UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE COMUNICAÇÕES E ARTES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MÚSICA

JOEL MIRANDA BRAVO DE ALBUQUERQUE

SIMETRIA NA MÚSICA PÓS-TONAL

Rede de projeções por inversão

São Paulo – SP

2018

JOEL MIRANDA BRAVO DE ALBUQUERQUE

SIMETRIA NA MÚSICA PÓS-TONAL

Rede de projeções por inversão

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Música da Escola de Comunicações e Artes da Universidade de São Paulo como requisito para obtenção do título de Doutor em Música.

Área de Concentração:
Musicologia

Linha de Pesquisa:
Teoria e Análise Musical

Orientador: Prof. Dr. Paulo de Tarso
Camargo Cambraia Salles

São Paulo – SP

2018

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Catalogação na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Escola de Comunicações e Artes da Universidade de São Paulo
Dados inseridos pelo(a) autor(a)

Albuquerque, Joel Miranda Bravo de
Simetria na Música Pós-tonal: Rede de Projeções por
Inversão / Joel Miranda Bravo de Albuquerque ; orientador,
Paulo de Tarso Salles. -- São Paulo, 2018.
269 p.: il.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Música -
Escola de Comunicações e Artes / Universidade de São Paulo.
Bibliografia
Versão original

1. Simetria na Música Pós-tonal 2. Teoria e Análise
Musical 3. Rede de Projeções por Inversão 4. Teoria
Neorriemanniana 5. Teoria dos Conjuntos I. Salles, Paulo de
Tarso II. Título.

CDD 21.ed. - 780

Elaborado por Sarah Lorenzon Ferreira - CRB-8/6888

Nome: ALBUQUERQUE, Joel Miranda Bravo de.

Título: SIMETRIA NA MÚSICA PÓS-TONAL

Subtítulo: Rede de projeções por inversão

Tese apresentada ao Departamento de Música da
Escola de Comunicação e Artes da Universidade de
São Paulo para obtenção do título de Doutor em
Música

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Julgamento: _____

Assinatura: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Julgamento: _____

Assinatura: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Julgamento: _____

Assinatura: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Julgamento: _____

Assinatura: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Julgamento: _____

Assinatura: _____

*Dedico este trabalho à minha
madrinha Diva Silva*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao Prof. Dr. Paulo de Tarso Salles pela orientação, dedicação, paciência e por aceitar e acreditar neste projeto desde o Mestrado;

À Profa. Dra. Lina Noronha por me incentivar desde a graduação a seguir carreira na área acadêmica;

Aos professores Dr. Diósnio Machado Neto, Dra. Heloísa Duarte Valente, Dra. Mayra Rodrigues Gomes, Dr. Fernando Iazzetta e Dra. Lílian Campesato que trouxeram para este trabalho informações importantes dentro de suas disciplinas oferecidas ao longo do curso; aos professores Dra. Adriana Lopes da Cunha Moreira e Dr. Maurício De Bonis pelas contribuições sugeridas no exame de qualificação; ao professor e compositor Ms. Rodrigo Lima pelas aulas sobre música pós-tonal na EMESP; e aos professores Dr. João Pedro Oliveira e Dr. Joseph Straus pelos comentários e sugestões sobre o conteúdo desenvolvido nesta pesquisa;

Aos colegas da USP com pesquisas relacionadas, com os quais tive conversas relevantes para o curso deste trabalho: Ms. Ciro Visconti, Dr. Walter Nery, Dr. Allan Falqueiro, Dr. Luciano Camargo, Dra. Julia Tygel, Dr. Roberto Votta, Ms. Juliana Ripke, Ms. Ísis Biazoli Oliveira, Ms. Silvio Moreira, Ms. Ana Carolina Manfrinato, Ms. Denise Ogata, Maurício Matel, Guto Brambilla, Ms. Regina Rocha e José de Carvalho;

À equipe de Pós-graduação da Escola de Comunicações e Artes pela disposição e prestatividade em diversos momentos;

Agradeço à minha esposa Milena Bravo e à minha filha Anna Luiza Bravo pela paciência e compreensão ao longo dos quatro anos dedicados a esta pesquisa;

Aos meus pais José Albuquerque e Carmelita de Miranda, aos meus sogros Ana Maria Bravo e Milton Bravo, à minha madrinha Diva Silva, às minhas irmãs Joice Albuquerque e Leticia Albuquerque e a todos meus familiares por acreditarem desde o início na minha escolha pela carreira de pesquisador e músico. Dedico também aos meus amigos Júlio Oliveira e Camila Bravo pela leitura e revisão do trabalho.

Agradeço também a Deus aos meus mentores espirituais por me proporcionarem saúde, disposição e oportunidade de trabalhar, e de encontrar tantas pessoas importantes em minha vida.

*Weyl estava atrás da beleza,
Wigner buscava a verdade.*
(STEWART, 2012: 258)

RESUMO

ALBUQUERQUE, Joel Miranda Bravo de. **Simetria na música pós-tonal. Rede de projeções por inversão**. 2018. 272 f. Tese. (Doutorado em Musicologia) – Programa de Pós-graduação em Música, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

O objetivo principal desta pesquisa é o aprimoramento de ferramentas teóricas desenvolvidas para a análise harmônica de obras de vanguarda do início do século XX e afins (incluindo algumas obras de Villa-Lobos), destacando a utilização da simetria intervalar como fator de coerência em amostras de músicas deste período e correlacionadas. Observaremos principalmente aspectos relacionados a presença de padrões intervalares simétricos por reflexão inerentes ao sistema cromático. Procurando estabelecer um arcabouço teórico consistente que contemplasse as demandas circunscritas nas músicas pós-tonais analisadas, buscamos entender a importância da simetria entre alturas em níveis estruturais mais profundos supondo que a proporcionalidade intervalar pudesse corroborar no delineamento harmônico das obras escolhidas. Nossa proposta de estudo é calcada em fundamentos e conceitos desenvolvidos por teóricos ligados às pesquisas sobre a *teoria dos conjuntos*, com destaque para os textos de Joseph Straus (2005). Em outra esfera, elencamos ferramentas teóricas de uma segunda abordagem metodológica que cada vez mais ganha destaque entre musicólogos que atuam no campo da análise de obras pós-tonais – a *teoria neorriemanniana* – em particular observando os conceitos apresentados por David Lewin (1982; 1987) e os seus desdobramentos discutidos por Richard Cohn (1998; 2012), autor em torno do qual gravita a vertente secundária conhecida como *teoria transformacional*.

A partir da intersecção entre estas duas correntes teóricas pós-tonais escolhidas, desenvolvemos uma terceira proposta metodológica aparentemente inédita – que chamaremos neste trabalho de *teoria da inversão* – um desdobramento decorrente do aperfeiçoamento de conceitos da *teoria neorriemanniana* de David Lewin e Brian Hyer que envolvem a reflexão intervalar de conjuntos de alturas, parâmetros não contemplados pela recente *teoria transformacional* de Dmitri Tymoczko (2007; 2011) e Richard Cohn (1998; 2012). No âmbito desta proposição, seguindo a suposição levantada por Robert Morris (2007) de que existem aspectos fundamentais em comum entre as principais correntes teóricas dedicadas à música pós-tonal, exploramos alguns apontamentos deste autor que nos direcionaram à apropriação de ferramentas pertencentes à *teoria dos grupos* – campo de conhecimento oriundo da matemática, especializada no estudo de simetria utilizando estruturas algébricas conhecidas como *matrizes*. Deste processo surge a descoberta de um conglomerado de classes de conjuntos que podem ser alinhados em uma mesma *rede de projeções por inversão*. Avaliando os aspectos inerentes a este sistema apresentado, identificamos a construção de toda uma estrutura em disposição espelhada, revelando a existência de uma simetria transversal que abrange um grande número de conjuntos de alturas inerentes ao universo das doze alturas, confirmando a hipótese levantada por Robert Morris. Verificamos ainda outras correlações entre os conjuntos correspondentes presentes nesta *rede de projeções por inversão* – relações por multiplicação pelo fator M_5 e M_7 e invariância entre entradas de vetores intervalares (RAHN, 1980; OLIVEIRA,

2007) – que corroboram a constatação desta dimensão simétrica envolvendo o campo harmônico cromático. Outra proposta neste trabalho foi a ampliação na gama de possibilidades de utilização de redes de alturas (*Tonnetze*) – ferramenta emblemática da teoria neorriemanniana – apresentando outras opções de conjuntos para os desdobramentos por inversões, indo além dos convencionais conjuntos 3-11 (tricorde Maior e menor) e 4-27 (tetracordes Maior 7 e meio diminuto) recorrentes em formatações tradicionais. Seguindo neste propósito, desenvolvemos aprofundamentos abrangendo a remota rede de alturas de Euler com o tetracorde 4-20 e o *Tonnetz* tridimensional de Gollin (1998), alinhando esta pesquisa também aos resultados encontrados por Henri Pousseur ([1968], 2009) em suas “redes harmônicas” e aos conceitos desenvolvidos por George Perle (1977) e sua “teoria dos ciclos intervalares”.

Palavras-chaves: Simetria intervalar por reflexão. Música Pós-tonal. Teoria dos conjuntos. Teoria neorriemanniana. Rede de projeções por inversão.

ABSTRACT

ALBUQUERQUE, Joel Miranda Bravo de. **Symmetry in post-tonal music. Inversional pitch-class set network.** 2018. 268 p. Thesis. (PhD in Musicology) - Graduate Program in Music, University of São Paulo, São Paulo, 2018.

The main objective of this research is to improve the theoretical tools developed for the harmonic analysis of the early works of the early 20th century and related works (including some works by Villa-Lobos), highlighting the use of interval symmetry as a coherence factor in samples of pieces from this period and correlated. We will mainly observe aspects related to the presence of symmetrical interval patterns by reflection inherent to the chromatic system. We will mainly observe aspects related to the presence of symmetrical interval patterns by reflection inherent to the chromatic system. In order to establish a consistent theoretical framework that contemplates the circumscribed demands in the analyzed post-tonal pieces, we sought to understand the importance of symmetry by comparing pitches at deeper structural levels, assuming that the interval proportionality could corroborate the harmonic delineation of the chosen works. Our proposal is based on fundamentals and concepts developed by theorists related to research on pitch-class set theory, especially the texts of Joseph Straus (2005). Our study proposal is based on fundamentals and concepts developed by theorists related to research on pitch-class set theory, especially the texts of Joseph Straus (2005). In another sphere, we have ellipped theoretical tools of a second methodological approach that is increasingly prominent among musicologists working in the field of post-tonal analysis – neo-Riemannian theory – in particular, observing the concepts presented by David Lewin (1982, 1987) and its ramifications discussed by Richard Cohn (1998, 2012), author around which gravitates the secondary slope known as transformational theory.

From the intersection between these two post-tonal theoretical currents chosen, we have developed a third methodological proposal that is apparently unpublished – which we will call *inversional pitch-class set theory* – an unfolding resulting from the refinement of David Lewin and Brian Hyer's concepts of neo-Riemannian theory involving interval analysis of sets of pitch-class sets, parameters not contemplated by the recent transformational theory of Dmitri Tymoczko (2007; 2011) and Richard Cohn (1998, 2012). In this context, following the assumption made by Robert Morris (2007) that there are fundamental aspects in common among the main theoretical currents dedicated to post-tonal music, we explore some notes of this author that have directed us to the appropriation of tools belonging to the *theory of groups* – field of knowledge from mathematics, specialized in the study of symmetry using algebraic structures known as matrices. From this process comes the discovery of a conglomeration of pitch-class sets that can be aligned in the same *inversional pitch-class set network*. Evaluating the inherent aspects of this system, we identified the construction of a whole structure in a mirrored arrangement, revealing the existence of a transversal symmetry that covers a substantial number of pitch-class sets inherent to the universe of the twelve pitches, confirming the hypothesis raised by Robert Morris. We also verified other correlations between the corresponding sets in this *inversional pitch-class set network* – relations by multiplication by the factor M_5 and M_7 and invariance between interval vectors (RAHN, 1980;

OLIVEIRA, 2007) – which corroborate the observation of this symmetrical dimension involving the chromatic harmonic field. Another proposal in this work was the expansion of the range of possibilities of use of pitch-classes networks (*Tonnetze*) – emblematic tool of the neo-Riemannian theory – presenting other options of sets for the inversion unfolding, going beyond the conventional sets 3-11 (Major and minor chord) and 4-27 (Major 7th and half-diminished 7th chords) recurrent in traditional formatting. Following this, we developed deepening studies covering the remote pitch-class network of Euler with the tetrachord 4-20 and Gollin's three-dimensional *Tonnetz* (1998), aligning this research also with the results found by Henri Pousseur ([1968], 2009) about his harmonic networks and the concepts developed by George Perle (1977) and his “interval cycles theory”.

Keywords: Inversional set class symmetry. Post-tonal music. Inversional pitch-class set theory. Neo-Riemannian theory. Inversional set class network.

ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES

Fig.1.1 - 1: <i>Clockface</i> (STRAUS, 2005)	12
Fig.1.1 - 2: <i>Musical clock</i> (FIORE, 2010)	12
Fig.1.1 - 3: Dodecágono (OLIVEIRA, 2007)	13
Fig.1.1 - 4: Coleção Dó diatônica (“notas brancas”), eixo soma 4 (Ré–Láb)	14
Fig.1.1 - 5: Pentatônica 5-35 (“notas pretas”) e Dó diatônica (“notas brancas”): eixo soma 4 (Ré–Láb) invariante	15
Fig.1.1 - 6: “Notas pretas” x “notas brancas”: <i>Choros n°2</i> de Villa-Lobos, c.6-9	16
Fig.1.1 - 7: Dó dia x Fá# dia: inversão T_2I em torno do eixo Fá–Si	17
Fig.1.1 - 8: Dó dia x Fá# dia: Início do <i>Choros n°7</i> de Villa-Lobos	18
Fig.1.1 - 9: Dó dia x Lá dia: <i>Choros n°2</i> de Villa-Lobos, c.36-39	19
Fig.1.1 - 10: Dó dia x Lá dia: transposição T_3 e perpendicularidade dos eixos Fá–Si e Ré–Láb	19
Fig.1.1 - 11: Simetrias inerentes às coleções diatônica, tons-inteiros, acústica e octatônica	20
Fig.1.1 - 12: Acorde Dó Maior (3-11), assimétrico	21
Fig.1.1 - 13: Subconjuntos simétricos do acorde Dó Maior, três pares de alturas (Card2)	21
Fig.1.1 - 14: Subconjuntos simétricos do acorde Dó Maior, três notas isoladas (Card1)	21
Fig.1.1 - 15: Subconjuntos simétricos implícitos na coleção Dó diatônica e respectivos eixos	26
Fig.1.2 - 1: Projeção de tetracordes a partir de díades e inversões do acorde Dó Maior	34
Fig.1.2 - 2: Inversões do acorde Dó Maior por díades, arestas dos triângulos que formam o <i>Tonnetz</i> , transformações PRL (GOLLIN, 1998: 197)	35
Fig.1.2 - 3: Inversão do acorde Dó Maior a partir de díades do tricorde, transformações PRL	36
Fig.1.2 - 4: Pares de tricordes que podem projetar os tetracordes 4-26, 4-17 e 4-20	37
Fig.1.2 - 5: Rede de conjuntos relacionados por projeções e inversões	39
Fig.1.2 - 6: <i>Tonnetz</i> convencional para o conjunto 3-11	40
Fig.1.2 - 7: <i>Tonnetze</i> para os conjuntos 3-3, 3-4 e 3-7	41
Fig.1.2 - 8: Rede de projeções por inversão ampliado	42
Fig.1.2 - 9: Pares de tricordes que podem projetar os tetracordes 4-3, 4-8, 4-10 e 4-23	43
Fig.1.2 - 10: <i>Tonnetze</i> para os conjuntos 3-2, 3-5 e 3-9	44
Fig.1.2 - 11: <i>Tonnetz</i> para o conjunto 3-1	45
Fig.1.2 - 12: Pares de tricordes que podem projetar o tetracorde 4-1	45
Fig.1.2 - 13: Rede de projeções por inversão de tricordes	47
Fig.1.2 - 14: Rede de projeções por inversão com matrizes de <i>Tonnetze</i> de tricordes	49
Fig.1.2 - 15: Projeção de pentacordes a partir de alturas individuais e inversões do acorde Dó Maior	50

Fig.1.2 - 16: Inversões do acorde Dó Maior por alturas individuais, vértices dos triângulos que formam o <i>Tonnetz</i>	51
Fig.1.2 - 17: Inversão do acorde Dó Maior a partir de alturas individuais do tricorde	52
Fig.1.2 - 18: Pares de tricordes que podem projetar os pentacordes 5-z17, 5-22 e 5-34...	53
Fig.1.2 - 19: Ampliação da rede de projeções por inversão de tricordes	59
Fig.1.2 - 20: Regiões C1 e C5 da rede de projeções por inversão	61
Fig.1.2 - 21: Conjuntos da região central e superior.....	66
Fig.1.2 - 22: Rede de tetracordes relacionados por um maior número de entradas de vetores intervalares invariantes.....	69
Fig.1.2 - 23: Rede de tetracordes relacionados por vetores intervalares invariantes, reiteração das regiões C1 e C5.....	70
Fig.1.2 - 24: Rede de tetracordes relacionados por vetores intervalares invariantes, reiteração das regiões Central e Superior	71
Fig.1.3 - 1: Inversões do acorde Dó Maior 7 por díades, arestas dos tetraedros que formam o <i>Tonnetz</i> tridimensional (GOLLIN, 1998), transformações PRL e P'R'L'	77
Fig.1.3 - 2: Inversões do acorde Dó Maior 7 a partir de díades do tricorde. Projeções dos conjuntos 5-34, 6-z23, 6-z29, 6-z42, 6-z49 e 6-z50	78
Fig.1.3 - 3: Correspondência com a “constelação Morris” (SALLMEN, 2011)	79
Fig.1.3 - 4: Sistema de conjuntos relacionados por projeções a partir de inversões em torno dos tetracordes 4-27, 4-12, 4-13 e 4-18.....	82
Fig.1.3 - 5: Rede de projeções por inversão em torno dos seis hexacordes relacionados aos tetracordes 4-z15 e 4-z29.....	97
Fig.1.3 - 6: Disposição simétrica entre os conjuntos, distribuídos reiterando as regiões C1, C5, central e superior	98
Fig.1.3 - 7: Rede de tetracordes relacionados por invariâncias de quatro entradas de vetores intervalares, incluindo os conjuntos 4-z15 e 4-z29	100
Fig.1.3 - 8: Rede de projeções por inversão em torno dos seis hexacordes relacionados aos tetracordes 4-27, 4-12, 4-13 e 4-18 (“constelação Morris”).....	101
Fig.1.3 - 9: Disposição simétrica entre os conjuntos, distribuídos reiterando as regiões C1, C5 e Central.....	102
Fig.1.3 - 10: Rede de projeções por inversão a partir dos tetracordes 4-12, 4-27, 4-18, 4-13, 4-z15 e 4-z29.....	103
Fig.1.3 - 11: Inversões do acorde Dó Maior 7 por alturas individuais, vértices dos tetraedros que formam o <i>Tonnetz</i> tridimensional (GOLLIN, 1998).....	104
Fig.1.3 - 12: Inversões do acorde Dó Maior 7 a partir de alturas individuais do tricorde. Projeções dos conjuntos 5-34, 7-34 e 6-z28	106
Fig.2.1 - 1: <i>Rede de ciclos intervalares</i> invariantes entre redes de alturas com tricordes	109
Fig.2.1 - 2: <i>Tonnetze</i> dos tricordes 3-6, 3-8, 3-10 e 3-12	111

Fig.2.1 - 3: Início do <i>Choros nº2</i> de Villa-Lobos, oposição entre os ciclos C1 e C5	113
Fig.2.1 - 4: Relações por combinação transpositiva entre conjuntos regidos pelo ciclo intervalar C1 (FOLEY, 1998: 73).....	115
Fig.2.1 - 5: Relações por combinação transpositiva entre conjuntos regidos pelo ciclo intervalar C5 (FOLEY, 1998: 73).....	116
Fig.2.1 - 6: Rede de alturas com o tetracorde 4-17 (POUSSEUR, [1968] 2009: 222).....	117
Fig.2.2 - 1: Rede de alturas com o tetracorde 4-20 (EULER, 1774)	119
Fig.2.2 - 2: Rede de alturas com o tetracorde 4-20, implícitos os tricordes 3-4 e 3-11	120
Fig.2.2 - 3: Quatro possibilidades de inversão do conjunto 4-20 por reiteração de pares de alturas e três variantes	121
Fig.2.2 - 4: Quatro possibilidades de inversão do conjunto 4-20 por reiteração de alturas isoladas e três variantes.....	122
Fig.2.2 - 5: Relação entre o conjunto 4-20 original e suas oito imagens	123
Fig.2.2 - 6: Hexacordes – conjuntos 6-20 e 6-z26 – formados pela sobreposição entre tetracordes relacionados por pares de alturas em comum e duas notas variantes	124
Fig.2.2 - 7: Heptacordes – conjuntos 7-22 e 7-z17 – formados pela concomitância entre tetracordes relacionados por apenas uma altura em comum e três notas variantes.....	125
Fig.2.2 - 8: Conjuntos formados por sobreposições de tetracordes relacionados por pares de alturas	126
Fig.2.2 - 9: Combinações de tetracordes com apenas uma altura em comum.....	128
Fig.2.2 - 10: Combinações entre conglomerados de tetracordes vizinhos	128
Fig.2.2 - 11: Desdobramentos de inversões do conjunto 4-20 geram a coleção cromática completa	130
Fig.2.2 - 12: Ciclos intervalares implícitos dentro do <i>Tonnetz</i> do tetracorde 4-20	131
Fig.2.2 - 13: Ramificação entre redes de alturas implícitas no <i>Tonnetz</i> do conjunto 4-20; “coroa” de tetracordes	132
Fig.2.2 - 14: Recorte da rede de projeções por inversão, conjuntos listados na coroa de tetracordes do <i>Tonnetz</i> do conjunto 4-20	133
Fig.2.3 - 1: Rede de alturas com o tetracorde 4-7, implícitos os tricordes 3-4 e 3-3	135
Fig.2.3 - 2: Relação entre o conjunto 4-7 original e suas oito imagens	136
Fig.2.3 - 3: Desdobramentos de inversões do conjunto 4-7 geram a coleção cromática completa	140
Fig.2.3 - 4: Ciclos intervalares implícitos dentro do <i>Tonnetz</i> do tetracorde 4-7	141
Fig.2.3 - 5: Ramificação entre redes de alturas implícitas no <i>Tonnetz</i> do conjunto 4-7; “coroa” de tetracordes	142
Fig.2.3 - 6: Recorte da rede de projeções por inversão, conjuntos listados na coroa de tetracordes do <i>Tonnetz</i> do conjunto 4-7	143

Fig.3.1 - 1: Início do <i>Opus 19/4</i> de Schoenberg, análise de Pousseur ([1956] 2009: 57-59).	173
Fig.3.1 - 2: início do <i>Opus 19/4</i> de Schoenberg	176
Fig.3.1 - 3: conjuntos 5-z15, 4-14 e 6-z37, eixo invariante soma 10	177
Fig.3.1 - 4: <i>Opus 19/4</i> de Schoenberg, c.3-5	177
Fig.3.1 - 5: conjuntos 5-1, 5-33, 9-6 e 10-4, eixo invariante soma 10	178
Fig.3.1 - 6: <i>Opus 19/4</i> de Schoenberg, c.5-7	179
Fig.3.1 - 7: conjuntos 10-6 e 11-1, mudança para o eixo soma 6	179
Fig.3.1 - 8: <i>Opus 19/4</i> de Schoenberg, c.8-9	180
Fig.3.1 - 9: conjunto 9-9, manutenção do eixo soma 6	180
Fig.3.1 - 10: início da terceira peça para orquestra <i>Opus 16</i> , <i>Farben</i> de Schoenberg (transcrição para piano de Webern)	181
Fig.3.1 - 11: bloco harmônico no início do <i>Opus 16/3</i> de Schoenberg	181
Fig.3.1 - 12: conjunto 5-z17, eixo invariante soma 8	182
Fig.3.1 - 13: blocos harmônicos no início do <i>Opus 16/3</i> de Schoenberg	183
Fig.3.1 - 14: transposições do conjunto 5-z17, formação do conjunto 10-4	183
Fig.3.1 - 15: reiteração do eixo soma 8, inversão entre conjuntos 5-z17, projeção do conjunto 9-6	184
Fig.3.1 - 16: blocos harmônicos no início do <i>Opus 16/3</i> de Schoenberg	185
Fig.3.1 - 17: transformação gradativa entre conjuntos simétricos e assimétricos	185
Fig.3.1 - 18: reiteração do eixo soma 8, inversão entre conjuntos 5-16, projeção do conjunto 6-z49	186
Fig.3.2 - 1: Série do <i>Konzert Opus 24</i> de Webern	187
Fig.3.2 - 2: Tricordes inerentes a série do <i>Opus 24</i> de Webern, conjunto 3-3 invariante	188
Fig.3.2 - 3: <i>Tonnetz</i> do conjunto 4-7, tricordes da série do <i>Opus 24</i>	189
Fig.3.2 - 4: tricordes orientados em torno do eixo soma 5, projeção do conjunto 6-20	190
Fig.3.2 - 5: pares de tetracordes inerentes a série do <i>Opus 24</i> , conjuntos 4-7 e 4-19	190
Fig.3.2 - 6: <i>Tonnetz</i> do conjunto 4-7, pares de tetracordes da série do <i>Opus 24</i>	191
Fig.3.2 - 7: Invariância entre entradas de vetores intervalares dos conjuntos 4-7 e 4-19	191
Fig.3.2 - 8: tetracordes orientados em torno do eixo soma 5, projeção do conjunto 6-20	192
Fig.3.2 - 9: hexacordes justapostos da série do <i>Opus 24</i> , conjunto 6-20	192
Fig.3.2 - 10: <i>Tonnetz</i> do conjunto 4-7, hexacordes justapostos da série do <i>Opus 24</i>	193
Fig.3.2 - 11: hexacordes orientados em torno do eixo soma 11, projeção do conjunto 12-1	194
Fig.3.2 - 12: Relacionamento entre os conjuntos 3-3, 4-7, 4-19 e 5-z17, proximidades harmônicas entre Schoenberg e Webern	194
Fig.3.2 - 13: série dodecafônica do primeiro movimento do <i>Quarteto de Cordas, opus 28</i> (1934)	195

Fig.3.2 - 14: Tetracordes inerentes a série do <i>Opus 28</i> de Webern, conjunto 4-1 invariante (“motivo Bach”).....	195
Fig.3.2 - 15: <i>Tonnetz</i> tridimensional do octacorde 8-1, permutações do conjunto 4-1	196
Fig.3.3 - 1: <i>Hyperprism</i> de Varèse, c.13-16, blocos harmônicos simétricos	197
Fig.3.3 - 2: bloco harmônico do c.16 de <i>Hyperprism</i> , projeção simétrica de intervalos....	198
Fig.3.3 - 3: espelhamento em torno do eixo soma 3	198
Fig.3.3 - 4: conjunto 8-1, eixo invariante soma 3, segmento cromático	199
Fig.3.4 - 1: Análise do início do <i>Choros nº4</i> de Villa-Lobos.....	202
Fig.3.4 - 2: conjuntos relacionados na rede de projeção por inversão.....	204
Fig.3.4 - 3: conjuntos relacionados na rede de parcimônia entre entradas de vetores intervalares	205
Fig.3.5 - 1: Análise do início do <i>Quarteto de Cordas nº6/4</i> de Bartók (SALLMEN, 2011)	206
Fig.3.5 - 2: Tetracordes que compõem a “constelação Morris”, relacionados na rede de projeções por inversão.	207
Fig.3.5 - 3: Invariância entre vetores intervalares dos conjuntos da “constelação Morris”	208
Fig.3.6 - 1: Início da música <i>Chovendo na Roseira</i> de Tom Jobim.....	210
Fig.3.6 - 2: Acordes do início de <i>Chovendo na Roseira</i> : Ab6/9 e Ebm7/Ab.....	210
Fig.3.6 - 3: Acordes Ab6/9 e Ebm7/Ab: duas pentatônicas 5-35 invertidas entre si em torno do eixo soma 6	210
Fig.3.6 - 4: Coleção Réb diatônica formada pela combinação entre os acordes Ab6/9 e Ebm7/Ab, reiteração do eixo soma 6	212
Fig.3.6 - 5: acordes Ab6/9 e Ebm7/Ab representados no cubo diatônico, inter-relacionados pela face interna transversal	213
Fig.3.6 - 6: Equidistâncias melódicas em torno da altura Mib	214
Fig.3.6 - 7: Palíndromo melódico formando um eixo em torno da altura Láb	215
Fig.3.6 - 8: Palíndromo melódico equivalente formando um eixo em torno da altura Mib	215
Fig.3.6 - 9: Palíndromo melódico formando um eixo em torno da altura Mib.....	215
Fig.3.6 - 10: Combinação entre palíndromos melódicos formando um eixo em torno da altura Mib	216
Fig.3.6 - 11: Palíndromo entre figurações rítmicas	216
Fig.3.6 - 12: Tetracorde Fsus4/7, conjunto 4-23, segmento do ciclo C5.....	217
Fig.3.6 - 13: tetracorde Fsus4/7 (conjunto 4-23) implícito na face inferior do cubo diatônico	218
Fig.3.6 - 14: Conjuntos 4-23 e 5-35, localizados na parte inferior da região C5.....	218
Fig.3.7 - 1: Comparativo harmônico entre trechos de obras de compositores.....	220
Fig.3.7 - 2: Comparativo harmônico entre trechos de obras de compositores, rede de invariância entre entradas de vetores intervalares de tetracordes.....	222

Fig.3.8 - 1: seis “eixos harmônicos” de Stravinsky (STRAUS, 2014) na face transversal esquerda da rede de projeções por inversão	226
Fig.3.9 - 1: Início da <i>Sinfonia nº7</i> de Villa-Lobos	228
Fig.3.9 - 2: <i>Sinfonia nº7</i> de Villa-Lobos, c.2, sopros	229
Fig.3.9 - 3: Blocos harmônicos no <i>clockface</i>	229
Fig.3.9 - 4: Grupo completo de alturas, conjunto 11-1, eixo soma 0	231
Fig.3.9 - 5: Conjunto 3-9, eixo soma 0, centro em Dó	232
Fig.3.9 - 6: <i>Sinfonia nº7</i> de Villa-Lobos, c.7-11, camadas de tetracordes	233
Fig.3.9 - 7: Combinação de um par do tetracorde 4-22, projeção do conjunto 8-24, eixo soma 4	233
Fig.3.9 - 8: Sequência de tetracordes em sobreposição	234
Fig.3.9 - 9: Relações entre tetracordes e hexacordes na rede de projeções por inversão	236
Fig.3.9 - 10: Relação entre tetracordes por invariância de entradas de vetores intervalares	237
Fig.3.9 - 11: Dimensão melódica em dois grupos de quatro vozes	238

ÍNDICE DE TABELAS

Tab.1.1 - 1: Ordem das classes de altura	11
Tab.1.1 - 2: Dó diatônica: pares de alturas em torno do eixo Ré–Láb, soma 4	14
Tab.1.1 - 3: “Notas pretas”: pares de alturas em torno do eixo Ré–Láb, soma 4	15
Tab.1.1 - 4: Matriz de soma para a coleção Dó diatônica, invariância da soma 4	24
Tab.1.1 - 5: Subconjuntos simétricos implícitos na coleção Dó diatônica e respectivos eixos	25
Tab.1.1 - 6: Matriz de soma para a coleção tons inteiros	27
Tab.1.1 - 7: Subconjuntos simétricos implícitos na coleção tons inteiros e respectivos eixos	28
Tab.1.1 - 8: Matriz de soma para a coleção octatônica	29
Tab.1.1 - 9: Subconjuntos simétricos implícitos na coleção octatônica e respectivos eixos	29
Tab.1.1 - 10: Matriz de soma para a coleção Dó acústica	30
Tab.1.1 - 11: Subconjuntos simétricos implícitos na coleção Dó acústica e respectivos eixos	30
Tab.1.2 - 1: Matriz de soma para o acorde Dó Maior	33
Tab.1.2 - 2: Subconjuntos simétricos implícitos no acorde Dó Maior e respectivos eixos..	33
Tab.1.2 - 3: Projeção de tetracordes a partir de díades do acorde Dó Maior	34
Tab.1.2 - 4: Inversão do acorde Dó Maior a partir de díades do tricorde.....	35
Tab.1.2 - 5: Invariâncias de ciclos intervalares entre <i>Tonnetze</i> de tricordes de regiões vizinhas do sistema	48
Tab.1.2 - 6: Projeção de pentacordes a partir de alturas individuais do acorde Dó Maior .	50
Tab.1.2 - 7: Inversão do acorde Dó Maior a partir de alturas individuais do tricorde.....	51
Tab.1.2 - 8: Possibilidades de projeções a partir de alturas individuais dos conjuntos 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-7, 3-9 e 3-11	58
Tab.1.2 - 9: Relação por multiplicação M5 e M7 entre as regiões C1 e C5, identificada na análise dos índices de vetores intervalares dos conjuntos correspondentes	64
Tab.1.2 - 10: Relação de multiplicação M5 e M7 entre as classes de intervalos 1 e 5 ...	64
Tab.1.2 - 11: Relação de multiplicação M5 e M7 entre os tetracordes 4-16 e 4-5.....	65
Tab.1.2 - 12: Análise de invariâncias entre vetores intervalares dos conjuntos da Região Central e Superior	68
Tab.1.3 - 1: Matriz de soma para o acorde Do Maior com Sétima.....	73
Tab.1.3 - 2: Subconjuntos simétricos implícitos no acorde Dó Maior com Sétima e respectivos eixos	74
Tab.1.3 - 3: Possibilidades de projeções a partir de um acorde Maior 7 (conjunto 4-27)...	76
Tab.1.3 - 4: Mapeamento de projeções a partir dos conjuntos 4-12, 4-13 e 4-18	81
Tab.1.3 - 5: Invariâncias entre vetores intervalares.....	84

Tab.1.3 - 6: Relações por multiplicação pelos fatores M5 e M7 entre hexacordes Z-relacionados	84
Tab.1.3 - 7: Possibilidades de projeções a partir dos conjuntos Z-relacionados 4-z15 e 4-z29	86
Tab.1.3 - 8: Mapeamento dos seis conjuntos de tetracordes que podem projetar cada um dos dez hexacordes que relacionam os tetracordes 4-27, 4-12, 4-13, 4-18, 4-z15 e 4-z2996	
Tab.1.3 - 9: Relações de multiplicação M ₅ e M ₇ entre os conjuntos das regiões C1 e C5 .	99
Tab.1.3 - 10: Relação de multiplicação pelos fatores M ₅ e M ₇ entre os hexacordes da região central 6-z50 e 6-z13.....	99
Tab.2.1 - 1: Lista de ciclos intervalares previstos em redes de alturas com tricordes	110
Tab.2.1 - 2: Invariâncias entre ciclos intervalares C1 e C5	112
Tab.2.1 - 3: Matrizes de soma para a combinação entre díades (05) e projeções a partir do conjunto 3-4 (015) (FOLEY, 1998: 70-71).....	114
Tab.2.3 - 1: Projeções a partir da sobreposição de pares de tetracordes 4-7 vizinhos, combinando as alturas do conjunto original e as notas variantes de suas inversões.....	137
Tab.2.3 - 2: Correspondências por multiplicação pelos fatores M5 e M7 entre as projeções dos tetracordes 4-20 e 4-7	137
Tab.2.3 - 3: Projeções a partir da sobreposição de pares de tetracordes 4-7 vizinhos, conglomerados maiores	138
Tab.2.3 - 4: Correspondências por multiplicação pelos fatores M5 e M7 entre as projeções dos tetracordes 4-20 e 4-7	139
Tab.2.4 - 1: Mapeamento de todos os <i>Tonnetze</i> de tetracordes simétricos e seus subconjuntos implícitos. Cruzamentos perpendiculares entre pares de ciclos intervalares	145
Tab.2.4 - 2: Invariâncias entre ciclos intervalares entre ciclos de alturas de conjuntos relacionados por multiplicação pelos fatores M5 e M7, correspondências entre regiões C1 e C5.	146
Tab.2.4 - 3: Mapeamento de redes de alturas a partir de combinações com o ciclo intervalar C0	147
Tab.3.8 - 1: seis “eixos harmônicos” de Stravinsky categorizados por Straus (2014)	224
Tab.3.9 - 1: Matriz de soma 0 entre as coleções Mib HM e Ré hm	230
Tab.3.9 - 2: Projeções a partir de tetracordes sobrepostos.....	234

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	1
(a) Objetivos gerais e específicos	1
(b) Problemáticas referentes ao objeto de estudo.....	2
(c) Metodologia para a análise musical e referencial teórico adotado	5
(d) Organização do texto: conteúdo dos capítulos	8
1. REDE DE PROJEÇÕES POR INVERSÃO.....	10
1.1. Apontamentos entre <i>teoria dos grupos</i> e <i>teoria neorriemanniana</i>	11
1.2. Rede de projeções por inversão, <i>Tonnetze</i> de tricordes	31
1.2.1. Projeções de tetracordes simétricos	32
1.2.2. Projeções de pentacordes simétricos	50
1.3. Perspectiva a partir da “constelação Morris”	72
1.3.1. Projeções de hexacordes simétricos	73
1.3.2. Projeções de heptacordes simétricos	103
2. TONNETZE DE TETRACORDES.....	108
2.1. Rede de ciclos intervalares: reflexões sobre Perle e Pousseur	108
2.2. <i>Tonnetze</i> a partir de tetracordes simétricos: rede de alturas de Euler	118
2.3. Correspondências por multiplicação pelos fatores M_5 e M_7	134
2.4. Mapeamento de todos os <i>Tonnetze</i> para tetracordes simétricos	144
2.5. <i>Tonnetze</i> tridimensionais: reflexões sobre Gollin (1998)	147
2.6. Mapeamento de todos os <i>Tonnetze</i> tridimensionais para octacordes simétricos.....	148
3. SIMETRIA NA MÚSICA PÓS-TONAL.....	172
3.1. <i>Opus 19/4</i> (1911) e <i>Opus 16/3, Farben</i> (1916) de Schoenberg	172
3.2. <i>Konzert</i> , <i>Opus 24</i> (1934) e <i>Quarteto de Cordas, Opus 28/I</i> (1938) de Webern 186	
3.3. <i>Hiperprism</i> (1923) de Edgar Varèse	196
3.4. <i>Choros nº4</i> (1926) de Villa-Lobos	200
3.5. <i>Quarteto de Cordas nº6/4</i> (1939) de Béla Bartók	205
3.6. <i>Chovendo na Roseira</i> de Tom Jobim	208
3.7. Comparativo entre amostras de estruturas harmônicas.....	219
3.8. “Eixos harmônicos” de Stravinsky, segundo Straus (2014).....	223
3.9. Aspectos estruturais harmônicos da <i>Sinfonia nº7</i> (1945).....	227
CONCLUSÃO.....	239
BIBLIOGRAFIA.....	242

INTRODUÇÃO

(a) Objetivos gerais e específicos

O objetivo principal desta pesquisa é o aprimoramento de ferramentas teóricas desenvolvidas para a análise harmônica de músicas pós-tonais da primeira metade do século XX e afins (entre as quais incluímos exemplos de Villa-Lobos e Tom Jobim), com destaque para a utilização da simetria intervalar como fator de coerência na organização de conglomerados de alturas. Nossa proposta metodológica está fundamentada essencialmente em torno da inter-relação entre ferramentas de duas correntes prioritariamente dedicadas ao estudo do repertório de vanguarda: a *teoria dos conjuntos* (STRAUS, 2005) e a *teoria neorriemanniana* (LEWIN, 1982; 1987; TYMOCZKO, 2007; 2011; COHN, 2012).

Desta combinação entre estratégias destas duas vertentes concorrentes construiremos uma terceira proposta aparentemente inédita que chamaremos neste trabalho de *teoria da inversão*. Neste novo campo de estudo, seguindo alguns apontamentos apresentados por Robert Morris (2007), recorreremos à *teoria dos grupos* – ferramenta algébrica oriunda da matemática, empregada também na física quântica, cristalografia e química – para a constatação de um padrão simétrico comum inerente ao corpo de relações intervalares entre as doze alturas, revelando a existência de um alinhamento transversal sistêmico que polariza diversas classes de conjuntos e distintas cardinalidades em torno de duas faces espelhadas, apresentadas a seguir em diferentes perspectivas de nossa proposta de *rede de projeções por inversão*. Neste sistema em questão descobrimos correspondências entre classes de conjuntos por relações de multiplicação pelos fatores M_5 e M_7 e invariâncias entre índices de entradas de vetores intervalares (RAHN, 1980; OLIVEIRA, 2007), corroborando nossa hipótese de existência de uma dimensão simétrica bilateral que alinha transversalmente a maioria dos conjuntos de alturas que compõem o universo cromático. Outro aspecto relevante desta nossa proposta foi a possibilidade de interação entre conjuntos de alturas de diversas classes intervalares e cardinalidades diferentes, reunindo tricordes, tetracordes, pentacordes e hexacordes em um mesmo arcabouço. Essa condição se tornou imprescindível,

considerando a recorrente diversidade harmônica encontrada nas obras pós-tonais aqui contempladas. Fizemos assim um contraponto com a problemática que identificamos na *teoria transformacional* (TYMOCZKO, 2007; 2011; COHN, 2012), ramo da teoria neorriemanniana que considera apenas esquemas “parcimoniosos” que relacionam conjuntos intervalares convencionais de comum cardinalidade. Em suma, tricordes e tetracordes não estão previstos em um mesmo sistema na teoria transformacional, como podemos verificar na correlação entre a “dança dos cubos” (tricordes) e as “torres” de tetracordes, estruturas emblemáticas desta corrente metodológica (COHN, 2012).

Trabalhando no desenvolvimento de ferramentas emblemáticas da teoria neorriemanniana, propomos ainda alguns caminhos para a construção de redes de alturas (*Tonnetze*) não convencionais, apresentando desdobramentos de inversões a partir de diversas classes de conjuntos, não exclusivamente condicionados aos conjuntos 3-11 (tricordes Maior e menor) e 4-27 (tetracordes Maior 7 e meio diminuto) recorrentes nas propostas tradicionais. Neste sentido, incorporamos especulações a partir da rede de alturas de Euler (tetracorde 4-20) e o *Tonnetz* tridimensional de Gollin (1998), alinhando nossa pesquisa aos mapeamentos encontrados por Henri Pousseur ([1968], 2009) em sua proposta de “redes harmônicas”, e aos conceitos desenvolvidos por George Perle (1977) em sua teoria dos ciclos intervalares, se estendendo aos desdobramentos em relação às famílias de ciclos desenvolvidos por Gretchen Foley (1998), uma pesquisadora que deu continuidade aos estudos de Perle. Alcançaremos ainda o conceito de “multiplicação” proposto por Pierre Boulez (1986), que recorria à interação entre pares de grupos de alturas concatenados em matrizes de soma (um conceito diferente da apresentada em torno de John Rahn (1980) e João Oliveira (2007), que previam apenas o resultado de multiplicação dos membros de um conjunto por um fator único), e a correlação desta proposta com a “combinação transpositiva” de Richard Cohn (1988).

(b) Problemáticas referentes ao objeto de estudo

1. A corrente neorriemanniana desenvolvida em torno da metodologia aplicada por Richard Cohn (2012), também conhecida como *teoria transformacional*, propõe a construção de redes de grupos de alturas de

mesma cardinalidade, avizinados pela maior coincidência de notas em comum entre si, além de prever um movimento intervalar mínimo na transição entre estes conjuntos, aproximação conhecida como “máxima parcimônia” por alguns estudiosos vinculados a esta vertente. O resultado desta proposta são esquemas que combinam transposições e inversões de conjuntos com um mesmo número de alturas; ou seja, tricorde e tetracordes não podem ser previstos em uma mesma relação por serem de diferentes cardinalidades¹. Constatando que obras pós-tonais convencionalmente trabalham com concomitâncias de conjuntos de diversas espécies e diferentes quantidades de alturas, seria possível a proposição de um sistema comum que relacionasse classes de conjuntos de diferentes cardinalidades? Além disso, haveria um fator de aproximação entre estes conjuntos de alturas que não fosse apenas a “máxima parcimônia” recorrente na teoria transformacional?

2. A teoria dos conjuntos prevê a constatação de eixos de simetria inerentes a um conjunto através de uma apresentação geométrica da coleção de doze alturas em um mostrador similar ao relógio analógico, conhecido como *clockface* (STRAUS, 2005). Haveria uma maneira diferente de demonstrar estas simetrias por reflexão, não apenas recorrendo a figuras geométricas, mas também utilizando representações por estruturas algébricas (matrizes de soma e multiplicação)? Além disso, como esta outra maneira de representação matemática poderia ser uma ferramenta mais eficiente na averiguação de propriedades simétricas de subconjuntos inerentes a grupos de alturas não simétricos em sua totalidade?
3. Existiria uma simetria de maior abrangência que alinharia todos os conjuntos de alturas inerentes ao sistema cromático em torno de uma mesma dimensão de proporção intervalar, envolvendo conjuntos de toda

¹ Trataremos as nomenclaturas “ordinalidade” e “cardinalidade” como parâmetros interdependentes para a classificação e inter-relação entre diferentes classes de conjuntos intervalares, de acordo com o número de alturas que os compõem. Ambos os termos se referem a quantidade de membros pertencentes ao mesmo grupo de alturas em questão, sendo a totalidade cromática (“ordinalidade”) representada pelo termo “Módulo 12” (com a abreviação “Mod12”) e seus respectivos subconjuntos representados por diferentes índices de “cardinalidades”. Utilizaremos a abreviação “Card(n)”, sendo o item “n” correspondente ao número de alturas do subconjunto tratado. Desta maneira, teremos os índices “Card3” para tricordes, “Card4” para tetracordes, “Card7” para coleções com sete alturas e assim por diante.

espécie e de diferentes cardinalidades, reunindo em um único esquema os diferentes tipos de abordagens sobre a simetria constatados em diversas correntes distintas direcionadas para obras pós-tonais – entre as quais a teoria dos conjuntos, a teoria neorriemanniana e a teoria dos ciclos intervalares – confirmando assim a hipótese levantada por Robert Morris (2007) sobre a existência de um fator invariante entre estas várias vertentes metodológicas? Seria a *teoria dos grupos* – ferramenta oriunda do campo da matemática, interessada no estudo de organizações simétricas – um instrumento adequado para levantar este aspecto comum entre estas diversas teorias pós-tonais, assim como propõe Robert Morris (2007)?

4. Prevendo a existência de um sistema comum que incluísse diversas classes de conjuntos de alturas de distintas espécies e cardinalidades diferentes, estes correlacionados por projeções por inversão e invariâncias entre índices de entradas de vetores intervalares – proposta que chamaremos aqui de *rede de projeções por inversão* – seria possível descobrir características harmônicas simpatizantes entre conglomerados de classes de conjuntos vizinhos, assim como aspectos harmônicos díspares entre classes de conjuntos não diretamente relacionados neste sistema? Além disso, seria possível descobrir preferências harmônicas de um determinado compositor, considerando a escolha de determinados grupos de classes de conjuntos vizinhos em um mesmo setor da *rede de projeções por inversão* (prevendo obviamente uma quantidade significativa de análises de diversos trechos de obras do músico em questão)? Seria possível ainda comparar “perfis harmônicos” de diferentes compositores, apontando aproximações e distanciamentos entre os artistas de acordo com as regiões escolhidas neste sistema; ou comparações entre grupos de obras de diferentes períodos estilísticos de um mesmo compositor?
5. Convencionalmente uma rede de alturas (*Tonnetz*) é construído a partir dos conjuntos 3-11 e 4-27, seguindo aspectos relevantes para a teoria neorriemanniana tradicional. Considerando que habitualmente os compositores pós-tonais em suas práticas recorrentes não trabalham apenas com estas duas classes de conjuntos, existiriam outras formas de

construção de um *Tonnetz* a partir de outras estruturas harmônicas? E como poderíamos relacionar estas diversas redes de alturas formadas a partir de diferentes conjuntos alinhados em uma mesma ordem de relações? Além disso, como trabalharíamos com diferentes propostas envolvendo o tradicional *Tonnetz* neorriemanniano (conjunto 3-11), a remota rede de alturas de Euler (conjunto 4-20) e o *Tonnetz* tridimensional de Gollin (conjunto 4-27), considerando ainda propostas similares como as redes harmônicas de Pousseur e os conglomerados entre ciclos intervalares de George Perle?

(c) Metodologia e referencial teórico

Este trabalho será desenvolvido mantendo um paralelo simultâneo entre dois parâmetros distintos de análise musical, os quais em nosso estudo se mostram interdependentes e necessários na construção de um arcabouço teórico suficiente para compreender de forma satisfatória o perfil estético composicional harmônico aplicado por compositores modernistas e correlacionados no manuseio de grupos de alturas em obras pós-tonais aqui acolhidas.

A primeira vertente metodológica aqui escolhida é calcada nos conceitos de análise desenvolvidos por teóricos ligados às pesquisas que elegeram a *teoria dos conjuntos* (desenvolvida a princípio por Allen Forte e ampliada por outros musicólogos como Joseph N. Straus² (2005) e Larry Solomon (2005)) como base para estudos que investigam estruturas intervalares em amostras de obras onde não se aplicam parâmetros tradicionais de apreciação. Em nosso caso, ferramentas convencionais frequentemente utilizadas em análises de músicas tonais não apresentaram efeitos satisfatórios ao serem aplicadas às obras pós-tonais selecionadas para o desenvolvimento deste trabalho. Através da teoria dos conjuntos podemos apreciar com mais sucesso, segmento por segmento, cada um dos trechos onde se apresentaram estruturas intervalares orientados por proporções simétricas. Como fotografias detalhadas tiradas de

² Destaque no desenvolvimento e pesquisa sobre *teoria dos conjuntos* também para Milton Babbitt e David Lewin. Para uma bibliografia comentada sobre o assunto ver os textos de Hyde (1989) e Mead (1989).

vários momentos das obras escolhidas, foi possível colocar em relevo diversos conjuntos de alturas proeminentes e compará-los posteriormente no intuito de encontrar estruturas invariantes responsáveis pela manutenção do fluxo discursivo, possibilitando supor possíveis contornos estruturais que justifiquem a construção composicional de obras pós-tonais, direcionando também nossa percepção e avaliação dos recorrentes modelos intervalares simétricos empregados por pares modernistas.

Por outro lado, uma segunda corrente de estudo se fez necessária, a *teoria neorriemanniana*, esta que nos últimos anos vem se destacando e ganhando força no campo da musicologia e da teoria musical. Partimos dos estudos preliminares desenvolvidos pelos teóricos David Lewin e Brian Hyer, com destaque para a formação de redes de alturas (*Tonnetze*) relacionados por inversões de conjuntos e conglomerados de ciclos intervalares. Desta vertente de estudo original é desenvolvido o posterior conceito de máxima “parcimônia” apresentado em estudos de Dmitri Tymoczko e Richard Cohn, dois dos pesquisadores que se dedicam atualmente no aprimoramento da teoria neorriemanniana³, em torno dos quais se consolidou a decorrente *teoria transformacional*.

Desta combinação entre teoria dos conjuntos e teoria neorriemanniana surgiu a necessidade de desenvolvermos uma terceira proposta subsequente, que chamaremos neste trabalho de *teoria da inversão*. Este conceito surgiu na concomitância entre duas especulações aqui levantadas em torno de parâmetros mais remotos da teoria neorriemanniana discutidas por David Lewin (1982). Primeiramente percebemos em nossa investigação que a partir do processo de reflexão entre duas estruturas intervalares de mesma classe – um procedimento previsto na teoria neorriemanniana para a construção de um *Tonnetz*, convencionalmente recorrendo aos conjuntos 3-11 (trícorde Maior e menor) e 4-27 (tetracordes Maior 7 e meio diminuto) – podemos projetar grupos de alturas com um maior índice, bastando concatenar a totalidade de notas presentes nestes pares espelhados. Em um segundo momento, constatamos que poderíamos elaborar diversas redes de alturas diferentes utilizando qualquer

³ Destaque no desenvolvimento e pesquisa sobre teoria neorriemanniana e aproximações por parcimônia também para David Lewin, Brian Hyer e Jack Douthett & Peter Steinbach. Para uma bibliografia comentada sobre o assunto ver o texto de Cohn (1998a).

classe de tricorde, não necessariamente os conjuntos 3-11 e 4-27 recorrentes na metodologia tradicional.

A partir desta dupla abordagem, percebemos a coincidência entre diversos conjuntos projetados a partir de diferentes tricordes diferentes, ou seja, um mesmo *superconjunto* poderia ser projetado por inversão a partir de *subconjuntos* de tricordes diferentes. Desta constatação desenvolvemos uma grande estrutura relacionando diversas classes de conjuntos, incluindo grupos de alturas de cardinalidades diferentes, que chamaremos neste trabalho de *rede de projeções por inversão*. Este sistema desenvolvido destacou a existência de um grande padrão de proporção bilateral relacionando diversos conjuntos em torno de um mesmo alinhamento transversal, revelando a presença de dimensão simétrica inerente ao próprio sistema de doze alturas como um todo. Desenvolvemos assim uma proposta concorrente que elenca uma possibilidade de interação entre conjuntos de diferentes cardinalidades, demanda não prevista pelos estudos neorriemannianos que gravitam em torno das propostas de Richard Cohn e Tymoczko. Lembramos que esta outra corrente, também conhecida como *teoria transformacional*, propõe a construção de redes de grupos de alturas de mesma cardinalidade avizinados pela maior coincidência de alturas em comum entre si e um movimento intervalar mínimo (semitom) na transição entre estes conjuntos, aproximação conhecida por estudiosos adeptos a esta vertente como “máxima parcimônia”. O resultado desta outra proposta são redes que combinam transposições e inversões de conjuntos com um mesmo número de alturas, ou seja, tricordes e tetracordes não estão presentes em um mesmo sistema de “transformações”. Em suma, nos estudos apresentados por Cohn e Tymoczko são emblemáticos dois sistemas autônomos e não diretamente correlacionados: a “dança dos cubos” para o relacionamento exclusivo entre tricordes (Card3), prioritariamente transposições e inversões do conjunto 3-11 (acordes Maior e menor) interligadas por tríades aumentadas (conjunto 3-12); e as “torres” de tetracordes como suporte para conjuntos com quatro alturas (Card4), prioritariamente transposições e inversões do conjunto 4-27 (acorde Maior 7 e meio diminuto) (COHN, 2012), incluindo ainda os tetracordes 4-26 e 4-28.

Outro caminho neste trabalho para o desenvolvimento de *Tonnetze* não convencionais foi a formação de redes de alturas a partir de conglomerados de

ciclos intervalares em cruzamentos transversais, trabalhando em paralelo com os conceitos de “redes harmônicas” de Henri Pousseur ([1968], 2009) e a teoria de George Perle (1977). A partir destas formulações propomos uma expansão de modelos emblemáticos da teoria neorriemanniana como a rede de alturas com o tetracorde 4-20 em Euler e o *Tonnetz* tridimensional de Gollin (1998).

(d) Organização do texto: conteúdo dos capítulos

O texto desta tese foi desenvolvido e organizado em três capítulos, reservadas a cada espaço o seguinte conteúdo:

Capítulo 1: Rede de projeções por inversão

Nesta seção faremos reflexões sobre a simetria intervalar a partir de ferramentas da *teoria dos grupos* – segmento matemático dedicado ao estudo de relações simétricas, utilizando estruturas algébricas chamadas de matrizes de soma (ou multiplicação) – seguindo de perto a hipótese levantada por Robert Morris (2007), supondo um contexto comum implícito entre diferentes abordagens teóricas sobre a música pós-tonal. A seguir trabalharemos com o *Tonnetz* convencional, ampliando a construção de redes de alturas a partir de diversas classes de conjuntos, explorando inversões de outros tricordes além do recorrente conjunto 3-11 (acorde maior e menor). Considerando as invariâncias entre conjuntos projetados a partir destas inversões, identificamos uma grande estrutura espelhada envolvendo diversos grupos intervalares orientados em torno de um eixo transversal, sistema que chamamos neste trabalho de *rede de projeções por inversão*. Analisando esta extensa estrutura, identificamos outras correspondências que reafirmação a dimensão simétrica deste sistema, como o caso de conjuntos correlacionados por multiplicação pelos fatores M_5 e M_7 , e invariâncias entre entradas de vetores intervalares (RAHN, 1980; OLIVEIRA, 2007). A seguir fomos ampliando esta *rede de projeções por inversão* com a inclusão de novos conjuntos, seguindo o mesmo critério de construção desta estrutura, elaborando outras perspectivas desta rede e constatando a infinidade deste sistema.

Capítulo 2: *Tonnetze* de tetracordes

Aqui tratamos de especulações sobre diferentes aplicações para o *Tonnetz* com tetracordes simétricos, partindo da rede de alturas proposta por Euler, seguindo para o *Tonnetz* tridimensional estudado por Gollin (1998). Neste capítulo trabalharemos a partir do conceito de “redes harmônicas” de Henri Pousseur ([1968], 2009), concomitante aos estudos desenvolvidos por George Perle (1977) sobre ciclos intervalares, partindo da relação entre os ciclos C1 *versus* C5 e seguindo para interação entre outras sequências de intervalos. Os desdobramentos destas especulações alcançaram o conceito de “multiplicação” proposto por Pierre Boulez (1986), que recorria à interação entre pares de grupos de alturas concatenados em matrizes de soma (um conceito diferente da apresentada no primeiro capítulo em torno de John Rahn (1980) e João Oliveira (2007), que previa apenas o resultado de multiplicação dos membros de um conjunto por um fator único), a “combinação transpositiva” de Richard Cohn (1988) e a relação entre famílias de ciclos desenvolvido por Gretchen Foley (1998), uma pesquisadora que deu continuidade aos estudos de George Perle (1977). Temos neste capítulo uma continuação do assunto trabalhado no capítulo anterior sobre complementaridade entre as regiões C1 e C5.

Seguindo para segunda parte deste capítulo, trataremos em detalhes sobre a construção de *Tonnetze* bidimensionais, a partir do esquema com o tetracorde 4-20 atribuído a Euler; e tridimensionais, partindo de uma reinterpretação da proposta de Gollin (1998) para o acorde Dó Maior 7 (conjunto 4-27), apresentando as possibilidades de construções de “cubos de alturas” a partir de octacordes simétricos. Essas matrizes de quatro alturas podem ser desdobradas para a construção de qualquer *Tonnetz* bidimensional e podem ser previstas a partir de intersecções perpendiculares (90°) entre dois ciclos intervalares distintos, possibilidades que foram todas mapeadas neste estudo. Seguindo a mesma proposta, fizemos a previsão de todos o *Tonnetze* tridimensionais para octacordes simétricos, mapeando também todas as possibilidades de intersecções perpendiculares (90°) entre três ciclos intervalares distintos. Surgem destas investigações algumas formações interessantes, com destaque para as três versões de “cubos octatônicos” (conjunto 8-28) e o “cubo diatônico” (conjunto 7-35).

Capítulo 3: Simetria na música pós-tonal

Neste momento selecionamos um apanhado de diversos trechos de obras envolvidas por aspectos harmônicos pós-tonais, apresentando algumas possibilidades de aplicação das ferramentas teóricas desenvolvidas nos primeiros capítulos. Passaremos por obras expressionistas de Schoenberg, exemplos do dodecafonismo presente em músicas de Webern, apontando para o uso da simetria em um contexto mais rígido e direcionado a contextos previamente delimitados. Seguiremos para constatação de dimensões proporcionais entre classes de alturas na música de Varèse, Villa-Lobos e Bartók, apontando para um contexto mais amplo no uso da simetria intervalar, mostrando como estes compositores se desprenderam de uma restrição localizada e alinharam suas obras a uma *meta-simetria* transversal que aparentemente rege grande parte do sistema cromático, parâmetro averiguado na construção da *rede de projeções por inversão*. Também abrimos espaço para apresentação de uma análise do início da canção *Chovendo na Roseira* de Tom Jobim, demonstrando como a simetria intervalar extrapola o universo modernista do início do século XX e alcança o contexto da manifestação popular em momento posterior, destacando também como este músico da Bossa Nova se afirmou como depositário da herança deixada por Villa-Lobos.

Seguimos para a aplicação da rede de projeções por inversão em um contexto mais amplo, contemplando perfis harmônicos de compositores vanguardistas a partir de uma quantidade significativa de amostras musicais. Reconhecendo a impossibilidade de definição de um perfil harmônico mais preciso a partir da quantidade mínima de amostras musicais avaliadas neste trabalho, recorreremos ao relevante corpo de estudos de outro pesquisador: Joseph Straus (2014) e suas análises de trechos das obras do período russo de Stravinsky.

No último segmento deste capítulo, seguimos para análise de alguns trechos do primeiro movimento da *Sinfonia nº7* (1945) de Heitor Villa-Lobos, observando essencialmente a presença de proporções simétricas entre grupos de alturas regendo a organização harmônica nesta música, justificando a utilização de algumas das ferramentas desenvolvidas neste trabalho para o contexto de obras pós-tonais.

1. REDE DE PROJEÇÕES POR INVERSÃO

1.1. Apontamentos entre *teoria dos grupos* e *teoria neorriemanniana*

O estudo e aplicação de estruturas intervalares regidas por parâmetros simétricos destaca-se como ferramenta composicional recorrente em obras pós-tonais de músicos de vanguarda no início do século XX, como apontam alguns pesquisadores como Antokoletz (2006) e Straus (2005). Trabalhos como os de Van den Toorn e John McGinness (2015) sobre o período russo de Stravinsky, Antokoletz (2006) sobre as obras de Béla Bartók e Paulo de Tarso Salles (2009) sobre músicas de Villa-Lobos são alguns exemplos que demonstram esta constatação. As simetrias entre grupos de alturas são equivalentes, em termos de função estrutural, às convencionais escalas utilizadas em obras tonais da prática comum⁴. Uma forma satisfatória de representar as constituições intervalares proporcionais é através de uma figura analógica similar a um mostrador de relógio (*clockface*), equiparando as alturas da escala cromática aos números de 0 a 11 (teoria dos conjuntos) organizadas em círculo (Fig.1.1 – 1), partindo de Dó=0, Dó#/Réb=1, Ré=2, Ré#/Mib=3 e assim por diante (Tab.1.1 – 1), prescindindo de posições de oitavas (STRAUS, 2005: 6; 85-96; 133-44).

Dó=0	Dó#/Réb=1	Ré=2	Mib/Ré#=3	Mi=4	Fá=5
Solb/Fá#=6	Sol=7	Láb/Sol#=8	Lá=9	Sib/Lá#=10	Si=11

Tab.1.1 - 1: Ordem das classes de altura

⁴ Utilizaremos o termo “coleção” em vez de “escala” como nomenclatura para os conjuntos 6-35 (coleção de tons inteiros), 7-34 (coleção acústica), 7-35 (coleção diatônica) e 8-28 (coleção octatônica). Reservaremos o termo “escala” apenas para o conjunto 12-1 (escala cromática). Desta forma procuramos evitar conotações que façam referência ao convencional uso destas estruturas no sistema tonal (prática comum).

Fig.1.1 - 1: *Clockface* (STRAUS, 2005)

A observação de conjuntos de notas no *clockface* proposto por Straus (2005) se aproxima significativamente ao uso do dodecágono (Fig.1.1 – 3) utilizado por João Pedro Oliveira (2007) e do *musical clock* (Fig.1.1 – 2) de Thomas M. Fiore (2010), todas abstrações similares utilizadas para fins comuns no estudo de obras pós-tonais, iniciativas baseadas em um princípio de representação geométrica de estruturas intervalares colocadas em um plano analógico bidimensional.

Fig.1.1 - 2: *Musical clock* (FIORE, 2010)

Fig.1.1 - 3: Dodecágono (OLIVEIRA, 2007)

Inserindo neste mostrador as alturas referentes a coleção Dó diatônica (conjunto 7-35, Card7)⁵, podemos observar como esta estrutura é simétrica por reflexão quando ordenada de acordo com o modo dórico (Fig.1.1 – 4), orientada em torno de um eixo que parte da altura Ré [2] e vai alinhando as demais notas em pares distantes proporcionalmente deste ponto inicial – Dó/Mi ([0||4]), Si/Fá ([11||5]), alcançando a dupla de alturas mais distante Sol/Lá ([7||9]). Todos estes pares de alturas orientados por Ré [2] também estão alinhados em torno de Lá [8], que está na outra extremidade do eixo, embora esta não pertença à coleção Dó diatônica.

⁵ Neste trabalho utilizaremos a tabela de Allen Forte que estabelece uma lista de classes de conjuntos de alturas (considerando a versão ampliada da tabela Forte proposta por Larry Solomon (2005)), seguindo aqui parâmetros de análise pertinentes à Teoria dos Conjuntos. Trataremos por cardinalidade “n” o número de itens recorrentes em um determinado grupo de alturas (por exemplo, cardinalidade sete para uma coleção com sete posições). Utilizaremos a abreviação Card “n” e a nomenclatura Card “n” x (*versus*) Card “n” para nos referirmos a inter-relação entre dois grupos de alturas específicos (por exemplo, Card4 x Card4, fazendo referência a dois conjuntos de quatro entradas).

Fig.1.1 - 4: Coleção Dó diatônica (“notas brancas”), eixo soma 4 (Ré–Láb)

Verificamos então que a coleção Dó diatônica é uma estrutura simétrica em torno do eixo Ré–Láb que une as duas alturas distantes por trítono. Identificaremos esta mediatriz como eixo soma 4, considerando que as somatórias entre cada um dos pares de alturas alinhados em torno deste eixo resultam neste valor (Tab.1.1 - 2), seguindo aqui a nomenclatura utilizada por Antokoletz (2006: 88) e Straus (2005: 138)⁶.

$\text{Ré } 2 + \text{Ré } 2 = 4$
$\text{Dó } 0 + \text{Mi } 4 = 4$
$\text{Si } 11 + \text{Fá } 5 = 16 (-12) = 4$
$\text{Lá } 9 + \text{Sol } 7 = 16 (-12) = 4$

Tab.1.1 - 2: Dó diatônica: pares de alturas em torno do eixo Ré–Láb, soma 4

Interessante perceber que o conjunto de alturas complementar⁷ à coleção Dó diatônica, uma pentatônica 5-35 (Card5) que se refere às alturas correspondentes às teclas pretas do piano, também é simétrico em torno deste mesmo eixo soma 4 (Ré–Láb) (Tab.1.1 – 3). Isso mostra que, além da relação de complementaridade, existe invariância de eixos de simetria entre as duas estruturas (Fig.1.1 – 5).

⁶ Segundo estes autores, são possíveis doze eixos diferentes de simetria intervalar por reflexão, representados por somas que vão do 0 a 11.

⁷ Dois conjuntos são complementares quando se completam na totalidade cromática ao serem sobrepostos. Sobre a relação entre conjuntos complementares ver STRAUS, 2005: 93-96.

Fig.1.1 - 5: Pentatônica 5-35 (“notas pretas”) e Dó diatônica (“notas brancas”): eixo soma 4 (Ré–Láb) invariante.

$\text{Láb } 8 + \text{Láb } 8 = 16 (-12) = 4$
$\text{Sib } 10 + \text{Fá\# } 6 = 16 (-12) = 4$
$\text{Réb } 1 + \text{Mib } 3 = 4$

Tab.1.1 - 3: “Notas pretas”: pares de alturas em torno do eixo Ré–Láb, soma 4

Tal oposição entre as alturas que representam teclas pretas e brancas do piano foi um recurso amplamente utilizado por Villa-Lobos em suas obras (SOUZA LIMA, 1969; OLIVEIRA, 1984; DUARTE, 2009; SALLES, 2009), o que denota a consciência do compositor em relação a este eixo comum entre as duas estruturas (“notas pretas” *versus* “notas brancas”), demonstrada superficialmente com o destaque dado pelo prolongamento das alturas Ré e Láb (polaridades do eixo soma 4) em trechos em que esta oposição é recorrente, concatenando assim eixos invariantes de simetria intervalar e centralidade por reiteração (ALBUQUERQUE, 2014; 2015). Um exemplo desta aplicação é apresentado a seguir (Fig.1.1 – 6), onde temos um trecho dos *Choros nº2* (1924) onde é evidente o destaque melódico das notas Ré no clarinete e Láb na flauta, concomitante à estratificação entre “notas pretas” e “brancas”⁸.

⁸ Apresentamos mais detalhes sobre a recorrência à simetria intervalar no *Choros nº2* em nosso artigo “Análise estrutural do *Choros nº2* de Heitor Villa-Lobos” (ALBUQUERQUE, 2015).

Fig.1.1 - 6: “Notas pretas” x “notas brancas”: *Choros nº2* de Villa-Lobos, c.6-9

A coleção Dó diatônica também pode ser relacionada por invariância de eixo com Fá# diatônica (Fig.1.1 – 7), esta última também simétrica em torno do eixo soma 4 (Ré–Láb), neste caso dois conjuntos 7-35, distantes por classe de transposição⁹ T_6 e classe de inversão T_{2I} , duas estruturas com cardinalidade de sete entradas ($Card7 \times Card7$). Interessante notar que Dó diatônica e Fá# diatônica mantêm duas notas comuns; diferente da relação entre “notas brancas” e “pretas” vista anteriormente, que são coleções complementares (conjuntos 7-35 e 5-35) e, por isso, não apresentam alturas invariantes. Estas duas notas em comum – Fá e Si – formam um segundo eixo soma 10, perpendicular ao eixo soma 4 que relaciona as duas estruturas diatônicas. Em torno deste eixo Fá–Si é possível transformar a coleção Dó em Fá# diatônica por classe de inversão T_{2I} .

⁹ Identificaremos a distância intervalar entre dois grupos de alturas de mesma classe de conjunto pela nomenclatura “ T_n ” para transposição simples e “ T_{nI} ” para transposição com inversão, sendo “ n ” a classe de intervalo entre as duas estruturas comparadas (STRAUS, 2005).

Fig.1.1 - 7: Dó dia x Fá# dia: inversão T_{2I} em torno do eixo Fá–Si

No início do *Choros nº7* (1924), Villa-Lobos demonstra estar consciente da relação de inversão entre as coleções diatônicas de Dó e Fá#, explorando o eixo perpendicular Fá–Si (Fig.1.1 – 8). O compositor sobrepõe estas duas coleções em camadas estratificadas e destaca umas das extremidades desta mediatriz soma 10 – a altura Fá – como um pedal sustentado na voz do violino deste o início do trecho.

The musical score is for the beginning of *Choros nº7* by Villa-Lobos. It is in 2/4 time and marked 'Lento' (♩ = 66). The score features a violin (vln.) part in the upper register, marked 'mf', and a cello (cello.) part in the lower register, marked 'p'. The violin part is divided into two sections: 'Lento' and 'Em movto'. The cello part is marked 'p' and features a sustained pedal point on the F# note. The score is labeled 'Fá# diatônica' at the bottom.

The image displays a musical score for the beginning of *Choros nº7* by Villa-Lobos. The score is divided into two main sections, each enclosed in a colored box. The top section, labeled 'Dó diatônica' in blue, features a flute (fl.) part starting at measure 4 (c.4) with a forte (f) dynamic. The bottom section, labeled 'Fá# diatônica' in orange, includes parts for violin (vln.), clarinet (cln.), viola (vlc.), and fagot (fgt.). The violin part consists of a series of eighth-note patterns. The clarinet and viola parts have a long, sustained note. The fagot part begins with a piano (p) dynamic. The score is written in 5/4 time and includes various musical notations such as slurs, ties, and dynamic markings.

Fig.1.1 - 8: Dó dia x Fá# dia: Início do *Choros nº7* de Villa-Lobos

Villa-Lobos também utilizou outras maneiras de relacionar coleções diatônicas por eixos perpendiculares, como podemos perceber em um trecho do *Choros nº2* (c.36-39) (Fig.1.1 – 9). Aqui podemos destacar a sobreposição em camadas estratificadas das coleções Dó diatônica (clarinete) e Lá diatônica (flauta) – distantes em classe de transposição T_3 e classe de inversão T_4I (Fig.1.1 – 10), duas estruturas com cardinalidade de sete posições (Card7 x Card7) – novamente trabalhando com a interseção entre os eixos perpendiculares Ré–Láb (soma 4) e Fá–Si (soma 10), duas mediatrizes muito recorrentes na obra do compositor.

The image shows a musical score for Choros nº2 de Villa-Lobos, measures 36-39. The score is for Flute (Fl.), Clarinet (Cl.), and Cello (C). It shows two systems of music. The first system (measures 36-37) features a Flute part with triplets and a Clarinet/Cello part with a melodic line. The second system (measures 38-39) features a Flute part with a melodic line and a Clarinet/Cello part with a melodic line. The score includes dynamic markings such as *ff*, *mf*, *cresc.*, and *rf*.

Fig.1.1 - 9: Dó dia x Lá dia: *Choros nº2* de Villa-Lobos, c.36-39

Fig.1.1 - 10: Dó dia x Lá dia: transposição T_3 e perpendicularidade dos eixos Fá-Si e Ré-Láb

Outras construções escalares também apresentam propriedades simétricas, como podemos verificar na representação no *clockface* (Fig.1.1 – 11) das coleções de tons inteiros (6-35, Card6), octatônica (8-28, Card8) e acústica (7-34, Card7). Assim como a diatônica, a coleção acústica apresenta apenas uma opção de alinhamento de todas as alturas de sua estrutura em torno de um mesmo eixo, diferente das outras duas estruturas, que apresentam mais de uma possibilidade de simetria entre todos os itens da coleção: tons inteiros com seis eixos e a coleção octatônica com quatro opções.

Fig.1.1 - 11: Simetrias inerentes às coleções diatônica, tons-inteiros, acústica e octatônica

Seguindo esta busca por simetrias intervalares, colocamos as notas referentes a uma tríade de Dó Maior (conjunto 3-11) no *clockface* (Fig.1.1 – 12) e observamos que esta estrutura não permite que seu grupo completo de alturas (Card3) se alinhe em pares equidistantes de um mesmo eixo intervalar. No entanto, notamos que é possível encontrar subgrupos de pares de alturas (Card2) e notas isoladas (Card1) alinhadas em torno de eixos distintos (Fig.1.1 – 13 e Fig.1.1 – 14). Temos assim um acorde de Dó Maior que é assimétrico em sua totalidade, mas que possui subconjuntos possíveis de serem pautados por simetrias em esferas subjacentes: três pares de notas (Card2) e três alturas isoladas (Card1).

Fig.1.1 - 12: Acorde Dó Maior (3-11), assimétrico

Fig.1.1 - 13: Subconjuntos simétricos do acorde Dó Maior, três pares de alturas (Card2)

Fig.1.1 - 14: Subconjuntos simétricos do acorde Dó Maior, três notas isoladas (Card1)

Com isso concluímos que não existe apenas *uma* simetria única, mas *várias* simetrias distintas regendo diferentes níveis de abrangência dentro de um mesmo grupo, ainda que este conjunto de notas seja assimétrico em sua totalidade. Sobre isto o matemático Ian Stewart afirma: “a palavra “simetria” deve ser reinterpretada como “*uma* simetria”. Objetos não apresentam só uma simetria; em geral apresentam diferentes simetrias” (2012: 144).

Outra forma de observarmos estes padrões proporcionais entre classes de alturas é através de matrizes de soma, similares as “matrizes de invariância” de Robert Morris (2007), inspirados aqui em ferramentas oriundas da *teoria dos grupos*, procedimento de estudo da álgebra que surgiu no campo da matemática a fim de calcular de forma objetiva os fenômenos simétricos e que alcançou áreas da física como a mecânica quântica e a cristalografia. Tais parâmetros matemáticos haviam sido inicialmente contemplados pela teoria neorriemanniana tradicional (Lewin e Hyer), aparecendo com certa frequência em forma de esboços de matrizes de soma em trabalhos do teórico e matemático David Lewin (1982), talvez um reflexo da utilização desta ferramenta em textos da década de 1960 de seu professor, o compositor e também matemático Milton Babbitt (1960; 1961). A recorrência à teoria dos grupos nos estudos de Lewin era algo reconhecido entre seus pares, como destaca Tymoczko (2009), mas parece que permaneceu menos evidente em textos da subsequente teoria transformacional (Cohn e Tymoczko) – esta outra mais dedicada ao trabalho com relações entre grupos de alturas de mesma cardinalidade relacionados por uma maior quantidade de notas em comum e um menor número de variantes caminhando por movimentos de intervalos de tom e semitom. Talvez uma exceção sejam as matrizes de soma utilizadas por Cohn em seu estudo sobre “combinação transpositiva” (1988), uma ferramenta aparentemente equivalente ao processo de multiplicação entre classes de alturas proposto por Boulez ([1986], 2011: 78-79), segundo Jason Yust (2015: 210) e Ciro Scotto (2014).

Seguimos aqui as observações feitas por Robert Morris em seu artigo “Mathematics and the Twelve-Tone System: Past, Present, and Future” (2007) onde sugere que a teoria dos conjuntos e a teoria neorriemanniana são ambas reflexões modeladas a partir de uma mesma plataforma matemática, e não devem ser tratadas como mecanismos estruturais distintos e desconexos (MORRIS, 2007: 77). O autor defende que estas diferentes abordagens teórico-musicais que buscam compreender a aplicação da música de doze classes de altura – teoria dos conjuntos (Forte), teoria dos ciclos intervalares (Perle) e teoria neorriemanniana (Lewin) – podem ser alinhadas em torno de um mesmo princípio teórico, demonstrável através de ferramentas oriundas da teoria dos grupos, campo da matemática e da física dedicado ao estudo da simetria. Mais adiante Robert Morris (2007: 97) afirma:

Em qualquer caso, nossa compreensão do sistema de doze tons é tão geral para que dividir o tópico em teoria dos conjuntos (à la Forte), ciclos (à la Perle) e transformações (à la Lewin) não é mais viável. Se houver quaisquer diferenças entre estas três orientações para o sistema é devido às aplicações.

Além disso, quando se tornou óbvio que a teoria serial foi realmente uma aplicação da teoria do grupo, a pesquisa se deslocou da modelagem serialista na composição e análise para outros aspectos da música que envolveram simetria. David Lewin (1987) trabalhou no *General Interval Systems* (GIS) e as redes de transformação representam esta mudança de orientação. Assim, o desenvolvimento do sistema de doze sons tem sido tão estendido e ramificado que não há mais a necessidade de distinguir esta linha de trabalho de outros ramos matematicamente informados da teoria (MORRIS, 2007: 97).

Morris (2007) explica que estes diversos sistemas teóricos dizem respeito a um campo comum que busca mapear, no universo de doze sons, tipos específicos de transformações intervalares que ocasionam um maior número de invariâncias, parâmetros que começaram a ser compreendidos a partir dos estudos de Babbitt (década de 1960). Estes propósitos acabam se alinhando em torno do princípio geométrico de transformação de um objeto em sua imagem sem modificação de sua estrutura, conceito que a matemática reconhece como simetria. De um ponto de vista matemático, Ian Stewart (2012: 144) explica: “O que é, então, uma simetria? Uma simetria de um objeto matemático é uma transformação que preserva a estrutura do objeto”. E ainda completa um pouco mais adiante: “Existem três palavras-chave na definição de uma simetria: “transformação”, “estrutura” e “preservação”” (STEWATT, 2012: 145).

Oliveira (2007: 93), em suas “matrizes de transposição” (assim como Morris (2007) em suas “matrizes de invariância”), também busca nas “somas entre os diferentes elementos de um conjunto” de alturas identificar uma “totalidade de invariâncias em TnI” (OLIVEIRA, 2007: 93)¹⁰. Ou seja, ambos procuram propriedades inerentes a conjuntos de alturas (“estrutura”) que possibilitem que estes possam ser “transformados” em imagens idênticas ou similares, “preservando” um máximo número de elementos reiterados. Em suma, tratando de uma equivalência entre os conceitos matemático e musical, o

¹⁰ Aliás, um procedimento muito similar às matrizes de soma utilizadas por Cohn em seu estudo sobre “combinação transpositiva” (1988).

desencadeamento de padrões simétricos entre grupos de alturas é decorrente da manutenção de invariâncias em processos de transformação de estruturas intervalares originais em reproduções iguais ou semelhantes.

De volta à coleção Dó diatônica, colocamos as alturas desta estrutura repetidas em duas colunas (Tab.1.1 – 4), uma vertical e outra horizontal (Card7 x Card7), somamos todos os pares de notas possíveis e os resultados reunimos em uma matriz de soma. Nesta planilha podemos verificar todas as possibilidades de somas de pares de alturas em uma coleção Dó diatônica, destacando que apenas a soma 4 aparece em todos os níveis de linhas e colunas alinhando a totalidade de classes de altura desta estrutura.

(+)	Dó (0)	Ré (2)	Mi (4)	Fá (5)	Sol (7)	Lá (9)	Si (11)
Dó (0)	0	2	4	5	7	9	11
Ré (2)	2	4	6	7	9	11	1
Mi (4)	4	6	8	9	11	1	3
Fá (5)	5	7	9	10	0	2	4
Sol (7)	7	9	11	0	2	4	6
Lá (9)	9	11	1	2	4	6	8
Si (11)	11	1	3	4	6	8	10

Tab.1.1 - 4: Matriz de soma para a coleção Dó diatônica, invariância da soma 4

No entanto, podemos observar a presença de outros grupos de pares de soma que formam subconjuntos simétricos implícitos dentro do grupo maior (reforçando o argumento de que não existe *uma* única simetria orientando um conjunto em sua totalidade, mas também estão implícitas várias simetrias relacionando grupos e subgrupos de alturas de diversas extensões). Reagrupando estas somas de pares em torno dos seus respectivos eixos de soma em uma nova tabela (Tab.1.1 – 5), é possível perceber de forma mais objetiva todos os subconjuntos simétricos presentes em uma coleção Dó diatônica, inclusive a totalidade simétrica em torno do eixo 4, cada qual orientada por seu respectivo eixo de simetria.

Eixos de soma	Pares de alturas alinhados				Subconjuntos
0	0 / 0	5 / 7			3-9
1	2 / 11	4 / 9			4-23
2	0 / 2	5 / 9	7 / 7		5-35
3	4 / 11				2-5
4	0 / 4	2 / 2	5 / 11	7 / 9	7-35
5	0 / 5				2-5
6	2 / 4	7 / 11	9 / 9		5-35
7	0 / 7	2 / 5			4-23
8	4 / 4	9 / 11			3-9
9	0 / 9	2 / 7	4 / 5		6-32
10	5 / 5	11 / 11			2-6
11	0 / 11	2 / 9	4 / 7		6-32

Tab.1.1 - 5: Subconjuntos simétricos implícitos na coleção Dó diatônica e respectivos eixos

Podemos conferir analogicamente estes pares de alturas de mesmo eixo de soma que formam os subconjuntos simétricos implícitos na coleção Dó diatônica, apresentados em seus respectivos mostradores de relógio (Fig.1.1 – 15).

Fig.1.1 - 15: Subconjuntos simétricos implícitos na coleção Dó diatônica e respectivos eixos

Seguimos para a utilização destas matrizes provenientes da teoria dos grupos aplicadas agora na verificação de possibilidades de simetria nas coleções acústica (conjunto 7-34, Card7 x Card7), tons inteiros (conjunto 6-35, Card6 x Card6) e octatônica (conjunto 8-28, Card8 x Card8). Assim como fizemos com a coleção Dó diatônica, colocamos as alturas destas outras estruturas repetidas em duas colunas, uma vertical e outra horizontal, somando todos os pares de notas possíveis e os resultados reunidos em uma tabela de soma (Tab.1.1 – 6).

Para a coleção de tons inteiros (conjunto 6-35, Card6 x Card6) temos seis possibilidades de somas que alinham todas as alturas da estrutura. No entanto, não temos subconjuntos simétricos em torno dos demais seis eixos de soma (Tab.1.1 – 7).

(+)	Dó (0)	Ré (2)	Mi (4)	Fá# (6)	Láb (8)	Sib (10)
Dó (0)	0	2	4	6	8	10
Ré (2)	2	4	6	8	10	0
Mi (4)	4	6	8	10	0	2
Fá# (6)	6	8	10	0	2	4
Láb (8)	8	10	0	2	4	6
Sib (10)	10	0	2	4	6	8

Tab.1.1 - 6: Matriz de soma para a coleção tons inteiros

Eixos de soma	Pares de alturas alinhados				Subconjuntos
0	0 / 0	2 / 10	4 / 8	6 / 6	6-35
1					—
2	0 / 2	4 / 10	6 / 8		6-35
3					—
4	0 / 4	2 / 2	8 / 8	6 / 10	6-35
5					—
6	0 / 6	2 / 4	8 / 10		6-35
7					—
8	0 / 8	2 / 6	4 / 4	10 / 10	6-35
9					—
10	0 / 10	2 / 8	4 / 6		6-35
11					—

Tab.1.1 - 7: Subconjuntos simétricos implícitos na coleção tons inteiros e respectivos eixos

Para a coleção octatônica (conjunto 8-28, Card8 x Card8) temos quatro opções de eixos de soma que alinham todas as alturas da estrutura (Tab.1.1 – 8 e Tab.1.1 – 9). Neste exemplo, verificamos os eixos de soma 2, 5, 8 e 11. Para os demais oito eixos de soma temos tetracordes simétricos como subconjuntos implícitos, que se resumem a apenas duas variedades do conjunto 4-28, que corresponde à téttrade diminuta: neste caso, [0, 3, 6, 9] e [2, 5, 8, 11].

(+)	Dó (0)	Ré (2)	Mib (3)	Fá (5)	Fá# (6)	Láb (8)	Lá (9)	Si (11)
Dó (0)	0	2	3	5	6	8	9	11
Ré (2)	2	4	5	7	8	10	11	1
Mib (3)	3	5	6	8	9	11	0	2
Fá (5)	5	7	8	10	11	1	2	4
Fá# (6)	6	8	9	11	0	2	3	5
Láb (8)	8	10	11	1	2	4	5	7
Lá (9)	9	11	0	2	3	5	6	8
Si (11)	11	1	2	4	5	7	8	10

Tab.1.1 - 8: Matriz de soma para a coleção octatônica

Eixos de soma	Pares de alturas alinhados				Subconjuntos
0	0 / 0	3 / 9	6 / 6		4-28
1	2 / 11	5 / 8			4-28
2	0 / 2	3 / 11	5 / 9	6 / 8	8-28
3	0 / 3	6 / 9			4-28
4	5 / 11	2 / 2	8 / 8		4-28
5	0 / 5	2 / 3	6 / 11	8 / 9	8-28
6	0 / 6	3 / 3	9 / 9		4-28
7	2 / 5	8 / 11			4-28
8	0 / 8	2 / 6	3 / 5	9 / 11	8-28
9	0 / 9	3 / 6			4-28
10	2 / 8	5 / 5	11 / 11		4-28
11	0 / 11	2 / 9	3 / 8	5 / 6	8-28

Tab.1.1 - 9: Subconjuntos simétricos implícitos na coleção octatônica e respectivos eixos

No caso da coleção acústica (conjunto 7-34, Card7 x Card7), assim como também verificamos na coleção diatônica, esta pode ser alinhada em torno de

um único eixo de soma, como mostra a tabela de somas possíveis entre todos os pares de alturas desta estrutura (Tab.1.1 – 10 e Tab.1.1 – 11). Neste exemplo, temos um eixo soma 4 para Dó acústica.

(+)	Dó (0)	Ré (2)	Mi (4)	Fá# (6)	Sol (7)	Lá (9)	Sib (10)
Dó (0)	0	2	4	6	7	9	10
Ré (2)	2	4	6	8	9	11	0
Mi (4)	4	6	8	10	11	1	2
Fá# (6)	6	8	10	0	1	3	4
Sol (7)	7	9	11	1	2	4	5
Lá (9)	9	11	1	3	4	6	7
Sib (10)	10	0	2	4	5	7	8

Tab.1.1 - 10: Matriz de soma para a coleção Dó acústica

Eixos de soma	Pares de alturas alinhados				Subconjuntos
0	0 / 0	2 / 10	6 / 6		4-24
1	4 / 9	6 / 7			4-10
2	0 / 2	4 / 10	7 / 7		5-34
3	6 / 9				2-3
4	0 / 4	2 / 2	6 / 10	7 / 9	7-34
5	7 / 10				2-3
6	0 / 6	2 / 4	9 / 9		5-34
7	0 / 7	9 / 10			4-10
8	2 / 6	4 / 4	10 / 10		4-24
9	0 / 9	2 / 7			4-23
10	0 / 10	4 / 6			4-25
11	2 / 9	4 / 7			4-23

Tab.1.1 - 11: Subconjuntos simétricos implícitos na coleção Dó acústica e respectivos eixos

1.2. Rede de projeções por inversão, *Tonnetze* de tricordes

Retomando a afirmação do matemático Ian Stewart (2012: 144) de que não devemos tomar a simetria como uma propriedade singular, totalitária – *uma* única simetria – consideramos que existe uma pluralidade de simetrias inerentes a um mesmo grupo de alturas, que surgem de acordo com as diversas perspectivas que podemos revelar de um determinado contexto. Com isso constatamos que simetria e assimetria não são propriedades estanques e estratificadas, pelo contrário, são disposições interdependentes em que mesmo estruturas assimétricas em sua totalidade apresentam subconjuntos individualmente simétricos. Do mesmo modo, percebemos que conjuntos de notas não simétricos podem ser complementados com alturas adicionais e transformados em estruturas maiores e simétricas em sua totalidade. Com isso, notamos que a mudança de cardinalidade entre grupos de alturas é um fator fundamental que destacaremos a seguir para entendermos esta inter-relação entre estruturas intervalares simétricas e assimétricas, disposições muito recorrentes no universo musical, destacadamente consideradas em práticas composicionais de obras vanguardistas do início do século XX.

O resultado desta nossa investigação é a construção de uma rede de conexões entre conjuntos de diferentes espécies e diferentes cardinalidades – que chamaremos neste trabalho de *rede de projeções por inversão* – relacionados a partir de subconjuntos simétricos implícitos e conjuntos maiores projetados por inversão e adição de alturas complementares em torno de invariantes somas de eixos de simetria por reflexão. Partiremos a princípio da relação entre tricordes e tetracordes e mostraremos a possibilidade de expansão deste sistema proposto para a inclusão de estruturas maiores. Dentro desta primeira perspectiva para a construção da rede de projeções por inversão, apontaremos caminhos de discussão sobre a problemática presente em propostas de pesquisas neorriemannianas tradicionais que apenas tratam da construção de sistemas que relacionam transposições e inversões de uma mesma classe de conjunto ou pautam sobre redes de grupos de alturas com a mesma cardinalidade¹¹. Outro interesse aqui é a busca de sistemas de

¹¹ Tomamos como referência as redes transformacionais entre “cubos” de inversões e transposições do conjunto 3-11 (tríade Maior e menor), relacionados por tricordes do conjunto 3-

organização harmônica que relacionem classes de conjuntos de toda espécie, incluindo também estruturas intervalares não convencionais, indo além das tradicionais tríades e tétrades previstas nas redes transformacionais da teoria neorriemanniana, e assim construir uma proposta de pesquisa que seja satisfatória para a análise e compreensão de procedimentos composicionais pertinentes ao repertório da música pós-tonal vanguardista do início do século XX e obras afins, entre os quais incluímos Villa-Lobos.

Na segunda metade deste trabalho, mostraremos outro modelo da rede de projeções por inversão, agora a partir da perspectiva dos tetracordes que formam a “constelação Morris” (SALLMEN, 2011) – os conjuntos 4-12, 4-13, 4-18 e 4-27 – junto aos conjuntos 4-z15 e 4-z29. Apresentaremos assim duas possibilidades de construções deste sistema a partir de diferentes sequências de desdobramentos de grupos de alturas, mas ainda não esgotando todos os caminhos possíveis para a rede de projeções por inversão, que provavelmente levam à inclusão de todas as classes de conjunto previstas no sistema de doze alturas.

1.2.1. Projeções de tetracordes simétricos

Agora aplicaremos a matriz de soma (Tab.1.2 – 1) para a tríade de Dó Maior (conjunto 3-11, numeração correspondente também para acordes menores), uma estrutura que não permite que seu grupo completo de três alturas (Card3) se alinhe em pares em torno de um mesmo eixo de soma (assimétrico em sua totalidade), mas que apresenta subconjuntos simétricos (três pares de alturas [Card2] e três notas isoladas [Card1]) orientados por eixos distintos, como verificamos anteriormente (Tab.1.2 – 2).

12 (tríade aumentada) *versus* as “torres” de inversões e transposições dos conjuntos 4-27 (tétrades Maior com sétima e meio diminuta) e 4-26 (tétrade menor com sétima), relacionadas por tetracordes do conjunto 4-28 (tétrade diminuta), dois sistemas com cardinalidades diferentes – Card3 e Card4, respectivamente – que são independentes e não relacionados dentro da teoria neorriemanniana tradicional (COHN, 2012). Em sua proposta de expansão para o segundo sistema, que relaciona tetracordes dos conjuntos 4-26, 4-27 e 4-28, Cohn (2012) inclui tetracordes do conjunto 4-25 (tétrade de sexta francesa). No entanto, percebemos que a cardinalidade com quatro entradas é reiterada e não há perspectiva para mudança deste índice do número de alturas.

(+)	Dó (0)	Mi (4)	Sol (7)
Dó (0)	0	4	7
Mi (4)	4	8	11
Sol (7)	7	11	2

Tab.1.2 - 1: Matriz de soma para o acorde Dó Maior

Eixos de soma	Pares de alturas alinhados	Subconjuntos
0	0 / 0	1-1
1	–	–
2	7 / 7	1-1
3	–	–
4	0 / 4	2-4
5	–	–
6	–	–
7	0 / 7	2-5
8	4 / 4	1-1
9	–	–
10	–	–
11	4 / 7	2-3

Tab.1.2 - 2: Subconjuntos simétricos implícitos no acorde Dó Maior e respectivos eixos

A tríade Maior (assimétrica) pode ser transformada de modo a converter-se em tetracorde simétrico – ou seja, com mudança de cardinalidade – a partir da escolha de um par de alturas de um de seus subconjuntos (díade). Identifica-se a soma dessa díade e agrega-se a altura adicional junto à nota restante da tríade. Essa operação resultará em um tetracorde simétrico. Para obter esta altura adicional, basta subtrair o valor de soma do eixo pelo valor da altura sem correspondente e teremos a nota compatível que completa a simetria do conjunto como um todo. Temos assim a seguinte fórmula:

Sendo:

$$\text{Altura } |x| + \text{Altura } |y| = \text{Soma } |s| \pmod{12}$$

Então:

$$\text{Soma } |s| - \text{Altura } |x| = \text{Altura } |y| \pmod{12}$$

Considerando que o acorde Maior (conjunto 3-11, Card3) tem três pares de notas como subconjuntos simétricos (Card2), cada qual orientado pelo seu respectivo eixo, poderemos estipular e adicionar uma nota correspondente para cada uma das alturas isoladas nos três casos, reiterando o mesmo valor de soma do respectivo eixo, *projetando* assim três possibilidades de tetracordes (Card4) totalmente simétricos, originários da mesma tríade referida: os conjuntos 4-26 (acorde m7), 4-17 e 4-20 (acorde M7+) (Tab.1.2 – 3 e Fig.1.2 – 1).

Soma s	Altura x	Altura y = s – x	Projeção
4	7	9	4-26
7	4	3	4-17
11	0	11	4-20

Tab.1.2 - 3: Projeção de tetracordes a partir de díades do acorde Dó Maior

Fig.1.2 - 1: Projeção de tetracordes a partir de díades e inversões do acorde Dó Maior

Por sua vez, se *substituírmos* esta nota projetada por sua correspondente original, o resultado será a inversão do conjunto 3-11, gerando respectivamente

os acordes menores Am, Cm e Em (Tab.1.2 – 4, Fig.1.2 – 2 e Fig.1.2 - 3). Esta inversão da tríade Maior em três acordes menores coincide com as transformações PRL da teoria neorriemanniana, como podemos observar no *Tonnetz* convencional, em suas relações entre as três arestas do triângulo que representa o acorde de Dó Maior.

Soma $ s $	Altura $ x $	Altura $ y = s - x $	Inversão
4	7	9	Am
7	4	3	Cm
11	0	11	Em

Tab.1.2 - 4: Inversão do acorde Dó Maior a partir de díades do tricorde

Fig.1.2 - 2: Inversões do acorde Dó Maior por díades, arestas dos triângulos que formam o *Tonnetz*, transformações PRL (GOLLIN, 1998: 197)

Fig.1.2 - 3: Inversão do acorde Dó Maior a partir de díades do tricorde, transformações PRL

Percebemos que cada um destes tetracordes projetados a partir do acorde Maior – 4-26, 4-17 e 4-20 – possui dois pares de altura orientados pelo mesmo eixo: o primeiro um subconjunto original do conjunto 3-11 e o segundo projetado como resultante da subtração do valor de soma do eixo do primeiro par pelo índice da altura isolada ($\text{altura } |y| = \text{soma } |s| - \text{altura } |x|$). Se reiterarmos o par gerado por projeção e transferirmos a relação de substituição agora para o primeiro par (subconjunto do acorde Maior), teremos três novos tricordes que, quando invertidos, também geram estes tetracordes, prevendo as mesmas alturas e os mesmos eixos de simetria. Os tetracordes 4-26, 4-17 e 4-20 podem ser gerados não apenas a partir do conjunto 3-11 (acorde Maior), mas também como projeções dos conjuntos 3-7, 3-3 e 3-4 respectivamente. Podemos observar estas relações de inversão e projeção através das figuras abaixo (Fig.1.2 – 4).

Fig.1.2 - 4: Pares de tricordes que podem projetar os tetracordes 4-26, 4-17 e 4-20

Temos assim um tricorde que pode projetar três tetracordes simétricos, os quais, por sua vez, podem ser gerados a partir de três classes de tricordes diferentes. Podemos expressar esta relação entre estes tricordes e tetracordes

através de uma *rede* de conjuntos relacionados por projeções a partir de inversões (Fig.1.2 – 5), que chamaremos neste trabalho de *rede de projeções por inversão*. Temos aqui uma proposta de expansão do sistema de transformações PRL da teoria neorriemanniana, apresentando um sistema que não apenas relaciona tríades Maiores e menores por inversão a partir do conjunto 3-11, como acontece em um *Tonnetz* convencional, mas também propõe a construção de diferentes redes de alturas a partir de outras classes de conjuntos e relaciona-las em um único sistema. Isso nos permite ampliar significativamente a gama de caminhos harmônicos possíveis de serem mapeados, abrindo espaço para estruturas intervalares não convencionais que são recorrentes no universo pós-tonal, mas que ainda não haviam sido contempladas pela teoria neorriemanniana tradicional. Outra constatação importante é a possibilidade de relacionar classes de conjuntos de diferentes tipos e também de diferentes cardinalidades, neste caso, inter-relacionando tricordes (Card3) e tetracordes (Card4), aspecto também não previsto em um *Tonnetz* convencional, que atende apenas grupos de três alturas de uma mesma classe de conjunto 3-11. A correlação entre conjuntos de diferentes cardinalidades também não foi contemplada pela teoria transformacional (COHN, 2012), uma vertente neorriemanniana posterior que se dedica à relação entre grupos com o mesmo número de alturas, avizinados por um maior número de notas comuns e um deslocamento mínimo (semitom) entre suas variantes (“máxima parcimônia”), como é o caso da “dança dos cubos,” que atende apenas tricordes, prioritariamente transposições e inversões do conjunto 3-11 (acordes Maior e menor); e as “torres” de tetracordes, que preveem apenas conjuntos com quatro alturas, prioritariamente transposições e inversões do conjunto 4-27 (acordes Maior 7 e meio diminuto).

Fig.1.2 - 5: Rede de conjuntos relacionados por projeções e inversões

Esta relação entre o conjunto 3-11 e os tetracordes 4-17, 4-20 e 4-26 também aparece na construção do *Tonnetz* convencional, como podemos ver abaixo (Fig.1.2 – 6). Identificamos também que esta relação entre o conjunto 3-11 e os respectivos tetracordes acontece em torno da intersecção entre três sequências de classes de intervalares¹²: C3 (terça menor/sexta maior), C4 (terça maior/sexta menor) e C5 (quarta justa/quinta justa).

¹² Straus (2005) classifica seis possibilidades de ordens de classes de intervalos entre alturas: os ciclos intervalares C1 (segunda menor/sétima maior), C2 (segunda maior/sétima menor), C3 (terça menor/sexta maior), C4 (terça maior/sexta menor), C5 (quarta justa/quinta justa) e C6 (trítono). Neste trabalho ainda prevemos o ciclo intervalar C0, que trata da sequência de alturas em diferentes oitavas ou em uníssono, seguindo aqui conceitos da teoria dos ciclos proposto por George Perle (1977). No segundo capítulo deste trabalho levantaremos todas as possibilidades de *Tonnetze* com tricordes e tetracordes, mapeando todas as combinações entre ciclos intervalares, seguindo a proposta de “redes harmônicas” de Pousseur ([1968] 2009).

Fig.1.2 - 6: *Tonnetz* convencional para o conjunto 3-11

Seguindo o mesmo raciocínio, percebemos que os tricordes 3-7, 3-3 e 3-4 também poderiam projetar outros tetracordes além dos citados 4-17, 4-20 e 4-26, já que cada tríplice projeta individualmente três tetracordes, fator que nos possibilitou ampliar nossa *rede de projeções por inversão* de tricordes. Isto é possível de ser verificado quando construímos redes de alturas (Fig.1.2 – 7) a partir dos tricordes em questão (conjuntos 3-7, 3-3 e 3-4), baseados aqui no princípio de construção de um *Tonnetz* convencional (conjunto 3-11, Card3). Surgem desta aplicação as relações entre o tríplice 3-3 e os tetracordes 4-3, 4-7 e 4-17 (ciclos intervalares C1, C3 e C4); entre o tríplice 3-4 e os tetracordes 4-7, 4-8 e 4-20 (ciclos intervalares C1, C4 e C5); e entre o tríplice 3-7 e os tetracordes 4-10, 4-23 e 4-26 (ciclos intervalares C2, C3 e C5).

Fig.1.2 - 7: *Tonnetze* para os conjuntos 3-3, 3-4 e 3-7

Com estas novas informações podemos ampliar mais nossa *rede* de conjuntos relacionados por projeções e inversões. Esta construção se trata de um sistema de conexões entre *Tonnetze* distintos gerados a partir de diferentes tríades (Card3), relacionados por subconjuntos de pares de alturas pertencentes aos conjuntos, estes representados pelas arestas dos triângulos que aparecem nas figuras. Nesta estrutura podemos perceber que cada tricorde se conecta com outros três tetracordes, sendo que estes conjuntos de quatro alturas, por sua vez, se relacionam apenas com dois tricordes cada. A partir desta constatação, seguimos ampliando esta rede de tricordes e tetracordes relacionados por projeções e inversões até encontrarmos seus extremos (Fig.1.2 – 8).

Fig.1.2 - 8: Rede de projeções por inversão ampliado

Este sistema pode ser ampliado ainda mais, considerando que os tetracordes 4-23, 4-10, 4-8 e 4-3 ainda permitem que cada um seja projetado por mais um tricorde. Considerando que cada um destes tetracordes está construído em torno de um eixo de soma que orienta dois pares de alturas, o primeiro um subconjunto reiterado e o segundo um par projetado a partir de uma nota isolada, invertemos a relação de substituição e reiteração entre estes pares de alturas, a fim de identificar este segundo tricorde que permite projetar cada um destes quatro tetracordes por reflexão. Uma ferramenta pertinente para este propósito é o *clockface* (Fig.1.2 – 9), no qual pudemos encontrar respectivamente os tricordes 3-9 para 4-23, 3-2 para 4-10 e 4-3, e 3-5 para 4-3.

Fig.1.2 - 9: Pares de tricordes que podem projetar os tetracordes 4-3, 4-8, 4-10 e 4-23

Os conjuntos de três alturas 3-9, 3-2 e 3-5 projetam novos tetracordes ainda não citados, lembrando novamente que cada tricorde projeta individualmente três tetracordes, seguindo com nossa ampliação da *rede de projeções por inversão*. Construímos os *Tonnetze* (Fig.1.2 – 10) para cada um destes tricordes em questão (conjuntos 3-9, 3-2 e 3-5). Surgem desta análise as relações entre o tricorde 3-9 e o tetracorde 4-23 (ciclos intervalares C2, C5 e C5); entre o tricorde 3-2 e os tetracordes 4-1, 4-3 e 4-10 (ciclos intervalares C1, C2 e C3); e entre o tricorde 3-5 e os tetracordes 4-8 e 4-9 (ciclos intervalares C1, C5 e C6).

Fig.1.2 - 10: *Tonnetze* para os conjuntos 3-2, 3-5 e 3-9

Podemos verificar na figura anterior que o tetracorde 4-9 já não permite novas extensões de tricordes, pois se conecta duas vezes com o mesmo conjunto 3-5, limitando os desdobramentos deste sistema de projeções e inversões até este ponto. Por outro lado, o tricorde 3-9 se conecta duas vezes

com o tetracorde 4-23 e uma vez consigo mesmo, não permitindo novas extensões. Faltaria ainda conhecer o segundo tricorde relacionado ao conjunto 4-1, que já adiantamos na figura ser o conjunto 3-1, com o qual mantém duas conexões. Esta constatação pode ser feita ao verificarmos o *Tonnetz* (Fig.1.2 – 11) deste conjunto 3-1 (ciclos intervalares C1, C1 e C2) e da projeção no *clockface* (Fig.1.2 – 12) dos dois tricordes que geram o tetracorde 4-1: os conjuntos 3-1 e 3-2.

Fig.1.2 - 11: *Tonnetz* para o conjunto 3-1

Fig.1.2 - 12: Pares de tricordes que podem projetar o tetracorde 4-1

O conjunto 3-1 também se relaciona consigo mesmo em sua terceira conexão, assim como vimos acontecer com o conjunto 3-9. Fechamos assim todos os caminhos de desdobramentos possíveis para este sistema de relações

entre redes de alturas com tricordes (Fig.1.2 – 13). Chegamos então ao limite de desdobramentos desta estrutura que relaciona tricordes por projeções de tetracordes a partir de subconjuntos de pares de alturas. Podemos notar que a *rede de projeções por inversão* se trata de um sistema simétrico, espelhado em duas metades proporcionais de grupos de alturas que se correspondem. Trataremos mais adiante sobre outros detalhes inerentes a esta estrutura.

Fig.1.2 - 13: Rede de projeções por inversão de tricordes

Apresentamos ainda outra possibilidade de visualização mais detalhada desta estrutura (Fig. 1.2 – 14), incluindo também as matrizes dos *Tonnetze* de cada um dos tricordes previstos na rede de projeções por inversão. Interessante destacar a presença de invariâncias de ciclos intervalares entre *Tonnetze* de tricordes de regiões vizinhas do sistema, como podemos sublinhar na tabela Tab. 1.2 – 5. Destaque para os ciclos intervalares C5 e C1, que são invariantes respectivamente entre todos os *Tonnetze* das faces esquerda (C5: tricordes 3-7, 3-9 e 3-11) e direita (C1: tricordes 3-1, 3-2 e 3-3) da rede de projeções por inversão; ambos em comum para os dois *Tonnetze* da região central superior (tricordes 3-4 e 3-5). Veremos no início do segundo capítulo mais detalhes sobre estas disposições de ciclos intervalares invariantes neste sistema, quando trataremos sobre a construção da “rede de ciclos intervalares”.

Ciclos intervalares	C1	C2	C3	C4	C5	C6
Tricordes	3-1	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5
	3-2	3-2	3-3	3-4	3-5	
	3-3	3-7	3-7	3-11	3-7	
	3-4	3-9	3-11		3-9	
	3-5				3-11	

Tab.1.2 - 5: Invariâncias de ciclos intervalares entre *Tonnetze* de tricordes de regiões vizinhas do sistema

Fig.1.2 - 14: Rede de projeções por inversão com matrizes de *Tonnetze* de tricordes

1.2.2. Projeções de pentacordes simétricos

Voltando ao acorde Maior, é possível também projetar outros três conjuntos simétricos em torno dos eixos que orientam os três subconjuntos de apenas uma altura (Card1), acrescentando duas notas ao conjunto 3-11 em cada caso, gerando assim três possibilidades de pentacordes (Card5) totalmente simétricos a partir da mesma tríade referida: os conjuntos 5-z17, 5-22 e 5-34 (Tab.1.2 – 6 e Fig.1.2 – 15).

Soma s	Altura x	Altura y = s – x	Projeção
0	4	8	5-z17
	7	4	
8	0	8	5-22
	7	1	
2	4	10	5-34
	0	2	

Tab.1.2 - 6: Projeção de pentacordes a partir de alturas individuais do acorde Dó Maior

Fig.1.2 - 15: Projeção de pentacordes a partir de alturas individuais e inversões do acorde Dó Maior

Novamente, se *substituírmos* as duas notas projetadas pela soma por suas correspondentes originais, o resultado também será a inversão do conjunto 3-11, gerando respectivamente os acordes menores Fm, C#m e Gm (Tab.1.2 –

7, Fig.1.2 – 16 e Fig.1.2 – 17). Esta segunda série de inversões da tríade Maior em três acordes menores também coincidem com outras três transformações entre acordes que aparecem no *Tonnetz*, em suas relações entre os três vértices do triângulo que representa o acorde de Dó Maior.

Soma s	Altura x	Altura y = s – x	Inversão
0	4	8	Fm
	7	4	
8	0	8	C#m
	7	1	
2	4	10	Gm
	0	2	

Tab.1.2 - 7: Inversão do acorde Dó Maior a partir de alturas individuais do tricorde

Fig.1.2 - 16: Inversões do acorde Dó Maior por alturas individuais, vértices dos triângulos que formam o *Tonnetz*

Fig.1.2 - 17: Inversão do acorde Dó Maior a partir de alturas individuais do tricorde

Percebemos que cada um destes pentacordes projetados a partir do acorde Maior – 5-z17, 5-22 e 5-34 – possui dois pares de altura orientados pelo mesmo eixo, ambos projetados como resultantes da subtração do valor de soma do eixo invariante pelo índice da altura isolada ($\text{altura } |y| = \text{soma } |s| - \text{altura } |x|$), além da nota do subconjunto, que forma consigo mesma um terceiro par de mesma soma. Se reiterarmos a altura do subconjunto e um dos pares gerado por projeção, e transferirmos a relação de substituição para o outro par (e vice-versa), teremos dois novos tetracordes que, quando invertidos, também geram estes pentacordes, prevendo as mesmas alturas e os mesmos eixos de simetria. Os pentacordes 5-z17, 5-22 e 5-34 podem ser gerados não apenas a partir do conjunto 3-11 (acorde Maior), mas também como projeções dos conjuntos 4-14 e 4-19 para 5-z17, 4-18e 4-19 para 5-22 e 4-27 e 4-22 para 5-34. Essas projeções podem ser verificadas nas figuras abaixo (Fig.1.2 – 18).

Fig.1.2 - 18: Pares de tricordes que podem projetar os pentacordes 5-z17, 5-22 e 5-34

É possível também projetar outros três conjuntos simétricos em torno dos eixos que orientam os três subconjuntos de apenas uma altura (Card1) de cada um dos oito tricordes que formam a rede de projeções por inversão – 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-7, 3-9 e 3-11 – acrescentando duas notas ao conjunto em cada

caso, gerando assim três possibilidades de pentacordes (Card5) totalmente simétricos a partir da mesma tríade referida (em alguns casos, tríades e tetracordes são projetadas, por conta de reiterações de alturas na inversão, como veremos a seguir).

Mapeamos nas tabelas abaixo (Tab.1.2 – 8) cada uma destas possibilidades de projeção, observando na sequência: o conjunto referido, a altura escolhida como subconjunto (Card1), a soma gerada em torno deste subconjunto, as demais alturas $|x|$ do tricorde e seus respectivos pares $|y|$ de mesma soma do eixo invariante e o conjunto do pentacorde projetado (tricorde ou tetracordes, em alguns casos). Na última coluna temos os dois tetracordes implícitos (ou tricordes, em alguns casos) que projetam o respectivo pentacorde, bastando apenas desconsiderar uma das alturas $|y|$ adicionais. A maioria desses tetracordes inerentes aos pentacordes são assimétricos (com exceção dos conjuntos 4-1 e 4-23), ao contrário dos tetracordes simétricos projetados a partir dos tricordes.

Conjunto 3-11, alturas [0,4,7] (acorde Dó Maior)

Subconjunto (Card1)	Soma $ s $	Altura $ x $	Altura $ y $ $ y = s - x $	Projeção pentacorde	Tetracordes Implícitos	
0	0	4	8	[4,5,7,8,0]	[0,4,5,7]	4-14
		7	5	5-z17	[4,7,8,0]	4-19
4	8	0	8	[0,1,4,7,8]	[4,7,8,0]	4-19
		7	1	5-22	[0,1,4,7]	4-18
7	2	0	2	[10,0,2,4,7]	[0,2,4,7]	4-22
		4	10	5-34	[4,7,10,0]	4-27

Conjunto 3-1, alturas [0,1,2]

Subconjunto (Card1)	Soma s	Altura x	Altura y y = s - x	Projeção pentacorde	Tetracordes Implícitos	
0	0	1	11	[10,11,0,1,2]	[10,0,1,2]	4-2
		2	10	5-1	[11,0,1,2]	4-1
1	2	0	2	[0,1,2]	[0,1,2]	3-1
		2	0	3-1	[0,1,2]	3-1
2	4	0	4	[0,1,2,3,4]	[0,1,2,3]	4-1
		1	3	5-1	[0,1,2,4]	4-2

Conjunto 3-2, alturas [0,1,3]

Subconjunto (Card1)	Soma s	Altura x	Altura y y = s - x	Projeção pentacorde	Tetracordes Implícitos	
0	0	1	11	[9,11,0,1,3]	[9,0,1,3]	4-12
		3	9	5-8	[11,0,1,3]	4-2
1	2	0	2	[11,0,1,2,3]	[11,0,1,3]	4-2
		3	11	5-1	[0,1,2,3]	4-1
3	6	0	6	[0,1,3,5,6]	[0,1,3,5]	4-11
		1	5	5-z12	[0,1,3,6]	4-13

Conjunto 3-3, alturas [0,1,4]

Subconjunto (Card1)	Soma s	Altura x	Altura y y = s - x	Projeção pentacorde	Tetracordes Implícitos	
0	0	1	11	[8,11,0,1,4]	[0,1,4,8]	4-19
		4	8	5-z37	[11,0,1,4]	4-4
1	2	0	2	[10,0,1,2,4]	[10,0,1,4]	4-12
		4	10	5-8	[0,1,2,4]	4-2
4	8	0	8	[0,1,4,7,8]	[0,1,4,7]	4-18
		1	7	5-22	[0,1,4,8]	4-19

Conjunto 3-4, alturas [0,1,5]

Subconjunto (Card1)	Soma s	Altura x	Altura y y = s - x	Projeção pentacorde	Tetracordes Implícitos	
0	0	1	11	[11,0,1,5,7]	[0,1,5,7]	4-16
		5	7	5-15	[7,11,0,1]	4-5
1	2	0	2	[9,0,1,2,5]	[9,0,1,5]	4-19
		5	9	5-z37	[0,1,2,5]	4-4
5	10	0	10	[9,10,0,1,5]	[9,0,1,5]	4-19
		1	9	5-z17	[10,0,1,5]	4-14

Conjunto 3-5, alturas [0,1,6]

Subconjunto (Card1)	Soma s	Altura x	Altura y y = s - x	Projeção pentacorde	Tetracordes Implícitos	
0	0	1	11	[11,0,1,6]	[0,1,6]	3-5
		6	6	4-6	[11,0,1,6]	4-6
1	2	0	2	[0,1,2,6,8]	[6,8,0,1]	4-16
		6	8	5-15	[0,1,2,6]	4-5
6	0	0	0	[11,0,1,6]	[0,1,6]	3-5
		1	11	4-6	[11,0,1,6]	4-6

Conjunto 3-7, alturas [0,2,5]

Subconjunto (Card1)	Soma s	Altura x	Altura y y = s - x	Projeção pentacorde	Tetracordes Implícitos	
0	0	2	10	[10,0,2,5,7]	[0,2,5,7]	4-23
		5	7	5-35	[10,0,2,5]	4-22
2	4	0	4	[11,0,2,4,5]	[0,2,4,5]	4-11
		5	11	5-z12	[11,0,2,5]	4-13
5	10	0	10	[8,10,0,2,5]	[0,2,5,8]	4-27
		2	8	5-34	[10,0,2,5]	4-22

Conjunto 3-9, alturas [0,2,7]

Subconjunto (Card1)	Soma s	Altura x	Altura y y = s - x	Projeção pentacorde	Tetracordes Implícitos	
0	0	2	10	[10,0,2,5,7]	[0,2,5,7]	4-23
		7	5	5-35	[7,10,0,2]	4-22
2	4	0	4	[0,2,4,7,9]	[7,9,0,2]	4-23
		7	9	5-35	[0,2,4,7]	4-22
7	2	0	2	[0,2,7]	[0,2,7]	3-9
		2	0	3-9	[0,2,7]	3-9

Tab.1.2 - 8: Possibilidades de projeções a partir de alturas individuais dos conjuntos 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-7, 3-9 e 3-11

A partir do levantamento destes dados, podemos ampliar nosso sistema de projeções por inversões, que apenas relacionava tetracordes (Card4) projetados a partir de díades de alturas (Card2) subconjuntos de tricordes (Card3). Incluiremos agora a relação entre pentacordes projetados a partir de alturas avulsas (Card1) subconjuntos dos mesmos tricordes, estes representados pelos vértices dos triângulos que aparecem nas figuras, acrescentando também os tetracordes e tricordes implícitos que projetam os mesmos pentacordes. Nesta estrutura podemos perceber que cada tricorde se conecta com outros seis conjuntos projetados por inversão: três em torno de suas arestas e três em torno de seus vértices. A partir desta constatação, seguimos ampliando esta rede de conjuntos relacionados por projeções a partir de inversões, como podemos verificar na figura abaixo (Fig.1.2 – 19).

Fig.1.2 - 19: Ampliação da rede de projeções por inversão de tricordes

Podemos perceber que esta grande estrutura de quarenta e dois conjuntos relacionados por projeções a partir de inversões apresenta propriedades simétricas em diversos níveis, com destaque para a equivalência entre os dois grandes grupos de treze conjuntos cada que estão nas laterais esquerda e direita da figura. Ambos os grupos se correspondem verticalmente em número de conjuntos, conjuntos com o mesmo índice de alturas em posições similares e conexões idênticas entre os elementos que configuram cada estrutura. Outra característica importante é que nas extremidades onde se limitam os desdobramentos de cada grupo (na parte inferior da figura) temos três conjuntos equivalentes que são recordes de ciclos intervalares: C5 (ordem da classe de intervalo¹³ |5|) à esquerda (conjuntos 3-9, 4-23 e 5-35) e C1 (ordem da classe de intervalo |1|) à direita (conjuntos 3-1, 4-1 e 5-1). Esta disposição nos faz perceber que cada estrutura é construída a partir de inversões e projeções a partir dos ciclos intervalares C5 e C1, assim escolhemos identificar os respectivos grupos de conjuntos como *região C5* (a esquerda) e *região C1* (a direita) (Fig.1.2 – 20).

¹³ Identificaremos classes de intervalo entre duas barras verticais (OLIVEIRA, 2007).

Fig.1.2 - 20: Regiões C1 e C5 da rede de projeções por inversão

Procuramos mais detalhes sobre esta relação entre essas duas regiões C1 e C5 e identificamos que existe uma comum invariância entre os índices de vetores intervalares dos conjuntos correspondentes. Verificamos que os vetores que aparecem reiterados são as entradas dois, três, quatro e seis, sendo que os vetores um e cinco aparecem invertidos entre si em todos os casos (Tab.1.2 – 9). Esta constatação nos revela que os conjuntos da região C5 podem ser obtidos por **multiplicação** pelos índices M_5 ou M_7 dos seus equivalentes da região C1, e vice-versa, seguindo aqui o teorema proposto por John Rahn (1980: 104).

TEOREMA: M_5 e M_7 têm exatamente o mesmo efeito no conteúdo intervalar. As multiplicidades de intervalos não ordenados 1 e 5 são trocadas entre si e as outras multiplicidades são mantidas (RAHN, 1980: 104)

Esta condição foi explicada em maiores detalhes por João Oliveira (2007: 116-17).

Resumindo, o vetor intervalar de um conjunto-imagem resultante da aplicação de M_5 tem as multiplicidades dos intervalos-classe 1 e 5 trocadas em relação ao conjunto original; todas as outras multiplicidades permanecem inalteradas (OLIVEIRA, 2007: 116).

Tal como acontece em M_5 , sendo os intervalos $< 1 >$ e $< 11 >$ pertencentes ao intervalo-classe $ic = |1|$, e os intervalos $< 5 >$ e $< 7 >$ pertencentes a $ic = |5|$, as multiplicidades dos intervalos-classe 1 e 5 trocam entre si após M_7 . Todas as outras multiplicidades permanecem inalteradas (OLIVEIRA, 2007: 117).

No caso de um conjunto Z, os operadores M_5 e M_7 por vezes transformam esse conjunto no seu correspondente Z que, conforme foi explicado, possui um vetor intervalar idêntico (OLIVEIRA, 2007: 117).

Exemplos:

$$K = [0, 2, 5, 8]$$

$$M_5(K) = (0, 10, 1, 4) = [0, 2, 3, 6]$$

$$4-27 \text{ vetor } < \textcolor{red}{0} \textcolor{green}{1} \textcolor{green}{2} \textcolor{green}{1} \textcolor{green}{1} \textcolor{red}{0} >$$

$$4-12 \text{ vetor } < \textcolor{green}{1} \textcolor{green}{1} \textcolor{green}{2} \textcolor{green}{1} \textcolor{red}{0} \textcolor{red}{1} >$$

$$K = [0, 2, 4, 6, 9]$$

$$M_7(K) = (0, 2, 4, 6, 3) = [0, 2, 3, 4, 6]$$

$$5-34 \text{ vetor } < \textcolor{red}{0} \textcolor{green}{3} \textcolor{green}{2} \textcolor{green}{2} \textcolor{green}{2} \textcolor{red}{1} >$$

$$5-8 \text{ vetor } < \textcolor{green}{2} \textcolor{green}{3} \textcolor{green}{2} \textcolor{green}{2} \textcolor{red}{0} \textcolor{red}{1} >$$

Relações por vértices

Região C5	Vetores	Região C1	Vetores
4-14	[1 111 2 0]	4-4	[2 111 1 0]
5-z17	[2 123 2 0]	5-z37	[2 123 2 0]
4-27	[0 121 1 1]	4-12	[1 121 0 1]
5-34	[0 322 2 1]	5-8	[2 322 0 1]
4-22	[0 211 2 0]	4-2	[2 211 0 0]
5-35	[0 321 4 0]	5-1	[4 321 0 0]
4-23	[0 210 3 0]	4-1	[3 210 0 0]

Relações por arestas

Região C5	Vetores	Região C1	Vetores
4-20	[101220]	4-7	[201210]
4-26	[012120]	4-3	[212100]
4-23	[021030]	4-1	[321000]
3-9	[010020]	3-1	[210000]

Relação tricordes

Região C5	Vetores	Região C1	Vetores
3-11	[001110]	3-3	[101100]
3-7	[011010]	3-2	[111000]
3-9	[010020]	3-1	[210000]

Tab.1.2 - 9: Relação por multiplicação M5 e M7 entre as regiões C1 e C5, identificada na análise dos índices de vetores intervalares dos conjuntos correspondentes

Inclusive as classes de intervalo |1| e |5|, que são a base de construção dos dois grupos de conjuntos, também se relacionam por multiplicação, como podemos ver na relação entre os vetores intervalares destas duas estruturas (Tab.1.2 – 10).

Classe de intervalo 5	Vetores	Classe de intervalo 1	Vetores
(05)	[000010]	(01)	[100000]

Tab.1.2 - 10: Relação de multiplicação M5 e M7 entre as classes de intervalos |1| e |5|

Poderíamos ainda incluir nesta relação os tetracordes 4-16 e 4-5, que estão listados na região superior, mas também se relacionam por multiplicação M₅ e M₇, como podemos perceber na análise dos vetores intervalares destes conjuntos (Tab.1.2 – 11).

Região C5	Vetores	Região C1	Vetores
4-16	[1 101 2 1]	4-5	[2 101 1 1]

Tab.1.2 - 11: Relação de multiplicação M5 e M7 entre os tetracordes 4-16 e 4-5

Outra informação aparente é que a maioria dos conjuntos da região C5 têm um índice 0 na estrada um, o que indica que a ausência da classe de intervalo |1| (segundas menores e sétimas maiores) neste grupo. O mesmo acontece com a maioria dos conjuntos da região C1, onde temos um índice 0 na estrada cinco, o que indica a ausência da classe de intervalo |5| (quartas e quintas justas) neste grupo. Temos ainda um índice 0 na entrada seis da maioria dos conjuntos de ambos os grupos, o que revela a ausência da classe de intervalo |6| (trítono).

Voltando à rede de conjuntos projetados por inversão, temos outros dois grupos de conjuntos, que chamamos aqui de *região central* e *região superior* (Fig.1.2 – 21). A região central é um conjunto de oito conjuntos que está intermediando a relação entre as regiões C1 e C5, funcionando neste contexto como um eixo de simetria que existe entre os dois grupos opostos. A região superior é composta de outros oito conjuntos que estão dispostos na parte de cima do sistema.

Fig.1.2 - 21: Conjuntos da região central e superior

Não encontramos relações de multiplicação entre os conjuntos destes grupos, porém identificamos índices de vetores intervalares invariantes entre diversas classes de conjuntos (Tab.1.2 – 12). Destaque para os seis tetracordes da região central, que mantêm em comum sempre o índice 1 para as entradas um e cinco de seus respectivos vetores intervalares. No caso da região superior, temos em comum o índice 0 na entrada três dos vetores intervalares de todos os conjuntos deste grupo, o que revela a ausência da classe de intervalo $|3|$ (terças menores e sextas maiores). Além disso, não temos nenhum caso de índice 0 na entrada seis, o que indica a presença de trítono em todos estes conjuntos, ao contrário do que aparece na maioria dos conjuntos das regiões C1 e C5. Outra constatação é a invariância entre as entradas um e cinco dos pentacordes 5-z37,

5-z17, 5-15, 5-22 e 5-z12, sempre apresentando o índice 2, como podemos ver nas tabelas.

Pentacordes relacionados

Conjunto	Vetor intervalar
5-z37	[2 123 2 0]
5-z17	[2 123 2 0]
5-15	[2 202 2 2]
5-22	[2 023 2 1]
5-z12	[2 221 2 1]

Tetracordes da região central

Conjunto	Vetor intervalar
4-18	[1 021 1 1]
4-17	[1 022 1 0]
4-19	[1 013 1 0]
4-11	[1 211 1 0]
4-13	[1 120 1 1]
4-10	[1 220 1 0]

Conjuntos da região superior

Conjunto	Vetor intervalar
4-5	[210111]
4-16	[110121]
4-8	[200121]
4-9	[200022]
5-15	[220222]
4-6	[210021]
3-5	[100011]
3-4	[100110]

Tab.1.2 - 12: Análise de invariâncias entre vetores intervalares dos conjuntos da Região Central e Superior

Analizamos estes dados e propomos a construção de uma rede de conjuntos conexos por maior parcimônia entre vetores intervalares (Fig.1.2 – 22), relacionando todos os tetracordes da rede de projeções por inversão com pelo menos quatro entradas de vetores em comum. Percebemos que os tetracordes mantiveram seus posicionamentos referentes ao sistema original, o que demonstra que o procedimento de projeção por inversão, além de prever a reiteração das alturas selecionadas como subconjuntos, também suscita a invariância de entradas de vetores intervalares entre os conjuntos. Apontamos na figura também a distribuição proporcional entre tetracordes simétricos |s| e assimétricos |a|.

Fig.1.2 - 22: Rede de tetracordes relacionados por um maior número de entradas de vetores intervalares invariantes

Além disso, destacamos que esta estrutura de conjuntos relacionados por invariância de vetores também exibe uma organização simétrica, apresentando uma distribuição equivalente de seus tetracordes, reiterando as regiões C5, C1, central e superior (Fig.1.2 – 23 e Fig.1.2 – 24).

Fig.1.2 - 23: Rede de tetracordes relacionados por vetores intervalares invariantes, reiteração das regiões C1 e C5

Fig.1.2 - 24: Rede de tetracordes relacionados por vetores intervalares invariantes, reiteração das regiões Central e Superior

1.3. Perspectiva a partir da “constelação Morris”

Em nossa investigação sobre as propriedades da rede de projeções por inversão, percebemos que esta estrutura provavelmente pode ser expandida até a abrangência da maior parte (senão a totalidade) dos conjuntos de alturas existentes no sistema de doze sons, incluídos em um mesmo sistema “universal” e simétrico. Ou seja, mostramos anteriormente apenas dois recortes restritos de um sistema aparentemente mais amplo ainda não explorado, apresentados aqui em duas diferentes perspectivas, escolhendo alguns grupos de alturas em particular como pontos de partida para as projeções por inversão. A princípio exploramos a rede de alturas (*Tonnetz*) com tricordes (Card3), construindo uma rede de conjuntos relacionados por projeções a partir de díades implícitas nestes grupos de alturas (arestas dos triângulos que compõem um *Tonnetz*). Na sequência ampliamos este primeiro sistema apresentado, incluindo também conjuntos relacionados por projeções a partir de alturas individuais dos tricordes (vértices dos triângulos que compõem um *Tonnetz*).

Verificamos que as duas versões da rede de projeções por inversão reiteram a mesma disposição proporcional entre grupos relacionados por multiplicação M_5 e M_7 , opondo os diversos conjuntos de alturas em regiões C1 e C5, intermediadas por uma região central e outra superior que se posicionam como um *meta-eixo* de todo o sistema. Esta constatação justifica nossa hipótese de que a simetria intervalar é uma propriedade inerente do próprio sistema cromático, aparecendo como característica invariante nas diversas facetas do uso das doze alturas, valendo para ambos os universos tonal e pós-tonal.

Na sequência deste primeiro capítulo, iremos apresentar uma perspectiva mais extensa para a rede de projeções por inversão, explorando agora as possibilidades de projeções por inversão a partir dos tetracordes que compõem a “constelação Morris” (SALLMEN, 2011) – os conjuntos 4-12, 4-13, 4-18 e 4-27 – concomitantes aos tetracordes 4-z15 e 4z29. Mostraremos assim que as características simétricas deste sistema e as correlações por multiplicação pelos índices M_5 e M_7 são reiterados em todos os níveis de abrangência da rede de projeções por inversão, seja qual for a perspectiva e a dimensão do recorte que apresentarmos.

1.3.1. Projeções de hexacordes simétricos

Agora aplicaremos a matriz de soma (Tab.1.3 – 1) para a téttrade de Dó Maior com sétima menor (conjunto 4-27, numeração correspondente também para acordes meio diminutos), uma estrutura que não permite que seu grupo completo de quatro alturas (Card4) se alinhe em pares em torno de um mesmo eixo de soma (assimétrico em sua totalidade), mas que apresenta subconjuntos simétricos (um tricorde [Card3], seis pares de alturas [Card2] e uma nota isolada [Card1]) orientados por eixos distintos (Tab.1.3 – 2).

(+)	Dó (0)	Mi (4)	Sol (7)	Sib (10)
Dó (0)	0	4	7	10
Mi (4)	4	8	11	2
Sol (7)	7	11	2	5
Sib (10)	10	2	5	8

Tab.1.3 - 1: Matriz de soma para o acorde Do Maior com Sétima

Eixos de soma	Pares de alturas alinhados		Subconjuntos
0	0 / 0		1-1
1	–		–
2	7 / 7	4 / 10	3-10
3	–		–
4	0 / 4		2-4
5	7 / 10		2-3
6	–		–
7	0 / 7		2-5
8	4 / 4	10 / 10	2-6
9	–		–
10	0 / 10		2-2
11	4 / 7		2-3

Tab.1.3 - 2: Subconjuntos simétricos implícitos no acorde Dó Maior com Sétima e respectivos eixos

Uma forma de transformar este acorde Maior 7 (conjunto 4-27), originalmente assimétrico em sua totalidade, em um conjunto integralmente simétrico, é escolher um par de alturas como subconjunto, identificar o eixo de soma inerente entre estas duas notas e agregar duas alturas adicionais junto a terceira e quarta nota do tetracorde, correspondendo respectivamente à mesma soma do eixo em questão, gerando assim um hexacorde simétrico. Para obter estas alturas adicionais, basta subtrair o valor de soma do eixo pelo valor da altura sem par e teremos a nota compatível que completa a simetria do conjunto como um todo. Reiteramos assim a seguinte fórmula:

Sendo:

$\text{Altura } x + \text{Altura } y = \text{Soma } s \pmod{12}$
--

Então:

$\text{Soma } s - \text{Altura } x = \text{Altura } y \pmod{12}$
--

Considerando que o acorde Maior 7 (conjunto 4-27 [Card4]) tem seis pares de notas como subconjuntos simétricos (Card2), cada qual orientado pelo seu respectivo eixo, poderemos estipular e adicionar uma nota correspondente para cada uma das duas alturas isoladas nos seis casos, reiterando o mesmo valor de soma do respectivo eixo, *projetando* assim cinco possibilidades de hexacordes (Card6) e um pentacorde (Card5) totalmente simétricos (devido a reiteração de uma nota), originários da mesma tétrade referida: os conjuntos 6-z23, 6-z29, 6-z42, 6-z49, 6-z50 e 5-34 (Tab.1.3 – 3).

Mapeamos nas tabelas abaixo (Tab.1.3 – 3 e Tab.1.3 – 4) cada uma destas possibilidades de projeções, observando na sequência: o conjunto referido, a altura escolhida como subconjunto (Card2), a soma |s| gerada em torno deste subconjunto, as demais alturas |x| do tetracorde e seus respectivos pares |y| de mesma soma do eixo invariante e o conjunto do hexacorde projetado (pentacorde, em um dos casos).

Subconjunto (Card2)	Soma s	Altura x	Altura y $ y = s - x $	Projeção
[0, 4]	4	7	9	[4,6,7,9,10,0]
		10	6	6-z23
[0, 7]	7	4	3	[3,4,7,9,10,0]
		10	9	6-z50
[0, 10]	10	4	6	[3,4,6,7,10,0]
		7	3	6-z49
[4, 7]	11	0	11	[10,11,0,1,4,7]
		10	1	6-z42
[4, 10]	2	0	2	[10,0,2,4,7]
		7	7	5-34
[7, 10]	5	0	5	[10,0,1,4,5,7]
		4	1	6-z29

Tab.1.3 - 3: Possibilidades de projeções a partir de um acorde Maior 7 (conjunto 4-27)

Por sua vez, se *substituírmos* esta nota projetada por sua correspondente original, o resultado será a inversão do conjunto 4-27, gerando respectivamente os acordes meio diminutos Cdim7, Gdim7, Edim7, Adim7, F#dim7 e C#dim7 (Fig.1.3 – 1 e Fig.1.3 – 2). Esta inversão da téttrade Maior 7 em seis acordes meio diminutos coincide com as transformações PRL e P'R'L' da teoria neorriemanniana, como podemos observar no *Tonnetz* tridimensional proposto por Gollin (1998), em suas relações entre as seis arestas do tetraedro que representa o acorde de Dó Maior 7.

Fig.1.3 - 1: Inversões do acorde Dó Maior 7 por díades, arestas dos tetraedros que formam o *Tonnetz* tridimensional (GOLLIN, 1998), transformações PRL e P'R'L'

Fig.1.3 - 2: Inversões do acorde Dó Maior 7 a partir de díades do tricorde. Projeções dos conjuntos 5-34, 6-z23, 6-z29, 6-z42, 6-z49 e 6-z50

Selecionamos outros três tetracordes para mapearmos outras possibilidades de projeções (Tab.1.3 – 4), utilizando os mesmos critérios aplicados acima – os conjuntos 4-12, 4-13 e 4-18 – os quais juntos ao conjunto 4-27 formam a “constelação Morris” (SALLMEN, 2011; Fig.1.3 – 3).

Example 1. The MORRIS Constellation (after Soderberg 1998)

Fig.1.3 - 3: Correspondência com a “constelação Morris” (SALLMEN, 2011)

A seguir apresentamos esses dados levantados dispostos nas tabelas.

Conjunto 4-12, alturas [0,2,3,6]

Subconjunto (Card2)	Soma s	Altura x	Altura y y = s - x	Projeção
[0, 2]	2	3	11	[11,0,2,3,6,8]
		6	8	6-z49
[0, 3]	3	2	1	[0,1,2,3,6,9]
		6	9	6-z42
[0, 6]	6	2	4	[0,2,3,4,6]
		3	3	5-8
[2, 3]	5	0	5	[11,0,2,3,5,6]
		6	11	6-z13
[2, 6]	8	0	8	[0,2,3,5,6,8]
		3	5	6-z23
[3, 6]	9	0	9	[0,2,3,6,7,9]
		2	7	6-z29

Conjunto 4-13, alturas [0,1,3,6]

Subconjunto (Card2)	Soma s	Altura x	Altura y $ y = s - x $	Projeção
[0, 1]	1	3	10	[6,7,10,0,1,3]
		6	7	6-z50
[0, 3]	3	1	2	[0,1,2,3,6,9]
		6	9	6-z42
[0, 6]	6	1	5	[0,1,3,5,6]
		3	3	5-z12
[1, 3]	4	0	4	[10,0,1,3,4,6]
		6	10	6-z23
[1, 6]	7	0	7	[0,1,3,4,6,7]
		3	4	6-z13
[3, 6]	9	0	9	[6,8,9,0,1,3]
		1	8	6-z29

Conjunto 4-18, alturas [0,1,4,7]

Subconjunto (Card2)	Soma s	Altura x	Altura y y = s - x	Projeção
[0, 1]	1	4	9	[0,1,4,6,7,9]
		7	6	6-z50
[0, 4]	4	1	3	[0,1,3,4,7,9]
		7	9	6-z49
[0, 7]	7	1	6	[0,1,3,4,6,7]
		4	3	6-z13
[1, 4]	5	0	5	[10,0,1,4,5,7]
		7	10	6-z29
[1, 7]	8	0	8	[0,1,4,7,8]
		4	4	5-22
[4, 7]	11	0	11	[10,11,0,1,4,7]
		1	10	6-z42

Tab.1.3 - 4: Mapeamento de projeções a partir dos conjuntos 4-12, 4-13 e 4-18

A partir destas informações, podemos propor um novo sistema de conjuntos relacionados por projeções a partir de inversões. Apresentamos a seguir um gráfico (Fig.1.3 – 4) relacionando os tetracordes 4-27, 4-12, 4-13 e 4-18 aos hexacordes 6-z13, 6-z23, 6-z29, 6-z42, 6-z45 e 6-z50. Temos ainda a presença de quatro pentacordes – 5-8, 5-z12, 5-22 e 5-34 – que aparecem por reiteraões de alturas no processo de projeção de alguns tetracordes.

Fig.1.3 - 4: Sistema de conjuntos relacionados por projeções a partir de inversões em torno dos tetracordes 4-27, 4-12, 4-13 e 4-18

Também nesta relação entre hexacordes e pentacordes projetados por inversão a partir de tetracordes temos a reiteração de entradas de vetores intervalares (Tab.1.3 – 5). Todos os hexacordes têm em comum o índice 4 na entrada três (terças menores e sextas maiores) e índice 2 na entrada seis (trítonos), além de se relacionarem em pares mantendo quatro entradas de vetores em comum e dois invertidos entre si (sempre entre os índices 2 e 3), exceto os conjuntos Z-relacionados com todos os vetores intervalares em comum (6-z13/6-z42 e 6-z29/6-z50). O mesmo acontece na relação entre os tetracordes: têm em comum o índice 2 na entrada três (terças menores e sextas maiores) e índice 1 na entrada seis (trítonos), além de também se relacionarem em pares mantendo quatro entradas de vetores em comum e dois invertidos entre si (sempre entre os índices 0 e 1).

Hexacorde	Vetores	Tetracorde	Vetores
6-z13	[32 4 22 2]	4-12	[11 2 10 1]
6-z23	[23 4 22 2]	4-27	[01 2 11 1]
6-z29	[22 4 23 2]	4-18	[10 2 11 1]
6-z42	[32 4 22 2]	4-13	[11 2 01 1]
6-z49	[22 4 32 2]		
6-z50	[22 4 23 2]		

Hexacordes	Vetores	Hexacordes	Vetores
6-z13	[3 2 4 22 2]	6-z13	[3 2 4 22 2]
6-z23	[2 3 422 2]	6-z29	[2 2 423 2]
6-z13	[3 2 4 22 2]	6-z13	[3 2 4 22 2]
6-z42	[3 2 4 22 2]	6-z49	[2 2 432 2]
6-z13	[3 2 4 22 2]	6-z23	[2 3 422 2]
6-z50	[2 2 423 2]	6-z29	[2 2 423 2]
6-z23	[2 3 422 2]	6-z23	[2 3 422 2]
6-z42	[3 2 4 22 2]	6-z49	[2 2 432 2]
6-z23	[2 3 422 2]	6-z29	[2 2 423 2]
6-z50	[2 2 423 2]	6-z42	[3 2 4 22 2]
6-z29	[22 4 23 2]	6-z29	[22 4 23 2]
6-z49	[22 4 32 2]	6-z50	[22 4 23 2]
6-z42	[3 2 4 22 2]	6-z42	[3 2 4 22 2]
6-z49	[2 2 432 2]	6-z50	[2 2 423 2]
6-z49	[22 4 32 2]		
6-z50	[22 4 23 2]		

Tetracordes	Vetores	Tetracordes	Vetores
4-12	[112101]	4-12	[112101]
4-27	[012111]	4-18	[102111]
4-12	[112101]	4-27	[012111]
4-13	[112011]	4-18	[102111]
4-27	[012111]	4-18	[102111]
4-13	[112011]	4-13	[112011]

Tab.1.3 - 5: Invariâncias entre vetores intervalares

Podemos verificar ainda que quatro destes hexacordes se relacionam por multiplicação M_5 ou M_7 entre si, dispostos em dois grupos correspondentes às regiões C1 e C5 (de acordo com o maior índice nas entradas um e cinco dos vetores intervalares), como podemos ver na análise apresentada na tabela abaixo (Tab.1.3 – 6). Interessante que, por serem ambos pares de conjuntos Z-relacionados, temos o mesmo parâmetro de multiplicação atribuído entre os quatro hexacordes.

Região C5	Vetores	Região C1	Vetores
6-z50	[224232]	6-z13	[324222]
6-z29	[224232]	6-z42	[324222]
6-z29	[224232]	6-z13	[324222]
6-z50	[224232]	6-z42	[324222]

Tab.1.3 - 6: Relações por multiplicação pelos fatores M_5 e M_7 entre hexacordes Z-relacionados

Outro par de tetracordes que se relaciona com parte deste grupo de hexacordes são os conjuntos Z-relacionados 4-z15 e 4-z29, que podem projetar ambos os conjuntos 6-z13, 6-z23, 6-z49 e 6-z50, além de outros dois hexacordes cada: 6-z38 e 6-z26 para 4-z29 e 6-z6 e 6-z4 para 4-z15. Estas possibilidades de projeções foram mapeadas e apresentadas nas tabelas abaixo (Tab.1.3 – 7):

Conjunto 4-z15, alturas [0,1,4,6]

Subconjunto (Card2)	Soma s	Altura x	Altura y $ y = s - x $	Projeção
[0, 1]	1	4	9	[0,1,4,6,7,9]
		6	7	6-z50
[0, 4]	4	1	3	[10,0,1,3,4,6]
		6	10	6-z23
[0, 6]	6	1	5	[0,1,2,4,5,6]
		4	2	6-z4
[1, 4]	5	0	5	[11,0,1,4,5,6]
		6	11	6-z6
[1, 6]	7	0	7	[0,1,3,4,6,7]
		4	3	6-z13
[4, 6]	10	0	10	[9,10,0,1,4,6]
		1	9	6-z49

Conjunto 4-z29, alturas [0,1,3,7]

Subconjunto (Card2)	Soma s	Altura x	Altura y $ y = s - x $	Projeção
[0, 1]	1	3	10	[6,7,10,0,1,3]
		7	6	6-z50
[0, 3]	3	1	2	[0,1,2,3,7,8]
		7	8	6-z38
[0, 7]	7	1	6	[0,1,3,4,6,7]
		3	4	6-z13
[1, 3]	4	0	4	[0,1,3,4,7,9]
		7	9	6-z49
[1, 7]	8	0	8	[0,1,3,5,7,8]
		3	5	6-z26
[3, 7]	10	0	10	[7,9,10,0,1,3]
		1	9	6-z23

Tab.1.3 - 7: Possibilidades de projeções a partir dos conjuntos Z-relacionados 4-z15 e 4-z29

Outro caminho para observarmos a relação entre projeções de conjuntos por inversão é a partir do mapeamento dos tetracordes que podem gerar estes hexacordes simétricos a partir de eixos implícitos em subconjuntos de pares de alturas. Cada hexacorde tem três pares de alturas alinhados em torno do mesmo eixo, sendo que cada par projeta o hexacorde a partir de duas maneiras diferentes de dispor as demais quatro notas, assim organizadas em seis pares de tetracordes implícitos que se invertem entre si em torno do eixo invariante e, quando concatenados, projetam o mesmo hexacorde. Listamos a seguir os seis conjuntos de tetracordes que geram cada um dos dez hexacordes que relacionam os tetracordes 4-27, 4-12, 4-13, 4-18, 4-z15 e 4-z29 (Tab.1.3 – 8):

Conjunto 6-z29, (023679)

Alturas [0,2,3,6,7,9]

Eixo soma 9, pares [0,9] [2,7] [3,6]

Pares (Card2)	Soma s	Altura x	Altura y y = s - x	Conjunto	Tetracordes
[0, 9]	9	2	7	4-13	[9,0,2,3]
		3	6		[6,7,9,0]
[0, 9]	9	2	7	4-27	[6,9,0,2]
		6	3		[7,9,0,3]
[2, 7]	9	0	9	4-14	[0,2,3,7]
		3	6		[2,6,7,9]
[2, 7]	9	0	9	4-16	[0,2,6,7]
		6	3		[2,3,7,9]
[3, 6]	9	0	9	4-12	[0,2,3,6]
		2	7		[3,6,7,9]
[3, 6]	9	0	9	4-18	[0,3,6,7]
		7	2		[2,3,6,9]

Conjunto 6-z42, (012369)

Alturas [0,1,2,3,6,9]

Eixo soma 3, pares [1,2] [0,3] [6,9]

Pares (Card2)	Soma s	Altura x	Altura y y = s - x	Conjunto	Tetracordes
[1,2]	3	0	3	4-5	[0,1,2,6]
		6	9		[9,1,2,3]
[1,2]	3	0	3	4-4	[9,0,1,2]
		9	6		[1,2,3,6]
[0,3]	3	1	2	4-13	[0,1,3,6]
		6	9		[9,0,2,3]
[0,3]	3	1	2	4-12	[9,0,1,3]
		9	6		[0,2,3,6]
[6,9]	3	1	2	4-18	[6,9,0,1]
		0	3		[2,3,6,9]
[6,9]	3	1	2	4-27	[1,3,6,9]
		3	0		[6,9,0,2]

Conjunto 6-z23, (023568)

Alturas [0,2,3,5,6,8]

Eixo soma 8, pares [0,8] [2,6] [3,5]

Pares (Card2)	Soma s	Altura x	Altura y y = s - x	Conjunto	Tetracordes
[0,8]	8	2	6	4-z29	[8,0,2,3]
		3	5		[5,6,8,0]
[0,8]	8	2	6	4-27	[0,2,5,8]
		5	3		[0,3,6,8]
[2,6]	8	0	8	4-12	[0,2,3,6]
		3	5		[2,5,6,8]
[2,6]	8	0	8	4-z15	[0,2,5,6]
		5	3		[2,3,6,8]
[3,5]	8	0	8	4-10	[0,2,3,5]
		2	6		[3,5,6,8]
[3,5]	8	0	8	4-13	[0,3,5,6]
		6	2		[2,3,5,8]

Conjunto 6-z50, (014679)

Alturas [0,1,4,6,7,9]

Eixo soma 1, pares [0,1] [4,9] [6,7]

Pares (Card2)	Soma s	Altura x	Altura y y = s - x	Conjunto	Tetracordes
[0,1]	1	4	9	4-z15	[0,1,4,6]
		6	7		[7,9,0,1]
[0,1]	1	4	9	4-18	[0,1,4,7]
		7	6		[6,9,0,1]
[4,9]	1	0	1	4-27	[4,6,9,0]
		6	7		[1,4,7,9]
[4,9]	1	0	1	4-26	[4,7,9,0]
		7	6		[1,4,6,9]
[6,7]	1	0	1	4-z29	[0,4,6,7]
		4	9		[6,7,9,1]
[6,7]	1	0	1	4-13	[6,7,9,0]
		9	4		[1,4,6,7]

Conjunto 6-z49, (013479)

Alturas [11,0,2,3,6,8]

Eixo soma 2, pares [0,2] [3,11] [6,8]

Pares (Card2)	Soma s	Altura x	Altura y y = s - x	Conjunto	Tetracordes
[0,2]	2	3	11	4-12	[0,2,3,6]
		6	8		[8,11,0,2]
[0,2]	2	3	11	4-z29	[8,0,2,3]
		8	6		[11,0,2,6]
[3,11]	2	6	8	4-18	[11,0,3,6]
		0	2		[8,11,2,3]
[3,11]	2	6	8	4-17	[11,2,3,6]
		2	0		[8,11,0,3]
[6,8]	2	0	2	4-27	[0,3,6,8]
		3	11		[6,8,11,2]
[6,8]	2	0	2	4-z15	[6,8,11,0]
		11	3		[2,3,6,8]

Conjunto 6-z13, (013467)

Alturas [11,0,2,3,5,6]

Eixo soma 5, pares [2,3] [0,5] [6,11]

Pares (Card2)	Soma s	Altura x	Altura y y = s - x	Conjunto	Tetracordes
[2,3]	5	0	5	4-12	[0,2,3,6]
		6	11		[11,2,3,5]
[2,3]	5	0	5	4-3	[11,0,2,3]
		11	6		[2,3,5,6]
[0,5]	5	2	3	4-z15	[0,2,5,6]
		6	11		[11,0,3,5]
[0,5]	5	2	3	4-13	[11,0,2,5]
		11	6		[0,3,5,6]
[6,11]	5	0	5	4-z29	[11,0,2,6]
		2	3		[11,3,5,6]
[6,11]	5	0	5	4-18	[11,0,3,6]
		3	2		[11,2,5,6]

Conjunto 6-z6, (012567)

Alturas [11,0,1,4,5,6]

Eixo soma 5, pares [1,4] [0,5] [6,11]

Pares (Card2)	Soma s	Altura x	Altura y y = s - x	Conjunto	Tetracordes
[1,4]	5	0	5	4-z15	[0,1,4,6]
		6	11		[11,1,4,5]
[1,4]	5	0	5	4-4	[11,0,1,4]
		11	6		[1,4,5,6]
[0,5]	5	1	4	4-8	[0,1,5,6]
		6	11		[11,0,4,5]
[0,5]	5	1	4	4-5	[11,0,1,5]
		11	6		[0,4,5,6]
[6,11]	5	0	5	4-6	[11,0,1,6]
		1	4		[4,5,6,11]
[6,11]	5	0	5	4-18	[11,0,3,6]
		3	2		[11,2,5,6]

Conjunto 6-z4, (012456)

Alturas [0,1,2,4,5,6]

Eixo soma 6, pares [2,4] [1,5] [0,6]

Pares (Card2)	Soma s	Altura x	Altura y y = s - x	Conjunto	Tetracordes
[2,4]	6	1	5	4-2	[0,1,2,4]
		0	6		[2,4,5,6]
[2,4]	6	1	5	4-11	[1,2,4,6]
		6	0		[0,2,4,5]
[1,5]	6	2	4	4-4	[0,1,2,5]
		0	6		[1,4,5,6]
[1,5]	6	2	4	4-7	[1,2,5,6]
		6	0		[0,1,4,5]
[0,6]	6	1	5	4-5	[0,1,2,6]
		2	4		[0,4,5,6]
[0,6]	6	1	5	4-z15	[0,1,4,6]
		4	2		[0,2,5,6]

Conjunto 6-z38, (012378)

Alturas [0,1,2,3,7,8]

Eixo soma 3, pares [1,2] [0,3] [7,8]

Pares (Card2)	Soma s	Altura x	Altura y y = s - x	Conjunto	Tetracordes
[1,2]	3	0	3	4-6	[0,1,2,7]
		7	8		[1,2,3,8]
[1,2]	3	0	3	4-5	[8,0,1,2]
		8	7		[1,2,3,7]
[0,3]	3	1	2	4-z29	[0,1,3,7]
		7	8		[8,0,2,3]
[0,3]	3	1	2	4-14	[8,0,1,3]
		8	7		[0,2,3,7]
[7,8]	3	0	3	4-8	[7,8,0,1]
		1	2		[2,3,7,8]
[7,8]	3	0	3	4-16	[7,8,0,2]
		2	1		[1,3,7,8]

Conjunto 6-z26, (013578)

Alturas [0,1,3,5,7,8]

Eixo soma 8, pares [3,5] [1,7] [0,8]

Pares (Card2)	Soma s	Altura x	Altura y y = s - x	Conjunto	Tetracordes
[3,5]	8	1	7	4-11	[0,1,3,5]
		0	8		[3,5,7,8]
[3,5]	8	1	7	4-22	[1,3,5,8]
		8	0		[0,3,5,7]
[1,7]	8	3	5	4-z29	[0,1,3,7]
		0	8		[1,5,7,8]
[1,7]	8	3	5	4-16	[1,3,7,8]
		8	0		[0,1,5,7]
[0,8]	8	1	7	4-14	[8,0,1,3]
		3	5		[5,7,8,0]
[0,8]	8	1	7	4-20	[0,1,5,8]
		5	3		[7,8,0,3]

Tab.1.3 - 8: Mapeamento dos seis conjuntos de tetracordes que podem projetar cada um dos dez hexacordes que relacionam os tetracordes 4-27, 4-12, 4-13, 4-18, 4-z15 e 4-z29

A partir deste mapeamento, podemos construir uma rede de projeções por inversão em torno dos seis hexacordes relacionados aos tetracordes 4-z15 e 4-z29 (Fig.1.3 – 5).

Fig.1.3 - 5: Rede de projeções por inversão em torno dos seis hexacordes relacionados aos tetracordes 4-z15 e 4-z29

Novamente temos uma disposição simétrica entre os conjuntos, distribuídos mais uma vez reiterando as regiões C1, C5, central e superior, com correspondência por multiplicação entre os conjuntos das regiões C1 e C5, como podemos ver na análise dos vetores intervalares dos grupos de alturas destas duas seções¹⁴. Estas relações foram apresentadas nas figuras a seguir (Fig.1.3 – 6):

¹⁴ Incluímos aqui os conjuntos 4-16 e 4-5 como sujeitos híbridos, que são listados como tetracordes da região superior, e também estão presentes nas regiões C5 e C1 por se relacionarem por multiplicação. Trataremos os conjuntos Z-relacionados como estruturas com multiplicidades iguais nas entradas um e cinco, resultando na reiteração do mesmo índice nestes vetores quando o conjunto é submetido ao processo de multiplicação M_5 ou M_7 . Lembrando que nem todos os conjuntos Z-relacionados estão relacionados por multiplicação M_5 ou M_7 , como aponta Oliveira (2007: 117).

Fig.1.3 - 6: Disposição simétrica entre os conjuntos, distribuídos reiterando as regiões C1, C5, central e superior

Temos a seguir as relações de multiplicação M_5 e M_7 entre os conjuntos das regiões C1 e C5, verificada pela análise dos vetores intervalares (Tab.1.3 – 9):

Região C5	Vetores	Região C1	Vetores
4-z29	[111111]	4-z15	[111111]
4-16	[110121]	4-5	[210111]
4-14	[111120]	4-4	[211110]
4-20	[101220]	4-7	[201210]
4-22	[021120]	4-2	[221100]
6-z38	[421242]	6-z6	[421242]
6-z26	[232341]	6-z4	[432321]

Tab.1.3 - 9: Relações de multiplicação M_5 e M_7 entre os conjuntos das regiões C1 e C5

Poderíamos ainda incluir nesta disposição entre região C1 e C5 os hexacordes da região central 6-z50 e 6-z13, pois também apresentam relação de multiplicação pelos fatores M_5 e M_7 , como podemos verificar na análise dos vetores intervalares destes conjuntos (Tab.1.3 – 10):

Região C5	Vetores	Região C1	Vetores
6-z50	[224232]	6-z13	[324222]

Tab.1.3 - 10: Relação de multiplicação pelos fatores M_5 e M_7 entre os hexacordes da região central 6-z50 e 6-z13

Também podemos incluir os tetracordes 4-z15 e 4-z29 à rede de tetracordes relacionados por invariâncias de quatro entradas de vetores intervalares, como podemos verificar na figura abaixo (Fig.1.3 – 7). Interessante perceber que os dois conjuntos incluídos têm o mesmo índice 1 em todas as entradas de vetores, além de cada um poder se relacionar com outros oito tetracordes por invariância de vetores, uma capacidade de interação maior do

conjuntos relacionados por multiplicação que compõem as regiões C1 e C5, intermediados por um grupo de conjuntos que formam a região central (Fig.1.3 – 9). Referente a região superior temos apenas os conjuntos 4-16 e 4-5, que foram incluídos aqui nas regiões C1 e C5 por também se relacionarem por multiplicação entre si pelos fatores M_5 e M_7 .

Fig.1.3 - 8: Rede de projeções por inversão em torno dos seis hexacordes relacionados aos tetracordes 4-27, 4-12, 4-13 e 4-18 ("constelação Morris")

Fig.1.3 - 9: Disposição simétrica entre os conjuntos, distribuídos reiterando as regiões C1, C5 e Central

Finalmente, podemos reunir todas as conexões entre os tetracordes 4-12, 4-27, 4-18, 4-13, 4-z15 e 4-z29 e os dez hexacordes a estes relacionados, incluindo também todos os outros tetracordes que podem projetar estes hexacordes, além dos quatro pentacordes projetados pelos tetracordes da “constelação Morris”. Apresentamos todos estes trinta e cinco conjuntos em um único sistema simétrico de projeções por inversão, como podemos ver a seguir (Fig.1.3 – 10):

Fig.1.3 - 10: Rede de projeções por inversão a partir dos tetracordes 4-12, 4-27, 4-18, 4-13, 4-z15 e 4-z29

1.3.2. Projeções de heptacordes simétricos

Voltando ao acorde Maior 7, é possível também projetar outros quatro conjuntos simétricos em torno dos eixos que orientam os quatro subconjuntos de apenas uma altura (Card1), acrescentando duas notas ao conjunto 4-27 em cada

caso, gerando assim os conjuntos 5-34, 7-34 e duas vezes o mesmo hexacorde 6-z28 (Fig. 1.3 – 11).

Fig.1.3 - 11: Inversões do acorde Dó Maior 7 por alturas individuais, vértices dos tetraedros que formam o *Tonnetz* tridimensional (GOLLIN, 1998)

Fig.1.3 - 12: Inversões do acorde Dó Maior 7 a partir de alturas individuais do tricíorde.
Projeções dos conjuntos 5-34, 7-34 e 6-z28

Novamente, se *substituírmos* as duas notas projetadas pela soma por suas correspondentes originais, o resultado também será a inversão do conjunto 4-27, gerando respectivamente os acordes meio diminutos $Ddim7$, $Edim7$ e duas vezes $Bbdim7(A\sharp dim7)$ (Fig. 1.3 – 12). Esta segunda série de inversões da tríade Maior 7 em quatro acordes meio diminutos também coincidem com outras quatro transformações entre acordes que aparecem no *Tonnetz* tridimensional de Gollin (1998), em suas relações entre os quatro vértices do tetraedro que representa o acorde de Dó Maior 7.

No próximo capítulo veremos como a rede de projeções por inversão – conceito desenvolvido neste primeiro capítulo a partir de aprofundamentos sobre

a teoria neorriemanniana, partindo da perspectiva de Lewin (1982) – encontra correspondências em estudos desenvolvidos por musicólogos inscritos em outra corrente teórica que se dedica ao universo pós-tonal: a teoria dos ciclos intervalares de George Perle (1977). Seguindo esta constatação, corroboramos a suposição levantada por Robert Morris (2007) de que as principais correntes de estudo sobre a teoria pós-tonal – teoria neorriemanniana (LEWIN), teoria dos conjuntos (FORTE) e teoria dos ciclos (PERLE) – poderiam ser alinhadas em torno de uma disposição comum inerente ao sistema de doze notas, possível ser mapeado utilizando a teoria dos grupos – segmento da matemática, especializado no estudo de dimensões simétricas através de estruturas algébricas chamadas de matrizes.

2. TONNETZE DE TETRACORDES

2.1. Rede de ciclos intervalares: reflexões sobre Perle e Pousseur

Voltaremos agora à primeira versão da *rede de projeções por inversão* (perspectiva a partir de tricordes, Fig.1.2 – 13) que apresentamos no capítulo anterior, construída pela interação entre tricordes relacionados apenas por tetracordes em comum, estes projetados a partir de eixos implícitos em subconjuntos de díades (arestas dos triângulos que representam os *Tonnetze* de tricordes) e adição de um par à terceira nota do conjunto, seguindo a mesma soma do eixo invariante. Nesta estrutura cada tricorde pode projetar três tetracordes simétricos distintos (quanto não há reiteração de alturas) previstos em *Tonnetze* específicos que foram apresentados no capítulo anterior.

Podemos verificar que cada uma destes *Tonnetze* de tricordes é representado pela intersecção entre três ciclos intervalares distintos. A partir desta constatação, podemos verificar que há uma reiteração de ciclos intervalares demarcando regiões específicas ao longo da rede de projeções por inversão, que foram aqui representadas nesta *rede de ciclos intervalares* (Fig.2.1 – 1) invariantes entre redes de alturas com tricordes (Card3). Relevante destacar os dois recortes verticais que delimitam a *região C1* (conjuntos 3-1, 3-2 e 3-3) e a *região C5* (conjuntos 3-9, 3-7 e 3-11), caracterizadas pelas presenças invariantes dos ciclos C1 na coluna do lado direito e C5 na coluna do lado esquerdo respectivamente, confirmando a dimensão simétrica de toda esta estrutura. Além disso, temos dois representantes da *região superior* (conjuntos 3-4 e 3-5) que compartilham ambos os ciclos intervalares C1 e C5, concomitantemente. Na segmentação horizontal temos a reiteração dos demais ciclos intervalares, apresentando os recortes de ciclos intervalares C2, C3, C4 e C6, respectivamente de baixo para cima.

Fig.2.1 - 1: Rede de ciclos intervalares invariantes entre redes de alturas com tricordes

A partir da constatação desta possibilidade de construção de *Tonnetze* a partir de *qualquer* tricorde – especulando aqui sobre uma suspeita levantada por Lewin (1982) – fizemos um mapeamos (Tab.2.1 – 1) de todos os ciclos intervalares inerentes a cada um dos tricordes previstos na tabela de classes de conjuntos de Allen Forte (teoria dos conjuntos), bastando para isso consultar a lista de vetores intervalares inerentes a cada um destes tricordes (SOLOMON, 2005).

Tricorde	Vetores	Ciclos			Projeções		
3-1	[210000]	C1	C1	C2	3-1	4-1	4-1
3-2	[111000]	C1	C2	C3	4-1	4-3	4-10
3-3	[101100]	C1	C3	C4	4-3	4-7	4-17
3-4	[100110]	C1	C4	C5	4-7	4-8	4-20
3-5	[100011]	C1	C5	C6	4-8	4-9	4-9
3-6	[020100]	C2	C2	C4	3-6	4-21	4-21
3-7	[011010]	C2	C3	C5	4-10	4-23	4-26
3-8	[010101]	C2	C4	C6	4-21	4-25	4-25
3-9	[010020]	C2	C5	C5	3-9	4-23	4-23
3-10	[002001]	C3	C3	C6	3-10	4-28	4-28
3-11	[001110]	C3	C4	C5	4-17	4-20	4-26
3-12	[000300]	C4	C4	C4	3-12	3-12	3-12

Tab.2.1 - 1: Lista de ciclos intervalares previstos em redes de alturas com tricordes

Com o desdobramento em ciclos intervalares a partir de cada uma das classes de intervalos que compõem estes conjuntos de três alturas, é possível construirmos *Tonnetze* distintos e individuais (Fig.2.1 – 2), decorrentes do molde intervalar tomado de cada um destes tricordes. Aparecem nesta lista os conjuntos 3-6, 3-8, 3-10 e 3-12, não previstos em nossa rede de projeções por inversão (perspectiva a partir de tricordes), mas que podem servir de modelos para construções de redes de alturas a partir destes tricordes, como podemos ver abaixo:

Fig.2.1 - 2: Tonnetze dos tricordes 3-6, 3-8, 3-10 e 3-12

Com esta proposição, alinhamos os procedimentos desenvolvidos para a construção da *rede de projeções por inversão* – um aprofundamento a partir de ferramentas oriundas da teoria neorriemanniana – com outras perspectivas metodológicas que trabalham com conglomerados de ciclos intervalares, com destaque para as “redes harmônicas” de Henri Pousseur ([1968], 2009) e a “teoria dos ciclos intervalares” de George Perle (1977).

Perle se dedica a uma pesquisa que envolve o trabalho com conglomerados de ciclos intervalares e suas resultantes, com destaque para identificação das invariâncias existentes na sobreposição entre os ciclos intervalares C1 (ordem de classe de intervalo |1|, semitom e sétima maior) e C5 (ordem de classe de intervalo |5|, quarta e quinta justas) (PERLE, 1977: 65; 1996: 67). Como podemos verificar nas figuras abaixo (Tab.2.1 – 2), temos duas situações de encontros entre as duas coleções: primeiro com a combinação das duas sequências em ordem direta, que decorre na coincidência a cada três itens,

gerando assim um tetracorde diminuto como invariante (ciclo intervalar C3); e uma segunda combinação das mesmas estruturas escalares, no entanto, com a combinação da inversão de umas das coleções (lembrando que os ciclos intervalares C7 e C11 são respectivamente inversões dos ciclos C5 e C1) com a ordem direta da outra, que decorre na coincidência a cada dois itens, gerando assim uma coleção de tons inteiros invariante (ciclo intervalar C2)¹⁵.

C1	Dó	Dó#	Ré	Mib	Mi	Fá	Fá#	Sol	Láb	Lá	Sib	Si
C5	Dó	Fá	Sib	Mib	Láb	Dó#	Fá#	Si	Mi	Lá	Ré	Sol

C1	Dó	Dó#	Ré	Mib	Mi	Fá	Fá#	Sol	Láb	Lá	Sib	Si
C7	Dó	Sol	Ré	Lá	Mi	Si	Fá#	Dó#	Láb	Mib	Sib	Fá

C11	Dó	Si	Sib	Lá	Láb	Sol	Fá#	Fá	Mi	Mib	Ré	Dó#
C5	Dó	Fá	Sib	Mib	Láb	Dó#	Fá#	Si	Mi	Lá	Ré	Sol

Tab.2.1 - 2: Invariâncias entre ciclos intervalares C1 e C5

Interessante destacar que oposições entre os ciclos intervalares C1 e C5 aparecem em obras de Villa-Lobos. Um exemplo emblemático pode ser verificado no início do *Choros nº2* (1924) (Fig.2.1 – 3), obra na qual o compositor sobrepõe duas camadas estratificadas construídas com recortes distintos destes dois ciclos intervalares dispostos entre duas vozes de instrumentos¹⁶. Na camada superior temos a linha da flauta operando apenas com as sete alturas (Card7) de uma coleção Dó diatônica (conjunto 7-35), uma estrutura que se trata de um segmento do ciclo intervalar C5, corroborada ainda pelo contorno melódico com quarta e quintas diatônicas. A camada inferior é representada pela voz do clarinete, trazendo recortes da escala cromática completa (conjunto 12-

¹⁵ Verificar também (OLIVEIRA, 2007: 31-32).

¹⁶ Para mais detalhes sobre esta obra, verificar nosso artigo intitulado “Análise estrutural do *Choros nº2* de Heitor Villa-Lobos” (ALBUQUERQUE, 2015).

1, Mod12), colocando assim o ciclo intervalar C1 como suporte para este segmento.

Diatônico 7-35 C5

Pouco movido ♩=88

Cromático 12-1 C1

Fig.2.1 - 3: Início do *Choros nº2* de Villa-Lobos, oposição entre os ciclos C1 e C5

Seguindo na mesma esteira, chamou nossa atenção o trabalho desenvolvido por Gretchen Foley (1998), que em sua proposta de continuidade ao legado deixado por George Perle (1977), também mapeou estas regiões de classes de conjuntos regidas por ciclos intervalares invariantes, grupos os quais a musicóloga identificou como espécies de “famílias de ciclos”. Neste processo, a autora relaciona os estudos sobre ciclos intervalares desenvolvidos por Perle e as *operações* matemáticas utilizadas por Richard Cohn (1988) em sua “combinação transpositiva”. Explicando de modo sucinto, o conceito de Cohn opera com resultados de “adições” entre as alturas de dois grupos de alturas, dispostos em eixos transversais de uma matriz de soma (similar ao processo que utilizamos no primeiro capítulo, mas direcionado para outra finalidade que não será tratada neste trabalho).

Foley emprega as mesmas *matrizes* de soma (*teoria dos grupos*) recorrentes no trabalho de Cohn, porém utilizando-as para o desenvolvimento de um método de *projeções* de grandes grupos de alturas a partir da combinação entre pares de conjuntos menores (uma proposta que lembra a “multiplicação” com matrizes de Boulez ([1968], 2009: 208), consequentemente envolvendo *inversões* intervalares entre grupos de alturas. Neste exemplo extraído do trabalho de Foley (1998: 70-71) temos matrizes de soma para a combinação entre díades (05) e projeções a partir do conjunto 3-4 (015), que resultam na sequência dos conjuntos 5-20, 7-14 e 9-9 (Tab.2.1 – 3).

$$(015) \times (05) = (0156A)$$

$$3-4 \times (05) = 5-20$$

5	5	6	10
0	0	1	5
*	0	1	5

$$(0156A) \times (05) = (01356AB)$$

$$5-20 \times (05) = 7-14$$

5	5	6	10	11	3
0	0	1	5	6	10
*	0	1	5	6	10

$$(01356AB) \times (05) = (1234568AB)$$

$$7-14 \times (05) = 9-9$$

5	5	6	8	10	11	3	4
0	0	1	3	5	6	10	11
*	0	1	3	5	6	10	11

Tab.2.1 - 3: Matrizes de soma para a combinação entre díades (05) e projeções a partir do conjunto 3-4 (015) (FOLEY, 1998: 70-71)

Reconhecemos aqui um procedimento destacadamente semelhante ao método apresentado em nosso primeiro capítulo para a construção da *rede de projeções por inversão*, porém ressaltamos que esta proposta de Gretchen Foley (1998) é uma decorrência de estudos mais aprofundados sobre a teoria dos ciclos de Perle (1977), enquanto nossa especulação nasceu de reflexões feitas a partir de possibilidades de construções e expansões de redes de alturas (*Tonnetze*) com diferentes classes de conjuntos, discutindo aqui principalmente conceitos da teoria neorriemanniana que gravitam em torno do trabalho de David Lewin (1982). Esta coincidência entre os resultados extraídos destas duas correntes teóricas autônomas provavelmente se justifica pela importância da utilização das matrizes de soma em ambos os processos.

Foley (1998: 69-76) também investiga sobre a relação entre conjuntos de alturas que gravitam em torno de “famílias” regidas por “imbricações” entre ciclos intervalares, apontando para características harmônicas similares entre as classes de conjuntos envolvidas por estas “famílias de ciclos”. Mais interessante foi perceber que a autora revela a correlação por “multiplicação”¹⁷ entre conjuntos correspondentes entre as “famílias” regidas pelos ciclos intervalares C1 e C5 (Fig.2.1 – 4 e Fig.2.1 – 5), fator que corrobora a nossa hipótese de seccionamento espelhado da rede de projeções por inversão entre as *regiões* C1 e C5, como apresentamos no capítulo anterior.

Fig.2.1 - 4: Relações por combinação transpositiva entre conjuntos regidos pelo ciclo intervalar C1 (FOLEY, 1998: 73)

¹⁷ Destacamos que o conceito de “multiplicação” utilizado por Foley (1998) não envolve apenas a multiplicação de conjuntos por fatores de multiplicação M5 e M7 (RAHN, 1980; OLIVEIRA, 2007) – este foi o conceito de multiplicação trabalhado no nosso primeiro capítulo – mas é um combinado mais amplo que também envolve a multiplicação entre membros de pares de grupos de alturas, em um procedimento que perpassa entre os conceitos de “transposição transpositiva” de Cohn (1988) e a “multiplicação” de Pierre Boulez ([1968], 2009: 208)

Fig.2.1 - 5: Relações por combinação transpositiva entre conjuntos regidos pelo ciclo intervalar C5 (FOLEY, 1998: 73)

O compositor Henri Pousseur ([1968], 2009) percebe ainda antes de George Perle (1977) a importância da relação entre os ciclos intervalares C1 e C5 ao tomar a correspondência entre estas duas ordens – dimensão por ele apreendida na sua leitura de um artigo do musicólogo americano O’Connell (1968)¹⁸ – como ponto de partida para uma série de especulações desenvolvidas com o propósito de elaboração de ferramentas composicionais que serviriam de suporte para a criação de sua ópera *Votre Faust* (1960-68). Pousseur amplia posteriormente seus estudos sobre o assunto ao se envolver na criação de outra obra – *Couleurs Croisées* (1967) – e percebe a possibilidade de interação entre conglomerados de ciclos intervalares de qualquer espécie, desembocando no desenvolvimento de um sistema denominado pelo músico de “redes harmônicas”. Este esquema desenvolvido por Pousseur se assemelha muito às redes de alturas recorrentes em estudos da teoria neorriemanniana, como podemos ver em um exemplo extraído de seu artigo “Apoteose de Rameau, ensaio sobre questões harmônicas” ([1968], 2009: 222), um recorte de um esquema bastante similar ao utilizado para a construção de um *Tonnetz* do tetracorde 4-17 (Fig.2.1 – 6).

¹⁸ O’Connell, Walter. “Der Ton-Raum”. In: *Die Reihe VIII – Rückblicke*, Wien: Universal Edition, 1962: 35-61. Nota de Flô Menezes em sua tradução do artigo “Apoteose de Rameau, ensaio sobre a questão harmônica” de Henri Pousseur ([1968], 2009).

Fig.2.1 - 6: Rede de alturas com o tetracorde 4-17 (POUSSEUR, [1968] 2009: 222)

Interessante destacar que Pousseur não se refere como depositário dos estudos deixados por Hugo Riemann, mas tributa o desenvolvimento deste seu sistema de redes de alturas às técnicas de *multiplicação* preconizadas por Pierre Boulez ([1968], 2009: 208), este o qual recorria à utilização das sobreposições de *grupos* de alturas em *matrizes* de multiplicação para a *projeção* de estruturas maiores (BOULEZ, [1986] 2011: 78-79). Pousseur, no entanto, expõe críticas¹⁹ sobre o modo como Boulez trabalha com esta ferramenta matemática oriunda da *teoria dos grupos*, reclamando essencialmente sobre o tratamento comum dado às alturas dobradas geradas por invariâncias pertinentes ao processo de projeção a partir da inter-relação entre os conjuntos concatenados.

¹⁹ Aliás, parece que este artigo de Henri Pousseur – “Apoteose de Rameau” ([1968], 2009) – apesar de ser dedicado a Pierre Boulez, traz duras críticas sobre os procedimentos composicionais utilizados por este último. Mais adiante neste mesmo artigo, Pousseur questiona ainda sobre as dimensões harmônicas recorrentes na obra de Boulez. As relações entre os dois compositores estremeceram consideravelmente após a publicação deste artigo, segundo Flo Meneses em nota da tradução deste mesmo texto.

A propósito, gostaria de formular uma crítica a certos aspectos do método de multiplicação preconizado por Boulez. Segundo ele (e mesmo se não utilizarmos grupos previamente dispostos no registro, suscetíveis a produzir Oitavas, perante às quais ainda se demonstra certa alergia), seria preciso eliminar as notas repetidas, conservando apenas *um* exemplar de cada grau cromático produzido pela multiplicação.

Ora, isso apresenta uma dupla desvantagem. Quanto mais relevante for a multiplicação, e quanto mais nos aproximarmos de um total cromático indiferenciado, mais deixaríamos escapar ao mesmo tempo as propriedades distintas dos grupos, tanto multiplicados quanto multiplicadores. Enquanto o respeito às dobras de notas obtidas (mesmo à Oitava, se praticarmos a técnica com intervalos dispostos no registro; mas seria preciso ainda, evidentemente, que o sistema harmônico reservasse *a priori* uma possibilidade de aparição legítima e funcional desse intervalo) fornece uma multiplicidade caracterológica das mais preciosas, cuja lógica de engendramento e parentesco é perfeitamente perceptível ao ouvido. (POUSSEUR, [1968] 2009: 208-09)

Vale destacar ainda que existe uma evidente semelhança entre esta proposta de “multiplicação” entre conjuntos de alturas apresentada como ferramenta composicional por Boulez ([1968], 2009: 208) e o conceito teórico de “combinação transpositiva” do musicólogo Richard Cohn (1988), como apontam alguns autores (SCOTTO, 2014; YUST, 2015: 210). Esta semelhança ocorre em parte pelo interesse concomitante dos dois músicos pela utilização de matrizes de soma e multiplicação – um recurso oriundo da teoria dos grupos – fator que confirma mais uma vez a pertinência da hipótese levantada por Morris (2007) sobre a importância desta ferramenta matemática para a comprovação de um fator de proporção intervalar invariante entre atravessa o modo de manuseio das doze alturas entre as principais correntes dedicadas ao estudo da música pós-tonal: teoria dos conjuntos (Forte), teoria dos ciclos (Perle) e teoria neorriemanniana (Lewin).

2.2. Tonnetze a partir de tetracordes simétricos: rede de alturas de Euler

Voltando novamente à primeira rede de projeções por inversão (perspectiva a partir de tricordes), observamos que cada tetracorde simétrico presente neste sistema contém implícito os dois tricordes que o projetaram,

constatação que pode ser apresentada em um *Tonnetz* bidimensional²⁰ (“quadrado”²¹), formatação inspirada a partir da remota rede de alturas de Euler (Fig.2.2 – 1). A seguir recorreremos a este segundo modelo para a construção de um *Tonnetz* com o tetracorde 4-20 (acorde Maior com sétima maior), o mesmo conjunto utilizado por Euler em sua proposta de 1774, dispondo aqui de duas segmentações diferentes de acordo com tricorde escolhido como base para a projeção por inversão: os conjuntos 3-4 e 3-11. Esta distinção entre as duas segmentações é feita na figura de acordo com o corte transversal que divide cada quadrado em duas metades (Fig.2.2 – 2), gerando assim triângulos correspondentes aos conjuntos de tricordes invertidos entre si. Apontamos também que o *Tonnetz* do conjunto 4-20 é construído a partir da intersecção perpendicular entre os ciclos intervalares C4 e C5, ganhando a respectiva segmentação por tricordes de acordo com a adição transversal de um terceiro ciclo intervalar: C3 para a formação do conjunto 3-11 e C1 para o conjunto 3-4. Temos assim para o tetracorde 4-20 a inter-relação total entre quatro ciclos intervalares: C1, C3, C4 e C5.

Fig.2.2 - 1: Rede de alturas com o tetracorde 4-20 (EULER, 1774)

²⁰ Veremos mais à frente a representação de *Tonnetze* tridimensionais construídos a partir de tetracordes não simétricos.

²¹ Cada tetracorde simétrico é representado por um quadrado neste tipo de rede de alturas, diferente dos triângulos que representam tricordes em um *Tonnetz* convencional.

Fig.2.2 - 2: Rede de alturas com o tetracorde 4-20, implícitos os tricordes 3-4 e 3-11

Cada quadrado do *Tonnetz* de Euler corresponde a uma transposição diferente do conjunto 4-20, sendo que quadrados vizinhos estão relacionados entre si por inversão em torno de alturas reiteradas. No caso de dois tetracordes relacionados com pares de alturas em comum (arestas coincidentes entre os quadrados), temos a inversão entre eles através da substituição das demais duas alturas do conjunto original pelas outras duas variantes do conjunto imagem. Na representação pelo *Tonnetz* podemos perceber quatro possibilidades de inversão do conjunto 4-20 por reiteração de pares de alturas e duas variantes para cada tetracorde (Fig.2.2 – 3).

Fig.2.2 - 3: Quatro possibilidades de inversão do conjunto 4-20 por reiteração de pares de alturas e três variantes

Por outro lado, no caso de dois tetracordes relacionados com apenas uma altura em comum (vértices coincidentes entre os quadrados), temos a inversão entre eles através da substituição das demais três alturas do conjunto original pelas outras três variantes do conjunto imagem. Na representação pelo *Tonnetz* podemos perceber outras quatro possibilidades de inversão do conjunto 4-20 por reiteração de alturas isoladas e três variantes para cada tetracorde (Fig.2.2 – 4).

Fig.2.2 - 4: Quatro possibilidades de inversão do conjunto 4-20 por reiteração de alturas isoladas e três variantes

Apresentamos a seguir esta relação entre o conjunto 4-20 original e suas oito imagens (Fig.2.2 – 5), identificando cada um dos tetracordes vizinhos através de coordenadas cartesianas (x, y), orientados pelo conjunto matriz ao centro da figura.

Fig.2.2 - 5: Relação entre o conjunto 4-20 original e suas oito imagens

Mapeamos as diversas possibilidades de projeção de estruturas maiores a partir da sobreposição de pares de tetracordes 4-20, combinando as alturas do conjunto original e as notas variantes de suas inversões (Fig.2.2 – 6 e Fig.2.2 - 7). Verificamos duas possibilidades de conjuntos de hexacordes – conjuntos 6-20 e 6-z26 – formados pela sobreposição entre tetracordes relacionados por pares de alturas em comum e duas notas variantes (arestas coincidentes entre os quadrados), e duas possibilidades de heptacordes – conjuntos 7-22 e 7-z17 – formados pela concomitância entre tetracordes relacionados por apenas uma altura em comum e três notas variantes (vértices coincidentes entre os quadrados).

Fig.2.2 - 6: Hexacordes – conjuntos 6-20 e 6-z26 – formados pela sobreposição entre tetracordes relacionados por pares de alturas em comum e duas notas variantes

Fig.2.2 - 7: Heptacordes – conjuntos 7-22 e 7-z17 – formados pela concomitância entre tetracordes relacionados por apenas uma altura em comum e três notas variantes

Observamos também a possibilidade de construção de estruturas ainda maiores, combinando mais do que pares de tetracordes 4-20 (Fig.2.2 – 8, Fig.2.2 – 9 e Fig.2.2 – 10). Investigamos até os resultados na sobreposição entre o conjunto original e todas as alturas dos seus oito tetracordes vizinhos, destacando a possibilidade de projeção de toda a coleção cromática e a presença de formações menores por conta de reiterações de alturas em alguns desdobramentos. Exploramos primeiramente conjuntos formados por sobreposições de tetracordes relacionados por pares de alturas, depois combinações de tetracordes com apenas uma altura em comum e finalmente a relação entre ambos os casos, como podemos ver nas exposições a seguir:

Fig.2.2 - 8: Conjuntos formados por sobreposições de tetracordes relacionados por pares de alturas

Fig.2.2 - 9: Combinações de tetracordes com apenas uma altura em comum

Fig.2.2 - 10: Combinações entre conglomerados de tetracordes vizinhos

Interessante notar que três desdobramentos de inversões do conjunto 4-20 geram a coleção cromática completa, como podemos ver a seguir (Fig.2.2 –

11). Esta constatação é importante para a verificação de segmentações de totalidades cromáticas presentes em obras interessadas em procedimentos com os doze sons, como é o caso da música modernista do início do século XX, mais particularmente destacada nos processos composicionais empregados no dodecafonismo alemão.

12-1

12-1

Fig.2.2 - 11: Desdobramentos de inversões do conjunto 4-20 geram a coleção cromática completa

Outra constatação importante foi perceber a presença de outros ciclos intervalares implícitos dentro do *Tonnetz* com tetracordes simétricos, como podemos observar na figura abaixo (Fig.2.2 – 12) que se refere à rede de alturas do conjunto 4-20.

Fig.2.2 - 12: Ciclos intervalares implícitos dentro do *Tonnetz* do tetracorde 4-20

A presença desta inter-relação entre ciclos intervalares nos permite mapear regiões harmônicas de outros conjuntos com quatro notas presentes na rede de projeções por inversão (perspectiva a partir de tricordes), assim como os dois tricordes inerentes a estes conjuntos, que nos possibilita a permutação entre *Tonnetze* de tetracordes vizinhos. Representamos esta ramificação entre conjuntos implícitos nesta rede de alturas através de uma “coroa” de tetracordes (Fig.2.2 – 13).

Fig.2.2 - 13: Ramificação entre redes de alturas implícitas no *Tonnetz* do conjunto 4-20; “coroa” de tetracordes

Podemos notar a presença dos três tetracordes projetados a partir do conjunto 3-4 – 4-20, 4-8 e 4-7 – e os tricordes implícitos que também projetam estes tetracordes – respectivamente 3-11, 3-5 e 3-3 – e os três tetracordes projetados pelo conjunto 3-11 – 4-20, 4-26 e 4-17 – e os tricordes implícitos que também projetam estes tetracordes – respectivamente 3-4, 3-7 e 3-3. Apresentamos a seguir o recorte da rede de projeções por inversão (Fig.2.2 – 14) mostrando a relação entre estes conjuntos listados na *coroa de tetracordes* inerente ao *Tonnetz* do conjunto 4-20.

Fig.2.2 - 14: Recorte da rede de projeções por inversão, conjuntos listados na coroa de tetracordes do *Tonnetz* do conjunto 4-20

A seguir faremos a segmentação e o mapeamento harmônico de outros tetracordes simétricos presentes na rede de projeção por inversão, apresentando seus respectivos *Tonnetze*, os possíveis agrupamentos entre conjuntos com quatro alturas para construção de estruturas maiores e a disposição dos ciclos intervalares inerentes a estas formações. Importante notar que todos estes tetracordes são simétricos em torno de dois pares de classes intervalos que permitem a representação da inversão destes conjuntos através de uma rede de alturas bidimensional baseado na relação de duas classes de

ciclos intervalares dispostas de maneira perpendicular. Cada tetracorde pode ser segmentado em dois pares de tricordes invertidos entre si, representados pelas duas possibilidades de corte transversal do quadrado, gerando assim dois novos ciclos intervalares pertinentes à respectiva estrutura. Veremos mais à frente a necessidade de representações de *Tonnetze* através de cubos tridimensionais (GOLLIN, 1998) para o caso de tetracordes assimétricos e não baseados em pares de classes de intervalos.

2.3. Correspondências por multiplicação pelos fatores M_5 e M_7

O conjunto 4-20 estudado acima faz parte da *região* C5 na rede de projeções por inversão (tanto na perspectiva a partir de tricordes, como na versão a partir da “constelação Morris”), tendo como correspondente na *região* C1 o tetracorde 4-7. Por esta razão, faremos agora o mapeamento harmônico deste segundo conjunto e verificaremos a seguir os desdobramentos de invariâncias nesta relação de multiplicação pelos fatores M_5 e M_7 que existe entre estes grupos de alturas equivalentes.

Apresentamos a seguir o *Tonnetz* do conjunto 4-7 (Fig.2.3 – 1), dispondo também suas duas segmentações diferentes implícitas de acordo com tricorde escolhido como base para a projeção por inversão: os conjuntos 3-3 e 3-4. Esta distinção entre as duas segmentações é feita na figura de acordo com o corte transversal que divide cada quadrado em duas metades, gerando assim triângulos correspondentes aos conjuntos de tricordes invertidos entre si. Apontamos também que a rede de alturas do conjunto 4-7 é construída a partir da intersecção perpendicular entre os ciclos intervalares C1 e C4, ganhando a respectiva segmentação por tricordes de acordo com a adição transversal de um terceiro ciclo intervalar: C3 para a formação do conjunto 3-3 e C5 para o conjunto 3-4. Interessante notar os *Tonnetze* dos conjuntos 4-20 e 4-20 utilizam as mesmas classes de ciclos intervalares (C1, C3, C4 e C5), no entanto, a diferença é a substituição entre os ciclos intervalares C1 e C5 em todos os casos, com reiteração dos ciclos C3 e C4 nas mesmas posições, o que reforça a importância da relação de multiplicação pelos fatores M_5 e M_7 entre os dois tetracordes relacionados.

Fig.2.3 - 1: Rede de alturas com o tetracorde 4-7, implícitos os tricordes 3-4 e 3-3

Mapeamos na representação pelo *Tonnetz* as quatro possibilidades de inversão do conjunto 4-7 por reiteração de pares de alturas e duas variantes para cada tetracorde (relação por arestas entre os quadrados), além das outras quatro possibilidades de inversão deste conjunto por reiteração de alturas isoladas e três variantes para cada tetracorde (relação por vértices entre os quadrados). Apresentamos a seguir (Fig.2.3 – 2) esta relação entre o conjunto original e suas oito imagens, identificando cada um dos tetracordes vizinhos através de coordenadas cartesianas (x, y), orientados pelo conjunto matriz ao centro da figura.

Fig.2.3 - 2: Relação entre o conjunto 4-7 original e suas oito imagens

Mapeamos as diversas possibilidades de projeção de estruturas maiores a partir da sobreposição de pares de tetracordes 4-7, combinando as alturas do conjunto original e as notas variantes de suas inversões (Tab.2.3 – 1). Verificamos duas possibilidades de conjuntos de hexacordes – conjuntos 6-20 e 6-z4 – formados pela sobreposição entre tetracordes relacionados por pares de alturas em comum e duas notas variantes (arestas coincidentes entre os quadrados), e duas possibilidades de heptacordes – conjuntos 7-22 e 7-z37 – formados pela concomitância entre tetracordes relacionados por apenas uma altura em comum e três notas variantes (vértices coincidentes entre os quadrados). Essas possibilidades de combinações podem ser verificadas na tabela abaixo:

Tetracordes	Relação	Projeção	Conjunto
(0,0),(0,1)	Arestas	[0,1,4,5,8,9]	6-20
(0,0),(-1,0)	Arestas	[11,0,1,3,4,5]	6-z4
(0,0),(1,0)	Arestas	[0,1,2,4,5,6]	6-z4
(0,0),(0,-1)	Arestas	[0,1,4,5,8,9]	6-20
(0,0),(-1,1)	Vértices	[11,0,1,4,5,7,8]	7-22
(0,0),(1,1)	Vértices	[9,10,0,1,2,4,5]	7-z37
(0,0),(1,-1)	Vértices	[4,5,6,9,10,0,1]	7-22
(0,0),(-1,-1)	Vértices	[0,1,3,4,5,7,8]	7-z37

Tab.2.3 - 1: Projeções a partir da sobreposição de pares de tetracordes 4-7 vizinhos, combinando as alturas do conjunto original e as notas variantes de suas inversões

Interessante notar que dos quatro conjuntos projetados a partir de pares de tetracordes 4-20 e 4-7, estes conjuntos relacionados por multiplicação M_5 e M_7 e correspondentes na rede de projeções por inversão entre as regiões C1 e C5 (tanto na perspectiva a partir de tricordes, como na versão a partir da “constelação Morris”), dois coincidem (6-20 e 7-22) e dois também se relacionam entre si por multiplicação pelos fatores M_5 e M_7 (6-z4 e 6-z26; 7-z37 e 7-z17), como podemos verificar na relação entre os vetores intervalares destes equivalentes, apresentados na tabela abaixo (Tab.2.3 – 2).

Região C5		Região C1	
Conjunto	Vetor	Conjunto	Vetor
4-20	[101220]	4-7	[201210]
6-z26	[232341]	6-z4	[432321]
7-z17	[434541]	7-z37	[434541]

Tab.2.3 - 2: Correspondências por multiplicação pelos fatores M_5 e M_7 entre as projeções dos tetracordes 4-20 e 4-7

Observamos também a possibilidade de construção de estruturas ainda maiores, combinando mais do que pares de tetracordes 4-7 (Tab.2.3 – 3). Investigamos até os resultados na sobreposição entre o conjunto original e todas as alturas dos seus oito tetracordes vizinhos, destacando a possibilidade de projeção de toda a coleção cromática e a presença de formações menores por conta de reiterações de alturas em alguns desdobramentos. Exploramos primeiramente conjuntos formados por sobreposições de tetracordes relacionados por pares de alturas, depois combinações de tetracordes com apenas uma altura em comum e finalmente a relação entre ambos os casos, como podemos ver nas exposições a seguir:

Tetracordes	Relação	Projeção	Conjunto
(0,0),(0,1),(1,0)	Arestas	[0,1,2,4,5,6,8,9]	8-19
(0,0),(-1,0),(0,-1)	Arestas	[8,9,11,0,1,3,4,5]	8-19
(0,0),(0,1),(0,-1)	Arestas	[0,1,4,5,8,9]	6-20
(0,0),(-1,0),(1,0)	Arestas	[11,0,1,2,3,4,5,6]	8-1
(0,0),(-1,1),(1,1)	Vértices	[7,8,9,10,11,0,1,2,4,5]	10-3
(0,0),(1,1),(1,-1)	Vértices	[9,10,0,1,2,4,5,6]	8-19
(0,0),(1,-1),(-1,-1)	Vértices	[3,4,5,6,7,8,9,10,0,1]	10-3
(0,0),(-1,-1),(-1,1)	Vértices	[11,0,1,3,4,5,7,8]	8-19
(0,0),(-1,1),(1,-1)	Vértices	[4,5,6,7,8,9,10,11,0,1]	10-1
(0,0),(-1,-1),(1,1)	Vértices	[0,1,2,3,4,5,7,8,9,10]	10-5
(0,0),(0,1),(1,1),(1,0)	Ambas	[0,1,2,4,5,6,8,9,10]	9-12
(0,0),(0,1),(1,1),(1,0), (0,-1),(1,-1)	Ambas	[0,1,2,4,5,6,8,9,10]	9-12

Tab.2.3 - 3: Projeções a partir da sobreposição de pares de tetracordes 4-7 vizinhos, conglomerados maiores

Novamente temos a coincidência entre conjuntos projetados a partir de pares de tetracordes 4-20 e 4-7. Os dois únicos que se distinguem (8-1 e 8-23)

se relacionam entre si por multiplicação pelos fatores M_5 e M_7 , como podemos verificar na relação entre os vetores intervalares destes equivalentes (quatro entradas invariantes entre os conjuntos pareados e a inversão entre os índices das estradas 1 e 5), apresentados na tabela abaixo (Tab.2.3 – 4). Além disso, os conjuntos 8-1 e 8-23 são respectivamente recortes dos ciclos intervalares C_1 e C_5 , assim como os conjuntos 10-1 e 10-5, também inerentes à projeção a partir dos tetracordes tratados e ainda relacionados pelos mesmos índices de multiplicação.

Região C5		Região C1	
Conjunto	Vetor	Conjunto	Vetor
8-23	[465472]	8-1	[765442]
10-5	[888894]	10-1	[988884]

Tab.2.3 - 4: Correspondências por multiplicação pelos fatores M_5 e M_7 entre as projeções dos tetracordes 4-20 e 4-7

Também neste caso temos três desdobramentos de inversões do conjunto 4-7 que geram a coleção cromática completa, em construções equivalentes às encontradas para o conjunto 4-20, como podemos verificar a seguir (Fig.2.3 – 3):

Fig.2.3 - 3: Desdobramentos de inversões do conjunto 4-7 geram a coleção cromática completa

Verificamos também a presença de outros ciclos intervalares implícitos dentro do *Tonnetz* do tetracorde 4-7, como podemos observar na figura abaixo (Fig.2.3 – 4). Comparando a disposição entre os ciclos intervalares inerentes aos *Tonnetze* dos tetracordes 4-7 e 4-20, temos a reiteração dos mesmos ciclos intervalares nas mesmas disposições, com exceção dos ciclos C1 e C5 que sempre aparecem invertidos entre si entre os dois sistemas (o ciclo C5 é substituído pelo ciclo C1, e vice-versa), implicação que demonstra a relação por multiplicação M_5 e M_7 entre os dois conjuntos.

Fig.2.3 - 4: Ciclos intervalares implícitos dentro do *Tonnetz* do tetracorde 4-7

A partir dos dados sobre a inter-relação entre ciclos intervalares para o conjunto 4-7, foi possível mapear regiões harmônicas de outros tetracordes presentes na rede de projeções por inversão (perspectiva a partir de tricordes), assim como os dois tricordes inerentes a estes conjuntos, que nos possibilita a permutação entre *Tonnetze* quadrados vizinhos. Representamos esta

ramificação entre conjuntos implícitos nesta rede de alturas através da *coroa de tetracordes* do conjunto 4-7 (Fig.2.3 – 5).

Fig.2.3 - 5: Ramificação entre redes de alturas implícitas no *Tonnetz* do conjunto 4-7; “coroa” de tetracordes

Podemos notar a presença dos três tetracordes projetados a partir do conjunto 3-4 – 4-20, 4-8 e 4-7 – e os tricordes implícitos que também projetam estes tetracordes – respectivamente 3-11, 3-5 e 3-3 – e os três tetracordes projetados pelo conjunto 3-3 – 4-17, 4-3 e 4-7 – e os tricordes implícitos que também projetam estes tetracordes – respectivamente 3-11, 3-2 e 3-4. Apresentamos a seguir o recorte da rede de projeções por inversão (perspectiva a partir de tricordes) mostrando a relação entre estes conjuntos listados na coroa de tetracordes inerente ao *Tonnetz* do tetracorde 4-7 (Fig.2.3 – 6).

Fig.2.3 - 6: Recorte da rede de projeções por inversão, conjuntos listados na coroa de tetracordes do *Tonnetz* do conjunto 4-7

Verificamos acima que os *Tonnetze* construídos a partir dos tetracordes 4-20 e 4-7 apresentam equivalências de resultantes em processos de projeções de grupos de alturas com maior cardinalidade, desdobramentos decorrentes da relação entre estes tetracordes de base por multiplicação pelos índices M_5 e M_7 . Buscando examinar a constância destes desdobramentos entre conjuntos correlacionados por multiplicação, poderíamos ainda mapear outras possibilidades de *Tonnetze* gerados a partir de pares de tetracordes simétricos presentes na rede de projeção por inversão referentes entre as regiões C1 e C5,

confirmando as implicações decorrentes desta correspondência entre estes conjuntos.

2.4. Mapeamento de todos os *Tonnetze* para tetracordes simétricos

Considerando a existência de seis classes de ciclos intervalares (C1, C2, C3, C4, C5 e C6 [STRAUS, 2005]), estipulando que redes de alturas de tetracordes simétricos (Card4) devem ser construídas a partir da disposição perpendicular entre dois destes ciclos, deduzindo um número máximo de vinte e uma combinações deste tipo possíveis, e excluindo algumas disposições que geram conjuntos repetidos e outros com cardinalidades menores por conta de redundâncias de alturas, mapeamos todas as sequências intervalares que servem de base para a construção de *Tonnetze* bidimensionais (Tab.2.4 – 1) a partir dos quinze tetracordes simétricos previstos pela teoria dos conjuntos (SOLOMON, 2005). Além disso, listamos os dois subconjuntos implícitos que projetam por inversão cada um destes tetracordes, deduzidos a partir dos outros dois ciclos intervalares que atravessam transversalmente cada um dos “quadrados” que estruturam estes *Tonnetze*. Destacamos ainda para a presença de duas reiterações nesta tabela – entre as relações C1 x C6 e C5 x C6, que geram o mesmo tricorde 4-9, e entre os ciclos C2 x C6 e C4 x C6, que geram o mesmo conjunto 4-25.

Ciclos		Projeção	Subconjuntos	
C1	C1	3-1	3-1	2-1
C1	C2	4-1	3-2	3-1
C1	C3	4-3	3-3	3-2
C1	C4	4-7	3-4	3-3
C1	C5	4-8	3-5	3-4
C1	C6	4-9	3-5	3-5
C2	C2	3-6	3-6	2-2
C2	C3	4-10	3-7	3-2
C2	C4	4-21	3-8	3-6
C2	C5	4-23	3-7	3-9
C2	C6	4-25	3-8	3-8
C3	C3	3-10	3-10	2-3
C3	C4	4-17	3-11	3-3
C3	C5	4-26	3-4	3-7
C3	C6	4-28	3-10	3-10
C4	C4	3-12	3-12	2-4
C4	C5	4-20	3-4	3-11
C4	C6	4-25	3-8	3-8
C5	C5	3-9	3-9	2-5
C5	C6	4-9	3-5	3-5
C6	C6	2-6	2-6	2-6

Tab.2.4 - 1: Mapeamento de todos os *Tonnetze* de tetracordes simétricos e seus subconjuntos implícitos. Cruzamentos perpendiculares entre pares de ciclos intervalares

Vários destes conjuntos projetados pela intersecção entre classes de ciclos intervalares se relacionam por multiplicação pelos índices M_5 e M_7 , e aparecem como correspondentes entre as regiões C1 e C5 na rede de projeções

por inversão (tanto na perspectiva a partir de tricordes, como na versão a partir da “constelação Morris”). Interessante notar que estes conjuntos correlacionados mantêm em comum um dos ciclos intervalares e a correspondência entre os ciclos intervalares C1 e C5 (o ciclo C1 é substituído pelo C5 entre os conjuntos equivalentes, e vice-versa, Tab.2.4 – 2). Observamos esta invariância também na rede de ciclos intervalares apresentada no início deste segundo capítulo.

Região C5			Região C1		
Projeção	Ciclos		Projeção	Ciclos	
4-8	C5	C1	4-8	C1	C5
4-23	C5	C2	4-1	C1	C2
4-26	C5	C3	4-3	C1	C3
4-20	C5	C4	4-7	C1	C4
4-9	C5	C6	4-9	C1	C6
3-9	C5	C5	3-1	C1	C1

Tab.2.4 - 2: Invariâncias entre ciclos intervalares entre ciclos de alturas de conjuntos relacionados por multiplicação pelos fatores M5 e M7, correspondências entre regiões C1 e C5.

Podemos ainda incluir mais sete opções de *Tonnetze* construídos a partir da intersecção perpendicular entre ciclos intervalares ao incluirmos a possibilidade de interação com o ciclo C0 (Tab.2.4 – 3), uma ordem que reitera sempre a mesma classe de altura (considerando como equivalentes as notas em diferentes oitavas ou em uníssono), seguindo aqui as propostas desenvolvidas por George Perle (1977) e Henri Pousseur ([1968], 2009), acrescentando uma possibilidade não prevista no texto de Straus (2005).

Ciclos		Projeção	Subconjuntos	
C0	C0	1-1	1-1	1-1
C0	C1	2-1	2-1	2-1
C0	C2	2-2	2-2	2-2
C0	C3	2-3	2-3	2-3
C0	C4	2-4	2-4	2-4
C0	C5	2-5	2-5	2-5
C0	C6	2-6	2-6	2-6

Tab.2.4 - 3: Mapeamento de redes de alturas a partir de combinações com o ciclo intervalar C0

2.5. *Tonnetze* tridimensionais: reflexões sobre Gollin (1998)

Neste último segmento do segundo capítulo retomaremos sobre o conceito de redes de alturas a partir de tetracordes não simétricos, que, segundo alguns estudos neorriemannianos de Gollin (1998), podem ser representados em *Tonnetze* tridimensionais, conceito demonstrado pelo autor na construção de uma rede de alturas com o tetracorde 4-27. Trabalharemos com as elaborações apresentadas por Gollin em torno das relações PRL da teoria neorriemanniana redimensionadas nesta perspectiva tridimensional e investigaremos sobre as formações de redes de ciclos intervalares inerentes a estas estruturas, investigando ainda sobre as possibilidades de projeções por inversões a partir de tetracordes não simétricos (uma complementação ao assunto desenvolvido no final do primeiro capítulo). Trataremos também sobre as equivalências entre as redes de alturas tridimensionais de conjuntos relacionados por multiplicação M_5 e M_7 , tomando como exemplo os tetracordes 4-27 e 4-12, correspondentes entre as *regiões* C1 e C5 da rede de projeções por inversão. Além disso, investigaremos um pouco mais sobre a relação entre os tetracordes 4-27, 4-12, 4-18 e 4-11, conjuntos que juntos representam a “constelação Morris” (SALLMEN, 2011).

Como última parte desta exposição, apresentaremos uma lista com as possibilidades de construções de *Tonnetze* tridimensionais com tetracordes não

simétricos, mapeando todas as combinações entre ciclos intervalares que organizam estas estruturas, encerrando assim nossa especulação sobre a possibilidade de construção de redes de alturas a partir de qualquer conjunto, tomando como ponto de partida as suposições levantadas por David Lewin (1982).

2.6. Mapeamento de todos os *Tonnetze* tridimensionais para octacordes simétricos

Observando o *Tonnetz* tridimensional proposto por Gollin (1998) (Fig. 2.6 – 1), podemos entender que esta estrutura está construída pela justaposição de tetraedros que representam inversões de tetracordes do conjunto 4-27 (acorde Dó Maior 7 [em destaque] e acordes meio diminutos para as inversões). Além disso, temos uma estrutura construída pela intersecção de três ciclos intervalares matriciais (C2, C4 e C5); que, por sua vez, preveem em outros três ciclos intervalares secundários implícitos (C3, C3 e C6), como podemos perceber na figura abaixo:

Fig. 2.6 - 1: *Tonnetze* tridimensional de Gollin (1998), conjunto 4-27 (Dó Maior 7): ciclos intervalares matriciais (C2, C4 e C5) e secundários (C3, C3 e C6)

Considerando a possibilidade de construção de um *Tonnetze* tridimensional a partir de *qualquer* tetracorde – reiterando novamente a hipótese levantada por Lewin (1982) – fizemos um mapeamos (Tab. 2.6 - 1) de todos os seis ciclos intervalares inerentes a cada um dos tetracordes previstos na tabela de classes de conjuntos de Allen Forte (teoria dos conjuntos), bastando para isso consultar a lista de vetores intervalares inerentes a cada um destes conjuntos (SOLOMON, 2005).

Tricorde	Vetores	Ciclos					
4-1	[321000]	C1	C1	C1	C2	C2	C3
4-2	[221100]	C1	C1	C2	C2	C3	C4
4-3	[212100]	C1	C1	C2	C3	C3	C4
4-4	[211110]	C1	C1	C2	C3	C4	C5
4-5	[210111]	C1	C1	C2	C4	C5	C6
4-6	[210021]	C1	C1	C2	C5	C5	C6
4-7	[201210]	C1	C1	C3	C4	C4	C5
4-8	[200121]	C1	C1	C4	C5	C5	C6
4-9	[200022]	C1	C1	C5	C5	C6	C6
4-10	[122010]	C1	C2	C2	C3	C3	C5
4-11	[121110]	C1	C2	C2	C3	C4	C5
4-12	[112101]	C1	C2	C3	C3	C4	C6
4-13	[112011]	C1	C2	C3	C3	C5	C6
4-14	[111120]	C1	C2	C3	C4	C5	C5
4-z15	[111111]	C1	C2	C3	C4	C5	C6
4-16	[110121]	C1	C2	C4	C5	C5	C6
4-17	[102210]	C1	C3	C3	C4	C4	C5
4-18	[102111]	C1	C3	C3	C4	C5	C6
4-19	[101310]	C1	C3	C4	C4	C4	C5
4-20	[101220]	C1	C3	C4	C4	C5	C5
4-21	[030201]	C2	C2	C2	C4	C4	C6
4-22	[021120]	C2	C2	C3	C4	C5	C5
4-23	[021030]	C2	C2	C3	C5	C5	C5
4-24	[020301]	C2	C2	C4	C4	C4	C6
4-25	[020202]	C2	C2	C4	C4	C6	C6

4-26	[012120]	C2	C3	C3	C4	C5	C5
4-27	[012111]	C2	C3	C3	C4	C5	C6
4-28	[004002]	C3	C3	C3	C3	C6	C6
4-z29	[111111]	C1	C2	C3	C4	C5	C6

Tab. 2.6 - 1: Lista de ciclos intervalares previstos em redes de alturas com tetracordes

Para encontrarmos correspondências por multiplicação M_5 e M_7 entre pares destes conjuntos, basta identificar e inverter os índices de entradas de vetores intervalares $|1|$ e $|5|$ entre dois tetracordes equivalentes – com invariância entre os índices dos demais vetores – como podemos perceber na relação entre os conjuntos 4-12 e 4-27 (Tab. 2.6 – 2).

Tricorde	Vetores	Ciclos					
4-12	[1 121 0 1]	C2	C3	C3	C4	C1	C6
4-27	[0 121 1 1]	C2	C3	C3	C4	C5	C6

Tab. 2.6 - 2: Correspondência por multiplicação M_5 e M_7 entre os conjuntos 4-12 e 4-27

Esta relação por multiplicação entre dois tetracordes fica ainda mais evidente quando construímos um *Tonnetz* tridimensional para um tetracorde 4-12 a partir de um tetracorde 4-27, bastando apenas substituir os ciclos intervalares C5 pelos C1 (e vice-versa) – reiterando os demais ciclos – como podemos observar na figura abaixo (Fig. 2.6 – 2):

Fig. 2.6 - 2: *Tonnetz* tridimensional de Gollin (1998), conjunto 4-12 (Dó Maior 7): ciclos intervalares matriciais (C2, C4 e C1) e secundários (C3, C3 e C6)

Podemos ainda reinterpretar a construção deste *Tonnetz* tridimensional de Gollin (1998), não mais como inversões do acorde Dó Maior 7 (conjunto 4-27) representadas como tetraedros justapostos, mas como uma rede de alturas redesenhada com intersecções perpendiculares de ciclos intervalares em ângulos retos (90°). Temos assim a estrutura de um “cubo” com alturas em seus oito vértices (Card8), incluindo o subconjunto 4-27 implícito em alguns de seus tetraedros (Fig. 2.6 – 3). Por sua vez, este acorde Dó Maior 7 pode projetar outros cubos de octacordes em cada uma das suas dez inversões possíveis (seis relacionando pares de alturas em comum – ligados pelas arestas dos tetraedros que representam os tetracordes – e três em suas relações de inversão por reiteração de apenas uma altura invariante – posicionadas nos vértices destas figuras). Apresentamos a seguir algumas possibilidades de projeções de cubos de alturas²² que contemplem inversões do conjunto 4-27. Temos aqui seis

²² Considerando que investigamos apenas uma projeção do cubo de oito alturas para cada uma das dez inversões do conjunto 4-27. Provavelmente outras classes de conjuntos de octacordes poderão aparecer seguindo outros reposicionamentos das alturas do tetracorde no hexaedro (lembrando que o conjunto 4-27 prevê a combinação de seis ciclos intervalares, dimensões que

inversões em torno de duas alturas invariantes (pares de notas interligadas pelas arestas do hexaedro que representa o acorde Dó Maior 7), as quais projetam três pares de conjuntos simétricos: dois octacordes octatônicos (conjunto 8-28), dois octacordes do conjunto 8-23 e dois hexacordes do conjunto 6-z50. Temos na sequência também outras quatro inversões em torno de alturas individuais invariantes (cada uma das alturas que estão nos vértices do hexaedro que representa o acorde Dó Maior 7), as quais projetam outros quatro octacordes simétricos: o conjunto 8-28 e três versões do conjunto 8-23.

não foram esgotadas neste texto), reorganizando de outras maneiras a combinação perpendicular dos três ciclos intervalares bases que orientam a construção de cada cubo de alturas. Apresentamos mais à frente a lista completa com todas as combinações possíveis entre trios de ciclos intervalares para a construção de *Tonnetze* tridimensionais com cubos de octacordes, incluindo também os subconjuntos de tetracordes simétricos que formam as faces destes poliedros.

Fig. 2.6 - 3: projeções de cubos de octacordes a partir de inversões do tetracorde Dó Maior 7

Podemos perceber que duas estruturas aparecem reiteradas nestas projeções de cubos de octacordes a partir de inversões do acorde Dó Maior 7: o conjunto 8-28 – que chamaremos aqui de “cubo octatônico” – e o conjunto 8-23 (este segundo é um segmento do ciclo intervalar C5, assim como os conjuntos 7-35 [coleção diatônica] e 5-35 [coleção pentatônica]). Analisando a disposição das alturas neste cubo octatônico (conjunto 8-28), podemos perceber que outras possibilidades de tetraedros – além da representação do conjunto 4-27 – estão implícitas nesta mesma estrutura, bastado combinar três alturas de uma das faces com uma altura da frente oposta, como verificamos na tabela a seguir (Tab. 2.6 – 3):

Superior Inferior	Tetracorde	Direita Esquerda	Tetracorde	Frente Fundo	Tetracorde
[10,0,4,1]	4-12	[7,9,6,1]	4-z29	[0,3,9,1]	4-12
[10,0,4,3]	4-z15	[7,9,6,3]	4-12	[0,3,9,7]	4-27
[10,0,4,7]	4-27	[7,9,6,0]	4-13	[0,3,9,10]	4-13
[10,0,4,9]	4-z29	[7,9,6,10]	4-3	[0,3,9,4]	4-18
[10,4,6,1]	4-27	[9,6,4,1]	4-26	[3,6,9,1]	4-27
[10,4,6,3]	4-z29	[9,6,4,3]	4-13	[3,6,9,7]	4-12
[10,0,4,7]	4-12	[9,6,4,0]	4-27	[3,6,9,10]	4-18
[10,0,4,9]	4-z15	[9,6,4,10]	4-z15	[3,6,9,4]	4-13
[0,4,6,1]	4-z15	[7,6,4,1]	4-13	[0,9,6,1]	4-18
[0,4,6,3]	4-12	[7,6,4,3]	4-3	[0,9,6,7]	4-13
[0,4,6,7]	4-z29	[7,6,4,0]	4-z29	[0,9,6,10]	4-12
[0,4,6,9]	4-27	[7,6,4,10]	4-12	[0,9,6,4]	4-27
[10,0,6,1]	4-z29	[4,7,9,1]	4-27	[0,3,6,1]	4-13
[10,0,6,3]	4-27	[4,7,9,3]	4-z15	[0,3,6,7]	4-18
[10,0,6,7]	4-z15	[4,7,9,0]	4-26	[0,3,6,10]	4-27
[10,0,6,9]	4-12	[4,7,9,10]	4-13	[0,3,6,4]	4-12

Tab. 2.6 - 3: possibilidades de tetracordes representados por tetraedros implícitos no cubo octatônico

Podemos observar que temos a reiteração de oito tetracordes: os conjuntos que compõem a “constelação Morris” (2011) – 4-12, 4-13, 4-18 e 4-27

– além dos tetracordes 4-3, 4-26, 4-z15, 4-z29, entre os quais estão os conjuntos matriciais que selecionamos para a composição da rede de projeções por inversão a partir da “constelação Morris”. Além disso, quase todos os tetracordes se relacionam por multiplicação M_5 e M_7 (4-26 e 4-3; 4-27 e 4-12; 4-z29 e 4-z15), com exceção dos conjuntos 4-13 e 4-18 (Tab.2.6 – 4). Por outro lado, estes dois últimos mantêm uma posição perpendicular e simétrica em relação ao grupo na rede de projeções por inversão (Fig. 2.6 – 4), além da invariância de quatro entradas dos vetores intervalares, com a inversão dos valores das entradas |2| e |5|. Estas proximidades intervalares entre estes tetracordes ficam mais evidentes na concentração destes seis conjuntos na mesma região da rede de invariância entre vetores intervalares (Fig. 2.6 – 5).

Região C5		Região C1	
Conjunto	Vetores	Conjunto	Vetores
4-27	[012111]	4-12	[112101]
4-26	[012120]	4-3	[212100]
4-z29	[111111]	4-z15	[111111]

Região central	
Conjunto	Vetores
4-18	[112101]
4-13	[102111]

Tab. 2.6 - 4: relações de invariância vetorial entre tetracordes de tetraedros implícitos no cubo octatônico

Fig. 2.6 - 4: relações de rede de projeções por inversão entre tetracordes de tetraedros implícitos no cubo octatônico

Fig. 2.6 - 5: relações na rede de invariância vetorial entre tetracordes de tetraedros implícitos no cubo octatônico

Outra informação importante sobre o cubo octatônico (conjunto 8-28) é que suas laterais formam três pares de tetracordes simétricos – os conjuntos 4-

25 nas faces superior e inferior, 4-10 nas faces laterais direita e esquerda, e 4-28 nas faces frontal e fundo. Desta forma é possível tomar cada um destes tetracordes como matrizes para a construção de três *Tonnetze* bidimensionais interdependentes, que se relacionam em torno de um único *Tonnetz* tridimensional. Temos ainda outros seis tetracordes simétricos que formam faces transversais internas – de três pares dos conjuntos 4-9, 4-10 e 4-17 – que possibilitam a construção de outros seis *Tonnetze* bidimensionais a partir de cada um destes conjuntos. Temos assim um grande sistema interdependente relacionando cinco matrizes de *Tonnetze* bidimensionais – a partir dos conjuntos 4-9, 4-10, 4-17, 4-25 e 4-28 – concatenados em um único *Tonnetz* tridimensional formado a partir do cubo octatônico (conjunto 8-28).

Fig. 2.6 - 6: tetracordes simétricos que foram as faces externas do cubo octatônico

Fig. 2.6 - 7: tetracordes simétricos que foram as faces internas do cubo octatônico

Podemos ainda encontrar justaposições de cubos de alturas que completam a escala cromática (conjunto 12-1), como podemos perceber na concatenação de dois cubos octatônicos (conjunto 8-28). Isso se torna relevante, por exemplo, na busca por padrões simétricos e outras características harmônicas em séries dodecafônicas do modernismo germânico.

Fig. 2.6 - 8: justaposição de cubos octatônicos, coleção cromática

Considerando a existência de seis classes de ciclos intervalares (C1, C2, C3, C4, C5 e C6 [STRAUS, 2005]), estipulando que redes de alturas com tetracordes representados por tetraedros (Card4) devem ser construídas a partir da disposição perpendicular entre três destes ciclos, deduzindo um número máximo de cinquenta e seis combinações deste tipo possíveis, e excluindo algumas disposições que geram conjuntos repetidos e outros com cardinalidades menores por conta de redundâncias de alturas, mapeamos todas as sequências intervalares que servem de base para a construção de *Tonnetze* tridimensionais a partir de octacordes simétricos (Tab.2.6 – 5). Além disso, listamos os três subconjuntos de tetracordes simétricos implícitos que compõem cada uma das seis faces dos cubos de alturas (superior/inferior – frente/fundo – laterais direita/esquerda).

Ciclos			Projeção	Subconjuntos (faces)		
C1	C1	C1	4-1	3-1	3-1	3-1
C1	C1	C2	5-1	3-1	4-1	4-1
C1	C1	C3	6-1	3-1	4-3	4-3
C1	C1	C4	6-z4	3-1	4-7	4-7
C1	C1	C5	6-z6	3-1	4-8	4-8
C1	C1	C6	6-7	3-1	4-9	4-9
C1	C2	C2	6-1	3-6	4-1	4-1
C1	C2	C3	7-1	4-1	4-3	4-10
C1	C2	C4	8-1	4-1	4-7	4-21
C1	C2	C5	8-6	4-1	4-8	4-23
C1	C2	C6	8-9	4-1	4-9	4-25
C1	C3	C3	6-z13	3-10	4-3	4-3
C1	C3	C4	7-z37	4-3	4-7	4-17
C1	C3	C5	8-17	4-3	4-8	4-26
C1	C3	C6	8-28	4-3	4-9	4-28
C1	C4	C4	6-20	4-7	4-7	3-12
C1	C4	C5	7-22	4-7	4-8	4-20
C1	C4	C6	8-9	4-7	4-9	4-25
C1	C5	C5	6-z38	3-9	4-8	4-8
C1	C5	C6	6-7	4-8	4-9	4-9
C1	C6	C6	4-9	2-6	4-9	4-9
C2	C2	C2	4-21	3-6	3-6	3-6
C2	C2	C3	6-8	3-6	4-10	4-10
C2	C2	C4	5-33	3-6	4-21	4-21
C2	C2	C5	6-32	3-6	4-23	4-23

C2	C2	C6	5-33	3-6	4-25	4-25
C2	C3	C3	6-z23	3-10	4-10	4-10
C2	C3	C4	8-10	4-10	4-17	4-21
C2	C3	C5	7-35	4-10	4-23	4-26
C2	C3	C6	8-28	4-10	4-25	4-28
C2	C4	C4	6-35	3-12	4-21	4-21
C2	C4	C5	8-23	4-20	4-21	4-23
C2	C4	C6	6-35	4-21	4-25	4-25
C2	C5	C5	5-35	3-9	4-23	4-23
C2	C5	C6	8-9	4-9	4-23	4-25
C2	C6	C6	4-25	2-6	4-25	4-25
C3	C3	C3	4-28	3-10	3-10	3-10
C3	C3	C4	6-z49	3-10	4-17	4-17
C3	C3	C5	6-z50	3-10	4-26	4-26
C3	C3	C6	4-28	3-10	3-10	4-28
C3	C4	C4	6-20	3-12	4-17	4-17
C3	C4	C5	7-z17	4-17	4-20	4-26
C3	C4	C6	8-28	4-17	4-25	4-28
C3	C5	C5	6-32	3-9	4-26	4-26
C3	C5	C6	8-28	4-9	4-26	4-28
C3	C6	C6	4-28	2-6	4-28	4-28
C4	C4	C4	3-12	3-12	3-12	3-12
C4	C4	C5	6-20	3-12	4-20	4-20
C4	C4	C6	6-35	3-12	4-25	4-25
C4	C5	C5	6-z26	3-9	4-20	4-20
C4	C5	C6	8-9	4-9	4-20	4-25

C4	C6	C6	4-25	2-6	4-25	4-25
C5	C5	C5	4-23	3-9	3-9	3-9
C5	C5	C6	6-7	3-9	4-9	4-9
C5	C6	C6	4-9	2-6	4-9	4-9
C6	C6	C6	2-6	2-6	2-6	2-6

Tab. 2.6 - 5: Mapeamento de todos os *Tonnetze* tridimensionais de octacordes simétricos e seus subconjuntos de tetracordes simétricos implícitos em suas faces externas (*Tonnetze* bidimensionais). Cruzamentos perpendiculares entre trios de ciclos intervalares

Analisando esta lista destes conjuntos projetados pela interseção de três ciclos intervalares em ângulos retos, encontramos quatro modelos de construção para os cubos octatônicos (conjunto 8-28). Temos aqui a invariância de dois dos três ciclos intervalares e a coincidência de um dos pares de faces que formam os quatro octacordes tridimensionais (Tab. 2.6 – 6).

Ciclos			Projeção	Subconjuntos (faces)		
C1	C3	C6	8-28	4-3	4-9	4-28
C2	C3	C6	8-28	4-10	4-25	4-28
C4	C3	C6	8-28	4-17	4-25	4-28
C5	C3	C6	8-28	4-9	4-26	4-28

Tab. 2.6 - 6: quatro possibilidades de construção de cubos octatônicos

Temos ainda outra projeção de cubo de alturas que se destaca: a possibilidade de construção de uma coleção diatônica (conjunto 7-35) com a combinação dos ciclos intervalares C2, C3 e C5 (Tab. 2.6 – 7).

Tab. 2.6 - 7: cubo diatônico (conjunto 7-35)

Analizamos os três pares de tetracordes simétricos que formam as faces deste cubo “diatônico” (Fig. 2.6 – 9) – os conjuntos 4-23 nas (faces superior e inferior), 4-26 (laterais direita e esquerda), e 4-10 (frontal e fundo). Temos ainda outros três tricordes e três tetracordes simétricos que formam as seis faces transversais internas (Fig. 2.6 – 10) – os conjuntos 3-6, 3-9, 3-10, 4-8, 4-21 e 4-26. Lembrando que estes conjuntos simétricos representados pelas faces do cubo diatônico podem projetar individualmente *Tonnetze* bidimensionais.

Fig. 2.6 - 9: tetracordes simétricos que foram as faces externas do cubo diatônico

Fig. 2.6 - 10: tetracordes simétricos que foram as faces internas do cubo diatônico

Analisando mais detalhadamente este cubo diatônico (Fig. 2.6 – 11), podemos localizar os tricordes Maiores e menores que formam o campo harmônico Maior, implícitos na coleção Dó diatônica (“escala Maior”), além do tricorde diminuto posicionado na face transversal do cubo de alturas (Fig. 2.6 – 12). Esta mesma disposição dos acordes Maiores e menores pode ser apresentada no plano bidimensional de um *Tonnetz* do conjunto 4-26. No entanto, esta aplicação em duas dimensões se mostra desvantajosa frente à

representação da coleção diatônica no *Tonnetz* tridimensional com o octacorde do conjunto 7-35, considerando que este segundo esquema prevê o acorde diminuto não relacionado na outra proposta.

Fig. 2.6 - 11: tricordes que formam o campo harmônico Maior implícitos no cubo diatônico

Fig. 2.6 - 12: tricordes Maiores e menores implícitos no *Tonnetz* para o tetracorde 4-26

Outra combinação relevante implícita neste cubo diatônico é a presença do tetraedro que representa o tetracorde Sol Maior 7 (conjunto 4-27), acorde que assume a função dominante com sétima no campo harmônico de Dó Maior (Fig. 2.6 – 13). Temos aqui duas possibilidades de construção deste tetracorde,

considerando a reiteração da altura Ré na construção deste cubo de alturas para a coleção Dó diatônica.

Fig. 2.6 - 13: tetraedro que representa o tetracorde Sol Maior 7 implícito no cubo diatônico

3. SIMETRIA NA MÚSICA PÓS-TONAL

3.1. *Opus 19/4* (1911) e *Opus 16/3, Farben* (1916) de Schoenberg

Verificaremos a seguir trechos de algumas obras que demonstram resistência ao serem subordinadas aos métodos convencionais de análise próprios para o estudo de músicas destacadamente tonais. Como alternativa mais satisfatória, trouxemos esses recortes à luz de procedimentos de análise desenvolvidos propriamente para o universo pós-tonal, ferramentas de estudos que cada vez mais veem sendo aprimoradas pelos especialistas para esta finalidade. Utilizaremos especificamente instrumentos oriundos da teoria dos conjuntos (STRAUS, 2005) e teoria neorriemanniana (COHN, 2012), se valendo ainda de desdobramentos da sobreposição destas duas propostas que foram apresentadas no início deste trabalho.

Iniciaremos com o estudo da quarta peça para piano do *Opus 19* de Schoenberg (1911), partindo de uma reflexão sobre a música feita por Henri Pousseur ([1956] 2009: 57-59, Fig.3.1 – 1). Neste trabalho, Pousseur recorre uma análise “de um ponto de vista tonal” e apresenta como resultado a segmentação da obra em torno de cinco “pontos de referência muito distanciados uns dos outros (quanto ao seu parentesco tonal), por vezes mesmo em torno dos mais longínquos possíveis” ([1956] 2009: 58), como podemos observar na figura abaixo.

The image shows a musical score for the beginning of Schoenberg's Opus 19/4. It consists of a piano (left) and treble (right) staff. The treble staff begins with a treble clef and a key signature of one sharp (F#). The piano staff begins with a bass clef. The score is divided into three measures. The first measure is marked with a '3' and a bracket labeled 'Mi menor'. The second measure is marked with a bracket labeled 'Sib Maior' and 'poco rit.'. The third measure is marked with a bracket labeled 'Dó menor' and 'leicht'. The piano staff has a 'pp' (pianissimo) marking and a 'Ped.' (pedal) marking. An asterisk (*) is placed at the end of the third measure. The score is written in a modern, atonal style with various chromaticisms.

Fig.3.1 - 1: Início do *Opus 19/4* de Schoenberg, análise de Pousseur ([1956] 2009: 57-59).

Apesar de reconhecer a inconsistência e fragilidade desta proposta de análise calcada sobre a égide de ferramentas provenientes da tonalidade, Pousseur insiste em refutar a existência de outro tipo de construção estrutural alternativa, rejeitando a possibilidade de elencar esta obra como assumidamente não tonal.

Os diferentes “campos de atração” ocupam posições bem dissonantes uns com relação aos outros, e suas zonas de contato tornam-se por isso particularmente vagas e incertas. Mas estaríamos nós, no que se refira ao espírito desta música, assim tão afastadas dos procedimentos pós-românticos de modulação brusca e distante? Como quer que seja, se existe aqui uma atonalidade, ela só existe mesmo em primeira instância (POUSSEUR, [1956] 2009: 58)

Pousseur segue em seu posicionamento e encerra sua explanação defendendo que Schoenberg de fato não abandonou a tonalidade no *Opus 19*, mas se utilizou de ferramentas oriundas deste sistema para apresentar uma proposta de expansão, recorrendo ao intenso uso do cromatismo²³, levando as práticas tradicionais até os limites do seu colapso.

Parece-me possível concluir da seguinte forma: as numerosas seduções resolutivas, as múltiplas racionalidades parciais descobertas em Schoenberg têm por objetivo neutralizar a sua riqueza cromática, em todo caso conferir a esse cromatismo uma

²³ O autor Kenneth L. Hicken (1980) corrobora esta posição de Pousseur em seu artigo “Tonal Organization In Schoenberg's. Six Little Piano Pieces, Op. 19”, também defendendo que a organização das alturas no *Opus 19* de Schoenberg se referia mais a uma expansão do que o abandono da tonalidade.

tarefa que já lhe cabia durante toda a música tonal, qual seja, o de pôr em dúvida, de perturbar, de dinamizar a ordem estabelecida. O cromatismo nunca participa de modo orgânico da constituição do espaço tonal, mas penetra aí como um elemento estranho, intruso, e tende à sua transformação, senão à sua destruição progressiva (POUSSEUR, [1956] 2009: 58-59)

Por fim o autor conclui com uma crítica apontando que de fato não encontrou nada de inédito nesta proposta expressionista de Schoenberg apresentada no *Opus 19/4*. Para Pousseur não se passava de mais um passo adiante no processo de esgotamento e desmantelamento da tonalidade, situação que levou a prática comum ao declínio no início do século XX.

Certamente que em Schoenberg o espaço tradicional já chegou a um ponto de desintegração muito avançado, mas ainda estamos defronte dele. Se é verdade, por um lado, que todo o conjunto encontra-se abalado, que a inquietude é geral e constante, que o estranho é entendido como fato coerente, por outro também é verdade que aí que não se encontrou a possibilidade de estabelecimento de uma ordem inédita, adequada às novas riquezas e necessidades. Encontramo-nos perante uma arte tipicamente *expressionista*, que participa, no plano musical, daquilo que Francastel chama de “destruição de um espaço” (ou seja, da crítica, exacerbada pelo fato de que esta não dispõe nem propõe ainda uma solução construtiva e verdadeiramente libertadora, dos modos de existências típicos de uma sociedade ultrapassada) (POUSSEUR, [1956] 2009: 58-59).

No entanto, trazendo a obra para uma observação a partir de outra perspectiva, considerando ferramentas de análise mais adequadas para o repertório pós-tonal, percebemos que o início da quarta peça para piano do *Opus 19* de Schoenberg apresenta uma estrutura harmônica orientada por pares de alturas de mesma soma 10, sempre em torno de um mesmo eixo de simetria mediano entre as alturas Fá e Si. Ou seja, se opondo àquilo que Pousseur atribui apenas como um cromatismo com fins de “destruição progressiva” do espaço tonal, um “elemento estranho, intruso”, que não se constitui como uma “solução construtiva e verdadeiramente libertadora”, enxergamos na proposta de Schoenberg como a descoberta de um novo caminho para a organização do universo das dozes alturas em torno de padrões intervalares proporcionais. Em outras palavras, o compositor se volta para o uso da simetria intervalar por reflexão como pilar de organização de suas alturas, encontrando assim uma

opção satisfatória para o recondicionamento do uso do universo cromático, sem depender exclusivamente das práticas convencionais de encadeamento harmônicos recorrentes na tonalidade. Em suma, não se trata de uma tentativa de expansão dos procedimentos tradicionais por inserções cromáticas, mas o nascimento de um novo horizonte para a organização do sistema de doze alturas a partir da proporção entre intervalos.

Estruturalmente observamos que esta quarta peça do *Opus 19* pode ser dividida em três seções (Tab. 3.1 – 1), sendo que a terceira parte retoma o material melódico do início, configurando assim uma obra em forma ABA'. Apresentamos mais detalhes desta formação na tabela abaixo:

Segmento	Descrição	Compasso
Seção A c.1-5	Motivo a , melodia sem acompanhamento. Destaque das alturas Fá e Si, polaridades do eixo soma 10	c.1-2
	Motivo a' (em semicolcheias), reiteração do eixo soma 10 (Fá – Si)	c. 2-3
	Blocos sonoros em fermata, manutenção do eixo Fá – Si.	c.4-5
Seção B c.5-9	Motivo b , blocos harmônicos. Centralidade da nota Lá e mudança para o eixo soma 6 (Lá – Mib)	c.6
	Condução melódica em segmento octatônico que reitera a altura Lá e culmina em um acorde A7(13) sem função dominante. Manutenção do eixo soma 6	c.7-9

Seção A' c.10-13	Reexposição do material da Seção A. Retomada com o motivo a'' (em fusas). Reiteração da altura Fá	c.10
	Reprise de elementos da Seção B. Motivo b' e b'' , blocos harmônicos em defasagem	c.11-12
	Finalização com a altura Si, reiterando as alturas Fá e Si em destaque da primeira seção	c.13

Tab. 3.1 - 1: análise estrutural do *Opus 19/4* de Schoenberg

Podemos revelar a orientação das alturas em torno do eixo soma 10 na apresentação do primeiro material melódico (Fig.3.1 – 2), um conjunto 5-z17 formado pelas alturas Sib, Dó, Réb, Fá e Lá. A consciência do uso de simetria intervalar se revela com a reiteração da altura Fá, uma das extremidades do eixo Fá – Si (Fig.3.1 – 3). Na sequência, Schoenberg coloca em destaque estas duas alturas Fá e Si, apresentadas em dinâmica forte na região mais aguda, em contraste com os demais elementos todos em piano. As duas últimas notas do trecho, as alturas Lá e Dó#, também estão alinhadas em torno da soma 10, assim como o grupo formado pelas quatro últimas alturas deste exemplo – um conjunto 4-24. O mesmo acontece quando reunimos todas as alturas do trecho, formando um conjunto 6-z37 alinhado também em torno do trítano Fá – Si.

Fig.3.1 - 2: início do *Opus 19/4* de Schoenberg

Fig.3.1 - 3: conjuntos 5-z15, 4-14 e 6-z37, eixo invariante soma 10

O trecho a seguir reitera o alinhamento do grupo de altura em torno do mesmo eixo de soma 10 (Fig.3.1 – 4 e Fig.3.1 – 5). As cinco primeiras notas do compasso 9 são um recorte da escala cromática, um conjunto 5-1 alinhando em torno de Fá – Si, assim como as cinco notas seguintes, um recorte da coleção de tons inteiros que forma um conjunto 5-33, também orientado pela mesma mediatrix. Sobrepondo as alturas destes dois grupos de alturas temos como resultante um conjunto 9-6 ainda alinhado em torno da mesma simetria. Os blocos harmônicos que se seguem reiteram as mesmas alturas apresentadas no conjunto 9-6, incluindo somente a nota Si para a formação do conjunto 10-4, mas ainda insistindo na manutenção do eixo soma 10 estabelecido entre as alturas Fá e Si.

The musical score for Opus 19/4 by Schoenberg, measures 3-5, is shown. The score includes markings for 'poco rit.', 'pp', and 'Ped.'. The sets are highlighted with colored boxes: 5-1 (red), 5-33 (blue), 9-6 (orange), and 10-4 (green).

Fig.3.1 - 4: Opus 19/4 de Schoenberg, c.3-5

Fig.3.1 - 5: conjuntos 5-1, 5-33, 9-6 e 10-4, eixo invariante soma 10

Depois da fermata do c. 5, temos a retomada melódica a partir da nota Si, passando por dois blocos harmônicos no c. 6 que repousam sobre Fá na passagem para o c.7, confirmando a importância das alturas Fá e Si como polaridades neste início da obra (Fig.3.1 – 6 e Fig.3.1 – 7). No entanto, as alturas apresentadas neste trecho estão orientadas em torno de um novo eixo de reflexão de soma 6, entre as alturas Lá e Mib. Interessante notar que díades que formam esta soma estão colocadas próximas na justaposição dos dois blocos harmônicos – dois pares em sobreposição harmônica na região superior (Fá#/Dó e Si/Sol) e três pares na sequência melódica da região inferior (Lá#/Sol#, Mi/Ré e Dó#/Fá) – parâmetro que nos mostra que este eixo de simetria não é apenas utilizado como fator estrutural harmônico subjacente, mas também é relevante na camada melódica superficial deste trecho. O c.7 é conduzido para altura Lá reiterada – uma das polaridades do eixo – completando um conjunto 11-1 simétrico em torno da mesma soma 6 (“polarização por ausência” da altura Mib²⁴).

²⁴ Ver sobre “polarização por ausência” em SALLES, 2009.

Fig.3.1 - 6: Opus 19/4 de Schoenberg, c.5-7

Fig.3.1 - 7: conjuntos 10-6 e 11-1, mudança para o eixo soma 6

O que temos a seguir é a manutenção das alturas que completam a simetria do conjunto 11-1 em torno do eixo Lá–Mib, confirmado no final deste trecho com o repouso melódico sobre a díade Ré/Mi no c. 9, outro par de soma 6 (Fig.3.1 – 8 e Fig.3.1 – 9). Temos mais uma vez a presença da nota Lá no bloco harmônico do c.8 – um conjunto que pode ser interpretado como o acorde A7(13), mas sem conotação a uma convencional função de sétima de dominante – altura que é uma das extremidades do eixo de soma 6, corroborada como polaridade também por reiteração melódica. Temos ainda o conjunto de alturas entre os c. 8 e início do c.10 que completam um conjunto 9-9, novamente simétrico em torno do invariante eixo Lá–Mib. A altura Lá é retomada no início do c.10, reafirmando a importância desta nota no trecho.

Fig.3.1 - 8: *Opus 19/4* de Schoenberg, c.8-9

Fig.3.1 - 9: conjunto 9-9, manutenção do eixo soma 6

Podemos perceber nesta análise do início da quarta peça do *Opus 19* de Schoenberg (Fig.3.1 – 10) como o uso de ferramentas de análise próprias para obras de perfil pós-tonal se mostraram muito satisfatórias na averiguação do uso de eixos de simetria nesta obra. Seguindo na mesma perspectiva, escolhemos a seguir outra obra do mesmo compositor para ser analisada – o início da terceira peça para orquestra *Opus 16, Farben* (1909) – apresentando resultados que corroboram de maneira próspera nossa proposta de estudo calcada sobre um arcabouço teórico paramentado com instrumentos oriundos da teoria dos conjuntos e afins²⁵.

²⁵ Outros autores que se dedicam ao estudo deste trecho do *Opus 16/3* em destaque são Charles Burkhart (1974) e John Rahn (1980: 59-73), ambos corroborando uma perspectiva de análise pós-tonal envolvendo questões harmônicas. Citamos também o estudo desta obra feito por Paulo Zuben em seu livro *Ouvir o Som* (2005), em particular sobre o conceito de “melodia de timbres”. Nesta proposta, o compositor sustenta por diversos compassos um mesmo grupo de classes de altura, mas os timbres para estas notas vão sendo substituídos sucessivamente.

5 Orchestral Pieces, Op. 16
2 Piano Transcription by A. Webern

A. Schoenberg

III Farben

Mäßige Viertel

Pianoforte I

Pianoforte II

Fig.3.1 - 10: início da terceira peça para orquestra *Opus 16*, Farben de Schoenberg (transcrição para piano de Webern)

Neste trecho escolhido, Schoenberg apresenta a orquestra sustentando durante os três primeiros compassos um pentacorde 5-z17 com as notas Dó, Sol#, Si, Mi e Lá (Fig.3.1 – 11), o mesmo conjunto simétrico apresentado no início da quarta peça do *Opus 19*, peça do mesmo compositor que analisamos acima. Desta vez a simetria acontece em torno do eixo de soma 8, entre as notas Mi e Sib (Fig.3.1 – 12).

c.1-3

5-z17

Fig.3.1 - 11: bloco harmônico no início do *Opus 16/3* de Schoenberg

Fig.3.1 - 12: conjunto 5-z17, eixo invariante soma 8

A partir do c.3, cada uma das alturas do pentacorde 5-z17 gradativamente faz um movimento melódico idêntico em defasagem de subir um semitom e descer um tom em seguida (Fig.3.1 – 13), resultando em um segundo conjunto 5-z17 transposto meio tom abaixo do primeiro no final deste trecho (c.8-11), desta vez um grupo de alturas simétrico em torno do eixo de soma 10 (Fá – Si) (Fig.3.1 – 14). Consequentemente, se reunirmos cada uma das alturas que intermediam a passagem do primeiro para o segundo pentacorde 5-z17 teremos um terceiro conjunto da mesma espécie (Fá, Sib, Lá, Dó e Dó#), este meio tom acima do original e orientado pelo eixo soma 6 (Mib – Lá). Finalmente, se agruparmos todas as alturas apresentadas neste trecho, teremos um conjunto 10-4 simétrico em torno do mesmo eixo de soma 8 inerente ao pentacorde 5-z17 primário. Temos aqui novamente a presença dos conjuntos simétricos 5-z17 e 10-4 que também aparecem no início da quarta peça do *Opus 19* de Schoenberg, como vimos em análise anterior. Esta recorrência a estruturas específicas reiteradas nas duas obras aqui acolhidas nos faz supor a possibilidade de existir um perfil estético transversal que atende obras expressionistas de compositor.

Fig.3.1 - 13: blocos harmônicos no início do *Opus 16/3* de Schoenberg

Fig.3.1 - 14: transposições do conjunto 5-z17, formação do conjunto 10-4

Outra constatação importante é perceber que as duas transposições do conjunto 5-z17 estão relacionadas por inversão em torno do mesmo eixo invariante Mi – Sib inerente ao conjunto 5-z17 original (Fig.3.1 – 15). A partir desta inversão entre estas estruturas podemos projetar por inversão o conjunto 9-6, simétrico em torno do mesmo eixo soma 8, com destaque para a altura Sib

invariante entre as duas estruturas e uma das polaridades do eixo de reflexão. Além dos conjuntos 5-z17 e 10-4 já citados, este conjunto 9-6 também foi encontrado no início da quarta peça do *Opus 19* de Schoenberg, reforçando nossa hipótese de semelhança estética entre as duas músicas do compositor aqui analisadas.

Fig.3.1 - 15: reiteração do eixo soma 8, inversão entre conjuntos 5-z17, projeção do conjunto 9-6

Entramos agora no domínio da teoria neorriemanniana, que atende justamente recorrências desta espécie que apresentam transformações gradativas entre grupos de alturas (COHN, 2012). Neste caso do início da terceira peça do *Farben*, temos a conversão de um conjunto 5-z17 em outro da mesma espécie um semitom abaixo, intermediada pela passagem por outras cinco estruturas intervalares justapostas, seguindo uma mudança progressiva e gradual entre estes conjuntos, utilizando somente movimentos de tom e semitom entre as vozes (Fig.3.1 – 16 e Fig.3.1 – 17). Nesta sequência temos apenas os conjuntos 5-z17 e 4-20 como simétricos, sendo os outros quatro pentacordes não simétricos – os conjuntos 5-11, 5-29 e duas presenças do conjunto 5-16 – o que denota uma relação importante de construção e desconstrução de simetrias a partir de transformações assimétricas.

Fig.3.1 - 16: blocos harmônicos no início do *Opus 16/3* de Schoenberg

Fig.3.1 - 17: transformação gradativa entre conjuntos simétricos e assimétricos

Interessante notar que as duas transposições do conjunto 5-16 se relacionam por inversão em torno do eixo Mi – Sib (Fig.3.1 – 18), a mesma simetria presente do conjunto 5-z17 inicial e da coleção total de alturas apresentadas neste trecho que formam o conjunto 10-4. Nesta justaposição temos a manutenção de quatro alturas invariantes – Láb, Lá, Si e Dó – e a projeção da nota Mib a partir de Fá, sendo estas duas notas um par que reitera o eixo soma 8. Se estas duas versões do conjunto 5-16 relacionados por

inversão podem projetar por reflexão o conjunto simétrico 6-z49, estrutura também simétrica em torno do eixo aqui recorrente Mi – Sib.

Fig.3.1 - 18: reiteração do eixo soma 8, inversão entre conjuntos 5-16, projeção do conjunto 6-z49

3.2. *Konzert, Opus 24* (1934) e *Quarteto de Cordas, Opus 28/I* (1938) de Webern

O compositor Pousseur ([1963] 2009: 103) destaca esta importante relação interdependente entre simetria e assimetria, em particular relacionado ao contexto de obras da segunda escola de Viena:

Simetria e assimetria, determinação e indeterminação, igualdade e desigualdade não são, pois, princípios simplesmente contraditórios que se excluem entre si de maneira absoluta, mas sim propriedades complementares, que se condicionam mutuamente e que precisam uma da outra. O excesso num sentido ou no outro conduz à mesma desordem patológica. Somente uma proporção correta, uma tensão equilibrada (que pode, aliás, se realizar de maneira infinitamente variada) engendra uma ordem livre, viva e significativa, ao mesmo tempo multiplicidade e comunicação, individuação e reconhecimento (POUSSEUR, [1963] 2009: 103).

Segundo Pousseur, a utilização de proporções simétricas entre classes de alturas passa a ser mais recorrente no modernismo alemão a partir do desenvolvimento das práticas composicionais dodecafônicas, com destaque para o aprimoramento desta técnica ao longo da fase tardia de Webern (POUSSEUR, [1963] 2009: 102). Isso abriu caminho para o reconhecimento do universo pós-tonal como proposta autônoma e independente da linguagem tonal

tradicional em decadência, seguindo seus próprios parâmetros calcados substancialmente em relações de simetria intervalar.

Repentinamente, a utilização na obra tardia de Webern de simetrias aparentes (ainda que complexas e flexíveis) aparece sob nova luz: não se trata mais simplesmente de resíduos de um sistema clássico ultrapassado, mas de uma tentativa de controlar de maneira eficaz o dado de igualdade que sempre há em toda desigualdade (POUSSEUR, [1963] 2009: 102).

Um exemplo emblemático do desenvolvimento desta complexa engenharia de estruturação entre classes de alturas pode ser constatado na série do *Konzert Opus 24* (1934) de Anton Webern, apresentada a seguir (Fig.3.2 – 1):

Fig.3.2 - 1: Série do *Konzert Opus 24* de Webern

Sobre esta série, Pousseur destaca as propriedades de proporção internas inerentes a esta estrutura, em particular sobre a disposição dos quatro grupos subsequentes de segmentações de três alturas, sempre combinações justapostas de um semitom seguido por um salto de terça maior em formatações diferentes.

A série do *Konzert Op 24* não é constituída tão-somente das doze notas da gama cromática, mas sobretudo de quatro formas diferentes de uma mesma pequena figura de três sons: os movimentos original, retrógrado invertido, retrógrado simples e a simples inversão (POUSSEUR, [1963] 2009: 102).

Temos assim um tríplice original (O), seguido pelas imagens retrógrado da inversão (RI), retrógrado do original (RO) e inversão do original (IO), todas transposições da mesma classe de conjunto 3-3 (Fig.3.2 – 2). Podemos perceber que todas as quatro aplicações submetidas à série completa de doze tons estão implícitas internamente na estrutura como subconjuntos de tríades.

Fig.3.2 - 2: Tricordes inerentes a série do *Opus 24* de Webern, conjunto 3-3 invariante

Percebemos que estas permutações de um mesmo conjunto 3-3 podem ser representadas em um *Tonnetz* do tetracorde 4-7 (Fig.3.2 – 3). Destacamos a predominância nesta série do *Opus 24* das classes de intervalos |1| (segunda menor e sétima maior) e |4| (terça maior e sexta menor), organizadas seguindo os passos desta rede formada com ciclos destas mesmas classes de intervalos (C1 e C4), uma rede de alturas estruturada a partir do tetracorde 4-7.

Fig.3.2 - 3: *Tonnetz* do conjunto 4-7, tricordes da série do *Opus 24*

Notamos que estes tricordes também estão organizados em dois pares espelhados em torno do mesmo eixo de soma 5 (Fig.3.2 – 4): o grupo de alturas original [10,11,2] e o retrógrado da inversão [3,6,7]; o retrógrado do original [9,0,1] e a inversão do original [4,5,8]. Ambas as inversões projetam dois hexacordes – os conjuntos [2,3,6,7,10,11] e [0,1,4,5,8,9], respectivamente – que são complementares entre si, ou seja, quando concatenados formam uma escala cromática completa, além destas serem duas estruturas imagens de mesmo conjunto 6-20.

Fig.3.2 - 4: tricordes orientados em torno do eixo soma 5, projeção do conjunto 6-20

Esta série de Webern também traz implícita em si dois pares de tetracordes (Fig.3.2 – 5): [10,11,2,3] e [2,3,6,7]; [4,5,8,0] e [9,0,1,5], imagens dos conjuntos 4-7 e 4-19, respectivamente. Cada um destes pares de tetracordes mantém entre si duas notas em comum: as alturas Ré e Mib para os conjuntos 4-7; Fá e Dó para os conjuntos 4-19.

Fig.3.2 - 5: pares de tetracordes inerentes a série do *Opus 24*, conjuntos 4-7 e 4-19

Percebemos que estes pares de tetracordes dos conjuntos 4-7 e 4-19 também podem ser representadas no mesmo *Tonnetz* do tetracorde 4-7 (Fig.3.2 – 6). Notamos que as duas alturas invariantes entre os grupos de alturas aparecem na elisão que avizinha as regiões que representam cada tetracorde.

Fig.3.2 - 6: *Tonnetz* do conjunto 4-7, pares de tetracordes da série do *Opus 24*

Os conjuntos 4-7 e 4-19 aparecem relacionados diretamente na rede de invariâncias de entradas de vetores intervalares entre tetracordes (Fig.3.2 – 7) – avaliados pelos índices $[201210]$ e $[101310]$, respectivamente – mantendo quatro entradas de classes de intervalos em comum (entradas dois, três, cinco e seis).

Fig.3.2 - 7: Invariância entre entradas de vetores intervalares dos conjuntos 4-7 e 4-19

Estes tetracordes também estão organizados em dois pares espelhados em torno do mesmo eixo de soma 5 (Fig.3.2 – 8): [10,11,2,3] e [2,3,6,7]; [4,5,8,0] e [9,0,1,5]. Ambas as inversões novamente projetam os hexacordes [2,3,6,7,10,11] e [0,1,4,5,8,9], respectivamente, sendo duas estruturas imagens de mesmo conjunto 6-20 e complementares entre si, como vimos anteriormente.

Fig.3.2 - 8: tetracordes orientados em torno do eixo soma 5, projeção do conjunto 6-20

Estes dois hexacordes projetados concomitantemente na inversão dos pares de tricordes e de tetracordes (Fig.3.2 – 9) – os conjuntos [2,3,6,7,10,11] e [0,1,4,5,8,9] – também estão delineados em justaposição na série do *Opus 24* de Webern.

Fig.3.2 - 9: hexacordes justapostos da série do *Opus 24*, conjunto 6-20

Este par do conjunto 6-20 também pode ser representado no mesmo *Tonnetz* do tetracorde 4-7 (Fig.3.2 – 10). Destacamos aqui que esta rede de

Fig.3.2 - 11: hexacordes orientados em torno do eixo soma 11, projeção do conjunto 12-1

Observando a posição dos conjuntos utilizados por Webern para a construção da série do *Opus 24* – o tricorde 3-3 e o tetracordes 4-7 e 4-19 – e o conjunto 5-z17 utilizado por Schoenberg no início da quarta peça para piano do *Opus 19* e no início do terceiro movimento de *Farben*, podemos destacar que estas estruturas intervalares estão posicionadas em uma região mais acima da rede de projeções por inversão (perspectiva a partir de tricordes, Fig.3.2 – 12), correspondência que relaciona os trechos destas obras dos dois compositores da Segunda Escola de Viena em torno de características harmônicas similares.

Fig.3.2 - 12: Relacionamento entre os conjuntos 3-3, 4-7, 4-19 e 5-z17, proximidades harmônicas entre Schoenberg e Webern

Outro exemplo que demonstra esta preferência de Anton Webern por organizações intervalares simétricas entre classes de alturas é a série dodecafônica do primeiro movimento do *Quarteto de Cordas, opus 28* (1934), apresentada a seguir (Fig.3.2 – 13):

Fig.3.2 - 13: série dodecafônica do primeiro movimento do *Quarteto de Cordas, opus 28* (1934)

Temos aqui um contorno melódico original (T_0) – conjunto 4-1, baseado no “motivo Bach” – seguido pelas transposições T_{51} e T_4 da mesma sequência intervalar do tetracorde primário (Fig.3.2 – 14).

Fig.3.2 - 14: Tetracordes inerentes a série do *Opus 28* de Webern, conjunto 4-1 invariante (“motivo Bach”)

Percebemos que estas permutações de um mesmo conjunto 4-1 podem ser representadas em um *Tonnetz* tridimensional do octacorde 8-1, com base na intersecção por ângulos retos dos ciclos intervalares C1, C2 e C4 (Fig.3.2 – 15), incluindo o ciclo intervalar secundário C3 que aparece em um dos cortes diagonais da face do cubo que forma o conjunto 4-1. Destacamos a predominância nesta série do *Opus 28* das classes de intervalos |1| (segunda menor e sétima maior), |3| (terça menor e sexta maior) e |4| (terça maior e sexta menor), organizadas seguindo os passos desta rede formada com ciclos destas mesmas classes de intervalos (C1, C3 e C4). Temos assim um sistema de

alturas estruturado a partir de sobreposições de três faces do *Tonnetz* bidimensional do tetracorde 4-1, transpostas pela classe de intervalo $|4|$ (T_4): $[6,7,8,9]$ (T_0); $[11,0,1,2]$ (T_4); $[2,3,4,5]$ (T_4).

Fig.3.2 - 15: *Tonnetz* tridimensional do octacorde 8-1, permutações do conjunto 4-1

3.3. *Hiperprism* (1923) de Edgar Varèse

Seguimos para outro compositor do início do século XX que também recorreu a procedimentos composicionais incluindo proporções simétricas entre alturas. Analisaremos um trecho de *Hiperprism* (1923) de Edgar Varèse (Fig.3.3 – 1), destacando aqui um bloco sonoro que surge no c.16 (Número 2, de ensaio) desta obra para instrumentos de sopro e percussão.

The musical score for *Hyperprism* by Varèse, measures 13-16, is shown. The score is for a full orchestra and includes parts for Flute (Fl.), Clarinet in B-flat (Cl. mib), Cor Anglais (Cors en fa), Trumpets (Trppts), Trombones (Trbns), and Bass (B.). The tempo markings are "Très calme (harmonique)", "a tempo", and "accel. molto". A red box highlights measures 13-16, which are marked with a "2" in a box. The music features complex harmonic structures with various dynamics and articulations.

Fig.3.3 - 1: *Hyperprism* de Varèse, c.13-16, blocos harmônicos simétricos

O compositor apresenta aqui uma estrutura totalmente espelhada a partir das vozes intermediárias, sendo o ponto de partida as alturas Ré da terceira trompa e Mib do primeiro trompete (Fig.3.3 – 2). A partir deste ponto temos a projeção de uma terça maior entre segunda e terceira trompa, equivalente ao mesmo intervalo entre os dois trompetes. Seguindo com este procedimento, temos uma quinta justa entre a segunda trompa e o clarinete, mesma distância presente entre o segundo trompete e o trombone tenor. Chegamos finalmente a posição espelhada de sétima maior entre o clarinete e a flauta, relacionada ao

mesmo intervalo entre os trombones tenor e baixo. A única voz que não participa desta projeção é a primeira trompa com a nota Sib.

Fig.3.3 - 2: bloco harmônico do c.16 de *Hyperprism*, projeção simétrica de intervalos

Estas classes de alturas também mantêm uma relação de simetria intervalar na sua completude estrutural, constatação percebida quando apresentamos estas oito notas utilizadas (conjunto 8-1) no *clockface* (Fig.3.3 – 3 e Fig.3.3 – 4). Notamos que temos aqui um recorte da escala cromática (um segmento do ciclo intervalar C1), orientado em torno do eixo soma 3, que intermedia as alturas Ré e Mib em uma de suas extremidades. Estas notas são as mesmas colocadas por Varèse como ponto de partida para sua projeção intervalar, mostrando uma consciência do compositor em relação a simetria total inerente a esta estrutura, seguindo inclusive os pares de mesma soma 3 para os desdobramentos do acorde espelhado.

Fig.3.3 - 3: espelhamento em torno do eixo soma 3

Fig.3.3 - 4: conjunto 8-1, eixo invariante soma 3, segmento cromático

Sobre este uso da simetria intervalar em obras pós-tonais, em particular neste caso sublinhado no c.16 de *Hyperprism*, Lima (2009: 27) destaca a diferença entre esta proposta empírica apresentada por Varèse, este muito inclinado a uma maior elasticidade na condução musical, priorizando a maior fluidez e organicidade do passo musical, e a elaborada engenharia de estruturação recorrente em obras da segunda escola de Viena, esta outra mais vinculada a procedimentos rígidos e previamente racionalizados. Isso demonstra uma maior preocupação de Varèse quanto ao resultado sonoro produzido na combinação entre sons, mais do que uma dependência a padrões de gerenciamento pré-estabelecidos entre classes de alturas. Temos assim este compositor estabelecendo o uso da simetria como ponto de partida para a criação musical, não como um fim de totalização estrutural entre as diversas alturas utilizadas orientadas em torno de referências simétricas.

Voltando ainda para a 'metáfora do prisma', poderíamos dizer que esse tipo de construção em Varèse, onde o total cromático é gerado a partir de uma nota central, pode ser visto também em *Hyperprism* (1923) e *Octandre* (1923). Na primeira, é o dó sustenido inicial do trombone que desencadeia todas as reflexões no espaço, enquanto na segunda, temos uma escala cromática espacializada em que, depois de sua apresentação pelo oboé, irá congelar as notas nas regiões em que apareceram, favorecendo procedimentos de permutação e de transformações simétricas. De fato, temos aqui um dos aspectos que o diferenciava de seus contemporâneos dodecafonistas que estipulavam a gama cromática previamente, pois em Varèse, ela

se dá durante o caminhar da própria obra musical (LIMA, 2009: 27).

Refletindo sobre o modo desta inclinação de Varèse a padrões de proporção intervalar, verificamos um compositor menos preocupado que a vanguarda alemã estava em alcançar um resultado de total organização das alturas em torno de eixos estruturais transversais, esta segunda tentando respeitar as fronteiras estruturais de um mesmo trecho musical. Varèse está mais interessado em tomar a simetria como ponto de partida para a criação de espaços sonoros diversificados, com resultados que não necessariamente se encerravam em uma proporção inequívoca entre alturas. Isso é relevante para tentarmos entender melhor o contexto de época que levou ao interesse de Villa-Lobos pela utilização da simetria intervalar, como constatamos na análise de alguns trechos de obras deste compositor, considerando que ambos os compositores foram amigos próximos durante a década de 1920, período em que o brasileiro permaneceu na Europa para divulgação de suas obras.

3.4. *Choros nº4* (1926) de Villa-Lobos

Notamos que Villa-Lobos também toma a simetria com ponto de partida, e, de forma similar à prática aplicada por Varèse, o brasileiro procura não conduzir a obra respeitando uma determinada proporção pré-estabelecida para gerenciar os parâmetros musicais em sua totalidade, preferindo seguir a gostos pessoais, implicações e desdobramentos inerentes ao desenvolvimento contínuo da composição, respeitando a organicidade e fluidez artística no processo de criação. Se enveredando por este caminho, Villa-Lobos parte de parâmetros proporcionais imediatos e restritivos, e se estende ao universo sonoro exterior composto de simetrias e assimetrias que se interdependem de forma bilateral, respeitando o interesse musical e a criatividade empírica colocada pelo artista. Entretanto, ao fazer isso, o compositor acaba indo ao encontro a uma proporcionalidade de maior amplitude e extensão transversal ao próprio sistema de doze alturas, que descrevemos em detalhes na construção da rede de conjuntos projetos por inversão. Assim Villa-Lobos inscreve sua obra a parâmetros de simetrias pertencentes ao universo cromático, balizas

indissociáveis da própria essência de qualquer música que atenda à ordinalidade do Módulo 12. Desta forma, o compositor apresenta uma proposta composicional calcada em estruturas intervalares “pontuais” – conjuntos não necessariamente simétricos individualmente – que ao longo da música vão se complementando seguindo uma correlação existente nesta rede de projeção por inversão que apresentamos. Além disso, Villa-Lobos encontra a invariância de proporções que não se encerram individualmente em cada obra, mas atravessam o corpo de composições do músico. Temos assim um perfil de peças com aspectos de “inacabadas” individualmente, mas que se estendem ao serem lembradas em gestos de outras composições. Em suma, supomos que as diversas assimetrias intervalares isoladas presentes em variadas obras podem se complementar por meio de uma proporção harmônica mais abrangente; acreditamos que trechos de músicas distintas podem estar inter-relacionados em torno de uma *meta-simetria* entre classes de conjuntos de alturas implícita no próprio sistema cromático, verificada neste trabalho na apresentação da rede de projeções por inversão.

Um exemplo da aplicação destas estruturas “locais” que se complementam pela própria proporção inerente ao sistema de dozes alturas pode ser avaliado em um trecho do início do *Choros nº4* (1926) de Villa-Lobos (Fig.3.4 – 1). Aqui o compositor passa por tetracordes que individualmente são assimétricos em sua maioria, mas quase todos pertencem à rede de projeções por inversão (perspectiva a partir de tricordes) e estão próximos dentro de uma mesma “região” mais na parte inferior do sistema (exceto o conjunto 4-19), além da correspondência por multiplicação pelos fatores M_5 e M_7 entre vários destes conjuntos, gerando assim um equilíbrio harmônico pleno segundo nossa hipótese.

Un peu Modéré (♩ = 76)

1

1º COR EN FA
Altura Real

2º COR EN FA
Altura Real

3º COR EN FA
Altura Real

TROMBONE

4-1 *p* *sfz p*

4-2 *p* *sfz p*

4-3 *p* *sfz p*

mf 4-19 *f* 5-1

5

1º COR

2º COR

3º COR

TROMBONE

4-1 *p* *sfz p*

4-2 *p* *sfz p*

4-3 *p* *sfz p*

mf 4-22 *f*

2

8

1º COR

2º COR

3º COR

TROMBONE

5-35 *mf*

5-1 3 *p* 4-23 *mf* 4-25 *mf* 4-11

Fig.3.4 - 1: Análise do início do *Choros nº4* de Villa-Lobos

Podemos verificar que vários de conjuntos estão relacionados por multiplicação pelos fatores M_5 e M_7 , e, consequentemente, aparecem como

correspondentes entre as regiões C1 e C5 da rede de projeção por inversão (Fig.3.4 – 2). Apenas o conjunto 4-3 aparece sem o seu equivalente tetracorde 4-26. Temos ainda o tetracorde 4-25, único exemplar aqui que não está previsto em nosso sistema de conjuntos relacionados por espelhamentos. Outro aspecto importante é a presença estratégica dos conjuntos 4-19 e 4-11, que aparecem respectivamente no início e no término deste trecho, estruturas localizadas na região central da rede por projeção por inversão, caracterizando assim unidades que servem como pontos medianes de equilíbrio entre os demais grupos de alturas. Podemos assim atribuir a estes dois conjuntos uma função equivalente a convencional “tônica” da prática comum. Além disso, existe a correspondência entre os conjuntos 4-19 e 4-11 por invariância entre quatro entradas de vetores intervalares – [101310] e [121110], respectivamente; coincidindo a primeira, terceira, quinta e sexta entrada, portanto, sem relação de multiplicação²⁶ pelos fatores M_5 e M_7 – concomitante a um espelhamento perpendicular que existe entre os conjuntos da região central, orientados por um eixo horizontal que perpassa entre os conjuntos 4-10 e 4-17. Outro destaque pode ser dado para os tricordes 3-2 e 3-7, os quais podem projetar por inversão todos os demais conjuntos apresentados neste trecho, com exceção apenas para o tetracorde 4-19. Temos ainda o pentacorde 5-z12, central nesta região escolhida do sistema de conjuntos relacionados por espelhamento, mas que não aparece por extenso neste trecho da obra de Villa-Lobos.

²⁶ A relação de multiplicação pelos fatores M_5 e M_7 implica na coincidência da segunda, terceira, quarta e sexta entradas, além da inversão entre os índices da primeira e quinta entradas, fatores que não estão presentes na relação entre os conjuntos 4-19 e 4-11.

Fig.3.4 - 2: conjuntos relacionados na rede de projeção por inversão

Outra constatação da relação entre estes conjuntos destacados no início do *Choros nº4* pode ser verificada na rede de invariância entre entradas de vetores intervalares (Fig.3.4 – 3). Percebemos que todos os tetracordes presentes neste trecho estão relacionados por máxima parcimônia neste sistema (quatro índices de vetores em comum), com destaque para os tetracordes 4-2, 4-22 e 4-11, os quais mantendo mais conexões com seus pares.

Fig.3.4 - 3: conjuntos relacionados na rede de parcimônia entre entradas de vetores intervalares

3.5. *Quarteto de Cordas nº6/4 (1939) de Béla Bartók*

Outro trecho em que encontramos a recorrência a conjuntos relacionados na rede de projeção por inversão é o início do quarto movimento do *Quarteto de Cordas nº6* (1939) de Béla Bartók (Fig.3.5 – 1). Nesta obra o compositor trabalha com os quatro tetracordes que compõem a “constelação Morris” (SALLMEN, 2011) – os conjuntos 4-12, 4-13, 4-18 e 4-27 – estruturas intervalares com características harmônicas correlacionadas, propriedades as quais também exploramos nos capítulos anteriores.

The image displays a musical score for the beginning of Bartók's *Quarteto de Cordas nº6/4*. It features four staves: Violin I (Vn. I), Violin II (Vn. II), Viola (Vla.), and Violoncello (Vc.). The score includes various musical notations such as notes, rests, and dynamic markings like *p*, *ma espr.*, *mp*, and *cresc.*. Below the staves, there are labels for chords and scales, including *Am*, *4-17 [0347]*, *4-18*, *4-18*, *Fm*, *4-12*, *4-12 4-27 GM*, *E:M*, *4-27 4-27*, *MORRIS₁*, *W₉ 00BB*, *4-27*, *4-12*, *4-12*, *4-16 [0157]*, *4-27*, *4-27*, *4-18*, *4-13*, *4-13*, *4-13*, *MORRIS₄⁺*, *S_B 5B5B W_A A0A0*, *4-12*, *4-12*, *4-13*, *4-13*, *MORRIS₅⁺*, *S₀ 6B61***, and *Cm*.

Fig.3.5 - 1: Análise do início do *Quarteto de Cordas nº6/4* de Bartók (SALLMEN, 2011)

O gerenciamento entre estes quatro tetracordes que compõem a “constelação Morris” pode ser compreendido em dois pares orientados em torno de dois eixos perpendiculares entre si (Fig.3.5 – 2): os conjuntos 4-12 e 4-27 relacionados por multiplicação pelos fatores M_5 e M_7 , consequentemente representando as regiões C1 e C5 (eixo vertical); e o par composto pelo conjunto 4-13 e 4-18, ambos localizados na região central da estrutura, mas também relacionados em torno do eixo horizontal perpendicular que atravessa entre os conjuntos 4-10 e 4-17. Constatamos que Bartók escolhe aqui uma região mais “acima” do sistema de conjuntos relacionados por projeção em relação ao segmento selecionado por Villa-Lobos para o *Choros nº4* (e um pouco “abaixo” do setor harmônico escolhido por Schoenberg nos trechos das músicas analisadas anteriormente, e dos subconjuntos para a série do *Opus 24* de Webern). Entretanto, ambos os compositores – Villa-Lobos e Bartók – demonstram um interesse latente em estabelecer equilíbrio entre estes grupos de alturas correlacionados por multiplicação e invariância entre classes de vetores, apresentando membros que se contrabalanceiam em torno de supostos

eixos implícitos na rede de projeções por inversão. Acreditamos que os dois compositores tenham chegado a este fator comum de maneira empírica, demonstrando que esta nossa constatação de uma *meta-simetria* entre classes de conjuntos intervalares inerente ao universo harmônico cromático pode ser percebida pela intuição de ambos os artistas, constatando que nossa hipótese não se trata apenas de uma especulação racional e determinista sobre o assunto.

Fig.3.5 - 2: Tetracordes que compõem a “constelação Morris”, relacionados na rede de projeções por inversão.

A correspondências entre este quatro tetracordes que compõem a “constelação Morris” ficam ainda mais evidentes quando visualizamos a proximidade entre os conjuntos 4-12, 4-13, 4-18 e 4-27 na rede de parcimônia entre entradas de vetores intervalares (Fig.3.5 – 3).

Fig.3.5 - 3: Invariância entre vetores intervalares dos conjuntos da “constelação Morris”

3.6. *Chovendo na Roseira* de Tom Jobim

Passaremos para um contexto mais distante, explorando agora uma obra de um compositor que não faz parte deste quadro de músicos de vanguarda do início do século XX, nem incorpora o grupo de artistas dedicados à música sinfônica, mas recebe reverberações desta proposta de aplicação de padrões intervalares simétricos em suas composições. Nos referimos ao músico Tom Jobim, compositor brasileiro já da segunda metade do mesmo século e voltado para um estilo mais popular, que incorporou em suas obras alguns procedimentos envolvendo a utilização de proporções entre grupos de alturas. Acreditamos que isso seja um desdobramento de um gosto explícito declarado por Tom Jobim pelas obras de Villa-Lobos. Encontramos diversas referências do próprio músico revelando este interesse pelo trabalho e estilo artístico de seu antecessor, como podemos verificar a seguir:

Quando nasci em 1927, Villa-Lobos já era objeto da galhofa nacional. Quando eu era garoto, em Ipanema, escutava as piadas e gozações a respeito do ensandecido maestro, demente mesmo, um tal de Vira-Loucos. Consta que era maluco. Um dia, mais tarde, apareceu lá em casa um disco, estrangeiro, dos *Choros Nº 10*, regido pelo maestro Werner Janssen, peça sinfônica com coral misto, obra erudita. Quando o disco começou a tocar eu comecei a chorar. Ali estava tudo! A minha amada floresta, os pássaros, os bichos, os índios, os rios, os ventos, em suma, o Brasil. Meu pranto corria sereno, abundante, chorava de alegria, o Brasil brasileiro existia e Villa-Lobos não era louco, era um gênio. E comecei a entender mais o que Mario de Andrade dizia, e comecei a estudar o Villa (JOBIM, 1987).

Apesar de deixar claro em sua fala que admira muito a música de Villa-Lobos, encontramos poucos trabalhos de análise musical interessados nas obras de Tom Jobim a partir de uma perspectiva harmônica, que corroborem esta afirmação através de estudos comparativos entre obras dos dois artistas²⁷. Intentando por este caminho, Salles (2014) apresenta indícios desta absorção de características composicionais de Villa-Lobos empreendida por Tom Jobim, destacando a provável citação de contornos melódicos da obra *Abril* de Villa-Lobos em *Chovendo na Roseira*.

A naturalidade dos enunciados melódicos encontrados em *Abril* provavelmente foi o que despertou a atenção de Antonio Carlos Jobim, levando-o a citar quase literalmente essa canção, onde além da “frescura das gotas úmidas” – uma sutil alteração no texto, percebe-se na versão final da canção o plano direcional da arquitetura melódica movendo-se de modo semelhante ao empregado por Villa-Lobos em *Abril*. (SALLES, 2014: 92)

Corroborando os apontamentos feitos por Salles (2014), levantamos novos indícios sobre esta relação entre os dois compositores, demonstrando que Tom Jobim se apresenta em *Chovendo na Roseira* como depositário desta herança deixada por Villa-Lobos, mesmo que o segundo tenha se valido de um contexto distante para a produção de seu repertório, levando para a música popular estes procedimentos composicionais pós-tonais envolvendo a simetria intervalar.

Analisando o início da música *Chovendo na Roseira* de Tom Jobim (Fig.3.6 – 1), a partir da entrada do canto, identificamos a apresentação de dois acordes simétricos em regular alternância (*ostinato* harmônico) – Ab6/9 e Ebm7/Ab (Fig.3.6 – 2) – que na verdade são duas pentatônicas (5-35) espelhadas por T₂l em torno do eixo soma 6 (STRAUS, 2005), uma mediatriz de reflexão que perpassa o trítone entre as alturas Lá (9) e Mib (3) (Fig.3.6 – 3).

²⁷ Encontramos alguns caminhos pertinentes para a análise desta obra no artigo “*Chovendo na roseira* de Tom Jobim: uma abordagem schenkeriana” de Carlos Almada (2010). Um trabalho mais recente que também se adianta na busca por detalhes desta relação entre Tom Jobim e Villa-Lobos é o artigo “Villa-Lobos, Tom Jobim e a Bossa Nova: uma análise comparativa de possíveis influências e conexões” de Ripke (2017).

Fig.3.6 - 1: Início da música *Chovendo na Roseira* de Tom Jobim Fig.3.6 - 2: Acordes do início de *Chovendo na Roseira*: Ab6/9 e Ebm7/Ab Fig.3.6 - 3: Acordes $Ab6/9$ e $Ebm7/Ab$: duas pentatônicas 5-35 invertidas entre si em torno do eixo soma 6

Chamou nossa atenção o segundo acorde (Ebm7/Ab), por se tratar de uma pentatônica formada exclusivamente com as alturas que correspondem às teclas pretas do piano, e o primeiro acorde (Ab6/9) ser formado por uma sequência intercalada de alturas que correspondem a teclas pretas e brancas, uma prática muito característica na linguagem composicional de Villa-Lobos, este que opunha combinações entre pentatônicas de alturas “brancas” e “pretas” como recurso recorrente para construção harmônica e melódica de suas obras²⁸ (ALBUQUERQUE, 2014). Esse fator se torna muito relevante considerando que Tom Jobim é assumidamente admirador de seu predecessor.

Interessante destacar que a oposição utilizada por Villa-Lobos concatenando pentatônicas com alturas distintas (cinco “pretas” *versus* cinco “brancas”) determina sempre conjuntos de dez classes de alturas (duas opções de conjuntos 10-5 com pentatônicas relacionadas em T₁I e um conjunto 10-6 na disposição T₆I), sem invariâncias entre os pares (ALBUQUERQUE, 2014). Tom Jobim também faz esta oposição entre pentatônicas, mas combinando-as a uma distância de T₂I, fator que gera uma coleção de sete classes de alturas – Réb diatônica – disposição que retém três invariâncias entre estes pares – Mib, Sib e Láb – como vimos acima.

Percebemos que a segunda extremidade do eixo soma 6 (Fig.3.6 – 4), mediatriz de reflexão entre as duas coleções pentatônicas que formam os acordes iniciais de *Chovendo na Roseira*, coincide com a altura Mib reiterada e protagonizada como centro na melodia, junto com outras duas alturas relevantes – Láb (8) e Sib (10) – estas que também são cada qual uma das extremidades dos eixos individuais das duas pentatônicas que servem de base para a formação dos dois pentacordes iniciais – o acorde Ab6/9, que está alinhado em torno do eixo soma 8, cujo um dos extremos é a altura Sib (10); e o acorde Ebm7/Ab, que está orientado pelo eixo soma 4, com a altura Láb (8) em uma das pontas desta mediatriz. Estas três alturas destacadas – Láb (8), Sib (10) e Mib (3), que juntas formam um conjunto (025) simétrico em torno do mesmo eixo soma 6 (alinhado entre Mib e Láb) – são as invariâncias entre as duas pentatônicas elencadas, que sobrepostas formam uma coleção de Réb diatônica, também simétrica em torno do eixo soma 6 pelo modo Mib dórico.

²⁸ Mais detalhes sobre a oposição entre as alturas referentes às teclas pretas e brancas do piano em Villa-Lobos, ver OLIVEIRA, 1984; DUARTE, 2009: 105-23; NERY, 2012.

Fig.3.6 - 4: Coleção Réb diatônica formada pela combinação entre os acordes Ab6/9 e Ebm7/Ab, reiteração do eixo soma 6

Uma constatação interessante é que estas duas pentatônicas que representam os acordes Ab6/9 e Ebm7/Ab podem ser representadas por duas metades opostas do cubo de alturas (Fig.3.6 – 5) que projeta a coleção Ré diatônica (conjunto 7-35).

Fig.3.6 - 5: acordes Ab6/9 e Ebm7/Ab representados no cubo diatônico, inter-relacionados pela face interna transversal

Além disso, a face transversal interna do cubo diatônico – que representa a justaposição dos dois poliedros de alturas – é formada pelas mesmas alturas invariantes entre os dois pentacordes – Mib, Láb e Sib – com a reiteração da altura Mib (centro do eixo de soma 6 que alinha a coleção Réb diatônica). Estas três alturas também aparecem estrategicamente sublinhadas em pontos distintos na melodia (Fig.3.6 – 6) – Láb no início, Mib mais ao centro e Sib no final – gerando assim novamente a polarização de Mib em torno das duas extremidades Láb e Sib, estas equidistantes do centro pelo mesmo intervalo de quarta justa. Somado a este último fator, temos ainda a limitação da tessitura da melodia neste trecho em torno destas mesmas alturas Láb e Sib, aspecto que reforça nossa hipótese de gravitação das alturas em torno do centro Mib. Outro fator de reiteração da altura Mib como centro é o uso da coleção Réb diatônica (7-35), que, no modo dórico, também é simétrico em torno do mesmo eixo soma 6. Reforçam ainda o centro Mib um par de alturas medianes – Fá e Réb – equidistantes de Mib pelo mesmo intervalo de segunda maior e equidistantes das respectivas extremidades Láb e Sib pelo intervalo de terça menor.

Fig.3.6 - 6: Equidistâncias melódicas em torno da altura Mib

Estas cinco alturas que gerenciam este recorte melódico em torno do centro Mib formam juntas uma coleção pentatônica simétrica em torno do eixo soma 6, a terceira possibilidade de uma estrutura desta espécie de conjunto 5-35 dentro da coleção Réb diatônica (7-35). Vale destacar que todas as estruturas tomadas como principais neste trecho inicial da obra de Tom Jobim – o tricorde (027), a pentatônica 5-35 e a coleção diatônica (7-35) – são conjuntos formados por extensões do mesmo ciclo intervalar C5.

Temos ainda a presença de um palíndromo melódico formando um eixo em torno da altura Láb e manutenção do centro Mib nas extremidades (Fig.3.6 – 7). Poderíamos ainda considerar este palíndromo dividido em duas metades, uma com sequência de notas ascendente a partir de Mib e outra descendente que chega até esta mesma altura.

Fig.3.6 - 7: Palíndromo melódico formando um eixo em torno da altura Láb

Se invertermos a ordem das sequências, a segunda antecipando à primeira, teremos uma ascendente seguida de uma descendente, formando assim um novo palíndromo agora com eixo em torno de Mib (Fig.3.6 – 8).

Fig.3.6 - 8: Palíndromo melódico equivalente formando um eixo em torno da altura Mib

Esse raciocínio foi assim colocado para que possamos perceber que um outro palíndromo que aparece na melodia dois compassos mais à frente, desta vez uma sequência de notas ascendente até Mib e depois descendente a partir desta mesma altura, é uma reflexão do seu precedente (Fig.3.6 – 9).

Fig.3.6 - 9: Palíndromo melódico formando um eixo em torno da altura Mib

Ou seja, temos um duplo palíndromo em um duplo eixo de inversão (Fig.3.6 – 10), na vertical e na horizontal, ambos espelhados em torno de Mib, utilizando como instrumento as simetrias inerentes à própria coleção diatônica em seu modo dórico, mais um fator que corrobora nossa suposição de colocar esta altura como centro principal desta primeira parte da música.

Fig.3.6 - 10: Combinação entre palíndromos melódicos formando um eixo em torno da altura Mib

A simetria por reflexão também foi verificada na figuração rítmica (Fig.3.6 – 11), aparente na construção espelhada em torno de uma semínima pontuada como eixo, estendida em ambos os sentidos com três colcheias e duas mínimas pontuadas em cada extremidade.

Fig.3.6 - 11: Palíndromo entre figurações rítmicas

Fica evidente que o compositor provavelmente idealizou uma estrutura bem elaborada com a interação entre padrões simétricos que são aplicados em várias dimensões deste trecho inicial, desde acordes pentatônicos, coleção diatônica em modo dórico, tessitura melódica restrita e gravitando em torno de uma altura central, palíndromos na melodia e na figuração rítmica.

Apesar de termos uma armadura de clave pertencente à coleção de Láb diatônica, junto à presença pertinente do acorde de Láb Maior ao longo de toda a música, fatores que nos levariam convencionalmente a supor uma obra orientada pela tonalidade de Láb Maior, a insistente substituição da altura Sol por Solb (poderíamos supor aqui um modo de Láb mixolídio, como sugeriu Carlos Almada em sua análise desta obra [2010]), somado ao uso isolado do acorde de sétima de dominante desta tonalidade – Eb7 aparece apenas uma única vez, sendo muitas vezes substituído pelo seu homônimo menor Ebm7 – e o uso recorrente de procedimentos melódicos e harmônicos orientados por proporções intervalares simétricas, nos fez supor que esta música de Tom Jobim está muito mais inclinada a um perfil composicional pós-tonal, provavelmente

fazendo jus a um legado herdado de Villa-Lobos e apreendido e utilizado notadamente por Tom Jobim em sua obra, contrariando muitos estudos que apontam para o uso de estruturas harmônicas não convencionais como mero “colorido textural”; ou seja, insistir em afirmar compulsoriamente que todos os complexos harmônicos presentes na obra de Tom Jobim fazem parte de um projeto exclusivamente tonal, por mais contraditório que seja esta afirmação.

Voltando a música de Tom Jobim, temos mais à frente a interrupção do *ostinato* harmônico entre os acordes pentatônicos Láb6/9 e Ebm7/Ab para a entrada do tetracorde Fsus4/7 (Fig.3.6 – 12). Este terceiro bloco harmônico se trata de um conjunto 4-23, outra estrutura intervalar gerada a partir de um segmento do ciclo intervalar C5 (quarta e quinta justas) – assim como as pentatônicas 5-35, os acordes Láb6/9 e Ebm7/Ab – um ciclo muito recorrente na obra de Villa-Lobos, como vimos na análise do início do *Choros nº2*. Outra informação relevante é a oposição entre dois pares de alturas correspondentes às teclas pretas e brancas do piano (Dó e Fá *versus* Sib e Eb), característica que também remete ao estilo composicional de Villa-Lobos.

Fig.3.6 - 12: Tetracorde Fsus4/7, conjunto 4-23, segmento do ciclo C5

Também foi possível localizar este conjunto 4-23 que forma o tetracorde Fsus4/7 como a face inferior do cubo de alturas para a coleção Réb diatônica (Fig. 3.6 – 13).

Fig.3.6 - 13: tetracorde Fsus4/7 (conjunto 4-23) implícito na face inferior do cubo diatônico

Localizando os acordes utilizados por Tom Jobim no início de *Chovendo na Roseira* – os conjuntos 5-35 e 4-23 – percebemos que o músico utilizou estruturas harmônicas do setor mais abaixo da região C5 da rede de projeções por inversão (perspectiva a partir de tricordes, Fig.3.6 – 14), coincidindo com parâmetros harmônicos similares aos escolhidos por Villa-Lobos no início do *Choros nº4*, a qual analisamos anteriormente. Temos assim mais um fator que aponta proximidades entre os estilos composicionais dos dois músicos, corroborando nossa suposição de que Tom Jobim assumiu algumas práticas composicionais que “estudou” na obra de Villa-Lobos.

Fig.3.6 - 14: Conjuntos 4-23 e 5-35, localizados na parte inferior da região C5

Temos até aqui uma série de indícios que nos levam a considerar a hipótese de que Tom Jobim se valeu de procedimentos harmônicos pós-tonais assimilados pelo compositor em seus estudos sobre a obra de Villa-Lobos e talvez de outros modernistas europeus como Debussy e Stravinsky. Mais do que citar gestos que lembrassem músicas de seu antecessor, Tom Jobim nos mostra que compreendeu em um considerável grau de profundidade o esquema composicional utilizado por Villa-Lobos, muito antes do que críticos e musicólogos, e as empreendeu deliberadamente na elaboração de uma de suas canções. Concluímos com isso que, compreender os mecanismos que engendram a obra de Villa-Lobos é, mais do que entender os meandres de criatividade deste ícone da música erudita da primeira metade do século XX, entender os desdobramentos deste estilo modernista servirem de pedra angular na construção de um dos principais gêneros da música popular brasileira da segunda metade do mesmo século, a Bossa Nova.

3.7. Comparativo entre amostras de estruturas harmônicas

A partir das informações levantadas nas obras analisadas anteriormente, apresentamos a seguir uma prévia desta proposta de construção de um perfil comparativo entre as estruturas harmônicas encontradas nas amostras analisadas e suas localizações na rede de projeções por inversão (Fig.3.7 – 1) e na rede de invariância entre entradas de vetores intervalares (Fig.3.7 – 2). Através deste comparativo, calcado em um número crescente de amostras que devem ser elencadas para um resultado mais efetivo, é possível apontarmos algumas tendências de interesse destes compositores em questão por determinados aspectos harmônicos, de acordo com as regiões da rede de projeções por inversão que forem mais recorrentes nas amostras analisadas.

Fig.3.7 - 1: Comparativo harmônico entre trechos de obras de compositores

Temos na parte superior da rede de projeções por inversão o conjunto 5-z17, em destaque no início da quarta peça do *Opus 19* e no início da terceira peça para orquestra *Opus 16 (Farben)* de Schoenberg, e os conjuntos 3-3, 4-7, 4-19, reiterados na série do *Opus 24* de Webern. Estes parâmetros mostram um aparente interesse destes dois compositores da *Segunda Escola de Viena* por estruturas harmônicas localizadas na bifurcação entre as regiões C1, C5 e região superior, evitando evidentemente o conjunto 3-11, situado nas imediações deste setor. Na região intermediária temos os tetracordes que formam a “constelação Morris” – os conjuntos 4-12, 4-13, 4-18 e 4-27 – estruturas harmônicas evidenciadas no início do *Quarteto de Cordas nº6/4* de Bartók. Seguindo para a seção mais abaixo da rede projeções por inversão, temos os conjuntos recorrentes no início do *Choros nº4* de Villa-Lobos: os conjuntos 3-2, 4-1, 4-2, 4-3, 5-1 (região C1), os conjuntos 3-7, 4-23, 4-22, 4-26, 5-35 (região C5), além dos conjuntos 4-11, 4-19 e 5-z12 (região central). Nesta seção inferior esquerda (região C5) da rede de projeções por inversão também estão localizados os conjuntos 4-23 e 5-35, utilizados como estruturas harmônicas no início de *Chovendo na Roseira* de Tom Jobim. Temos ainda o conjunto 4-1 na parte inferior direita deste sistema (região C1), estrutura que serve de base para os três tetracordes que formam a série dodecafônica utilizada no início do *Quarteto de Cordas, Opus 28/I* de Webern.

Podemos também desenvolver esta proposta de comparação entre regiões harmônicas recorrentes nas obras analisadas, agora utilizando a rede de invariância entre entradas de vetores intervalares (Fig.3.7 – 2), recorrendo aos mesmos tetracordes destacados acima. Podemos evidenciar a seguir três regiões harmônicas bem distintas entre os compositores Webern (série do *Opus 24*), Villa-Lobos (início do *Choros nº4*) e Bartók (início do *Quarteto de cordas nº6/4*).

Fig.3.7 - 2: Comparativo harmônico entre trechos de obras de compositores, rede de invariância entre entradas de vetores intervalares de tetracordes

Para que esta aplicação da rede de projeções por inversão e da rede de invariâncias entre entradas de vetores intervalares seja mais eficiente, é necessário a inclusão de uma quantidade significativa de análises de outros trechos de obras pós-tonais (conteúdo não previsto em nosso trabalho, considerando as dimensões desta pesquisa), buscando um maior número de amostras para que possamos avaliar com maior consistência sobre as estruturas

harmônicas preferidas entre alguns artistas modernistas do início do século XX – prioritariamente Schoenberg, Webern, Berg, Stravinsky, Debussy, Bartók, Varèse e Villa-Lobos – incluindo ainda outros nomes de diferentes contextos que se inclinaram para uso de procedimentos composicionais pós-tonais (como mostramos na análise da canção *Chovendo na Roseira* de Tom Jobim). Com estas informações poderíamos então identificar a maior ou menor incidência de algumas estruturas harmônicas no repertório destes compositores, mostrando possíveis proximidades intervalares entre estes conjuntos relevantes, pontuando as regiões da rede de projeções por inversão e da rede de invariância entre entradas de vetores intervalares onde estes grupos de alturas se aglomeram, resultando em um mapeamento consistente das regiões harmônicas preferidas pelos compositores elencados. Consideramos assim que apresentamos apenas uma breve amostra das possibilidades de aplicações de estudo para a rede de projeções por inversão e a rede de invariância entre entradas de vetores intervalares, mostrando que estas podem ser excelentes ferramentas de análise musical para o levantamento de índices comparativos entre estruturas harmônicas recorrentes no repertório pós-tonal.

3.8. “Eixos harmônicos” de Stravinsky, segundo Straus (2014)

Esta proposta de construção de perfis comparativos entre estruturas harmônicas preferidas por compositores da primeira metade do século XX foi apresentada acima de maneira ilustrativa, baseada em um número muito restrito de amostras de músicas, demonstrando aqui apenas as possíveis potencialidades da rede de projeções por inversão como ferramenta efetiva em análises de obras pós-tonais. Necessitaríamos aqui de um número muito maior de amostras analisadas para uma avaliação mais precisa de cada uma das preferências harmônicas dos compositores em questão (esforço que extrapolaria os propósitos desta pesquisa). Por outro lado, podemos recorrer a pesquisas mais extensas que já se dedicam ao mapeamento de estruturas harmônicas reiteradas em um conjunto de obras de um determinado compositor, localizar as regiões da rede de projeções por inversão onde estes conjuntos de alturas mais se concentram, e assim poder identificar proximidades intervalares entre estas estruturas harmônicas. Consequentemente, teríamos uma ferramenta sólida

para a determinação mais consistente de um perfil estético de um compositor em destaque, baseada em uma extensa seleção de trechos de obras previamente estudadas. Em suma, quanto maior o número de músicas analisadas, mais concreta é a avaliação das características harmônicas recorrentes no repertório de um compositor.

Seguindo nesta esteira, trouxemos os resultados de uma ampla pesquisa apresentada por Joseph Straus (2014), o qual se dedicou à análise de um número considerável de obras de Stravinsky – um total de noventa e cinco amostras musicais analisadas – com destaque para o repertório de período russo, emblemático por músicas como *Sagração da Primavera* (1913) e *Petruska* (1911). Em seu artigo “Harmony and Voice Leading in the Music of Stravinsky” (2014), Straus observa a recorrência de pares de quintas combinadas no repertório de Stravinsky, preenchidas com outras alturas em formações diatônicas, sendo um dos pares disposto invertido em quarta para conduções melódicas e o outro par em quinta para construções harmônicas. O autor classificou estas combinações com quartas e quintas como “eixos harmônicos” e as categorizou em seis modelos (*models*), de acordo com a distância intervalar entre estes pares intervalares, como podemos ver na tabela abaixo (Tab. 3.8 – 1):

Model	1	2	3	4	5	6
Quintas	Dó – Sol	Dó – Sol	Dó – Sol	Dó – Sol	Dó – Sol	Dó – Sol
	Dó# – Sol#	Ré – Lá	Mib – Sib	Mi – Si	Fá – Dó	Fá# – Dó#
Relação intervalar	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆
Eixo harmônico	4-8 (0156)	4-23 (0257)	4-26 (0358)	4-20 (0158)	3-9 (027)	4-9 (0167)
Subconjuntos de tricordes	3-4 (015)	3-7 (025)	3-7 (025)	3-4 (015)	3-9 (027)	3-5 (016)
	3-5 (016)	3-9 (027)	3-11 (037)	3-11 (037)		

Tab.3.8 - 1: seis “eixos harmônicos” de Stravinsky categorizados por Straus (2014)

Notamos que estes seis modelos formam os mesmos tetracordes simétricos que compõem todo o lado superior e esquerdo da primeira versão da rede de projeções por inversão (*região C5*), incluindo como subconjuntos os tricordes que servem de base para cada um dos *Tonnetze* que interligam esta face do sistema (Fig. 3.8 – 1). Em suma, a partir destas características, podemos deduzir que Stravinsky tem uma evidente preferência por estruturas melódico-harmônicas construídas a partir do ciclo C5, evitando evidentemente todos os conjuntos correlacionados por multiplicação M_5 e M_7 que compõem a outra face da rede de projeções por inversão (*região C1*). Sendo assim, partido das deduções apontadas por Straus (2014), podemos notar que os tetracordes simétricos posicionados do lado direito do sistema, estes construídos a partir da reiteração do ciclo intervalar C1, são aparentemente menos contemplados no período russo de Stravinsky, segundo esta pesquisa do autor.

Fig.3.8 - 1: seis “eixos harmônicos” de Stravinsky (STRAUS, 2014) na face transversal esquerda da rede de projeções por inversão

3.9. *Sinfonia nº7/I (1945) de Villa-Lobos*

Seguimos para o último trecho deste capítulo, onde nos deteremos um pouco sobre o início do primeiro movimento da *Sinfonia nº7* (1945) de Heitor Villa-Lobos, obra que apresenta características harmônicas muito elaboradas, destacadamente inclinadas ao universo de parâmetros recorrentes na música pós-tonal. Por esta razão, empregaremos nesta música todo este conjunto metodológico desenvolvido ao longo deste trabalho – utilizando o conceito de *rede de projeções por inversão* e todos os desdobramentos levantados a partir da imbricação entre simetria intervalar, teoria neorriemanniana e teoria dos conjuntos, discutidas anteriormente – mostrando como Villa-Lobos estava alinhado às práticas composicionais vanguardistas de seus pares europeus.

Desde os compassos iniciais da *Sinfonia nº7/I* (Fig.3.9 – 1) podemos perceber uma obra que se inscreve em parâmetros composicionais inclinados para o uso de procedimentos harmônicos pós-tonais. Após um grande *glissando* descendente entre todos os instrumentos da orquestra, que muito se assemelha ao início de outra obra de Villa-Lobos, *Uirapuru* (1917), temos a sequência de três blocos harmônicos (Fig. 3.9 – 2) no naipe dos sopros (c.2) – desenhados sobre o motivo principal que rege toda a seção do Tema I – que visivelmente não seguem a padrões triádicos convencionais.

The image displays the initial measures of Villa-Lobos' Symphony No. 7, featuring three main instrumental groups: Sopros (Woodwinds), Cordas (Strings), and Harpas Teclados (Harps/Pianos). The score is written in 2/4 time and includes dynamic markings such as *f* (forte), *cresc.* (crescendo), *ff* (fortissimo), and *fff* (fortississimo). The woodwinds and strings both begin with a forte (*f*) dynamic and a crescendo, while the harps/pianos start with a forte (*f*) dynamic and a glissando. The woodwinds and strings transition to fortissimo (*ff*) and fortississimo (*fff*) dynamics, while the harps/pianos transition to fortissimo (*ff*) and fortississimo (*fff*) dynamics. The harps/pianos part includes a glissando marked *gliss.* and a dynamic marking of *8va* (octave).

Fig.3.9 - 1: Início da *Sinfonia nº7* de Villa-Lobos

Quando colocamos as alturas referentes a estes três blocos harmônicos no *clockface* (Fig. 3.9 – 3), aparentemente não encontramos nenhum conjunto integralmente simétrico. No entanto, percebemos que o primeiro e o terceiro grupos de alturas correspondem ao mesmo conjunto 7-32 (Card7), duas versões da coleção harmônica invertidas entre si pela relação T_{01} – Mib Harmônica Maior (7-32B) e Ré harmônica menor (7-32A), respectivamente (SOLOMON, 2005). Estas duas estruturas estão intermediadas pelo conjunto 6-z19 – uma sobreposição de dois conjuntos 3-11, distantes em T_1 (semitom): os acordes maiores A e Ab. Também podemos destacar que os três blocos harmônicos possuem subconjuntos simétricos envolvendo quase a totalidade de alturas, com exceção de apenas uma nota para cada estrutura. Temos, respectivamente, os

hexacordes 6-z29 para os conjuntos 7-32 – exceção da altura Sol para a coleção Mib HM (conjunto 6-z29, soma 11) e a altura Fá para Ré hm (conjunto 6-z29, soma 1) – e o pentacorde 5-22 para o conjunto intermediário 6-z19 – com exceção da altura Réb. Temos assim uma progressão de um movimento anti-horário dos eixos de soma²⁹, seguindo a sequência das somas 1, 0 e 11.

Fig.3.9 - 2: *Sinfonia nº7* de Villa-Lobos, c.2, sopros

Fig.3.9 - 3: Blocos harmônicos no *clockface*

²⁹ Verificamos a mesma recorrência à movimentos de eixos de soma como fator de estruturação harmônica também no início do *Choros nº7* de Villa-Lobos (ALBUQUERQUE, 2014).

Além disso, estes conjuntos 7-32 estão invertidos entre si em torno do eixo soma 0, a mesma mediatriz que rege a quase totalidade de alturas do conjunto intermediário 6-z19 (com exceção da nota Réb), o segundo bloco harmônico que aparece na sequência. Podemos averiguar esta relação por inversão entre Mib HM (7-32B) e Re hm (7-32A) em torno do eixo T₀l, constatada em uma matriz de soma 0 (Tab. 3.9 – 1).

Soma 0		Mib Harmônica Maior (7-32B)						
		3	5	7	8	10	11	2
Ré harmônica menor (7-32A)	9	0						
	7		0					
	5			0				
	4				0			
	2					0		
	1						0	
	10							0

Tab.3.9 - 1: Matriz de soma 0 entre as coleções Mib HM e Ré hm

Este eixo soma 0 ganha ainda mais relevância quando percebemos que o grupo completo de alturas que integram os três blocos harmônicos analisados – um conjunto 11-1 (ausência da altura Fá#, Fig. 3.9 – 4) – também está orientado em torno desta mesma mediatriz, gerando destaque para as alturas Dó e Fá#, alturas por onde perpassa o eixo soma 0.

Fig.3.9 - 4: Grupo completo de alturas, conjunto 11-1, eixo soma 0

Este eixo Dó–Fá# é reiterado novamente logo em seguida com o encerramento deste trecho com o conjunto 3-9 na tessitura mais grave da orquestra (Fig. 3.9 – 5), reafirmando a presença desta mediatriz como regente da organização harmônica no início da *Sinfonia nº7*, concomitante a reiteração melódica de umas das extremidades da soma 0: a altura Dó. Temos assim, logo no início desta obra a confirmação da presença de simetrias intervalares regendo a organização harmônica, mostrando a necessidade de recorrermos a ferramentas adequadas para a análise de obras pós-tonais. Seguindo esta constatação, aplicamos aqui alguns dos parâmetros teóricos desenvolvidos nos capítulos anteriores.

Fig.3.9 - 5: Conjunto 3-9, eixo soma 0, centro em Dó

A seguir selecionamos outro trecho da *Sinfonia nº7* (c. 7-11, Fig. 3.9 – 6), apresentado no naipe das cordas (replicado pelo piano). Na análise deste segundo exemplo da obra de Villa-Lobos, recorreremos mais uma vez aos recursos desenvolvidos neste trabalho para o estudo de obras pós-tonais. Neste caso, verificamos uma sequência de duas camadas estratificadas de tetracordes caminhando em direções opostas (ascendente e descendente), seguindo uma sobreposição de grupos de alturas que não geram padrões harmônicos convencionais.

Fig.3.9 - 6: *Sinfonia n.º7* de Villa-Lobos, c.7-11, camadas de tetracordes

Mapeando as classes de conjuntos de cada um destes tetracordes, e os conjuntos resultantes de suas sobreposições, percebemos que apenas a combinação do primeiro par de tetracordes concomitantes (o mesmo conjunto 4-22) gera uma estrutura simétrica – o conjunto 8-24, orientado pelo eixo soma 4 (Fig. 3.9 – 7).

Fig.3.9 - 7: Combinação de um par do tetracorde 4-22, projeção do conjunto 8-24, eixo soma 4

Todas as demais combinações subsequentes projetam estruturas harmônicas assimétricas, como podemos verificar a seguir (Fig. 3.9 – 8 e Tab. 3.9 – 2):

Fig.3.9 - 8: Sequência de tetracordes em sobreposição

Sequência	Superior Ascendente	Inferior Descendente	Projeção
1	4-22	4-22	8-24
2	4-17	4-24	7-26
3	4-26	4-23	8-14
4	4-24	4-18	7-30
5	4-17	4-18	7-31
6	4-22	4-23	8-22
7	4-z29	4-20	7-26
8	4-z29	4-20	7-19

Tab.3.9 - 2: Projeções a partir de tetracordes sobrepostos

Percebemos que a maioria deste tetracordes se relacionam na rede de projeções por inversão (perspectiva a partir da “constelação Morris”) em torno dos hexacordes 6-z26, 6-32, 6-z49 e 6-z50 (com exceção do conjunto 4-24),

como podemos perceber na figura a seguir (Fig. 3.9 – 9). Destacamos que a maioria dos conjuntos escolhidos por Villa-Lobos está relacionado na região C5 deste sistema, com exceção dos tetracordes 4-17 e 4-18, os quais pertencentes à região central. Importante ressaltar ainda que o compositor prefere conjuntos da parte inferior da rede de projeções por inversão (tanto na perspectiva a partir de tricordes, quanto na versão com a “constelação Morris”), assim como percebemos também na análise do início do *Choros nº4*, o que parece ser uma característica preponderante na linguagem harmônica do compositor. Entretanto, neste trecho em particular da *Sinfonia nº7*, Villa-Lobos seleciona prioritariamente conjuntos da região C5, seção harmônica regida pela destacada presença invariante da classe de intervalo |5| (quartas e quintas justas) e menor influência das classes de intervalo |1| (segundas menores e sétimas maiores) e |6| (trítonos). Neste recorte, o compositor opta por não utilizar conjuntos relacionados por multiplicação pelos fatores M_5 e M_7 (diferente do que aconteceu no *Choros nº4*, onde havia esta relação), ou seja, Villa-Lobos não apresenta os conjuntos correspondentes da região C1, relacionados ao tetracordes da região C5 em questão.

Fig.3.9 - 9: Relações entre tetracordes e hexacordes na rede de projeções por inversão

Analizamos também as relações por invariância entre entradas de vetores intervalares destes tetracordes (Fig. 3.9 – 10), constatando que eles estão distribuídos em dois grupos distintos (além do conjunto 4-24 isolado). Formam o primeiro grupo os tetracordes 4-20, 4-17, 4-18 e 4-z29, sendo o outro grupo formado pelos conjuntos 4-23, 4-22 e 4-26.

Fig.3.9 - 10: Relação entre tetracordes por invariância de entradas de vetores intervalares

Observamos também a disposição horizontal das alturas neste trecho (Fig. 3.9 – 11), verificando a presença de oito melodias distribuídas em dois grupos caminhando em sentidos opostos (quatro ascendentes e quatro descendentes). Destaque para a segunda e terceira vozes, que foram construídas exclusivamente com alturas da coleção Dó diatônica (“notas brancas”, conjunto 7-35), e para a primeira e quarta vozes – os conjuntos 6-32 e 6-z47 – construídas com todas as alturas referentes as teclas pretas do piano (pentatônica 5-35), com a adição de apenas uma “nota branca” no mesmo terceiro passo de ambas

as estruturas. Este parâmetro se destaca, considerando que esta oposição entre as alturas referentes à tipologia das teclas do piano é recorrente na obra de Villa-Lobos.

The image displays a musical score for eight voices, organized into two groups of four voices each. The staves are numbered 1 through 8. The notation includes various musical symbols such as clefs, key signatures, and specific melodic lines for each voice part.

- Staff 1: Treble clef, key signature of one sharp (F#), time signature of common time (C). The melody starts with a half note F#4, followed by quarter notes G#4, A4, B4, C5, D5, E5, and F#5.
- Staff 2: Treble clef, key signature of one sharp (F#), time signature of common time (C). The melody starts with a half note F#4, followed by quarter notes G#4, A4, B4, C5, D5, E5, and F#5.
- Staff 3: Treble clef, key signature of one sharp (F#), time signature of common time (C). The melody starts with a half note F#4, followed by quarter notes G#4, A4, B4, C5, D5, E5, and F#5.
- Staff 4: Treble clef, key signature of one sharp (F#), time signature of common time (C). The melody starts with a half note F#4, followed by quarter notes G#4, A4, B4, C5, D5, E5, and F#5.
- Staff 5: Bass clef, key signature of one sharp (F#), time signature of common time (C). The melody starts with a half note F#3, followed by quarter notes G#3, A4, B4, C5, D5, E5, and F#5.
- Staff 6: Bass clef, key signature of one sharp (F#), time signature of common time (C). The melody starts with a half note F#3, followed by quarter notes G#3, A4, B4, C5, D5, E5, and F#5.
- Staff 7: Bass clef, key signature of one sharp (F#), time signature of common time (C). The melody starts with a half note F#3, followed by quarter notes G#3, A4, B4, C5, D5, E5, and F#5.
- Staff 8: Bass clef, key signature of one sharp (F#), time signature of common time (C). The melody starts with a half note F#3, followed by quarter notes G#3, A4, B4, C5, D5, E5, and F#5.

Fig.3.9 - 11: Dimensão melódica em dois grupos de quatro vozes

CONCLUSÃO

Este presente trabalho tomou como objetivo o desenvolvimento e aprimoramento de ferramentas metodológicas para análise de músicas pós-tonais, a partir da averiguação de correlações intervalares simétricas entre diversos conjuntos de cardinalidades diferentes, identificando a utilização destas dimensões proporcionais entre grupos de alturas como fatores de organização harmônica em obras de vanguarda do início do século XX e afins. Entre diversas amostras de músicas tomadas para exemplos de estudo, elencamos também trechos de obras de Villa-Lobos, demonstrando como este compositor estava alinhando às propostas estéticas de seus pares estrangeiros. Incluímos ainda uma música de Tom Jobim, mostrando prováveis influências modernistas recebidas e incorporadas de seus precursores.

Reconhecemos ao longo de nossa investigação a importância dos resultados conquistados por pesquisadores empenhados em desenvolver estratégias teóricas voltadas para a análise de obras de vanguarda que recorrem a estratégias harmônicas pós-tonais. Entre estas diversas propostas que foram sendo desenvolvidas e aprimoradas ao longo das últimas décadas, selecionamos aqui alguns instrumentos emblemáticos de uma destas vertentes metodológicas – a teoria neorriemanniana, na qual este presente trabalho se inscreve – com destaque para a rede de alturas (*Tonnetz*) a partir de qualquer classe de conjunto, seguindo uma suposição apresentada por Lewin (1982).

No campo de estudos da teoria neorriemanniana, desenvolvemos uma extensa reflexão a partir deste conceito de rede de alturas (*Tonnetz*), apresentando as diversas possibilidades de construção de *Tonnetze* a partir todos os tricordes e tetracordes previstos. Além disso, percebemos relações de invariância entre estes diferentes *Tonnetze*, parâmetros que foram alinhados em um sistema comum e mais amplo que chamamos neste trabalho de *rede de projeções por inversão*, abrindo espaço para um novo segmento de estudo dentro do campo da teoria neorriemanniana – que chamamos aqui de *teoria da inversão*. O ponto de partida desta série de especulações nasceu de uma hipótese levantada por Robert Morris (2007), o qual constatou que poderia haver um fator de alinhamento entre as principais correntes de estudo dedicadas ao universo pós-tonal – teoria dos conjuntos (Forte), teoria neorriemanniana (Lewin)

e teoria dos ciclos intervalares (Perle) – em torno de um princípio comum de organização harmônica. Mais do que isso, Morris enfatiza que este alinhando estre estas correntes teóricas poderia ser demonstrada através da *teoria dos grupos* – uma ferramenta incorporada da matemática, dedicada ao estudo da simetria utilizando estruturas algébricas conhecidas como matrizes. Esta suposição do autor foi tomada neste trabalho e corroborada ao longo de nossa pesquisa, culminando no desenvolvimento das diferentes perspectivas de construção de segmentos da rede de projeções por inversão apresentadas ao longo do texto. Reconhecemos que não esgotamos ainda todos os caminhos de projeções possíveis que devem existir neste sistema que construímos, mas acreditamos que a rede de projeções por inversão possa alcançar todos as classes de alturas previstos no sistema de doze notas, revelando assim esta suposição prevista no texto de Morris (2007).

Notamos na *rede de projeções por inversão* uma propriedade simétrica inerente ao sistema cromático, constatando uma dimensão proporcional que envolve uma quantidade significativa de classes de altura inerentes ao universo das doze notas. Além disso, construímos um sistema que relaciona conjuntos de diferentes cardinalidades, possibilidade não prevista em outra vertente descendente da teoria neorriemanniana – a *teoria transformacional*, que gravita principalmente em torno do trabalho de Richard Cohn e Tymoczko – que se empenha na construção de redes de conjuntos com um mesmo número de alturas, com destaque para a “dança dos cubos” com tricordes e o sistema com “torres” de tetracordes (COHN, 2012). Em nossa proposta de análise de obras pós-tonais, se mostrou-se necessário a construção de sistemas que relacionassem conjuntos de qualquer ordem e de diferentes espécies, não apenas os convencionais conjuntos 3-11 e 4-27 trabalhados a exaustão na teoria neorriemanniana tradicional e na teoria transformacional. Desta forma, se revelou extremamente eficiente a nossa proposta de construção desta rede de projeções por inversão e sua utilização no mapeamento de estruturas intervalares de obras pós-tonais.

Percebemos ainda que a rede de projeções por inversão pode ser segmentada em setores harmônicos correlacionados (com destaque para as regiões C1 e C5, correspondentes por multiplicação pelos fatores M_5 e M_7). Desta forma, dependendo da espécie de conjuntos recorrentes em determinado

trecho de uma obra analisada, podemos determinar o perfil harmônico preferido por um compositor em um determinado contexto. Esta verificação pode ainda ser estendida e corroborada ao incluirmos um número maior de exemplos de um mesmo compositor ou de um aglomerado específico de músicas, revelando possíveis inclinações, características harmônicas e predileções particulares de acordo com regiões reiteradas da rede de projeções por inversão. Apresentamos uma pequena amostra desta proposição ao final do terceiro capítulo que deve ser aprimorado com um maior número de amostras no decorrer de pesquisas futuras.

Passamos ainda por propostas similares a rede projeções por inversão, mas que não nasceram a partir de conceitos recorrentes na teoria neorriemanniana, mas a partir de outros campos de estudos voltados para música pós-tonal. Destacamos aqui a proposta de conglomerados de ciclos intervalares de George Perle e as redes harmônicas de Henri Pousseur. Estes pontos de encontros entre estas diferentes propostas de estudo são fatores que mais uma vez comprovam a suposição de Robert Morris (2007) de possibilidade de alinhamento entre todas estas metodologias em torno de um mesmo fator comum – a teoria dos grupos.

BIBLIOGRAFIA

- ADORNO, Theodor W. *Filosofia da nova música*. Trad. Magda França. 2ª ed. São Paulo: Perspectiva, 1989.
- ALBUQUERQUE, Joel. "Simetria Intervalar e Rede de Coleções: Análise Estrutural dos *Choros nº4* e *Choros nº7* de Heitor Villa-Lobos". Dissertação de Mestrado em Processos de Criação Musical pela Escola de Comunicações e Artes, Universidade de São Paulo, São Paulo: 2014.
- _____. "Análise estrutural do *Choros nº2* de Heitor Villa-Lobos". *Anais da III Jornada Acadêmica Discente do PPGMUS*, p.18-26. ECA-USP, São Paulo: 2015.
- _____. "Redes de projeções por inversão: propriedades simétricas do sistema cromático e equivalências por multiplicação M5 e M7". *Revista Orfeu*, v.2, n.1, jul. de 2017, p. 121-159. CEART – UDESC, Santa Catarina: 2017a.
- _____. "Análise harmônica do início da *Sinfonia nº7* de Heitor Villa-Lobos". *Anais do III Simpósio Villa-Lobos*, p. 254-70. ECA/USP, São Paulo: 2017b.
- _____. "Simetria intervalar em Tom Jobim: *Chovendo na Roseira*, um legado de Villa-Lobos?". *Anais do IV Encontro Internacional de Teoria e Análise Musical*, jun. de 2017, p. 53-63. ECA-USP, São Paulo: 2017c.
- _____. "Eixo de simetria como fator de coerência no *Op.19/4* de Schoenberg". *Anais da IV Jornada Acadêmica Discente do PPGMUS*, p. 290-98. ECA/USP, São Paulo: 2017d.
- ALBUQUERQUE, Joel; SALLES, Paulo de Tarso. "Rede de Projeções por Inversão, Relações entre *Tonnetze* de Diferentes Tricordes". *MUSICA THEORICA*, Revista da Associação Brasileira de Teoria e Análise Musical, p. 139-163. Salvador: 2016.
- ALMADA, Carlos de Lemos. "*Chovendo na roseira* de Tom Jobim: uma abordagem schenkeriana". *Per musí*, Belo Horizonte, n. 22, p. 99-106, 2010.
- ANDRADE, Mário de. *O Ensaio sobre a Música Brasileira* [1928]. 3ª Ed. São Paulo: Livraria Martins, 1972.
- ANTOKOLETZ, Elliott. *La Música de Béla Bartók: un estudio de la tonalidad y la progresión en la música Del siglo XX*. Traduzido para o espanhol por José Ángel García Corona. Espanha: Idea Books, S.A., 2006.

- _____. "From polymodal chromaticism to symmetrical pitch construction in the musical language of Villa-Lobos", *Revista Brasileira de Música*, v. 24, Nº 2, p. 265-276. Rio de Janeiro: Jul./Dez. 2011.
- BABBITT, Milton. "Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants". *The Musical Quarterly*, Vol. 46, No. 2, Special Issue: Problems of Modern Music. The Princeton Seminar in Advanced Musical Studies (Apr., 1960), pp. 246-259
- _____. "Set Structure as a Compositional Determinant". *Journal of Music Theory*, Vol. 5, No. 1 (Spring, 1961), p. 72-94.
- BARRAUD, Henry. *Para Compreender as Músicas de Hoje*. Trad. J. J. de Moraes e Maria Lúcia Machado. 3ª ed. São Paulo: Editora Perspectiva S. A., 1997.
- BERRY, Wallace. *Structural Functions in Music*. New York: Dover Publications, 1987.
- BOULEZ, Pierre. *Apontamentos de aprendiz*. Trad. Stella Moutinho, Caio Pagano e Lúcia Bazarian. São Paulo: Perspectiva, 1995.
- _____. *A música hoje* [1963]. 3ª ed. [1986] Trad. Reginaldo de Carvalho e Mary A. L. de Barros. Editora Perspectiva: 2011.
- BOTTI, Renata. "Aspectos de textura na música de Heitor Villa-Lobos". Dissertação de mestrado. São Paulo: ECA-USP, 2003.
- BREGEGERE, Andre Rene, "L'Harmonie révéée: An Analysis of Henri Pousseur's 'Votre Faust' And 'Les litanies d'Icare'". Dissertação de Doutorado em Filosofia pela *City University of New York*. *CUNY Academic Works*, Nova Iorque: 2015.
- BURKHART, Charles. "Schoenberg's Farben", *Perspectives of New Music*, vol. 12, p.141-72, 1974.
- CARPENTIER, Alejo. *Villa-Lobos por Carpentier*. Seleção de textos. Arquivo do Estado de São Paulo. Secretaria de Estado da Cultura; tradução de Emir Sader e J. J. de Moraes (art. nº.6). São Paulo: Imprensa Oficial do Estado, 1991.
- COHN, Richard. "Inversional Symmetry and Transpositional Combination in Bartók" *Music Theory Spectrum*, Vol. 10, 10th Anniversary Issue (Spring, 1988), pp. 19-42.
- _____. "Introduction to Neo-Riemannian Theory: A Survey and a Historical Perspective". *Journal of Music Theory*, Vol. 42, No. 2. Neo-Riemannian Theory, p. 167-180, Autumn, 1998a.
- _____. "Square Dances with Cubes". *Journal of Music Theory*, Vol. 42, No. 2. Neo-Riemannian Theory, p. 283-296, Autumn, 1998b.

- _____. *Audacious Euphony: Chromatic Harmony and the Triad's Second Nature*. Nova Iorque: Oxford University Press, 2012.
- CORRÊA, Antenor Ferreira. *Estruturas Harmônicas Pós-Tonais*. São Paulo: Editora UNESP, 2006.
- _____. "Aplicação do Módulo 7 na Análise da Música Pós-Tonal". *Anais do XXI Congresso da ANPPOM*. Uberlândia/MG: p. 1630-37, 2011.
- DOUTHETT, Jack; STEINBACH, Peter. "Parsimonious Graphs: A Study in Parsimony, Contextual Transformations and Modes of Limited Transposition". *Journal of Music Theory*, Vol. 42, No. 2, Neo-Riemannian Theory, p.241-263, Autumn, 1998.
- DUARTE, Roberto. *Villa-Lobos errou?* São Paulo: Algor Editora Ltda, 2009.
- FALQUEIRO, Allan. "Síntese do Leste e Oeste: Uma Análise dos Eixos Simétricos no Terceiro Quarteto de Cordas de Béla Bartók". Dissertação de Mestrado para o Programa de Pós-Graduação em Música. Santa Catarina: UDESC, 2012.
- FERRAZ, Silvio. "Varése: a composição por imagens sonoras", *Música hoje*, vol. 8. Belo Horizonte: Escola de Música da UFMG, p. 8-30 (versão em PDF), 2002.
- FOLEY, Gretchen. "Pitch and interval structures in George Perle's Theory of Twelve-tone Tonality". Dissertação de Doutorado em Filosofia pela *The University of Western Ontario*. Londres, Ontario: 1998.
- FORTE, Allen. "Pitch-Class Set Genera and the Origin of Modern Harmonic Species". *Journal of Music Theory*, Vol. 32, No. 2 (Autumn, 1988), p. 187-270, 1988.
- GOLLIN, Edward. "Some Aspects of Three-Dimensional Tonnetze". *Journal of Music Theory*. Vol. 42, nº2, Neo-Riemannian Theory (Autumn, 1998), 195-206.
- HEINEMANN, Stephen. "Pitch-class Set Multiplication in Boulez's *Le Marteau sans maître*". Dissertação de Doutorado em Artes pela *The University of Washington*. Washington, Seattle: 1993.
- _____. "Pitch-Class Set Multiplication in Theory and Practice". *Music Theory Spectrum*, Vol. 20, No. 1 (Spring, 1998), p. 72-96, 1998.
- HICKEN, Kenneth. "Tonal Organization in Schoenberg's. Six Little Piano Pieces, Op. 19". *Canadian University Music Review / Revue de musique des universités canadiennes*, Nº1, 1980, p. 130-146.

- HYDE, Martha. "Twentieth-Century Analysis during the Past Decade". *Music Theory Spectrum*, Vol. 11, No. 1. The Society for Music Theory: The First Decade, p. 35-39, Spring, 1989.
- JOBIM, Antônio Carlos. *Crônica*. Manuscrito. p. 8, 10 e 12. Caderno 19. 1987. Disponível em <<http://www.jobim.org/jobim/handle/2010/7793>>. Acessado em 06jan15.
- Journal of Music Theory* Vol. 42, No. 2, Neo-Riemannian Theory p.167-348, 1998.
- KATER, Carlos Elias. *Música Viva e H. J. Koellreutter: movimentos em direção à modernidade*. São Paulo: Musa Editora: Atravez, 2001.
- LACERDA Marcos B. "Aspectos harmônicos do *Choros n. 4* de Villa-Lobos e a linguagem modernista". *Revista Brasileira de Música*. Programa de Pós-Graduação em Música – Escola de Música da UFRJ, Rio de Janeiro, v. 24, n. 2, p. 277-297, Jul./Dez, 2011.
- LEWIN, David. "A Formal Theory of Generalized Tonal Functions". *Journal of Music Theory*, Vol. 26, No. 1 (Spring, 1982), pp. 23-60
- _____. *Generalized Musical Intervals and Transformations*. New Haven: Yale University Press, 1987.
- LIMA, Rodrigo. "Da nota ao som: explorando territórios harmônicos". Dissertação de Mestrado em Música pelo Instituto de Artes da Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2009.
- MEAD, Andrew. "The State of Research in Twelve-Tone and Atonal Theory". *Music Theory Spectrum*, Vol. 11, No. 1, The Society for Music Theory: The First Decade, p. 40-48, Spring, 1989.
- MENESES, Flo. *Apoteose de Schoenberg*. 2ª ed. São Paulo: Ateliê Editorial, 2002.
- MESSIAEN, Olivier. *Technique de Mon Langage Musical*. Paris, Leduc, 1944.
- MOLINA, Sérgio. "Des pas sur la neige: aspectos técnico-composicionais do prelúdio de Claude Debussy". *Opus*, Porto Alegre, v. 17, n. 1, p. 73-96, jun. 2011.
- MOREIRA, Silvio. "O problema da audibilidade de estruturas sonoras simétricas". 2012. In: Segundo Simpósio Villa-Lobos. São Paulo: ECA, 2012.
- MORRIS, Robert. "Review" about *Basic Atonal Theory* (1980) by John Rahn. *Music Theory Spectrum*, Vol. 4 (Spring, 1982), pp. 138-154

- _____. "Mathematics and the Twelve-Tone System: Past, Present, and Future". *Perspectives of New Music*, Vol. 45, No. 2 (Summer, 2007), pp. 76-107.
- NERY FILHO, Walter. "Os voos do Passarinho de Pano e análise dos processos composicionais na suíte Prole do Bebê nº 2 de Villa-Lobos". Dissertação de Mestrado em Processos de Criação Musical pela Escola de Comunicações e Artes, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.
- NORONHA, Lina Maria Ribeiro de. *Politonalidade: discurso de reação e transformação*. São Paulo: FAPESP: Annablume, 1998.
- _____. "DARIUS MILHAUD: o nacionalismo francês e a conexão com o Brasil". Tese de doutoramento para o Programa de Pós-Graduação em Música. São Paulo: UNESP, 2012.
- OLIVEIRA, Jamary. "Black key versus White key: a Villa-Lobos devise", *Latin American Music Review*, vol. 5, nº1, p. 33-47, 1984.
- OLIVEIRA, João P. *Teoria analítica da música do século XX*. 2ª Ed. Lisboa: Calouste Gulbenkian, 2007.
- PARKS, Richard. *The Music of Claude Debussy*. New Haven: Yale University Press, 1989.
- _____. "Pitch-Class Set Genera: My Theory, Forte's Theory." *Music Analysis* 17, p. 206-26, 1998.
- PEPPERCORN, Lina M. *The world of Villa-Lobos in pictures and documents*. Aldershot: Scolar Press, 1996
- PERLE, George. *Twelve-tone Tonality*. University of California Press, California: 1977.
- _____. *Twelve-tone Tonality*. 2nd. ed. University of California Press, California: 1996.
- PERSICHETTI, Vincent. *Armonia Del Siglo XX*. Madrid: Real Musical, 1985.
- PISTON, W. *Armonia*. Coopere City, Fl: SpanPress Universitária, 1998.
- POUSSEUR, Henri. *Apoteose de Rameau e outros ensaios*. Trad. Flo Menezes e Mauricio Ayer. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- _____. "De Schoenberg a Webern: uma mutação" [1956] in *Apoteose de Rameau e outros ensaios* (p.49-88). Trad. Flo Menezes e Mauricio Ayer. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

- _____. "A questão da 'ordem' na música nova" [1963] in *Apoteose de Rameau e outros ensaios* (p.89-110). Trad. Flo Menezes e Mauricio Ayer. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- _____. "Apoteose de Rameau, ensaio sobre a questão harmônica" [1968] in *Apoteose de Rameau e outros ensaios* (p.171-253). Trad. Flo Menezes e Mauricio Ayer. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- RAHN, Jay. "Coordination of Interval Sizes in Seven-Tone Collections", *Journal of Music Theory*, Vol. 35, No. 1/2 (Spring - Autumn), p. 33-60, 1991.
- RAHN, John. *Basic Atonal Theory*. New York, Longman: 1980.
- RIPKE, Juliana. "Villa-Lobos, Tom Jobim e a Bossa Nova: uma análise comparativa de possíveis influências e conexões". *Anais do III Simpósio Villa-Lobos*, p.1-20. São Paulo: ECA/USP, 2017.
- ROEDERER, Juan G. *Introdução à Física e Psicofísica da Música*. Trad. para o português de Alberto Luis da Cunha. 1ª ed. 1ª reimpr. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2002.
- SALLES, Paulo de Tarso. *Villa-Lobos: Processos Composicionais*. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2009.
- _____. "A concisão modernista da *Seresta no. 9 (Abril)* de Villa-Lobos". *Revista do Instituto de Estudos Brasileiros*, Brasil, n. 59, p. 79-96, dez. 2014. São Paulo: 2014.
- _____. "Regiões Euler: um Estudo sobre Distância Tonal e Integração entre os Ciclos Octatônicos e Hexatônicos". *MUSICA THEORICA*, Revista da Associação Brasileira de Teoria e Análise Musical, p. 1-23. Salvador: 2016.
- SALLMEN, Mark. "Exploring Tetrachordal Voice-Leading Spaces Within and Around the MORRIS Constellation". *Society for Music Theory*. Volume 17, Number 4, December 2011.
- SCHOENBERG, Arnold. *Style and Idea*. Belmont Music Publishers: University California Press: 1975.
- _____. *Fundamentos da Composição Musical*. Trad. para o português de Eduardo Seincman. 3ª ed. São Paulo: Edusp, 1996.
- _____. *Harmonia* [1922]. Trad. para o português de Marden Maluf. São Paulo: Editora da Unesp, 2001.
- SCOTTO, Ciro. "Reexamining PC-Set Multiplication, Complex Multiplication, and Transpositional Combination to Determine Their Formal and Functional Equivalence". *Perspectives of New Music*, Vol. 52, No. 1 (Winter 2014), pp. 134-216

Simpósio Internacional Villa-Lobos. Programa do evento realizado entre 16 e 21 de nov. de 2009. São Paulo: Museu de Arte de São Paulo (MASP), 2009.

SLONIMSKY, Nicolas. *Thesaurus of Scales and Melodic Patterns* [1947]. New York: Amsco Publications, 1986.

SOLOMON, Larry. "The Table of Pitch Class Sets", 2005. Disponível em <<http://solomonsmusic.net/pcsets.htm>>

SOUZA, Rodolfo C. de. "Introdução às teorias analíticas da música atonal", in: BUDASZ, Rogério (org.). *Pesquisa em Música no Brasil: Métodos, domínios, perspectiva*, vol.1. Goiania: ANPPOM, 2009, p.122-53.

_____. "Hibridismo, Consistência e Processos de Significação na Música Modernista de Villa-Lobos", *Ictus - Periódico do PPGMUS/UFBA*, vol. 11, nº 2, 2010, p. 151-99.

SOUZA LIMA, João. *Comentários Sobre a Obra Pianística de Villa-Lobos*. Rio de Janeiro: MEC, Museu Villa-Lobos, 1969.

STRAUS, Joseph N. *Remaking the Past: Musical Modernism and the Influence of the Tonal Tradition*. Cambridge, Massachusetts, and London: Harvard University Press, 1990.

_____. *Introduction to Post Tonal Theory*. 3ª ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2005.

_____. "Harmony and Voice Leading in the Music of Stravinsky". *Music Theory Spectrum*, vol. 36, nº 1, 2014, p. 1–33.

STEWART, Ian. *Uma História da Simetria na Matemática*, Ed. Brasileira. Rio de Janeiro/RJ: Jorge Zahar Editora Ltda, 2012.

TARASTI, Eero. *Heitor Villa-Lobos. The Life and Works, 1887-1959*. Carolina do Norte: MacFarland & Company, 1995.

TONI, Flávia C. *Mario de Andrade e Villa-Lobos*. São Paulo: Centro Cultural São Paulo, 1987.

TRAVASSOS, Elisabeth. *Modernismo e Música Brasileira*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2000.

TYMOCZKO, Dmitri. "Scale Networks in Debussy", *Journal of Music Theory* 48(2). 2007: p.215-92.

_____. "Generalizing Musical Intervals". *Journal of Music Theory* 53:2, Fall 2009.

- _____. *A Geometry of Music: Harmony and counterpoint in the extended common practice*. New York, NY: Oxford University Press, Inc., 2011.
- VILLA-LOBOS, Heitor. *Estudo Técnico Estético e Psicológico*. 1950.
- _____. “Música de papel, que nasce do papel e morre no papel” in: *Presença de Villa-Lobos*. Vol. 2. p.95-96. Museu Villa-Lobos: Rio de Janeiro, 1966a.
- _____. “Sobreviverá a Música?” in: *Presença de Villa-Lobos*. Vol. 2. p.101-105. Museu Villa-Lobos: Rio de Janeiro, 1966b.
- VILLA-LOBOS, SUA OBRA. 2ª ed. MEC, DAC, Museu Villa-Lobos, Programa de Ação Cultural, 1972.
- VISCONTI, Ciro. *Simetria nos Estudos para Violão de Villa-Lobos*. Jundiaí, Paco Editorial: 2016.
- VOLPE, Maria A. “O Manuscrito P38.1.1 e a “tabela prática” de Villa-Lobos”. *Revista Brasileira de Música – Programa de Pós-Graduação em Música – Escola de Música da UFRJ*, Rio de Janeiro, v. 24, n. 2, p. 299-309, Jul./Dez. 2011.
- WEBERN, Anton. *O caminho para a Música Nova* [1960]. Trad. Carlor Kater. São Paulo: Editora Novas Metas, 1984.
- WEYL, Hermann. *Simetria* [1952]. Trad. De Victor Baranauskas. São Paulo: Edusp, 1997.
- YUST, Jason. “Applications of DFT to the Theory of Twentieth-Century Harmony”. T. Collins et al. (Eds.): *MCM 2015*, LNAI 9110, pp. 207–218. Springer International Publishing, Switzerland: 2015.
- ZUBEN, Paulo. *Ouvir o som*. São Paulo: Ateliê Editorial, 2005.