressão na superfície e outra função das forças de cisalhamento.

Lembrando que :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin^3 \theta &= \frac{4}{3} \\ \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta &= \frac{2}{3} \\ \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos \theta &= 0\end{aligned}\tag{A.21}$$

Se dividirmos a força de arrasto, em força devido a distribuição de pressão e devido a distribuição da tensão de cisalhamento na superfície da partícula, conforme dissemos acima, teremos:

$$\begin{aligned}F_{\text{Pressão}} &= 2\pi\mu V_r r_p = \pi\mu V_r d_p \\ F_{\text{Cis.}} &= 4\pi\mu V_r r_p = 2\mu\pi V_r r_p \\ F_{\text{A.Stokes}} &= F_{\text{pressao}} + F_{\text{Cis.}} = 6\pi\mu V_r r_p = 3\pi\mu V_r d_p\end{aligned}\tag{A.22}$$

Onde d_p representa o diâmetro da partícula. Esta expressão nos mostra uma forma de calcular o arrasto total ou de Stokes que age em uma partícula em movimento em fluido com velocidade uniforme U . É fácil perceber que temos a possibilidade de obter através desta expressão o coeficiente de arrasto em função de Re_p ¹, nos mostrando que arrasto de Stokes tem relação com o Re_p , fato este que também é facilmente observado na própria expressão já que a mesma é função da velocidade, bastando apenas rearranjar a solução para obter tal expressão. Desta forma esta solução está limitada a Re_p pequenos, já que esta é a hipótese fundamental para obtenção desta solução. Na medida

que a velocidade do fluido ou mesmo a velocidade da partícula aumentar, a força de arrasto tende a aumentar também, fato este que se deve a influência dos termos de inércia desprezados por Stokes.

A força na direção y é obtida da mesma forma, alterando apenas as projeções, desta forma teremos:

$$F_y = r_p^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (-P \sin \theta \sin \varphi - \tau_{r\theta} \cos \theta \sin \varphi)_{r=r_p} \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} r_p^3 \pi \rho g \quad A.23$$

O resultado da integral acima deve ser o empuxo hidrostático, que igual ao volume deslocado de fluido, ou seja, volume da esfera vezes a massa específica do fluido, deste modo o resultado obtido para integral é justamente o esperado.

Por fim chegamos a equação do movimento da partícula, dada por :

$$m_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \vec{F} = F_{Arrasto} \hat{i} + (F_E - F_p) \hat{j} = 3\mu\pi d_p \vec{V}_r + \frac{1}{6} d_p^3 \pi (\rho_f - \rho_p) \hat{j} \quad A.24$$

¹ Para obter tal expressão basta dividir a Força obtida por Stokes pelo força de arrasto de Newton.

ANEXO A.2 - Solução de Ossen

OSSEN (1913) supondo que a velocidade do fluido pode se dividir em velocidade uniforme (U) e uma perturbação (u', v' e w') gerando assim dois grupos de termos convectivos, dados por:

$$U \frac{\partial u'}{\partial x}, U \frac{\partial v'}{\partial x}, U \frac{\partial w'}{\partial x} \\ u' \frac{\partial u'}{\partial x}, v' \frac{\partial u'}{\partial y}, w' \frac{\partial u'}{\partial z}, \dots \quad \text{A.25}$$

Os termos dados em A.25 são obtidos se considerarmos que a velocidade U é paralela ao eixo x. Ossen considerou que os termos do segundo grupo (formados pelas perturbações) são desprezíveis frente aos do primeiro grupo.

Assumindo um sistema de coordenadas solidário à partícula, fluido com dimensões infinitas e regime permanente teremos as equações de Ossen dadas, na notação indicial², por :

$$\rho V_r \frac{\partial u'_i}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \quad \text{A.26}$$

Onde V_r é velocidade relativa ($U - V_p$).

A equação da conservação da massa é dada por :

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad \text{A.27}$$

Com u', v' e $w' = 0$ na superfície da partícula e $u' = V_r$ a uma distância infinita da partícula. Cabe aqui ressaltar que a equação A.26 só é válida se a velocidade da partícula tiver derivada espacial nula.

² $u'_i = u', v'$ e w' para $i=1, 2$ e 3 respectivamente

A equação A.26, assim como a de Stokes é linear em relação a u'_i . Sendo a solução¹ particular a referida equação diferencial obtida a partir da introdução da função potencial de velocidades, assim sendo ficamos com:

$$\begin{aligned}u' &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\v' &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\w' &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} \\P &= \rho V_r \frac{\partial \phi}{\partial x}\end{aligned}$$

Para não infringir a equação da conservação da massa teremos que o laplaciano de ϕ deve ser nulo. O que implica em considerar o escoamento como sendo irrotacional, o que de fato não é verificado. Esta solução se completada se assumirmos que o vetor velocidade possa ser dividido em uma parte irrotacional (gerador da função potencial) e outra que tenha seu rotacional diferente de zero (u'' , v'' e w''), assim sendo, ficamos com :

$$\begin{aligned}u' &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} + u'' \\v' &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} + v'' \\w' &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} + w''\end{aligned} \tag{A.28}$$

Da equação 4.2.2.2 obtemos que:

¹ A solução aqui apresentada é baseada em Lamb (1945).

$$\begin{aligned}
\left(\nabla^2 - 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) u'' &= 0 \\
\left(\nabla^2 - 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) v'' &= 0 \\
\left(\nabla^2 - 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) w'' &= 0
\end{aligned}
\tag{A.29}$$

E da equação da conservação da massa temos :

$$\frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} + \frac{\partial w''}{\partial z} = 0 \tag{A.30}$$

Onde $k = V_r \rho / 2\mu$

Considerando que $\frac{\partial v''}{\partial z} = \frac{\partial w''}{\partial y}$, o que implica em dizer que o gradiente de

v'' é igual gradiente de w'' em relação aos eixos z e y respectivamente, ou seja w'' tem a mesma distribuição em relação y que v'' tem em relação a z . Desta forma o vetor vorticidade (ou turbilhão) tem componentes na direção dos eixos y (η) e z (ζ). A partir desta consideração podemos dizer que as linhas de vórtices são circunferências em torno do eixo x . Sendo assim teremos ξ (componente do vetor vorticidade na direção do eixo x) igual a zero.

Se considerarmos a equação de Navier -Stokes escrita em função do vetor vorticidade podemos chegar a:

$$\eta \frac{\partial \chi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0 \tag{A.32}$$

O que implica em $\eta = -\frac{\partial \chi}{\partial z}$ e $\zeta = \frac{\partial \chi}{\partial y}$, onde a função χ pode ser definida como sendo (seguindo 4.2.2.5) :

$$\left(\nabla^2 - 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) \chi = 0 \quad \text{A.33}$$

Cabe aqui dizer que o rotacional do vetor vorticidade é igual ao laplaciano do vetor velocidade. Considerando 4.2.2.9 e as expressões para η e ζ , teremos que 4.2.2.6 toma a forma:

$$\begin{aligned} 2k \frac{\partial u''}{\partial x} &= \nabla^2 u'' = \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} = - \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - 2k \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ 2k \frac{\partial v''}{\partial x} &= \nabla^2 v'' = \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \\ 2k \frac{\partial w''}{\partial x} &= \nabla^2 w'' = \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} \end{aligned}$$

Para obter as velocidades u'' , v'' e w'' basta integrar as equações acima em relação a x . Nestas equações é possível verificar as facilidades, quando falamos na solução equações 4.2.2.6, obtidas ao assumir que a função χ deveria satisfazer uma equação diferencial do tipo obtido para a velocidade (equação 4.2.2.6).

O que nos leva a obter a solução para u' , v' e w' dados na forma :

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \chi \\ v' &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial y} \\ w' &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial z} \end{aligned} \quad \text{A.34}$$

Para obter a solução para as velocidades precisamos obter as funções χ e ϕ . A solução para χ deve vir de 4.2.2.9 que pode ser rearranjada para ficar na forma da equação de Helmholtz, sendo assim temos que :

$$\left(\nabla^2 - k^2 \right) e^{-kx} \chi = 0 \quad \text{A.35}$$

Fazendo $A = e^{-kx} \chi$ e admitindo que seja apenas função de r ($x^2 + y^2 + z^2$), ou seja, admitindo que esta função seja simétrica em relação a x . Tomando o laplaciano em coordenadas esféricas e assumindo o exposto acima, teremos:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} rA - k^2 rA = 0$$

A solução da equação diferencial acima é:

$$rA = Be^{-kr} + Ce^{kr}, \text{ ou ainda}$$

$$A = \frac{Be^{-kr}}{r} + \frac{Ce^{kr}}{r} \quad \text{A.36}$$

Onde $C=0$, pois queremos que a solução seja nula quando r tende a infinito, o que nos leva a:

$$\chi = \frac{Be^{-k(r-x)}}{r} \quad \text{A.37}$$

A solução 4.2.2.12 é um múltiplo de $\frac{e^{-kr}}{r}$, se tomarmos este termo como sendo $\lambda(r)$ e se considerarmos o caso de simetria axial em torno de x , podemos escrever a 4.2.2.10 na forma:

$$\chi = e^{kx} (b_0 \lambda + b_1 \frac{\partial \lambda}{\partial x} + b_2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + b_3 \frac{\partial^3 \lambda}{\partial x^3} + \dots) \quad \text{A.38}$$

Onde $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$ são constantes arbitrárias.

Já para o potencial de velocidades ϕ , admitindo que esta função, assim como χ tem simetria axial com relação ao eixo x , teremos ϕ tal que:

$$-\vec{\nabla} \phi = \vec{V}_r + \text{termos que se anulam quando } r \rightarrow \infty \quad \text{A.39}$$

Ou ainda,

$$\phi = - \vec{V}_r \cdot \vec{x} + \text{termos que se anulam quando } r \rightarrow \infty \quad \text{A.40}$$

Nós podemos escrever os termos citados na expressão acima como sendo igual a $c_0 \left(\frac{1}{r} \right) + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + c_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) + c_3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots$, onde os c_i 's são constantes arbitrárias.

O caso em que a partícula se movimenta em um fluido parado, é dinamicamente semelhante ao caso em que o fluido se movimenta em torno de uma partícula parada, se tomarmos para o primeiro caso um referencial fixo a partícula. As alterações em A.40 seriam; para o primeiro caso, substituir a velocidade relativa pela velocidade da partícula e no segundo substituir pela velocidade do fluido.

Para determinar a força de arrasto temos que determinar as constantes b 's e c 's, sendo assim vamos tomar as velocidades em coordenadas esféricas e a elas aplicar as condições de contorno; as velocidades se anulam quando r igual ao raio da partícula. As velocidades nas direções r e θ são dadas por:

$$v_r = -\frac{\partial}{\partial r} \phi + \frac{1}{2k} \frac{\partial}{\partial r} \chi - \chi \cos(\theta) \quad \text{A.41}$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi + \frac{1}{2k} \frac{\partial}{\partial \theta} \chi + \chi \cos(\theta) \quad \text{A.42}$$

Vale observar que $\frac{e^{-k(r-x)}}{r} = \frac{e^{-k(r-r \cos(\theta))}}{r} = \frac{e^{-kr(1-\cos(\theta))}}{r}$, que expandido em série de Taylor fica:

$e^{-kl} = \sum_{n=0}^m (-k)^n \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n}{\partial l^n} e^{-kl} \right)_{l=0} l^n$, onde $l = r(1 - \cos \theta)$, com isto teremos ϕ e χ

dados por:

$$\chi = b_0 \left[\frac{1}{r} - k(1 - \cos \theta) + \frac{k^2 r}{2} (1 - \cos \theta)^2 \right] - b_1 \left(\frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{k \cos^2 \theta}{r} \right) + b_2 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3} + \dots$$

$$\phi = -V_r \cos \theta + \frac{c_0}{r} - \frac{c_1 \cos \theta}{r^2} + \frac{c_2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{r^3} + \dots$$

Substituindo as expressões acima, truncadas em $1/r$ elevado ao cubo, nas equações 4.2.2.14 e 4.2.2.15 e aplicando as condições de contorno em r igual ao raio da partícula, teremos as equações que relacionam os coeficientes b 's e c 's. Igualando a zero os coeficientes das potências de $\cos \theta$ e desprezando os termos de potência de $\text{Re}_p/4$ (kr_p) maior do que 1, chegamos a:

$$b_0 = \frac{3V_r r_p}{2} \left(1 + \frac{3}{16} \text{Re}_p \right), \quad b_1 = \frac{3V_r r_p^2}{8} \text{Re}_p \quad \text{e} \quad b_2 = \frac{3V_r a}{2} \left(1 + \frac{3}{16} \text{Re}_p \right)$$

$$c_0 = \frac{3V_r r_p^2}{\text{Re}_p} \left(1 + \frac{3}{16} \text{Re}_p \right), \quad c_1 = \frac{V_r r_p^2}{2} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{3V_r a}{2} \left(1 + \frac{3}{16} \text{Re}_p \right)$$

Com as constantes acima podemos determinar os componentes do vetor velocidade e desta forma obter a força que atua na partícula. O que nos leva a :

$$F_{Ossen} = 3\pi r_p \mu_f \left(1 + \frac{3}{16} \text{Re}_p \right) \quad \text{A.43}$$

ANEXO B

Dinâmica da Partícula considerando apenas o arrasto de Stokes–
Numérico e experimental (MORDANT; PINTON (2000), ATAÍDES (2003) – glicerina 100 % e
90 % e CROWE (1997))

MORDANT; PINTON (2000) - CASO 1

MORDANT; PINTON (2000) - CASO 2

MORDANT; PINTON (2000) - CASO 3

Figura B.1 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico

MORDANT; PINTON (2000) - CASO 4

MORDANT; PINTON (2000) - CASO 5

MORDANT; PINTON (2000) - CASO 6

Figura B.2 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico

MORDANT; PINTON (2000) - CASO 7

MORDANT; PINTON (2000) - CASO 8

MORDANT; PINTON (2000) - CASO 9

Figura B.3 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico

MORDANT; PINTON (2000) - CASO 10

ATAÍDES (2003) – Glicerina 100 % - CASO 1

ATAÍDES (2003) – Glicerina 100 % - CASO 2

Figura B.4 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico

ATAÍDES (2003) – Glicerina 100 % - CASO 3

ATAÍDES (2003) – Glicerina 100 % - CASO 4

ATAÍDES (2003) – Glicerina 100 % - CASO 5

Figura B.5 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico

ATAÍDES (2003) – Glicerina 100 % - CASO 6

ATAÍDES (2003) – Glicerina 100 % - CASO 7

ATAÍDES (2003) – Glicerina 100 % - CASO 8

Figura B.6 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico

ATAÍDES (2003) – Glicerina 100 % - CASO 9

ATAÍDES (2003) – Glicerina 100 % - CASO 10

ATAÍDES (2003) – Glicerina 100 % - CASO 11

Figura B.7 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico

ATAÍDES (2003) – Glicerina 100 % - CASO 12

ATAÍDES (2003) – Glicerina 100 % - CASO 13

ATAÍDES (2003) – Glicerina 96 % - CASO 1

Figura B.8 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico

ATAÍDES (2003) – Glicerina 96 % - CASO 2

ATAÍDES (2003) – Glicerina 96 % - CASO

ATAÍDES (2003) – Glicerina 96 % - CASO 4

Figura B.9 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico

ATAÍDES (2003) – Glicerina 96 % - CASO 5

ATAÍDES (2003) – Glicerina 96 % - CASO 6

ATAÍDES (2003) – Glicerina 96 % - CASO 7

Figura B.10 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico

ATAÍDES (2003) – Glicerina 96 % - CASO 10

ATAÍDES (2003) – Glicerina 96 % - CASO 11

ATAÍDES (2003) – Glicerina 96 % - CASO 12

Figura B.11 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico

ATAÍDES (2003) – Glicerina 96 % - CASO 13

ATAÍDES (2003) – Glicerina 96 % - CASO 14

ATAÍDES (2003) – Glicerina 96 % - CASO 15

Figura B.12 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico

ATAÍDES (2003) – Glicerina 96 % - CASO 16

CROWE(1997) - CASO 1

CROWE(1997) - CASO 2

Figura B.13 – Dinâmica da Partícula - Experimental e Numérico